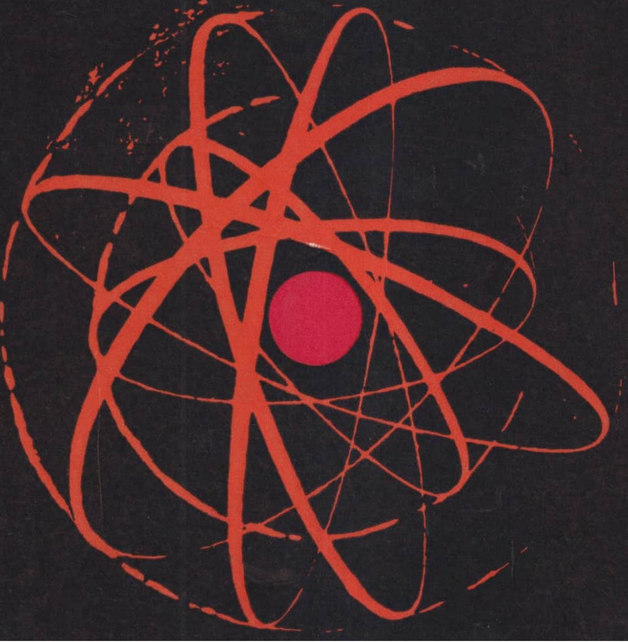
DIE NEUE PHYSIK

Die grundlegenden
Prinzipien der modernen Physik
im Überblick



Boris Nikolajewitsch Iwanow

DIE NEUE PHYSIK

Die grundlegenden Prinzipien der modernen Physik im Überblick

Volk und Wissen

Volkseigener Verlag Berlin

1966

Titel der Originalausgabe:
Б. Н. ИВАНОВ
НОВАЯ ФИЗИКА
(Обзор основных принципов современной физики)
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
Москва 1963

B. N. Iwanow
DIE NEUE PHYSIK
Die grundlegenden Prinzipien der modernen Physik
im Überblick
Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR
Moskau 1963

Übersetzt von Rudolf Plötz

Umschlag: Manfred Behrendt
Typografie: Atelier Volk und Wissen Berlin
ES 10 C · Bestell-Nr. 02 23 01-1 · Preis: 5,60 · Lizenz-Nr. 203 · 1000/65 (E)
Satz und Druck: Grafischer Großbetrieb Völkerfreundschaft, Dresden III 9 5 1201

Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis der benutzten Größensymbole

Längen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{r}, \mathfrak{l}, s, \tau$ (in der Quantentheorie $\mathfrak{q}_i$)
Zeit t
Geschwindigkeit $\mathfrak{v}, \mathfrak{V}, c$
Masse m, M
Kraft $\mathfrak{F}$
Energie $W, \mathfrak{U}$
Beschleunigung $\mathfrak{a}$
Impuls $\mathfrak{g}, \mathfrak{G}$ (in der Quantentheorie $\mathfrak{p}$)
Drehimpuls $\mathfrak{P}$
Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$
Temperatur T, Θ
Kreisfrequenz ω
Periodendauer T
Ladung Q, e (Elementarladung)
elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$
elektrische Verschiebung $\mathfrak{D}$
magnetische Induktion $\mathfrak{B}$
magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$
Raumladungsdichte ϱ
elektrische Stromdichte $\mathfrak{S}$
Potential φ
Entropie S
Wahrscheinlichkeit w

Bemerkung: Operatoren sind durch ein Dach gekennzeichnet, z. B. $\hat{E}$

Vorwort zur deutschen Übersetzung

Das vorliegende Buch ist kein Lehrbuch im üblichen Sinne. Es will dies auch nicht sein. Der Autor setzt bei seinen Lesern eine physikalische Bildung voraus. Auf einzelne Fakten des Systems der Wissenschaft Physik wird nicht eingegangen. Es wird auch die Kenntnis der für die Physik typischen mathematischen Methoden vorausgesetzt. Dabei ist es gleichgültig, nach welchem System und in welcher Organisationsform sich der Leser die Kenntnisse im einzelnen erworben hat.
Der Autor bemüht sich, das für die Physik Allgemeine darzustellen. Er deckt die durchgehenden Gedanken auf, betont das in verschiedenen Erscheinungen Gemeinsame, beschreibt die Denkmodelle, ihre Anwendungsbereiche und die Grenzen ihrer Verwendbarkeit. So gewinnt er eine Gliederung, die dem modernen Stand der Wissenschaft entspricht.
Der Wert dieses Büchleins liegt darin, daß es in knapper Weise die Hauptgedanken der theoretischen Physik darlegt. Der Autor beruft sich auf das neunbändige Werk des „Lehrgangs der Theoretischen Physik" von L. D. Landau und E. M. Lifschiz, das in der Sowjetunion einen breiten Leserkreis gefunden hat und auch in der Deutschen Demokratischen Republik nicht unbekannt ist. Im vorliegenden Buch ist bewußt nur die qualitative Darstellung gewählt worden. Wenige Sätze, hauptsächlich in den Kapiteln „Relativistische Mechanik" und „Statistische Physik", sind wörtlich übernommen. Sie sind durch Anführungsstriche gekennzeichnet.
Was bis jetzt über Form und Inhalt des vorliegenden Buches gesagt wurde, grenzt im gewissen Sinne den angesprochenen Leserkreis ein. Es ist für einen weiten Kreis von naturwissenschaftlich und technisch Gebildeten gedacht.
Für den Studenten ist das Lesen dieser Kapitel von Nutzen, denn ihm wird die Richtung gewiesen, worauf er beim Studium besonders zu achten hat. Liest man das Buch nach Abschluß des Studiums, schafft es nach unserer Auffassung einen guten Überblick. Es ist deshalb zur Vorbereitung auf eine Prüfung besonders gut geeignet. Nutzen von diesem Buch hat aber auch derjenige, der sein Studium vor Jahren abgeschlossen hat. Er lernt sicher seine Kenntnisse in neuem Zusammenhang sehen. Die wichtigste Rolle spielen hier solche übergreifenden Gedanken, die bei der Kleinarbeit des Studiums oft nicht so beachtet werden.

Der Verlag denkt bei der Herausgabe dieses Büchleins besonders an die Lehrer für Physik an den zehn- und zwölfklassigen Oberschulen, an die Studenten der pädagogischen Institute, der Pädagogischen Hochschule und der Universitäten, an die Absolventen dieser Einrichtungen und an die Lehrer, welche schon viele Jahre unterrichten. Gerade für diejenigen, die den Stoff lehren sollen, sind diese zusammenfassenden Darlegungen neben dem eigentlichen Faktenstudium von großem Wert.
Es ist wohl nicht ganz zutreffend, diese Arbeit als eine populärwissenschaftliche zu bezeichnen. Wer diese Ausführungen gründlich verstehen will, muß Physik studiert haben. Darüber hinaus werden die Mathematiker, die Chemiker und die Biologen dieses Büchlein sicher vom wissenschaftsmethodologischen Aspekt mit Interesse lesen. In diesem Sinne ist es zu wünschen, daß auch die Vertreter aller anderen Naturwissenschaften zum Leserkreis dieser Arbeit gehören, zumal die physikalischen Denk- und Arbeitsmethoden immer mehr Eingang in diese Wissenschaften finden.
Die deutsche Übersetzung ist durch einige Erläuterungen von Begriffen, z. B. der Parität, ergänzt worden, deren Kenntnis nicht allgemein vorausgesetzt werden kann.
Auf Literatur zum vertieften Studium wird hingewiesen. In der Wahl der Symbole für die physikalischen Größen richteten wir uns nach dem Internationalen Einheitensystem, welches in Auszügen seinen Niederschlag im TGL-Standard 0-1304 gefunden hat.
Im vorliegenden Buch wird nicht zwischen der physikalischen „Größe“ und der „Observablen“ unterschieden.
Der Begriff „Observable“ wird bekanntlich von einigen Quantentheoretikern mit Recht benutzt, weil die „Größe“ in der Quantenphysik andere Eigenschaften besitzt als die Größe in der Nicht-Quantenphysik. Wir haben den Text des sowjetischen Autors in dieser Richtung nicht verändert, möchten aber auf den Sachverhalt aufmerksam machen.

Rudolf Plötz

Einführung

Jeder physikalische Prozeß läuft in *Raum* und *Zeit* ab. Das ist insbesondere daraus zu ersehen, daß ein beliebiges physikalisches Gesetz aus einem beliebigen Gebiet physikalischer Erscheinungen — direkt oder indirekt — Raum-Zeit-Beziehungen in Form von Längen und Zeitintervallen enthält.
Die Erfahrung lehrt, daß Raum und Zeit bestimmte *Symmetrieeigenschaften* besitzen, welche die Grenzen der in ihnen ablaufenden physikalischen Prozesse festlegen. Als eine solche Symmetrieeigenschaft äußert sich die sogenannte Homogenität von Raum und Zeit.
Betrachten wir die Eigenschaft der Homogenität der Zeit. Sie besteht darin, daß der Ablauf physikalischer Vorgänge unter beliebigen Bedingungen immer derselbe ist, wenn er auch zu verschiedenen Zeiten beobachtet wird. So hat Archimedes zu seiner Zeit die Gesetze für das Schwimmen von Körpern entdeckt. Heute kann sie jeder von uns leicht nacherleben, indem er die entsprechenden Beobachtungsbedingungen schafft.
Die physikalische Gleichartigkeit verschiedener Zeitpunkte, eben die Homogenität der Zeit, erlegt dem Ablauf eines Vorganges Grenzen auf, die in der Existenz des Energieerhaltungssatzes zum Ausdruck kommen.
Die Homogenität des Raumes besteht darin, daß eine physikalische Erscheinung unter beliebigen Bedingungen an verschiedenen Stellen des Raumes gleichartig auftritt. So liefert ein und derselbe physikalische Versuch die gleichen Ergebnisse, gleichgültig wo er aufgebaut ist.
Die physikalische Gleichartigkeit verschiedener Punkte des Raumes, die Homogenität des Raumes genannt, erlegt dem Ablauf eines Vorganges Grenzen auf, die in der Existenz des Impulserhaltungssatzes (Erhaltungssatz der Bewegungsgröße) zum Ausdruck kommen.
Wenn diese scheinbar so offenkundigen Symmetrieeigenschaften des Raumes und der Zeit nicht existieren würden, wäre es sinnlos, sich mit der Wissenschaft und der Erkenntnis zu beschäftigen. Stellen Sie sich vor, wozu das Fehlen der Homogenität des Raumes führen würde — die Gesetze der Physik wären in Moskau nicht die gleichen wie in Tula, und in Woronesh gäbe es wieder andere. Die Nichtexistenz der Homogenität der Zeit würde dazu führen, daß die Menschheit nicht in der Erkenntnis

fortschreiten könnte. Das gestern entdeckte Gesetz für das Schwimmen der Körper wäre heute schon falsch und müßte neuerdings untersucht werden. Morgen würde es dagegen schon wieder nicht mehr stimmen.
Da die Gesetze der Erhaltung von Energie und Impuls (für physikalische Objekte) aus den allgemeinsten Eigenschaften der Symmetrie von Raum und Zeit folgen, sind diese Erhaltungssätze *universal*. Sie gelten in der Physik der Elementarteilchen, in der Physik der kosmischen Objekte, in der Physik des Atoms und in der des festen Körpers — und sie gehören zu den wenigen allgemeinsten Gesetzmäßigkeiten, die die Grundlage der modernen Physik sind. Man kann keine physikalischen Vorgänge untersuchen, wenn nicht ein Bezugssystem da ist, ein Körper, auf den man sich bezieht, nach dem man sich orientiert, relativ zu dem man die Beobachtung durchführt. Stellen Sie sich bitte vor, auf einer flachen und eintönigen Ebene fahre weit von Ihnen entfernt auf einer Landstraße ein Kraftfahrzeug. Auf den ersten Blick ist gar nicht zu sagen, ob sich das Auto bewegt oder nicht. Nur durch die Wahl eines unverkennbaren Bezugspunktes (Telegrafenmast) und durch konzentriertes Beobachten des Autos über eine gewisse Zeit hinweg ist es möglich, eine Änderung des Abstandes zwischen Auto und Bezugspunkt festzustellen. Der Begriff „Bezugssystem" ist fundamental in der Physik.
Der Experimentator kann zur Untersuchung einer beliebigen physikalischen Erscheinung willkürlich einen beliebigen Bezugskörper auswählen. Selbstverständlich darf der Charakter der Gesetzmäßigkeit einer gegebenen Erscheinung aber nicht von unserer Willkür in der Wahl des Bezugssystems abhängen. Die Erfahrung bestätigt dies nur für eine sehr spezielle Klasse von Bezugssystemen, besonders für eine unbegrenzte Anzahl solcher Bezugssysteme, die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Diese Tatsache trägt in der Physik die Bezeichnung „Relativitätsprinzip".
Eine räumlich-zeitliche Beschreibung eines Vorganges mit Hilfe der Begriffe Abstand und Zeitintervall wird nur möglich nach Festlegung eines Bezugssystems. Unsere tägliche Erfahrung zeigt, daß die Abstände und die Zeitintervalle bei der Untersuchung eines physikalischen Vorganges unverändert bleiben, wenn von einem zum anderen Bezugssystem übergegangen wird. Zum Beispiel benutzt der Navigationsoffizier eines Flugzeugs, wenn er die Route des bevorstehenden Fluges auf der Karte studiert, ein Lineal mit Maßstab und eine Uhr. Während des Fluges verwendet er unbesorgt diese gleichen Meßgeräte, ohne daran zu denken, daß sich die Länge seines Lineals verändert habe oder der Lauf seiner Uhr ein anderer geworden sein könnte. Und der Navigationsoffizier hat in hohem Grade recht.
Die größte Entdeckung der Physik des XX. Jahrhunderts ist die, daß es

in der Natur eine maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit für alle Vorgänge gibt. Diese ist gleich der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.
Die Erfahrung zeigt, daß, solange die Geschwindigkeiten der untersuchten Körper klein im Vergleich zu dieser Grenzgeschwindigkeit sind, die Eigenschaften der Längen und der Zeitintervalle beim Übergang von dem einem zu einem andern Bezugssystem als unverändert angenommen werden dürfen. Die Mechanik, welche die Eigenschaften von bewegten Körpern unter diesen Bedingungen untersucht, wird „klassische Mechanik" genannt.
Die Geschwindigkeiten aller von uns unter irdischen Bedingungen und im Sonnensystem beobachteten Körper, einschließlich der künstlichen Erdsatelliten, sind unermeßlich klein im Vergleich zu der Grenzgeschwindigkeit. Ihre Bewegungen unterwerfen sich den Gesetzen der klassischen Mechanik mit hoher Genauigkeit. Beim Übergang zu Geschwindigkeiten von Körpern, die in der Größenordnung der Grenzgeschwindigkeit liegen, ändern sich die Bewegungseigenschaften; dabei sind die Längen und die Zeitabschnitte durchaus abhängig von der Geschwindigkeit dieser Bewegung. Die auf diesen Annahmen aufbauende Mechanik heißt „relativistische Mechanik".
Natürlich ist die relativistische Mechanik allgemeiner, und im Sonderfall kleiner Geschwindigkeiten geht sie in die klassische Mechanik über. Die klassische Mechanik wird nicht als falsch abgelehnt, aber ihre Genauigkeit wird für den Fall großer Geschwindigkeiten erhöht.
Auf Bewegungen mit Geschwindigkeiten in der Größenordnung der Grenzgeschwindigkeit trifft man bei der Untersuchung schneller atomarer Teilchen. Die Erfahrung zeigt, daß ihre Bewegung tatsächlich den Gesetzen der relativistischen Mechanik gehorcht.
Neben den Körpern gibt es in der Natur physikalische Objekte völlig anderer Art – Felder. Das Feld kann folgerichtig nur auf der Grundlage relativistischer Vorstellungen beschrieben werden. Das Feld kann man im allgemeinen nicht wie einen Körper als Bezugssystem verwenden.
Hier stieß der Mensch bei der Erforschung der Natur zum ersten Male auf solch eine physikalische Realität, die auf unsere Sinnesorgane nicht unmittelbar Wirkungen ausüben kann.
Die Eigenschaften des Feldes werden an dem Verhalten von Körpern untersucht, die sich in ihm befinden. Zwei Felder zählen als physikalisch gleich, wenn sie auf einen gewissen Körper ein und dieselbe Wirkung ausüben. So vermochte es der Mensch, durch das Untersuchen des Verhaltens sichtbarer mechanischer Objekte, der Körper, die Eigenschaften unsichtbarer nichtmechanischer Objekte, der Felder, zu erkennen. Das ist ein leuchtendes Beispiel für die Erkenntnisfähigkeit des Menschen.
Unter gewöhnlichen Bedingungen haben wir es mit zweierlei Feldern zu

tun, dem elektromagnetischen und dem Gravitationsfeld. Die Eigenschaften der elektromagnetischen Felder sind einem breiten Leserkreis in gewissem Maße vom Physikunterricht an der allgemeinbildenden Oberschule her bekannt. Die Eigenschaften von Gravitationsfeldern, auch Schwerefelder genannt, sind weniger bekannt.

Vor allem muß bemerkt werden, daß Gravitationsfelder nur für Objekte kosmischen Maßstabs wesentlich sind. Für Elementarteilchen ist das Verhältnis der Intensität ihrer Gravitationswechselwirkungen zu der Intensität ihrer elektromagnetischen Wechselwirkung angenähert $1:10^{40}$.

Gravitationsfelder nehmen in der Natur eine völlig außergewöhnliche Stellung ein. Erstens werden Gravitationsfelder von allen physikalischen Objekten geschaffen. Quellen dieser Felder sind nicht nur Teilchen und Mikrokörper, sondern auch Felder, unter ihnen selbst das Gravitationsfeld. Zweitens bilden und bestimmen sie gleichsam die geometrische Struktur des Raumes und der Zeit.

Gravitationsfelder in den gigantischen Maßstäben des zu beobachtenden Weltalls haben die Eigenschaft, sich im Laufe der Zeit mit der räumlichen Struktur des Weltalls zu verändern — die Welt dehnt sich gleichsam aus. Der grandiose Effekt der „Ausdehnung" des Weltalls ist experimentell entdeckt worden!

Gehen wir von der Betrachtung sehr großer Raumbereiche zur Betrachtung der Eigenschaften von Bewegungen in außerordentlich kleinen Raumbereichen über.

Vorgänge an Objekten mit außergewöhnlich kleiner Masse (Teilchen) in sehr kleinen Raumbereichen mit Durchmessern von etwa 10^{-10} m nennt man atomare Vorgänge.

Bei der Erforschung der atomaren Vorgänge hat der Mensch aufs neue die Leistungsfähigkeit seines Verstandes bewiesen. Die Welt des Atoms ist für uns nicht sichtbar, nicht hörbar, nicht fühlbar; die Abmessungen der Atome sind so klein, daß sie sogar für die Phantasie unzugänglich sind. Und trotzdem verstand es der Mensch, ein Bild zu schaffen, das Bild des Atoms, er vermochte es, seine Gesetzmäßigkeiten zu ergründen. Wie brachten die Forscher so etwas fertig?

Die physikalische Wissenschaft hat es nur mit direkt oder indirekt beobachtbaren Gegenständen zu tun. Jede Beobachtung setzt eine Wechselwirkung des Gegenstandes mit äußeren Bedingungen voraus. Das physikalische Objekt zeigt seine Eigenschaften nur bei Wechselwirkungen mit der Umwelt. Um alle Eigenschaften des Objektes ergründen zu können, muß man es verschiedenen Bedingungen unterwerfen, und dabei geschieht es oft, wie im Falle atomarer Vorgänge, daß das Objekt scheinbar für uns direkt widersprüchliche, einander ausschließende Eigenschaften offenbart. Dieses paradoxe Beieinander „unvereinbarer" (vom alltäg-

lichen Gesichtspunkt) Eigenschaften ist ein charakteristischer Zug atomarer Erscheinungen.
Um das Dargelegte zu illustrieren, bringen wir folgende Analogie. Für jeden von uns ist ein beliebiger anderer Mensch ein gewisses „Ding an sich", er ist ein gewisser Unbekannter so lange, bis er mit uns in Kontakt, in Wechselwirkung, tritt. Um den konkreten Menschen kennenzulernen, seine Charakterzüge und andere Eigenschaften, muß man ihn unter verschiedenen Bedingungen, in verschiedenen Situationen beobachten. Dabei kommt es durchaus vor, daß das Verhalten (die Eigenschaften) des Menschen (wie des Objekts) unter den verschiedenen Bedingungen so unterschiedlich ist, daß uns die Vorstellung von dem Beieinander aller Eigenschaften in einer Person merkwürdig erscheint. Genauso war es bei der Erforschung des Atoms.
Wechselwirkungen, wie sie bei Beobachtungen von Mikroobjekten geschehen, sind immer mit einer Störung des zu untersuchenden Systems verbunden. Wenn die Störung der untersuchten Größe klein ist und unberücksichtigt bleiben kann, gehört die Erscheinung zur Makrophysik. Wenn man aber auf einen Grenzwert der Störung Rücksicht nehmen muß, der mit der Existenz des „Wirkungsquantums" zusammenhängt, dann gehört die zu untersuchende Erscheinung zur Mikrophysik.
Es ist wahrhaftig ein Triumph des menschlichen Geistes, in der Natur das Vorhandensein einer „kleinsten universellen Störgröße" entdeckt zu haben, der man bei keinen Beobachtungen ausweichen kann.
Ein Quantenobjekt kann man nicht beobachten, ohne an ihm eine ernste Störung zu verursachen. Bei Berücksichtigung dieser Tatsache ist es weniger verwunderlich, daß für Quantenobjekte (z. B. Atome und Moleküle) Wahrscheinlichkeitsgesetze charakteristisch sind.
Wenn man zum Beispiel bei Messungen einer bestimmten Größe für gleiche Objekte der klassischen Mechanik gleiche Voraussetzungen schafft, werden sie alle das gleiche Resultat liefern. Wenn man aber bei ähnlichen Messungen für gleiche Quantenobjekte gleiche Voraussetzungen schafft, die mit der Natur der Mikroobjekte vereinbar sind, werden sie alle gewisse bestimmte, aber verschiedene Resultate liefern. Das Naturgesetz besteht darin, daß jedes Meßergebnis in einem bestimmten Schwankungsbereich liegt.
Quantenvorgänge stellen kompliziertere Forderungen an unsere Vorstellungskraft als klassische Vorgänge. Das Verhalten von Quantenobjekten trägt unter den einen Bedingungen die Züge von Wellenprozessen, unter anderen Bedingungen die Züge von Prozessen mit klassischen Teilchen.
Wenn in der gewöhnlichen Mechanik einem sich bewegenden Körper in einem beliebigen Zeitpunkt eine bestimmte Lage im Raum und eine bestimmte Geschwindigkeit zugeordnet werden kann, ist das für Quanten

nicht so. Einem Quant kann zu einem bestimmten Zeitpunkt nur entweder eine bestimmte Ortskoordinate oder eine bestimmte Geschwindigkeit zugeordnet werden.
In den außerordentlich kleinen Raumbereichen, die der Mensch schon erforscht hat, bleiben alle Symmetrieeigenschaften von Raum und Zeit erhalten, auch ihre Homogenität. Folglich werden für Quantenobjekte auch die Erhaltungssätze von Energie und Impuls Geltung haben.
Die Homogenität des Raumes erweist sich als eine der wichtigsten Symmetrieeigenschaften. Unser Raum besitzt jedoch noch eine Symmetrieeigenschaft – die Symmetrie zwischen links und rechts. Der im Spiegel reflektierte Raum ist vollkommen äquivalent dem ursprünglichen.
Wir haben schon gesehen, daß mit den Symmetrieeigenschaften von Raum und Zeit bestimmte Erhaltungssätze verknüpft sind. Der Spiegelsymmetrie des Raumes entspricht in der Nicht-Quantenphysik kein neues Erhaltungsgesetz, in der Quantenphysik taucht so eine Beziehung aber auf, das sogenannte Gesetz der Erhaltung der Parität.
Der Begriff Parität[1] charakterisiert den Zustand von Quantenobjekten.
Aus der alltäglichen Erfahrung wissen wir, daß die Zeit nur in einer Richtung läuft. Man kann zum Beispiel nicht wieder jung werden. Nichtsdestoweniger sind solche Vorgänge in der Nicht-Quantenphysik erlaubt. Nur die Quantenphysik kann eine Begründung für das Fehlen der Isotropie der Zeit in der Natur geben – hier sind Vorwärts- und Rückwärtsgang der Zeit nicht äquivalent.
In sehr kleinen Raumgebieten gehorchen Feld und Teilchen den Gesetzmäßigkeiten der Quantentheorie. Das Quantenfeld ist wie jedes andere Feld ein relativistisches Objekt. In der Physik gibt es zwei grundlegende Begriffe: Teilchen und Felder. Die Synthese der relativistischen und der Quantenvorstellungen verwischte den Unterschied zwischen den Begriffen Teilchen und Felder und ermöglichte die Entdeckung einer der erstaunlichsten Eigenschaften der Natur, nämlich neben der Existenz der Teilchen die der sogenannten Antiteilchen. Wir möchten bemerken, daß die Existenz der Antiteilchen theoretisch vorausgesagt worden war, sie ist dann experimentell bestätigt worden.
Eine der erstaunlichsten Eigenschaften der Teilchen-Antiteilchen-Paare ist die, daß sie entstehen und verschwinden können. Paare von Teilchen und Antiteilchen, die eine Masse besitzen, können verschwinden, indem sie sich in Teilchen verwandeln, welche keine Masse besitzen. Umgekehrt

[1] Hinweis des Übersetzers:
Unter Parität wird das Verhalten der Wellenfunktion ψ bei der Inversion des Raumes verstanden. Der Inversionsoperator $\hat{I}$ (oder auch Paritätsoperator) bewirkt laut Definition
$\hat{I}\, \psi(\mathfrak{r}) = \psi(-\mathfrak{r})$.
Er besitzt die Eigenwerte $\lambda = \pm 1$.
(Vgl. u. a. Sokolow, Loskutow, Ternow: Quantenmechanik, Berlin: Akademie-Verlag 1964.)

können Teilchen ohne Masse sich in Paare von Teilchen und Antiteilchen mit Masse verwandeln.
Die Quantenerscheinungen in Raumbereichen der Größenordnung 10^{-10} m bis 10^{-15} m werden von der modernen Physik ausgezeichnet erklärt. Beim Übergang zu noch kleineren Raumbereichen werden die Physiker in ihren Aussagen unsicher. Die Untersuchung von Erscheinungen in Räumen dieser Größenordnung ist gerade erst in Angriff genommen worden, wir nennen die zugehörige Wissenschaft die *Physik der Elementarteilchen.*
In diesem Gebiet der Physik ist trotz der sehr schwierigen experimentellen Bedingungen und der außerordentlich hohen Kosten eines Experiments in relativ kurzer Zeit eine Menge empirischen Materials angehäuft worden. Es ist eine gelungene und aussagekräftige Klassifikation der bekannten Elementarteilchen gefunden worden, die eine theoretische Voraussage der Existenz einer Reihe anderer, bisher noch unbekannter Teilchen erlaubt. Die vorausgesagten Teilchen werden jetzt eins nach dem anderen experimentell entdeckt. Es sind insgesamt schon über dreißig Elementarteilchen bekannt.
Es ist auch eine Klassifikation der Wechselwirkungen der Elementarteilchen gefunden worden. Verblüffende innere Eigenschaften der Symmetrie und damit im Zusammenhang stehende neue Typen von Erhaltungssätzen hat man bei den Elementarteilchen entdeckt. Es ist entdeckt worden, daß für einige Arten von Wechselwirkungen der Elementarteilchen eine Anzahl bekannter Erhaltungssätze nicht gilt. So weiß man zum Beispiel, daß das Gesetz von der Erhaltung der Parität bei den sogenannten schwachen Wechselwirkungen keine Gültigkeit besitzt.
Wir haben schon viele Beweise dafür erhalten, was der menschliche Verstand theoretisch zu leisten vermag, jedoch nicht weniger großartig sind die Errungenschaften der heutigen Experimentalphysiker. Vor ungefähr 30 Jahren war zum Beispiel theoretisch die Existenz eines sehr merkwürdigen Elementarteilchens vorausgesagt worden — des Neutrinos. Es besitzt keine Masse, bewegt sich ständig mit der universellen Grenzgeschwindigkeit und tritt mit einem Stoff praktisch nicht in Wechselwirkung. Zur Illustration der ergründeten Eigenschaft des Neutrinos sei folgendes Beispiel angeführt: Wenn ein Raum mit einer Ausdehnung, der Millionen Male die Entfernung zwischen Erde und Sonne übertrifft, mit Gußeisen ausgefüllt wäre, würde ein dort hindurchfliegendes Neutrino nur *einen* Zusammenstoß erleiden. Das Neutrino ist fähig, die Erde, die Sonne und ganze Milchstraßensysteme zu durchdringen. Es schien, als ob der Mensch niemals das Neutrino unmittelbar würde nachweisen können — und doch haben es Wissenschaftler fertiggebracht. Der Erfolg, mit einem physikalischen Experiment dieses Teilchen zu entdecken,

gehört zu den großen Triumphen im Erkenntnisprozeß der Menschen. Schon jetzt beginnt man, wesentliche Beziehungen zwischen der Physik der Elementarteilchen und der Physik des Kosmos zu untersuchen.
Systeme einiger Elementarteilchen, und zwar der Nukleonen, können stabile Gestalt annehmen, die von Atomkernen. Die Zahl der verschiedenen Arten von Kernen in der Natur ist begrenzt. Ein Atomkern nimmt einen Raum von ungefähr 10^{-15} m Durchmesser ein. Die Bildung von Kernen aus Nukleonen ist unter Bedingungen des „Sternzustandes" der Materie möglich, die im Innern gewisser Sterne herrschen.
Unter gewöhnlichen irdischen Bedingungen besteht der Stoff aus Atomen und Molekülen. Makroskopische Körper stellen Anhäufungen einer ungeheuren Anzahl von Atomen und Molekülen dar. Makroskopische Körper haben sehr vielfältige Eigenschaften: elastische und thermische, elektrische, magnetische, chemische, optische, sie können im festen, flüssigen und gasförmigen Zustand existieren. Alle diese Eigenschaften erklären sich aus den Eigenschaften der Atome und der Art der Bindungen zwischen ihnen.
Es besteht kein Zweifel darüber, daß auch *die Erscheinungen des Lebens* eine vollständige Erklärung im Rahmen der bestehenden physikalischen Vorstellungen finden müssen.
Aus dem Dargelegten ist hinreichend klar zu ersehen, daß die physikalischen Begriffe und Vorstellungen die einfachsten, allgemeinsten und tiefgründigsten sind. Mit ihrer Hilfe kann man die ganze Natur durch eine einheitliche Forschungsmethode untersuchen.

Bevor wir zum eigentlichen Gegenstand des Buches übergehen, setzen wir einige Bemerkungen an den Anfang.
Die Physik stellt sich das Ziel, die physikalischen Gesetze zu finden, sie will die Abhängigkeit zwischen den die Erscheinungen charakterisierenden Größen erfassen.
Die Physik braucht für ihre eigenen Ableitungen und Schlußfolgerungen Verfahren und Methoden der Mathematik. Sie unterscheidet sich aber scharf von der letzteren, weil sie eine direkte Verbindung mit den experimentellen Ergebnissen besitzt. Darum besteht die Physik aus zwei Wissenschaften, der Experimentalphysik und der theoretischen Physik.
Im Laufe der Entwicklung erarbeitete die Physik einige allgemeine Prinzipien wissenschaftlichen Vorgehens:
1. Die Wissenschaft hat es mit beobachtbaren Vorgängen zu tun.
2. Jedes Objekt offenbart seine Eigenschaften nur bei Wechselwirkungen mit etwas außer ihm Vorhandenen (mit sogenannten äußeren klassischen Bedingungen).

1. Die klassische Mechanik

Raum und Zeit

Es ist von vornherein klar, daß ein physikalischer Prozeß innerhalb von Raum und Zeit abläuft. Das ist schon daraus zu ersehen, daß in allen Bereichen der Physik jedes Gesetz offen oder verdeckt, explizit oder implizit, Raum-Zeit-Beziehungen in Form von Längen oder Zeitintervallen enthält.

Längen

Längen werden mit Meßgeräten gemessen, deren grundlegende Eigenschaft darin besteht, daß zwei einmal übereinstimmende Abstandsmarken immer gleich zueinander bleiben, d. h. bei jeder folgenden Prüfung wieder übereinstimmen. Körper, aus denen man solche Meßgeräte herstellen kann, heißen fest.

Zeitintervalle

Zeitabstände mißt man mit Uhren, wobei deren Rolle jedes beliebige System erfüllen kann, welches sich periodisch wiederholende Prozesse vollführt. Ein Grundzug der Vorstellungen der klassischen Mechanik über die Abmessungen von Körpern und die Zeitintervalle ist der, daß sie *absolut* seien. Das soll heißen, ein hinreichend gutes Meßgerät zeigt immer ein und denselben Meßwert, unabhängig davon, wie es sich relativ zum Beobachter bewegt; zwei Uhren, mit gleichem Gang und einmal in Übereinstimmung gebracht, zeigen immer ein und dieselbe Zeit, unabhängig davon, wie sie sich bewegen.

Raum und Zeit als physikalische Größen

Raum und Zeit sind solche physikalischen Größen wie alle anderen, nur sind sie außerordentlich wichtig und wesentlich. Wenn die Eigenschaften des Raumes und der Zeit untersucht werden sollen, muß man die Bewegung von Körpern beobachten, die sich in ihm befinden. Indem wir den Charakter der Bewegung der Körper studieren, lernen wir die Eigenschaften des Raumes und der Zeit kennen.

Der dreidimensionale Charakter des Raumes

Zur vollkommenen Bestimmung der Lage eines Punktes reicht die Angabe nur einer Länge nicht. Die Erfahrung lehrt, daß zur Ortsbestimmung eines gewissen Punktes in bezug zu allen anderen die Angabe von drei Längen nötig ist, deren Zahlenwerte die *Koordinaten* des Punktes genannt werden. Darum heißt dieser Raum dreidimensional. Drei Koordinaten bestimmen vollkommen die Lage eines Punktes relativ zu einem gewissen festen Körper, den man Bezugssystem nennt.

Der Raum ist homogen und isotrop

Wenn man den Charakter der Bewegung von Körpern untersucht, darf man weiterhin davon ausgehen, daß die Eigenschaften des Raumes in allen seinen Punkten gleich sind, in jedem Punkte wieder gleich nach allen Richtungen. Darum sagt man, der Raum ist homogen und isotrop. Diese Eigenschaften des Raumes äußern sich in den Gesetzen zur Erhaltung des Impulses (der Bewegungsgröße) und des Drehimpulses entsprechend.

Die Zeit ist homogen

Aus solchen Versuchen folgt außerdem, daß die verschiedenen Zeitpunkte bezüglich ihrer physikalischen Eigenschaften einander äquivalent sind, die Zeit ist also homogen. Diese Eigenschaft der Zeit äußert sich im Gesetz zur Erhaltung der Energie.
Die ganze Entwicklung der Wissenschaft Physik hat gezeigt, daß die Gesetze zur Erhaltung der Energie, des Impulses und des Drehimpulses, in denen sich die Eigenschaften von Zeit und Raum widerspiegeln, grundlegend und wichtig sind. Das geht auch aus der Tatsache hervor, daß die riesige Menge der uns bekannten physikalischen Gesetze aus einer sehr kleinen Anzahl allgemeinster Beziehungen abgeleitet werden kann. Zu diesen wenigen gehören auch die Erhaltungssätze.

Der Raum ist euklidisch

Ausführlicher beschäftigen wir uns mit den Erhaltungssätzen später. Jetzt weisen wir noch auf eine Eigenschaft des Raumes hin, nämlich auf die, daß er „*eben*" erscheint oder *euklidisch*, d. h., er gehorcht der Geometrie Euklids.[1]

Betrachtungen mit den eben dargelegten, auf experimentellem Wege gewonnenen Vorstellungen über Raum und Zeit sind bei einer sehr großen Zahl physikalischer Erscheinungen üblich. Diese Vorstellungen werden gewöhnlich *klassisch* genannt.

Der Massenpunkt

Wir gehen jetzt über zur Untersuchung der Bewegungseigenschaften des Massenpunktes. Der Massenpunkt ist das Denkmodell für einen Körper, bei dessen Bewegung man von seinen eigenen Abmessungen absehen kann. Dem Punkte ist die Masse des Körpers zugeordnet. Wenn Drehungen des Körpers oder Bewegung seiner einzelnen Teile gegeneinander berücksichtigt werden müssen, versagt dieses Denkmodell. Wie schon dargelegt worden war, sind zur vollkommenen Angabe der Lage eines Massenpunktes im Raume unbedingt drei Abstände nötig: die drei Koordinaten des Punktes.

Das Bezugssystem, die Koordinaten des Massenpunktes

Drei Koordinaten bestimmen die Lage eines Punktes relativ zu einem gewissen Bezugskörper vollständig. Wir werden mit diesem Bezugskörper ein kartesisches Koordinatensystem verknüpfen. Dann kann die Lage des Massenpunktes im Raum durch den Radiusvektor $\mathfrak{r}$ angegeben werden, dessen Komponenten auf den Achsen dieses Koordinatensystems gleich den kartesischen Koordinaten des Punktes x, y, z sind.[2]

Die klassische Bewegung

Nach den klassischen Vorstellungen über die Raum-Zeit-Eigenschaften der Bewegung befindet sich der Massenpunkt zu jedem Zeitpunkt an

[1] Wir möchten bemerken, daß die Frage nach der Geometrie des realen Raumes eine physikalische ist. Eine Antwort darauf kann das Experiment geben.

[2] Neben den kartesischen Koordinaten kann man auch beliebige andere benutzen, gewöhnlich wählt man die Koordinaten so aus, daß sich mit ihnen die Bewegung gut beschreiben läßt.

einem bestimmten Ort des Raumes mit bestimmten Koordinaten. Bei der Bewegung des Massenpunktes verändern sich seine Koordinaten. Dementsprechend kann man den Radiusvektor $\mathfrak{r}$ des Massenpunktes als Funktion der Zeit betrachten: $\mathfrak{r} = f(t)$.

Die Geschwindigkeit des Massenpunktes

Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Massenpunktes ist definiert

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt},$$

das ist die erste Ableitung des Radiusvektors nach der Zeit.

Die Beschleunigung

Die Beschleunigung $\mathfrak{a}$ wird bestimmt als

$$\mathfrak{a} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt}.$$

Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung können natürlich auch in Koordinatendarstellung angegeben werden.

Die Freiheitsgrade

Die Mechanik untersucht auch die Bewegung von Systemen von Massenpunkten. Die Anzahl der unabhängigen Koordinaten, die zur Beschreibung der Bewegung eines mechanischen Systems notwendig ist, wird Zahl der Freiheitsgrade dieses Systems genannt. Ein Massenpunkt besitzt offensichtlich drei Freiheitsgrade, ein System aus n Massenpunkten dann $3\,n$ Freiheitsgrade.

Die Lage des klassischen Massenpunktes

Wenn die Lage eines mechanischen Systems zu irgendeinem Zeitpunkt bekannt ist, kann man seine Lage auch für jeden anderen Zeitpunkt berechnen. Dabei erweist es sich, daß die Lage des Systems vollkommen bestimmt ist durch die Angabe der Ortskoordinaten und der Geschwindigkeit. Die Beschleunigung kann nicht mehr willkürlich gegeben werden.

sondern sie ist eine Funktion der Ortskoordinaten und der Geschwindigkeit. Die Beziehung, welche die Beschleunigung mit den Ortskoordinaten und der Geschwindigkeit verknüpft, trägt den Namen „Bewegungsgleichung des Systems".

$$\mathfrak{F} = m \cdot \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{F} = m \frac{d\mathfrak{v}}{dt}, \quad \mathfrak{F} = m \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}$$

Die klassische Mechanik

Die grundlegende Aufgabe der klassischen Mechanik (fußend auf den klassischen Vorstellungen von Raum, Zeit und Bewegung) ist die Untersuchung der Bewegung eines beliebigen mechanischen Systems auf dem Wege der Bestimmung ihrer Ortskoordinaten als Funktion der Zeit. Das geschieht aus den Anfangsbedingungen, d. h. aus den Werten der Ortskoordinaten und der Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt am Anfang.

Das Inertialsystem

Wie schon gezeigt worden ist, muß man zur Untersuchung physikalischer Erscheinungen über irgendein Bezugssystem verfügen. Man kann ein beliebiges aus der unendlichen Vielfalt der sich relativ zueinander bewegenden Bezugssysteme auswählen, das günstig erscheint. Jedoch haben die Naturgesetze in den verschiedenen Bezugssystemen ein verschiedenes Aussehen. Wir wählen das Bezugssystem so, daß in ihm die Naturgesetze eine möglichst einfache Form erhalten. Hat sich in ihm die Gültigkeit des Newtonschen Trägheitsgesetzes erwiesen, nennen wir es Inertialsystem.
Beim Aufsuchen dieses Bezugssystems werden wir von der Betrachtung des einfachsten Falles der Bewegung ausgehen. Das ist die Bewegung des Massenpunktes, der von allen anderen Körpern so weit entfernt ist, daß man die Wechselwirkung zwischen ihm und den Körpern vernachlässigen kann. Von einer solchen Bewegung eines Massenpunktes sagt man, daß sie *frei* sei.

Die freie Bewegung

Nehmen wir jetzt willkürlich ein Bezugssystem und untersuchen dessen Eigenschaften mit Hilfe eines sich frei bewegenden Massenpunktes. Wir nehmen an, daß sich der Punkt in diesem Bezugssystem zum Zeitpunkt

Null in Ruhe befindet. Dann wird der Punkt im nächsten Augenblick, allgemein gesprochen, nicht mehr ruhen – er beginnt, sich in irgendeine Richtung hin zu bewegen, weil sich vielleicht das Bezugssystem bewegt. In diesem Sinne kann man sagen, daß sich ein willkürliches Bezugssystem betreffs seiner Eigenschaften inhomogen und anisotrop erweist.
Es zeigt sich, daß jeweils zwei sich frei bewegende Körper nur kurze Zeit relativ zueinander in Ruhe bleiben.
Darum muß man die Bewegung auf ein Koordinatensystem beziehen, das mit einem der sich frei bewegenden Körper fest verbunden ist. Das ist ein weiteres Kennzeichen der *Inertialsysteme.*
In einem Inertialsystem sind alle Richtungen physikalisch äquivalent, und verschiedene Raumpunkte sind in ihren physikalischen Eigenschaften gleich, d. h., diese Systeme sind mechanisch homogen und isotrop.

Das Trägheitsgesetz

Die eben genannten Eigenschaften der Inertialsysteme haben zur Folge, daß die freie Bewegung eines Massenpunktes in solchen Systemen mit konstanter Geschwindigkeit vor sich geht. Diese Aussage ist unter dem Namen *Trägheitsgesetz* (erstes Newtonsches Gesetz) bekannt. Besitzt ein Massenpunkt indessen zu irgendeinem Zeitpunkt die Geschwindigkeit Null, wie wir vorhin voraussetzten, so wird er unbegrenzt lange in Ruhe bleiben.

Das klassische Prinzip der Relativität

Wenn wir ein Bezugssystem beobachten, das sich relativ zu einem Inertialsystem in willkürlicher Weise bewegt, dann wird es im allgemeinen kein Inertialsystem sein. Hieraus folgt jedoch nicht, daß es nur ein einziges Inertialsystem gibt. Es ist vielmehr leicht einzusehen, daß es eine unendliche Menge solcher Systeme gibt, wobei alle Inertialsysteme relativ zueinander eine gleichförmige und gradlinige Bewegung ausführen.
Für Inertialsysteme gilt das *Prinzip der Relativität,* demzufolge alle Inertialsysteme in ihren physikalischen Eigenschaften einander äquivalent sind. Schließt man die Auffassung von einer absoluten Zeit mit ein, heißt dieses Prinzip das Galileische Prinzip der Relativität.
Weil alle Inertialsysteme äquivalent sind, bleiben die Größengleichungen der Bewegung eines beliebigen mechanischen Systems beim Übergang von einem System in ein anderes unverändert.

Die Galilei-Transformation

Der Ortsvektor (auch Radiusvektor) $\mathfrak{r}$ möge die Lage eines Massenpunktes im Inertialsystem K zu einem Zeitpunkt t charakterisieren. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{r}'$ und t' Ortsvektor und Zeitpunkt des gleichen Ereignisses in einem anderen Inertialsystem K', das sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ relativ zu K bewegt. Entsprechend den klassischen Vorstellungen von Raum und Zeit haben die Gleichungen für die Transformation der Koordinaten und der Zeit die Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{r} &= \mathfrak{r}' + \mathfrak{v}_0 t \\ t &= t' \end{aligned} \tag{1}$$

wobei die letzte Gleichung Ausdruck des absoluten Zeitablaufs, die erste Ausdruck der absoluten Entfernungen ist. Diese Beziehungen heißen *Galilei-Transformation*.

Das Gesetz für die Addition der Geschwindigkeiten

Differenziert man Gleichung (1) nach der Zeit, erhält man

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}' + \mathfrak{v}_0. \tag{2}$$

Diese einfache Formel stellt das Gesetz für die Addition der Geschwindigkeiten dar. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ im Bezugssystem K ist die Vektorsumme aus der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'$ im Bezugssystem K' und der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ des Systems K bezüglich des Systems K_0.

Über die Beschleunigung

Nehmen wir die Ableitung von Gleichung (2) nach der Zeit vor und beachten, daß $\mathfrak{v}_0$ eine konstante Größe ist, erhalten wir

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{d\mathfrak{v}'}{dt},$$

also sind die Beschleunigungen in allen Inertialsystemen gleich.

Das Relative und das Absolute

Da es kein auserwähltes „absolutes“ Bezugssystem gibt, hat der Begriff der absoluten Ruhe keinen Sinn. Wenn ein Körper in einem Inertialsystem ruht, bewegt er sich bezüglich aller anderen mit verschiedenen konstanten Geschwindigkeiten. Es besteht kein Grund, einem Inertialsystem gegenüber den anderen den Vorzug zu geben. In analoger Weise ist auch der Begriff der absoluten Geschwindigkeit sinnlos. Nur die Relativgeschwindigkeit eines Körpers zu einem anderen hat physikalischen Sinn. Ebenso sinnvoll ist der Begriff der absoluten Beschleunigung, da ja, wie wir erklärten, die Beschleunigung in den verschiedenen Inertialsystemen gleich ist. Auch die Auszeichnung der Inertialsysteme vor den Nicht-Inertialsystemen hat absoluten Charakter. Im folgenden werden wir, wenn es nicht extra anders betont ist, immer Inertialsysteme benutzen.

Das Prinzip der Fernwirkung

Aus dem Galileischen Prinzip der Relativität folgt unmittelbar, daß sich eine Wechselwirkung von Körpern im Raum augenblicklich ausbreitet. Wenn sich der Zustand eines Körpers ändert, kann man als Folge davon eine, wenn auch noch so schwache Veränderung an den mit ihm in Wechselwirkung stehenden Körpern feststellen, wie weit sie auch entfernt sein mögen. Breitete sich die Wechselwirkung mit endlicher Geschwindigkeit aus, müßte diese Geschwindigkeit aber in den verschiedenen Bezugssystemen unterschiedlich sein, wie es aus dem Gesetz über die Addition der Geschwindigkeiten (2) hervorgeht.
Somit würde man diese Systeme physikalisch voneinander unterscheiden müssen. Das widerspricht aber dem Prinzip der Relativität.
Weil man die Ausbreitungsgeschwindigkeit für Wechselwirkungen der Körper als unendlich groß annimmt, sagt man, daß es in der klassischen (Newtonschen) Mechanik eine *Fernwirkung* gäbe.

Ein System von Massenpunkten

Bis jetzt beschäftigten wir uns mit der Untersuchung der Eigenschaften eines sich frei bewegenden Massenpunktes. Wir betrachten jetzt ein System von Massenpunkten. Dieses System werden wir so weit entfernt von allen anderen Körpern annehmen, daß eine Wechselwirkung zwischen diesen Körpern und dem System vernachlässigt werden kann, d. h. bei der Bestimmung der Bewegung des Systems nicht berücksichtigt zu werden braucht. Solche Systeme werden als *abgeschlossen* bezeichnet.

Erhaltungssätze

Betrachten wir solche Veränderungen, die an sich frei bewegenden Körpern vonstatten gehen. Nachdem sie eine gewisse Zeit aufeinander gewirkt hatten, erweist es sich, daß unabhängig von der Natur der stattfindenden Wechselwirkung einige *Erhaltungssätze* bestätigt werden. Anders ausgedrückt: Es existieren für den Zustand der Körper charakteristische Größen, die sich durch die Konstanz der Summe für alle in Wechselwirkung befindliche Körper auszeichnen.

Der Impuls-Erhaltungssatz

Betrachten wir ein abgeschlossenes System von Massenpunkten. Da infolge der Homogenität des Raumes alle Lagen dieses Systems als Ganzes im Raum äquivalent sind, kann man formulieren, daß sich die Eigenschaften des Systems bei einer Parallelverschiebung um eine beliebige Entfernung nicht verändern.

Als Folge dieses Tatbestandes ergibt sich für das System die Erhaltung einer vektoriellen Größe. Es existiert insbesondere eine solche Vektorgröße, die für jeden Massenpunkt charakteristisch ist und deren Summe über alle zum abgeschlossenen System gehörigen Massenpunkte nicht von der Zeit abhängt. Diese vektorielle Größe wird *Impuls (Bewegungsgröße)* genannt, sie steht in einem bestimmten Verhältnis zur vektoriellen Größe Geschwindigkeit.

Der Impuls ist der Geschwindigkeit direkt proportional. Der Proportionalitätsfaktor ist für die verschiedenen Massenpunkte verschieden, er trägt die Bezeichnung *Masse* des Massenpunktes.[1]

Das Gesetz zur Erhaltung des Impulses wird deshalb für ein System durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$m_1\mathfrak{v}_1 + m_2\mathfrak{v}_2 + \ldots = \sum_{i=1}^{n} m_i\mathfrak{v}_i = \mathfrak{G} = \text{const.}, \tag{3}$$

wobei i die Nummer der Teilchen, n ihre Anzahl bedeuten.

Die Masse der Teilchen

Aus dem Impulserhaltungssatz ist unter anderem zu ersehen, wie das Verhältnis der Massen der beteiligten Teilchen, betrachtet als Massen-

[1] So erfolgt die physikalische Bestimmung, denn auf dieser Grundlage können Experimente ausgeführt werden, und sie werden ausgeführt (später wird auf sie hingewiesen).

punkte, ermittelt werden kann. Stellen wir uns zwei Teilchen vor, die beide zusammenstoßen, dann kann man entsprechend (3) schreiben:

$$m_1 \Delta \mathfrak{v}_1 = -m_2 \Delta \mathfrak{v}_2,$$

wobei $\Delta \mathfrak{v}_1$ und $\Delta \mathfrak{v}_2$ die Geschwindigkeitsänderungen der betreffenden Teilchen sind. Hieraus folgt

$$\Delta \mathfrak{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \Delta \mathfrak{v}_2.$$

Kennt man $\Delta \mathfrak{v}_1$ und $\Delta \mathfrak{v}_2$, dann kann man das Verhältnis der Massen beider Teilchen berechnen.

Das erste Newtonsche Gesetz

Den Impulserhaltungssatz für ein abgeschlossenes System kann man als Verallgemeinerung des *Trägheitsgesetzes* (erstes Newtonsches Gesetz) ansehen. Tatsächlich bleibt für ein sich frei bewegendes Teilchen der Impuls $\mathfrak{G} = m\mathfrak{v}$ erhalten. Für den Fall des Systems von Massenpunkten, die beliebig miteinander in Wechselwirkung stehen, ist der Impuls jedes einzelnen Massenpunktes nicht konstant, wohl aber die Summe der Impulse aller Teilchen

$$\mathfrak{G} = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{G}_i.$$

Die Kraft

Die Ableitung des Impulses nach der Zeit ergibt eine Kraft.

$$\frac{d\mathfrak{G}_i}{dt} = \mathfrak{F}_i \tag{4}$$

Sie wirkt auf das Teilchen *i* von seiten aller übrigen Teilchen.

Die Potentialfunktion

Wechselwirkungen von Massenpunkten beschreibt man in der klassischen Mechanik mit Hilfe der *potentiellen Energie*

$$U = U\,(r_1, r_2 \ldots r_i \ldots r_n),$$

die eine Funktion der Ortskoordinaten der einzelnen Massenpunkte ist. Die Art der Potentialfunktion richtet sich in jedem Falle nach dem Charakter der Wechselwirkung. Haben die Massenpunkte unendlich große

Abstände voneinander, geht die potentielle Energie gegen Null. Es ist leicht einzusehen, daß diese Methode der Beschreibung von Wechselwirkungen die Annahme einer augenblicklichen Ausbreitung im Raum einschließt, sie befindet sich also in Übereinstimmung mit dem Relativitätsprinzip Galileis. Tatsächlich hängen die Kräfte[1]

$$\mathfrak{F}_i = -\frac{dU}{d\mathfrak{r}_i}, \tag{5}$$

welche auf jedes Teilchen von allen anderen Teilchen aus wirken, bei dieser Darstellung in jedem Zeitpunkt nur von der Lage der Teilchen in diesem Augenblick ab. Die Ortsänderung eines beliebigen der in Wechselwirkung befindlichen Teilchen spiegelt sich bei den übrigen Teilchen im gleichen Zeitpunkt wider.

Diese Feststellung läßt den Schluß zu, daß sich Kräfte ausschließlich durch die gegenseitige Lage der Massenpunkte bestimmen und nicht von ihrer Bewegung abhängen.

Das zweite Newtonsche Gesetz

Aus Gleichung (4) und (5) folgt, daß

$$\frac{d\mathfrak{G}_i}{dt} = -\frac{dU}{d\mathfrak{r}_i}. \tag{6}$$

Diese Beziehung stellt die *Bewegungsgleichung* eines Systems von Massenpunkten im allgemeinsten Falle dar. Sie trägt die Bezeichnung Newtonsche Gleichung (zweites Newtonsches Gesetz). Addiert man die Bewegungsgleichungen (6) für alle Teilchen eines abgeschlossenen Systems und berücksichtigt, daß auf Grund des Impulserhaltungssatzes die linke Seite der erhaltenen Summengleichung Null wird, sehen wir, daß auch die Summe aller Kräfte in einem abgeschlossenen System gleich Null ist.

$$\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \ldots \mathfrak{F}_n = 0.$$

Besteht das System nur aus zwei Massenpunkten, haben wir den Sonderfall

$$\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 = 0.$$

Das bedeutet, daß die auf das erste Teilchen von seiten des zweiten Teilchens ausgeübte Kraft dem Betrag nach gleich, der Richtung nach aber entgegengesetzt der Kraft ist, die vom zweiten auf das erste wirkt. Diese Aussage ist als Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung (drittes Newtonsches Gesetz) bekannt.

[1] Unter der Ableitung einer Größe nach einem Vektor verstehen wir einen Vektor, dessen Komponenten gleich den Ableitungen dieser Größe nach den Komponenten des Vektors sind.

Mit Hilfe des Begriffes Impuls kann man den Begriff Ruhe und Geschwindigkeit des Systems als Ganzes formulieren. Ein System von Massenpunkten ruht in solch einem Bezugssystem, in dem sein Impuls gleich Null ist. Unter der Geschwindigkeit eines Systems von Massenpunkten bezüglich eines gewissen Bezugssystems K versteht man die Geschwindigkeit des Systems K_0, in dem das System von Massenpunkten ruht.
Wir bezeichnen mit $\mathfrak{v}_i$ und $\mathfrak{v}_{oi}$ die Geschwindigkeiten der Massenpunkte i relativ zu den Bezugssystemen K und K_0 und mit $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit des Systems K_0 relativ zu K. Nach der Galilei-Transformation ist

$$\mathfrak{v}_i = \mathfrak{v}_{oi} + \mathfrak{v}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen mit den Massen der entsprechenden Massenpunkte und addieren, folgt

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 + \mathfrak{v} \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Das System der Massenpunkte ruht relativ zum Bezugssystem K_0, darum ist $\mathfrak{G}_0 = 0$ und

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{v} \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Da $\mathfrak{G}$ der Impuls und $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit des Systems als Ganzes sind, folgt aus der letzten Beziehung unmittelbar die Additivität der Masse: Die Masse eines zusammengesetzten Körpers ist gleich der Summe der Massen seiner einzelnen Teile. Mit anderen Worten: Es gibt ein *Gesetz von der Erhaltung der Masse.*
Wir weisen hier noch auf eine Reihe von Eigenschaften der Masse hin. Benutzt man die Beziehung zwischen Impuls und Geschwindigkeit des Teilchens, erhält die Bewegungsgleichung für ein Teilchen die Form

$$m \frac{\mathrm{d}\mathfrak{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\mathfrak{r}}.$$

Gemäß dem Galileischen Prinzip der Relativität bleibt diese Größengleichung beim Übergang von einem Inertialsystem zum anderen unverändert. Hieraus folgt, daß die Masse m eines Teilchens invariant ist, also eine Größe darstellt, die nicht von der Wahl des Bezugssystems abhängt und folglich wirklich charakteristisch für das Teilchen ist.
Eine weitere Eigenschaft der Masse ist die, daß sie nicht negativ sein kann, d. h., die Richtungen des Impulses und der Geschwindigkeit des Teilchens fallen zusammen. Das folgt aus einem allgemeingültigen physikalischen Prinzip – dem sogenannten Prinzip des kleinsten Zwanges.

Gesetz von der Erhaltung des Drehmoments

Gehen wir jetzt zu einer anderen Frage über. Wir sehen, daß der Impulserhaltungssatz aus der Homogenität des Raumes für ein abgeschlossenes System von Massenpunkten folgt. Neben der Homogenität besitzt der Raum auch die Eigenschaft der Isotropie — alle Richtungen sind in ihm äquivalent. Darum dürfen sich die Eigenschaften des abgeschlossenen Systems bei einer Drehung des ganzen Systems um einen beliebigen Winkel in bezug auf eine willkürliche Achse nicht ändern.
Als Folge dieser Bedingung erweist sich für das System die Erhaltung einer bestimmten vektoriellen Größe. Sie ist für jeden Massenpunkt charakteristisch. Die Summe ihrer Vektoren über alle Massenpunkte des abgeschlossenen Systems ist unabhängig von der Zeit. Diese vektorielle Größe heißt Drehimpuls, sie hängt in bestimmter Weise mit der vektoriellen Größe Impuls zusammen. Der Drehimpuls eines Teilchens ist gleich dem vektoriellen Produkt aus Ortsvektor und Impuls. Im Ergebnis hat der Drehimpuls-Erhaltungssatz folgende Form:

$$\sum_{=1}^{n} \mathfrak{r}_i \times \mathfrak{G}_i = \mathfrak{P} = \text{const.}$$

Erhaltungssätze für nicht abgeschlossene Systeme

Bis jetzt sprachen wir ausschließlich von abgeschlossenen Systemen. Betrachten wir jetzt die Bewegung eines nicht abgeschlossenen Systems, das in Wechselwirkung mit einem anderen System steht, dessen Bewegung bekannt ist. In diesem Falle spricht man von einer „Bewegung im äußeren Feld“.
Wie uns schon bekannt ist, beschreibt man die Wechselwirkung von Massenpunkten mit der potentiellen Energie der Wechselwirkung

$$U = U(\mathfrak{r}),$$

die eine Funktion der Ortskoordinaten der Massenpunkte ist. Diese Funktion beschreibt die Wechselwirkung der Massenpunkte des Systems untereinander und, wenn das System nicht abgeschlossen ist, die Wechselwirkung zwischen den Massenpunkten des Systems und den anderen Körpern.
Für ein nicht abgeschlossenes System, das sich unter den gestellten äußeren Bedingungen befindet, kann die Potentialfunktion explizit von der Zeit abhängen:

$$U = U(\mathfrak{r}, t).$$

Diese Funktion wird potentielle Energie im äußeren Feld genannt. Somit betrachten wir also Bewegungen in äußeren Feldern oder, konkreter, die Frage der Erhaltungssätze für nicht abgeschlossene Systeme.
Für ein System, das sich im äußeren Feld befindet, bleibt der Drehimpuls im allgemeinen nicht erhalten. Aber die Erhaltung kann dennoch in einigen Sonderfällen stattfinden. Das trifft zum Beispiel zu, wenn sich das System in einem zentralsymmetrischen Feld befindet. Darunter verstehen wir ein Feld, in dem die potentielle Energie nur vom Abstand von einem bestimmten unbeweglichen Punkte – dem Zentrum – abhängt; dann sind alle vom Zentrum ausgehenden Richtungen im Raum äquivalent, und der Drehimpuls des Systems bezüglich dieses Zentrums wird eine Erhaltungsgröße sein. Bezüglich jedes anderen Punktes des Raumes trifft das natürlich nicht zu.
Ist das System nicht abgeschlossen, aber der Charakter seiner Wechselwirkung mit den Körpern der Umgebung ist so, daß sich die äußeren Bedingungen bei einer Verschiebung des Systems in einer bestimmten Richtung l nicht ändern (axial-symmetrisches Feld), dann bleibt die Projektion des Impulses des Systems in diese Richtung erhalten.

$$\mathfrak{G}_l = \text{const.}$$

Analog bleibt in einem axial-symmetrischen Feld die Komponente des Drehimpulses längs der Symmetrieachse erhalten.
Wir begnügen uns mit den angeführten Fällen, da sie die wichtigsten sind.

Der Energieerhaltungssatz

Betrachten wir jetzt einen anderen sehr wichtigen Fall der Bewegung abgeschlossener Systeme, und zwar eine Bewegung in konstanten äußeren Feldern. Befindet sich das System nicht in einem veränderlichen äußeren Feld, können seine Eigenschaften auch offenbar nicht von der Zeit abhängen. Das folgt unmittelbar daraus, daß bei Abwesenheit eines äußeren Feldes (oder in einem konstanten äußeren Feld) alle Zeitpunkte für das gegebene physikalische System äquivalent sind.
Aus dieser Bedingung folgt für das System die Erhaltung der skalaren Größe W:

$$W = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} + U. \tag{7}$$

Sie heißt Energie des Systems. Der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} = W_{\text{kin}}$$

trägt die Bezeichnung „kinetische Energie" des Systems. Über die Funktion U war schon weiter vorn die Rede.
Gleichung (7) ist der Energieerhaltungssatz für ein System. Aus ihr ist ersichtlich, daß die Energie aus zwei wesentlich verschiedenen Gliedern besteht. Die kinetische Energie ist eine quadratische Funktion der Geschwindigkeit, die potentielle Energie U hängt dagegen überhaupt nicht von der Geschwindigkeit ab.

Die Isotropie der Zeit

Bei der Ableitung des Energieerhaltungssatzes sprachen wir von der Homogenität der Zeit, d. h. davon, daß verschiedene Zeitpunkte betreffs ihrer physikalischen Eigenschaften einander äquivalent sind. Die Funktion (7) zeigt, daß die Zeit nicht nur homogen, sondern auch isotrop ist, d. h., ihre Eigenschaften sind in beiden Richtungen gleich. Ersetzen wir t durch $-t$, bleibt die Funktion (7) unverändert, und auch die Bewegungsgleichung (6) bleibt die gleiche. Mit anderen Worten: Wenn in einem System eine bestimmte Bewegung möglich ist, dann ist immer auch die umgekehrte Bewegung möglich. Das ist eine Bewegung, bei der das System in denselben Zustand gelangt, nur in umgekehrter Reihenfolge. In diesem Sinne sind alle nach den Gesetzen der klassischen Mechanik ablaufenden Bewegungen umkehrbar.

Nicht-Inertialsysteme

Es folgen jetzt einige Anmerkungen. Bisher bezogen wir, wenn wir die Bewegung eines Massenpunktes oder eines Systems von Massenpunkten betrachteten, diese Bewegung stets auf irgendein Inertialsystem. Deshalb hatten die Bewegungsgleichungen des Punktes die Form

$$m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -\frac{dU}{d\mathfrak{r}}. \tag{8}$$

Die Bewegungsgleichungen sind in allen Inertialsystemen ähnlich Inertialsysteme bewegen sich bekanntlich mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander. Gehen wir aber zu einem Nicht-Inertialsystem (einem beschleunigten) über, ändern sich die Bewegungsgleichungen.
Betrachten wir zu diesem Zweck das Bezugssystem K', welches sich bezüglich des Inertialsystems K translatorisch mit einer gewissen Geschwindigkeit $\mathfrak{V}(t)$ bewegt. Die Geschwindigkeit des Massenpunktes

relativ zum System K bezeichnen wir mit $\mathfrak{v}$, diejenige relativ zum System K' mit $\mathfrak{v}'$. Dann ist

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}' + \mathfrak{V}(t).$$

Setzen wir in Gleichung (8) den Ausdruck für die Geschwindigkeit aus der letzten Formel ein, berücksichtigen dabei, daß $\mathfrak{V}(t)$ eine gegebene Funktion der Zeit ist, führen außerdem die vektorielle Größe $\mathfrak{a}(t) = \frac{d\mathfrak{V}(t)}{dt}$ ein — das ist die Beschleunigung des Koordinatensystems K' —, dann erhalten wir die Bewegungsgleichung für den Massenpunkt im Bezugssystem K'

$$m \frac{d\mathfrak{v}'}{dt} = -\frac{dU}{d\mathfrak{r}'} - m\,\mathfrak{a}(t), \tag{9}$$

wobei $\mathfrak{r}'$ der Ortsvektor des Massenpunktes in diesem Bezugssystem ist. Vergleichen wir die Gleichungen (8) und (9), dann sehen wir, daß im beschleunigten, geradlinig bewegten Bezugssystem ein zusätzliches homogenes Kraftfeld[1] auftaucht, wobei die auf den Massenpunkt wirkende Kraft gleich dem Produkt aus der Masse des Massenpunktes und der Beschleunigung $\mathfrak{a}(t)$ ist und die entgegengesetzte Richtung dieser Beschleunigung besitzt. Diese Kraft wird gewöhnlich *Trägheitskraft* genannt.

Falls sich das Bezugssystem nicht nur geradlinig (translatorisch) bewegt, sondern auch mit einer Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}(t)$ dreht, dann erhalten wir, indem wir die Geschwindigkeit entsprechend umformen, die Bewegungsgleichung des Massenpunktes in diesem Bezugssystem. Sie wird sich von (9) durch das Vorhandensein dreier zusätzlicher Glieder auf der rechten Seite unterscheiden:

der Trägheitskraft $m\,\mathfrak{r} \times (d\vec{\omega}/dt)$,
der Zentrifugalkraft $m\,(\vec{\omega} \times \mathfrak{r}) \times \vec{\omega}$
und der Corioliskraft $2\,m\,\mathfrak{v} \times \vec{\omega}$.

Wir möchten bemerken, daß diese letzte Kraft, abweichend von allen anderen bis jetzt betrachteten Kräften, von der Geschwindigkeit abhängt.

[1] Das ist ein Feld, in dem zu einem bestimmten Zeitpunkt die auf den Massenpunkt wirkende Kraft an allen Stellen des Raumes gleich ist.

2. Relativistische Mechanik

Die Konstante c

Aus dem Galileischen Prinzip der Relativität folgt unmittelbar, wie wir sahen, daß sich eine Wechselwirkung von Körpern augenblicklich im Raum ausbreitet. Die Erfahrung lehrt jedoch, daß es augenblickliche Wechselwirkungen in der Natur nicht gibt. Darum enthält die klassische Mechanik, die von der Vorstellung der augenblicklichen Ausbreitung von Wechselwirkungen ausgeht, in sich eine gewisse Ungenauigkeit. In Wirklichkeit ist es so: Geht an einem der in Wechselwirkung tretenden Körper irgendeine Veränderung vor, dann wirkt sie sich an dem anderen Körper erst nach Ablauf eines gewissen Zeitabschnitts aus. Erst nach diesem Zeitintervall beginnen am zweiten Körper die Vorgänge, die von den gegebenen Veränderungen verursacht wurden.
Dividieren wir den Abstand zwischen beiden Körpern durch dieses Zeitintervall, finden wir „die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wechselwirkung".
Das sogenannte Prinzip der Relativität ist aus der Erfahrung gewonnen. Nach ihm sind die Naturgesetze in allen Inertialsystemen gleich, d. h., die Größengleichungen, welche Naturgesetze wiedergeben, sind invariant in bezug auf Transformationen der Ortskoordinaten und der Zeit von einem Inertialsystem in ein anderes. Folglich kann man das Prinzip der Relativität auch das Prinzip der Äquivalenz aller Inertialsysteme nennen.
Aus diesem Prinzip folgt insbesondere, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen in allen Inertialsystemen gleich ist. Also ist diese Geschwindigkeit eine universelle Konstante. Sie wird gewöhnlich mit dem Buchstaben c bezeichnet, und ihr Wert ist entsprechend den letzten Messungen

$$c = 2{,}99776 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Der große Zahlenwert dieser Geschwindigkeit erklärt die Tatsache, daß in der Praxis die klassische Mechanik in den meisten Fällen hinreichend genau ist.
Die meisten Geschwindigkeiten, mit denen wir es zu tun haben, sind so klein im Vergleich zur Geschwindigkeit c, daß die Annahme der Unendlichkeit der letzteren praktisch keinen Einfluß auf die Genauigkeit der Ergebnisse in der Praxis hat.

Das relativistische Prinzip der Relativität

Die Vereinigung des Relativitätsprinzips mit der Endlichkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wechselwirkungen wird *Einsteinsches Relativitätsprinzip* genannt im Unterschied zum Galileischen, das von der unendlich großen Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wechselwirkungen ausgeht.
Die auf dem Einsteinschen Prinzip begründete Mechanik wird die relativistische genannt. Im Grenzfall, wenn die Geschwindigkeiten der sich bewegenden Körper klein sind gegenüber c, kann man den Einfluß der Tatsache, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wechselwirkungen endlich ist, bei der Untersuchung von Bewegungen vernachlässigen. Dann geht die relativistische Mechanik in die gewöhnliche, die klassische Mechanik über, die von der Annahme augenblicklicher Ausbreitung von Wechselwirkungen ausgeht. Der Grenzübergang von der relativistischen zur klassischen Mechanik kann formal als Grenzübergang $c \to \infty$ oder $v \ll c$ in den Formeln der relativistischen Mechanik ausgeführt werden.

Das Intervall

Wie wir oben sahen, ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wechselwirkungen in allen Inertialsystemen gleich. Wir drücken diese Tatsache jetzt mathematisch aus. Dazu betrachten wir zwei Bezugssysteme K und K', die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Die Koordinatenachse wählen wir dabei so, daß die Achsen X und X′ zusammenfallen, die Achsen Y und Z jedoch parallel zu den Achsen Y′ und Z′ verlaufen, die Zeiten in den Systemen K und K' nennen wir t und t'.
Das erste Ereignis[1] möge darin bestehen, daß ein Signal[2] ausgesendet wird, welches sich mit der Geschwindigkeit c von einem Punkte mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1 im System K und dem Zeitpunkt t_1 im gleichen System ausbreitet. Wir werden die Ausbreitung dieses Signals vom

[1] Wir werden in der Folge den Begriff „Ereignis“ benutzen. Das Ereignis wird bestimmt durch den Ort, an dem es stattfindet, und die Zeit, zu der es stattfindet. Damit ist das mit einem gewissen materiellen Teilchen ablaufende Ereignis bestimmt durch die drei Ortskoordinaten und durch den Zeitpunkt, an dem es stattfindet.
Oft ist es aus Gründen der Anschaulichkeit günstig, einen fiktiven vierdimensionalen Raum zu benutzen, auf dessen Achsen die drei Ortskoordinaten und die Zeit abgetragen werden. In diesem Raum wird das Ereignis durch einen Punkt dargestellt.

[2] Von einer Wechselwirkung, die sich von einem Teilchen zum anderen ausbreitet, spricht man manchmal als von einem „Signal“, das vom ersten Teilchen ausgesendet wurde und dem zweiten „Kenntnis gegeben“ hat von der Veränderung, die das erste erfahren hat. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit solcher Wechselwirkungen nennt man dann „Signalgeschwindigkeit“.

System K aus beobachten. Das zweite Ereignis möge darin bestehen, daß das Signal im Punkte x_2, y_2, z_2 mit der Zeit t_2 ankommt. Da sich das Signal mit der Geschwindigkeit c ausbreitet, ist der von ihm zurückgelegte Weg $s = c\,(t_2 - t_1)$. Andererseits ist dieser Weg auch

$$s = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Also können wir folgende Beziehung zwischen den Koordinaten beider Ereignisse im System K' aufschreiben:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2\,(t_2 - t_1)^2 = 0. \qquad (10)$$

Die Ausbreitung des Signals und eben diese zwei Ereignisse kann man aus dem System K' beobachten.

Die Koordinaten des ersten Ereignisses seien im System K' x_1', y_1', z_1', t_1', die des zweiten x_2', y_2', z_2', t_2'. Da die Signalgeschwindigkeit in den Systemen K und K' gleich ist, haben wir analog zu (10)

$$(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 - c^2\,(t_2' - t_1') = 0.$$

Sind x_1, y_1, z_1, t_1 und x_2, y_2, z_2, t_2 die Koordinaten zweier beliebiger Ereignisse, dann nennt man die Größe

$$S_{1\,2} = [c^2\,(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2]^{\frac{1}{2}}$$

das *Intervall* zwischen diesen beiden Ereignissen.

Aus der Konstanz der Geschwindigkeit c folgt also, daß das Intervall zwischen zwei Ereignissen in jedem anderen Bezugssystem ebenfalls Null ist, wenn es in einem Bezugssystem Null ist.

Falls zwei Ereignisse hinreichend nahe beieinander liegen, ist das Intervall zwischen beiden[1]

$$dS^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Die Invarianz des Intervalls

Eben wurde gezeigt, daß aus $dS = 0$ in einem beliebigen Inertialsystem $dS' = 0$ in einem anderen System folgt. Andererseits haben dS und dS'

[1] Aus mathematischer Zweckmäßigkeit und auch besonders aus Gründen der Symmetrie werden wir manchmal an Stelle von t eine andere Größe τ benutzen, die mit t in folgender Beziehung steht: $\tau = i \cdot c\,t$.

Dann ist $S_1{}^2{}_2 = -[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + (\tau_2 - \tau_1)^2]$

$dS^2 = -(dx^2 + dy^2 + dz^2 + d\tau^2)$.

Dementsprechend werden wir auf den Achsen unseres fiktiven vierdimensionalen Raumes jetzt nicht x, y, z, t, sondern x, y, z, τ abtragen. Wie leicht zu sehen ist, kann man dann $S_1{}^2{}_2$ als das Quadrat des Abstandes zwischen den Punkten x_1, y_1, z_1, τ_1 und x_2, y_2, z_2, τ_2 in diesem Raume deuten und $(dS)^2$ als das Quadrat des Längenelements.

gleiche (sehr kleine) Größenordnungen. Aus diesem Sachverhalt müssen dS und dS' einander proportional sein:

$$dS = \alpha\, dS'.$$

Der Koeffizient α kann dabei nur von der absoluten Größe der Relativgeschwindigkeit zwischen beiden Inertialsystemen abhängig sein. Er kann nicht von den Orts- und Zeitkoordinaten abhängen, da ja dann verschiedene Raum-Zeit-Punkte ungleichwertig sein würden. Das widerspricht aber der Homogenität von Raum und Zeit. Er kann auch nicht von der Richtung der Relativgeschwindigkeit abhängen, weil der Raum isotrop ist. Darum können wir mit dem gleichen Recht, wie wir $dS = \alpha\, dS'$ schrieben, auch schreiben

$$dS' = \alpha\, dS.$$

Die Geschwindigkeit der Bewegung des ersten Systems relativ zum zweiten ist gleich der Geschwindigkeit der Bewegung des zweiten relativ zum ersten. Substituieren wir $dS = \alpha\, dS'$ in $dS' = \alpha\, dS$, so ergibt sich $\alpha^2 = 1$, d. h. $\alpha = \pm 1$.

Wenn wir einen dieser Werte auswählen wollen, merken wir, daß α entweder immer $+1$ oder immer -1 sein kann. Denn wenn $\alpha\,(v)$ für einige Geschwindigkeiten $+1$, für andere -1 wäre, so müßte es für gewisse α auch Werte zwischen $+1$ und -1 annehmen. Das ist aber unmöglich. Wenn es stimmt, muß α immer gleich $+1$ sein, da im Sonderfall die Gleichung $dS' = \alpha\, dS$ in die Identität $dS' \equiv dS$ mit $\alpha = +1$ übergeht. Aus $dS' = dS$ folgt unmittelbar, daß auch für endliche Intervalle gilt $S' = S$.

So kommen wir zu einem sehr wichtigen Ergebnis: Das Intervall zwischen Ereignissen ist gleich in allen Inertialsystemen, es ist also *invariant* gegenüber einer Transformation aus einem Inertialsystem in ein beliebiges anderes. Diese Invarianz findet ihre mathematische Aussage in der Konstanz der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wechselwirkungen c.

Die Lorentz-Transformation

Wir suchen jetzt die Transformationsgleichungen von einem Inertialsystem in ein anderes. Das sind die Formeln, mit denen man bei Kenntnis eines Ereignisses mit den Koordinaten x, y, z, t in einem Bezugssystem K die Koordinaten x', y', z', t' des gleichen Ereignisses in einem anderen Bezugssystem K' errechnen kann.

Bekanntlich löst sich diese Frage in der klassischen nichtrelativistischen Mechanik ganz einfach. Da die Zeit absolut betrachtet wird, gilt dort $t = t'$. Wenn man weiterhin die Koordinatenachsen so legt, daß X und X' zusammenfallen, die Achsen Y und Z dann parallel zu Y' und Z' liegen, die Bewegung zudem längs der Achsen X und X' verläuft, dann sind die Koordinaten y und z offensichtlich gleich den Koordinaten y' und z', nur die Koordinaten x und x' werden sich durch den Abstand unterscheiden, den das eine System relativ zum anderen zurückgelegt hat. Nehmen wir an, daß zur Zeit t_0 beide Bezugssysteme sich deckten und die Geschwindigkeit von K bezüglich K' V beträgt, dann ist der Abstand gleich $V \cdot t$. V ist der Betrag der Geschwindigkeit in x-Richtung. Also gilt

$$\mathrm{x} = \mathrm{x}' + V \cdot t,\ \mathrm{y} = \mathrm{y}',\ \mathrm{z} = \mathrm{z}',\ t = t'\,. \tag{11}$$

Das sind die Formeln für Transformationen in der klassischen Mechanik (Galilei-Transformation). Es ist leicht zu prüfen, daß diese Transformation, wie auch zu erwarten war, den Forderungen der Relativitätstheorie nicht genügt, sie läßt das Intervall zwischen den Ereignissen nicht invariant.

Die relativistischen Transformationsgleichungen, die wir suchen wollen, müssen die Forderung nach Invarianz des Intervalls erfüllen.

Wenn wir die für die weiteren Darlegungen günstige Größe $\tau = i \cdot c \cdot t$ verwenden, kann man das Intervall zwischen zwei Ereignissen als Abstand zwischen den entsprechenden zwei Punkten im vierdimensionalen Koordinatensystem betrachten. Folglich können wir sagen, daß die zu suchende Transformation alle Längen in dem vierdimensionalen Raum x, y, z, t unverändert lassen muß. Solche Transformationen sind aber nur Parallelverschiebungen und Drehungen des Koordinatensystems. Von beiden ist die Verschiebung eines Koordinatensystems parallel zu sich selbst nicht von Interesse. Sie führt ja nur zur Verschiebung des Nullpunktes der Raum- und Zeitkoordinaten. Darum muß die gesuchte Transformation mathematisch die Drehung eines vierdimensionalen Koordinatensystems x, y, z, t zum Ausdruck bringen.

Jede Drehung im vierdimensionalen Raum kann man in sechs Teildrehungen zerlegen, speziell in Drehungen innerhalb der Ebenen xy, zy, xz, τx, τy, τz (analog kann jede Drehung im gewöhnlichen Raum in drei Teildrehungen innerhalb der Ebenen xy, zy, zx zerlegt werden). Die ersten drei dieser Drehungen transformieren nur die Raumkoordinaten; sie entsprechen einer gewöhnlichen räumlichen Drehung.

Betrachten wir die Drehung der Ebene τx, bei ihr verändern sich die Koordinaten y und z nicht. Ist φ der Drehwinkel, dann wird die Beziehung zwischen den alten und den neuen Koordinaten durch die Formeln bestimmt:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{x} &= \mathrm{x}' \cos\varphi - \tau' \sin\varphi \\ \tau &= \mathrm{x}' \sin\varphi + \tau' \cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Wir suchen die Formeln für die Transformation vom Inertialsystem K zum System K', welches sich relativ zu K mit der Geschwindigkeit V längs der Achse X bewegt. Dabei werden offensichtlich durch die Transformation nur die Koordinate x und die Zeit t verändert. Deshalb muß diese Transformation von der Art (12) sein. Jetzt bleibt noch der Winkel φ zu bestimmen, der nur von der Relativgeschwindigkeit V abhängig sein kann.[1]

Betrachten wir die Bewegung des Koordinatenursprungs von K' im System K. Dann ist $x' = 0$, und die Formeln (12) nehmen die Form an:

$$x = -\tau \sin \varphi \qquad \tau = \tau' \cos \varphi$$

oder, indem die eine durch die andere dividiert wird,

$$\frac{x}{\tau} = -\tan \varphi.$$

Nun ist aber $\tau = i\,c\,t$, und $\frac{x}{\tau}$, wie leicht zu erkennen, die Geschwindigkeit V des Systems K' relativ zu K. Folglich wird

$$\tan \varphi = i\,\frac{V}{c}.$$

Hieraus wird

$$\sin \varphi = \frac{i\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}; \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}.$$

Setzen wir die Ausdrücke für $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ in (12) ein, finden wir

$$x = \frac{x' - i\dfrac{V}{c}\tau}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}; \quad ; \tau = \frac{\tau' + i\dfrac{V}{c}x'}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}; \; y = y'; \; z = z'.$$

Substituieren wir noch $\tau = i \cdot c \cdot t$ und $\tau' = i \cdot c \cdot t'$, erhalten wir schließlich

$$x = \frac{x' + V \cdot t'}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}; \; y = y'; \; z = z'; \; t = \frac{t' + \dfrac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}. \tag{13}$$

Das sind die gesuchten Gleichungen der Lorentz-Transformation, die in der modernen Physik eine fundamentale Bedeutung besitzen.

[1] Wir bezeichnen, um Verwirrung zu vermeiden, mit V überall die konstante Relativgeschwindigkeit zweier Inertialsysteme, mit v dagegen die Geschwindigkeit bewegter Teilchen, die durchaus nicht konstant sein muß.

Folgerungen aus der Lorentz-Transformation

Aus den Beziehungen (13) ist leicht zu erkennen, daß beim Grenzübergang ($c \to \infty$) zur klassischen Mechanik die Formeln der Lorentz-Transformation tatsächlich in die Galilei-Transformation (11) übergehen.

Bei $V > c$ in den Formeln (13) nehmen die Koordinaten x und t imaginäre Werte an. Das entspricht der Tatsache, nach der eine Bewegung mit einer Geschwindigkeit größer als c unmöglich ist. Es ist sogar schon unmöglich, ein Bezugssystem zu benutzen, das sich mit einer Geschwindigkeit gleich der von c bewegt, weil dann der Nenner des Bruches in den Gleichungen (13) zu Null werden würde. Betrachten wir noch eine Reihe von Folgerungen aus der Lorentz-Transformation.

Abstände in der Relativitätstheorie

Im System K möge ein Stab parallel zur Achse X ruhen. Seine Länge sei, gemessen in diesem System, $\Delta \mathrm{x} = \mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1$ (x_2 und x_1 sind die Koordinaten der beiden Enden des Stabes im System K). Wie groß ist jetzt die Länge dieses Stabes, aus dem System K' her gemessen? Dazu brauchen wir die Koordinaten der beiden Enden des Stabes (x_2' und x_1') in diesem System zu ein und demselben Zeitpunkt t'. Aus den Beziehungen (13) finden wir

$$\mathrm{x}_1 = \frac{\mathrm{x}_1' + V \cdot t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad \mathrm{x}_2 = \frac{\mathrm{x}_2' + V \cdot t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Die Länge des Stabes im System K' ist $\Delta \mathrm{x}' = \mathrm{x}_2' - \mathrm{x}_1'$, die Subtraktion x_1 von x_2 ergibt

$$\Delta \mathrm{x} = \frac{\Delta \mathrm{x}'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{14}$$

Eigenlänge eines Stabes wird die Länge in einem Bezugssystem genannt, in dem er sich in Ruhe befindet. Sie wird mit $l_0 = \Delta \mathrm{x}$ bezeichnet, dagegen die Länge desselben Stabes in einem anderen beliebigen Bezugssystem K' mit l.

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

Folglich hat ein Stab seine größte Länge in dem Bezugssystem, in dem er ruht. Seine Länge in einem Bezugssystem, das sich relativ zu ihm mit der Geschwindigkeit V bewegt, verringert sich entsprechend dem Faktor

$$\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}.$$

Dieses Ergebnis der Relativitätstheorie wird Lorentz-Verkürzung oder Längenkontraktion genannt.
Beim Grenzübergang $c \to \infty$ oder $v \ll c$ (zur klassischen Mechanik) erhalten wir aus Gleichung (14) $\Delta x = \Delta x'$. Das stimmt mit der klassischen Vorstellung von absoluten Abmessungen überein.

Zeitabstände in der Relativitätstheorie

Es möge jetzt im System K' eine Uhr liegen. Wir betrachten zwei Ereignisse, die am gleichen Raumpunkt x', y', z' im System K' ablaufen. Die Zeit zwischen beiden Ereignissen beträgt im System K': $\Delta t' = t_2' - t_1'$. Wir suchen die Zeit Δt, welche zwischen diesen gleichen Ereignissen im System K verging.
Aus (13) haben wir

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \quad t_2 = \frac{t_2' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}};$$

die Differenz beider ergibt

$$t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Diese Gleichung läßt sich umformen in

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}. \tag{15}$$

Die Zeit, welche an Uhren abgelesen werden kann, die sich mit dem betreffenden Objekt mitbewegen, wird *Eigenzeit* dieses Objekts genannt. Die Gleichung (15) liefert eine Beziehung zwischen der Eigenzeit und der Zeit in einem Bezugssystem, von dem aus die Bewegung verfolgt wird.
Wie aus der Gleichung (15) zu sehen ist, ist die Eigenzeit eines sich bewegenden Körpers immer kürzer als der entsprechende Zeitabstand im unbewegten System. Mit anderen Worten: Sich bewegende Uhren gehen

langsamer als in Ruhe befindliche. Diesen Effekt nennen wir relativistische Zeitdilatation.

Beim Grenzübergang $c \to \infty$ zur klassischen Mechanik folgt aus (15) die Gleichung $\Delta t' = \Delta t$. Das befindet sich wieder in Übereinstimmung mit der klassischen Vorstellung von der absoluten Zeit.

Somit bringt die Relativitätstheorie überaus tiefe und fundamentale Änderungen in grundlegende physikalische Begriffe, in die Begriffe Raum und Zeit. Die von uns aus der täglichen Erfahrung entliehenen Vorstellungen über Raum und Zeit erweisen sich als nur angenähert richtig. Das liegt hauptsächlich daran, daß wir im täglichen Leben nur mit solchen Geschwindigkeiten zu tun haben, die sehr klein im Vergleich zur Geschwindigkeit c sind.

Gesetz der Addition von Geschwindigkeiten in der Relativitätstheorie

Bleiben wir noch bei einer weiteren Folge der Lorentz-Transformation. Wir suchen das Gesetz, welches die Geschwindigkeit eines sich bewegenden materiellen Teilchens in einem Bezugssystem mit der Geschwindigkeit des gleichen Teilchens in einem anderen System verbindet.

Es soll sich wieder das System K' relativ zum System K mit der Geschwindigkeit V längs der Achse X bewegen. $v_x = dx/dt$ sei die Geschwindigkeitskomponente dieses Teilchens im System K, $v'_x = dx'/dt'$ die Geschwindigkeit des gleichen Teilchens im System K'. Durch Differentiation der Gleichungen (13) erhalten wir

$$dx = \frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \; dy = dy'; \; dz = dz'; \; dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Wir dividieren die ersten drei Gleichungen durch die vierte, dann finden wir

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V dt'}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}; \; \frac{dy}{dt} = \frac{dy' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}; \; \frac{dz}{dt} = \frac{dz' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}.$$

Dividieren wir weiterhin Zähler und Nenner der rechten Seiten dieser Gleichungen durch dt', dann erhalten wir

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x \cdot V}{c^2}}; \; v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x \cdot V}{c^2}}; \; v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x \cdot V}{c^2}}.$$

Diese Formeln stellen sowohl das Gesetz für die Transformation von Geschwindigkeiten beim Übergang von einem Bezugssystem in ein anderes dar als auch gleichzeitig das Gesetz für die Addition von Geschwindigkeiten in der Relativitätstheorie. Im Grenzfall $c \to \infty$ gehen sie über in die Formeln der klassischen Mechanik.

$$v_x = v'_x + V, \ v_y = v'_x, \ v_z = v'_z.$$

Im Sonderfall, wenn sich das Teilchen parallel zur X-Achse bewegt, ist $v_x = v$, $v_y = v_z = 0$. Dann ist $v'_y = v'_z = 0$ und $v'_x = v'$, deswegen

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v' V}{c^2}}.$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die Summe zweier Geschwindigkeiten, die kleiner oder gleich c sind, nach dieser Formel wieder eine Geschwindigkeit ergibt, die c nicht übersteigt.

Die relativistische Mechanik

Wenden wir uns jetzt den Größen zu, deren Wesen selbst aus den allgemeinsten Eigenschaften der Symmetrie von Raum und Zeit zu folgern ist.

Der Impuls eines relativistischen Teilchens

Beginnen wir mit der Betrachtung eines freien Teilchens. Wie wir schon wissen, trägt die Größe, deren Erhaltung aus der Homogenität des Raumes folgt, die Bezeichnung Impuls. Der Impuls eines Teilchens in der relativistischen Mechanik ist

$$\mathfrak{g} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mathfrak{v}. \tag{16}$$

Bei kleinen Geschwindigkeiten des Teilchens ($v \ll c$) oder im Grenzfall $c \to \infty$ geht diese Gleichung in die klassische Form über: $\mathfrak{g} = m \cdot \mathfrak{v}$.
In der klassischen Mechanik ist jedes Teilchen charakterisiert durch seine Masse m. In der relativistischen Mechanik ist die Masse für das Teilchen auch charakteristisch, da sie sich beim Übergang von einem Inertialsystem in ein anderes nicht verändert.

Die Energie eines relativistischen Teilchens

Die Größe, deren Erhaltung für ein freies Teilchen aus der Eigenschaft der Homogenität der Zeit folgt, wird bekanntlich Energie genannt. Die Energie eines Teilchens ist in der relativistischen Mechanik bestimmt durch

$$W = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{17}$$

Aus diesem Ausdruck ist ersichtlich, daß die Energie eines Teilchens in der relativistischen Mechanik nie den Wert Null annimmt, selbst wenn seine Geschwindigkeit gleich Null ist.
Diese „Ruhenergie", das ist die Energie bei $v = 0$, beträgt

$$W = m \cdot c^2.$$

Bei kleinen Geschwindigkeiten ($v/c \ll 1$) erhält der Ausdruck (17) die Form $W \approx m \cdot c^2 + \frac{m \cdot v^2}{2}$, d. h., nach Abzug der Ruhenergie erhalten wir den klassischen Ausdruck für die kinetische Energie eines Körpers.
Aus den Größengleichungen (16) und (17) ergibt sich folgende Beziehung zwischen der Energie und dem Impuls eines freien materiellen Teilchens:

$$\mathfrak{g} = \frac{W \mathfrak{v}}{c^2}. \tag{18}$$

Bei $v = c$ gehen der Impuls $\mathfrak{g}$ (16) und die Energie W (17) des Teilchens gegen Unendlich. Das heißt, daß sich ein Teilchen mit einer von Null verschiedenen Masse nicht mit der Geschwindigkeit c bewegen kann. Eine Ausnahme stellt nur das Teilchen dar, dessen Masse gleich Null ist. Sein Impuls, niedergeschrieben wie in Gleichung (16), liefert bei $v = c$ den unbestimmten Ausdruck 0:0 und kann endlich bleiben. Aber dann muß die Geschwindigkeit dieses Teilchens ständig gleich c sein. Aus der Gleichung (18) finden wir für solche Teilchen

$$g = \frac{W}{c}.$$

Also können in der relativistischen Mechanik Teilchen mit der Masse Null existieren, die sich mit der Geschwindigkeit c bewegen. Wir werden in der weiteren Abhandlung sehen, daß man das Licht als Teilchen dieser Art betrachten kann.

Ein System relativistischer Teilchen

Die von uns oben entwickelten Größengleichungen sind in gleichem Maße auch auf die Bewegung eines aus vielen Teilchen bestehenden Körpers anwendbar. Dann muß unter Masse die gesamte Masse des Körpers und unter Geschwindigkeit die Geschwindigkeit des Körpers als Ganzes verstanden werden.

Betrachten wir einen (als Ganzes) ruhenden Körper. Dann ist dessen Energie, die wir *innere* nennen können, einfach gleich $M \cdot c^2$, wobei M seine Masse ist. Zu dieser Energie gehört außer der Ruhenergie der im Körper enthaltenen Teilchen noch die kinetische Energie dieser Teilchen und die Energie ihrer Wechselwirkungen. Mit anderen Worten ist $M \cdot c^2$ nicht gleich der Summe $\sum\limits_{\alpha} m_\alpha c^2$; m_α ist die Masse der Teilchen α, und darum ist M auch nicht gleich $\sum\limits_{\alpha} m_\alpha$.

Folglich gibt es in der relativistischen Mechanik kein Gesetz für die Erhaltung der Masse; die Masse eines zusammengesetzten Körpers ist nicht gleich der Summe der Massen seiner Teilchen. Dafür gilt aber der Energieerhaltungssatz, in den auch die Ruhenergie der Teilchen eingeht. Die Differenz

$$\Delta M = M - \sum_{\alpha} m_\alpha$$

zwischen der Gesamtmasse und der Summe der Massen der einzelnen Teilchen nennt man „Massendefekt". Die Größe $\Delta M \cdot c^2$ wird Bindungsenergie des Körpers genannt.

Wir betrachten einen Körper, der aus zwei Teilen mit den Massen M_1 und M_2 bestehen möge, in einem Bezugssystem, in dem er ruht. Wir nehmen an, daß der Körper spontan in zwei Teile zerfällt, deren Geschwindigkeiten wir mit v_1 und v_2 bezeichnen wollen. Dann gilt entsprechend dem Energieerhaltungssatz

$$M \cdot c^2 = \frac{M_1 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{M_2 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}.$$

Diese Beziehung kann nur dann sinnvoll gelöst werden, wenn $M > M_1 + M_2$, d. h., wenn der Massendefekt $\Delta M = M - M_1 - M_2$ positiv ist. Also kann ein Körper nur dann spontan zerfallen, wenn sein Massendefekt (bezogen auf die Teile, in die er zerfällt) positiv ist. Wenn dagegen der Massendefekt einen negativen Wert besitzt, erweist sich der Körper als stabil, aus eigenem Antrieb zerfällt er dann nicht. In diesem Falle muß zum Zustandekommen des Zerfalls offensichtlich dem Körper von

außen ein Betrag an Energie zugeführt werden, der mindestens gleich der Bindungsenergie $\Delta M \cdot c^2$ ist.
Nun sei noch eine überaus wichtige Bemerkung gemacht.

Elementarteilchen in der Relativitätstheorie

Ein bestimmter starrer Körper[1] sei durch eine äußere Einwirkung an einer beliebigen Stelle in Bewegung versetzt worden. Wäre der Körper wirklich absolut starr, hätten alle Punkte des Körpers gleichzeitig mit dem erregten in Bewegung geraten müssen. Diese Annahme macht die klassische Mechanik, da sie die augenblickliche Ausbreitung von Wechselwirkungen voraussetzt. Im Rahmen der Relativitätstheorie ist das unmöglich, da sich die Störung von dem betreffenden Punkte mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet, sich deshalb alle Punkte des Körpers nicht gleichzeitig in Bewegung setzen können — der Körper verformt sich! Die Relativitätstheorie führt uns also zu der Schlußfolgerung, daß es einen absolut starren Körper nicht geben kann.
Aus dem Gesagten gibt es einige Schlußfolgerungen für die Elementarteilchen. Unter Elementarteilchen verstehen wir solche, die an allen physikalischen Vorgängen nur als Ganze teilnehmen, d. h., es hat keinen Sinn, von ihren Teilen zu sprechen. Man kann auch sagen, daß der Zustand eines Elementarteilchens vollkommen bestimmt ist, wenn seine Lage und seine Geschwindigkeit gegeben sind. Falls ein Elementarteilchen endliche Abmessungen besäße, müßte es auch deformierbar sein, da ja der Begriff der Deformation mit der Möglichkeit der unabhängigen Bewegung einzelner Teile des Körpers verbunden ist. Wie wir jedoch gerade erkannten, läßt die Relativitätstheorie die Existenz eines absolut starren Körpers nicht zu. Somit gelangen wir zu dem sehr wesentlichen Ergebnis: Elementarteilchen können in der Relativitätstheorie keine endliche Ausdehnung besitzen, sondern sie müssen als geometrische Punkte betrachtet werden.

[1] Unter einem starren Körper verstehen wir ein System von Massenpunkten, deren Abstand voneinander ständig konstant ist.

3. Die Theorie des elektromagnetischen Feldes

Felder

Bis jetzt betrachteten wir Eigenschaften von Teilchen und sahen dabei, daß sich die Wechselwirkungen der Teilchen untereinander mit dem Begriff „Kraftfeld“ beschreiben lassen. Anstatt davon zu sprechen, daß ein Teilchen auf ein anderes wirkt, kann man nämlich sagen, daß das Teilchen um sich herum ein Feld schafft. Auf jedes in diesem Feld befindliche andere Teilchen wirkt eine gewisse Kraft.
In der klassischen Mechanik ist das Feld nur ein Mittel zur Beschreibung der Wechselwirkungen von Teilchen. In der Relativitätstheorie jedoch ändert sich dank der Grenzgeschwindigkeit für die Ausdehnung von Wechselwirkungen die Sachlage ganz wesentlich. Kräfte, die in einem bestimmten Augenblick auf Teilchen wirken, sind nicht durch deren Verteilung in diesem Moment bestimmt. Die Änderung der Lage eines Teilchens widerspiegelt sich bei den anderen Teilchen erst nach Ablauf eines gewissen Zeitintervalls. Das bedeutet, daß *das Feld* für sich allein physikalisch real wird.
Man kann nicht von einer unmittelbaren Wechselwirkung zwischen Teilchen sprechen, wenn sie sich in einem gewissen Abstand voneinander befinden. Eine Wechselwirkung kann in jedem Augenblick nur zwischen zwei benachbarten Punkten des Raumes stattfinden (Nahwirkung). Deshalb muß man von der Wechselwirkung eines Teilchens mit dem Feld und einer darauf folgenden Wechselwirkung des Feldes mit einem anderen Teilchen sprechen.
Wir gehen jetzt zur Beschreibung der Eigenschaften des neuen physikalischen Objekts – des Feldes – über. Wir werden zwei Arten von Feldern betrachten, das Gravitations- und das elektromagnetische Feld. Verweilen wir zuerst beim *elektromagnetischen Feld.*

Die klassische Elektrodynamik

Das Feld offenbart seine Eigenschaften nur bei Wechselwirkungen mit Körpern. Daraus folgt, daß es durch die Wirkung charakterisiert werden muß, die es auf die Bewegung eines hineingebrachten Körpers ausübt.

Deshalb sind zwei Felder physikalisch gleichwertig, wenn sie auf ein Teilchen an einem beliebigen Punkte in einem beliebigen Augenblick gleiche Wirkung ausüben.

Die elektrische Ladung des Teilchens

Die Wechselwirkung eines vorhandenen elektromagnetischen Feldes mit einem gewissen Teilchen wird durch eine Größe bestimmt, die für dieses Teilchen typisch ist. Diese Größe heißt die Ladung[1] des Teilchens. Die Ladung kann sowohl positiv als auch negativ sein, insbesondere kann sie auch gleich Null sein.

Das Feld ruhender Teilchen

Beginnen wir mit der Betrachtung des einfachsten Falles, des konstanten elektrischen oder, wie man sagt, des elektrostatischen Feldes, das von ruhenden geladenen Teilchen erzeugt wird. In einem solchen Feld wird auf einen Körper mit der Ladung Q_1 eine Kraft wirken

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q \cdot Q_1}{r^2} \tag{19}$$

mit Q ... felderzeugende Ladung
r ... Abstand zwischen den Körpern mit den Ladungen Q und Q_1.
Das ist das sogenannte Coulombsche Gesetz. Aus ihm erhält man leicht die Energie der zwei Ladungsträger. Unter Berücksichtigung der bekannten Beziehung $F = -\mathrm{d}W/\mathrm{d}r$ erhalten wir nämlich aus (19):

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q \cdot Q_1}{r}. \tag{20}$$

Die von uns niedergeschriebenen Formeln für die Kraft und die potentielle Energie würden sich nicht ändern, wenn wir für beide Ladungen $-Q$ an Stelle von Q einsetzten. Hieraus folgt, daß jede Bezeichnung der Ladungen, ob positiv oder negativ, nur eine Frage der Definition ist. Veränderungen gibt es nur bei verschiedenen Vorzeichen.
Aus der Größengleichung (20) folgt auch, daß die potentielle Energie verschiedene Vorzeichen haben kann; sie ist positiv, wenn beide Ladungen gleiche Vorzeichen besitzen, sie ist negativ, wenn beide Ladungen verschiedene Vorzeichen besitzen. Dieser Zustand entspricht der Tatsache,

[1] Laut Definition ist die Ladung eine invariante Größe, d. h., sie hängt nicht von der Wahl des Bezugssystems ab.

daß wir sowohl Abstoßung als auch Anziehung zwischen den geladenen Körpern beobachten.[1]

Es werden Größen eingeführt, die das Feld selbst charakterisieren

$$E = \frac{F}{Q_1}. \tag{21}$$

Der Quotient aus der Kraft und der zugehörigen Ladung wird *Feldstärke*[2] des elektrischen Feldes genannt.

$$\varphi = \frac{W}{Q_1}. \tag{22}$$

Der Quotient aus der Energie und der zugehörigen Ladung heißt *Potential* des elektrischen Feldes.

Mit den Beziehungen (19) und (20) kann man die Größengleichungen (21) und (22) für punktförmige Massen in der Form schreiben

$$E = \frac{Q}{r^2}$$

und

$$\varphi = \frac{Q}{r}.$$

In diesen letzten Formeln werden die Werte der Feldstärke und des Potentials an einem Punkte des Raumes gesucht, der die Entfernung r von der felderzeugenden Ladung Q besitzt.

Das Feld eines Systems von Teilchen

Haben wir ein System von Ladungen vor uns, dann gehen wir bei der Ermittlung der Struktur des Feldes von folgender sehr wichtigen Eigenschaft elektromagnetischer Felder aus. Wie die Erfahrung lehrt, unterliegt das elektromagnetische Feld dem sogenannten *Superpositionsprinzip.* Dieses Prinzip sagt aus: Erzeugt die eine Ladung das eine Feld, eine andere ein anderes, dann erweist sich das aus beiden Ladungen zusammengesetzte Feld als das Ergebnis einer einfachen Addition der Felder, die von jeder Ladung im einzelnen geschaffen worden sind. Die Feldstärke des resultierenden Feldes ist in jedem Punkte gleich der Vektorsumme der Feldstärken jedes einzelnen Feldes in diesem Punkte.

Stellen wir uns ein System aus einigen geladenen Teilchen vor. Wir

[1] Wir machen hier eine allgemeine Bemerkung. Weil wir die potentielle Energie in Wechselwirkung stehender Teilchen immer so auswählen, daß sie bei unendlich großen Abständen zwischen den Teilchen gegen Null geht und man unter solchen Bedingungen die Wechselwirkung vernachlässigen kann, ist aus dem Vorzeichen der potentiellen Energie auf den Charakter der Wechselwirkung zu schließen: Anziehung oder Abstoßung. Bei Abstoßung ist die Größe positiv, bei Anziehung negativ.

[2] Auf die exakte Definition der Potentialdifferenz $\Delta\varphi = \int_{P_1}^{P_2} \mathfrak{E} d\mathfrak{s}$ verzichtet der Autor (Bemerkung des Übersetzers).

wollen das von diesem System erzeugte Feld in großem Abstand von ihm bestimmen. Entsprechend dem Superpositionsprinzip wird es gleich der Summe der Felder sein, die von jeder einzelnen Ladung hervorgerufen worden sind. Das Ergebnis ist

$$E = \frac{Q_1}{r^2} + \frac{Q_2}{r^2} + \frac{Q_3}{r^2} + \dots.$$

Wir schreiben hier keine Vektorsumme, da wir annehmen, daß alle Teilchen in einem kleinen Raumelement konzentriert sind und der Ortsvektor für alle der gleiche ist. Darum kann man auch schreiben

$$E = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 \cdots}{r^2}.$$

Das Gesetz für die Erhaltung der Ladung

Wir sehen, daß sich das Feld eines Systems von Teilchen nicht von dem eines einfachen Teilchens unterscheidet. Es steht nur die Summe der Ladungen $Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots$ an Stelle der Ladung Q. Diese Beziehung trägt die Bezeichnung „Gesetz für die Erhaltung der Ladung". Sie zeigt, daß die Ladung eines Systems von Ladungen gleich der Summe der einzelnen Ladungen ist. Betrachten wir ein System punktförmiger Ladungen und bestimmen dessen Energie.

Die Energie eines Systems von Ladungen

Wir werden vom Ausdruck (20) ausgehen, der die Energie der Wechselwirkung zweier Ladungen darstellt. Aus mathematischer Zweckmäßigkeit und wegen der mehr symmetrischen Form der Gleichung schreiben wir diesen Ausdruck mit neuen Indizes

$$W = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r}. \tag{23}$$

Führen wir die von den Ladungen Q_1 und Q_2 geschaffenen Potentiale $\varphi_1 = Q_2/r$ und $\varphi_2 = Q_1/r$ ein, wird aus (23)

$$W = \frac{1}{2}(Q_1 \varphi_1 + Q_2 \varphi_2).$$

Verallgemeinern wir diesen Ausdruck auf eine willkürliche Anzahl Ladungen, erhalten wir

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i \varphi_i,$$

worin φ_i das Potential des Feldes ist, das von allen Ladungen an dem Punkte erzeugt wurde, an dem sich Q_i befindet.

Die „Eigenenergie" des Teilchens

Wenden wir die erhaltene Gleichung auf ein geladenes Elementarteilchen (z. B. ein Elektron) und das von ihm selbst erzeugte Feld an, kommen wir zu dem Schluß, daß die Ladung eine gewisse „eigene" potentielle Energie von der Größe $e\varphi/2$ besitzen muß (e ... Elementarladung), wobei φ das Potential der felderzeugenden Ladung an dem Orte ist, an dem sie sich selbst befindet. Wir wissen aber, daß man in der Relativitätstheorie jedes Teilchen als punktförmig betrachten muß. Das Potential $\varphi = e/r$ seines Feldes geht im Punkt $r = 0$ jedoch gegen Unendlich. Folglich müßte nach der Elektrodynamik das Elektron eine unendlich große „Eigenenergie" und auch eine unendlich große Masse (als Quotient aus der Energie und dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit) besitzen. Da dieses Ergebnis physikalisch nicht sinnvoll ist, werden wir selbst schon bei den grundlegenden Prinzipien der Elektrodynamik auf die Notwendigkeit hingewiesen, bestimmte Grenzen für ihren Gültigkeitsbereich anzugeben.

Es soll bemerkt werden, daß man angesichts der aus den Gesetzen der Elektrodynamik erhaltenen unendlichen „Eigenenergie" und Masse in dieser Theorie nicht die Frage stellen kann, ob die ganze Masse des Elektrons elektromagnetisch ist (d. h. mit elektromagnetischer „Eigenenergie" des Teilchens verknüpft sei).

Die Grenzen für die Anwendung der klassischen Elektrodynamik

Da das Auftreten der physikalisch sinnlosen unendlich großen „Eigenenergie" des Elementarteilchens mit der Annahme verbunden ist, solche Teilchen als punktförmig zu betrachten, kann man die Schlußfolgerung ziehen, daß die Elektrodynamik als logische abgeschlossene Theorie beim Übergang zu sehr kleinen Abständen in sich widersprüchlich wird. Nun kann man die Frage stellen, von welcher Größenordnung diese Abstände sind. Eine Antwort auf diese Frage ist möglich, wenn man beachtet, daß die elektromagnetische Eigenenergie des Elektrons einen Wert in der Größenordnung der Ruhenergie $m \cdot c^2$ annehmen müßte.

Wenn man andererseits das Elektron als mit einer gewissen Ausdehnung r_0 behaftet betrachtet, dann wäre seine eigene potentielle Energie in der Größenordnung e^2/r_0. Aus der Forderung, beide Größen müßten in einer Größenordnung liegen: $e^2/r_0 \sim m \cdot c^2$, finden wir[1]

$$r_0 \sim e^2/m \cdot c^2.$$

[1] Die Größe $r_0 = e^2/m \cdot c^2$ wird „klassischer Elektronenradius" genannt und ist zahlenmäßig ungefähr 10^{-15} m.

Diese Abmessungen bestimmen die Grenzen für die Anwendung der Elektrodynamik. Sie folgen schon aus ihren eigenen Grundprinzipien. Man muß jedoch beachten, daß die Gültigkeitsgrenzen der hier ausgelegten Elektrodynamik (man nennt sie gewöhnlich die „klassische“) in Wirklichkeit wegen der Quantenerscheinungen[1] noch weit höher liegen.

Die Maxwellschen Gleichungen

Wir betrachteten die grundlegenden Begriffe der Theorie elektromagnetischer Felder, oder, wie man sagt, der klassischen Elektrodynamik am einfachsten Beispiel des elektrostatischen Feldes. Gehen wir jetzt zum allgemeinen elektromagnetischen Feld über und stellen fest, wie die dieses Feld beschreibenden Gleichungen aussehen müssen.
Jede Lösung der Feldgleichung muß ein Feld beschreiben, das es in der Natur wirklich gibt. Nach dem Superpositionsprinzip muß die Summe beliebiger solcher Felder auch in der Natur tatsächlich vorkommen können, d. h., dieses Feld muß durch die Feldgleichung ebenfalls befriedigt werden. Bekanntlich haben lineare Differentialgleichungen solche Eigenschaften, daß die Summe beliebiger Einzellösungen wieder eine Lösung ist. Deshalb müssen die Feldgleichungen lineare Differentialgleichungen sein. Das System dieser das elektromagnetische Feld beschreibenden Gleichungen heißt *Maxwellsche Gleichungen.* Sie stellen die Grundgesetze der Elektrodynamik dar.[2]

$$\dot{\mathfrak{B}} = -\operatorname{rot}\mathfrak{E} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{B} = 0$$

$$\dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{S} = +\operatorname{rot}\mathfrak{H} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{D} = \varrho$$

Die Invarianz der Feldgleichungen

Da das Feld ein relativistisches Objekt ist, sind die Maxwellschen Gleichungen invariant bezüglich der Lorentz-Transformation.

[1] Quanteneffekte werden bedeutend bei Abständen in der Größenordnung h/mc, das sind 10^{-12} m; h ... Plancksches Wirkungsquantum.

[2] Wir möchten hier bemerken, daß in den Maxwellschen Gleichungen meistens die Ladungsverteilung und ihre Bewegung im Raum als bekannt angesehen werden. Das von ihnen erzeugte Feld ist dann als Lösung dieser Gleichungen zu finden.

Transformationsgesetze für Felder

Aus den Transformationsgesetzen für Felder sieht man, daß das elektrische und das magnetische Feld wie auch die Mehrheit der physikalischen Größen relativ sind, d. h., ihre Eigenschaften sind in den verschiedenen Bezugssystemen unterschiedlich. Insbesondere kann das elektrische oder das magnetische Feld in einem Bezugssystem gleich Null sein, während es gleichzeitig in einem anderen System von Null verschieden, d. h. vorhanden ist.

Erhaltungssätze in der Elektrodynamik

Da das Feld wegen der maximalen Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wechselwirkungen als selbständiges System mit eigenen „Freiheitsgraden" betrachtet werden muß, kommen ihm selbstverständlich solche Größen wie Energie, Impuls und Drehimpuls zu. Klar ist auch, daß es sowohl für das (freie) Feld allein als auch für das Feld zusammen mit den in ihm befindlichen Ladungen alle entsprechenden Erhaltungssätze geben wird.

Das Feld im Vakuum

Wenden wir uns wieder den Maxwellschen Gleichungen zu. Diese Gleichungen besitzen eine sehr wichtige Besonderheit: Für das Vakuum können sie eine von Null verschiedene Lösung haben. Das bedeutet, daß das elektromagnetische Feld auch existieren kann, wenn gar keine Ladungen vorhanden sind.

Elektromagnetische Wellen

Elektromagnetische Felder breiten sich auch im Vakuum, wo keine Ladungen vorhanden sind, in Form elektromagnetischer Wellen aus. Verweilen wir jetzt bei den Eigenschaften dieser Felder.

Zuerst muß gesagt werden, daß ein solches elektromagnetisches Feld ohne elektrische Ladungen unbedingt veränderlich sein muß — das folgt aus der Struktur der Gleichung.

$$\dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{S} = \mathrm{rot}\,\mathfrak{H}$$

(rot $\mathfrak{H} \neq 0$, auch wenn die elektrische Stromdichte $\mathfrak{S}$ gleich Null ist.)

Wir betrachten einen Sonderfall elektromagnetischer Wellen, für welche das Feld nur von *einer* Ortskoordinate, sagen wir x, und von der Zeit abhängt. Solche Wellen werden eben genannt. In diesem Fall hat die Feldgleichung eine Lösung dergestalt

$$f = f_1 (\mathrm{x} - c \cdot t) + f_2 (\mathrm{x} + c \cdot t),$$

wo man unter f eine beliebige Komponente der das Feld charakterisierenden Vektorgrößen versteht. f_1 und f_2 sind willkürliche Funktionen. Es möge beispielsweise $f_2 = 0$ sein, dann wird $f = f_1 (\mathrm{x} - c \cdot t)$. Erklären wir den Sinn dieser Gleichung. In jeder Ebene $\mathrm{x} = \mathrm{const.}$ ändert sich das Feld mit der Zeit, in jedem Augenblick ist das Feld für verschiedene x verschieden. Offensichtlich besitzt das Feld den gleichen Wert für die Koordinaten x und die Zeiten t, die der Beziehung $\mathrm{x} - c \cdot t = \mathrm{const.}$ genügen, also

$$\mathrm{x} = \mathrm{const.} + c \cdot t.$$

Das bedeutet: Hatte zum Zeitpunkt $t = 0$ an einem gewissen Ort x des Raumes die Feldstärke einen bestimmten Wert, wird sie nach dem Zeitintervall t im Abstand $c \cdot t$ vom Ausgangspunkt längs der x-Achse den gleichen Wert haben. Wir können sagen, daß sich alle Werte des elektromagnetischen Feldes im Raum längs der x-Achse mit der Geschwindigkeit c ausbreiten.
Somit stellt $f_1 (\mathrm{x} - c \cdot t)$ eine ebene Welle dar, die sich im Raume in positiver Richtung der x-Achse ausbreitet. Man kann sich leicht vorstellen, daß $f_2 (\mathrm{x} + c \cdot t)$ eine ebene Welle ist, die sich in entgegengesetzter, in negativer Richtung der x-Achse ausbreitet. Augenscheinlich breiten sich diese Wellen unabhängig voneinander aus, d. h., sie treten nicht in Wechselwirkung. Also hat die Lösung der Maxwellschen Gleichungen für den leeren Raum, d. h. beim Fehlen von Ladungen, die Form fortlaufender Wellen. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen, insbesondere des Lichts, im Vakuum ist gleich der universellen Konstanten c.[1]
Es ist interessant festzustellen, daß die Beziehung zwischen Energie und Impuls der elektromagnetischen Welle die gleiche ist wie für Teilchen, die sich mit der Geschwindigkeit c bewegen.

[1] Darum nennt man die Konstante c Lichtgeschwindigkeit.

Einen sehr wichtigen Sonderfall der elektromagnetischen Welle haben wir in der Welle vor uns, deren Feld eine einfache periodische Funktion der Zeit ist. Diese Welle wird monochromatisch genannt. Die Abhängigkeit von der Zeit wird bei allen Größen der monochromatischen Welle durch einen Faktor der Gestalt $\cos \omega t$ bestimmt. Die Größe ω heißt Kreisfrequenz der Welle. Eine Periodendauer der Welle ist gleich $2\pi/\omega$.
In einer ebenen Welle, die sich in Richtung der positiven x-Achse ausbreitet, ist das Feld nur eine Funktion von $x - c \cdot t$. Wenn eine ebene Welle monochromatisch ist, ist deshalb ihr Feld eine einfache periodische Funktion von $x - c \cdot t$.
Es möge f eine beliebige Komponente einer das Feld charakterisierenden vektoriellen Größe sein. Dann schreibt man den Ausdruck für f in einer solchen Welle am günstigsten in Form des reellen Teils eines komplexen Ausdrucks[1]

$$f = a e^{-i\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)}. \tag{24}$$

(Wir lassen das Symbol Re weg, hierunter verstehen wir den Realanteil.) Hier ist a eine Konstante, die *Amplitude* der zugehörigen Größe genannt wird.
Die Größe $\lambda = 2\pi c/\omega$ heißt *Wellenlänge*, hier vollzieht sich die periodische Veränderung des Feldes längs der Koordinate x in der gegebenen Zeit t.
Führt man den Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ in Richtung der Wellenausbreitung ein, kann man (24) in folgender Form schreiben:

$$f = a e^{-i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\mathfrak{n}\mathfrak{r}\right)}.$$

Der Vektor

$$\mathfrak{k} = \frac{\omega}{c}\mathfrak{n} = \frac{2\pi}{\lambda}\mathfrak{n}$$

wird Wellenvektor genannt. Folglich wird eine ebene monochromatische Welle durch den Ausdruck beschrieben

$$f = a e^{i(\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{r} - \omega \cdot t)}. \tag{25}$$

Der Ausdruck in der Klammer heißt Phase der Welle.

[1] Die Benutzung komplexer Ausdrücke ist sehr günstig angesichts der Linearität der Maxwellschen Gleichungen. Dann braucht man nämlich nicht alle Operationen trigonometrisch auszuführen, sondern kann es mit der viel einfacheren Exponentialfunktion tun. Nur dann kann man zu ihrem reellen Anteil übergehen. Im weiteren werden wir die komplexe Schreibweise benutzen. Es wird darunter immer der reelle Teil des entsprechenden komplexen Ausdrucks verstanden.

Interferenz von Wellen

Betrachten wir noch eine Anzahl Eigenschaften elektromagnetischer Wellen. Nehmen wir zwei Wellen f_1 und f_2 an, die sich in einer gemeinsamen Richtung ausbreiten und deren Schwingungen auch in einer Richtung verlaufen, dann geben sie eine Welle mit der Funktion

$$f = f_1 + f_2.$$

Die mittlere Intensität der Welle (die Intensität ist als Quadrat der Wellenfunktion definiert) lautet:

$$\overline{f^2} = \overline{f_1^2} + \overline{f_2^2} + 2\,\overline{f_1 f_2}. \tag{26}$$

Folglich unterscheidet sich die mittlere Intensität der resultierenden Welle, allgemein gesagt, von der Summe der mittleren Intensitäten der einzelnen Wellen. Diese Erscheinung nennt man *Interferenz.* Falls in (26) das Glied fehlt, welches das Produkt der Komponenten beider Wellen enthält, d. h., $f_1 \cdot f_2 = 0$, dann heißt das, daß es keine Interferenz gibt. Die letzte Gleichung bedeutet ihrerseits, daß beide Wellen physikalisch unabhängig voneinander sind (z. B. gehen sie von verschiedenen Quellen aus). Wenn zwei Wellen voneinander nicht abhängig sind, ist tatsächlich der Mittelwert des Produkts $\overline{f_1 f_2}$ gleich dem Produkt $\overline{f_1} \cdot \overline{f_2}$ der Mittelwert von $\overline{f_1}$ und $\overline{f_2}$, und da jeder von ihnen gleich Null ist (der oszillierende Faktor $e^{\pm i\omega t}$ ergibt im Mittel Null), dann ist auch $\overline{f_1 \cdot f_2} = 0$.

Geometrische Optik

Eine ebene Welle zeichnet sich dadurch aus, daß ihre Ausbreitungsrichtung und ihre Amplitude überall gleich sind. Elektromagnetische Wellen besitzen diese Eigenschaft im allgemeinen nicht.

Jedoch lassen es die elektromagnetischen Wellen in der Mehrheit der Fälle zu, wenn sie auch nicht eben sind, so doch wenigstens in einem kleinen Raumelement sie als eben zu betrachten. Voraussetzung zu dieser Annahme ist offensichtlich, daß sich Amplitude und Richtung der Welle über eine Strecke von der Größenordnung der Wellenlänge fast nicht ändern.

Ist diese Bedingung erfüllt, kann man sogenannte *Wellenfronten* einführen, das sind Linien, die alle Orte gleicher Phase (zu einem bestimmten Zeitpunkt) verbinden. Wellenfronten ebener Wellen sind natürlich Ebenen, die senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle stehen. In jedem kleinen Raumelement kann man davon sprechen, daß die Ausbreitungsrichtung normal zur Wellenfront stehe. Dabei führt man den

Begriff *Strahl* ein, das ist eine Linie, deren Tangenten in jedem Punkte mit der Ausbreitungsrichtung der Welle übereinstimmen.
Die Untersuchung der Gesetze über die Ausbreitung von Wellen in dieser Betrachtungsweise ist Sache der *geometrischen Optik*. Die geometrische Optik untersucht die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen, besonders des Lichts, als Ausbreitung von Strahlen und abstrahiert dabei vollkommen von der Wellennatur. Mit anderen Worten entspricht die geometrische Optik dem Grenzfall kleiner Wellenlängen für $\lambda \to 0$.

Die Beugung von Wellen

Somit sind die Gesetze der geometrischen Optik nur streng im Idealfall gültig, wenn man die Wellenlänge als unendlich klein betrachten darf.[1] Je weniger genau diese Bedingung erfüllt ist, desto stärker wird die Abweichung von der geometrischen Optik. Erscheinungen, die als Ergebnis dieser Abweichungen zu beobachten sind, tragen die Bezeichnung *Beugung*. Beugung kann man beobachten, wenn sich auf dem Wege der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen Hindernisse befinden – undurchsichtige Körper (wir werden sie Schirme nennen) beliebiger Form oder kleine Öffnungen in undurchsichtigen Schirmen. Würden die Gesetze der geometrischen Optik streng Gültigkeit besitzen, müßten sich hinter den Schirmen „Schatten"-Gebiete befinden, die scharf getrennt von den Gebieten sind, wohin die Welle fällt. Die Beugung führt aber dazu, daß es anstelle einer scharfen Grenze zwischen beleuchtetem Gebiet und „Schatten" ein ziemlich kompliziertes Bild der Intensitätsverteilung ergibt.
Die Beugungserscheinungen treten um so stärker auf, je kleiner die Abmessungen der Schirme oder der Öffnungen in ihnen sind und je größer die Wellenlänge ist.
Beugungserscheinungen sind unmittelbar mit Interferenzerscheinungen verbunden. Besonders anschaulich ist das an folgendem Versuch zu sehen. Stellen wir uns einen Schirm mit zwei Spalten vor. Auf den Schirm möge eine elektromagnetische Welle treffen. Beobachten wir den Durchgang des Lichts durch einen Spalt, während der zweite Spalt verschlossen ist, erhalten wir auf einem Schirm hinter dem Spalt ein gewisses Bild der Intensitätsverteilung. Auf gleiche Weise erhalten wir ein anderes Bild, wenn wir den zweiten Spalt öffnen und den ersten schließen. Lassen wir das Licht aber gleichzeitig durch beide Spalte, erhalten wir keineswegs ein Bild, das eine einfache Übereinanderlegung der beiden

[1] Praktisch besteht die Anwendungsbedingung der geometrischen Optik darin, daß die Wellenlänge klein ist gegenüber den charakteristischen Abmessungen in der Aufgabe.

vorhergehenden darstellt. Nein, auf Grund der Interferenz entdecken wir auf dem Schirm ein Bild abwechselnder Maxima und Minima der Intensität.

Die Ausstrahlung von Wellen

Gehen wir jetzt zu einer anderen Frage über. Unsere Bekanntschaft mit den Grundbegriffen der Theorie der elektromagnetischen Felder begannen wir mit der Untersuchung des konstanten Feldes, das durch ruhende Ladungen erzeugt wird. Anschließend betrachteten wir veränderliche Felder, auch solche ohne Ladungen. Jetzt widmen wir uns der Untersuchung einiger Eigenschaften veränderlicher Felder beim Vorhandensein sich willkürlich bewegender Ladungen.
Wir betrachten ein Feld, das von einem System bewegter Ladungen in großer Entfernung von diesem System geschaffen worden ist (d. h. in einem Abstand, der groß im Vergleich zu den Abmessungen des Systems ist). Dabei stellt sich heraus, daß bei solchen Entfernungen vom Ladungssystem das Feld in nicht zu großen Bereichen als in ebenen Wellen sich ausbreitend betrachtet werden kann. Voraussetzung dafür ist, daß die Entfernungen nicht nur groß im Vergleich zu den Abmessungen des Systems, sondern auch im Vergleich zur Länge der erzeugten oder wie man sagt, *ausgestrahlten* elektromagnetischen Welle sind.
Da wir ein System von Ladungen innerhalb eines begrenzten Raumbereichs betrachten, muß die Bewegung der Ladungen beschleunigt erfolgen. Hieraus ergibt sich, daß nur beschleunigt bewegte Ladungen ausstrahlen können. Ladungen, die sich gleichförmig und geradlinig bewegen, strahlen nicht aus. Das folgt im übrigen direkt aus dem Relativitätsprinzip, nach dem man eine gleichförmig bewegte Ladung in einem solchen Inertialsystem befindlich betrachten kann, in dem es ruht. Ruhende Ladungen strahlen aber bekanntlich nicht aus.
Schließlich, da das Feld Energie besitzt, ist die Ausstrahlung in Form von elektromagnetischen Wellen mit Energieübertragung verbunden.

4. Die Theorie des Gravitationsfeldes

In der Natur gibt es außer den elektromagnetischen Feldern noch Felder anderer Art, sogenannte Gravitations- oder Schwerefelder.

Gravitationsfelder

Alle allgemeinen Überlegungen über das Feld als relativistisches Objekt, die von uns im Zusammenhang mit dem elektromagnetischen Feld angestellt worden sind, bleiben auch für das Gravitationsfeld in Kraft. Deshalb benutzen wir von Anfang an die relativistische Betrachtungsweise. Eine Grundeigenschaft der Gravitationsfelder ist die, daß sich alle Körper unabhängig von ihrer Masse und ihrer Ladung in ihnen in gleicher Weise bewegen (selbstverständlich bei gleichen Anfangsbedingungen). So sind z. B. die Gesetze des freien Falles (im Schwerefeld der Erde) für alle Körper gleich, welche Masse sie auch besitzen. Alle unterliegen ein und derselben Beschleunigung. Im elektromagnetischen Feld ist es anders, in ihm ist die Beschleunigung abhängig vom Verhältnis der Ladung zur Masse, das bei verschiedenen Körpern verschieden sein kann.

Das Äquivalenzprinzip

Diese Eigenschaft der Gravitationsfelder gibt die Möglichkeit, eine wesentliche Analogie zwischen der Bewegung von Körpern in einem Gravitationsfeld und der Bewegung von solchen Körpern aufzustellen, die sich nicht in einem äußeren Felde befinden, die aber vom Standpunkt des Nicht-Inertialsystems zu betrachten sind. Denn in einem Inertialsystem geht die freie Bewegung aller Körper geradlinig und gleichförmig vor sich. Waren ihre Geschwindigkeiten zur Zeit t_0 gleich, dann werden sie es die ganze Zeit über sein. Wenn wir deshalb die freie Bewegung in einem gegebenen Nicht-Inertialsystem betrachten, werden sich auch relativ in ihm alle Körper in gleicher Weise bewegen.
Also sind die Bewegungseigenschaften in einem (beschleunigten) Nicht-

Inertialsystem die gleichen wie in einem Inertialsystem bei Anwesenheit eines Gravitationsfeldes. Mit anderen Worten: Ein Nicht-Inertialsystem ist einem gewissen Gravitationsfeld äquivalent. Diese Tatsache nennt man Äquivalenzprinzip.

Betrachten wir z. B. die Bewegung in einem gleichmäßig beschleunigten Bezugssystem. Die sich in einem solchen Bezugssystem frei bewegenden Körper beliebiger Masse werden offensichtlich relativ zu diesem System die gleiche konstante Beschleunigung besitzen, die entgegengesetzt gleich der Beschleunigung des Bezugssystems selbst ist.[1]

Eine solche Bewegung haben wir in einem homogenen konstanten Gravitationsfeld vor uns, z. B. im Schwerefeld der Erde (in kleinen Bereichen, in denen man das Feld als homogen ansehen kann). Folglich ist ein gleichmäßig beschleunigtes Bezugssystem äquivalent einem konstanten homogenen äußeren Felde. Ein etwas allgemeinerer Fall liegt bei einem ungleichmäßig beschleunigten, translatorisch und geradlinig bewegten Bezugssystem vor, es ist offensichtlich äquivalent einem homogenen, aber veränderlichen Gravitationsfelde.

Einige Besonderheiten

Es muß aber bemerkt werden, daß Felder, welchen Nicht-Inertialsysteme äquivalent sind, nicht alle vollkommen mit „echten" Gravitationsfeldern, die es auch in Inertialsystemen gibt, identisch sind. Es gibt zwischen ihnen sehr wesentliche Unterschiede, besonders bezüglich ihrer Eigenschaften im Unendlichen. In unendlich weiter Entfernung von felderzeugenden Körpern streben „echte" Gravitationsfelder immer gegen Null. Felder aber, denen Nicht-Inertialsysteme äquivalent sind, wachsen dagegen im Unendlichen unbegrenzt, oder sie bleiben höchstens endlich. So wachsen z. B. die in einem rotierenden Bezugssystem auftretenden Zentrifugalkräfte mit dem Abstand von der Drehachse unbegrenzt; das einem beschleunigten geradlinig bewegten Bezugssystem äquivalente Feld ist gleich im ganzen Raum, in diesem Fall auch im Unendlichen.

Felder, denen Nicht-Inertialsysteme äquivalent sind, verschwinden, sobald wir zu einem Inertialsystem übergehen. Demgegenüber kann man „echte" Gravitationsfelder (die auch in einem Inertialsystem existieren) unmöglich durch die Wahl des Bezugsystems ausschalten. Das ist schon aus den oben angeführten Unterschieden zwischen den Bedingungen im Unendlichen einerseits in „echten" Gravitationsfeldern,

[1] Siehe Gleichung (9) auf S. 32.

andererseits in Nicht-Inertialsystemen äquivalenten Feldern ersichtlich. Da die letzten im Unendlichen nicht gegen Null streben, ist es klar, daß „echte“ Felder, deren Grenzwert im Unendlichen Null ist, durch kein noch so ausgewähltes System ausgeschaltet werden können.
Das einzige, was durch entsprechende Wahl des Bezugssystems erreicht werden kann, ist die Ausschaltung des Gravitationsfeldes in einem vorgegebenen Teil des Raumes, der hinreichend klein ist, um das Feld in ihm als homogen annehmen zu dürfen (im Verlaufe eines vorgegebenen kleinen Zeitintervalls). Das kann durch die Auswahl eines beschleunigten Bezugssystems geschehen, dessen Beschleunigung gleich der des Teilchens sein müßte, das sich in dem zu betrachtenden Teil des Feldes aufhält.
Diese Bemerkungen sollen deutlich machen, daß das Äquivalenzprinzip bei der Anwendung auf „echte“ Gravitationsfelder allgemein nur für kleine Raumbereiche gilt, wo man das Feld mit hinreichender Genauigkeit als homogen ansehen kann (im Verlauf des vorgegebenen kleinen Zeitintervalls).

Krummlinige Koordinatensysteme

Um noch weitere Schlußfolgerungen aus der dargelegten Sachlage ziehen zu können, muß man das Äquivalenzprinzip in Aktion betrachten. Dazu nehmen wir uns ein Nicht-Inertialsystem K' vor, das sich gleichförmig bezüglich des Inertialsystems K um die gemeinsame Z-Achse dreht. Wir schreiben die Größengleichungen für das Wegelement (im Original Intervall genannt) in beiden Systemen auf und vergleichen sie. In einem Inertialsystem mit kartesischen Koordinaten ist das Wegelement $\mathrm{d}S$ bekanntlich bestimmt durch die Beziehung

$$\mathrm{d}S^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2. \qquad (27)$$

Beim Übergang zu einem beliebigen anderen Inertialsystem, d. h. bei der Lorentz-Transformation, behält das Intervall, wie auch schon bekannt, sein Aussehen. Gehen wir aber zu einem Nicht-Inertialsystem über, wird $\mathrm{d}S^2$ nicht die ehemalige Form haben. In unserem Fall, beim Übergang zu einem gleichförmig rotierenden Koordinatensystem

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \omega \cdot t - y' \sin \omega \cdot t, \\ y &= x' \sin \omega \cdot t + y' \cos \omega \cdot t \\ z &= z' \end{aligned}$$

(ω ... Winkelgeschwindigkeit der Drehung) ist das Wegelement zu berechnen aus

$$dS^2 = [c^2 - \omega^2 (x'^2 - y'^2)\, dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \\ + 2\, \omega y' dx' dt - 2\, \omega x' dy' dt. \tag{28}$$

Durch welches Gesetz auch die Zeit umgewandelt werden würde, dieser Ausdruck für dS^2 läßt sich nicht in die Form von (27) bringen.
Also wird das Quadrat des Wegelements in einem Nicht-Inertialsystem durch eine quadratische Form allgemeiner Art aus den Differentialen der Koordinaten dargestellt. Dieses Ergebnis bedeutet insbesondere, daß ein vierdimensionales Koordinatensystem (eine der Koordinaten ist die Zeit) bei der Verwendung eines Nicht-Inertialsystems *krummlinig* ist.

Das nichteuklidische Verhalten von Raum und Zeit, die Natur des Schwerefeldes

Die Formel für das Wegelement bestimmt alle geometrischen Eigenschaften von Raum und Zeit in jedem gegebenen krummlinigen Koordinatensystem, oder, wie man sagt, sie stellt die Raum-Zeit-Metrik auf.
Kehren wir zur Betrachtung unseres rotierenden Bezugssystems zurück, so sehen wir durch einen Vergleich der Ausdrücke (27) und (28), daß sich beim Übergang von einem Inertialsystem zu einem Nicht-Inertialsystem die geometrischen Eigenschaften des Raumes ändern. Man sagt, daß die Geometrie des Raumes nichteuklidischen Charakter besitzt, der von den Eigenschaften der gewöhnlichen euklidischen Geometrie abweicht.
Wenden wir schließlich auf unseren Fall das Äquivalenzprinzip an, d. h. die Tatsache, daß jedes Nicht-Inertialsystem einem Inertialsystem bei Vorhandensein eines entsprechenden Gravitationsfeldes gleichwertig ist, so können wir schlußfolgern, daß sich jedes Gravitationsfeld nicht anders als durch die Veränderung der geometrischen Raum-Zeit-Charakteristiken (ihrer Metrik) offenbart.
Zur Erläuterung des eben Gesagten betrachten wir zweckmäßigerweise das einfache Beispiel des rotierenden Bezugssystems. Wir betrachten den Kreis, der in diesem System (System K') in der Ebene x', y' mit dem Mittelpunkt in der Drehachse gezogen ist. Findet keine Drehung statt, sei das Verhältnis der Länge des Kreisumfangs l zu seinem Durchmesser d gleich π. Jedoch bei einer Drehung relativ zum Inertialsystem K unterliegen alle Längenelemente längs der Kreislinie einer Lorentz-Kontraktion im Vergleich zu K, während die Elemente längs des Radius (senkrecht zur Geschwindigkeit) unverändert bleiben. Folglich wird sich l/d von π unterscheiden. Wir sehen hierbei, daß die geometrischen Be-

ziehungen in einem Nicht-Inertialsystem sich tatsächlich als nichteuklidisch erweisen. Das steht im Gegensatz zu dem, was wir von Inertialsystemen wissen. Betrachten wir nunmehr zwei gleiche Uhren (die sich mit K' drehen), eine auf der Kreislinie, die andere im Mittelpunkt, dann wird bei einer Beobachtung vom System K aus die Uhr auf der Kreislinie langsamer laufen als die Uhr im Mittelpunkt. Das gleiche muß folglich auch vom Gesichtspunkt des Systems K' stattfinden.[1]
Also ändern sich auch die Eigenschaften der Zeit beim Übergang zu einem Nicht-Inertialsystem.

Längen und Zeitintervalle in der allgemeinen Relativitätstheorie

Spricht man von Längen und Zeitabschnitten bei Vorhandensein eines Gravitationsfeldes, so hängen die Zeitabschnitte, darauf wiesen wir schon hin, vom Felde ab. Aus dem Dargelegten ist leicht zu ersehen, daß dies auch für die Abstände zwischen den Körpern zutrifft. Tatsächlich bedeutet das Vorhandensein eines Gravitationsfeldes eine Änderung der Raum-Zeit-Metrik, wobei sich besonders die Metrik des Raumes selbst verändert, der bis dahin doch allgemein nur von der Zeit abhängig zu sein schien. Eine Schlußfolgerung daraus ist, daß die ein System darstellenden Körper relativ zueinander nicht unbeweglich sein können. Solche Formveränderungen sind unvermeidlich. Wir kennen sie besonders anschaulich aus dem Beispiel, nach dem im nichteuklidischen Raum das Verhältnis von Kreisumfang und zugehörigem Radius nicht gleich 2π ist, sondern sich, allgemein gesagt, mit der Zeit ändert. Wenn die Abstände der Körper längs des Kreishalbmessers unveränderlich bleiben, so müssen sie sich aber längs des Kreisumfangs ändern und umgekehrt. Deshalb darf man in einem beliebigen System die Verteilung der Körper zueinander keinesfalls als unveränderlich betrachten.

Das Bezugssystem in der allgemeinen Relativitätstheorie

Im Zusammenhang mit dem Dargelegten werden wir noch eine Bemerkung zum Begriff des Bezugssystems bei Vorhandensein eines Gravitationsfeldes machen. Bis jetzt abstrahierten wir vom Schwerefeld und benutzten als Bezugssystem die Gesamtheit der Körper mit unveränderlichen Abständen, d. h., wir betrachteten sie als relativ ruhend. Ist aber

[1] Nach dem Äquivalenzprinzip kann man dieses Resultat auch anders formulieren, besonders als Änderung des Ganges der Uhren unter dem Einfluß des Schwerefeldes. Wenn sich eine von zwei Uhren eine gewisse Zeit in einem Gravitationsfeld befunden hat, stellt sich danach heraus, daß sie nachgeht.

ein Gravitationsfeld vorhanden, darf man das nicht, da, wie wir sahen, unter diesem Umstande jeder Sinn für die Vorstellung von der Unbeweglichkeit der Körper zueinander verlorengeht. Mehr noch, auch der allgemeine Begriff einer bestimmten Geschwindigkeit der Bewegung der Körper verliert seinen Sinn.
Im Einklang damit muß man zu einer genauen Bestimmung der Lage eines Körpers im Raum — wenn ein Gravitationsfeld vorhanden ist und wir streng vorgehen wollen — ein System aus unendlich vielen Körpern benutzen, die den ganzen Raum ausfüllen. Jeder Körper hätte eine anders gehende Uhr, und ein System solcher Körper wäre das für die allgemeine Relativitätstheorie geeignete Bezugssystem.

Raum und Materie

Jetzt ist es angebracht, einen Überblick darüber zu geben, wie sich der Inhalt physikalischer Grundbegriffe, speziell der Begriffe Länge und Zeitintervall, bei der Erweiterung des Kreises der betrachteten Erscheinungen verändert (verallgemeinert).
In der nichtrelativistischen Mechanik hatten Längen und Zeitabschnitte in allen Bezugssystemen ein und dieselbe Bedeutung. Sie waren absolut. In der speziellen Relativitätstheorie hängen sie schon von der Wahl des Bezugssystems ab.
Unter Berücksichtigung der Gravitationsfelder (in der allgemeinen Relativitätstheorie) erfahren die räumlich-zeitlichen Beziehungen, die Längen und die Zeitintervalle, erneut eine grundlegende Änderung. Der Raum wird *gekrümmt* oder *nichteuklidisch* und unterscheidet sich vom ebenen oder euklidischen, als der er ohne Gravitationsfeld erscheint. Die Zeitintervalle sind nicht nur in den verschiedenen Bezugssystemen unterschiedlich, sondern auch in den einzelnen Punkten des Raumes ein und desselben Bezugssystems.
Mehr noch! Da als Quelle eines Gravitationsfeldes, wie wir sehen, beliebige physikalische Objekte fungieren können, das Feld selbst sich aber als nichts anderes als die Änderung der Raum-Zeit-Metrik erweist, kommen wir zu dem fundamentalen und verblüffenden Schluß, daß die geometrischen Eigenschaften der Raum-Zeit-Metrik durch physikalische Erscheinungen bestimmt werden und keine unveränderlichen Eigenschaften des Raumes und der Zeit sind.

Das freie Teilchen im nichteuklidischen Raum

Wir klären jetzt, welchen Charakter die freie Bewegung eines stofflichen Teilchens im nichteuklidischen Raum haben wird, d. h. mit anderen Worten, wie es sich im Gravitationsfeld verhält.[1]
Das Gravitationsfeld hat, allgemein gesprochen, verschiedene Stärke an den verschiedenen Punkten des Raumes, und diese ist in jedem Punkte noch von der Zeit abhängig.
Da außerdem die Längen und die Zeitintervalle von der Stärke des Feldes abhängen und folglich verschiedene Werte an den verschiedenen Punkten des Raumes haben (im gleichen Bezugssystem), so wird auch die Kombination der Größen Länge und Zeit, die Geschwindigkeit, verschiedene Werte an den verschiedenen Raumpunkten haben. Berücksichtigen wir, daß die Geschwindigkeit eine vektorielle Größe ist, also bei einer Änderung der Geschwindigkeit im allgemeinen sich sowohl der Betrag als auch die Richtung ändern, so kann man daraus schließen, daß *die freie Bewegung eines Teilchens im realen dreidimensionalen nichteuklidischen Raum eine gekrümmte und ungleichförmige sein wird.* Diese Überlegungen machen, nebenbei gesagt, die vorher getroffene Aussage verständlicher, daß nämlich in der allgemeinen Relativitätstheorie der Begriff einer bestimmten Geschwindigkeit für einen sich frei bewegenden Körper seinen Sinn verliert.

Die Gleichung des Gravitationsfeldes

Verfolgen wir den Aufbau der Theorie der Gravitationsfelder, so bemerken wir, daß die quantitative Theorie der physikalischen Erscheinungen als formuliert angesehen wird, wenn die „Bewegungsgleichung" für den betreffenden Sachverhalt gefunden worden ist. Hier handelt es sich um die Feldgleichung.
Um zur Gestalt der Feldgleichung zu kommen, werden wir von der grundlegenden physikalischen Eigenschaft der Gravitationsfelder, dem Äquivalenzprinzip, ausgehen. Dessen Inhalt brachte uns dahin, Gravitationsfelder und Vorgänge in Nicht-Inertialsystemen als gleichwertig anzusehen. Da außerdem Gravitationsfelder „willkürlich" sein können, können es auch die Bezugssysteme sein. Auf diese Weise ist in der allgemeinen Relativitätstheorie die Auswahl der mit umkehrbar eindeutigen und stetigen Transformationen verbundenen Bezugssysteme durch nichts begrenzt. Das bedeutet, anders gesprochen, daß alle quantitativen

[1] Es muß daran erinnert werden, daß die Gegenwart des Feldes in dem betreffenden Punkt eine Veränderung der geometrischen Eigenschaften des Raumes, der nichteuklidisch wird, in diesem Punkte bedeutet.

Beziehungen zur Beschreibung des Feldes, besonders die Feldgleichung selbst, eine solche Struktur haben müssen, die sie unabhängig von der Wahl des Bezugssystems machen.

Die Kovarianz der Gleichung

Es wird jetzt angebracht sein, einen kurzen Überblick zu geben und eine Bemerkung darüber zu machen, wie sich bei Erweiterung des Kreises der erfaßten Erscheinungen die Klasse der Transformation erhöht, in der die physikalischen Gesetze invariant bleiben. Als wir die klassische Mechanik betrachteten, sahen wir nämlich, daß ihre Gleichungen invariant bezüglich einer bestimmten Klasse räumlich-zeitlicher Transformationen sind – der Galilei-Transformation. Das bedeutete, daß irgendeine Gleichung, die einen klassischen Vorgang beschreibt, immer ein und dasselbe Aussehen hat, ob sie nun in Koordinaten und Zeiten dieses oder jenes Inertialsystems ausgedrückt wird. Die Gleichungen der allgemeingültigen relativistischen Mechanik und der Theorie der elektromagnetischen Felder waren erst invariant bezüglich einer viel breiteren Klasse räumlich-zeitlicher Umformungen – der Lorentz-Transformation, wobei wir nach wie vor nur Inertialsysteme betrachteten.
Bei Berücksichtigung der Gravitation werden die physikalischen Gesetze so breit und „erschöpfend", daß sie invariant bezüglich jeder vollkommen willkürlichen Raum-Zeit-Transformation sind (die sogenannte *Kovarianz der Gleichung*). Man kann auch sagen, die physikalischen Gesetze sind überhaupt nicht mehr von der Wahl des Bezugssystems[1], also von der Willkür des Beobachters, abhängig.

[1] Jetzt wird bis zu einem gewissen Grade verständlich, weshalb die Theorie der Gravitationsfelder, die sich auf die Relativitätstheorie gründet, *allgemeine Relativitätstheorie* genannt wird.

Das mathematische Hilfsmittel, mit dem man der Forderung nach Kovarianz in den Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie genügen kann, ist die sogenannte *Tensoranalysis*, die eine vierdimensionale Geometrie in willkürlich krummlinigen Koordinaten untersucht.[1]
Hieraus folgt, daß die Gleichung des Gravitationsfeldes in der allgemeinen Relativitätstheorie Tensorform haben muß.[2]
Beim Feststellen dieser Besonderheit der Feldgleichung gingen wir vom Äquivalenzprinzip aus. Wie da bekannt ist, gilt dieses Prinzip nur für kleine Raum-Zeit-Intervalle. Folglich kommen wir zu dem Schluß, daß die Feldgleichungen auch differentiell geschrieben werden müssen, wie es übrigens bei den „Bewegungsgleichungen" in allen anderen Bereichen der Physik auch geschieht.
Also sind die Grundgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie, die Gleichungen des Gravitationsfeldes, tensorielle Differentialgleichungen. Sie wurden erstmals von Einstein gefunden und sind in der Aussage, wie wir sahen, ungewöhnlich vielseitig.
Jeder Kreis von physikalischen Erscheinungen wird charakterisiert durch seinen eigenen räumlich-zeitlichen Bereich. So ist für die Bewegungsgesetze der Teilchen in der klassischen und der relativistischen Mechanik der unbegrenzte Raum-Zeit-Bereich charakteristisch, wobei sehr kleine Raum-Zeit-Gebiete ausgeschlossen sind.
Die Gesetze für Veränderungen elektromagnetischer und Gravitationsfelder sind auch durch unbegrenzte räumlich-zeitliche, mit Ausnahme sehr kleiner, Bereiche charakterisiert.
Wir hatten uns davon überzeugt, daß tatsächlich die Gesetze der Elektrodynamik beim Übergang zu sehr kleinen Raumbereichen falsche Aussagen liefern.
Der Raum-Zeit-Bereich kosmischen Maßstabs (des Weltalls) ist, wie wir sehen, ein Untersuchungsgegenstand der allgemeinen Relativitätstheorie.

[1] In diesem Zusammenhang sei folgendes bemerkt: Bei der Verallgemeinerung bekannter Beziehungen auf den Fall der Anwesenheit eines bestimmten Gravitationsfeldes schreibt man diese Beziehungen in Tensorform nieder, d. h., man geht zu einem willkürlichen vierdimensionalen krummlinigen Koordinatensystem über. So geht man im besonderen vor beim Aufsuchen der Bewegungsgleichung für ein Teilchen in einem gegebenen Gravitationsfeld, so geht man auch beim Verallgemeinern der Gleichungen der Elektrodynamik vor, wenn ein Gravitationsfeld berücksichtigt werden muß.
Wenn im Unterschied zu dem betrachteten Fall der Ablauf bekannter Vorgänge in Gegenwart eines bestimmten Gravitationsfeldes untersucht wird, ist im Text die Rede vom Aufsuchen der Gesetze für die Veränderungen des Gravitationsfeldes selbst, also vom Erhalt der Gleichung dieses Feldes.

[2] Geeignete Literatur zum Studium der Tensorrechnung:
Raschewski, P. K.: Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis, Berlin 1959.
Reichardt, H.: Vorlesungen über Vektor- und Tensorrechnung, Berlin 1957.
Smirnow, W. I.: Lehrgang der höheren Mathematik, 5. Aufl., Berlin 1963.
Margenau, Murphy: Die Mathematik für Physik und Chemie I, Leipzig 1964.

Beim Übergang in die Welt außerordentlich kleiner Raum-Zeit-Maßstäbe weisen wir vor allem darauf hin, daß in diesem Bereich die allgemeine Relativitätstheorie keine Gültigkeit besitzt. Hier gelten die sogenannten *Quantengesetze.*

Zur Untersuchung der Vorgänge in außergewöhnlich kleinen Raum-Zeit-Bereichen gehen wir über, wenn die allgemeine Relativitätstheorie dargelegt worden ist. Jetzt machen wir erst auf die charakteristischen Abmessungen räumlicher Bereiche aufmerksam, in denen sich Quantenerscheinungen abspielen:

1. Quanteneigenschaften der Teilchen (atomare Erscheinungen) sind in räumlichen Bereichen vom Durchmesser $d \gtrless 10^{-10}$ m aufzudecken.
2. Quanteneigenschaften der Felder (elektromagnetischer) treten in Abständen $\lambda \sim 10^{-12}$ m zutage.
3. Für spezifische Kernprozesse und Zerfallsprozesse von „Elementar"-Teilchen sind räumliche Bereiche von 10^{-15} m und weniger, Zeitintervalle von 10^{-25} s bis 10^{-8} s charakteristisch.

Wir bemerken hier vorausschauend, daß in der Quantentheorie bei Energien in der Größenordnung der „Ruhenergie" des Teilchens sich die Grenzen zwischen den Begriffen Teilchen und Feld zu verwischen beginnen, es entsteht der neue Begriff „Quantenfeld". Es werden sogar Prozesse der wechselseitigen Umwandlung von Quanten verschiedener Felder beobachtet. Mit sehr hohen Energien kann man Prozesse auslösen, bei denen neue Teilchen entstehen. Außerdem geben sie die Möglichkeit, in Bereiche sehr kleiner Abstände zwischen den Teilchen einzudringen.[1]

Diese ganze Physik der sehr kleinen Raum- und Zeit-Bereiche erfährt zur Zeit eine ungeheuer stürmische Entwicklung. Es wird erwartet, daß die Gedanken der „Physik des Kleinen" mit denen der „Physik des Großen" verschmelzen; sonst wäre es schwer, sich ein harmonisches Gebäude der Wissenschaft Physik vorzustellen.

Besonderheiten und Eigenschaften der Gleichung des Gravitationsfeldes

Bemerkung des Übersetzers:
Die von Einstein entwickelte Gleichung lautet in Tensorschreibweise für den stofferfüllten Raum

$$G^{\mu}_{\nu} = R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\,\delta^{\mu}_{\nu}\,R = \mathfrak{k}\,T^{\mu}_{\nu}$$

[1] Hierin liegt die Erklärung für die gigantischen Anstrengungen zur Entwicklung der Technik zum Zwecke der Beschleunigung von Elementarteilchen.

G^μ_ν ... Einstein-Tensor
R^μ_ν ... Ricci-Tensor
T^μ_ν ... Energie-Tensor
δ^μ_ν ... Kronecker-Symbol

$\mathfrak{k} = \dfrac{8\,\pi\,\gamma}{c^2}$ mit γ ... Gravitationskonstante.

Außerhalb des stofferfüllten Raumes ist $G^\mu_\nu = 0$.

Wenden wir uns den Besonderheiten und Eigenschaften der Gleichung des Gravitationsfeldes zu, fällt uns zuerst ihre Nichtlinearität auf. Darum gilt für Gravitationsfelder das Superpositionsprinzip nicht, während es für elektromagnetische Felder in der speziellen Relativitätstheorie Geltung besitzt.

Weiterhin fällt uns die besondere Struktur der Gleichung des Gravitationsfeldes auf. Sie ist für die Beschreibung beliebiger physikalischer Systeme geeignet. Allein aus der Gestalt der Feldgleichung kann man schlußfolgern, daß Gravitationsfelder von beliebigen physikalischen Objekten geschaffen werden. So entstehen sie nicht nur durch Teilchen, sondern auch durch elektromagnetische Felder. Als Quelle eines Gravitationsfeldes kann sogar das Gravitationsfeld selbst fungieren. Es handelt sich hier um Felder, die im Vakuum existieren, wo es weder Teilchen noch elektromagnetische Felder gibt.

Also entstehen Gravitationsfelder im Unterschied zu elektromagnetischen Feldern durch beliebige physikalische Objekte. Als Objekte der Physik betrachten wir Teilchen und Felder. Teilchen werden charakterisiert durch ihre Masse, Felder u. a. durch ihre Energie. Folglich könnte man sagen, daß jede Energie ein bestimmtes Gravitationsfeld erzeugt. Allerdings ist die Energiedichte einer in der Natur vorhandenen Strahlung sehr klein im Vergleich zu den Energiedichten stofflicher Körper, in denen die Ruhenergie eingeschlossen ist. Darum ist das Betrachten eines von einem elektromagnetischen Feld mit verschwindend kleiner Masse geschaffenen Gravitationsfeldes ohne besonderes Interesse. Die Gravitationswechselwirkung spielt nur eine Rolle bei Körpern mit hinreichend großer Masse (wegen des kleinen Wertes der Gravitationskonstanten).

Deshalb haben wir es bei der Untersuchung des Gravitationsfeldes gewöhnlich mit makroskopischen Körpern zu tun.

Die Gleichung der Schwerkraft hat noch eine bemerkenswerte Besonderheit: Durch identische Transformationen kann man aus ihr die „Bewegungsgleichung" des physikalischen Systems erhalten, welches das zu betrachtende Schwerefeld erzeugt. Also ist in der Gleichung des Gravitationsfeldes auch die Gleichung für die materiellen Objekte (Teilchen

und elektromagnetische Felder) enthalten, die Quelle dieses Feldes sind. Im Gegensatz dazu enthalten die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes (die Maxwellschen Gleichungen) nur die Gleichung für die Erhaltung der Ladung (die Kontinuitätsgleichung), aber nicht die Bewegungsgleichung der das Feld erzeugenden Ladungen.
Darum können für ein elektromagnetisches Feld die Verteilung und Bewegung der Ladungen willkürlich vorgegeben werden, nur die gesamte Ladung muß konstant bleiben. Aus der gegebenen Ladungsverteilung ist (mit einer Maxwellschen Gleichung) das entstehende Feld zu berechnen. Im Gravitationsfeld dagegen können die Verteilung und die Bewegung der Quellen auf keinen Fall willkürlich angenommen werden. Sie müssen, im Gegenteil, gleichzeitig mit dem durch diese Materie geschaffenen Feld bestimmt werden.
Es muß jedoch noch bemerkt werden, daß aus der Gleichung des Gravitationsfeldes die Verteilung und Bewegung der Materie nicht vollständig abgeleitet werden können. So enthält diese Gleichung z. B. nicht die Zustandsgleichung des Stoffes, das ist die Gleichung, in der Druck und Energiedichte miteinander verbunden sind. Hieraus wird klar, daß zum Erkennen eines solchen Objektes wie des Weltalls die Gedanken und Arbeitsverfahren der allgemeinen Relativitätstheorie nicht genügen; es sind weitere Untersuchungen im Bereich der Physik des „stellaren und interstellaren Zustandes“ der Materie nötig.

Die Erhaltungssätze in der allgemeinen Relativitätstheorie

Jetzt folgen einige andere sehr wichtige Bemerkungen. Es ist uns bekannt, daß jeder physikalische Prozeß innerhalb von Raum und Zeit abläuft. Da Raum und Zeit bestimmte Eigenschaften besitzen, werden diese Eigenschaften selbstverständlich den möglichen ablaufenden physikalischen Prozessen bestimmte Beschränkungen auferlegen. Insbesondere werden wegen der bekannten Symmetrieeigenschaften des Raumes und der Zeit die Prozesse physikalischer Objekte so ablaufen, daß die Erhaltung einer Reihe von Größen gesichert ist. Das gilt bekanntlich für die Energie, den Impuls und den Drehimpuls. Wir sehen, daß Energie, Impuls und Drehimpuls solche Größen sind, deren Wesen aus den allgemeinsten Eigenschaften von Raum und Zeit folgt. Folglich sind die Energie, der Impuls und der Drehimpuls allgemein-physikalische Begriffe, die für alle Objekte beliebiger physikalischer Struktur charakteristisch sind.
Bekanntlich muß das Feld wegen der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wechselwirkungen als selbständiges System mit eigenen „Frei-

heitsgraden“ angesehen werden. Man kann auch sagen, daß jede Art Feld ein selbständiges physikalisches Objekt ist. Darum gibt es auch für das Feld und insbesondere das Gravitationsfeld diese Größen Energie, Impuls und Drehimpuls.

Bevor wir über das Wesen und die Besonderheiten der Erhaltungssätze für das Gravitationsfeld sprechen, machen wir einige allgemeine Bemerkungen.

Die „Bewegungsgleichungen“ für eine Gruppe von Erscheinungen erhält man aus dem allgemeinsten physikalischen Prinzip, dem Prinzip des kleinsten Zwanges. In den mathematischen Ausdruck dieses Prinzips geht eine Funktion ein, die sogenannte Lagrange-Funktion $L = W_{\mathrm{kin}} - U$ (U ... Potential oder pot. Energie), die auf die charakteristischsten Züge und Besonderheiten der betreffenden Gruppe von Erscheinungen zugeschnitten werden kann. Wir stellen fest, daß schon das Prinzip des kleinsten Zwanges selbst, unabhängig von der konkreten Gestalt der Lagrange-Funktion, der Vielfalt der möglichen „Bewegungen“ des Systems eine gewisse Beschränkung auferlegt. Weitere Einschränkungen resultieren aus den bekannten Symmetrieeigenschaften von Raum und Zeit und finden ihren Ausdruck in den entsprechenden Erhaltungssätzen. Eine formale Schlußfolgerung daraus besteht darin, daß wir auch die „Bewegungsgleichungen“ als entsprechende Eigenschaften der Raum-Zeit benutzen. Auf diese Weise sind die „Bewegungsgleichungen“ grundsätzlich in den Erhaltungssätzen enthalten.

So verhält es sich mit der Struktur der physikalischen Gesetze, wenn kein Gravitationsfeld vorhanden ist. Das Vorhandensein von Gravitationsfeldern ruft „abschließende“ Eigenschaften hervor. Machen wir den Versuch der korrekten Formulierung der Erhaltungssätze für ein System, zu dem ein Gravitationsfeld gehört, kommen wir zu einer eigenartigen Besonderheit – der Entartung der Erhaltungssätze zu einer Identität. Andererseits sahen wir, daß die Gleichungen des Gravitationsfeldes in sich die Erhaltungssätze der das Feld erzeugenden Materie (für Teilchen und elektromagnetische Felder) enthalten.

Im Endergebnis kommen wir zu dem Schluß, daß das Gravitationsfeld im Unterschied zu allen anderen physikalischen Objekten nicht in ein abgeschlossenes System einbezogen werden darf. Gravitationsfelder müssen als „äußere Bedingungen“ für das System betrachtet werden.

Folglich nehmen die Gesetze der Physik bei der Berechnung von Gravitationsfeldern eine solche Struktur an, daß man im wesentlichen nur noch von Feldgleichungen, aber nicht von Erhaltungssätzen sprechen kann. Dessenungeachtet erhält man in einigen Fällen bei der Anwendung der Erhaltungssätze sehr interessante Ergebnisse. Ein solcher Fall ist die Gleichheit, wie man sagt, der schweren und trägen Masse. Schwer nennen wir eine Masse, die einem Körper gehört, der ein Gravitationsfeld schafft. Das ist jene Masse, die insbesondere in das Newtonsche Schweregesetz eingeht. Die träge Masse aber bestimmt die Beziehung zwischen dem Impuls und der Geschwindigkeit eines Körpers, insbesondere ist die Ruhenergie des Körpers gleich dem Produkt aus dieser Masse und c^2. Verweilen wir jetzt bei den Folgerungen aus der Gleichung des Gravitationsfeldes.

Folgerungen aus der Feldgleichung

Die Gleichung des Gravitationsfeldes im Vakuum, d. h. ohne Teilchen und elektromagnetische Felder, hat eine von Null verschiedene Lösung, und diese Lösung hat, wie für den Fall des elektromagnetischen Feldes, auch die Form einer fortschreitenden Welle.[1]

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gravitationswellen ist gleich c.

Gravitationswellen besitzen eine gewisse Energie. Bei dem betrachteten Fall des schwachen Gravitationsfeldes, das in einem begrenzten Raumgebiet bestehen kann, ist die eindeutige Bestimmung dieser Energie möglich. In diesem und auch nur in diesem Falle darf man von der Energie der Gravitationswellen sprechen.

Ein System von Körpern mit bestimmten Massen, das sich innerhalb eines abgeschlossenen Gebietes bewegt, *strahlt* Gravitationswellen *aus*. Das ist vollkommen analog zu dem, was wir bei der Betrachtung der elektromagnetischen Wellen vorfanden. Es muß aber bemerkt werden, daß der Zahlenwert des Energieverlusts, der mit der Ausstrahlung von Gravitationswellen verbunden ist, selbst für astronomische Objekte so klein ist, daß sein Einfluß auf die Bewegung, selbst für kosmische Zeitintervalle, ganz geringfügig ist (der Ausdruck für den Energieverlust durch elektromagnetische Ausstrahlung enthält den Faktor $1/c^3$, der für die Gravitationsausstrahlung den Faktor $1/c^5$).

Vollziehen wir jetzt in den Gleichungen des Gravitationsfeldes den Grenzübergang zur nichtrelativistischen Mechanik.

Die Annahme kleiner Geschwindigkeiten aller Teilchen fordert gleichzeitig die Annahme eines schwachen Gravitationsfeldes. Im entgegengesetzten Fall würde ein darin befindliches Teilchen eine große Geschwindigkeit annehmen.

Es ist zu beachten, daß die Feldgleichung für schwache Gravitationsfelder in erster Näherung linear wird und daß folglich für diese Felder in dieser Näherung auch das Superpositionsprinzip gilt.

[1] Das ist die Näherungslösung eines schwachen Feldes.

In dieser nichtrelativistischen Näherung wirkt im Feld auf ein Teilchen mit der Masse m_1 die Kraft

$$F = \gamma \frac{m\, m_1}{r^2}. \tag{29}$$

m ... Masse des felderzeugenden Teilchens
r ... Abstand zwischen den Teilchen m und m_1
γ ... eine Konstante[1]

Die Gleichung (29) drückt das bekannte *Schweregesetz Newtons* aus. Im Wesen sind die auf der rechten Seite des Ausdrucks (29) stehenden Größen positiv. Die Masse kann bekanntlich nur positiv sein, ebenso ist γ positiv. Bei vektorieller Schreibweise steht auf der rechten Seite ein Minuszeichen. Es bringt zum Ausdruck, daß unter der Wirkung von Gravitationskräften nur *Anziehung* von Körpern beobachtet wird.
Da die nichtrelativistische Schweretheorie Newtons es nur mit schwachen Feldern und kleinen Geschwindigkeiten zu tun hat, ist natürlich ihr Anwendungsbereich nicht sehr groß. Betrachtet man sehr große Bereiche des Weltalls, in denen man die Felder nicht als schwach annehmen darf, beginnt die relativistische Schweretheorie Einsteins eine bestimmte Rolle zu spielen.

Anwendungen der allgemeinen Relativitätstheorie

Wenn wir von den Anwendungen der allgemeinen Relativitätstheorie und den von ihr vorhergesagten Effekten[2] sprechen, werden wir zuerst die Ausbreitung des Lichts in Gravitationsfeldern betrachten. Diese Erscheinung bestätigt die Konzeption von der nichteuklidischen Raum-Zeit, also die allgemeine Relativitätstheorie, am klarsten.
Zu Beginn verfolgen wir die Spur eines Lichtstrahls in einem Schwerefeld. Je stärker das Gravitationsfeld ist, desto mehr muß der Raum als nichteuklidisch betrachtet werden. Es erweist sich, daß ein Lichtstrahl, der in der Nähe eines felderzeugenden Körpers vorbeigeht, gekrümmt wird, da sich im nichteuklidischen Raum ein freies Teilchen (im gegebenen Fall ein Teilchen mit der Masse Null, das Photon) nicht geradlinig bewegt.
Wir achten jetzt auf die Veränderung der Frequenz des Lichtes bei der Ausbreitung in Feldern. Dabei sehen wir, daß die Zeitintervalle vom Feld

[1] Die Konstante γ heißt Gravitationskonstante, sie ist eine neue universale Konstante. Ihr Wert ist $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$.

[2] Wir machen hier auf eine sehr wichtige Tatsache aufmerksam: Die allgemeine Relativitätstheorie ist von Einstein auf rein deduktivem Wege aufgestellt worden, erst danach wurde sie durch astronomische Beobachtungen gestützt.

abhängen. Je stärker das Gravitationsfeld, desto langsamer ist der Gang der Uhren und umgekehrt. Mit anderen Worten: Es vergeht die Zeit an den verschiedenen Punkten des Raumes verschieden schnell. Jetzt wird uns klar, daß ein Lichtstrahl bei seiner Ausbreitung im Raum die Frequenz, d. h. die Anzahl der Schwingungen je Zeiteinheit, ändern wird. Somit wird sich die Frequenz verringern, wenn er sich von einem ein Gravitationsfeld erzeugenden Körper entfernt, bei Annäherung an ihn wird sie größer.
Aus den anderen bekannten Anwendungen der allgemeinen Relativitätstheorie verweisen wir auf die Bewegung der Planeten. Da die Geschwindigkeit eines Planeten im Vergleich zur Geschwindigkeit c klein ist, führt die relativistische Schweretheorie nur zu sehr unbedeutenden Korrekturen an der Bahn des Planeten, verglichen mit der Theorie Newtons. Die Korrektur ist ungefähr so: Wenn nach der Newtonschen Auffassung die Bahnen zweier Körper als Ellipsen unbewegt im Raume festliegen, führt die Anwendung der Einsteinschen Theorie zu einer sehr langsamen Veränderung, die Ellipsen drehen sich in ihrer Ebene.

Das Weltall in der allgemeinen Relativitätstheorie

Da die oben beschriebenen Erscheinungen mit Hilfe der allgemeinen Relativitätstheorie in vergleichsweise kleinen räumlich-zeitlichen Bereichen der Welt betrachtet wurden und in solchen Bereichen die Felder, allgemein ausgedrückt, nicht stark sein können, war von sehr schwachen Effekten die Rede, die den Ablauf der bekannten Erscheinungen begleiten. Will man über die Struktur und die Entwicklung des Weltalls eine Aussage machen, wobei man große Maßstäbe anlegen muß (ein kosmologisches Problem), wird die Rolle der allgemeinen Relativitätstheorie bestimmend.
Schon die ersten Anwendungen der Einsteinschen Theorie auf dieses Problem gaben wesentliche und interessante Ergebnisse. Die Untersuchung der Feldgleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie führte zu dem Schluß, daß sich die geometrischen Eigenschaften des Weltalls in großen Maßstäben mit der Zeit ändern müssen, wobei diese Veränderung, wie gezeigt und durch Beobachtungen unterstrichen wurde, den Charakter der „Ausdehnung" haben.
Ein weiteres Vordringen auf diesem Gebiet trifft auf Schwierigkeiten sowohl wegen der Unvollständigkeit der astronomischen Werte als auch wegen der mathematischen Erschwernisse, die mit der allgemeinen Untersuchung der Gleichung des Gravitationsfeldes Einsteins verbunden sind.

Verfolgen wir die aufgeworfene Frage über die räumlich-zeitlichen Eigenschaften der Welt als Ganzes weiter, machen wir noch eine Reihe von Bemerkungen, die in der Anwendung der Erhaltungssätze begründet sind.

Die Homogenität des Raumes, die das *Gesetz der Erhaltung des Impulses* zur Folge hat, weist nach, daß die Eigenschaften eines physikalischen Systems nicht davon abhängen, an welchem Ort des Raumes es sich befindet. Mit anderen Worten: Die Eigenschaften isolierter physikalischer Systeme (z. B. von Atomen, Elementarteilchen u. a.) sind ein und dieselben auf der Erde wie auf anderen entfernten kosmischen Objekten.[1]

Die Isotropie des Raumes, die das *Gesetz der Erhaltung des Drehmoments* zur Folge hat, zeigt, daß die Eigenschaften eines physikalischen Systems auch nicht davon abhängen, in welche Richtung wir das System verrücken werden. Mit anderen Worten: Im Weltall gibt es keine Trennung nach Richtungen.

Die Homogenität der Zeit, die das Gesetz der Erhaltung der Energie zur Folge hat, zeigt, daß die Eigenschaften isolierter physikalischer Systeme nicht davon abhängen, zu welchem Zeitpunkt wir sie betrachten. Mit anderen Worten: Die Eigenschaften isolierter physikalischer Systeme (Atome, Elementarteilchen u. a.) waren vor vielen Milliarden Jahren die gleichen wie heute, und sie werden es auch in Zukunft sein.

Diese Urteile sind in gewissem Maße bedingt, da ja bei der Betrachtung großer Bereiche des Weltalls die in ihnen vorhandenen Gravitationsfelder eine wichtige Rolle zu spielen beginnen, und zwar dergestalt, daß sie die Eigenschaften von Raum und Zeit verändern. Somit wird verständlich, daß die Erhaltungssätze, die Ausdruck bestimmter Eigenschaften von Raum und Zeit sind, irgendwelche Besonderheiten besitzen müssen. Diese Besonderheiten bestehen darin, daß Gravitationsfelder nicht zum Bestand eines abgeschlossenen Systems gezählt werden dürfen. Gravitationsfelder müssen als „etwas Äußeres“ bezüglich des Systems betrachtet werden.

Andererseits sahen wir, daß die Lösung der Gleichung für das Gravitationsfeld in der allgemeinen Relativitätstheorie, auf gewaltige Räume angewendet, zu dem Ergebnis der Zeitabhängigkeit von Gravitationsfeldern führt.

Folglich darf man *die Welt als Ganzes in der allgemeinen Relativitäts-*

[1] Zum Beispiel sieht ein Linienspektrum, das von einem Atom (aus dem Spektrum schließen wir auf Eigenschaften der Atome) ausgesendet worden ist, das sich auf der Sonne befindet, dort genauso aus wie das von gleichen Atomen auf der Erde ausgesendete Spektrum. Anders ist es aber, wenn auf der Erde ein Spektrum betrachtet wird, das von Atomen auf der Sonne ausgesendet worden ist. In diesem Falle muß der Einfluß des Gravitationsfeldes auf die Ausbreitung des Lichts berücksichtigt werden, der dazu führt, daß die Spektrallinien verschoben erscheinen im Vergleich zu den Linien des gleichen Spektrums, das auf der Erde ausgesendet worden ist (die sogenannte „Rotverschiebung“).

theorie nicht als geschlossenes System betrachten, sondern als ein System, das sich in einem veränderlichen Gravitationsfeld befindet.
Die Isotropie der Zeit (oder die Umkehrbarkeit der Zeit), die es in der Nicht-Quantenphysik gibt, fehlt, wie später gezeigt werden wird, in der Quantenmechanik. Diese fehlende Äquivalenz der beiden Richtungen der Zeit taucht schon in den für die Quantenmechanik grundlegenden Prozessen der Wechselwirkung eines Quantenobjektes mit einem System auf, das sich mit hinreichender Genauigkeit der klassischen Mechanik unterwirft.
Das Fehlen der isotropen Symmetrie der Zeit im Weltall verweist auf die Richtung des Ablaufs der Prozesse in der Zeit. Diese Richtung läßt die Entropie[1] der Welt als Ganzes systematisch anwachsen, jedoch ohne daß sie dabei einem Grenzwert zustrebt, wie es aus den Vorstellungen über den nichtstationären Zustand des Weltalls folgen würde.

[1] Mit diesem Begriff beschäftigen wir uns im Kapitel 8.

5. Die Quantenmechanik

(nichtrelativistische Theorie)

Wir gehen jetzt von der Untersuchung sehr großer Raumbereiche zur Untersuchung der Bewegungseigenschaften in außerordentlich kleinen Raumbereichen über. Gleich zu Anfang machen wir darauf aufmerksam, daß hier nur elektromagnetische Wechselwirkungen von Bedeutung sein werden. Das Verhältnis der Intensität von Wechselwirkungen im Gravitationsfeld zu denen im elektromagnetischen ($\gamma\, m^2/e^2$) ist nämlich sehr klein und liegt in der Größenordnung von ungefähr $1:10^{40}$.
Als Untersuchungsgegenstände werden uns zuerst nur Teilchen dienen, deren Masse äußerst gering, aber von Null verschieden ist. Für diese Objekte gibt es bekanntlich den nichtrelativistischen Bereich der Bewegung ($v \ll c$). In diesem Kapitel werden wir uns auch nur mit diesem Bereich beschäftigen.
Elektromagnetische Felder (und ihnen gegenüberzustellende Teilchen mit der Masse Null) sind relativistische Objekte und fordern von Anfang an eine relativistische Betrachtungsweise.

Atomare Erscheinungen

Wenn man die klassische Mechanik und Elektrodynamik auf die Erklärung atomarer Erscheinungen anzuwenden versucht – dies sind Erscheinungen an Teilchen sehr geringer Masse und in sehr kleinen Raumbereichen –, gelangt man zu Resultaten, die mit der Erfahrung in krassem Widerspruch stehen. Sehr deutlich erkennt man diese Sachlage schon an dem Widerspruch, der bei der Anwendung der gewöhnlichen Elektrodynamik auf das Atommodell auftritt, in dem sich die Elektronen auf klassischen Bahnen um den Kern bewegen. Bei einer solchen Bewegung müssen, wie bei jeder beschleunigten Bewegung von Ladungen, die Elektronen ständig elektromagnetische Wellen ausstrahlen. Durch das Ausstrahlen würden die Elektronen ihre Energie verlieren, und sie müßten letzten Endes in den Kern fallen. Also wären die Atome nach der klassischen Elektrodynamik instabil. Das stimmt aber keinesfall mit der Wirklichkeit überein.

Diese tiefen Widersprüche zwischen Theorie und Experiment sind ein Ausdruck dafür, daß eine auf die atomaren Erscheinungen anwendbare Theorie eine grundlegende Änderung der klassischen Vorstellungen und Gesetze verlangt.

Die Beugung der Teilchen

Um diese Veränderungen zu erklären, geht man zweckmäßigerweise von der im Versuch zu beobachtenden Beugung der Teilchen aus. Beim Durchgang eines homogenen Teilchenbündels durch einen Kristall entsteht hinter dem Kristall ein Bild abwechselnder Maxima und Minima der Intensität ganz analog dem Beugungsbild, das wir von elektromagnetischen Wellen her kennen. Also zeigen Materieteilchen unter gewissen Bedingungen ein Verhalten, das Wellenprozessen entspricht.
Wie tief diese Erscheinung der gewöhnlichen Vorstellung von der Bewegung widerspricht, ersieht man am besten aus folgendem Gedankenexperiment, welches eine Idealisierung des Versuches zur Beugung von Teilchen im Kristall darstellt. Wir stellen uns einen für die Teilchen undurchlässigen Schirm vor, der zwei Spalte enthält. Beobachten wir den Verlauf des Teilchenbündels – das Bündel soll eine so geringe Teilchendichte haben, daß die Wechselwirkungen der Teilchen in ihm keine Rolle spielen – durch einen Spalt, während der andere Spalt geschlossen ist, erhalten wir auf einem hinter dem Spalt aufgestellten Schirm ein bestimmtes Bild der Intensitätsverteilung. Genauso erhalten wir ein anderes Bild, wenn wir den zweiten Spalt öffnen und den ersten schließen. Beobachten wir nun den Verlauf des Bündels durch beide Spalte gleichzeitig, müßten wir auf Grund der üblichen Vorstellungen ein Bild erwarten, das eine einfache Überlagerung der beiden vorhergehenden darstellt. Jedes Teilchen, so glaubt man, gelangt bei der Bewegung längs seiner Bahn durch einen Spalt und nimmt keinen Einfluß auf die Teilchen, welche durch den anderen Spalt treten. In Wirklichkeit erhalten wir aber ein Beugungsbild, das auf Grund der Interferenz durchaus nicht die Summe der Bilder darstellt, die jeder Spalt im einzelnen gegeben hatte. Dieses Ergebnis stimmt in keiner Weise mit der Vorstellung von der Bewegung der Teilchen längs einer Flugbahn überein. Für atomare Teilchen gibt es den Begriff Flugbahn nicht.

Korpuskel-Welle-Dualismus

Wie wir sehen, haftet den atomaren Erscheinungen der Korpuskel-Welle-Dualismus an. Das ist etwas prinzipiell Neues, welches sich bei den Bewegungseigenschaften atomarer Objekte bemerkbar macht.

Störung bei Beobachtungen, das Wirkungsquantum

Daß es prinzipiell neue Bewegungseigenschaften bei atomaren Objekten geben muß, ist schon aus folgender, äußerst wichtigen Tatsache zu ersehen. Es ist bekannt, daß es die Wissenschaft nur mit beobachtbaren Dingen zu tun hat und daß wir einen Gegenstand nur beobachten können, wenn wir ihn in Wechselwirkung mit etwas außerhalb von ihm Befindlichen bringen. Darum ist jeder Beobachtungsakt unvermeidlich mit irgendeiner Störung verbunden, die dem zu beobachtenden Gegenstand zugefügt wird.
Wir nennen einen Beobachtungsgegenstand klassisch, wenn die Störgröße vernachlässigt und zu seiner Beschreibung die klassische Mechanik verwendet werden kann. Darf aber ein bestimmter „Grenzwert der Störung" auf Grund der Existenz des Wirkungsquantums[1] nicht unberücksichtigt bleiben, nennen wir den Gegenstand ein Quant, und zu seiner Beschreibung braucht man eine neue Theorie.

Das statistische Verhalten

Folglich kann man ein Quantensystem nicht beobachten, ohne an ihm eine ernste Störung zu verursachen, und man darf deshalb zwischen den einzelnen Beobachtungsergebnissen keine völlig eindeutigen Beziehungen erwarten, es stellen sich Unbestimmtheit und statistisches Verhalten ein. Darum darf es die Quantentheorie nicht erlauben, die Beobachtungsergebnisse genau vorauszuberechnen, sondern nur die Wahrscheinlichkeit für das Erhalten dieses oder jenes Resultats.
Verdeutlichen wir das Gesagte noch etwas. Wenn an einem beliebigen Quantensystem, das sich in einem vorgegebenen Zustand befindet, Beobachtungen durchgeführt werden, sind die Ergebnisse nicht ganz bestimmte. Mit anderen Worten: Wiederholen wir ein und dasselbe Experiment mehrere Male unter vollkommen gleichen Bedingungen, kann es

[1] In der Physik wird diese Größe „Quantenkonstante h" (in Deutschland Plancksches Wirkungsquantum, R. P.) genannt, ihr Wert ist $h = 6{,}6251 \cdot 10^{-34}$ Ws^2.

doch ungleiche Ergebnisse bringen. Wird das Experiment jedoch sehr oft wiederholt, dann wird jedes Ergebnis in einem bestimmten Anteil aus der allgemeinen Zahl der Fälle auftreten, d. h., es gibt eine bestimmte Wahrscheinlichkeit dafür, daß gerade dieses Ergebnis erzielt wird. Diese Wahrscheinlichkeit auszurechnen erlaubt die Theorie. Nur in jenen besonderen Fällen, in denen die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses gleich eins ist, ist das Versuchsergebnis eindeutig.

Die Messung

Wie eben dargelegt worden ist, kann man die Eigenschaften von Quantenobjekten nur feststellen, wenn man diese in Wechselwirkung mit klassischen Objekten treten läßt; denn nur von diesen kann man unbestreitbar sagen, daß sie sich in einem bestimmten Augenblick in einem der bekannten Zustände mit einem diesen Zustand charakterisierenden bestimmten Wert einer physikalischen Größe befinden. Für Quantenobjekte kann man eine solche Aussage, wie uns bekannt ist, nicht machen.

Bringen wir jetzt das zu untersuchende Quantenobjekt in Wechselwirkung mit einem klassischen Objekt, so wird sich der Zustand des letzteren ändern. Der Charakter und die Größe der Änderung hängen vom Zustand des Quantenobjekts ab, deshalb kann sie als quantitative Charakteristik dienen.

In diesem Zusammenhang nennt man das klassische Objekt gewöhnlich *das Gerät* und seinen Wechselwirkungsprozeß mit dem Quantenobjekt *die Messung*.

Wir erkannten das Gerät als einen physikalischen Gegenstand, der sich mit hinreichender Genauigkeit der klassischen Mechanik unterwirft. Als solcher erweist sich zum Beispiel ein Körper mit hinreichend großer Masse. Man darf aber nicht denken, daß das makroskopische Verhalten eine zwingend notwendige Eigenschaft des Gerätes sei. Unter bekannten Voraussetzungen kann auch bewußt ein mikroskopisches Objekt die Rolle des Gerätes übernehmen, da der Ausdruck „mit hinreichender Genauigkeit" von der konkret gestellten Aufgabe abhängt.

So wird die Bewegung eines Elektrons in der Wilsonkammer an der von ihm hinterlassenen Nebelspur verfolgt, deren Breite im Vergleich zu atomaren Abmessungen groß ist. Bei diesem Grad der Genauigkeit der Bahnbestimmung erweist sich das Elektron als durchaus klassisches Objekt.

Die Wechselbeziehung zwischen Quanten- und klassischer Mechanik

Die oben angeführte Analyse weist vor allem auf den besonderen Charakter der Wechselbeziehung hin, in der sich die neue Quantentheorie und die klassische Mechanik befinden. Gewöhnlich kann die allgemeinere Theorie logisch als geschlossenes Bild unabhängig von der weniger allgemeinen Theorie, die in ihr als Sonderfall aufgeht, formuliert werden. So kann die relativistische Mechanik auf der Grundlage ihrer eigenen Hauptprinzipien ohne jegliche Bezugnahme auf die Newtonsche Mechanik aufgebaut werden. Die Begründung der Quantentheorie ist jedoch, wie wir eben sahen, prinzipiell ohne Heranziehen der klassischen Mechanik unmöglich. Auf diese Weise nimmt die Quantentheorie eine sehr originelle Stellung in der Reihe der physikalischen Theorien ein: Sie enthält die klassische Mechanik als ihren eigenen Grenzfall und braucht gleichzeitig diesen Grenzfall zu ihrer eigenen Begründung.

Einige Bemerkungen

Aus dem Dargelegten ist ersichtlich, daß die Mechanik, der die atomaren Vorgänge gehorchen, die sogenannte *Quantenmechanik*, tatsächlich auf Vorstellungen von der Bewegung aufgebaut werden muß, die sich prinzipiell von den Vorstellungen der klassischen Mechanik unterscheiden. Die von uns betrachteten paradoxen Bewegungseigenschaften atomarer Teilchen zeigen nicht einfach die Ungenauigkeit der Bewegungsgesetze der klassischen Mechanik, sondern die Unbrauchbarkeit ihrer Grundbegriffe zur Beschreibung atomarer Vorgänge.

Die oben aufgezeigten charakteristischen Züge der neuen Theorie müssen bei der Aufstellung ihres mathematischen Apparates zugrunde liegen.

Wir machen noch einige Bemerkungen. Wie wir im weiteren Verlaufe sehen werden, begrenzt die Quantenmechanik im Vergleich zur klassischen Mechanik, allgemein gesagt, den Komplex von Werten (Wertevorrat), den die verschiedenen physikalischen Größen annehmen können (z. B. die Energie). Das sind die Werte, welche als Meßergebnis der betreffenden Größe auftreten können. Der Apparat der Quantenmechanik muß es gestatten, diese erlaubten Werte zu bestimmen.

Außerdem sind bei weitem nicht alle Mengen physikalischer Größen in der Quantenmechanik *gleichzeitig* meßbar, d. h., es können ihnen nicht gleichzeitig bestimmte Werte zugeordnet werden.

Die Wellenfunktion

Die Originalität der atomaren Vorgänge findet ihre Widerspiegelung in der Spezifik des mathematischen Apparates der Quantenmechanik. Die Grundlage dieses Apparates besteht darin, daß jeder Zustand eines Quantensystems in einem gegebenen Zeitpunkt durch eine bestimmte (im allgemeinen komplexe) Funktion ψ beschrieben werden kann, wobei das Quadrat des Absolutbetrages dieser Funktion $|\psi|^2$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Koordinatenwerte des Systems bestimmt. Die Funktion ψ wird *Wellenfunktion* des Systems genannt.

Bei einem aus vielen Teilchen bestehenden komplizierten System hängt die Wellenfunktion ψ nicht von drei Koordinaten, sondern von allen Koordinaten des Systems ab. Sie ist die Funktion eines Punktes in einem *mehrdimensionalen Konfigurationsraum* und nicht in dem realen physikalischen Raum. (Der Konfigurationsraum hat so viel Dimensionen, wie Variable zur Beschreibung des „Zustandes" des Quantenobjektes nötig sind. Die Zahl ist identisch mit der Anzahl seiner klassischen Freiheitsgrade. R. P.) Auf Grund dieser Eigenschaften läßt sich die Wellenfunktion nicht als ein im Raum verteiltes Feld denken, wie es ein elektromagnetisches oder anderes Feld sein könnte.

Die Funktion ψ ist keine Größe, die man experimentell messen kann, sie läßt sich *nur* als Resultat mehrerer Messungen bilden. Direkten physikalischen Sinn hat $|\psi|^2$ oder, was dasselbe ist, $\psi\psi^*$.

(Ist $\psi = x + iy$ der komplexe Ausdruck für eine Eigenschaft des Systems, so ist $\psi^* = x - iy$ der dazu konjugiert komplexe Ausdruck. R. P.)

Das Superpositionsprinzip

Die Grundeigenschaft der Quantenzustände ist das sogenannte Superpositionsprinzip. Dieses liefert eine Reihe von Aussagen zu den Eigenschaften der Wellenfunktion, die in folgendem bestehen. Möge eine Messung im Zustand mit der Wellenfunktion ψ_1 mit Sicherheit zu dem Ergebnis 1 führen, aber im Zustand ψ_2 zum Ergebnis 2. Dann wird angenommen, daß jede lineare Kombination von ψ_1 und ψ_2, d. h. jede Funktion der Form $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ (c_1 und c_2 sind Konstanten), einen Zustand ergibt, in dem die gleiche Messung *entweder* das Ergebnis 1 *oder* das Ergebnis 2 liefert.

Das Prinzip der Superposition der Zustände ist ein *Grundprinzip der Quantenmechanik*, da in ihm im wesentlichen alle eigentümlichen Züge der atomaren Erscheinungen eingeschlossen sind, die wir weiter vorn betrachteten. Tatsächlich folgt aus diesem Prinzip insbesondere, daß die

Wahrscheinlichkeiten sich in der Quantenmechanik nicht einfach addieren, sondern daß auch Interferenz stattfindet:
$|\psi|^2 = |c_1|^2 |\psi_1|^2 + |c_2|^2 |\psi_2|^2 + (c_1{}^* c_2 \psi_1{}^* \psi_2 + c_1 c_2{}^* \psi_1 \varphi_2{}^*)$
Im Superpositionsprinzip sind sowohl die Welle-Korpuskel-Eigenschaften der Quantenobjekte als auch der statistische Charakter der Meßergebnisse enthalten.

Die Linearität der Gleichungen

Aus dem Superpositionsprinzip folgt direkt, daß alle Gleichungen, welche die Wellenfunktionen befriedigen, bezüglich ψ linear[1] sein müssen. Diese Gleichungen werden später noch gebracht, aber jetzt folgen erst weitere Hinweise.
Die Kenntnis der Wellenfunktion ψ erlaubt prinzipiell die Berechnung der Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse auch jeder anderen Messung (nicht der Messung der Koordinaten!). Dabei sind alle diese Wahrscheinlichkeiten Ausdrücke, in die ψ mit dem Faktor ψ^* eingeht. In diesen Ausdruck muß selbstverständlich auch die Funktion eingehen, die von der Art und dem Ergebnis der Messung abhängt. Da alle mit der Wellenfunktion berechenbaren Größen mit direktem physikalischem Sinn eine Form haben, in der ψ mit ψ^* multipliziert ist, ist klar, daß die normierte Wellenfunktion[2] nur mit einer Genauigkeit bis auf den konstanten „Phasen"-Faktor $e^{i\alpha}$ (α ... eine beliebige reelle Zahl) vom Betrage eins bestimmt werden kann. Diese Uneindeutigkeit ist prinzipiell und kann nicht beseitigt werden. Sie ist jedoch unwesentlich, weil sie sich in keinen physikalischen Ergebnissen widerspiegelt.

Operatoren

Die Spezifik des mathematischen Apparates der Quantenmechanik äußert sich auch darin, daß den physikalischen Größen in der Quantenmechanik mathematische Objekte neuer Art, *Operatoren*, zugeordnet werden. *Eigenwerte* des quantenmechanischen Operators $\widehat{L}$ sind solche, welche die betreffende physikalische Größe unter den Bedingungen annehmen kann, die mit ihrer Messung vereinbar sind. Die *Eigenfunktion* ψ_1 dieses Ope-

[1] Im Laufe der Zeit verändert sich der Zustand eines Quantensystems und mit ihm die Wellenfunktion. In diesem Sinne kann man die Wellenfunktion auch als Funktion der Zeit betrachten.

[2] Die Bedingungen für die Normierung der Wellenfunktionen bestehen darin, daß die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller möglicher Koordinatenwerte des Systems gleich eins sein muß. Diese Bedingung ist einfach eine Widerspiegelung der Tatsache, daß sich das System im Raum befindet.

rators, dem der Eigenwert l zukommt, beschreibt den Zustand des Systems, in der die gegebene physikalische Größe einen bestimmten Wert hat und gleich l ist.

Spektren der Größen

Somit messen wir in der Quantenmechanik die Werte, die eine physikalische Größe annehmen kann, ihre Eigenwerte, und von deren Gesamtheit sprechen wir als dem *Spektrum der Eigenwerte* der betreffenden Größe. In der klassischen Mechanik durchlaufen die physikalischen Größen, allgemein gesagt, eine kontinuierliche Reihe von Werten. In der Quantenmechanik gibt es auch physikalische Größen (z. B. die Ortskoordinaten), deren Eigenwerte eine kontinuierliche Reihe ausfüllen. In diesen Fällen spricht man von einem *kontinuierlichen Spektrum* der Eigenwerte. Daneben gibt es in der Quantenmechanik aber auch andere Größen, deren Eigenwerte eine gewisse diskrete Serie oder, wie man sagt, ein diskretes Spektrum darstellen.

Gleichzeitige Meßbarkeit der Größen

Es ist sehr interessant, daß alle grundlegenden quantenmechanischen Beziehungen, die in Operatorform geschrieben werden, der Gestalt nach genau mit den entsprechenden Beziehungen der klassischen Mechanik übereinstimmen. Es besteht jedoch ein wesentlicher Unterschied zwischen der Algebra der Operatoren und der Algebra der Zahlen, in der ersteren gilt das Kommutativgesetz der Multiplikation nicht.
Dieser Fakt ist die Widerspiegelung des physikalischen Sachverhalts, daß in der Quantenmechanik bei weitem nicht jede Menge physikalischer Größen *gleichzeitig* gemessen wird, man ihnen also nicht gleichzeitig bestimmte Werte zuordnen kann. Wenn zwei verschiedene physikalische Größen L und M gleichzeitig bestimmte Werte besitzen, bedeutet das in der mathematischen Sprache der Quantenmechanik, daß der gegebene Zustand durch eine Wellenfunktion beschrieben wird, die eine *allgemeine Eigenfunktion* der beiden Operatoren $\widehat{L}$ und $\widehat{M}$ ist und diesen Größen entspricht. Das bedeutet wiederum, daß die Operatoren $\widehat{L}$ und $\widehat{M}$ untereinander *kommutativ* sind, d. h., das Produkt der beiden Operatoren ist unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren: $\widehat{L} \cdot \widehat{M} = \widehat{M} \cdot \widehat{L}$. Diese symbolische Gleichung ist auch zu schreiben in der Form

$$\widehat{L} \cdot \widehat{M} - \widehat{M} \cdot \widehat{L} = 0.$$

Damit kommen wir zu einem wichtigen Ergebnis: Wenn zwei Größen gleichzeitig gemessen werden können, sind ihre Operatoren vertauschbar.

Die Unbestimmtheitsrelation

Ist aber $\widehat{L} \cdot \widehat{M} - \widehat{M} \cdot \widehat{L} \neq 0$, liegt kein solcher Zustand vor, bei dem den beiden Größen L und M gleichzeitig bestimmte Werte zugeordnet werden können. In diesem Falle gibt es für die Größen L und M eine Beziehung vom Typ der Unbestimmtheitsrelation, in der eine wichtige Besonderheit der Quantenobjekte zum Ausdruck kommt.
Betrachten wir im einzelnen die Vertauschungsregeln für die Operatoren des Impulses und der Ortskoordinaten. Sie haben die Form

$$\begin{aligned} \hat{p}_x\hat{x} - \hat{x}\hat{p}_x &= -i \cdot h \\ \hat{p}_x\hat{y} - \hat{y}\hat{p}_x &= 0 \\ \hat{p}_x\hat{z} - \hat{z}\hat{p}_x &= 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Analoge Beziehungen gibt es für die anderen Komponenten der Operatoren des Impulses und der Ortskoordinaten.
Die Formeln (30) zeigen, daß die Ortskoordinate eines Teilchens auf einer Achse gleichzeitig einen bestimmten Wert mit der Komponente des Impulses in Richtung der beiden anderen Achsen haben kann. Ortskoordinate und Impulskomponente längs ein und derselben Achse gibt es aber nicht gleichzeitig. Das Teilchen kann sich also nicht an einem bestimmten Raumpunkt befinden und gleichzeitig einen bestimmten Impuls $\mathfrak{p}$ zugeordnet bekommen.
Aus den betrachteten Vertauschungsregeln folgen die Beziehungen

$$\begin{aligned} \Delta p_x \Delta x &\sim h \\ \Delta p_y \Delta y &\sim h \\ \Delta p_z \Delta r &\sim h. \end{aligned} \tag{31}$$

Sie werden Unbestimmtheitsrelationen genannt.
Aus den Beziehungen (31) ist zu ersehen: Mit je größerer Genauigkeit die Ortskoordinate des Teilchens bekannt ist (d. h. je kleiner Δx), desto größer ist die Ungenauigkeit Δp_x des Wertes der Impulskomponente längs der gleichen Achse und umgekehrt. Befindet sich, als Sonderfall, das Teilchen an einem ganz exakt bestimmten Punkt des Raumes ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$), dann folgt $\Delta p_x = \Delta p_y = \Delta p_z = \infty$. Alle Werte des Impulses sind hier also gleich wahrscheinlich. Umgekehrt ist die Lage des Teilchens im Raum gleich wahrscheinlich, wenn es einen exakt bestimmten Impuls $\mathfrak{p}$ hat.

Hieraus folgt insbesondere, daß der Zustand eines freien Teilchens (seine Wellenfunktion) vollständig bestimmt ist durch die Angabe entweder *nur* der vektoriellen Größe Impuls $\mathfrak{p}$ oder *nur* des Radiusvektors $\mathfrak{r}$. In der klassischen Mechanik ist bekanntlich der Zustand eines Teilchens erst bekannt durch Angabe von Impuls $\mathfrak{p}$ *und* Ortskoordinaten $\mathfrak{r}$.
Für eine Reihe anderer Größen gilt die Unbestimmtheitsrelation auch. Speziell für Energie und Zeit haben wir (in einem System, das beliebig schwach mit äußeren Objekten in Wechselwirkung steht):

$$\Delta\ (W - W') \sim \frac{h}{\Delta t}\,. \tag{32}$$

(32) nennt man die Unbestimmtheitsrelation für die Energie. Es muß aber betont werden, daß ihr Sinn nichts gemein hat mit dem Sinn der Unbestimmtheitsrelation $\Delta p \Delta \mathrm{x} \sim h$ für die Ortskoordinaten und den Impuls. In der letzteren sind Δp und $\Delta \mathrm{x}$ unbestimmt in den Werten von Impuls und Ortskoordinaten zu ein und demselben Zeitpunkt. Sie zeigen, daß diese beiden Größen überhaupt nicht gleichzeitig exakt bestimmte Werte haben können. Die Energien W und W' des betrachteten Systems können dagegen in jedem Zeitpunkt mit beliebiger Genauigkeit gemessen werden. Die Differenz $W - W'$ in (32) besteht aus zwei genau gemessenen Energiewerten in zwei verschiedenen Zeitpunkten; es besteht ganz und gar keine Unbestimmtheit am Energiewert in einem bestimmten Zeitpunkt. Δt ist das Zeitintervall zwischen den Messungen.

Die Wellengleichung

Wie schon gesagt worden war, gibt in der Quantenmechanik die Wellenfunktion ψ den genauen Zustand des physikalischen Systems an. Das bedeutet, daß mit der Vorgabe dieser Funktion für einen gewissen Zeitpunkt nicht nur alle Eigenschaften des Systems in diesem Augenblick beschrieben werden, sondern auch sein Verhalten in allen folgenden Zeitpunkten bestimmt ist, natürlich nur in dem Rahmen, der überhaupt von der Quantenmechanik zugelassen wird. Mathematisch wird dieser Zustand dadurch ausgedrückt, daß die Größe $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ in jedem Zeitpunkt durch die Funktion ψ im gleichen Zeitpunkt selbst bestimmt werden muß, wobei entsprechend dem Superpositionsprinzip diese Abhängigkeit linear sein muß. In sehr allgemeiner Form kann man schreiben

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial \psi}{\partial t} = \widehat{L}\,\psi.$$

worin $\widehat{L}$ ein linearer Operator ist und der Faktor i aus mathematischer Zweckmäßigkeit eingeführt wurde.

Zur Erklärung der Eigenschaften des Operators $\hat{L}$ kann gesagt werden: Sind keine von der Zeit abhängigen Felder vorhanden, stellt er den Energieoperator dar; er wird dann *Hamilton*-Operator $\widehat{H}$ des Systems genannt. Die Beziehung zwischen $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ und ψ nimmt die Form an

$$i \cdot h \frac{\partial \psi}{\partial t} = \widehat{H} \psi. \tag{33}$$

Wenn der Hamiltonoperator bekannt ist, liefert die Gleichung (33) die Wellenfunktion des betreffenden physikalischen Systems. Diese grundlegende Gleichung der Quantenmechanik heißt *Wellengleichung*.

Der Hamiltonoperator

Widmen wir uns jetzt der Bestimmung des Hamiltonoperators, einer Frage von erstrangiger Bedeutung, weil damit die Gestalt der Wellengleichung ermittelt wird.

Wir beginnen mit der Betrachtung eines freien Teilchens, d. h. eines Teilchens, das sich in keinem äußeren Feld befindet. Wegen der völligen Homogenität des Raumes für ein solches Teilchen kann sein Hamiltonoperator die Ortskoordinaten nicht in genauer Form enthalten und muß nur vom Impulsoperator abhängen. Weiterhin gilt für ein freies Teilchen sowohl der Energie- als auch der Impulserhaltungssatz, darum können diese beiden Größen offensichtlich gleichzeitig existieren. Da der Wert des Impulsvektors den Zustand des Teilchens vollkommen bestimmt, müssen die Eigenwerte der Energie W in Form einer Funktion des Impulswertes in diesem Zustand ausgedrückt werden. Dabei ist W nur eine Funktion des Absolutbetrags des Impulses, aber nicht von dessen Richtung. Das folgt wieder aus der völligen Isotropie des Raumes bezüglich des freien Teilchens. Die eigentliche Form der Funktion $W(p)$ wird völlig bestimmt durch die Forderungen des Prinzips der Relativität Galileis, das in der nichtrelativistischen Quantenmechanik genauso erfüllt werden muß wie in der klassischen (nichtrelativistischen) Mechanik. In der klassischen Mechanik führt diese Forderung zu einer quadratischen Beziehung zwischen Energie und Impuls[1].

$$W = \frac{p^2}{2m}.$$

[1] Man kommt zu dieser Formel, indem man die Ausdrücke für die Energie $\frac{mv^2}{2}$ und für die Geschwindigkeit $v = \frac{p}{m}$ benutzt.

Damit diese Gleichung für alle Eigenwerte der Energie und des Impulses gilt, muß sie auch für ihre Operatoren erfüllt werden:

$$\widehat{H} = \frac{1}{2\,m}\,(\widehat{p}_x{}^2 + \widehat{p}_y{}^2 + \widehat{p}_z{}^2). \tag{34}$$

Das ist dann der Hamiltonoperator eines sich frei bewegenden Teilchens. Der Hamiltonoperator für ein Teilchen, das sich in einem äußeren Feld befindet, lautet

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{\vec{p}}^{\,2}}{2\,m} + U\,(x, y, z). \tag{35}$$

U (x, y, z) ist das Energiepotential des Teilchens im äußeren Feld. Das erste Glied kann als Operator der kinetischen Energie betrachtet werden, das zweite Glied als Operator der potentiellen Energie. Die Eigenwerte des Operators der kinetischen Energie sind positiv. Das folgt direkt daraus, daß dieser Operator gleich der Summe der Quadrate der Operatoren der Impulskomponenten mit positiven Koeffizienten ist.

Die Schrödinger-Gleichung

Die Substitution der Ausdrücke für den Hamiltonoperator (34) und (35) in die allgemeinere Gleichung (33) ergibt die Wellenfunktion für das betreffende System. Diese Gleichung wurde von Schrödinger gefunden und wird deshalb Schrödinger-Gleichung genannt:

$$i\,h\,\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{\widehat{p}^{\,2}}{2\,m} + U\,(x, y, z)\right]\psi.$$

Eigenschaften der Lösungen

Schauen wir uns die Grundeigenschaften der Schrödinger-Gleichung an. Als erstes bemerken wir, daß die Bedingungen, denen ihre Lösungen genügen müssen, sehr allgemeinen Charakter besitzen: Die Wellenfunktion muß eindeutig, stetig und endlich im ganzen Raume sein.

Das freie Teilchen

Die Schrödinger-Gleichung für ein freies Teilchen hat endliche Lösungen im ganzen Raume bei beliebigen *positiven* Eigenwerten (einschließlich

Null). Das Energiespektrum des sich frei bewegenden Teilchens ist folglich kontinuierlich und reicht von Null bis plus unendlich.
Als Lösung der Schrödinger-Gleichung für ein freies Teilchen kann man die allgemeinen Eigenfunktionen der Operatoren der drei Impulskomponenten nehmen. Die Wellenfunktionen des stationären Zustandes – d. h., wenn die Energieverteilung einen konstanten Wert besitzt – wird dann die Form annehmen

$$\psi = \mathrm{const} \cdot e^{i\left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathrm{h}}\mathfrak{r} - \frac{W}{\mathrm{h}}t\right)} \quad \text{mit } W = p^2/2\,m. \tag{36}$$

Jede solche Funktion beschreibt einen Zustand, in dem das Teilchen eine bestimmte Energie W und einen Impuls $\mathfrak{p}$ besitzt.
Ein rein formaler Vergleich der Funktion (36) mit dem Ausdruck (25) zeigt, daß dies eine ebene Welle ist, die sich in Richtung von $\mathfrak{p}$ ausbreitet, die Frequenz W/h und die Wellenlänge $2\,\pi h/p$ besitzt (die letztere nennt man *de-Broglie-Wellenlänge des Teilchens*). Somit haben wir in der Quantenmechanik folgende fundamentalen Beziehungen für Teilchen:

$$\mathfrak{p} = h \cdot \mathfrak{f};\ W = h \cdot \nu;\ \lambda \cong \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{p}}. \tag{37}$$

Das gebundene Teilchen

Gebundene Teilchen sind solche, die sich bei ihrer Bewegung nicht unendlich weit vom Anziehungszentrum entfernen können. Für diese hat die Schrödinger-Gleichung Lösungen, die den obengenannten Bedingungen der Endlichkeit genügen, aber bei exakt bestimmten *negativen* Eigenwerten. Das Energiespektrum eines gebundenen Teilchens ist folglich diskret.

Die „Null"-Energie

Der kleinste Eigenwert der kinetischen Energie ist im diskreten Spektrum immer von Null verschieden. Also kann in der Quantenmechanik die Bewegungsenergie eines Teilchens in gebundenem Zustand nie gleich Null sein (sogar am Nullpunkt der absoluten Temperatur nicht).

Der „Tunnel"-Effekt

Aus der Lösung der Schrödinger-Gleichung geht auch hervor, daß ein gebundenes Teilchen, quantenmechanisch betrachtet, sich auch in solchen Bereichen des Raumes befinden kann, in denen das Energiepotential U größer ist als die Nullenergie W des Teilchens. Wenn auch die Wahrscheinlichkeit $|\psi|^2$ für den Aufenthalt des Teilchens mit wachsendem Abstand in der Tiefe dieses Bereiches schnell gegen Null strebt, ist sie doch in allen endlichen Entfernungen von Null verschieden. Wenn der gemeinte Raumbereich einen sehr kleinen Abschnitt darstellt, gibt es für das Teilchen eine von Null verschiedene Wahrscheinlichkeit, durch diesen Abschnitt „hindurch" zu gelangen. In dieser Beziehung besteht ein grundsächlicher Unterschied zur klassischen Mechanik, in der ein Teilchen überhaupt nicht in Bereiche eindringen kann, in denen $U > W$. In der klassischen Mechanik hängt die Unmöglichkeit des Eindringens in diesen Bereich damit zusammen, daß bei $W < U$ die kinetische Energie negativ wäre, d. h. die Geschwindigkeit imaginär, und das ist sinnlos. In der Quantenmechanik sind die Eigenwerte der kinetischen Energie auch positiv. Trotzdem kommen wir hier zu keinem Widerspruch. Wenn wir nämlich bei einer Messung das Teilchen an einem bestimmten Punkt des Raumes lokalisieren, wird der Zustand des Teilchens im Ergebnis dieses Prozesses so verändert, daß es aufgehört hat, eine bestimmte kinetische Energie zu besitzen.

Der Grenzübergang zur klassischen Mechanik

Weil die Quantenmechanik in sich die klassische als einen gewissen Grenzfall enthält, taucht die Frage auf, wie denn dieser Grenzübergang durchgeführt wird.

In der Quantenmechanik wird das Teilchen durch eine Wellenfunktion beschrieben, die die verschiedenen Werte seiner Koordinaten bestimmt. Diese Funktion ist die Lösung einer linearen Differentialgleichung (der Schrödinger-Gleichung). In der klassischen Mechanik wird dagegen das Teilchen als sich längs einer Bahn bewegend betrachtet, die sich vollkommen aus den Bewegungsgleichungen bestimmen läßt. Solche Wechselbeziehungen, in gewissem Sinne der Wechselbeziehung zwischen Quanten- und klassischer Mechanik analog, gibt es in der Elektrodynamik zwischen der Wellen- und geometrischen Optik. In der Wellenoptik werden elektromagnetische Wellen durch vektorielle Größen des elektrischen und des magnetischen Feldes beschrieben, die ein bestimmtes System linearer Differentialgleichungen befriedigen (die Maxwellschen Gleichungen). In

der geometrischen Optik betrachtet man dagegen die Ausbreitung des Lichtes längs bestimmter Bahnen, der Strahlen. Da hier Analogie vorliegt, kann man schließen, daß auch der Grenzübergang von der Quanten- zur klassischen Mechanik analog dem Übergang von der Wellen- zur geometrischen Optik vor sich geht.
Wir erinnern uns, daß der Übergang von der Wellen- zur geometrischen Optik dem Übergang zur Wellenlänge $\lambda \to 0$ entsprach. Für alle Quantenerscheinungen ist die Konstante h charakteristisch. Hieraus folgt, daß der Übergang von der Quanten- zur klassischen Mechanik formal als Übergang zum Grenzwert $h \to 0$ betrachtet werden kann.
Betrachten wir den Grenzübergang in der Schrödinger-Gleichung, zeigt es sich, daß die durch die Wellenfunktion beschriebene Bewegung im allgemeinen Fall ganz und gar nicht in die Bewegung längs einer bestimmten Bahn übergeht. Die Verbindung zur klassischen Bewegung besteht darin: Sind für einen bestimmten Zeitpunkt am Anfang die Wellenfunktion und mit ihr die Verteilung der Wahrscheinlichkeit der Koordinaten gegeben, so wird sich diese Verteilung im weiteren Verlauf so „verschieben", wie es nach den Gesetzen der klassischen Mechanik zu erwarten ist.
Was die quantenmechanischen Operatoren betrifft, müssen sie schließlich im Grenzfall einfach auf die entsprechenden physikalischen Größen reduziert werden. Das folgt aus der Tatsache, daß die in Operatorform geschriebenen quantenmechanischen Beziehungen in der Gestalt genau mit den entsprechenden klassischen Beziehungen übereinstimmen.

Noch einmal über die Messung

Spricht man von der Schrödinger-Gleichung, muß man sich an die fundamentale Rolle erinnern, die der Wechselwirkungsprozeß eines Quants mit einem klassischen Objekt in der Quantenmechanik spielt. Wir nennen ihn gewöhnlich Messung. Es muß jedoch unterstrichen werden, daß hier ein Prozeß angenommen wird, der in keiner Weise die Teilnahme des Beobachters erfordert. Eine Verbindung zwischen den Gesetzen der Natur und den Eigenschaften des Beobachters zu suchen ist hier nicht stichhaltig. Denken wir noch etwas ausführlicher über die Situation in der Quantenmechanik nach.
Wir betrachten ein System, das aus Quanten und klassischen Objekten besteht. Das Quant möge bis zur Wechselwirkung durch eine willkürliche normierte Wellenfunktion beschrieben werden. Bei seiner Wechselwirkung mit dem klassischen Objekt geht das letztere aus dem Anfangszustand in einen anderen über, und aus dieser Zustandsänderung urteilen wir über den Zustand des Quants. Die Wechselwirkungseigenschaften

eines Quantenobjekts mit klassischen Bedingungen sind so, daß nach der Wechselwirkung ein Zustand des Quants entsteht, der mit einer bestimmten Wellenfunktion zu beschreiben ist. Diese Bedingungen können vom Beobachter geschaffen worden sein, oder es sind natürliche Bedingungen, die außerhalb und unabhängig von jedwedem Beobachter vorhanden sind. Nur solche Zustände von Quantenobjekten geben uns die Möglichkeit, über ihre Eigenschaften zu urteilen. Folglich ist der Wechselwirkungsprozeß eines Quants mit einem System, das mit hinreichender Genauigkeit der klassischen Mechanik gehorcht, grundlegend für die Quantenmechanik. Nur aus dessen Ergebnissen ist ein Beschreiben der Eigenschaften der Quanten möglich.

Über die Kausalität

Im Zusammenhang mit der Schrödinger-Gleichung scheint folgende allgemeine Bemerkung angebracht zu sein. Als nötige Vorbedingung für die Existenz der Begriffe Ursache und Wirkung erweist sich die Existenz der Begriffe früher und später. Die „Bewegungsgleichungen" eines physikalischen Erscheinungsbereiches geben eine zeitliche Abhängigkeit des Zustandes der physikalischen Objekte. Falls „äußere Bedingungen" („Ursachen") gegeben sind und der Anfangszustand des Objekts bekannt ist, bestimmen die „Bewegungsgleichungen" eindeutig den Zustand des Objekts zu einem beliebigen späteren Zeitpunkt („Wirkung"). In der klassischen, relativistischen und Quantenmechanik werden die äußeren Bedingungen durch Felder gegeben: In der Theorie der Felder (der elektromagnetischen, der Gravitations-) werden die „äußeren Bedingungen" durch die Konfiguration der entsprechenden „Ladungen" gegeben (beim Gravitationsfeld bestehen Besonderheiten). Die Zustände der Objekte (in einem bestimmten Zeitpunkt) werden in der klassischen und relativistischen Mechanik durch die Werte der Ortskoordinaten und des Impulses bestimmt, in der Theorie des elektromagnetischen Feldes durch die Werte der vektoriellen Größen des elektrischen und des magnetischen Feldes (im ganzen Raum), in der Theorie des Gravitationsfeldes durch die Größe eines metrischen Tensors, in der Quantenmechanik durch eine Wellenfunktion.
Die „Bewegungsgleichung" der Quantenmechanik, die Schrödinger-Gleichung, legt eindeutig die Abhängigkeit der Wellenfunktion des Zustands von der Zeit fest. Ist uns der Anfangszustand ψ (x) eines Quantensystems auf Grund einiger Messungen bekannt, so wird der Zustand dieses Systems ψ (x, t) in jedem beliebigen Zeitpunkt eindeutig aus der Wellengleichung errechnet. Falls wir den Wert einer Größe des Systems

im Zustande ψ (x, t) messen wollten, kämen wir zu uneindeutigen Ergebnissen, nämlich zu einer Wahrscheinlichkeitsverteilung der Werte der zu messenden Größe. Dabei können diese Wahrscheinlichkeiten alle vorausberechnet werden. Sie werden durch Ausdrücke bestimmt, in welche die Funktion ψ (x, t) und eine weitere von der Art und dem Ergebnis der Messung abhängige Funktion eingehen.
Man kann sagen, daß es in der Physik zwei unabhängige Prinzipien gibt: das Prinzip der Kausalität, das im Bestehen der „Bewegungsgleichung" zum Ausdruck kommt, und das Prinzip, nach dem jedes physikalische Objekt seine Eigenschaften nur bei Wechselwirkungen mit äußeren klassischen Bedingungen zeigt. In den Bewegungsgleichungen wird der Anfangszustand des Systems als bekannt vorausgesetzt. Wie aber die Kenntnisse selbst über den Zustand entstanden sind, wie die eigentliche Beschreibung des Zustands entstand – das ist sicher eine andere und selbständige Frage.
Um den Zustand eines physikalischen Systems bestimmen zu können, muß es mit äußeren klassischen Objekten in Wechselwirkung gewesen sein.[1] Diese Wechselwirkung ruft eine Störung des Systems selbst hervor. In der Nicht-Quantenphysik konnten wir sie vernachlässigen, in der Quantenphysik ist sie aber wesentlich. Als Folge daraus liefern Wechselwirkungen des Systems mit äußeren klassischen Objekten in der Nicht-Quantenphysik eindeutige, in der Quantenphysik uneindeutige Ergebnisse. Das Ziel jeglicher Betrachtung ist es, den Zustand des Systems zu bestimmen. Das weitere Schicksal des geschaffenen Zustandes liegt schon in den „Bewegungsgleichungen".

Die Zeit ist nicht umkehrbar

Wir haben noch etwas Wesentliches zur Schrödinger-Gleichung zu bemerken. Wie bekannt ist, sind die Gleichungen der Nicht-Quantenphysik invariant in bezug auf die Vertauschung von Zukunft und Vergangenheit. Die Schrödinger-Gleichung für sich allein ändert sich auch nicht beim Austausch von t durch $-t$, dennoch enthält die Quantenmechanik als wesentliches Merkmal die Ungleichwertigkeit beider Zeitrichtungen.[2] Diese Ungleichwertigkeit hängt mit dem für die Quantenmechanik

[1] Das war so in der klassischen und der relativistischen Mechanik, in der klassischen Elektrodynamik, wo ein Feld durch die Wirkung charakterisiert wurde, die es auf einen geladenen Probekörper ausübt. Das war so in der Theorie des Gravitationsfeldes und in der Quantenmechanik. Das ist auch so, wie wir sehen werden, in der Quanten-Elektrodynamik, wo die Messung der Komponenten des Feldes die Bestimmung des Impulses eines geladenen Probekörpers erfordert (als Probekörper müssen hier endliche klassische Ladungsverteilungen und der Strom benutzt werden).
[2] Unter der Bedingung der gleichzeitigen Substitution der Wellenfunktion ψ durch ψ^*.

grundlegenden Prozeß der Wechselwirkung eines Quants mit einem System zusammen, das sich hinreichend genau der klassischen Mechanik unterordnet.
Dieser Prozeß besitzt bekanntlich eine sehr wesentliche Besonderheit. Er stellt ständig eine Einwirkung auf das Quantenobjekt dar, d. h., er verändert dessen Zustand und mit ihm auch seine Wellenfunktion. Damit wird natürlich gleichzeitig die ganze Vergangenheit des Quantenobjekts (bis zur Wechselwirkung) ausgelöscht. Wir sahen ja, daß, wenn mit einem gegebenen Quantenobjekt nacheinander zwei wie oben dargestellte Prozesse ablaufen (nennen wir sie A und B), man aus den Ergebnissen des Prozesses A die Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse des Prozesses B bestimmen kann, unabhängig davon, was mit dem Quantenobjekt bis zum Prozeß A geschehen war. Diese Tatsache zeigt den doppelseitigen Charakter des Meßprozesses in der Quantenmechanik: seine Rollen bezüglich der Vergangenheit und der Zukunft sind nicht gleich. Also kann man in der Quantenmechanik *nicht* von einer völligen physikalischen Symmetrie beider Zeitrichtungen sprechen.

Die Erhaltungssätze in der Quantenmechanik

Betrachten wir jetzt die Erhaltungssätze in der Quantenmechanik. Wir sahen, daß die allgemeinsten Symmetrieeigenschaften des Raumes und der Zeit dazu führen, daß alle physikalischen Objekte, und darunter auch die Quanten, durch Größen wie Energie, Impuls und Drehimpuls charakterisiert werden müssen. Mehr noch, für geschlossene Systeme müssen diese Größen konstant bleiben. In der Quantenmechanik haben die Erhaltungssätze Operatorform mit allen daraus resultierenden Besonderheiten.
Es ist bekannt, daß die Folge der Homogenität der Zeit in einem System der Energieerhaltungssatz ist. Seine quantenmechanische Besonderheit besteht darin, daß er durch zwei Messungen nur bis zu einer Genauigkeit der Größenordnung $h/\Delta t$ geprüft werden kann, wobei Δt das Zeitintervall zwischen den beiden Messungen ist [siehe (32)]. Die energetischen Spektren der freien und gebundenen Teilchen betrachteten wir oben.
Die Folge der Homogenität des Raumes in einem System ist der Impulserhaltungssatz. Natürlich wird das Spektrum der möglichen Eigenwerte des Impulses nur für freie Teilchen betrachtet.
Weil in der Quantenmechanik Vorgänge in außerordentlich kleinen Raumbereichen untersucht werden, das sich frei bewegende Teilchen aber ins Unendliche fliegen kann, müßte man natürlich erwarten, daß sich der Komplex von Eigenwerten der Energie und des Impulses für ein

freies Teilchen nicht von den möglichen Werten dieser Größen für solch ein Teilchen in der klassischen Mechanik unterscheidet. Tatsächlich sahen wir, daß das Energiespektrum eines freien Teilchens kontinuierlich ist und von Null bis Unendlich reicht (negative Werte sind diskret und kommen Teilchen im gebundenen Zustand zu). Jetzt ist uns klar, daß das Spektrum der Eigenwerte der Impulskomponenten auch kontinuierlich ist und den Bereich von minus unendlich bis plus unendlich erfaßt.
Die Folge der Isotropie des Raumes ist der Drehimpulserhaltungssatz. Er hat auch eine quantenmechanische Besonderheit. Die Komponenten des Drehimpulses sind nicht vertauschbar, so daß die drei Komponenten nicht gleichzeitig bestimmte Werte besitzen können (mit Ausnahme des Sonderfalles, wenn alle drei Komponenten gleichzeitig gleich Null sind). In dieser Beziehung unterscheidet sich der Drehimpuls sehr vom Impuls, denn bei ihm können die drei Komponenten gleichzeitig bestimmte Werte haben. Also gibt es für das Teilchen in der Quantenmechanik nicht den Drehimpulsvektor. Einen bestimmten Wert haben gleichzeitig der absolute Betrag des Drehimpulses und eine seiner Komponenten.
In der Regel betrachtet man den Drehimpuls nur an gebundenen Systemen. Seine möglichen Eigenwerte sind diskret (sowohl für den Absolutbetrag der Größe als auch für die Projektion in der ausgewählten Richtung).
Wir erwähnen außerdem, daß Drehimpuls und Impuls nicht kommutativ sind, d. h., beide Größen können nicht gleichzeitig gemessen werden.
Die Homogenität und die Isotropie des Raumes führen ihrerseits zur völligen Symmetrie des Raumes in bezug auf links und rechts. Deswegen sind die Naturgesetze bezüglich der Spiegelung, der Inversion, invariant. Die Invarianz bezüglich der Spiegelung führt in der Nicht-Quantenphysik zu keinem Erhaltungssatz. In der Quantenphysik ist die Lage aber anders, hier entspricht dieser Invarianz der Satz der Erhaltung der Parität des Quantenzustands.
Durch die folgende Erklärung soll der Sachverhalt verständlicher werden: Wendet man die Spiegelung auf die Wellenfunktion an, ändert sie sich entweder überhaupt nicht, oder sie ändert ihr Vorzeichen. Im ersten Falle nennt man die Wellenfunktion (und den entsprechenden Zustand) *gerade*, im zweiten Falle *ungerade*. Folglich besteht der Sinn des Gesetzes zur Erhaltung der Parität (im Russischen benutzt man den Begriff „tschetnost", d. h. das Geradesein, wofür im Deutschen der Begriff „Parität" gebräuchlich ist, R. P.) in folgendem: Wenn der Zustand eines abgeschlossenen Systems eine bestimmte Parität besitzt (gerade oder ungerade), dann bleibt sie als Funktion der Zeit erhalten.
Das Gesetz zur Erhaltung der Parität reguliert neben den anderen Erhaltungssätzen die Möglichkeit des Zerfalls und der Erzeugung eines zusammengesetzten Systems. Wenn ein geschlossenes System in Teile zer-

fällt (unter dem Einfluß einer inneren Kraft), dann muß sein Drehmoment und die Parität erhalten bleiben. Dieser Umstand kann den Zerfall des Systems unmöglich machen, selbst wenn er in energetischer Hinsicht möglich wäre.

Das Zweikörperproblem

Betrachten wir jetzt die Bewegung eines Systems zweier in Wechselwirkung stehender Teilchen. Zuerst merken wir folgendes: Durch die Vorgabe des Hamiltonoperators werden die Eigenschaften des Quantensystems bestimmt, weil sich nach ihm die Gestalt der Wellengleichung richtet, aus der wieder die Wellenfunktion des Systems gefunden wird.
Der Hamiltonoperator beweist auch besonders die Invarianz in bezug auf die erwähnten drei Transformationen des Koordinatensystems: die Parallelverschiebung, die Drehung und die Inversion.
In der zu betrachtenden Aufgabe hängt der Hamiltonoperator nicht von der Zeit ab und ist mit dem Energieoperator identisch. Der Energieoperator ist vertauschbar mit den Operatoren des Impulses, des Drehimpulses und der Inversion; das bedeutet aber, daß diese Operatoren allgemeine Wellenfunktionen haben können. Dieser Umstand beschränkt in bestimmter Weise die Lösung der Wellengleichung, und die Wellenfunktion des Systems wird vollkommen bestimmt durch die Vorgabe der Werte für die Energie, den Impuls und den Drehimpuls (die Parität ergibt sich aus dem Wert für den Drehimpuls des Systems). Da man sich weiterhin die Bewegung des Systems als die Summe zweier voneinander unabhängiger Bewegungen vorstellen kann (die fortschreitende Bewegung des Systems als Ganzes und die Bewegung der Teilchen untereinander), wird die Wellenfunktion des Systems aus zwei unabhängigen Komponenten bestehen: die Wellenfunktion der freien und die der gebundenen Bewegung. Die Wellenfunktion der freien Bewegung ist bekanntlich völlig erklärt, wenn der Impuls gegeben ist. Folglich ist die Wellenfunktion des gebundenen Zustandes völlig bestimmt, wenn gleichzeitig die Energie und der Drehimpuls bekannt sind (gemeint ist der Betrag des Drehimpulses und seine Projektion in die beliebig gewählte Richtung).

„Innere“ Freiheitsgrade

Wir werden sehen, daß die maximale Anzahl der physikalischen Größen, die zur völligen Bestimmung des Zustandes unseres Quantensystems nötig ist und gleichzeitig bestimmte Werte besitzt, auch gleich der Zahl der Freiheitsgrade des Systems ist. Nichtsdestoweniger besitzt unser Quantensystem noch solche charakteristischen Größen wie die Parität und den sogenannten Spin. Beide sind spezifisch für die Quantenphysik, sie verschwinden beim Übergang zur klassischen Physik. Also sind den Quantenobjekten spezifische „innere Freiheitsgrade" eigen.

Der Spin

Behandeln wir etwas ausführlicher den Begriff Spin. Dem Elementarteilchen muß man einen gewissen „eigenen" („inneren") Drehimpuls zuschreiben, der von der Ortsveränderung im Raum unabhängig ist. Diesen eigenen Drehimpuls des Teilchens nennt man seinen Spin, im Unterschied zu dem Drehimpuls, der mit der Bewegung des Teilchens im Raum zusammenhängt und den man auch das Bahnmoment nennt.
Wir werden noch sehen, daß sich die Teilchen nicht nur auszeichnen durch die mit dem Bahnmoment verknüpfte Parität, sondern auch durch die innere (eigene) Parität. Auf die letztere stößt man bei Entstehungs- und Zerfallsprozessen von Teilchen. Elementarteilchen müssen wir uns punktförmig vorstellen. Deshalb ist es völlig unsinnig, das „eigene" Drehmoment als das Resultat der Drehung des Teilchens um seine „eigene Achse" anzunehmen. Der Spin ist wirklich ein spezifischer Quanteneffekt, er läßt keine klassische Interpretation zu.
Bis jetzt hatten wir uns immer so ausgedrückt, daß die Wellenfunktion des Teilchens eine Funktion der Ortskoordinaten ist. Mit der Einführung des Spins müssen wir diese Aussage aber erweitern. Zu den Ortskoordinaten kommt noch ein veränderlicher Spin hinzu, welcher den Wert der Projektion des Spins in eine vorgewählte Richtung des Raumes angibt und eine begrenzte Anzahl diskreter Werte durchläuft. Diese Werte kann man den Wellenfunktionen als Index beigeben. Also ist die Wellenfunktion eines Teilchens, das einen von Null verschiedenen Spin besitzt, in Wirklichkeit nicht nur eine, sondern eine Gesamtheit verschiedener Koordinatenfunktionen, die sich in ihrem Spinindex unterscheiden.

Ein System gleicher Teilchen

Betrachten wir die Eigenschaften eines Systems gleicher Teilchen. Weiter unten werden wir sehen, daß aus gleichen Teilchen bestehende Quantensysteme zusätzliche spezifische Eigenschaften besitzen, zu denen es kein Analogon bei den klassischen Systemen gibt. In der klassischen Mechanik verlieren doch die Teilchen, ungeachtet der Identität ihrer physikalischen Eigenschaften, ihre individuellen Besonderheiten nicht. Man kann sich zum Beispiel Teilchen vorstellen, die in den Verband eines gegebenen physikalischen Systems eindringen, dort innerhalb eines gewissen Zeitintervalls durchnumeriert werden und dann wieder jedes für sich ihrer Bahn folgen, bis sie in einem beliebigen Augenblick interferieren.

In der Quantenmechanik ist die Lage aber ganz anders. Das folgt direkt aus dem Unbestimmtheitsprinzip. Auf Grund dieses Prinzips verliert der Begriff der Bahn eines Teilchens völlig seinen Sinn. Tatsächlich können Geschwindigkeit und damit Impuls des Teilchens nicht gleichzeitig mit den Ortskoordinaten feste Werte haben. Aber das Produkt aus der Geschwindigkeit und einem hinreichend kleinen Zeitelement Δt gibt die Ortsveränderung des Teilchens im Zeitraum Δt an. Ist die Lage des Teilchens im gegenwärtigen Zeitpunkt bekannt, seine Geschwindigkeit aber nicht, so bedeutet das, daß bereits einen unendlich kleinen Augenblick später überhaupt keine sichere Aussage mehr über die Koordinaten des Teilchens gemacht werden kann. Haben wir also die Teilchen lokalisiert und sie für einen Augenblick „durchnumeriert", so kommen wir damit in keiner Weise zu dem Ziel, sie für die nächstfolgenden Augenblicke zu identifizieren. Haben wir in einem anderen Zeitpunkt ein Teilchen an einem bestimmten Raumpunkt festgestellt, können wir jedoch nicht sagen, um welches der vielen Teilchen es sich nun gerade handelte.

In der Quantenmechanik ist es prinzipiell unmöglich, eines von gleichen Teilchen im einzelnen zu verfolgen und damit das eine vom anderen zu unterscheiden. Man kann sagen, daß die gleichen Teilchen in der Quantenmechanik ihre Individualität völlig verlieren. Die Gleichheit der Teilchen in ihren physikalischen Eigenschaften hat hier sehr tiefe Folgen. Sie führt zur völligen Ununterscheidbarkeit der Teilchen.

Dieses sogenannte Prinzip der Ununterscheidbarkeit spielt bei quantenmechanischen Untersuchungen von Systemen aus gleichen Teilchen eine grundlegende Rolle. Betrachten wir ein System, das nur aus zwei Teilchen besteht. Die Zustände dieses Systems, die man durch einfaches Umstellen beider Teilchen erhält, müssen auf Grund der Identität der Teilchen physikalisch völlig äquivalent sein. Das bedeutet, daß sich als Ergebnis einer solchen Umstellung in der Wellenfunktion nur der unwesentliche Phasenfaktor verändert. Es sei $\psi(\xi_1, \xi_2)$ die Wellenfunktion des Systems, wobei ξ_1 und ξ_2 bedingt die Gesamtheit der drei Ortskoordinaten und der Projektion des Spins für jedes Teilchen bedeuten.[1]

[1] Die Umstellung allein der Ortskoordinaten zweier Teilchen entspricht noch nicht ihrer physikalischen Umstellung, ihrem „Austausch".

Dann muß sein:

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = e^{i\alpha}\,\psi(\xi_2, \xi_1),$$

α ist eine Stoffkonstante. Nach einer zweiten Umstellung kommen wir zum Ausgangszustand zurück, während die Funktion jetzt den Faktor $e^{2i\alpha}$ enthält. Also muß $e^{2i\alpha} = 1$ oder $e^{i\alpha} = \pm 1$ sein. Folglich ist

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \pm\,\psi(\xi_2, \xi_1).$$

Wir kommen zu dem Ergebnis, daß es überhaupt nur zwei Möglichkeiten gibt: Die Wellenfunktion ist entweder symmetrisch (d. h., sie ändert sich bei einer Umstellung der Teilchen gar nicht), oder sie ist antisymmetrisch (d. h., bei Umstellung verändert sich das Vorzeichen). Offensichtlich müssen die Wellenfunktionen aller Zustände ein und desselben Systems einheitliche Symmetrie besitzen. Sonst wäre die Wellenfunktion eines durch Superposition von Zuständen verschiedener Symmetrie entstandenen Zustandes weder symmetrisch noch antisymmetrisch. Dieses Ergebnis ist direkt auf Systeme zu verallgemeinern, die aus willkürlich vielen gleichen Teilchen zusammengesetzt sind. An diesem Beispiel sehen wir, daß den möglichen Zuständen eines Systems gleicher Teilchen bestimmte Beschränkungen auferlegt sind.

Ob nun die Eigenschaften der Systeme gleicher Teilchen durch symmetrische oder antisymmetrische Wellenfunktion beschrieben werden, das hängt von der Art der Teilchen ab, die zum jeweiligen System gehören. Systeme mit antisymmetrischen Funktionen unterliegen der Fermi-Statistik, Systeme mit symmetrischen Funktionen der Bose-Statistik.[1]

In der relativistischen Quantentheorie zeigt es sich, daß die Statistik, der sich die Teilchen des jeweiligen Typs unterwerfen, eindeutig mit dem Spin dieser Teilchen verbunden ist. Und zwar gehorchen die Teilchen mit halbzahligem Spin der Fermi-Statistik, die mit ganzzahligem Spin der Bose-Statistik.

Aus diesem Sachverhalt ergibt sich eine sehr wesentliche Folge. In einem System aus gleichen Teilchen, das der Fermi-Statistik gehorcht, kann sich in ein und demselben Quantenzustand gleichzeitig nicht mehr als nur ein Teilchen befinden (Pauli-Prinzip). Aber in einem System aus gleichen Teilchen, das der Bose-Statistik gehorcht, können sich in ein und demselben Quantenzustand gleichzeitig beliebig viele Teilchen befinden.

Die aufgedeckten Tatsachen legen davon Zeugnis ab, daß bei quantenmechanischer Betrachtung in einem System gleicher Teilchen, selbst wenn keine unmittelbare Krafteinwirkung vorhanden ist, eigentümliche wechselseitige Einflüsse zwischen den Teilchen wirksam sind (sogenannte *Austauscheffekte*).

[1] Über die Statistiken siehe Kapitel IX.

Das Atom

Wir wenden nun die oben dargelegten allgemeinen Prinzipien der Quantenmechanik auf das Atom an. Zum Atom gehört ein System von Elektronen, die sich im Coulomb-Feld des Kerns bewegen und elektrisch untereinander in Wechselwirkung stehen. Wie wir wissen, bleiben für ein System von Teilchen in einem zentralsymmetrischen äußeren Feld die Energie, das Bahnmoment und auch die Parität des Zustandes erhalten. Darum wird jeder stationäre Zustand des Atoms durch einen bestimmten Wert des Drehimpulses und der Parität charakterisiert. Außerdem besitzen die stationären Zustände der Systeme gleicher Teilchen eine bestimmte Umstellungssymmetrie, mit der eine Charakteristik wie der Spin des Elektronensystems verbunden ist.
Da das Atom außerdem ein System gebundener Teilchen darstellt, werden die Werte der obengenannten Größen ein diskretes Spektrum bilden. Es wird aus den Lösungen der Schrödinger-Gleichung für die entsprechenden atomaren Systeme ermittelt.
Das System der Elektronen gehorcht der Fermi-Statistik, da der Spin des Elektrons halbzahlig ist. Folglich gilt in diesem System das Pauli-Verbot. Dieser Umstand führt wieder zu spezifischen Gesetzmäßigkeiten in der Auffüllung der atomaren Quantenzustände mit Elektronen. Darin steckt die Erklärung für die Natur der periodischen Veränderung gewisser Eigenschaften, die in der Reihenfolge der Elemente entsprechend der Ordnungszahl des Atoms auftauchen (das Periodische System der Elemente nach D. I. Mendelejew).

Schlußbemerkung

Es sei zum Schluß bemerkt, daß die eben betrachtete nichtrelativistische Quantenmechanik eine vollkommene und logisch geschlossene physikalische Theorie ist, die durch eine unübersehbare Menge von Experimenten eine glänzende Bestätigung gefunden hat. Ihre Schöpfer sind Bohr, Heisenberg, Schrödinger und Dirac. Die Entdeckung der Quantenmechanik stellt einen der größten Triumphe des menschlichen Verstandes dar. Sie zeigte, daß der Mensch imstande ist, sich von traditionellen Vorstellungen zu lösen und auch das zu verstehen, was nicht im üblichen Sinne anschaulich ist.

6. Die relativistische Quantentheorie

Im letzten Kapitel untersuchten wir die Eigenschaften der Teilchen in kleinen Raumbereichen und sahen, daß ihr Verhalten hier neue, sogenannte Quantengesetze aufdeckt. Das Feld als physikalisches Objekt verändert in diesen kleinen Raumbereichen auch seine Eigenschaften.

Systeme mit veränderlicher Teilchenzahl

Es war schon gesagt worden, daß in Räumen atomarer Abmessungen von allen Wechselwirkungen nur die elektromagnetischen von Bedeutung sind. Wir bemerkten auch bereits, daß die Ausstrahlungseigenschaften des elektromagnetischen Feldes „analog" den Eigenschaften von Teilchen mit der Masse Null sind, die sich mit der Geschwindigkeit c bewegen und Photonen genannt werden. Diese Analogie gestattet es, das elektromagnetische Feld als eine Menge von Photonen anzusehen. Sicher können die Korpuskeleigenschaften des Feldes (der Impuls des Photons) nur vollkommen in Erscheinung treten, wenn die Photonen Energien in der Größenordnung besitzen, wie sie auch den mit ihnen in Wechselwirkung stehenden Teilchen, den Elektronen, eigen sind. Aus der Beziehung $h \cdot \nu = m \cdot c^2$ kann man die Größenordnung der Frequenzen der Photonen ($\nu \sim 10^{20}\,\mathrm{s}^{-1}$) und ihrer Wellenlängen ($\lambda \sim 10^{-12}\,\mathrm{m}$) abschätzen. Also werden bei Abständen um 10^{-12} m die Quanteneigenschaften des Feldes besonders wesentlich.
Da außerdem das elektromagnetische Feld bei der Wechselwirkung mit einem Stoff Energie und Impuls mit ihm austauscht, wird wohl das Photonenfeld als ein System mit veränderlicher Teilchenzahl betrachtet werden müssen. Die Photonen werden vom Stoff absorbiert und wieder emittiert. Weil sich das Feld und die ihm entsprechenden Photonen von Anfang an als relativistisches Objekt erwiesen haben, kann man daraus schließen, daß die relativistischen Quantensysteme Systeme mit veränderlicher Teilchenzahl sind.
Wenn wir versuchen, die nichtrelativistische Quantenmechanik der Teilchen mit einer von Null verschiedenen Masse auf den relativistischen Bereich zu verallgemeinern, kommen wir auch zu einer Vorstellung von

Systemen mit veränderlicher Teilchenzahl. Die Gleichungen der relativistischen Quantenmechanik (die Dirac-Gleichungen) lassen eigenartige Transformationen zu, sogenannte *Ladungs-Konjugation*, bei der sich das Teilchen durch sein Antiteilchen ersetzt. Die Eigenschaft der Gleichung, von der hier gesprochen wird, besteht in folgendem: Ersetzt man die Teilchen des Systems durch ihre Antiteilchen und wechselt das Vorzeichen des elektromagnetischen Feldes, so ändert sich die Gleichung nicht. Sprechen wir von einem Paar Teilchen – Antiteilchen, so ist es nur eine Frage der Bezeichnung ohne physikalischen Sinn, welches von beiden wir Teilchen oder Antiteilchen nennen. Das Antiteilchen des *Elektrons* ist das *Positron*. Eine charakteristische Besonderheit der Teilchen – Antiteilchen – Paare ist die, daß sie bei Wechselwirkungen verschwinden und entstehen können. Somit sind Elektron-Positron-Systeme solche mit veränderlicher Teilchenzahl. Alle dieser Grundlage ähnlichen Systeme kann man als *Quantenfelder* behandeln.
Die Gleichungen der relativistischen Quantenmechanik des Teilchens besitzen den Charakter von Feldgleichungen und beschreiben Systeme mit veränderlicher Teilchenzahl und ganz und gar nicht die Eigenschaften des einzelnen Teilchens. Nur unter einigen vereinfachenden Bedingungen kann man das Verhalten des relativistischen Elektrons als Einzelteilchen beschreiben.

Das Quantenfeld

Im relativistischen Quantenbereich verschwinden die Unterschiede zwischen den Begriffen Teilchen und Feld, es entsteht ein neuer Begriff, der Begriff *Quantenfeld* (Elektron-Positron-Feld, Photonenfeld).
Im allgemeinen darf man die aufgezählten Felder nicht als freie ansehen, sie stehen immer in Wechselwirkung miteinander. Wir erkennen das daran, daß sich Paare von Elektronen und Positronen in Photonen umwandeln und umgekehrt, nämlich Photonen in Paare von Elektronen und Positronen. Das folgt auch aus der Tatsache, daß ein Elektron (wie auch das Positron) immer mit einem elektromagnetischen Felde in Wechselwirkung steht (dem Photonenfeld), welches ja von ihm selbst geschaffen wird. Das Elektron sendet Photonen aus und absorbiert sie. Da die Photonen nur für kurze Zeiten ausgesendet werden (man sagt virtuell), um gleich wieder absorbiert zu werden, ist ihre Energie, wie aus der Beziehung $\Delta W \cdot \Delta t \sim h$ folgt, gar nicht beschränkt. Sie können ein Elektron-Positron-Paar erzeugen, das sich selbst wieder durch die Erzeugung von Photonen annihiliert.
Elektron und Positron stehen über das Photonenfeld in Wechselwirkung.

Die Photonen wirken wieder über das Elektronen-Positronen-Feld. Somit stellen das Elektronen-Positronen-Feld und das Photonenfeld ein *einheitliches Elektronen-Positronen-Photonen-Quantenfeld* dar. Dieses Feld ist Untersuchungsgegenstand der *Quanten-Elektrodynamik* oder der *Quantentheorie des elektromagnetischen Feldes.*

Die quantitative Beschreibung

Als die Gleichungen des Elektronen-Positronen-Photonen-Feldes müssen wir das System der Diracschen und der Maxwellschen Gleichungen in Operatorform betrachten. Natürlich müssen sowohl der mathematische Apparat als auch die Begriffe der relativistischen Quantentheorie im Vergleich zur nichtrelativistischen Quantentheorie verändert werden. Die quantenmechanische nichtrelativistische Theorie betrachtet ja offensichtlich gar nicht die Prozesse des Entstehens und Verschwindens (genauer: Prozesse der gegenseitigen Umwandlung) von Teilchen. Das Quadrat der Wellenfunktion gibt in der Quantenmechanik die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens in einem gegebenen Zustande. In der relativistischen Quantentheorie beschreiben die Wellenfunktionen der Quantenfelder die Gesamtheit der diesen Feldern entsprechenden Teilchen und die Prozesse der gegenseitigen Umwandlung, die unverkennbar in der Theorie enthalten sind. Entsprechend dem Sachverhalt sind die Wellenfunktionen der Quantenfelder Operatoren. Es gibt Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, beide sind kommutativ. Die *Operator-Wellenfunktionen* werden definiert durch die Feldgleichungen und die Beziehungen der Kommutation.
Folglich sind die Funktionen des Feldes keine gewöhnlichen Funktionen, sondern sie werden Operatoren, die auf eine für alle Felder allgemeine Wellenfunktion wirken, welche *Zustandsamplitude* genannt wird. In der relativistischen Quantentheorie werden die Zustandswahrscheinlichkeiten durch quadratische Formen der Zustandsamplitude gegeben.
Alle möglichen Prozesse des Ausstrahlens und des Einfangens von Photonen durch Elektronen und Positronen, die Streuung von Photonen, das Bilden von Elektron-Positron-Paaren, die Vernichtung dieser Paare unter gleichzeitiger Bildung von Photonen und noch andere Prozesse werden als Übergänge des Elektron-Positron-Photon-Feldes von einem Zustand in einen anderen angesehen.
Es ist auch solch ein Zustand des Feldes möglich (als niedrigster, sozusagen Grundzustand), in dem die Quanten überhaupt fehlen. Man spricht dann gewöhnlich vom Vakuum. Sind die Quanten in angeregtem Zustand vorhanden, heißt der Zustand des Feldes angeregt.

Die Eigenschaften des Vakuums

Weil die Wechselwirkungen zwischen den Elektronen-Positronen- und Photonen-Feldern so schwach sind, ist in bekannter Näherung eine getrennte Betrachtung der Felder von Elektronen und Positronen einerseits und der Photonen andererseits möglich. Es muß jedoch darauf aufmerksam gemacht werden, daß in Wirklichkeit diese Felder *immer* zusammen auftreten und eine Vorstellung von einzelnen freien Feldern prinzipiell unmöglich ist.

Ein Photonenfeld befindet sich im Vakuumzustand, wenn keine Photonen vorhanden sind. Es besitzt eine bestimmte Energie, die sogenannte Nullenergie. Der Effekt der Nullschwingungen des Photonenfeldes tritt in verschiedenen Erscheinungen auf und wird experimentell beobachtet.

In gleicher Weise spricht man vom Vakuumzustand des Elektronen-Positronen-Feldes, wenn diese Teilchen nicht da sind. Der Mittelwert der elektrischen Ladung dieses Zustandes ist Null. Auf Grund der Nullschwankungen tritt bei diesem Zustand in einzelnen Teilen des Raumes ein Ladungsüberschuß dieses oder jenes Vorzeichens auf und verschwindet wieder. Dieser Effekt der Polarisation des Elektronen-Positronen-Vakuums wird im Versuch nachgewiesen.

Bemerkungen

Eine Bemerkung erweist sich hier als angebracht. In der allgemeinen Relativitätstheorie sahen wir, daß die geometrischen Eigenschaften der Raum-Zeit von physikalischen Erscheinungen bedingt sind. In der relativistischen Quantentheorie werden wir sehen, daß das Vakuum, der leere Raum, mit physikalischen Eigenschaften ausgestattet ist.

Sprechen wir vom Photonenfeld, bemerken wir, daß seine Quanten (die Photonen) einen ganzzahligen Spin besitzen, ihre Gesamtheit sich folglich der Bose-Statistik unterordnet: in jedem Quantenzustand des Photonenfeldes kann sich eine unbeschränkte Anzahl Photonen befinden. In diesem Zusammenhang ist ein Übergang zu den Auffassungen der klassischen Elektrodynamik möglich.

Sprechen wir vom Feld der Elektronen und Positronen, bemerken wir, daß seine Quanten (die Elektronen und Positronen) nur in Paaren entstehen und verschwinden können, und zwar in Übereinstimmung mit dem Satz von der Erhaltung der Ladung. Diese Teilchen haben halbzahligen Spin, sie gehorchen folglich der Fermi-Statistik: Jeder Quantenzustand des Elektronen-Positronen-Feldes kann von nicht mehr als nur einem Teilchen besetzt sein.

In diesem Zusammenhang hat die Frage nach Grenzübergängen (zur klassischen Theorie) keinen Sinn, denn das Elektronen-Positronen-Feld ist ein ausgesprochen quantenrelativistisches Objekt.[1]
Eine wesentliche Errungenschaft der relativistischen Quantentheorie ist die Aufstellung der Beziehung zwischen Spin und Statistik.

Die Punktförmigkeit der Wechselwirkung

Es wurde schon erwähnt, daß die Wechselwirkung zwischen Photonen- und Elektronen-Positronen-Feldern schwach sind. Deshalb erweist sich die Methode der sukzessiven Annäherung für die Lösung der Grundgleichungen in der relativistischen Quantentheorie als geeignet. Die Wechselwirkung wird als kleine Zugabe (kleine Störung) betrachtet, und die Glieder aller Größen sind Reihen von Potenzen der Wechselwirkungskonstanten (die letzte ist klein im Vergleich zu eins).
Wie uns bekannt ist, kann die Wechselwirkung in relativistischen Theorien nur dann stattfinden, wenn sich zwei Teilchen in ein und demselben Zeitpunkt in ein und demselben Raumpunkt befinden. Das ist die Konzeption der Nahwirkung, genauer die der *punktförmigen Wechselwirkung*. Danach wirken das Photon und das Elektron in einem Punkte aufeinander. Währenddessen ergaben noch in der klassischen Elektrodynamik punktförmige Wechselwirkungen sinnlose Rechenergebnisse mit unendlichen Ausdrücken.
So gelangten wir bei der Berechnung der Eigenenergie eines punktförmigen Elektrons ins Unendliche. Diese Schwierigkeiten gibt es auch noch in der Quantentheorie. Zum Beispiel führt die tatsächlich existierende Wechselwirkung des Elektrons mit den Nullschwingungen des Photonenfeldes zu einem unendlichen Wert der Masse des Teilchens; die Wechselwirkung des Elektrons mit den Nullschwingungen des Elektronen-Positronen-Feldes führt zu einem unbeschränkten Wert seiner Ladung.
In der klassischen Elektrodynamik war die aufgezeigte Schwierigkeit unwesentlich, da in ihr Räume solch kleiner Abmessungen nicht betrachtet werden. In der Quanten-Elektrodynamik gibt es diese Schwierigkeit von Anfang an. Wenn wir für einen Effekt die erste Näherung ausrechnen, führen die weiteren Näherungen der Theorie zu divergierenden Ausdrücken, d. h., sie verbessern die Berechnung nicht. Bei manchen Erscheinungen erhält man die Unendlichkeitsstellen schon in der ersten Annäherung. Jedoch sind die Divergenzen der Quantentheorie weitaus schwächer als die der klassischen.

[1] Wir möchten bemerken, daß der Effekt der Wechselwirkung von Photonen untereinander durch das Feld der Elektronen und Positronen (ein nichtlinearer Effekt) in der klassischen Theorie vollkommen fehlt.

Die in der relativistischen Quantentheorie auftretenden Unendlichkeitsstellen sind alle vom gleichen Typ und lassen sich reduzieren auf gegen Unendlich gehende Veränderungen der Ladungen und der Massen. Diese Schwierigkeiten wurden von einer unerwarteten Seite her überwunden, nämlich folgendermaßen: Wir können experimentell niemals m_0, die Masse des „freien" Elektrons feststellen, da es *immer* mindestens mit dem Vakuum in Wechselwirkung steht. Wir können nur $(m_0 + \delta m)$ feststellen, die wir mit m bezeichnen wollen:

$$m = m_0 + \delta m .$$

δm ist hier ein divergierender Summand zur Masse m_0 des Elektrons, der auf Grund der Wechselwirkung mit den Nullschwingungen des Photonenfeldes entsteht. An dieser Stelle erinnern wir uns an das physikalische Prinzip, nach dem es diese Wissenschaft mit beobachtbaren Sachen zu tun hat oder, anders gesagt, nach dem nur prinzipiell beobachtbare Größen in die physikalische Theorie eingehen dürfen.
Gemäß diesem Prinzip darf in der Theorie nur die experimentell feststellbare Größe m und nicht einzeln m_0 oder δm betrachtet werden. Dieses Prinzip ist in der relativistischen Quantentheorie als das *Prinzip der Übernormierung der Masse* bekannt. Analog steht es mit der Ladung des Elektrons. Jede äußere Ladung polarisiert immer das Vakuum (d. h., es findet eine Wechselwirkung zwischen der Ladung und den Nullschwingungen des Elektronen-Positronen-Feldes statt). Darum muß auch in die Theorie eine *Übernormierung der Ladung* eingehen.
Legen wir noch die allgemeinen Merkmale der Übernormierung von Ladung und Masse dar. In beiden Fällen treten die Divergenzen auf, weil die Erscheinungen nicht zu beobachten sind. So verändert die zusätzliche Ladung δe oder die zusätzliche Masse δm nur die „Zünd"-Ladung e_0 oder die Masse m_0 des Elektrons. Diese Ladungen und Massen müssen aber nicht endlich bleiben, nur die endgültigen (zu beobachtenden) physikalischen Ladungen und Massen müssen endlich sein.
Da nur e und m zu beobachten sind, gibt es keine Divergenzen in der Theorie, wenn die eigentlichen Meßwerte der Ladungen und Massen verwendet werden.
Aus diesen Bemerkungen wird klar, daß wir die Übernormierung in der Theorie sogar schon berücksichtigen müßten, wenn noch keine Unendlichkeitsstellen auftreten.
Wir sagen es noch einmal, daß die in der Theorie auftretenden Unendlichkeitsfälle alle eines Typs sind und die Ladungen und die Massen betreffen. Wenn die Übernormierung bei Ladungen und Massen durch-

geführt wird, so mit dem Ziel der Gestaltung einer Theorie, die frei ist von Unendlichkeitsstellen. Mit ihrer Hilfe soll man nicht nur die erste Näherung, sondern auch jede andere ausrechnen können.

Über die neueste Entwicklung der Theorie

Die relativistische Quantentheorie beschreibt die elektromagnetischen Wechselwirkungen oder, anders gesagt, die in Wechselwirkung stehenden Elektronen, Positronen und Photonen. Sie erfaßt alle Erscheinungen außerhalb des Kernes: die Struktur der Elektronenhüllen der Atome, die Emission, die Absorption und die Streuung von Lichtquanten an atomaren Systemen, die Zusammenstöße von Elektronen untereinander und mit Atomkernen, das Bilden der Positronen usw.
Eine völlig andere Situation herrscht bei der Betrachtung der Prozesse mit starken Wechselwirkungen der Teilchen. Starke Wechselwirkungen (Kernwechselwirkungen) sind von ganz anderem Typ. Ihre Intensität ist einige tausendmal größer als die der elektromagnetischen Wechselwirkungen (siehe unten). Versuche, die Vorgänge mit den gewöhnlichen Hilfsmitteln der Quanten-Elektrodynamik zu erklären, führten nicht zum Erfolg.
Die Theorie der starken Wechselwirkungen hat gegenwärtig hauptsächlich in der Richtung eine große Perspektive, wo die Vorstellungen der relativistischen Quantentheorie sehr allgemein sind. Man geht hierbei davon aus, daß im Rahmen dieser Theorie keinerlei Größen gemessen werden können, die sich auf die in Wechselwirkung stehenden Teilchen beziehen. Die genaue Messung der Ortskoordinaten eines Teilchens würde das Erzeugen einer ungeheuren Menge von Teilchen-Paaren voraussetzen, und die genaue Messung des Impulses für ein kurzes Zeitintervall widerspricht der Unbestimmtheitsrelation zwischen Energie und Zeit.
Im Rahmen der relativistischen Quantentheorie können nur die Impulse und die Polarisation der freien Teilchen gemessen werden, da wir für deren Messungen über eine unbegrenzte Zeit verfügen (dank der Impulserhaltung). Darum haben in dieser Theorie die Beziehungen nur für die Größen physikalischen Sinn, die sich auf die freien Teilchen beziehen.
Das Untersuchen der Wechselwirkungsprozesse der Teilchen in einer solchen Theorie wird prinzipiell unmöglich. Die Theorie betrachtet das Verhalten der Teilchen vor und nach dem Wechselwirkungsakt, aber nicht die Wechselwirkung selbst. Als man diese Überlegungen auf das Problem der starken Wechselwirkungen von Elementarteilchen übertrug, kam man zu der Erkenntnis, daß eine solche Theorie geschaffen werden müsse, in der es keine ψ-Operatoren gibt. Denn sie enthalten

prinzipiell unbeobachtbare Größen. Der Hamiltonoperator kann doch nur aus ψ-Operatoren gebildet werden, darum kann die Theorie der starken Wechselwirkungen nicht auf der Grundlage des Hamiltonoperators aufgebaut werden.

Die Grundlage des neuen Apparates der Theorie bilden die sogenannten Unitaritätsbeziehungen und das Prinzip der Punktförmigkeit einer Wechselwirkung, welches in den analytischen Eigenschaften der Grundgrößen dieser Theorie erscheint, zum Beispiel in der unterschiedlichen Art der Dispersionsbeziehungen.

Da der Begriff des zusammengesetzten Teilchens mit der Betrachtung von Teilchen in Wechselwirkung zusammenhängt, kann man zu dem Schluß kommen, daß dieser Begriff in der relativistischen Quantentheorie gar keinen Sinn hat. In dieser Theorie müssen alle Teilchen in gewissem Sinne gleichberechtigt sein, denn sie erweisen sich in gleichem Grade elementar und zusammengesetzt. Wenn man so an die Theorie herangeht, verliert schließlich das alte Problem, ob Elementarteilchen oder nicht, den Sinn.

7. Die Physik der Elementarteilchen

Die Klassifikation der Elementarteilchen und ihrer Wechselwirkungen

Eine große Menge experimenteller Werte gestattet es mittlerweile, im Bereich der Physik der Elementarteilchen einige allgemeine Überlegungen anzustellen und nach Prinzipien zu suchen. Zuerst kann man die Elementarteilchen und ihre Wechselwirkung in gewisser Weise klassifizieren. Es sei gleich gesagt, daß jedem Teilchen ein Antiteilchen beigeordnet werden kann. In manchen Fällen sind Teilchen und Antiteilchen identisch, als Beispiel gelten das Photon und das π^0-Meson. Eine charakteristische Besonderheit der Paare von Teilchen und Antiteilchen ist ihre Fähigkeit, sich zu annihilieren.

Alle bekannten Elementarteilchen kann man in folgende Gruppen einteilen:

1. Barionen (Nukleonen — N, Hyperonen — λ, Σ, Ξ) Antibarionen
2. Mesonen (π-Mesonen, K-Mesonen), Antimesonen
3. Leptonen (Elektron — e, Neutrino — ν, μ-Teilchen), Antileptonen
4. Photonen — γ

(Tabelle der Elementarteilchen auf den Seiten 134/135)

Die Wechselwirkungen der Elementarteilchen haben auch eine natürliche Klassifikation. Es gibt drei Typen:

1. *Starke Wechselwirkungen* (finden statt zwischen Barionen, Antibarionen und Mesonen). Durch sie sind die Kernkräfte bedingt (Wechselwirkungen zwischen den Nukleonen) und die Bildung von Mesonen und Hyperonen bei Kernstößen mit hohen Energien.
2. *Die elektromagnetische Wechselwirkung* (durch sie ist das Photon mit allen geladenen Teilchen verbunden). Leptonen erkennt man durch elektromagnetische Wechselwirkungen.[1]
3. *Schwache Wechselwirkungen* bedingen den langsamen Zerfall von Teilchen.[2]

[1] Eine Ausnahme stellt das Neutrino dar.

[2] Das einzige Teilchen, welches *nur* schwache Wechselwirkungen ausführt, ist das Neutrino. Darum finden „Stöße" eines Neutrinos mit Teilchen im Stoff außerordentlich selten statt. Bei normaler Dichte ist der Abstand zwischen zwei Stößen von Neutrino und anderen Teilchen in der astronomischen Größenordnung von 10^{17} km. Das bedeutet, daß die Erde mit dem Radius von etwa $6 \cdot 10^3$ km „vollkommen durchsichtig" ist für einen Neutrinostrom. Trotzdem ist es den Experimentalphysikern der Gegenwart gelungen, das Neutrino direkt nachzuweisen.

Für die Intensitäten der Wechselwirkungen gelten folgende Verhältniszahlen:

starke Wechselwirkungen: angenommen 1
elektromagnetische Wechselwirkungen: $\sim 10^{-3}$
schwache Wechselwirkungen: $\sim 10^{-14}$
darunter (der Vollständigkeit wegen) die Gravitationswechselwirkungen[1]: $\sim 10^{-40}$

„Beschreibungsmethoden"

Der Sachverhalt ist wohl am leichtesten durch sukzessive Näherung zu beschreiben. In der ersten Näherung werden die Wechselwirkungen vom Typ 2 und 3 nicht berücksichtigt. Danach können Leptonen und Photonen nicht mit Barionen und Mesonen, aber auch nicht untereinander in Wechselwirkung treten. Barionen, Antibarionen und Mesonen unterwerfen sich Reaktionen und Umwandlungen, die speziellen Gesetzen der starken Wechselwirkungen gehorchen, wohingegen Zerfälle mit Emission von Leptonen und Photonen nicht stattfinden können.
In der zweiten Näherung sind die Ladungen der Teilchen eingeschlossen, so daß Wechselwirkungen der Typen 1 und 2, aber nicht 3 möglich sind. Prozesse, an denen Barionen, Antibarionen und Mesonen teilnehmen, werden nicht durch elektromagnetische Wirkungen beeinflußt, aber es sind Zerfälle mit Emission von Leptonen und Photonen erlaubt.
In der nächsten Näherung, die offensichtlich die vollständigste Beschreibung der Materie darstellt (wenn die Gravitation unberücksichtigt bleibt), werden die schwachen Wechselwirkungen in Betracht gezogen.
Zwischen den Wechselwirkungen gibt es wesentliche Unterschiede bezüglich der zeitlichen Dauer. So sind Prozesse, die zu denen mit erster Annäherung gehören, gekennzeichnet durch Zeiten von $\sim 10^{-23}$ s („schnelle Prozesse"). Prozesse, die nur in zweiter, aber nicht in erster Annäherung beschrieben werden können, haben eine Dauer von $t \sim 10^{-15}$s (elektromagnetische Prozesse).
Prozesse, die *nur* in dritter Näherung zu erfassen sind, laufen in Zeiten von $\sim 10^{-8}$ s ab („langsame Prozesse").

[1] Es sei vermerkt, daß die obere Grenze für Raumbereiche, in denen starke und schwache Wechselwirkungen stattfinden, bei Abmessungen von 10^{-15} m liegt. Der Wirkungsradius der elektromagnetischen und der Gravitationswechselwirkungen ist unbegrenzt, deshalb wird verständlich, warum nur diese bei klassischen Betrachtungen eine Rolle spielen.

Die allgemeinen Beziehungen, nach denen die Prozesse des Entstehens, Verschwindens und Zerfalls von Teilchen vor sich gehen, sind die Erhaltungssätze. Neben den bekannten Gesetzen für die Erhaltung der Energie, des Impulses, des Drehimpulses (einschließlich des eigenen Drehimpulses der Teilchen, des Spins) und der Parität (einschließlich der inneren Parität der Teilchen) existieren im Bereich der Physik der Elementarteilchen zusätzlich noch einige spezifische Erhaltungssätze.

Wir sehen uns die Erhaltungssätze am besten an Hand der oben benutzten Reihenfolge sukzessiver Näherungen an. Danach entspricht die erste Näherung den starken Wechselwirkungen, und für sie gelten das *Gesetz zur Erhaltung der „Barionen"-Ladung* (Erhaltung der Differenz von Barionen und Antibarionen), das Gesetz zur Erhaltung des *Isotopenspins* (der innere Freiheitsgrad der Barionen, Antibarionen und Mesonen, der ihre Ladungseigenschaften charakterisiert) und das Gesetz zur Erhaltung der „strangeness" (neue diskrete Charakteristik der Teilchen, auf deutsch „Seltsamkeit").

Für Nukleonen, Antinukleonen und π-Mesonen („Grundteilchen") ist die strangeness gleich Null, die „angeregten Zustände" dieser Teilchen, die Hyperonen und K-Mesonen sind entsprechend durch eine Zahl der „strangeness", die verschieden von Null ist, gekennzeichnet. Das Gesetz zur Erhaltung der strangeness gestattet die Erklärung einige Besonderheiten bei Prozessen mit „seltsamen" Teilchen (strange particles). Diese bilden sich z. B. bei schnellen Prozessen nur zu Paaren (oder in großer Anzahl), haben aber eine lange Lebensdauer (langsamer Zerfall).

Die „Einbeziehung" der elektromagnetischen Wechselwirkungen (zweite Näherung) führt zur Aufhebung der Entartung bezüglich des Isotopenspins der Teilchen, dadurch gibt es keine *Isotopen-Invarianz* mehr (die Erhaltung des Isotopenspins fällt weg). So zerfallen beispielsweise Teilchen wie das Nukleon und das π-Meson in eine Reihe von „Ladungszuständen", es tritt ein Unterschied zwischen dem Proton p^+ und dem Neutron n auf, das π-Meson hat drei Ladungszustände π^+, π^0, π^-.

Bei der zweiten Näherung bleibt die *strangeness* erhalten. Mit den Begriffen *strangeness* und Isotopenspin lassen sich die Teilchen mit starken Wechselwirkungen günstig in *Ladungs-Multipletts* gruppieren (ein Beispiel sahen wir oben). Auf die Leptonen werden die Begriffe strangeness und Isotopenspin nicht angewendet.

In der dargelegten „elektromagnetischen" Näherung wird als erstes die „Barionen"-Ladung erhalten. Natürlich gilt deshalb hier das *Gesetz zur Erhaltung der elektrischen Ladung.*

Die letzten zwei Erhaltungssätze haben auch bei der Einbeziehung

schwacher Wechselwirkungen Gültigkeit. Jedoch gibt es bei dieser Annäherung keine Erhaltung der strangeness und des Isotopenspins.
Für alle Wechselwirkungen gelten die Gesetze zur Erhaltung der Energie, des Impulses und des Drehimpulses, diese Gesetze sind universal.[1]
Die starken und die elektromagnetischen Wechselwirkungen sind bezüglich des Austausches von Teilchen und Antiteilchen invariant. Bei schwachen Wechselwirkungen wird diese Invarianz aufgehoben.
Die Parität wird erhalten bei starken und elektromagnetischen, aber nicht bei schwachen Wechselwirkungen.
Alle Wechselwirkungen sind invariant bezüglich einer Gesamtheit von Operationen, zu der der Austausch von Teilchen und Antiteilchen sowie die räumliche Inversion gehören (*kombinierte Parität*).
Das Gesetz zur Erhaltung der kombinierten Parität ist universal und führt zu sehr interessanten Folgerungen. Es schafft z. B. die Vorstellung von dem *zweikomponentigen, längs-polarisierten Neutrino*, und in diesem Zusammenhang wird eine neue diskrete Teilchencharakteristik eingeführt — der *Links- und Rechtsspin.*
Mit der Vorstellung von der kombinierten Parität ist der leere Raum völlig symmetrisch. Die Asymmetrie überträgt sich aber auf die Teilchen. Unsere Welt erweist sich bezüglich links und rechts als unsymmetrisch.

Bemerkungen

Weiter vorn wurde schon einmal darauf hingewiesen, daß es das Bestreben der Physiker ist, die physikalischen Vorstellungen in ein logisch abgeschlossenes System zu bringen, dabei sucht man die Verbindung zwischen dem Leitgedanken der Physik der Elementarteilchen einerseits und der allgemeinen Relativitätstheorie andererseits (der Kosmologie). Wir zählen hier einige Fakten auf, zwischen denen noch keine Verbindung hergestellt werden konnte.
1. Im Weltall kommen Nukleonen und Elektronen räumlich konzentriert vor, während die Theorie der Elementarteilchen eine Symmetrie in der Verteilung der Teilchen und Antiteilchen fordert.
2. Nach den Gedanken der Physik der Elementarteilchen müßte unsere Welt nicht spiegelsymmetrisch sein.
3. Die kosmologischen Ideen führen zur Ausdehnung des Weltalls.
Gibt es eine Verbindung zwischen diesen Fragen? Zur Zeit sind die Physiker noch nicht in der Lage, solch eine Frage korrekt zu stellen.

[1] Wir erinnern uns hier, daß bei Gravitationswechselwirkungen die dargelegten allgemeinen Gesetze dem Wesen nach „ihren Sinn verlieren". Im Bereich der Physik der Elementarteilchen sind diese Wechselwirkungen jedoch in hohem Grade unwesentlich.

8. Kernphysik

Wir untersuchten bis jetzt die Eigenschaften von Prozessen, an denen nur *einzelne* Elementarteilchen beteiligt sind. Jetzt gehen wir zur Untersuchung der Eigenschaften ganzer *Systeme von Elementarteilchen* über. Diese Systeme haben eine räumliche Ausdehnung von ungefähr 10^{-15} m. Praktisch hat man es dabei mit Nukleonen-Systemen zu tun. Hyperonen, die „angeregte Zustände" der Nukleonen darstellen, zerfallen in Nukleonen (und π-Mesonen). Stabile Systeme von Elementarteilchen haben wir in der Gesamtheit der gebundenen Nukleonenzustände, den *Atomkernen*, vor uns.
Die Nukleonen im Kern sind durch alle Arten von Wechselwirkungen gekennzeichnet, starke, elektromagnetische und schwache. Diese Sachlage gibt Anlaß zu der Annahme, daß eine vollkommene Theorie der gebundenen Zustände aller Nukleonen – die Theorie der Atomkerne – erst dann geschaffen werden kann, wenn die Theorien aller Arten von Wechselwirkungen der Elementarteilchen aufgestellt worden sind.
Zur Zeit erhält man hauptsächlich aus dem Experiment Kenntnis über die Eigenschaften der Kerne. Mit Hilfe der allgemeinsten Prinzipien der Quantenmechanik kann man nur „modellartig" einige Kerneigenschaften interpretieren, wobei in Betracht zu ziehen ist, daß die unterschiedlichen Kernvorgänge verschiedene Modellvorstellungen erfordern.
Wenn die Theorie des Kernes abgeschlossen ist, wird man die Frage nach den Grenzen des Periodensystems der Elemente beantworten können. Fragen über die Entstehung und die Verteilung der Elemente im Weltall werden im nächsten Kapitel aufgeworfen

9. Statistische Physik

Bis jetzt waren die Eigenschaften einzelner Mikroobjekte oder kleiner Mengen von ihnen Gegenstand unserer Betrachtungen. Jetzt wollen wir die Eigenschaften physikalischer Systeme kennenlernen, die aus sehr großen Mengen einzelner Mikroobjekte, aus Atomen und Molekülen, bestehen. Solche Systeme heißen *makroskopische Systeme* (oder *makroskopische Körper*).

Makroskopische Körper

Die makroskopischen Körper unterliegen Gesetzmäßigkeiten besonderer Art. Der allgemeine Charakter dieser Gesetzmäßigkeiten ist in hohem Grade davon unabhängig, wie man die Bewegung der einzelnen Teilchen des Körpers beschreibt, ob mit Hilfe der klassischen oder der Quantenmechanik. Jedoch fordert ihre Begründung in diesen beiden Fällen verschiedene Überlegungen. Aus Zweckmäßigkeit werden wir zuerst alle Überlegungen anführen, in denen die Richtigkeit der klassischen Mechanik angenommen wird.

Stellt man die Bewegungsgleichungen eines mechanischen Systems in der Anzahl zusammen, die der Zahl der Freiheitsgrade entspricht, und löst sie (indem man integriert), kann man prinzipiell eine erschöpfende Darstellung der Bewegung des Systems erhalten. Haben wir es jedoch mit einem System zu tun, das wohl den Gesetzen der klassischen Mechanik gehorcht, aber eine ungeheuer große Zahl von Freiheitsgraden besitzt, so stoßen wir bei der praktischen Anwendung der klassischen Methoden auf die Notwendigkeit, eine ebenso große Zahl von Differentialgleichungen aufzustellen und zu lösen. Das ist aber praktisch nicht zu bewältigen. Selbst wenn man diese Gleichungen in allgemeiner Form sollte integrieren können, wäre es vollkommen unmöglich, in die allgemeine Lösung die Anfangsbedingungen für die Geschwindigkeiten und die Ortskoordinaten der Teilchen einzusetzen.

Auf den ersten Blick könnte man hieraus schlußfolgern, daß mit größer werdender Anzahl der Teilchen die Eigenschaften des mechanischen Systems unvorstellbar kompliziert und verworren werden und daß wir im Verhalten des makroskopischen Körpers nicht einmal mehr Spuren einer Gesetzmäßigkeit finden können. So ist es aber nicht. Wir werden im weiteren sehen, daß bei sehr großer Teilchenzahl neue eigenartige Gesetzmäßigkeiten herrschen.

Statistische Gesetzmäßigkeiten

Diese sogenannten *statistischen* Gesetzmäßigkeiten sind vor allem durch die große Zahl der den Körper bildenden Teilchen bedingt, sie können in keiner Weise auf rein mechanische Gesetzmäßigkeiten reduziert werden. Ihre Spezifik liegt darin, daß sie beim Übergang zu mechanischen Systemen mit wenigen Freiheitsgraden jeden Inhalt verlieren. Obwohl die Bewegung der Systeme mit einer sehr großen Zahl von Freiheitsgraden den gleichen Gesetzen der Mechanik unterliegt wie die Bewegung der Systeme aus wenigen Teilchen, führt dennoch die Tatsache der größeren Zahl von Freiheitsgraden zu *qualitativ neuen Gesetzmäßigkeiten*. Diese sind Gegenstand der sogenannten statistischen Physik oder, wie man es der Kürze wegen zu sagen pflegt, der *Statistik*.

Der Phasenraum

Bevor wir die Grundaufgaben der klassischen Statistik formulieren, führen wir den Begriff *Phasenraum* ein. Wir nehmen an, das zu untersuchende makroskopische System habe n Freiheitsgrade. Die Lage der Punkte dieses Systems im Raum ist durch n Koordinaten gekennzeichnet, die mit q_i bezeichnet sind. Dann wird sich der Zustand dieses Systems in einem vorgegebenen Augenblick durch die Werte der n Koordinaten q_i in diesem Augenblick und die zugehörigen n Impulse p_i bestimmen lassen. Die verschiedenen Zustände des Systems kann man mathematisch durch Punkte im sogenannten Phasenraum darstellen. (Das ist selbstverständlich ein rein mathematischer Begriff.) Auf den Koordinatenachsen dieses Raumes werden die Werte der Ortskoordinaten und des Impulses abgetragen. Jedes System hat seinen eigenen Phasenraum, dessen Anzahl der Dimensionen gleich der Anzahl seiner Freiheitsgrade ist. Jeder Punkt des Phasenraumes, der bestimmten Werten der Ortskoordinaten q_i und des Impulses p_i entspricht, stellt einen bestimmten Zustand dieses Systems dar. Im Verlaufe der Zeit ändert sich der Zustand des Systems, dementsprechend wird der den Zustand beschreibende Punkt des Phasenraums in ihm eine Linie durchlaufen, die sogenannte *Phasenkurve*.

Untersysteme

Betrachten wir jetzt einen makroskopischen Körper oder ein System von Körpern. Wir setzen voraus, daß das System geschlossen ist, d. h. mit keinen anderen Körpern in Wechselwirkung steht. Trennen wir von diesem System einen Teil ab, der sehr klein im Vergleich zum Gesamtsystem, aber immer noch als makroskopisch anzusehen ist, so kann bei hinreichend großer Teilchenzahl im Gesamtsystem die Zahl der Teilchen in dem kleinen Teil immer noch sehr groß sein. Solche relativ kleinen, aber makroskopischen Systeme werden wir *Untersysteme* nennen. Das Untersystem ist wieder ein mechanisches System, aber kein abgeschlossenes mehr. Im Gegenteil, es erleidet alle möglichen Einflüsse von seiten der übrigen Teile des Systems. Weil diese übrigen Teile eine ungeheuer große Zahl von Freiheitsgraden besitzen, werden diese Wechselwirkungen sehr vielfältig und kompliziert sein. Deshalb wird sich auch der Zustand des zu betrachtenden Systems im Laufe der Zeit sehr vielfältig und kompliziert verändern.

Eine genaue Lösung der Aufgabe über das Verhalten des Untersystems ist nur möglich, indem man das mechanische Problem des ganzen abgeschlossenen Systems löst, d. h., es müssen alle Bewegungsdifferentialgleichungen mit den gegebenen Anfangsbedingungen aufgestellt und gelöst werden.

Wir bemerkten schon, daß dies eine unerfüllbare Aufgabe ist. Glücklicherweise gibt es aber gerade für diese sehr komplizierte Zustandsänderung der Untersysteme, auf welche die Methoden der Mechanik nicht anwendbar sind, eine andere Lösungsmöglichkeit.

Die statistische Verteilung

Die Grundlage für dieses Herangehen ist in folgendem Sachverhalt zu suchen: Wegen der sehr komplizierten und vielfältigen äußeren Einwirkungen (von seiten der restlichen Teilsysteme) befindet sich das von uns abgetrennte Untersystem in hinreichend langen Zeitabschnitten hinreichend oft in allen seinen möglichen Zuständen. Man kann die Lage noch genauer erklären. Wir wollen ein gewisses kleines „Volumen"-Element des Phasenraumes unseres Untersystems mit $\Delta \mathfrak{q}\ \Delta \mathfrak{p}$ bezeichnen, das den Werten seiner Ortskoordinaten $\mathfrak{q}_i$ und Impulse $\mathfrak{p}_i$ in den kleinen Intervallen $\Delta \mathfrak{q}_i$ und $\Delta \mathfrak{p}_i$ entspricht. Dann ist anzunehmen, daß die verschlungene Phasenkurve im Verlaufe eines hinreichend langen Zeitabschnitts T sehr oft durch jedes dieser Elemente des Phasenraumes durchlaufen wird. Es sei Δt jener Teil der gesamten Zeit T, währenddessen sich das Untersystem in dem Element des Phasenraumes $\Delta \mathfrak{q} \cdot \Delta \mathfrak{p}$ befindet.[1]

Lassen wir die Zeit T unbegrenzt anwachsen, wird der Quotient $\Delta t/T$ einem Grenzwert zustreben

$$\omega = \lim_{T \to \infty} \frac{\Delta t}{T}. \tag{38}$$

Diese Größe ist offensichtlich die Wahrscheinlichkeit, mit der wir das Untersystem bei einer Beobachtung zu einem willkürlichen Zeitpunkt in dem gegebenen Element $\Delta \mathfrak{q} \cdot \Delta \mathfrak{p}$ des Phasenraums antreffen werden.

Also muß eine Funktion $\varrho\,(\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{p})$ existieren, welche die Rolle der „Dichte" der Wahrscheinlichkeitsverteilung im Phasenraum spielt. Mit dieser Funktion erhält der Ausdruck (38) die Form

$$\Delta\omega = \varrho\,(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})\, \Delta \mathfrak{q} \cdot \Delta \mathfrak{p}.$$

Man bezeichnet ϱ als Funktion der statistischen Verteilung (oder einfach Verteilungsfunktion) des gegebenen Körpers. Offensichtlich muß sie die sogenannte Normierungsbedingung befriedigen, die darin besteht, daß die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Zustände gleich eins ist.

Folgender Sachverhalt ist für die Statistik sehr wesentlich. Die statistische Verteilung eines Untersystems hängt nicht vom Anfangszustand eines beliebigen anderen kleinen Teils des Gesamtsystems ab, denn der Einfluß dieses Anfangszustandes wird im Laufe eines hinreichend langen Zeitabschnitts durch den Einfluß der übrigen, weitaus größeren Teile des Systems vollkommen verdrängt sein. Sie hängt auch nicht vom Anfangszustand des von uns selbst abgetrennten kleinen Teils ab, weil er im Verlaufe der Zeit alle möglichen Zustände annimmt und jeder von ihnen als Anfangszustand herausgegriffen werden könnte. Deshalb ist die statistische Verteilung für kleine Teile eines Systems nicht zu finden, indem man von der Mechanik her mit Berücksichtigung der Anfangsbedingungen an die Aufgabe herangeht.

Das Auffinden der statistischen Verteilung für ein beliebiges Untersystem ist die Grundaufgabe der Statistik. Spricht man von „kleinen Teilen" eines abgeschlossenen Systems, so muß man dabei beachten, daß die makroskopischen Körper, mit denen wir es zu tun haben, gewöhnlich schon selbst solche kleinen Teile eines großen abgeschlossenen Systems sind, das aus all diesen Körpern zusammen mit dem äußeren Medium, in das sie eingebettet sind, besteht.

Wenn die dargelegte Aufgabe gelöst und die statistische Verteilung des gegebenen Untersystems bekannt ist, können wir die Wahrscheinlich-

[1] Mit diesem Ausdruck wollen wir zu verstehen geben, daß sich das System in den Zuständen befindet, die durch die Phasenpunkte in diesem Element abgebildet werden.

keiten der verschiedenen Werte aller physikalischen Größen ausrechnen, die vom Zustand dieses Untersystems abhängen (d. h. von den Werten der Ortskoordinaten q und der Impulse p). Man kann auch den Mittelwert dieser Größen berechnen. Man erhält ihn durch Multiplikation ihrer möglichen Werte mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten und Summierung (Integration) über alle Zustände.

Die Mittelung mit Hilfe der Verteilungsfunktion (oder, wie man sagt, die statistische Mittelung) befreit uns von der Notwendigkeit, die Veränderung der wirklichen Werte der physikalischen Größe in der Zeit zu verfolgen, um daraus den Mittelwert zu bilden. Wir erkennen gleichzeitig, daß durch die Definition der Wahrscheinlichkeit entsprechend Formel (38) die statistische Mittelung einer Mittelung über die Zeit völlig äquivalent ist.

Makroskopische Größen

Aus dem Dargelegten geht deutlich hervor, daß die Schlußfolgerungen und Voraussagen über das Verhalten der makroskopischen Körper, welche die Statistik zu machen gestattet, *Wahrscheinlichkeits*-Charakter haben. Darin unterscheidet sich die Statistik von der klassischen Mechanik, deren Schlußfolgerungen völlig eindeutigen Charakter besitzen. Es muß aber betont werden, daß der Wahrscheinlichkeitscharakter der Ergebnisse der klassischen Statistik nicht etwa in der Natur ihrer Untersuchungsgegenstände liegt. Es hängt nur damit zusammen, daß diese Ergebnisse auf der Grundlage von weitaus weniger Meßwerten zu erhalten sind, als sie zu ihrer vollkommenen mechanischen Beschreibung notwendig wären. (Es werden nicht die Anfangswerte aller Ortskoordinaten und Impulse gefordert.)

Wendet man die Statistik auf makroskopische Körper an, so wird jedoch der Wahrscheinlichkeitscharakter gewöhnlich gar nicht bemerkt. Das hat folgende Gründe. Beobachten wir einen makroskopischen Körper, der sich unter stationären, d. h. zeitunabhängigen äußeren Bedingungen befindet, über einen hinreichend langen Zeitraum, so erscheint es uns, als ob alle den Körper kennzeichnenden physikalischen Größen praktisch konstant seien (gleich ihren Mittelwerten) und nur relativ selten irgendwelche bemerkbaren Abweichungen erfahren.[1] Dieser für die Statistik

[1] Wir führen ein Beispiel an, welches anschaulich zeigt, mit welch großer Genauigkeit diese Regel bestätigt wird. Nehmen wir von einem Gasvolumen beliebiger Art einen Teil, das, sagen wir, insgesamt 0,01 (M) g enthält, so zeigt es sich, daß die mittlere relative Abweichung der Energie dieser Stoffmenge vom Mittelwert nur ungefähr 10^{-11} beträgt. Die Wahrscheinlichkeit, gar eine relative Abweichung von der Größenordnung 10^{-6} zu finden (bei einmaligem Beobachten), ist durch die ungeheuer kleine Zahl $10^{-3 \cdot 10^{15}}$ gegeben.

grundlegende Sachverhalt trifft um so mehr zu, je komplizierter und größer der betrachtete Körper ist.
So wie man mit Hilfe der Statistik die Mittelwerte der Größen ausrechnen kann, die einen makroskopischen Körper kennzeichnen, sind mit ihr auch Voraussagen möglich. Sie bewahrheiten sich mit sehr großer Genauigkeit für den überwältigenden Teil eines beliebigen Zeitintervalls. Dieses soll möglichst groß sein, damit der Einfluß des Anfangszustandes des Körpers vollkommen ausgeschaltet ist. In diesem Sinne sind die Voraussagen der Statistik bestimmt und nicht wahrscheinlich.

Das statistische Gleichgewicht

Wenn sich ein abgeschlossenes makroskopisches System in einem solchen Zustand befindet, in dem für jeden beliebigen Teil, der auch wieder einen makroskopischen Körper darstellt, die *makroskopischen* physikalischen Größen mit großer relativer Genauigkeit gleich seinen eigenen Mittelwerten sind, dann sagt man, das betrachtete abgeschlossene System befindet sich *im statistischen Gleichgewicht.* Wird ein abgeschlossenes makroskopisches System lange genug beobachtet, befindet es sich auch die längste Zeit davon im statistischen Gleichgewicht. Falls es sich zu einem beliebigen Anfangszeitpunkt nicht im Zustand des statistischen Gleichgewichts befunden hat (es konnte z. B. künstlich durch äußere Einwirkungen aus diesem Zustand gebracht worden sein, danach war es wieder sich selbst überlassen worden, d. h., es wurde wieder ein abgeschlossenes System), dann geht es ganz bestimmt in den Gleichgewichtszustand zurück. Der Zeitabschnitt, in dem der Übergang zum statistischen Gleichgewicht unbedingt vor sich gehen muß, trägt die Bezeichnung Relaxationszeit. Sprachen wir oben von „hinreichend langen" Zeitintervallen, so meinten wir damit im wesentlichen Zeiten, die lang im Vergleich zur Relaxationszeit sind.

Das Theorem von Liouville

Betrachten wir die Eigenschaften der Funktion der statistischen Verteilung weiter. Voraussetzung ist, daß wir über einen sehr langen Zeitraum hinweg ein bestimmtes Untersystem beobachten. In jedem Zeitpunkt wird das betrachtete System durch einen Punkt in seinem Phasenraum widergespiegelt. Die Gesamtheit der erhaltenen Punkte verteilt sich im Phasenraum mit einer Dichte, die im Grenzwert proportional dem Wert der Verteilungsfunktion ϱ (q, p) an jeder Stelle ist. Diese bestimmt ja die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Zustände des Untersystems.

Natürlich werden alle diese Punkte in jedem Augenblick mit dem gleichen Recht wie zu Beginn im Phasenraum entsprechend dieser Verteilungsfunktion ϱ (q, p) verteilt sein. Mit anderen Worten: Die Phasenpunkte bleiben im Laufe der Zeit an jedem vorgegebenen Ort mit unveränderter Dichte, die proportional dem entsprechenden Wert von ϱ ist. Daraus gewinnen wir eine wichtige Erkenntnis, die *Liouvillesches Theorem* genannt wird: Die Verteilungsfunktion ist längs der Phasenkurven des Untersystems eine Konstante.

Wir möchten hier bemerken, daß die Untersysteme, von denen hier die Rede ist, nicht von sich aus abgeschlossen sind. Im Gegenteil, sie sind der ständigen Einwirkung von seiten der übrigen Teile des Systems unterworfen. Weil aber diese Teile, die klein sind im Vergleich zu dem ganzen großen System, für sich selbst auch makroskopische Körper darstellen, können wir trotzdem annehmen, daß sie sich im Verlaufe nicht allzu langer Zeitabschnitte näherungsweise wie abgeschlossene Systeme verhalten. An der Wechselwirkung des Untersystems mit den Teilen der Umgebung beteiligen sich hauptsächlich die Teilchen, die sich in der Nähe der Oberfläche befinden. Der relative Anteil dieser Teilchen an der gesamten Zahl der Teilchen im Untersystem fällt aber schnell, wenn man das Untersystem vergrößert. Ist es groß genug, dann wird die Energie ihrer Wechselwirkung mit den Teilchen der Umgebung klein sein im Vergleich zu seiner inneren Energie. Also kann man die Untersysteme *quasi abgeschlossen* nennen. Wir betonen aber noch einmal, daß die Quasiabgeschlossenheit der Untersysteme nur für nicht allzu lange Zeitintervalle angenommen werden darf. Nach hinreichend langen Zeitintervallen macht sich der Einfluß der Wechselwirkung, so schwach er auch sei, trotzdem bemerkbar. Darüber hinaus führt gerade diese relativ schwache Wechselwirkung letzten Endes auch zu einem statistischen Gleichgewicht.

Da wir von quasiabgeschlossenen Untersystemen sprechen, hat das oben erzielte Ergebnis (das Liouvillesche Theorem) nur für nicht allzu große Zeitintervalle Gültigkeit, in denen sich das Untersystem mit hinreichender Genauigkeit als abgeschlossen verhält.

Die Erhaltungssätze in der statistischen Physik

Aus dem Liouvilleschen Theorem folgt direkt, daß die Verteilungsfunktion nur durch solche Kombinationen der Veränderlichen q und p ausgedrückt werden darf, die bei der Bewegung des Untersystems, wenn es abgeschlossen ist, konstant bleiben. Wie aus der Mechanik bekannt ist, sind die sich erhaltenden Kombinationen der Veränderlichen q und p die Größen Energie, Impuls und Drehimpuls. Auf diese Weise gelangen wir zu der für die Statistik wichtigsten Schlußfolgerung. Die Werte der Erhaltungsgrößen Energie, Impuls und Drehimpuls bestimmen vollkommen die statistischen Eigenschaften eines abgeschlossenen Systems, d. h. die statistische Verteilung aller seiner Untersysteme und mit ihnen die Mittelwerte ihrer physikalischen Größen. Diese Erhaltungsgrößen ersetzen die unvorstellbare Menge von Meßwerten (Anfangsbedingungen), die bei mechanischem Vorgehen erforderlich wäre.

Der Impuls und der Drehimpuls des abgeschlossenen Systems sind mit seiner Bewegung als Ganzes verbunden, mit der gleichförmig translatorischen und der gleichförmig rotatorischen. Darum kann man sagen, daß der statistische Zustand eines Systems, das eine bestimmte Bewegung ausführt, *nur von seiner Energie* abhängt. Deshalb spielt die Energie in der Statistik eine außergewöhnlich bedeutende Rolle.

Die Gibbssche Verteilung

Die angestellten Überlegungen gestatten es direkt, für das abgeschlossene System eine einfache Verteilungsfunktion aufzustellen. Diese Funktion heißt *Gibbssche Verteilung*, sie beschreibt die statistischen Eigenschaften *beliebiger* makroskopischer Körper im Gleichgewicht.

Die Besonderheiten der Quantenstatistik

Bevor wir zu den Besonderheiten der Quantenstatistik übergehen, wollen wir vor allem zum Ausdruck bringen, daß ein rein mechanisches Herangehen an die Bestimmung des Verhaltens makroskopischer Körper in der Quantenmechanik selbstverständlich genauso hoffnungslos ist wie in der klassischen Mechanik. Bei einem solchen Vorgehen wäre das Lösen der Schrödinger-Gleichung für ein System erforderlich, das aus allen Teilchen des Körpers besteht. Diese Aufgabe ist, wenn man sich so ausdrücken kann, noch hoffnungsloser als das Integrieren der klassischen Bewegungsgleichungen. Selbst wenn es in dem einen oder anderen Falle möglich erschiene, die allgemeine Schrödinger-Gleichung zu lösen, wäre es doch absolut unmöglich, die spezielle Lösung auszuwählen und aufzuschreiben, welche die konkreten Bedingungen der Aufgabe befriedigt. Sie wäre gekennzeichnet durch bestimmte Werte aus der unermeßlichen Zahl der verschiedenen Quantenzahlen. Wir werden später noch sehen, daß für den makroskopischen Körper der Begriff „stationärer Zustand" im bekannten Sinne überhaupt Vorbehalte erhält. Dieser Umstand hat eine wesentliche prinzipielle Bedeutung.

Über die Energiespektren der Körper

Wir erklären nun einige Besonderheiten, die makroskopische Körper im Gegensatz zu Systemen aus vergleichsweise wenigen Teilchen vom rein quantenmechanischen Gesichtspunkt kennzeichnen. Zu diesen Eigenarten gehört es, daß die Niveaus im Spektrum der Energie-Eigenwerte eines makroskopischen Körpers ungewöhnlich dicht gedrängt liegen (fast kontinuierlich). Der Grund für diese Gedrängtheit ist leicht zu verstehen. Wegen der kollossalen Zahl von Teilchen im Körper kann nämlich jede Energie, grob gesprochen, auf den verschiedenen Teilchen in sehr vielfältiger Art und Weise „verteilt" sein. Nur im Anfangsbereich des Energiespektrums eines makroskopischen Körpers sind die Abstände zwischen den ersten Energieniveaus nicht klein und können sogar als unabhängig von den Ausmaßen des Körpers (Zahl der Teilchen) angesehen werden.

Die Unmöglichkeit stationärer Zustände

Weil die Niveaus so unheimlich eng beieinander liegen, kann sich ein makroskopischer Körper praktisch niemals in einem streng stationären Zustand befinden. Tatsächlich ist es klar, daß der Wert der Energie eines Systems in jedem Falle verwischt wird durch die Energie der Wechselwirkung des Systems mit der Umgebung. Die letztere wird aber unermeßlich groß im Vergleich zu den Abständen zwischen den Niveaulinien, und zwar nicht nur bei quasiabgeschlossenen Untersystemen, sondern auch bei solchen, die man von jedem anderen Gesichtspunkt aus als streng abgeschlossen betrachten könnte. In der Natur gibt es selbstverständlich keine vollkommen abgeschlossenen Systeme, deren Wechselwirkung mit anderen Körpern genau gleich Null ist. Jede faktisch doch vorhandene Wechselwirkung, die zwar so klein sein kann, daß sie sich in keinen anderen Eigenschaften des Systems widerspiegelt, wird noch außergewöhnlich groß sein im Vergleich zu den verschwindend kleinen Intervallen des Energiespektrums.

Die statistische Matrix[1]

Eine Zustandsbeschreibung des makroskopischen Körpers ist mit der Wellenfunktion undurchführbar, weil der wirklich mögliche Vorrat an Werten über den Körper bei weitem nicht vollständig ist, wie er für das Aufstellen der Zustands-Wellenfunktion benötigt wird. Die quantenmechanische Beschreibung, die auf einen unvollständigen Satz von Werten über das System aufbaut, wird mit der sogenannten Dichte-Matrix bewerkstelligt. Kennt man die Dichte-Matrix, kann man den Mittelwert beliebiger Größen des Systems und auch die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Werte dieser Größen ausrechnen (in der Statistik wird die Dichte-Matrix *statistische Matrix* genannt).
Die statistische Matrix spielt in der Quantenstatistik die Rolle, die von der Verteilungsfunktion in der klassischen Statistik gespielt wird. Wenn in der klassischen Statistik die Verteilungsfunktion ϱ $(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$ die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Werte von Ortskoordinaten und Impulsen der Teilchen angibt, liefert in der Quantenstatistik die statistische Matrix die Wahrscheinlichkeiten dafür, den Körper in diesem oder jenem Quantenzustand zu finden.
Alle die sehr allgemeinen Sätze, im besonderen die Bestätigung, daß die von der Statistik gemachten Voraussagen praktisch recht bestimmt sind, treffen auch in vollem Umfang auf die Quantenstatistik zu.

Die Entropie. Das Gesetz der Entropiezunahme

Wenn sich ein abgeschlossenes System nicht im statistischen Gleichgewicht befindet, wird sich sein makroskopischer Zustand im Laufe der Zeit ändern, bis das System schließlich den Zustand völligen Gleichgewichts erlangt hat. Darauf machten wir weiter vorn schon aufmerksam. Wenn man jeden makroskopischen Zustand eines Systems durch die Energieverteilung auf die einzelnen Untersysteme kennzeichnet, kann man sagen, daß die Reihe der nacheinander vom System zu durchlaufenden Zustände einer immer wahrscheinlicheren Verteilung der Energie entspricht. Dieses Anwachsen der Wahrscheinlichkeit ist sehr bedeutend, es geschieht nach der Exponentialfunktion e^S. Im Exponenten steht die sogenannte *Entropie des Systems*[2]*:*

[1] Über die physikalische Bedeutung der Matrix siehe z. B. W. Macke: Quanten, Leipzig: Akad. Verlagsgesellschaft Geest u. Portig K.-G. 1959, S. 93 ff.

[2] Wir möchten bemerken, daß die Entropie eine sehr wichtige Größe in der Statistik ist. Sie kennzeichnet den „Grad der Verschmierung" des makroskopischen Zustandes des Systems durch seine mikroskopischen Zustände. Die Entropie des Systems wird durch die Zahl der mikroskopischen Zustände bestimmt, durch welche der gegebene makroskopische Zustand verwirklicht werden kann.

Haben wir also ein abgeschlossenes System vor uns, das sich nicht im Gleichgewicht befindet, in dem aber Prozesse ablaufen, so werden diese Prozesse dergestalt sein, daß das System kontinuierlich aus dem Zustand mit geringerer in einen Zustand mit größerer Entropie übergeht, bis schließlich die Entropie einen Höchstwert erreicht hat, der dem völligen statistischen Gleichgewicht entspricht. Dieser Sachverhalt ist bekannt als *Gesetz der Entropiezunahme.*

Danach wird die Entropie in allen in der Natur existierenden abgeschlossenen Systemen niemals abnehmen, sie wächst oder bleibt im Grenzfall konstant. Entsprechend diesen beiden Möglichkeiten teilt man alle der makroskopischen Betrachtung unterworfenen Prozesse in *nicht-umkehrbare* und *umkehrbare* ein. Als nicht-umkehrbar zählt man die Prozesse, die von einer Zunahme der Entropie im ganzen abgeschlossenen System begleitet sind. Prozesse, die sich als deren Wiederholung im umgekehrten Sinne darbieten, kann es nicht geben, denn bei ihnen müßte die Entropie abnehmen. Umkehrbar nennt man solche Prozesse, bei denen die Entropie des abgeschlossenen Systems eine Konstante ist und die folglich auch in umgekehrter Richtung ablaufen können. Der streng umkehrbare Prozeß stellt selbstverständlich einen idealen Grenzfall dar. In der Natur real vorkommende Prozesse können nur mit größerer oder kleinerer Genauigkeit umkehrbar sein.

Wenden wir das Gesetz der Entropiezunahme auf die Welt als Ganzes an, folgt daraus nicht die Notwendigkeit des statistischen Gleichgewichts für sie. Die Aussage, daß ein abgeschlossenes System im Laufe hinreichend langer Zeit in den Gleichgewichtszustand übergeht, gilt nämlich nur für den Fall stationärer äußerer Bedingungen. Wir sahen schon[1], daß die Welt als Ganzes (im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie) nicht als abgeschlossenes System betrachtet werden darf, sondern als System in einem veränderlichen Gravitationsfeld. Diese Lage ergab sich aus der Tatsache, daß sich das Gravitationsfeld nicht als abgeschlossenes System behandeln läßt. Dabei würden die auch für die Statistik grundlegenden Erhaltungssätze in Identitäten verwandelt werden. Das Gravitationsfeld selbst ist nicht nur eine Funktion der Ortskoordinaten, sondern auch der Zeit, so daß die „äußeren Bedingungen" durchaus nicht stationär sind.

[1] Siehe Kapitel 9.

Thermodynamische Beziehungen

Jetzt folgt eine wichtige Bemerkung. Die physikalischen Größen, welche die makroskopischen Zustände der Körper kennzeichnen, heißen thermodynamische Größen. Unter ihnen befinden sich solche, die neben dem thermodynamischen auch rein mechanischen Sinn haben, zum Beispiel die Energie und das Volumen. Es gibt jedoch auch Größen anderer Art, die nur für statistische Gesetzmäßigkeiten zugeschnitten sind und bei Anwendung auf nichtmakroskopische Systeme überhaupt keinen Sinn haben, dazu gehört zum Beispiel die Entropie. Es existiert eine ganze Reihe von Beziehungen zwischen thermodynamischen Größen, die unabhängig davon gelten, auf welche konkreten Körper sich die Größen beziehen. Diese nennt man thermodynamische Beziehungen.

Die Temperatur

Der Begriff der Entropie führt zu einer anderen sehr wichtigen thermodynamischen Größe, der Temperatur. Die Entropie eines Systems $S\ (W)$ ist doch die Funktion seiner Energie, also muß es eine Größe geben

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}W} = \frac{1}{\Theta}, \tag{39}$$

die für das ganze System, das sich im statistischen Gleichgewicht befindet, ein und denselben Wert hat. Die Größe Θ heißt Temperatur.

Wie die Entropie hat die Temperatur offenbar rein statistischen Charakter und hat ausnahmslos für makroskopische Körper Sinn. Die Entropie S ist eine dimensionslose Größe. Darum folgt aus Gleichung (39), daß die Temperatur Θ die Dimension Energie hat. Man müßte sie deshalb in Maßeinheiten der Energie, zum Beispiel in Wattsekunden, messen können. In der Praxis ist es jedoch üblich, die Temperatur in eigenen Einheiten zu messen, in Grad. Wenn Θ die Temperatur in Wattsekunden und T die gleiche Temperatur in Grad darstellen sollen, besteht zwischen beiden die Beziehung

$$\Theta = k \cdot T.$$

Der Koeffizient k heißt Boltzmann-Konstante und hat den Wert

$$k = 1{,}380 \cdot 10^{-25}\ \mathrm{Ws} \cdot \mathrm{grd}^{-1}.$$

Der Druck

Natürlich werden makroskopische Körper mit einer gewissen Kraft auf ihre Begrenzung wirken. Den Quotienten aus der Kraft und der Fläche, auf die sie wirkt, nennt man *Druck*. Das ist eine neue thermodynamische Größe.

Die Zustandsgleichung

Makroskopische (statistische) Systeme sind durch das Bestehen der Beziehungen zwischen Druck, Volumen und Temperatur gekennzeichnet. Diese Beziehung stellt die Zustandsgleichung des gegebenen Systems dar. Man muß jedoch beachten, daß man zur vollständigen Bestimmung des Zustands eines Systems auch seine Energie kennen muß.
Man kann zu der Zustandsgleichung gelangen, wenn die mikroskopischen Kennzeichen des Systems (sein Energiespektrum) bekannt sind. Es bestehen wohl einerseits Wechselbeziehungen zwischen allen thermodynamischen Größen, wir haben ja schon von den allgemeinen thermodynamischen Beziehungen gehört, andererseits ist solch eine thermodynamische Größe wie die Entropie unmittelbar mit dem Mikrogeschehen des Makrosystems verbunden. Kennt man die Mikrostruktur des Körpers, kann man folglich seine thermodynamischen Größen ausrechnen.

Die Zustandsformen der Körper

Es ist bekannt, daß sich die Stoffe bei normalen Temperaturen und Drücken im festen, flüssigen und gasförmigen Zustand befinden können. Sehr hohe Temperaturen und Drücke führen zu verschiedenen Arten von „stellaren Zuständen" des Stoffes.

Das ideale Gas

Betrachten wir der Reihe nach alle Zustandsformen des Stoffes. Als einfachstes physikalisches Makrosystem erweist sich das sogenannte *ideale Gas*. Das ist ein Gas, zwischen dessen Molekülen (Atomen) praktisch keine nennenswerten Wechselwirkungskräfte auftreten.[1]
Aus der Gibbsschen Verteilung erhalten wir die Angaben über die Ver-

[1] Diesen Zustand des Gases gibt es erfahrungsgemäß schon bei gewöhnlichem Druck (entsprechend normalem Luftdruck).

teilung der Teilchen des Gases auf die einzelnen Quantenzustände und die allgemeine Beschreibung der statistischen Eigenschaften *beliebiger* makroskopischer Systeme im Gleichgewicht. Stellt das Gas ein System gleicher Teilchen dar, so existiert, wie schon im Kapitel 5 gezeigt worden war, sogar wenn keine direkte Kraftwirkung im System vorhanden ist, trotzdem eine eigenartige wechselseitige Beeinflussung der Teilchen (Austauscheffekte), die zu verschiedenen Regeln für die Besetzung der Quantenzustände mit Teilchen des Systems führt.
Bekanntlich gibt es nur zwei verschiedene Regeln für die Besetzung der Quantenzustände mit Teilchen. Dementsprechend gibt es für Systeme gleicher Teilchen zwei verschiedene Funktionen der statistischen Verteilung — dementsprechend gibt es zwei Quantenstatistiken (*die Bose- und die Fermi-Statistik*).
Oben wurde erwähnt, daß das Energiespektrum makroskopischer Systeme fast kontinuierlich ist, nur der Teil am Anfang des Spektrums nicht. Darum ist es uns verständlich, daß schwach angeregte Zustände von Systemen (sehr niedrige Temperaturen) im wesentlichen durch die Quantenstatistik, stark angeregte Zustände (hohe Temperaturen) entsprechend durch die klassische Statistik beschrieben werden.
Da man in idealen Gasen von der Wechselwirkung der Teilchen absieht, lassen sich für sie die thermodynamischen Funktionen in allgemeiner Form ausrechnen (sie ist zur Beschreibung aller möglichen gasförmigen Systeme geeignet, unabhängig vom Bau der Moleküle, aus denen sie bestehen). Die allgemeine Zustandsgleichung idealer Gase trägt den Namen *Clapeyronsche Gleichung*.

Der feste Zustand des Stoffes

Gehen wir nun zur Betrachtung der festen Zustandsform eines Stoffes über und suchen dessen Besonderheiten. Eine besteht darin, daß die Atome des Stoffes nur kleine Schwingungen um gewisse Ruhelagen, Knoten, ausführen. Die Knoten zeigen im statistischen Gleichgewicht eine ausgewählte Lage, d. h. eine von den vielen möglichen Verteilungen, und zwar eine regelmäßige. Diesen Zustand des festen Körpers nennt man *kristallin*.
Neben den kristallinen gibt es in der Natur auch amorphe feste Stoffe, in denen die Atome um chaotisch gelegene Punkte schwingen. Vom oben dargelegten Gesichtspunkt aus befinden sich solche Körper nicht im Gleichgewichtszustand und müßten im Laufe der Zeit kristallisieren. In Wirklichkeit sind die Relaxationszeiten so groß, daß sich amorphe Stoffe praktisch unbegrenzt lange stabil verhalten.

Damit ein Körper fest sein kann, muß seine Temperatur niedrig genug sein. Die Größe $k \cdot T$ muß in jedem Falle klein sein im Vergleich zur Wechselwirkungsenergie der Atome (bei höheren Temperaturen schmelzen alle festen Körper oder lösen sich auf). Hiermit steht auch im Zusammenhang, daß die Schwingungen der Atome in festen Körpern um ihre Gleichgewichtslage nur klein sind.
Wegen dieser letzten Eigenschaft (den kleinen Schwingungen) kann man für feste Körper die thermodynamischen Größen in allgemeiner Form ausrechnen, denn sie ist ein Zeichen für den einfachen Charakter der Wärmebewegung in ihnen.

Flüssigkeiten

Im Gegensatz zu Gasen und festen Körpern lassen Flüssigkeiten eine Berechnung der thermodynamischen Größen in allgemeiner Form nicht zu. Die Ursache dafür sind die starken Wechselwirkungen zwischen den Molekülen der Flüssigkeit, gleichzeitig fehlen die kleinen Schwingungen, die eine einfachere Behandlung bei festen Körpern ermöglichten. Weil die molekularen Wechselwirkungen so intensiv sind, ist zum Berechnen der thermodynamischen Größen die Kenntnis des konkreten Gesetzes der Wechselwirkung nötig, es hat aber jede Flüssigkeit ihr eigenes Gesetz.
Das einzige, was in allgemeiner Form gemacht werden kann, ist die Untersuchung der Eigenschaften von Flüssigkeiten bei Temperaturen in der Nähe des absoluten Nullpunktes. Aber es gibt in der Natur nur einen Stoff, das Helium, der bis nahe an den absoluten Nullpunkt flüssig bleiben kann. Nach den Vorstellungen der klassischen Mechanik sind alle Atome am absoluten Nullpunkt in Ruhe, und die potentielle Energie ihrer Wechselwirkung im Gleichgewicht muß minimal sein. Darum sollen die Atome bei hinreichend niedrigen Temperaturen allenfalls nur kleine Schwingungen ausführen, die Körper sollen also fest sein. In Wirklichkeit können die Quanteneffekte aber Ausnahmen dieser Regel bedingen. Als solche erweist sich Helium, der *einzige* Stoff, der am absoluten Nullpunkt flüssig bleibt. Alle anderen Stoffe werden viel eher fest, als die Quanteneffekte in ihnen maßgebend werden.[1]
Auf diese Weise bleibt Helium wegen der schwachen Wechselwirkung seiner Atome flüssig bis zu einer Temperatur, bei der die Quanteneffekte eine Rolle spielen (Quantenflüssigkeit). Danach soll eine Erstarrung überhaupt nicht mehr einsetzen.

[1] Quanteneffekte werden maßgebend, wenn die de-Broglie-Wellenlänge, die der Wärmebewegung der Atome entspricht, mit den Abständen zwischen den Atomen vergleichbar wird. In flüssigem Helium tritt das bei 2 °K bis 3 °K ein.

Die Untersuchung der Eigenschaften des Stoffes im oberen Bereich der Temperaturskala ist von prinzipiellem Interesse. Wir sahen, daß bei höherer Temperatur der kondensierte Zustand des Stoffes (fester Körper, Flüssigkeit) in den gasförmigen übergeht. Gewöhnliche Gase sind molekular. Bei Temperaturen um 10^3 °K kommt es zur *thermischen Dissoziation* (die Moleküle fallen in die einzelnen Atome auseinander), und die Gase werden atomar.

Bei einer Temperatur von ungefähr 10^4 °K erfolgt die *Ionisation* der Atome des Gases. Der ionisierte Stoff, das *Plasma*, besteht schon ganz aus Ionen und Elektronen ($T \sim 10^6$ °K).

Bei Temperaturen um 10^7 °K ist die vollständige Ionisation des Plasmas erreicht, der Stoff besteht hier aus „nackten" Kernen und freien Elektronen. Bei weiterer Erhöhung der Temperatur beginnen die Kernumwandlungen ($\sim 10^8$ °K).

Bei Temperaturen über 10^8 °K werden die Kerne zerstört, und der Stoff besteht dann aus Protonen und Elektronen ($T \sim 10^{11}$ °K).[1]

Schließlich sind bei Temperaturen über 10^{13} °K die allgemeinen gegenseitigen Umwandlungen der Elementarteilchen möglich. So wird zur Bildung eines Nukleon-Antinukleon-Paares eine Energie der Größenordnung $m \cdot c^2$ gebraucht, wobei m die Masse des Nukleons ist. Aus der Beziehung $m \cdot c^2 \sim k \cdot T$ erhalten wir den eben genannten Wert der Temperatur.

Neben den Eigenschaften des Stoffes bei sehr hohen Temperaturen sind auch die Eigenschaften bei sehr großen Dichten von prinzipiellem Interesse. (Als wir die Veränderungen der stofflichen Eigenschaften in Abhängigkeit von der Temperatur betrachteten, nahmen wir die Dichte stets als normal an.) Verfolgen wir nun die qualitativen Veränderungen dieser Eigenschaften bei schrittweisem Erhöhen der Dichte (die Temperatur bleibt dabei normal).

Wenn der Stoff unter hohem Druck steht ($\sim 10^8$ at), verformen sich die Elektronenhüllen der Atome, und ihre innere Energie wächst rapid. Die elektrischen Felder der einzelnen Atomkerne überlagern sich immer mehr. Als Folge davon sind die Elektronen der Hülle immer weniger mit einem ganz bestimmten Atom verbunden. Die äußeren Elektronen können sich deshalb frei bewegen.

In dieser Weise verliert bei hinreichend hoher Kompression ($\sim 10^{12}$ at) die Wechselwirkung der Elektronen mit den Kernen an Bedeutung, und

[1] Die Neutronen sind instabile Teilchen und zerfallen in Protonen, Elektronen und Neutrinos. Die Neutrinos treten mit dem Stoff nicht in Wechselwirkung, sie verlassen das System.

der Stoff kann als Elektronengas großer Dichte betrachtet werden (solch ein Gas wird als entartet bezeichnet, es unterliegt der Fermi-Statistik). Steigen Dichte und Druck bis zur Größenordnung von $10^6 \mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$ bzw. 10^{18} at, muß das Elektronengas relativistisch behandelt werden[1] (weil die mittlere Energie der Elektronen mit $m \cdot c^2$ vergleichbar wird).
Eine weitere Erhöhung der Dichte führt zu Zuständen, die für Kernreaktionen wie das Einfangen von Elektronen durch die Kerne (bei gleichzeitigem Aussenden von Neutrinos) thermodynamisch günstig sind. Als Ergebnis einer solchen Reaktion verringert sich die Kernladung (bei unverändertem Gewicht). Das führt, allgemein gesprochen, zu einer Verringerung der Bindungsenergie des Kernes, also zu einer Verringerung seines Massendefekts.
Bei noch größeren Dichten und Drücken reißen die Kerne weitere Elektronen an sich und verringern dadurch ihre Ladung immer mehr. Schließlich enthalten die Kerne zu viele Neutronen. Sie werden instabil und zerfallen. Bei einer Dichte von $10^{11} \mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$ und einem Druck von 10^{24} at beginnen die Neutronen, an Zahl den Elektronen überlegen zu sein, und schon bei Dichten von $10^{12} \mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$ gewinnen sie durch den von ihnen erzeugten Druck das Übergewicht. Hier beginnt der Dichtebereich, in dem der Stoff als Neutronen-Fermi-Gas angesehen werden kann. (In diesem Gase sind selbstverständlich immer auch einige Protonen und Elektronen anwesend, die beim Zerfall der Neutronen entstehen.)
Bei einem Druck von etwa 10^{27} at hat das Neutronengas eine Dichte wie der Stoff des Kernes, sie beträgt ungefähr $10^{14} \mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$. Ein ähnlicher Zustand des Stoffes kann durch eine Temperatur von ungefähr 10^{12} °K erreicht werden.
Solche Zustandsformen wie bei sehr hohen Temperaturen und großen Dichten gibt es real in Körpern mit ungeheuren Massen, in den Sternen. Wir führen einige Zahlen an. Der zentrale Bereich der Sonne ist durch eine Temperatur von 10^7 °K und einen Druck von 10^{11} at gekennzeichnet. Unter diesen Bedingungen stellt der Stoff ein völlig ionisiertes Plasma dar, das aus nackten Kernen und freien Elektronen besteht. Die Temperaturen im Innern der Sterngiganten betragen ungefähr 10^8 °K. Die weißen Zwergsterne sind durch den höchsten Druck von 10^{19} at[2] gekennzeichnet, ihr Stoff ist ein relativistisches angeregtes Elektronengas.
Der Stoff dieser realen physikalischen Gegenstände, der Sterne, befindet sich in der Hauptsache im Elektronen-Kern-Zustand. Der Neutronen-

[1] Zum Vergleich sei die Dichte eines sehr dichten Stoffes bei einem Druck von 1 at genannt. Für Osmium gilt $\varrho = 2 \cdot 2 \cdot 10^1 \mathrm{g/cm}^{-3}$ (bei normaler Temperatur).
[2] Die Dichte dieser Sterne beträgt $10^6 \mathrm{g/cm}^{-3}$, d. h., ein Kubikzentimeter des Stoffes dieser Sterne wiegt unter Bedingungen wie auf der Erde einige Megapond!

zustand, in dem fast alle Elektronen von den Protonen eingefangen worden sind und der Stoff als angeregtes Neutronengas betrachtet werden kann, wird in den beobachtbaren astronomischen Objekten anscheinend nicht angetroffen. Jedoch muß der Neutronenzustand bei hinreichend großen Massen von Systemen thermodynamisch günstiger werden, da die Gesamtenergie der Systeme im Neutronenzustand kleiner ist als in dem von Elektronen und Kernen. Die Umwandlung der Kerne und Elektronen in freie Neutronen ist zwar mit einem bedeutenden Energieaufwand verbunden, aber dieser Aufwand wird bei hinreichend großer Gesamtmasse des Systems mit Überschuß durch das Freiwerden von Gravitationsenergie kompensiert. Dieser Vorgang ist mit der Verkleinerung der räumlichen Ausdehnung und der Vergrößerung der Dichte des Systems verbunden.

Lenken wir nun unsere Aufmerksamkeit auf den grandiosen Effekt der Ausdehnung des Weltalls[1], der an der Erscheinung des Auseinanderstrebens der Galaxien sichtbar ist, so kann man wohl darauf hinweisen, daß der Stoff in der Vergangenheit Neutronenzustand besessen haben muß.

Werfen wir die Frage der Entstehung und Verteilung der chemischen Elemente auf, kann fast ohne Zweifel behauptet werden, daß das Bilden von Kernen nur unter den Bedingungen des „stellaren" Zustandes des Stoffes möglich ist.

[1] Dieser Effekt resultiert bekanntlich aus den Vorstellungen der allgemeinen Relativitätstheorie.

10. Die physikalische Kinetik

Bis jetzt nahmen wir an, daß sich die von uns betrachteten makroskopischen Systeme im statistischen Gleichgewicht befinden. Wir betrachteten also die Systeme über Zeitabschnitte hinweg, die groß sind im Vergleich zu ihrer Relaxationszeit.
Es wird aber sehr oft notwendig sein, ein System in solchen Zeitabschnitten zu untersuchen, die ungefähr gleich oder sogar kleiner als die Relaxationszeit sind. Das ist vor allen Dingen bei großen Systemen der Fall. Dort sprechen wir neben dem vollständigen statistischen Gleichgewicht des ganzen geschlossenen Systems von einem sogenannten *unvollständigen* Gleichgewicht.

Das unvollständige Gleichgewicht

Die Relaxationszeit nimmt mit dem Größerwerden der Ausmaße des Systems zu. Unter diesen Umständen gelangen die kleinen Einzelteile des Systems für sich allein bedeutend schneller in den Gleichgewichtszustand, als das zwischen den verschiedenen Teilen geschieht.
Ein unvollständiges Gleichgewicht kommt auch noch anders zustande. Im ersten Falle lag es an den großen Unterschieden in der Länge der Relaxationszeit für das ganze System und seine kleinen Systeme, im zweiten Falle liegt es an den unterschiedlichen Geschwindigkeiten, mit denen die Prozesse im ganzen System ablaufen. Als anschauliches Beispiel kann das unvollständige Gleichgewicht in einem Gemisch einiger Stoffe dienen, zwischen denen eine chemische Reaktion stattfindet. Da chemische Reaktionen relativ langsam vor sich gehen, stellt sich das Gleichgewicht der Bewegung der Moleküle viel eher ein als das Gleichgewicht bezüglich der gegenseitigen Umwandlung der Moleküle, d. h. bezüglich der Zusammenstellung des Gemisches. Somit könnte man das unvollständige Gleichgewicht des Gemisches als das Gleichgewicht (in Wirklichkeit Nicht-Gleichgewicht) bei seiner gegebenen chemischen Zusammensetzung betrachten.

Noch einmal über die makroskopische Beschreibung

Besonders wegen der Existenz des unvollständigen Gleichgewichts wird die Einführung des Begriffes *makroskopische Zustände* eines Systems gerechtfertigt.[1] Im Unterschied zur mechanischen mikroskopischen Beschreibung (d. h. bei gegebenen Ortskoordinaten und Impulsen aller Teilchen des Systems — wenn die klassische Beschreibung ausreicht) sprechen wir von einer makroskopischen Beschreibung des Systems, wenn die Mittelwerte der physikalischen Größen gegeben sind, die dieses oder jenes unvollständige Gleichgewicht in ihm zum Ausdruck bringen. Zum Beispiel können das die Mittelwerte von Größen sein, die die hinreichend kleinen, aber makroskopischen Einzelteile des Systems betreffen, von denen man jedes als in seinem eigenen Gleichgewicht befindlich ansehen kann.

Kinetische Gleichungen

Betrachten wir einen solchen hinreichend kleinen Teil des Systems, ein Untersystem. Wegen seiner Wechselwirkungen mit den anderen kleinen Teilen (Untersystemen) kann es sich *nicht* im Gleichgewicht befinden. Und wie verhält sich seine Verteilungsfunktion, welche die Verteilung der Teilchen des Untersystems auf seine Quantenzustände angibt? Sie ändert sich im Laufe der Zeit sowohl durch die spontanen Mikroprozesse des Übergangs unseres quasiisolierten Untersystems von dem einen Zustand in einen anderen als auch durch die äußeren Einwirkungen auf unser Untersystem. Diese Beziehung, welche die Abhängigkeit der Verteilungsfunktion von der Zeit bestimmt, heißt *kinetische Gleichung*.
Die *kinetischen Eigenschaften* der Körper ergeben sich aus ihrer konkreten Mikrostruktur. Daraus ist zu ersehen, daß die konkrete Form der kinetischen Gleichungen für die verschiedenen Körper unterschiedlich ist.
Die kinetischen Gleichungen sind die Grundgleichungen der Theorie physikalischer Prozesse, die in makroskopischen Systemen ablaufen. Man nennt diese Theorie die physikalische *Kinetik*.

Über die kinetischen Eigenschaften der Körper

In der Theorie des statistischen Gleichgewichts gibt es eine universale Verteilungsfunktion, die Gibbssche Verteilung. Sie beschreibt die statistischen Eigenschaften *beliebiger* Makrosysteme im Gleichgewicht. Diese Methode führt zu einer großen Zahl von Beziehungen zwischen den

[1] Wir haben diesen Begriff vorn schon oft benutzt.

makroskopischen Größen, die auch ohne Bezug auf einen konkreten Körper gelten (die thermodynamischen Beziehungen).
Im Gegensatz dazu gibt es in der Kinetik keine universale Verteilungsfunktion. Wie sich die Nicht-Gleichgewichts-Zustände mit der Zeit ändern, das hängt gänzlich von der konkreten Mikrostruktur der Körper ab (dabei ist es verständlich, daß sich mit dem Annähern der Körper an den Gleichgewichtszustand seine Verteilungsfunktion in Richtung auf eine *einheitliche* Gleichgewichtsfunktion nach Gibbs ändert). Es gibt deshalb auch keine allgemeinen, für alle Körper brauchbaren, kinetischen Gleichungen, mit Ausnahme einiger Sonderfälle (z. B. für ideale Gase). Darum existieren auch, bis auf wenige Ausnahmen, keine allgemeinen quantitativen Beziehungen zwischen den kinetischen Größen.

Die Mechanik und Elektrodynamik zusammengesetzter Medien

Die phänomenologische Kinetik ist eine der Methoden für die Untersuchung kinetischer Erscheinungen. Sie betrachtet die makroskopischen Systeme als zusammengesetzte Medien, abstrahiert völlig von ihrer Mikrostruktur und arbeitet nur mit makroskopischen Größen. Hierauf bezieht sich das weite Gebiet der *Mechanik der zusammengesetzten Medien.* Hierauf bezieht sich auch die *Elektrodynamik zusammengesetzter Medien*, dazu gehören die Theorie der elektromagnetischen Felder in materiellen Medien und die Theorie der makroskopischen elektrischen und magnetischen Eigenschaften des Stoffes.
Die grundlegenden Beziehungen der phänomenologischen Kinetik finden in der statistischen Kinetik ihre Begründung.

Schlußbetrachtung

In allen vorangegangenen Kapiteln betrachteten wir nacheinander die Eigenschaften physikalischer Objekte. Gegenstand unserer Untersuchungen waren Elementarteilchen, Kerne, Atome, makroskopische Körper, Sterne, Galaxien und das Weltall als Ganzes. Wir sahen dabei die Objekte als *gegeben* an, ohne die Frage nach ihrer Entstehung zu berühren. Das geschah nicht zufällig.
Wahrscheinlich können die Fragen nach der Entstehung und Herkunft der physikalischen Objekte (der Elementarteilchen, der Kerne, der Sterne und Galaxien) erst dann korrekt gestellt werden, wenn eine vollkommene Theorie der Elementarteilchen geschaffen und ihre Gedanken mit denen der allgemeinen Relativitätstheorie vereinigt worden sind.

Gruppe	Nr.	Name	Bezeichnung	absolute Masse in g	relative Masse bezogen auf		Ladung	absolute Ladung in As	Spin	Strangeness	Lebensdauer in s	Zerfall	Zerfallsenergie in MeV
					Atommasse	Elektronenmasse							
	1	Photon	γ	$\frac{2{,}21 \cdot 10^{-37}}{\lambda}$			0	0	1	0	∞		
Leptonen	2	Elektron	e, e^-, β^-	$0{,}9106 \cdot 10^{-27}$	0,0005498	1	-1	$1{,}602 \cdot 10^{-19}$	0,5	—	∞	$e^+ + e^- - k \cdot \gamma$	
	3	Positron	e^+, β^+	$0{,}9106 \cdot 10^{-27}$	0,0005488	1	$+1$	$1{,}602 \cdot 10^{-19}$	0,5	—	∞	$(n = 1; 2; 3; \cdots)$	
	4	Neutrino	ν			$< 0{,}0005$	0		0,5	—	∞		
	5	Anti-neutrino	$\tilde{\nu}$			$< 0{,}0006$	0		0,5	—	∞		
Mesonen	6	μ^+-Meson	μ^+			$\sim 206{,}7$	$+1$		0,5		$2{,}22 \cdot 10^{-6}$	$e^+ + \nu + \tilde{\nu}$	105
	7	μ^--Meson	μ^-			$\sim 206{,}7$	-1		0,5		$2{,}22 \cdot 10^{-6}$	$e^- + \nu + \tilde{\nu}$	105
	8	π^+-Meson	π^+			$\sim 273{,}3$	$+1$		0	0	$2{,}56 \cdot 10^{-8}$	$\mu^+ + \nu$	34,5
	9	π^--Meson	π^-			$\sim 273{,}3$	-1		0	0	$2{,}56 \cdot 10^{-8}$	$\mu^- + \nu$	34,5
	10	π^0-Meson	π^0			~ 264	0		0	0	10^{-16}	$\gamma + \gamma$	135
	11	K^+-Meson	K^+			~ 966	$+1$		0	1	$1{,}224 \cdot 10^{-8}$	$\mu^+ + 2\pi^0$	
	12	K^--Meson	K^-			~ 966	-1		0	1	$1{,}224 \cdot 10^{-8}$	$\mu^- + 2\pi^0$	
	13	τ^+-Meson	τ^+			~ 965	$+$				$1{,}224 \cdot 10^{-8}$	$\pi^+ + \pi^+ + \pi^-$	75
	14	τ^--Meson	τ^-			~ 965	$-$				$1{,}224 \cdot 10^{-8}$	$\pi^- + \pi^+ + \pi^-$	75
	15	H^0-Meson	H^0			~ 973	0				10^{-10}	$\pi^0 + \pi^0 /$ $\pi^+ + \pi^-$	~ 220

Nukle-onen	16	Proton	$p^+, p, {}_1^0e^+$	$1{,}673 \cdot 10^{-24}$	1,007597	1836,12	+ 1	$1{,}602 \cdot 10^{-19}$	0,5	0	∞		
	17	Anti-proton	$p^-, \tilde{p}$			~ 1836,12	— 1	$1{,}602 \cdot 10^{-19}$					0
	18	Neutron	$n, {}_0^1n$	$1{,}675 \cdot 10^{-24}$	1,008987	1838,65	0		0,5	0	770	$p^+ + e^- + \tilde{\nu}$	0,76
	19	Anti-neutron	ñ			~ 1838,65						$p^- + e^+ + \nu$	
Hyper-onen	20	Λ^0-Hyperon	Λ^0			~ 2181	0		0,5	—1	$2{,}77 \cdot 10^{-10}$	$p^+ + \pi^-$/ $n + \pi^0$	37
	21	Σ^+-Hyperon	Σ^+, y^+			~ 2327	+ 1		0,5	—1	$0{,}78 \cdot 10^{-10}$	$p^+ + \pi^0$/ $n + \pi^+$	116
	22	Σ^--Hyperon	Σ^-, y^-			~ 2340	— 1		0,5	—1	$1{,}58 \cdot 10^{-10}$	$n + \pi^-$	118
	23	Σ^0-Hyperon	Σ^0, y^0			$m_{\Sigma^+} < m_{\Sigma^0} < m_{\Sigma^-}$	0		0,5	—1	$t_{\Sigma^0} \ll t_{\Sigma^\pm}$	$\Lambda^0 + \gamma$	70
Kas-kaden-hyperonen	24	Ξ^--Hyperon	Ξ^-			2585	— 1		0,5	—2	$1{,}4 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda^0 + \pi^-$	65
	25	Ξ^0-Hyperon	Ξ^0			~ 2340	0		0,5	—2	$3{,}9 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda^0 + \pi^0$	
	26	Deuteron	$d, {}_1^2d, {}_1^2\mathrm{H}$		2,014191	3669	+ 1						
	27	α-Teilchen	$\alpha, {}_2^4\alpha, {}_2^4\mathrm{He}$		4,002776	7291	+ 4						

Tabelle der Elementarteilchen