6

Methodische Beiträge zum Unterricht im Fach

MATHEMATIK

Proportionalität und Proportionen

DEUTSCHES PÄDAGOGISCHES ZENTRALINSTITUT

Methodische Beiträge zum Unterricht im Fach

MATHEMATIK

Proportionalität und Proportionen im Mathematikunterricht der zehnklassigen allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule

Herausgegeben vom
Deutschen Pädagogischen Zentralinstitut
Sektion Unterrichtsmethodik und Lehrpläne

VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN · 1963

Ausgearbeitet von:

Prof. Dr. L. Görke
Humboldt-Universität Berlin

Redaktion:

H. Junge / Dr. F. Neigenfind
Deutsches Pädagogisches Zentralinstitut Berlin

Redaktionsschluß: 15.4.1961
ES 10 C · Best.-Nr. 27891-2 · Lizenz Nr. 203 · 1000/63 (BN)
Satz und Druck: Bärendruck Berlin, Berlin C 2, Rungestraße 30

INHALTSVERZEICHNIS

VORWORT

Durch die Einführung der Lehrplanwerkes der zehnklassigen allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule erhielt der Unterrichtsabschnitt „Proportionen“ erhöhte Bedeutung. Es ist zu begrüßen, daß sich viele Lehrer und pädagogische Wissenschaftler in den Schuljahren 1959/60 und 1960/61 der methodischen Bearbeitung dieses wichtigen Stoffgebietes zuwandten.

Die Ergebnisse der entsprechenden Untersuchungen zeigten zweierlei: erstens ist die Maßnahme richtig, das selbständige und geschlossene Unterrichtsgebiet „Dreisatzrechnung“ durch die intensivere Behandlung der Lehre von den Proportionen zu ersetzen; zweitens sind für den Unterricht in Klasse 7 im wesentlichen drei verschiedene Wege für die Behandlung dieses Stoffgebietes geeignet. Durch das zur Zeit gültige Lehrbuch „Rechnen, Messen, Konstruieren — Siebentes Schuljahr“ (Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1959), das „Methodische Handbuch für den Lehrer — Mathematikunterricht“ (Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1960) und den vorliegenden „Methodischen Beitrag“ sollen die drei Wege zur Diskussion gestellt werden. Die Praxis muß erweisen, welche Art der Behandlung des Lehrplanabschnittes „Proportionen“ optimale Erziehungs- und Bildungserfolge bewirkt. Das Deutsche Pädagogische Zentralinstitut bittet hiermit alle Lehrer um kritische Hinweise und Einschätzungen zu den zur Diskussion stehenden drei methodischen Hauptwegen.

H. Junge / Dr. F. Neigenfind
Wissenschaftliche Mitarbeiter des
Deutschen Pädagogischen Zentralinstituts

EINLEITUNG

Im Rahmen der polytechnischen Bildung und Erziehung, des Kernstücks der gesamten Bildung und Erziehung in der sozialistischen Schule, sind im Mathematikunterricht wichtige Aufgaben zu lösen.

Der Unterricht in der sozialistischen Produktion hat gezeigt, daß den Schülern frühzeitig solide mathematische Grundlagen vermittelt werden müssen. Nur dann lernen die Schüler in der Praxis auftretende Probleme auch nach ihrer logisch-mathematischen Seite hin sehen und mathematische Hilfsmittel richtig einsetzen.

Die Mathematik ist nicht nur in dieser Weise von unmittelbarer Bedeutung für die polytechnische Bildung und Erziehung, sie ist es auch mittelbar als Hilfswissenschaft der Naturwissenschaften, insbesondere der Physik. Die Naturwissenschaften gehören zu den wichtigsten Grundlagen der industriellen Produktion.

Dem Physikunterricht kommt ein bedeutender Platz im Fachunterricht unserer zehnklassigen allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule zu. Der Mathematikunterricht hat unter anderem die Aufgabe, solche mathematischen Begriffe und Verfahren rechtzeitig bereitzustellen, mit deren Hilfe die Schüler im Physikunterricht zu tieferem Verständnis und planmäßiger Anwendung der Naturgesetze geführt werden können.

Ein sowohl für den Mathematikunterricht als auch für den Physikunterricht besonders wichtiger Begriff ist der der *Proportionalität.* Unser gültiger Lehrplan gibt uns die Möglichkeit, diesen Begriff seiner Bedeutung entsprechend zu behandeln. Der hier vorliegende methodische Beitrag soll dem Lehrer dabei helfen, er ist also für den Lehrer, nicht für die Hand des Schülers bestimmt.

Nach einem einleitenden Kapitel, das auf die Bedeutung der Lehre von den Proportionen und von der Proportionalität hinweist, werden im 2. und 3. Kapitel die mathematischen Sachverhalte und ihre Anwendungen ohne Rücksicht auf unterrichtsmethodische Belange zusammengestellt. Dabei werden auch Beispiele, die über den Rahmen unseres gegenwärtigen Lehrplans hinausgehen, besprochen. Der methodische Teil beginnt mit dem 4. Kapitel. Diese Darstellungsform wurde gewählt, weil der Lehrer, um seinen Mathematikunterricht wissenschaftlich einwandfrei aufbauen zu können, die Sachverhalte unabhängig von schulischen Belangen kennenlernen und daraus Schlußfolgerungen für den Unterricht ziehen sollte. Nur dann wird er den Schulstoff vorurteilslos prüfen, die fachlichen und erzieherischen Schwerpunkte erkennen und das betreffende Unterrichtsgebiet dementsprechend gestalten.

1. Bedeutung der Proportionalität, des Verhältnisses und der Proportionen für die Erkenntnis von Natur und Gesellschaft und für das tägliche Leben

Bei der Erkenntnis von Gesetzmäßigkeiten, die in der Natur und im gesellschaftlichen Leben bestehen, und bei der Formulierung der entsprechenden Gesetze spielt die *Proportionalität* eine wichtige Rolle.

Am häufigsten bedienen sich die Physik und die Chemie des Begriffs der Proportionalität. Folgende Beispiele sollen dies zeigen: Bei der gleichförmigen Bewegung ist der zurückgelegte Weg der dazu benötigten Zeit proportional. Wird ein Stab oder Draht in axialer Richtung gedehnt, so ist in einem bestimmten Bereich (bis zur Proportionalitätsgrenze) die Längenzunahme proportional der dehnenden Kraft. Beim Erwärmen verschiedener Körper aus gleichem Material um einen bestimmten Temperaturbetrag sind die dazu notwendigen Wärmemengen den Massen der Körper proportional. Beim ebenen Pendel ist die Schwingungsdauer der Quadratwurzel aus der Pendellänge proportional. Bei idealen Gasen ist bei konstantem Volumen und konstanter Temperatur der Druck proportional der Gasdichte. Die Reaktionsgeschwindigkeit eines chemischen Prozesses ist der Zahl der Zusammenstöße der reagierenden Moleküle proportional.

Aber auch in der politischen Ökonomie spielte und spielt der Begriff der Proportionalität eine große Rolle. So nahmen Adam Smith und David Ricardo[1] irrtümlich an, daß die Nachfrage nach Arbeitskräften proportional mit der Produktion wachse. In Wirklichkeit verdrängt die kapitalistische Akkumulation den Arbeiter durch die Maschine. Dagegen gilt in der politischen Ökonomie des Sozialismus ein Gesetz von fundamentaler Bedeutung, das eine Proportionalität aussagt, das Gesetz von der planmäßigen und proportionalen Entwicklung der Volkswirtschaft. In ihm wird festgestellt, daß ein normales Funktionieren der sozialistischen Wirtschaft davon abhängt, daß zwischen ihren einzelnen Zweigen bestimmte Proportionen bestehen, die planmäßig hergestellt und eingehalten werden müssen. Allerdings werden sich diese Proportionen mit der Zeit verändern, aber doch so, daß in jedem Zeitpunkt das Gesetz gilt. So muß sich die Konsumtionsmittelindustrie eines Landes proportional zu seiner Produktionsmittelindustrie entwickeln. Dies gilt auch für die einzelnen Produktionszweige: Ein starkes Anwachsen der Rohstoffindustrie zum Beispiel muß eine proportionale Entwicklung aller anderen Produktionszweige nach sich ziehen.

Gesetze der Proportionalität wirken in allen Bereichen des wirtschaftlichen Lebens. So müssen zwischen Arbeitslohn und Arbeitsproduktivität, zwischen dem Gesamteinkommen der Bevölkerung und der produzierten Warenmenge usw. bestimmte Proportionen gewahrt werden. Innerhalb des gesamten sozia-

[1] Smith, englischer Staatswirtschaftslehrer und Begründer einer neueren Nationalökonomie, 1723–1790. Ricardo, englischer Nationalökonom, 1778–1823, dessen Wertlehre Karl Marx wesentliche Anregungen gab.

listischen Weltsystems muß die Volkswirtschaft jedes einzelnen Landes nach dem Gesetz von der planmäßigen proportionalen Entwicklung auf die Entwicklung der Volkswirtschaft aller anderen sozialistischen Länder abgestimmt werden. Wenn also in einem sozialistischen Land eine spezielle Industrie stärker entwickelt wird (zum Beispiel die chemische Industrie in der DDR), so muß dies über die Landesgrenzen hinweg planmäßig zu einer proportionalen Entwicklung der gesamten Volkswirtschaft auch in den anderen sozialistischen Ländern führen.

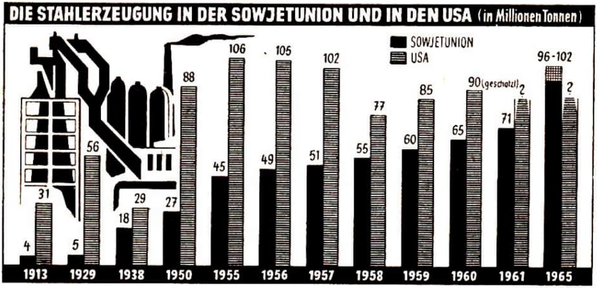

Abb. 1

Auch in der Statistik wird der Begriff der Proportionalität viel verwendet. Das obenstehende Schaubild (Abb. 1), das die Stahlerzeugung in der Sowjetunion und in den USA in einzelnen Jahren gegenüberstellt, veranschaulicht die einzelnen Zahlen durch Rechteckstreifen von gleicher Breite, deren Höhen diesen Zahlen proportional sind. Auch bei anderen Formen graphischer Darstellungen, gleich ob dabei Kreissektoren oder Strecken zur Veranschaulichung benutzt werden, liegt meist die Proportionalität zugrunde.

In der Technik und im täglichen Leben findet die Proportionalität gleichfalls viele Anwendungen: Beim Bohren ist die Schnittgeschwindigkeit dem Durchmesser des Bohrers und seiner Drehzahl proportional. Maßstäbliche Vergrößerungen und Verkleinerungen stützen sich auf die Proportionalität. Daher gehört sie zu den Grundlagen des technischen Zeichnens und wird bei Entwürfen und Modellen in der Bau- und Möbelindustrie gebraucht, aber auch bei bildlichen Wiedergaben von Gegenständen aus der Biologie, der Geographie und aus anderen Gebieten. Die auf Proportionalität gestützte dreidimensionale Verkleinerung findet im Schiff- und Flugzeugbau eine bedeutsame Anwendung: Reynolds hat 1883 gezeigt, daß die Ergebnisse von Versuchen im Windkanal mit verkleinerten Modellen unter gewissen Bedingungen auf reale Verhältnisse übertragen werden können.

Auch künstlerische Wiedergaben stützen sich oft auf die Proportionalität.

Wie tief vorwissenschaftliche Vorstellungen von proportionalem Wachsen oder von der Proportionalität zwischen Ursache und Wirkung in unserem Denken verankert sind und wieweit sie uns bei der Erfassung der Realität und bei unserem Handeln leiten, läßt sich schwer feststellen. Jedenfalls deuten Schülerfehler auf eine Vorliebe für den Proportionalansatz hin, da er oft auch dort benutzt wird, wo er nicht amPlatze ist.

Proportionalität wird sprachlich in verschiedener Weise ausgedrückt: „Eine Größe hängt proportional von einer anderen ab"; „... nimmt proportional mit einer anderen zu (ab)"; „... wächst (nimmt ab) im gleichen Maße wie ..."; „... im gleichen Verhältnis wie ..."; „das Verhältnis zwischen ... ist eine feste Zahl".

Sehr häufig tritt in den Natur- und Gesellschaftswissenschaften, in der Technik, in der Wirtschaft und im täglichen Leben auch der Begriff der *umgekehrten Proportionalität* auf. Dies sollen folgende Beispiele zeigen: Die Längenänderungen, die gleich lange Drähte aus gleichem Material durch die gleiche Kraft erfahren, sind in bestimmten Bereichen den Querschnitten der Drähte umgekehrt proportional. Die Kraft, mit der sich zwei ungleichnamig elektrisch geladene Kugeln anziehen, ist dem Quadrat des Abstandes ihrer Mittelpunkte umgekehrt proportional. Haben Rechtecke mit verschiedener Länge und Breite gleichen Flächeninhalt, so sind die Breiten den Längen umgekehrt proportional. Haben bei einem Zahnradgetriebe zwei Zahnräder verschiedene Durchmesser, so verhalten sich die Drehzahlen umgekehrt wie die Durchmesser und auch umgekehrt wie die Anzahl der Zähne. Soll eine bestimmte Materialmenge durch Lastkraftwagen abtransportiert werden, so steht die Anzahl der erforderlichen Wagen im umgekehrten Verhältnis zum Fassungsvermögen der Wagen.

Auch hier werden verschiedene Redewendungen benutzt. Neben den oben gebrauchten findet man folgende Ausdrücke: „... umgekehrt proportional zu ... wachsen (oder abnehmen)"; „umgekehrt proportional abhängen von ..."; „sich im umgekehrten Verhältnis ändern wie ...".

Die angeführten Beispiele sollten nur einen vorläufigen Eindruck, kein vollständiges Bild von der Bedeutung der Proportionalität geben. In vollem Umfang kann die Wichtigkeit dieses Begriffs erst beim systematischen Ordnen der Anwendungen erfaßt werden. Das setzt aber verschiedene Begriffserläuterungen voraus, die in Kapitel 2 gegeben werden.

In enger Verbindung mit dem Begriff der Proportionalität steht der Begriff *Verhältnis*, der bereits oben verschiedentlich auftauchte. Schon für sich betrachtet, stellt er ein wichtiges Mittel zum Vergleichen und Messen verschiedener Größen dar, dessen sich auch die Gesellschaftswissenschaften und die Publizistik gern bedienen. So lesen wir, daß sich die Mengen des in der Sowjetunion in den Vergleichsjahren 1960 und 1953 geernteten Getreides verhalten wie 8 zu 5. Die Produktion von Zement in der Rumänischen Volksrepublik wird nach den Kennziffern des Sechsjahrplans bis zum Jahre 1965 so weit gesteigert sein, daß sie sich zu der Produktion von 1960 verhält wie 2,3 zu 1. Auch in der Chemie wird der Verhältnisbegriff häufig benutzt: Chemische Elemente verbinden sich nach festen Gewichtsverhältnissen. Verbindet sich ein Element A in mehr als einem Verhältnis mit einem Element B, so stehen die Gewichtsmengen von B, die sich mit der gleichen Gewichtsmenge (d. h. mit den gleichen Massen) von A verbinden, im Verhältnis kleiner ganzer Zahlen. Das sogenannte Molekulargewicht eines Stoffes ist eine Verhältniszahl, bezogen auf Sauerstoff gleich 16.

Daß eine Verhältnisbildung vorliegt, tritt nicht immer deutlich in Erscheinung. Wenn es zum Beispiel heißt, daß sich in der Volksrepublik China die Kohleproduktion im Jahre 1957 gegenüber dem Jahre 1949 vervierfacht hat, so liegt das Verhältnis 4 zu 1 vor. Überall dort, wo gesagt wird, daß eine Größe sich vervielfacht oder auf einen Bruchteil reduziert, ist der Sachverhalt auch durch ein Verhältnis ausdrückbar.

In den oben angeführten Beispielen hatten die Größen, die ins Verhältnis gesetzt wurden, gleiche Benennung. Vielfach treten aber auch Verhältnisbildungen zwischen Größen mit verschiedener Benennung auf. So wird in der Geographie von dem Verhältnis der Einwohnerzahl eines Landes zu der bewohnten Fläche gesprochen, in der Wirtschaft von dem Verhältnis der Produktion an Milch zu der entsprechenden landwirtschaftlichen Nutzfläche, von dem Verhältnis des Fleischverbrauchs zur Bevölkerungszahl usw. Überall, wo von einem Pro-Hektar-Ertrag, von einem Pro-Kopf-Verbrauch oder dergleichen gesprochen wird, liegt eine solche Verhältnisbildung zugrunde.

Von großer Bedeutung für die Praxis sind *Proportionen,* das heißt Gleichungen zwischen Verhältnissen. Sie werden vielfach zu Berechnungen gebraucht und machen die früher in der Schule betriebene Dreisatzrechnung überflüssig.

Überall, wo Proportionalität vorliegt, können mit Hilfe von Proportionen aus gegebenen Zahlen andere errechnet werden. In der Chemie ist das zum Beispiel bei stöchiometrischen Messungen der Fall. Proportionen werden in der verschiedensten Weise verwendet, je nachdem welchen Charakter die Gleichung zwischen den beiden Verhältnissen trägt. Auch darauf kann erst im nächsten Abschnitt eingegangen werden.

In Technik, Wissenschaft, Wirtschaft und im täglichen Leben findet die *Prozentrechnung*, die sich, wie später gezeigt wird, auf eine ganz bestimmte Proportion stützt, breite Anwendung. Sie dient dem Vergleichen und Messen von Verhältnissen. Jeder Wirtschaftsbericht enthält eine Fülle von Anwendungen der Prozentrechnung, zum Beispiel: Rund 88 Prozent des gesamten in unserer Republik im Jahre 1960 verbrauchten Zements und rund 10 Prozent des verarbeiteten Walzstahls sind für Neubauwohnungen zur Verfügung gestellt worden. 80 Prozent der vom VEB Carl Zeiss Jena hergestellten Hauptgeräte tragen das höchste Gütezeichen der Deutschen Demokratischen Republik. Die Miete für Geschäftsräume in Westberlin ist am 1. März 1961 bis zu 150 Prozent erhöht worden. In den einzelnen Wissenschaften wird der Prozentbegriff zur Präzisierung von Verhältnissen verwendet: Die Aufgliederung der Bevölkerung in bestimmte Gruppen, etwa in Altersklassen, wird in Prozenten ausgedrückt; Stähle werden durch den prozentualen Anteil von Kohlenstoff, Nickel, Chrom, Wolfram usw. charakterisiert; die Feuchtigkeit der Luft wird in Prozenten der Sättigungsfeuchtigkeit gemessen. Im umseitigen Schaubild[3] aus dem „Neuen Deutschland" vom 27. Januar 1961 (Abb. 2) werden die prozentualen Anteile des sozialistischen Weltsystems an der Weltproduktion in den Jahren 1929 und 1959 durch Rechtecke dargestellt. Weitere Anwendungen der Prozentrechnung liefert die Tagespresse in reichlichem Maße.

[3] Das Schaubild weist einige Mängel auf, die auf Seite 63 erörtert werden.

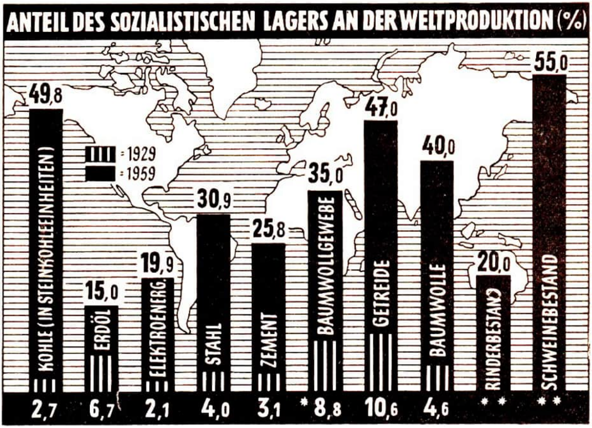

Abb. 2

Diese Beispiele zeigen zur Genüge die Bedeutung der Begriffe Proportionalität, Verhältnis, Proportion, Prozent für das tägliche Leben, für die Wirtschaft, die Technik und die Wissenschaft. Damit ist einleitend das Gebiet umrissen, das in dieser Schrift von verschiedenen Seiten her untersucht werden soll, um seine unterrichtliche Behandlung erfolgreicher zu gestalten und unsere Schüler besser für die Vollendung des Aufbaus des Sozialismus auszurüsten.

2. Mathematische Sachverhalte beim Verhältnisbegriff, bei Proportionen und bei der Proportionalität

Jetzt sollen die Begriffe Proportionalität, umgekehrte Proportionalität, Verhältnis, Proportion zunächst in mathematischer Beziehung näher untersucht werden.[4] Ohne damit eine Reihenfolge der unterrichtlichen Behandlung festzulegen, sei mit der mathematischen Klärung des *Verhältnisbegriffs* begonnen.

Der mathematische Ausdruck für das Verhältnis zweier Zahlen ist ein *Quotient.* Dieser kann mit Hilfe des Doppelpunktes oder des Bruchstrichs (als Divisionszeichen) geschrieben werden. Bei Verhältnissen findet sich meist der Doppelpunkt.

Das Verhältnis dient, wie bereits gesagt, dem Vergleich zweier Größen. Die verglichenen Zahlen heißen „Glieder" des Verhältnisses. Wenn zum Beispiel bekanntgegeben wird, daß die Jahresproduktion von Zellulose und Halbzellulose in der Volksrepublik Bulgarien von 18000 t im Jahre 1959 auf etwa 135000 t im Jahre 1965 steigen soll, so kann einmal die Produktionssteigerung durch Bildung der Differenz angegeben werden: Die Produktion wird um 135000 t — 18000 t, also um 117000 t, steigen. Wirkungsvoller wird das Wachsen aber durch die Verhältnisbildung ausgedrückt: Die Produktion im Jahre 1965 soll sich zur Produktion im Jahre 1959 verhalten wie 135000 zu 18000, kurz geschrieben:

$$\text{Produktion}_{1965} : \text{Produktion}_{1959} = 135000 : 18000.$$[5]

Bei Angabe dieses Verhältnisses brauchen aber die verglichenen Zahlen nicht in Erscheinung zu treten. So hätte die Steigerung der Produktion auch durch das Verhältnis 15:2 beschrieben werden können, denn 135000:18000 und 15:2 stellen gleiche Quotienten dar. Da 15:2 angenähert 8 ist, wird daraus ersichtlich, daß sich die Produktion nahezu verachtfachen soll. Man kann Verhältnisse also wie Brüche kürzen und erweitern. So kann das auf Seite 8 des ersten Kapitels genannte Verhältnis 2,3:1 auch als 23:10 geschrieben werden.

Bisweilen wird der Betrag, um den eine Größe wächst, also die Differenz zwischen End- und Anfangswert, in Bruchteilen des ursprünglichen Wertes angegeben; dann kann das Verhältnis des Endwertes zum Anfangswert leicht berechnet werden. Zum Beispiel erfuhren wir aus der Presse, daß die Getreideproduktion in der RSFSR, der größten Republik der Sowjetunion, im Jahre 1961 um etwa ein Siebentel gegenüber 1960 gesteigert werden sollte. Führen wir zur Abkürzung den mit einem Index versehenen Buchstaben E für den Ernte-

[4] Bei allen Ausführungen dieses Kapitels sollen nur reelle, von Null verschiedene Zahlen zugrunde gelegt werden.

[5] Eigentlich liegt hier schon eine Proportion vor, wenn auch keine mit Zahlenverhältnissen. Mit Rücksicht auf den Schulgebrauch soll aber dabei nur das Verhältnis beachtet werden.

ertrag ein und drücken wir den Ertrag von 1961 in Bruchteilen des Ertrages von 1960 aus, so erhalten wir:

$$E_{1961} = E_{1960} + \frac{1}{7} \cdot E_{1960} = \frac{8}{7} E_{1960};$$

$$E_{1961} : E_{1960} = 8 : 7.$$

Der Ernteertrag von 1961 wird sich also zum Ernteertrag von 1960 verhalten wie 8:7.

Von mathematischer Seite gesehen, ist es gleichgültig, ob gleich oder ungleich benannte Zahlen ins Verhältnis gesetzt werden. Betrachten wir beispielsweise das Verhältnis der Einwohnerzahl N der Volksrepublik China zur Zahl F der Quadratkilometer ihrer Bodenfläche. Auf rund 9700000 km² wohnen etwa 600000000 Chinesen. Also ist:

$$N:F = 600000000 : 9700000 \text{ (Menschen je km}^2\text{)}.$$

Es ist zu beachten, daß in der Mathematik von allen substantiellen Besonderheiten abstrahiert wird. Daher sind bei den Gliedern eines Verhältnisses die Benennungen wegzulassen, sofern nicht die Belange eines bestimmten Fachs, etwa der Physik, eine besondere Form wünschenswert erscheinen lassen. Jedenfalls sollte eine Schreibweise wie:

$$600000000 \text{ Menschen} : 9700000 \text{ km}^2$$

zugunsten der oben gewählten Form vermieden werden.

Bisher kamen als Verhältnisglieder nur ganze oder gebrochene rationale Zahlen vor. Bilden wir aber in der Kreislehre das Verhältnis von Kreisumfang zu Durchmesser, das heißt, setzen wir die zugehörigen Maßzahlen ins Verhältnis, so tritt die irrationale Zahl π auf. Wir fragen daher jetzt nach dem Zahlcharakter des Verhältnisses a:b in den verschiedenen möglichen Fällen. Es bestehen nach Fußnote [4] von S. 12 folgende Möglichkeiten:

1. a und b sind beide rationale Zahlen,
2. a und b sind beide irrationale Zahlen,
3. eines der beiden Glieder ist eine rationale, das andere eine irrationale Zahl.

Zu 1: Sind a und b rationale Zahlen, so ist ihr Quotient wieder eine rationale Zahl. Sind a und b in Form von Brüchen gegeben, so kann der Quotient nach den Regeln der Bruchrechnung wieder als Bruch dargestellt werden. Beispielsweise betrachten wir einen Produktionsvorgang, der bisher $1\frac{3}{4}$ Stunden beanspruchte, aber nach Einführung einer Verbesserung nur noch $1\frac{1}{2}$ Stunden dauert. Die Zeiten verhalten sich wie $1\frac{3}{4} : 1\frac{1}{2} = \frac{7}{4} : \frac{3}{2} = \frac{7}{4} : \frac{6}{4} = 7 : 6$. Speziell kann der Quotient eine ganze Zahl sein, dann nämlich, wenn der Divisor ein Teiler des Dividenden ist, zum Beispiel in $\frac{12}{5} : \frac{3}{5} = 4 : 1$. Es kann aber auch bei der Division ein endlicher oder unendlicher Dezimalbruch entstehen; so führt bei dem zweiten oben stehenden Beispiel die Division auf $N : F = 61{,}8659\ldots$ Bei Fortsetzung der Division muß früher oder später eine Periode erscheinen; denn ein unendlicher Dezimalbruch ist dann und nur dann eine rationale Zahl, wenn er periodisch ist.[6] In dem vorliegenden Fall wäre es jedoch sinnlos, so lange weiterzurechnen, bis die Periode erscheint.

Zu 2: Es seien jetzt sowohl a als auch b irrational.

Eine irrationale Zahl kann nicht als Quotient zweier ganzer rationaler Zahlen dargestellt werden.[7] Dennoch kann der Quotient aus zwei irrationalen Zahlen eine rationale Zahl sein. Zum Beispiel ist π eine irrationale Zahl[8]. Sämtliche Vielfachen von π sind ebenfalls irrationale Zahlen. Wird das Verhältnis aus dem Umfang eines Kreises mit dem Radius 1 cm und eines Halbkreisbogens des gleichen Kreises gebildet, so ergibt sich als Quotient der beiden irrationalen Maßzahlen $2\pi \cdot 1$ und $\pi \cdot 1$ die Zahl 2, also eine rationale Zahl.

Das Verhältnis von zwei irrationalen Zahlen kann aber auch eine irrationale Zahl sein. So ist das Verhältnis der Maßzahlen von Umfang und Durchmesser für jeden Kreis π, also irrational. Wird $\sqrt{2}$ als Kreisradius gewählt, so sind in dem genannten Verhältnis die Zahlen in beiden Gliedern ($2\pi \cdot \sqrt{2}$ und $2 \cdot \sqrt{2}$) ebenso wie der Quotient (π) irrational. Ebenso sind Verhältnisse wie $\sqrt[3]{7} : \sqrt{10}$ irrational, das Verhältnis $\sqrt[3]{56} : \sqrt[3]{7}$ ist aber wieder rational wegen
$\sqrt[3]{56} : \sqrt[3]{7} = (\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{7}) : \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{8} = 2.$

Zu 3: Es sei a rational, aber b gleich einer irrationalen Zahl β.

Jetzt ist der Quotient stets eine irrationale Zahl. Wäre nämlich der Quotient $a : \beta$ rational, so könnte er als Quotient zweier ganzer rationaler Zahlen p und q dargestellt werden:

$$a : \beta = \frac{p}{q}; \quad \beta = \frac{a \cdot q}{p},$$

das heißt, β wäre entgegen der Voraussetzung eine rationale Zahl. Es ist klar, daß auch $\beta : a$ nicht rational sein kann.

Eine nette Illustration des hier vorliegenden Sachverhalts liefert das folgende mathematische Scherzgedicht[9], das das „Verhältnis" einer rationalen Zahl zu einer irrationalen behandelt:

[6] Vgl. etwa Lemon-Schoeneberg: Vom periodischen Dezimalbruch zur Zahlentheorie. Teubner, Leipzig 1952.

[7] Vgl.: Rechnen, Messen, Konstruieren, achtes Schuljahr. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1959, S. 151 ff.,
und: Mathematik, Lehrbuch für die neunte Klasse der Oberschule. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1959, S. 104 ff.

[8] Vgl.: Rechnen, Messen, Konstruieren, siebentes Schuljahr. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1959, S. 162 ff.

[9] Verfasser ist Hubert Cremer. Erschienen ist das hier aus dem Gedächtnis wiedergegebene Gedicht in der Sammlung seiner Gedichte „Der Häufungspunkt".

Die Zwei und ihr Logarithmus,
die liebten einander gar sehr.
Ein rationales Verhältnis,
das war ihr ganzer Begehr.

Sie kamen zum strengen Gelehrten.
Der sprach kategorisch: „Nein!
Ein rationales Verhältnis
kann zwischen euch nimmermehr sein.

Denn du bist solch Transzendenter
vom Zahlenproletariat[10];
und du bist als einzige gerade
die erste vom Primzahlenstaat."

Sie rang voll Verzweiflung die Hände.
Doch er erwiderte schnell:
„Will's rational auch nicht gehen,
so geht es doch sicher *reell!*"

Und gibt der errötenden Schönen
geschwinde den Hochzeitskuß.
Und das ist der kurzen Geschichte
nicht ganz moralischer Schluß.

Als nächster Begriff soll die *Proportion* in mathematischer Beziehung untersucht werden. Wie oben schon erwähnt wurde, ist die Proportion eine Gleichung zwischen zwei Verhältnissen; $a : b = c : d$. Die Zahlen a, b, c, d heißen in dieser Reihenfolge das 1., 2., 3., 4. Glied der Proportion, a und b werden als Vorderglieder, c und d als Hinterglieder, a und d als Außenglieder, b und c als Innenglieder der Proportion bezeichnet. Durch Multiplikation der Proportion mit $b \cdot d$ ergibt sich die Produktgleichung $a \cdot d = c \cdot b$.[11] Umgekehrt kann jede Gleichung der Form $u \cdot z = v \cdot w$ auf mehrere Arten in eine Proportion umgewandelt werden:
$u : v = w : z$ oder $u : w = v : z$ oder $v : u = z : w$ oder $w : u = z : v$.

Dazu kommen die vier Proportionen, die aus diesen durch Vertauschung der Seiten entstehen.

Da eine Proportion zugleich mit ihrer Produktgleichung richtig oder falsch ist, kann die Gültigkeit einer Proportion an Hand der Produktgleichung kontrolliert werden.

Wer zum Beispiel bei der Proportion $4 : 7 = 68 : 119$ nicht auf der rechten Seite die Zahl 17 als gemeinsamen Teiler erkennt, gelangt sicher über die Produktgleichung zur Prüfung der Richtigkeit der Proportion.

[10] Der Logarithmus von 2 ist eine transzendente Zahl. Das Wort „Zahlenproletariat" ist eine Anspielung darauf, daß es im mengentheoretischen Sinn bedeutend mehr transzendente als nichttranszendente reelle Zahlen gibt. Alle transzendenten Zahlen sind irrational. Näheres vgl. Perron: Irrationalzahlen. De Gruyter, Berlin 1947, S. 170 ff.

[11] Man vermeide das an den Altwarenhandel erinnernde Wort „Produktengleichung".

Aus einer gegebenen Proportion $a : b = c : d$ können, wie oben angegeben, durch geeignete Vertauschung der Glieder sieben weitere Proportionen gebildet werden, die sämtlich dieselbe Produktgleichung haben, nämlich:

$$a : c = b : d; \quad b : a = d : c; \quad c : a = d : b; \quad c : d = a : b;$$
$$b : d = a : c; \quad d : c = b : a; \quad d : b = c : a.$$

Auf nicht so unmittelbar einsichtige Weise können aus der Proportion $a : b = c : d$ noch weitere Proportionen hergeleitet werden. Da Proportionen Gleichungen sind, kann mit ihnen in der bekannten Weise operiert werden; beispielsweise kann auf beiden Seiten der Gleichung 1 addiert werden:

$$a : b = c : d; \qquad | + 1$$

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1;$$

$$\frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d};$$

oder:

$$(a + b) \cdot d = (c + d) \cdot b\,.$$

Entsprechend gelangen wir durch Subtraktion von 1 in $a : b = c : d$ zu der Proportion:

$$(a - b) : b = (c - d) : d\,.$$

Dividieren wir die beiden letzten Gleichungen durcheinander, so entsteht wieder eine neue Proportion:

$$(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d)\,,$$

falls wir voraussetzen, daß bei der Subtraktion keine Nullen entstanden waren. Die Herleitung dieser Proportionen aus der Proportion $a : b = c : d$ wird als „korrespondierende Addition" beziehungsweise „korrespondierende Subtraktion" bezeichnet.[12] Jede der neu gewonnenen Proportionen läßt die obengenannten sieben Vertauschungen zu. In vielen Fällen erreicht man dadurch Erleichterungen beim Errechnen einer in einer Proportion enthaltenen Unbekannten.

Wie oben erwähnt, ist eine Proportion eine Gleichung. Nun kann eine Gleichung zu drei in logischer und mathematischer Beziehung völlig verschiedenen Kategorien gehören. Sie kann nämlich

1. eine Identität,
2. eine Bestimmungsgleichung,
3. eine Funktionsgleichung

sein. Dies gilt auch für Proportionen.

[12] Eine diesbezügliche Anwendung auf Proportionen an Vieleckumfängen findet man in dem Methodischen Beitrag Nr. 1 — „Aufbau des Planimetrieunterrichts". Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1960, S. 38.

1. Eine *Identität* kann numerischer Art sein, etwa die Gleichung $3 + 4 = 7$. Eine zu dieser Kategorie gehörende Proportion ist zum Beispiel $2 : 3 = 6 : 9$. Proportionen dieser Art bringen nur das Kürzen oder Erweitern von Verhältnissen zum Ausdruck.

Eine Identität muß aber nicht an bestimmte Zahlen gebunden, sondern kann allgemeingültig sein wie die bekannten binomischen Formeln, beispielsweise $(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$. Auch solche Identitäten können bei Proportionen auftreten. So ist $a : b = ka : kb$ eine für alle a und alle $b \neq 0$, $k \neq 0$ richtige, also allgemeingültige Proportion.

2. Eine *Bestimmungsgleichung mit einer Unbekannten x* ist eine Aussageform mit der Variablen x. Die Aussageform geht durch Einsetzen gewisser Werte des Grundbereichs für die Variable in eine richtige Aussage über. Das *Lösen der Bestimmungsgleichung* bedeutet die Bestimmung der Lösungsmenge, also einer Teilmenge des Grundbereichs. Bei linearen Gleichungen enthält sie in der Regel nur ein einziges Element. *Bestimmungsproportionen* sind für Berechnungen sehr wichtig und nehmen in den meisten Lehrbüchern für den Mathematikunterricht einen breiten Raum ein. Jede Dreisatzaufgabe, gleich ob mit direktem oder indirektem Verhältnis, kann durch eine Bestimmungsproportion gelöst werden. Zum Beispiel heiße die Aufgabe:

30 kg Edelobst kosten 60 DM. Wieviel kosten 20 kg?

Die Preise verhalten sich wie die Obstmengen:

$$x : 60 = 20 : 30.$$

Die Ausrechnung liefert:

$$x : 60 = 20 : 30; \qquad | \cdot 60$$
$$x = 40.$$

20 kg Edelobst kosten 40 DM.

Es sei noch ein Beispiel mit umgekehrtem Verhältnis hinzugefügt:

20 Arbeiter brauchen für eine bestimmte Ausschachtung 4 Stunden. Wie lange brauchen 23 Arbeiter?

Die Zahl der Stunden ist der Zahl der Arbeiter umgekehrt proportional.

$$x : 4 = 20 : 23; \qquad | \cdot 4$$
$$x = \frac{20 \cdot 4}{23};$$
$$x = \frac{80}{23};$$
$$x \approx 3{,}5\,.$$

23 Arbeiter brauchen für die Ausschachtung nur etwa $3\frac{1}{2}$ Stunden.

Bestimmungsproportionen können nur dann angesetzt werden, wenn entweder zwei Paare direkt proportionaler oder umgekehrt proportionaler Größen vorliegen. Bei Aufgaben dieser Art wird auch von der Bestimmung der „vierten Proportionalen" gesprochen. Damit wird ausgedrückt, daß zu drei gegebenen Zahlen diejenige vierte Zahl x bestimmt werden soll, die, mit den gegebenen in richtiger Weise verknüpft, zu einer gültigen Proportion führt. Die Stellung von x ist beliebig. Der Terminus „vierte Proportionale“ drückt also eine bestimmte Beziehung zwischen den vier Gliedern einer richtigen Proportion aus.

3. Es bleibt noch die Frage offen, ob eine Proportion auch eine *Funktionsgleichung* sein kann. Das ist der Fall, und zwar liegt hier eigentlich der in wissenschaftlicher Beziehung interessanteste und wesentlichste Fall der Lehre von den Proportionen vor, der uns zur Lehre von der Proportionalität führen wird.

Eine Funktionsgleichung drückt die eindeutige Zuordnung der Elemente einer Menge[13] W (Wertevorrat) zu den Elementen einer Menge D (Definitionsbereich) aus. Es sei x ein Element aus D, dem durch die Zuordnung f genau ein Element y aus W zugeordnet ist. Dafür ist auch folgende Schreibweise üblich: $y = f(x)$; x wird darin als unabhängige, y als abhängige Variable bezeichnet.[14] Eine Proportion, die eine Funktionsgleichung darstellt, hat entweder die Form $y : x = c : 1$ oder die Form $y : 1 = c : x$, wobei c eine von x unabhängige Konstante darstellt, während x ein Element aus dem Definitionsbereich, y das x zugeordnete Element aus dem Wertevorrat ist.

Zur Erläuterung diene das oben[15] angeführte Beispiel der Ausdehnung eines in axialer Richtung gespannten Drahtes. Die Längenzunahme, die der Draht unter dem Einfluß der Kraft x erfährt, sei mit y bezeichnet. Dann besteht die Proportion $y : x = c : 1$, wobei c eine in gewissen Grenzen von der Kraft unabhängige, für das betreffende Material typische Konstante ist. Dieser Fall wird später[16] genauer behandelt werden. Wenn die Proportion in die Form $y = c \cdot x$ gebracht wird, so gelangt die funktionale Abhängigkeit noch besser zum Ausdruck. Jedem x aus einem gewissen Definitionsbereich ist durch diese Funktionsgleichung genau ein y aus dem Wertevorrat zugeordnet, im Beispiel also eine ganz bestimmte Längenzunahme. Der Definitionsbereich ist erstens durch die sogenannte Proportionalitätsgrenze, das ist die obere Grenze für den Betrag der Kraft, bei dem noch proportionale Verlängerungen auftreten, begrenzt. Werden für die Kraft größere Werte eingesetzt, so gilt die Funktionsgleichung nicht mehr; bei weiterer Steigerung der Kraft reißt schließlich der Draht. Zweitens kommen für die Beträge der Kraft nur Zahlen, die größer oder gleich Null sind, in Frage. Der Definitionsbereich läßt sich experimentell ermitteln. Der Wertevorrat ist eine bestimmte Menge nichtnegativer Zahlen. Die durch die Proportion $y : x = c : 1$ ausgedrückte funktionale Abhängigkeit ist die der direkten Proportionalität von y zu x, auf die im folgenden Abschnitt näher eingegangen wird.

Als zweites Beispiel diene die Abhängigkeit der Längenzunahme von Drähten von ihrem Querschnitt. Anfangslänge, Material und Kraft werden konstant gehalten. Versuche zeigen, daß innerhalb gewisser Grenzen eine Verdoppelung des Querschnitts zur Halbierung der Längenzunahme, eine Halbierung des Querschnitts zur Verdoppelung der Längenzunahme usw. führt, kurz, daß die Längenzunahme umgekehrt proportional zur Veränderung des Querschnitts ist. Bezeichnen wir diese mit x, die Längenzunahme wieder mit y, so heißt in diesem Fall die Funktionsgleichung $y : 1 = c : x$, wobei jetzt c vom Querschnitt unab-

[13] Näheres über Mengen vgl.: Enzyklopädie der Elementarmathematik. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1954, Teil I, S. 65 ff.,
und Dr. Asser: Einführung in die höhere Mathematik. Pädagogische Hochschule Potsdam, Fernstudium der Oberstufenlehrer, 1955, 1. Teil, S. 1 ff.

[14] Näheres über den Funktionsbegriff vgl.: Enzyklopädie, a. a. O., S. 69 ff., und Asser, a. a. O., S. 22.

[15] Vgl. S. 6.

[16] Vgl. S. 22 ff.

hängig ist.[17] Die durch die Funktionsgleichung $y : 1 = c : x$ ausgedrückte funktionale Abhängigkeit ist die der umgekehrten Proportionalität.

Beide Fälle, die direkte und die umgekehrte Proportionalität, sollen im folgenden genauer behandelt werden.

Zunächst soll die *direkte Proportionalität* unabhängig von den bisher behandelten Begriffen des Verhältnisses und der Proportion betrachtet werden.

Die Aussage: „Eine Größe Y ist einer Größe X direkt proportional" (geschrieben $Y \sim X$), ist nur eine andere Ausdrucksweise für folgenden Sachverhalt: Jedem einzelnen Element x der Menge X entspricht genau ein Element y der Menge Y vermöge einerGleichung $y = c \cdot x$. Für die unabhängige Variable können beliebige Werte aus X eingesetzt werden. Der von x unabhängige Term c, der eventuell noch von anderen Parametern abhängen kann, wird als *Proportionalitätsfaktor* bezeichnet.

Bei der Anwendung der Proportionalität kommen folgende beide Möglichkeiten in Betracht: Die Menge X kann ein kontinuierlich zusammenhängender Bereich sein. So ist im Weg-Zeit-Gesetz $s = v \cdot t$ für die gleichförmige Bewegung die Länge Y (in der Formel s) des zurückgelegten Weges proportional zur Zeit X (in der Formel t); $Y \sim X$. Dabei können die einzelnen Zeiten x einem kontinuierlich zusammenhängenden Bereich X entnommen werden; dann gehören die zugehörigen Weglängen y einem kontinuierlich zusammenhängenden Bereich Y an.

In vielen Fällen aber, in denen von Proportionalität gesprochen wird, sind für die unabhängige Veränderliche x diskrete, das heißt einzelne isolierte Zahlen einzusetzen; oft kommen nur endlich viele in Frage. Das bedeutet, daß für die Veränderliche x nur die Gieder einer Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ einzusetzen sind. Zu jedem x_n gehört dann genau ein y_n; zwar ist dieser Fall in der zuerst angeführten Erklärung der Proportionalität einbegriffen, doch sei für ihn eine besondere Definition gegeben, da einerseits bei der Einführung des Begriffs der Proportionalität in Klasse 7 der Funktionsbegriff noch nicht zur Verfügung steht, andererseits die methodische Behandlung das mathematisch Wesentliche herausarbeiten soll.

Eine Folge $y_1, y_2, y_3, \ldots$ heißt proportional zu der Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ($y \sim x$), wenn es einen von allen x_n unabhängigen Faktor c gibt, so daß für alle n gilt:

$y_n = c \cdot x_n$. Dieser Faktor c heißt Proportionalitätsfaktor. Durch Multiplikation mit c können aus gegebenen x-Werten die zugehörigen y-Werte berechnet werden.[18]

Wenn in der Physik auf Grund von Versuchen Meßreihen aufgestellt werden, liegen stets mindestens zwei Folgen mit endlicher Gliederzahl vor. Natürlich ist dabei durchaus nicht immer die eine Folge zur anderen proportional.[19] Als Beispiel für Proportionalität bei endlicher Gliederzahl der Folgen diene erneut die Längenausdehnung eines gespannten Drahtes unter dem Einfluß einer Kraft. Die x-Folge gebe die Gewichte der angehängten Massenstücke, gemessen in kp, die y-Folge die zugehörigen Längenzunahmen, gemessen in mm, an. Innerhalb der oben bezeichneten Grenzen gilt $y \sim x$.[20]

[17] Vgl. Fußnote 16.
[18] Bei diesen Betrachtungen bedeuten die Folgenglieder x_i und y_i stets unbenannte Zahlen. Auf Benennungen soll bei den Anwendungen (S. 25 ff.) eingegangen werden.
[19] Vgl. die Beispiele von S. 50, 57 ff.
[20] Vgl. S. 17.

Kehren wir jetzt die Fragestellung in dem letzten Beispiel um: Welche Kraft muß an dem Draht wirken, damit eine bestimmte Längenzunahme hervorgerufen wird? Hier werden wir auf die *Umkehrfunktion* der vorher betrachteten Funktion geführt. Die in mm angegebene Längenzunahme stellt jetzt die unabhängige Veränderliche dar und soll mit $\overline{x}$ bezeichnet werden; die in kp gemessene Kraft wird zur abhängigen Veränderlichen und sei mit $\overline{y}$ bezeichnet. Auch jetzt liegt Proportionalität vor: $\overline{y} \sim \overline{x}$. Das ergibt sich ohne besondere Versuche aus der Gleichung $y = c \cdot x$. Der neue Proportionalitätsfaktor in der Gleichung

$\overline{y} = C \cdot \overline{x}$ hat den Wert $C = \frac{1}{c}$.

Wegen $\overline{y} = x$, $\overline{x} = y$ läßt sich also sagen: Aus $y \sim x$ folgt $x \sim y$. Der Mathematiker sagt dafür: Die Proportionalität ist *symmetrisch*.

Häufig wird noch von einer anderen Eigenschaft der Proportionalität Gebrauch gemacht, die an folgendem Beispiel erläutert werde: Ich erwarte eine Anzahl (x) von Gästen. Jedem von ihnen möchte ich eine bestimmte Menge (y) von Äpfeln anbieten, und ich überlege, wieviel Geld (z) ich für die Äpfel ausgeben muß. Es werde y in kg, z in DM angegeben. Dann ist z proportional zu y, y ist proportional zu x, kurz geschrieben: $z = c_1y$, $y = c_2x$ also $z = c_1c_2x = cx$; das heißt, das für die Äpfel aufzuwendende Geld ist proportional zur Anzahl der Gäste. Allgemein gilt: Wenn eine Größe z einer Größe y, die Größe y einer Größe x proportional ist, so ist auch die Größe z proportional zur Größe x, und der Proportionalitätsfaktor ist gleich dem Produkt der beiden gegebenen Proportionalitätsfaktoren. Diese Eigenschaft wird als *Transitivität* bezeichnet. Bei Berechnungen wird häufig von ihr Gebrauch gemacht, zum Beispiel, wenn die Kosten für den Farbanstrich einer Fläche ermittelt werden sollen: Der Preis ist der gebrauchten Farbmenge proportional, diese der Flächengröße, also ist der Preis der Flächengröße proportional.

Fügt man die hier selbstverständliche Beziehung der *Reflexivität* hinzu, daß jede Größe sich selbst proportional ist (der Proportionalitätsfaktor ist hier gleich 1), so zeigt sich, daß die Proportionalität eine sogenannte *Äquivalenzrelation* [21] ist, die für die Mengen aller Folgen erklärt ist. Als Äquivalenzrelation bezeichnet man eine für je zwei Elemente einer Menge erklärte Beziehung, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Bekannte Beispiele für Äquivalenzrelationen liefern die Kongruenz und Ähnlichkeit von Figuren, überhaupt alle sogenannten geometrischen Verwandtschaften, die Inhaltsgleichheit von ebenen Figuren, die Volumengleichheit von Körpern, die Parallelität von Geraden, die zahlentheoretische Kongruenz (das ist die Eigenschaft zweier Zahlen, den gleichen Rest bei Division durch eine bestimmte Zahl zu besitzen) und viele andere mathematische Beziehungen, vor allem natürlich die gewöhnliche Gleichheit. Jede Äquivalenzrelation führt zu einer Einteilung der Gesamtmenge in *Klassen* derart, daß jedes Element einer und nur einer Klasse angehört. Jede Klasse besteht dann aus untereinander äquivalenten Elementen der Gesamtmenge, und jedes von ihnen charakterisiert seine Klasse eindeutig. So vertritt ein bestimmtes Dreieck die ganze Klasse der zu ihm kongruenten Dreiecke. Elemente ein und derselben Klasse können also in gewisser Beziehung identifiziert werden.
Die Proportionalität bedeutet eine Klasseneinteilung sämtlicher Folgen. Will ich zum Beispiel allgemeine Eigenschaften einer Funktion untersuchen und

[21] Näheres über Äquivalenzrelationen vgl.: Enzyklopädie, a. a. O., S. 71 ff. und S. 136 ff. und Asser, a. a. O., S. 30 ff.

zeichne ich zu diesem Zweck ihr Bild in ein Koordinatensystem mit gleichmäßig unterteilten Achsen, so wird die Allgemeinheit der Untersuchung nicht beeinträchtigt dadurch, daß ich die Maßeinbeiten auf den Achsen irgendwie festlegen muß; denn alle gleichmäßigen Teilungen führen auf proportionale Folgen.

Bisher wurde nur die unmittelbare Proportionalität einer Größe zu einer anderen untersucht. Sehr häufig ist aber eine Größe proportional einer *Funktion* einer anderen Größe. Zum Beispiel finden wir im Physiklehrbuch für Klasse 10 den Satz: „Der Querschnitt F eines abgegrenzten, von einer punktförmigen Lichtquelle ausgehenden Lichtstrahlenbündels ist proportional dem Quadrat des Abstandes a von der Lichtquelle. $F \sim a^2$."[22] Bei Gewichtsberechnungen von Würfeln tritt die Proportionalität des Gewichts G zur dritten Potenz der Kantenlänge a auf, $G \sim a^3$.

Wirkt eine Kraft vom Betrag F auf einen Massenpunkt, der nur auf einer Kurve beweglich ist, und schließen Kraftrichtung und Kurve jeweils den Winkel α ein, so ist der Betrag der Kraftkomponente in Richtung des Weges $F' = F \cdot \cos\alpha$. Bei konstantem F ist also F' proportional zu $\cos\alpha$.

Machen wir uns diese Sachverhalte wieder mit Hilfe von Folgen klar. Es sei x die unabhängige Veränderliche, für die die Glieder einer Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ eingesetzt werden können. Es sei f(x) eine gegebene Funktion von x, etwa x^2 oder $\cos x$. Der Folge der x_n entspricht eine Folge $y_n = f(x_n)$, also $f(x_1), f(x_2), \ldots$ Es sei nun z wiederum eine zu y proportionale Folge. Es gibt also eine von x unabhängige Zahl c derart, daß für alle n jetzt $z_n = c \cdot f(x_n)$ ist, also $z_1 = c \cdot f(x_1)$, $z_2 = c \cdot f(x_2), \ldots$ Jetzt liegen also drei Folgen vor:

$$\begin{array}{llll}
 & x_1, & x_2, & \ldots \\
 & y_1 = f(x_1), & y_2 = f(x_2), & \ldots \\
 & z_1 = c \cdot y_1, & z_2 = c \cdot y_2, & \ldots \\
\text{oder} & z_1 = c \cdot f(x_1), & z_2 = c \cdot f(x_2), & \ldots
\end{array}$$

Für das vorhin genannte Beispiel des Würfelgewichts bedeuten in dieser Schreibweise x_n die Würfelkantenlängen, y_n die Würfelvolumen, z_n die Würfelgewichte mit c als Wichte. In solchen Fällen wollen wir von verallgemeinerter Proportionalität sprechen; denn die direkte Proportionalität ist offenbar mit der identischen Funktion $y = f(x) = x$, also $z = c \cdot x$, darin enthalten.

Von besonderer Bedeutung ist der Spezialfall, daß die Funktion durch $f(x) = \frac{1}{x}$ gegeben ist. Damit sind wir zur *umgekehrten Proportionalität* gelangt, die schon auf Seite 8 erwähnt wurde und die sich jetzt als Spezialfall der verallgemeinerten Proportionalität erweist. Wir betrachten zum Beispiel die Abhängigkeit der für eine bestimmte Arbeit nötigen Zeit z (in Stunden gemessen) von der Zahl x der Arbeiter. Innerhalb gewisser Grenzen führt Verdoppelung der Zahl der Arbeiter auf Halbierung, Verdreifachung auf Dreiteilung der Arbeitszeit usw. Kurz: Die Arbeitszeit z ist zu $\frac{1}{x}$ proportional. Die in Frage kommende Funktion

[22] Lehrbuch der Physik für die Oberschule – Zehntes Schuljahr. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1958, S. 68.

ist $f(x) = \frac{1}{x}$. Der Deutlichkeit halber seien die drei Folgen noch einmal zusammengestellt.

Anzahl der Arbeiter:	x_1,	x_2,	...
$f(x) = \frac{1}{x}$, also:	$y_1 = \frac{1}{x_1}$,	$y_2 = \frac{1}{x_2}$,	...
Arbeitszeit in Stunden:	$z_1 = c \cdot \frac{1}{x_1}$,	$z_2 = c \cdot \frac{1}{x_2}$,	...

Der Proportionalitätsfaktor c bedeutet diejenige Anzahl von Stunden, die ein einziger Arbeiter für die Arbeit benötigt. Damit ist die umgekehrte Proportionalität auf die direkte Proportionalität zum reziproken Wert der unabhängigen Veränderlichen zurückgeführt.

Häufig tritt in der Physik auch die verallgemeinerte Form der Proportionalität mit der Funktion $y = \frac{1}{x^2}$ auf.

Zum Beispiel ist beim Gravitationsgesetz und beim Coulombschen Gesetz die anziehende Kraft dem Quadrat des Abstandes der Massen beziehungsweise Ladungen umgekehrt proportional.

Wir haben uns bisher nur mit solchen Fällen beschäftigt, bei denen eine Größe zu einer einzigen anderen proportional war. Funktionen mit nur einer unabhängigen Veränderlichen sind aber in den Naturwissenschaften relativ selten. In der Regel hängt eine beobachtete Größe von mehreren unabhängig voneinander veränderlichen Größen ab. Beispielsweise wird der Ohmsche Widerstand eines Drahtes durch Länge, Querschnitt und Material bestimmt, also durch drei voneinander unabhängige Größen; die Schwingungsdauer eines Pendels hängt von der Pendellänge und von der an dem betreffenden Ort bestehenden Fallbeschleunigung ab.

An verschiedenen Stellen unserer Physikbücher finden wir Aussagen folgender Art: Die Größe y ist sowohl der Größe x' als auch der Größe x'' proportional, also ist sie auch deren Produkt $x' \cdot x''$ proportional. Zum Beispiel werden zwei Meßreihen durchgeführt, um die Abhängigkeit des Ohmschen Widerstandes R eines Drahtes von der Länge l und dem Querschnitt A festzustellen. Es zeigt sich, daß im ersten Fall Proportionalität zu l besteht, im zweiten Proportionalität zu $\frac{1}{A}$.

Daraus wird geschlossen, daß R proportional zu dem Produkt $l \cdot \frac{1}{A}$ ist; $R \sim \frac{l}{A}$.[23]

Oder: Die Arbeit des elektrischen Stromes ist proportional zur Stromstärke I, zur Spannung U und zur Zeit t, also ist sie auch dem Produkt $I \cdot U \cdot t$ proportional.[24] Das Hookesche Gesetz lautet: Die Verlängerung Δl eines Drahtes unter dem Einfluß einer Kraft F ist proportional der Ausgangslänge l, proportional zu F und umgekehrt proportional zum Querschnitt A, mithin ist Δl auch proportional zum Produkt aus l, F und $\frac{1}{A}$; $\Delta l \sim F \cdot \frac{l}{A}$.[25]

[23] Vgl.: Lehrbuch der Physik für die Oberschule – Zehntes Schuljahr. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1958, S. 139.

[24] Vgl.: Physik, ein Lehrbuch für das achte Schuljahr. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1960, S. 163 f.

[25] Vgl. S. 22.

Aussagen dieser Art enthalten ein Problem, das leicht unserer Aufmerksamkeit entgleitet: Um das Gesetz zu finden, nach dem eine Größe von mehreren anderen abhängt, untersuchen wir sie in mehreren Versuchsreihen; bei jeder setzen wir jeweils nur für eine der unabhängigen Veränderlichen Werte ein, während wir alle anderen konstant halten. Dieses Vorgehen hat sich in der Praxis bewährt und kann auch mathematisch gerechtfertigt werden.

Nehmen wir an, wir hätten bei jeder Versuchsreihe Proportionalität festgestellt. Mit welchem Recht behaupten wir nun, daß die abhängige Größe auch zu dem *Produkt* sämtlicher unabhängiger Größen proportional ist? Es könnte ja ein ganz anderes Abhängigkeitsgesetz vorliegen, etwa derart, daß die abhängige Größe proportional zur *Summe* der unabhängigen Größen ist. Im Physikunterricht wird oft über diesen Punkt als Selbstverständlichkeit hinweggegangen, obwohl die Schüler gar nicht immer von dieser Selbstverständlichkeit überzeugt sind und unter Umständen dadurch das Gefühl bekommen können, auf unsicherem Boden zu stehen. Vor dem Weiterlesen versuche der Leser vielleicht folgende Behauptung zu beweisen, ohne dabei die Hilfsmittel der Analysis zu benutzen: Wenn eine Folge y den einzelnen Folgen x', x'', x''', ... proportional ist, so ist sie ihrem Produkt proportional. Dabei ist unter dem Produkt $x' \cdot x''$ die Folge mit den Gliedern $x'_1 \cdot x_1''$, $x_2' \cdot x_2''$, $x_3' \cdot x_3''$, ... zu verstehen, analog die Produkte der anderen Folgen.

Wir wollen die Richtigkeit dieses Schlusses an Hand des zuletzt erwähnten Beispiels (Hookesches Gesetz) erläutern. Nehmen wir an, wir hätten uns durch eine Versuchsreihe vergewissert, daß Δl bei Einwirkung der konstanten Kraft F bei verschiedenen ursprünglichen Längen diesen proportional, daß andererseits Δl bei gleicher Ausgangslänge l der Größe von F proportional ist, also:

$$\Delta l \sim l, \qquad \Delta l \sim F,$$

$$\text{(I)}\quad \Delta l = c_1 \cdot l, \qquad \text{(II)}\quad \Delta l = c_2 \cdot F.$$

Wir ziehen vorläufig nur Drähte von gleichem Querschnitt in Betracht und lassen alle anderen Einflüsse, zum Beispiel die Temperatur, beiseite. Dann sind die Proportionalitätsfaktoren c_1 und c_2 keine absoluten Konstanten, sondern Funktionen von F beziehungsweise l, also $c_1 = c_1(F)$ und $c_2 = c_2(l)$. Sie erscheinen in den Gleichungen (I) und (II) nur dann als Konstanten, wenn F beziehungsweise l konstant gehalten werden. Die Längenzunahme bei einer Anfangslänge von $l = 1$ Meter soll mit $\Delta l_{(l=1)}$ bezeichnet werden. Setzen wir $l = 1$ in (I) ein, so entsteht:

$$\text{(III)}\qquad \Delta l_{(l=1)} = c_1(F).$$

Aus Gleichung (II) wird:

$$\text{(IV)}\qquad \Delta l_{(l=1)} = c_2(1) \cdot F.$$

Die rechten Seiten von (III) und (IV) sind also gleich: $c_1(F) = c_2(1) \cdot (F)$. Diesen Ausdruck setzen wir in die Gleichung $\Delta l = c_1(F) \cdot l$ ein. Dabei entsteht:

$$\Delta l = c_2(1) \cdot F \cdot l.$$

Mithin ist die Verlängerung Δl dem Produkt $F \cdot l$ proportional. Der Proportionalitätsfaktor ist nämlich von F und von l unabhängig. Wir schreiben das in der Gleichung:

$$\Delta l = c_3 \cdot F \cdot l \tag{V}$$

nieder.

Werden nun noch verschiedene Querschnitte A berücksichtigt, so muß eine entsprechende Betrachtung für $\frac{1}{A}$ durchgeführt werden, die dem Leser überlassen sei. Sie führt schließlich auf:

$$\Delta l = a \cdot \frac{F \cdot l}{A}.$$

Der Proportionalitätsfaktor a ist, wenn l in m, A in mm^2, F in kp gemessen werden, der Elastizitätskoeffizient des betreffenden Stoffes.

Der allgemeine mathematische Beweis dafür, daß aus der Proportionalität zu mehreren unabhängigen Größen die Proportionalität zum Produkt aller dieser Größen folgt, verläuft entsprechend, so daß hier auf ihn verzichtet werden kann.

Wenn also experimentell festgestellt wird, daß eine Größe y von zwei anderen Größen x' und x'' proportional abhängt, so ist sie auch deren Produkt $x' \cdot x''$ proportional. Dieser mathematische Sachverhalt berechtigt dazu, sich auf zwei Versuchsreihen zu beschränken, bei denen einmal x'' konstant gehalten und x' verändert wird, das andere Mal umgekehrt. Diese Vereinfachung gibt ein Beispiel dafür, daß allgemeingültige logisch-mathematische Schlüsse für Untersuchungen in der Praxis von großer Bedeutung sind.

Mit dieser Betrachtung sei der mathematische Teil abgeschlossen. Rückblickend stellen wir fest: Der Begriff des Verhältnisses und der der Proportionalität lassen sich unabhängig voneinander erklären. Zwar kann die Proportionalität $y \sim x$, $y = c \cdot x$ auch durch das konstante Verhältnis $y : x = c$ ausgedrückt werden. Die funktionale Zuordnung der Größen gelangt aber klarer zum Ausdruck, wenn die Funktionsgleichung in der expliziten Form $y = c \cdot x$ zugrunde gelegt wird. Eine bestimmte Reihenfolge in der unterrichtlichen Behandlung der Begriffe des Verhältnisses und der Proportionalität kann also aus dem mathematischen Sachverhalt nicht abgeleitet werden.

3. Überblick über die Anwendungen der Proportionalität, des Verhältnisbegriffs und der Proportionen

3.1. Anwendungen der Proportionalität

3.1.1. Anwendungen in der Geometrie

Zunächst soll nach Anwendungen der Proportionalität in der Mathematik gesucht werden. Es würde zu weit führen, hier auf ihre Anwendungen in der Algebra und in der Lehre von den Funktionen einzugehen, da dann fast die gesamte Theorie der linearen Funktion entwickelt werden müßte.

In der Geometrie wird die Proportionalität in der *Ähnlichkeitslehre* angewendet. Gegeben sei eine eindeutige Abbildung der Ebene auf sich, bei der Punkte in Punkte, Geraden in Geraden übergehen; liegt ein Punkt auf einer Geraden, so liegt sein Bildpunkt auf der Bildgeraden. Eine solche Abbildung (eine „Kollineation") ist speziell eine Ähnlichkeitsabbildung, wenn das Bild a′ einer Strecke a stets eine Länge l′ hat, die zur Länge l von a proportional ist, das heißt, wenn stets $l' = c \cdot l$ gilt, wobei der Proportionalitätsfaktor c eine von der Lage und von der Länge von a unabhängige, für die Abbildung charakteristische Zahl ist.[26] Der Proportionalitätsfaktor c heißt daher hier Ähnlichkeitsfaktor. Bei $|c| > 1$ entsteht Vergrößerung, bei $|c| < 1$ Verkleinerung, der spezielle Wert $|c| = 1$ bedeutet eine Kongruenzabbildung. Durch eine Ähnlichkeitsabbildung geht also jede Folge von Strecken $a_1, a_2, a_3, \ldots$ stets in eine Folge von Strecken $b_1, b_2, b_3, \ldots$ über, deren Längen zu denen der ersten Folge proportional sind. Dafür wird auch kurz gesagt, daß „die Strecken proportional" sind.

Die Streckenproportionalität stellt keineswegs einen neuen geometrischen Begriff dar, sondern ist eine Anwendung des Begriffs der Proportionalität auf gewisse Zahlen, die als Längen irgendwelchen Strecken zugeordnet sind. Die Lage der Strecken a_n spielt dabei keine Rolle. Das ist kein Widerspruch zu der Aussage des Strahlensatzes: Wird ein Strahlenbündel von Parallelen geschnitten, so sind die Streckenfolgen, die von den Parallelen und dem Scheitel auf den Strahlen erzeugt werden, proportional. Hier spielt die Lage der Strecken zwar eine Rolle, aber es wird ja nicht die Umkehrung behauptet, daß proportionale Streckenfolgen stets in der beschriebenen Art auf den Strahlen eines von Parallelen geschnittenen Bündels liegen müßten. Der Leser wähle zum Beispiel auf einer Landkarte der Deutschen Demokratischen Republik eine beliebige Streckenfolge, etwa für a_1 die Strecke Berlin–Leipzig, für a_2 die Strecke Halle–Dresden, für a_3 die Strecke Cottbus–Frankfurt, und suche die entsprechenden Strecken b_1, b_2, b_3 auf einer in einem anderen Maßstab gezeichneten Karte der Deutschen Demokratischen Republik auf. Die Streckenfolge der b_n ist der Folge der a_n proportional, ohne daß die Lage der einzelnen a_n einer Einschränkung unterworfen wird. Der Vergrößerungs- beziehungsweise Verkleinerungsfaktor wird in diesem Falle durch den Quotienten der

[26] Diese Erklärung der Ähnlichkeit stimmt überein mit der zweiten Möglichkeit der Definition, die in „Methodische Beiträge zum Unterricht im Fach Mathematik, Aufbau des Planimetrieunterrichts"; Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1960, S. 32, genannt ist.

Maßstäbe der beiden Karten bestimmt. Auf die interessanten Anwendungen des Verhältnisbegriffs bei affinen Abbildungen kann hier nicht eingegangen werden.

Ein beliebiges Polygon der Ebene geht durch eine Ähnlichkeitsabbildung in ein ähnliches über, also in ein solches, dessen Seiten zu den entsprechenden Seiten des Originalpolygons proportional und dessen Winkel den entsprechenden der Originalfigur gleich sind.[27] Bei maßstäblichen Zeichnungen von ebenen Figuren wird von diesen Sachverhalten Gebrauch gemacht. Das Seitenverhältnis ist c, das Verhältnis der Flächeninhalte c^2. Das räumliche Analogon zu der ebenen Ähnlichkeit findet im Modellbau, speziell in der Flugzeugtechnik, Anwendung.

3.1.2. Anwendungen in der Physik und der Chemie

Bevor wir uns den Anwendungen der Proportionalität in den Naturwissenschaften zuwenden, sei auf eine Schwierigkeit aufmerksam gemacht, die schon oft zu Meinungsverschiedenheiten zwischen Vertretern der Methodik des Physik- und des Mathematikunterrichts geführt hat. Wie schon auf Seite 12 gesagt wurde, rechnet der Mathematiker mit unbenannten, der Physiker aber meist mit benannten Zahlen. In der Physik haben Produkte von Maßeinheiten wie kp · m oder Quotienten wie cm · sec^{-1} eine reale Bedeutung. Wenn der Physiker von zueinander proportionalen Größen spricht, so treten also in der Regel Folgen *benannter* Zahlen auf. Der Proportionalitätsfaktor ist dann im Gegensatz zu seinem Gebrauch in der Mathematik auch eine benannte Zahl. Die unten folgenden Beispiele werden dies zeigen.

Das Auftreten der Proportionalität in der Physik ist bereits an vielen Einzelfällen gezeigt worden. Wir wollen jetzt versuchen, sie nach der Rolle, die die Proportionalität in ihnen spielt, zu ordnen.

In vielen Fällen wird ein *Naturgesetz* in Form einer Proportionalität formuliert: im Grundgesetz der Mechanik („die Kraft ist proportional der Beschleunigung"), im Gravitationsgesetz, im Hookeschen Gesetz, in den Faradayschen Gesetzen und in vielen anderen physikalischen Gesetzen werden Proportionalitäten ausgesprochen. In all diesen Fällen steht fest, was unter den in den Gesetzen auftretenden physikalischen Größen zu verstehen ist. Von ihrer Messung soll zunächst abgesehen werden. Daneben gibt es Fälle, in denen die Proportionalität zur *Definition* von physikalischen Größen herangezogen wird. So wird die gleichförmige Bewegung dadurch definiert, daß bei ihr Proportionalität zwischen der Maßzahl des zurückgelegten Weges und der Maßzahl der dazu benötigten Zeit besteht; $s \sim t$; $s = v \cdot t$. Der Proportionalitätsfaktor (Weg in der Zeiteinheit) dient dabei zur Definition der Geschwindigkeit. — Die gleichmäßig beschleunigte Bewegung wird als eine solche definiert, bei der die Geschwindigkeit proportional mit der Zeit wächst; durch den Proportionalitätsfaktor (Geschwindigkeitszuwachs in der Zeiteinheit) wird die Beschleunigung angegeben. Die symbolische Darstellung des elektrischen oder des magnetischen Feldes durch Kraftlinien stützt sich in ähnlicher Weise auf die Proportionalität: Die Dichte der Kraftlinien in einem Punkt soll der in diesem Punkt herrschenden elektrischen beziehungsweise magnetischen Feldstärke proportional sein.

[27] Die Gleichheit entsprechender Winkel bei der Ähnlichkeitsabbildung läßt sich bei der hier gewählten Definition dieser Abbildung beweisen.

Wir sehen hier schon die große Bedeutung des Proportionalitätsfaktors in der Physik. Betrachten wir die Rolle, die er im einzelnen spielt, genauer.

Oben war schon davon die Rede, daß der Proportionalitätsfaktor zur *Definition einer neuen physikalischen Größe* (Geschwindigkeit, Beschleunigung usw.) dienen kann. Dabei hatten wir die Maßeinheiten zunächst nicht beachtet. Gerade aber bei der *Festsetzung von Maßeinheiten* können Proportionalitätsfaktoren eine große Rolle spielen. Vielfach wird der Proportionalitätsfaktor selbst für deren Festsetzung verwendet. Zum Beispiel ist die bei der Elektrolyse abgeschiedene Menge M eines Stoffes nach dem Faradayschen Gesetz der Elektrolyse proportional zum Produkt aus Stromstärke I und Zeit t; $M \sim I \cdot t$; als Gleichung $M = c \cdot I \cdot t$. Der Proportionalitätsfaktor c, das elektrochemische Äquivalent des betreffenden Stoffes, ist eine Materialkonstante. Sie beträgt für Silber $1{,}118 \frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{C}}$ (Milligramm pro Coulomb). Auf Grund der Gleichung für M wurde früher die Einheit der Stromstärke, 1 Ampere, definiert als die Stärke desjenigen Stromes, der in einer Sekunde aus einer Silbernitratlösung 1,118 mg Silber ausscheidet. — Daneben wird der Proportionalitätsfaktor in anderer Weise zur Festsetzung von Einheiten herangezogen. Eine Maßeinheit, über die noch verfügt werden kann, wird auf Grund eines physikalischen Gesetzes gern so gewählt, daß der Proportionalitätsfaktor den Wert 1 erhält. Damit gewinnt das betreffende Gesetz eine besonders einfache Gestalt. Als Beispiel diene das Grundgesetz der Mechanik: Die Kraft F, die einer Masse m die Beschleunigung b erteilt, ist sowohl zu m als auch zu b proportional, also $F \sim m \cdot b$. Messen wir m in kg, b in $m \cdot sec^{-2}$ und setzen wir die Einheit der Kraft als diejenige Kraft fest, die der Masse von 1 kg die Beschleunigung von $1\ m \cdot sec^{-2}$ erteilt, so nimmt der Proportionalitätsfaktor den Wert 1 an. Diese Einheit der Kraft heißt 1 Newton. Das Grundgesetz der Mechanik lautet dann einfach: $F = m \cdot b$. Ein anderes Beispiel liefert das Ohmsche Gesetz: $I = c \cdot \frac{U}{R}$. Wird U in Volt, I in Ampere gemessen, und wird die Einheit des Widerstandes so gewählt, daß bei einer elektromotorischen Kraft von 1 Volt ein Strom von 1 Ampere fließt, so wird $c = 1$. Diese Einheit des Widerstandes heißt 1 Ohm. — Die Definition von 1 Coulomb als Einheit für die Elektrizitätsmenge, von 1 Farad als Einheit für die Kapazität eines Kondensators und manche andere Definitionen von Maßeinheiten liefern weitere Beispiele.

In vielen physikalischen Gesetzen stellt der Proportionalitätsfaktor eine *Material*konstante dar, zum Beispiel im oben erwähnten Faradayschen Gesetz, in dem er das elektrochemische Äquivalent eines Stoffes bedeutet. Auch der Proportionalitätsfaktor im Hookeschen Gesetzes erweist sich als eine Materialkonstante; er gibt den Elastizitätskoeffizienten des betreffenden Materials an.[28] Auch bei der Proportionalität von Gewicht zu Volumen und von Masse zu Volumen ist der Proportionalitätsfaktor jeweils eine Materialkonstante, nämlich die Wichte beziehungsweise die Dichte. Ebenso steht es bei der spezifischen Wärme, beim spezifischen Widerstand, bei der Dielektrizitätskonstanten und in vielen anderen Fällen. Die hier genannten Größen treten als Proportionalitätsfaktoren in einem physikalischen *Gesetz* auf. Ein für einen *Prozeß* typischer Proportionalitätsfaktor ergibt sich bei dem Gesetz: Die Reaktionsgeschwindigkeit v eines chemischen Prozesses ist proportional dem Produkt der Konzentrationen [A] und [B] der an

[28] Vgl. S. 23.

der Reaktion beteiligten Stoffe A und B; $v \sim [A] \cdot [B]$; als Gleichung $v = K \cdot [A] \cdot [B]$. Der Proportionalitätsfaktor K ist eine bei einer bestimmten Temperatur durch den Prozeß gegebene Konstante. — Ähnlich steht es bei der Kraftübertragung durch eine mechanische Maschine, etwa durch einen Flaschenzug. Wird dabei eine Kraft von der Größe F_1 umgewandelt in eine Kraft von der Größe F_2, so gilt stets $F_1 \sim F_2$, und der Proportionalitätsfaktor ist der Wirkungsgrad der Maschine, der für den Umwandlungsprozeß typisch ist.

Schließlich sind diejenigen Proportionalitätsgesetze zu nennen, bei denen der Proportionalitätsfaktor eine *universelle* Bedeutung hat. Hierher gehört das mechanische Wärmeäquivalent J. Es gibt den Proportionalitätsfaktor bei der Umrechnung der Wärmemenge Q, gemessen in Kilokalorien, in die mechanische Energie W, gemessen in Kilopondmetern, an: $W \sim Q$ oder $W = J \cdot Q$ mit $J = 427$ kpm/kcal. Ebenso steht es mit der Umrechnung von elektrischer Energie in Wärmeenergie. Als weiteres Beispiel diene das Volumen V einer beliebigen Gasmenge, die in einem festen Gefäß eingeschlossen sei. Ist n die Anzahl der in dem Gefäß enthaltenen Mole des Gases, so gilt $V \sim n$. Der Proportionalitätsfaktor ist das Molvolumen, das für alle Gase den konstanten Wert von 22,4 l hat. Ferner seien folgende universelle Konstanten genannt, die sämtlich als Proportionalitätsfaktoren in einem allgemeinen Proportionalitätsgesetz auftreten: die Lichtgeschwindigkeit, die Gravitationskonstante, die Loschmidtsche Zahl, das Plancksche Wirkungsquantum.[29]

3.2. Anwendungen des Verhältnisbegriffs

3.2.1. Anwendungen in der Mathematik

Auf interessante Ergebnisse führt die Fallunterscheidung von Seite 12f. in der Geometrie. Die beiden Glieder a und b des Verhältnisses a : b seien Streckenlängen. Fall 1 (sowohl a als auch b rational) bedeutet die „Kommensurabilität" der Strecken, das heißt, es gibt eine Strecke mit der Länge m (z. B. das „größte gemeinsame Maß der beiden Strecken"), die sich in beiden Strecken ohne Rest abtragen läßt. Denn das Verhältnis aus zwei rationalen Zahlen a und b ist wieder eine rationale Zahl, die als p : q mit ganzzahligen, teilerfremden p und q geschrieben werden kann. Wird $a = m \cdot p$, $b = m \cdot q$ gesetzt, so ist m die Länge des größten gemeinsamen Maßes. Es geht in a genau p-mal, in b genau q-mal auf. Hat zum Beispiel die Strecke AA' die Länge $a = \frac{3}{5}$ dm, BB' die Länge $b = \frac{2}{7}$ dm, so ist:

$$a : b = \frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{21}{10}; \qquad p = 21, \quad q = 10; \qquad \frac{3}{5} = m \cdot 21, \ \frac{2}{7} = m \cdot 10;$$

die Streckenlänge m beträgt also $\frac{1}{35}$ dm.

Ist aber eine der beiden Zahlen, a oder b, irrational (Fall 3 auf S. 12), so existiert kein gemeinsames Maß. Die beiden Strecken heißen dann „inkommen-

[29] Näheres vgl. im Artikel von I. Manthe und Dr. W. Karsten: Proportionalität und Proportionalitätsfaktor. In: „Mathematik und Physik in der Schule", Heft 9/1960, S. 533.

surabel".[30] Zum Beispiel läßt sich die Diagonale d des Einheitsquadrats nicht mit seiner Seite $a = 1$ messen, es gibt kein gemeinsames Maß. Gäbe es nämlich ein solches, das heißt, gäbe es eine Teilstrecke a' von a, die ohne Rest sowohl in a als auch in d abtragbar ist, $a = ma'$ und $d = na'$ (m und n ganze Zahlen), so wäre $d : a = n : m$. Nun ist aber $d : a = a\sqrt{2} : a$, mithin wäre $\sqrt{2} = n : m$. $\sqrt{2}$ ist aber eine Irrationalzahl, also nicht als Quotient zweier ganzer rationaler Zahlen darstellbar. Somit existiert kein gemeinsames Maß von a und d; a und d sind inkommensurabel.

Allgemein gilt: Zwei Strecken sind genau dann kommensurabel, wenn das Verhältnis ihrer Längen eine rationale Zahl ist.

Eine Irrationalzahl, nämlich π, ergibt sich auch als Verhältnis vom Umfang U zum Durchmesser d eines beliebigen Kreises. Also sind auch U und d inkommensurabel. Im gleichen Verhältnis $\pi : 1$ stehen übrigens auch die Fläche $F_{\bigcirc}$ eines beliebigen Kreises mit dem Radius r und die Fläche $F_{\square}$ des Quadrats über r als Seite:

$$F_{\bigcirc} : F_{\square} = \pi : 1.$$

Es existiert also kein noch so kleines Quadrat, mit dem sich sowohl $F_{\square}$ als auch $F_{\bigcirc}$ messen lassen.[31]

3.2.2. *Anwendungen außerhalb der Mathematik*

Bei allen Anwendungen des Verhältnisbegriffes auf nicht rein mathematische Sachverhalte ist darauf zu achten, ob Größen von gleicher oder ungleicher Dimension ins Verhältnis gesetzt werden. Je nachdem ist das Verhältnis eine unbenannte oder eine benannte Zahl. Der erste Fall trifft zum Beispiel beim Molekulargewicht eines Stoffes zu; es stellt die Masse eines Moleküls, bezogen auf Sauerstoff gleich 16, dar. Verhältnisse von gleich dimensionierten Größen dienen überhaupt in der Regel Größenvergleichen, während Verhältnisse von Größen verschiedener Dimensionen durch die Quotientenbildung auf neue Begriffe führen, zum Beispiel Geschwindigkeit, Wichte, Bevölkerungsdichte, Pro-Kopf-Verbrauch, Hektarertrag usw. Auf den Seiten 25f. wurde auf solche Definitionen neuer physikalischer Begriffe schon eingegangen. Dabei erschien das betreffende Verhältnis als Proportionalitätsfaktor bei einer Proportionalität. Überhaupt finden sich die meisten Anwendungen des Verhältnisbegriffs in der Physik und der Chemie bei proportionalen Folgen. Es wurde schon im Abschnitt 1 erwähnt, daß die direkte und die umgekehrte Proportionalität zweier Größen oft ausgedrückt wird durch die Aussage, daß sie „in gleichem Verhältnis" beziehungsweise „in umgekehrtem Verhältnis" stehen. Diese Verwendung des Verhältnisbegriffs bringt also nichts Neues.

[30] Über die Behandlung der Kommensurabilität im Unterricht vgl. „Planimetrie", a. a. O., S. 34 ff.

[31] π ist eine *transzendente* Zahl, das heißt, π kann nicht Lösung einer algebraischen Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

mit rationalen Zahlen a_i sein. Der Beweis dafür wurde 1882 von Lindemann erbracht. Alle transzendenten Zahlen sind irrational. Auf der Transzendenz von π beruht die Unmöglichkeit, die Kreisfläche allein mit Hilfe von Zirkel und Lineal in ein gleich großes Quadrat zu verwandeln. Näheres vgl. z. B. Beutel: Die Quadratur des Kreises. Teubner, Leipzig 1951.

Eine eingehendere Betrachtung verdient noch eine in der Praxis des täglichen Lebens häufige Anwendung des Verhältnisbegriffs. Hier wird nicht immer beachtet, daß der mathematische Ausdruck für ein Verhältnis ein Quotient ist und daß der Divisor von Null verschieden sein muß. So werden bei Fuß- und Handballspielen einfach die Anzahlen der erzielten Tore gegenübergestellt, und es wird dabei vom „Torverhältnis" gesprochen, wobei Torverhältnisse wie 2 : 0 durchaus vorkommen. Ein Verhältnis im mathematischen Sinn liegt hier nicht vor. Das zeigt sich auch darin, daß ein Torverhältnis 2 : 1 als knapper Sieg, dagegen ein Torverhältnis 4 : 2 als klarer Sieg, also als ein *anderes* Kräfteverhältnis, betrachtet wird, obwohl doch die mathematischen Verhältnisse 2 : 1 und 4 : 2 identisch sind.

3.3. Anwendungen von Proportionen

3.3.1. Anwendungen in der Mathematik

Als Rechenhilfsmittel werden häufig Bestimmungsproportionen gebraucht, zum Beispiel beim Interpolieren oder beim Aufsuchen von Nullstellen von Funktionen mittels der regula falsi. Die am häufigsten gebrauchte Anwendung von Proportionen stellt wohl die Prozentrechnung dar. Wie schon auf Seite 9 erwähnt wurde, dient die Prozentrechnung dem Vergleichen und Messen von Verhältnissen. Dabei wird eine einheitliche Meßskala für das in Frage kommende Verhältnis geschaffen, indem die Zahl 100 als Vergleichszahl zugrunde gelegt wird. Eine Größe („Prozentwert" P) wird in Hundertteilen der anderen Größe („Grundwert" G) ausgedrückt. So entsteht die Proportion:

$$P : G = p : 100 \qquad \text{oder} \qquad P : G = p\,\% \,.$$

Die Zahl p heißt „Prozentsatz". — Jeder Wirtschaftsbericht bringt eine Fülle von Anwendungen der Prozentrechnung.[32] Proportionen als Identitäten dienen nur der Vereinfachung von gegebenen Verhältnissen durch Erweitern und Kürzen.[33] Proportionen, die Funktionsgleichungen sind, drücken eine Proportionalität aus. Sie wurden in Abschnitt 2. (S. 18ff.) behandelt.

3.3.2. Anwendungen außerhalb der Mathematik

In der Physik, der Chemie und der Technik spielen Bestimmungsproportionen eine große Rolle. Es sei hier nur erinnert an die Berechnung der Wärmekapazität von Körpern, an die Reduzierung eines Gasvolumens auf Normaldruck in der Wärmelehre, an das Titrieren und Berechnen von Konzentrationen in der Chemie, an die Berechnung von Drehzahlen und Getrieben in der Technik. Aber auch im täglichen Leben und in der Wirtschaft gibt es eine Fülle von Aufgaben, die sich durch Proportionen lösen lassen. Voraussetzung dafür ist, daß entweder eine direkte Proportionalität zweier Folgen, $y \sim x$, oder eine verallgemeinerte Proportionalität, $y \sim f(x)$, vorliegt. Ein zusammengehörendes Gliederpaar der Fol-

[32] Vgl. S. 9.
[33] Vgl. S. 17.

gen, $x_n \rightarrow y_n$, wird gegeben. Zu einem weiteren x_k soll dann das zugehörige y_k bestimmt werden. Bei der Lösung der Aufgabe wird meist folgendes Schema benutzt:

$$x_n \triangleq y_n;$$
$$x_k \triangleq y_k.$$

Liegt direkte Proportionalität vor, so lautet der Ansatz:

$$y_k : y_n = x_k : x_n \qquad \text{oder} \qquad y_k : x_k = y_n : x_n,$$
$$y_k = \frac{x_k \cdot y_n}{x_n}.$$

Liegt verallgemeinerte Proportionalität vor, so ist anzusetzen:

$$y_k : y_n = f(x_k : f(x_n) \qquad \text{oder} \qquad y_k : f(x_k = y_n : f(x_n),$$
$$y_k = \frac{f(x_k) \cdot y_n}{f(x_n)}.$$

Als Beispiel sei folgende Aufgabe behandelt: Eine Saite werde durch die Kraft $F_1 = 0{,}64$ kp gespannt. Ihre Frequenz sei $n_1 = 180$ Schwingungen je Sekunde. Wie groß ist die Frequenz n_2, wenn dieselbe Saite durch die Kraft $F_2 = 0{,}81$ kp gespannt wird?

Wir setzen an:

$$n_1 \triangleq F_1;$$
$$n_2 \triangleq F_2.$$

Hier liegt verallgemeinerte Proportionalität vor. Die Frequenzen sind den Wurzeln aus den Spannungen proportional; $n \sim \sqrt{F}$. Die Proportion lautet:

$$n_2 : n_1 = \sqrt{F_2} : \sqrt{F_1} \qquad n_1 = 180 \text{ (Schw./sec)}$$

$$n_2 = \frac{n_1 \cdot \sqrt{F_2}}{\sqrt{F_1}} \qquad F_1 = 0{,}64 \text{ (kp)} \qquad F_2 = 0{,}81 \text{ (kp)}$$

$$n_2 = \frac{180 \cdot \sqrt{0{,}81}}{\sqrt{0{,}64}}$$

$$n_2 = \frac{180 \cdot 0{,}9}{0{,}8} = 202{,}5$$

$$n_2 \approx 200.$$

Bei einer Spannung von 0,81 kp macht die Saite etwa 200 Schwingungen je Sekunde.

Der bei umgekehrter Proportionalität übliche Lösungsansatz ist in dem oben angegebenen allgemeinen Ansatz enthalten: Beim Einsetzen von $\frac{1}{x}$ für $f(x)$ entsteht das bekannte Schema.

Bei all diesen Aufgaben muß vor dem Ansatz untersucht werden, ob überhaupt und in welcher Gestalt Proportionalität vorliegt. Dies unterläßt zum Beispiel R. Poßecker in einem Artikel [34], der sonst wertvolle Hinweise für den Lehrer enthält. Poßecker will darin den Inhalt des Querschnitts von ∟-Stählen durch einen Proportionalansatz ermitteln. Da aber gar keine Proportionalität — weder direkte noch verallgemeinerte und auch nicht näherungsweise — vorliegt, dürfen auch keine Proportionen aufgestellt werden. In Abschnitt 6 wird auf die hier liegenden methodischen Schwierigkeiten eingegangen werden.

[34] R. Poßecker: Mathematische Schülerübungen mit dem Klassenarbeitssatz „Querschnitte der Profilstähle". In „Mathematik und Physik in der Schule", Heft 1/1960, S. 25 f.; vgl. auch den Aufsatz des gleichen Autors: „Schülerübungen — ein Mittel zur Steigerung der Lernintensität im Mathematikunterricht". In: „Pädagogik", Heft 1/1960, in dem zwar gleichfalls lesenswerte Anregungen enthalten sind, aber auch wieder bei den Querschnittsinhalten der gleichen Profilstähle fälschlicherweise von „proportionalen Beziehungen" gesprochen wird.

4. Abgrenzung des Stoffs für die Schule: Stellung des Unterrichtsabschnitts „Proportionen“ in früheren Lehrplänen und im gültigen Lehrplan

Was muß der Schüler über Proportionen und Proportionalität wissen? Unsere zehnklassige allgemeinbildende polytechnische Oberschule hat die Aufgabe, die Schüler zu allseitig gebildeten, sozialistisch denkenden und handelnden Menschen zu erziehen, die die Grundlagen der Wissenschaften und der sozialistischen Produktion beherrschen. Das schließt ein, daß die Schüler die in Natur und Gesellschaft bestehenden Gesetzmäßigkeiten kennen und anwenden lernen. Dazu genügt es nicht, Gesetze nur in unbestimmt qualitativer Form zu erarbeiten, wie etwa: „Bei Erwärmung dehnen sich Körper aus.“ Bei der notwendigen quantitativen Fassung der Gesetze wird, wie bereits gezeigt, oftmals der Begriff der Proportionalität benutzt.

Die direkte und die verallgemeinerte Proportionalität bilden die Grundlage für viele Berechnungen, die dann nicht mehr umständlich mit Hilfe der Dreisatzrechnung ausgeführt zu werden brauchen, sondern unmittelbar durch Proportionen lösbar sind.

Dabei ist die Kenntnis des Verhältnisbegriffs erforderlich, der auch den Begriff der Proportionalität verdeutlichen kann. Proportionalität, Proportionalitätsfaktor, Verhältnisbegriff und Proportionen gehören daher zum Bildungsgut unserer Schule.

Es genügt nicht, die Proportionalität in der früher üblichen Form des direkten und umgekehrten Verhältnisses zu behandeln, sondern sie muß in der Fassung und dem Umfang bereitgestellt werden, wie sie der Physikunterricht braucht. Dabei ist, wie wir sehen werden, weniger der Gebrauch des Namens „Proportionalität“ entscheidend, als vielmehr die Einsicht, daß es sich hier um eine besondere, durchaus nicht überall bestehende Gesetzmäßigkeit handelt, die an bestimmten Merkmalen erkannt und mit der in bestimmter Weise gearbeitet wird.

Die Behandlung der Proportionalität und der Proportionen in einem besonderen Unterrichtsabschnitt könnte mit folgender Begründung abgelehnt werden: Die Proportionalität ist nur ein anderer Ausdruck dafür, daß eine Größe einer anderen mittels einer linearen Funktion $y = mx$ zugeordnet ist. Die eine Proportionalität aussprechenden Naturgesetze könnten daher als Anwendungen der linearen Funktion behandelt werden. Auch aus Gründen der Zeitersparnis sei hier für Proportionen der günstigste Platz. Dagegen ist einzuwenden, daß bei der Behandlung der linearen Funktion die Einführung des Funktionsbegriffs und die mathematische Form der linearen Funktionsgleichung im Vordergrund stehen und daß dabei, wie die Erfahrung mit früheren Lehrplänen zeigt, nicht gleichzeitig die im Physikunterricht auftretenden Ausdrücke „proportional“, „Proportionalitätsfaktor“ genügend geklärt werden können. Die Erfassung des Funktionsbegriffs, die verhältnismäßig hohe Ansprüche an das Abstraktionsvermögen stellt, wird nämlich erleichtert, wenn zuvor viel konkretes Material als Grundlage für die Abstraktionen bekannt ist. Dieses kann durch eine intensive Behandlung der Proportionalität im Unterricht geliefert werden. Auf diese Weise wird die Behandlung des Funktionsbegriffs propädeutisch vorbereitet. Zudem müßten entweder diejenigen Naturgesetze, die eine Proportionalität aussprechen, bis zur Behandlung der linearen Funktion zurückgestellt, oder, wie es bisher geschah, die Einführung der Proportionalität dem Physikunterricht überlassen werden. Dort kann die Proportionalität in mathematischer Beziehung natürlich nicht tiefgehend behandelt werden. Es zeigten sich bisher im Physikunterricht selbst noch in Klasse 10 oft Verständnisschwierigkeiten, wenn eine Proportionalität in eine Gleichung umgeformt oder wenn mit dem Proportionalitätsfaktor operiert wurde. Nun werden in unserer zehnklassigen Oberschule schon zu Beginn des Physikunterrichts der Klasse 7 die Wichte, die Ausdehnung eines Drahtes unter dem Einfluß einer Kraft, die gleichförmige Bewegung und ähnliches, wo Proportionalitäten bestehen, behandelt. Es ist daher zu fordern, daß die Schüler spätestens gleichzeitig im Mathematikunterricht diesen Begriff kennen und anwenden lernen, wie es ja nach dem jetzt gültigen Lehrplan auch geschieht. Die Behandlung des Rechnens mit Proportionen kann ebenfalls nicht bis zur Behandlung der linearen Funktion aufgeschoben werden, da viele Berechnungen aus der sozialistischen Produktion und aus dem täglichen Leben entweder die Dreisatzrechnung oder Proportionen als Lösungsweg verlangen. Es würde zu einer Isolierung unserer Schule vom Leben führen, wenn solche Aufgaben so lange aus dem Mathematikunterricht ausgeklammert werden müßten. Daß es aber besser ist, die Proportionen auf die Proportionalität aufzubauen als umgekehrt, wird später begründet werden.

Aus den Bildungszielen unserer Schule ergibt sich also die Forderung, Verhältnisbegriff, Proportionen und Proportionalität in einem besonderen Unterrichtsabschnitt spätestens in Klasse 7 zu behandeln, falls die Schüler in dieser Klasse die ersten physikalischen Gesetze kennenlernen sollen. Sie müssen insbesondere die Proportionalität erkennen und mit ihr arbeiten lernen. Dazu gehört, daß sie wissen, was ein Proportionalitätsfaktor ist, daß sie ihn aus zwei zahlenmäßig gegebenen Folgen herausfinden, ihn zur Berechnung anderer Werte verwenden und überhaupt richtig und zweckvoll mit ihm umgehen können. Zum Beispiel müssen sie in der Lage sein, eine Proportionalität mit seiner Hilfe in eine Gleichung zu verwandeln, und sie müssen später verstehen, wie er zur Definition von physikalischen Größen und zur Festsetzung von Maßeinheiten verwendet wird.[35] Dazu ist es nicht erforderlich, daß die Schüler schon in Klasse 7 den Begriff der Proportionalität in voller mathematischer Exaktheit formulieren können.[36] Insbesondere wird die verallgemeinerte Proportionalität, abgesehen von der umgekehrten Proportionalität, nicht in Klasse 7 behandelt werden können; denn hier handelt es sich um Proportionalität zu einer Funktion, der Funktionsbegriff wird aber erst in Klasse 8 eingeführt.

Die verallgemeinerte Proportionalität muß aber spätestens zu Beginn des Unterrichts in Klasse 10 erarbeitet werden, da der Physikunterricht in dieser Klasse häufig von ihr Gebrauch macht. Physik- und Mathematikunterricht müssen dabei Hand in Hand arbeiten.

[35] Vgl. S. 26.
[36] Vgl. S. 49 ff.

Bisher war von *Bildungs*zielen unserer Schule die Rede. *Erziehungs-* und Bildungsziele sind aber untrennbar miteinander verbunden. Es gehört zu den Zielen der weltanschaulichen Bildung und Erziehung, die Schüler davon zu überzeugen, daß die Gesetzmäßigkeiten in Natur und Gesellschaft erkennbar sind. Dazu ist, wie gezeigt wurde, der Begriff der Proportionalität unerläßlich. Er ermöglicht auch, wie später gezeigt wird, bei der Behandlung der Proportionen eine Kontrolle der eigenen Arbeit und kann damit zur Entwicklung des Verantwortungsgefühls beitragen. Ferner bietet der Unterrichtsabschnitt „Proportionen, Proportionalität" bei geeigneter Behandlung gute Möglichkeiten, die Schüler zu selbständigem, schöpferischem Arbeiten anzuregen.

Schließlich vermag dieses Unterrichtsgebiet durch Auswahl geeigneter Aufgaben aus dem wirtschaftlichen, kulturellen und politischen Leben wesentlich zur politisch-moralischen Bildung und Erziehung beizutragen.

Wenden wir uns der kritischen Betrachtung unserer früheren Lehrpläne und des gegenwärtig gültigen Lehrplans zu. Unser Unterrichtsabschnitt gehört zu denjenigen, die große Veränderungen im Lehrplan erfahren haben.

Gelegenheiten zur Behandlung des Verhältnisbegriffs, der Proportionalität und des Proportionalitätsfaktors bestanden in den früheren Plänen bei dem Unterrichtsgebiet Dreisatzrechnung (Schlußrechnung), das im allgemeinen in den Klassen 5, 6 und 7 lag, bei der Lehre von den Proportionen, die meist zum Lehrstoff der Klasse 8 gehörte, und bei der Lehre von den linearen Funktionen, die in der Regel in Klasse 9, eine Zeitlang auch in Klasse 8, behandelt wurde. Die Behandlung der Proportionalität wurde nirgends ausdrücklich verlangt. Nur das direkte und das umgekehrte Verhältnis wurden gelegentlich in der Schlußrechnung erwähnt. Zwar kann bei entsprechender Behandlung des „direkten oder geraden" und des „indirekten oder ungeraden Verhältnisses", wie es damals hieß, durchaus ein Verständnis für die hier bestehenden Unterschiede und eine gewisse Vorstellung von der Proportionalität von Folgen erreicht werden. Dies geschah zum Beispiel in dem Lehrbuch der Mathematik für die Grundschule, 6. Schuljahr, Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1950, auf den Seiten 57 f. und 62 f. Dort wurde von zwei Folgen (Bauzeit und Mauerhöhe) ausgegangen. Das proportionale Wachsen wurde durch zwei Schaubilder dargestellt, von denen das erste symbolisch das Wachsen der Mauer mit der Zeit und das zweite die abstrakte Darstellung durch eine Gerade zeigte. Entsprechend wurde das umgekehrte Verhältnis durch zwei Folgen eingeführt und die Abhängigkeit durch eine Hyperbel dargestellt. Auch die Formulierungen kamen dem Begriff der Proportionalität recht nahe: „Zwei voneinander abhängige Größen stehen im direkten Verhältnis, wenn beim Multiplizieren (Dividieren) der einen die andere Größe mit derselben Zahl multipliziert (dividiert) werden muß"[37] und „... stehen im indirekten Verhältnis, wenn beim Multiplizieren (Dividieren) der einen die andere Zahl mit derselben Zahl dividiert (multipliziert) werden muß".[38] Abgesehen davon, daß bei der geringen hierfür in Klasse 6 vorgesehenen Zeit kaum eine wirkliche funktionale Erfassung möglich war — sie war auch wohl kaum beabsichtigt —, ist zu bedenken, daß der Schwerpunkt doch zweifellos bei der Lösung eines bestimmten Typs von Aufgaben lag, für die der Dreisatz und später die Proportion richtig angesetzt werden mußten. Dagegen wurde die Tatsache völlig vernach-

[37] ebenda, S. 58.
[38] ebenda, S. 63.

lässigt, daß das direkte und das umgekehrte Verhältnis jeweils eine gewisse zwischen zwei Folgen zwar häufig, aber durchaus nicht überall bestehende Gesetzmäßigkeit ausdrücken. Es finden sich daher auch nirgends Gegenbeispiele. Dies aber ist entscheidend, nicht das Fehlen des Wortes „proportional", das bei genügendem Einblick der Schüler in die hier herrschende Gesetzmäßigkeit später leicht hätte hinzugeführt werden können. So ist es kein Wunder, daß im Physikunterricht die Schwierigkeiten dort begannen, wo quantitative Aussagen mit Hilfe der Proportionalität formuliert wurden. Dabei half es nicht viel, daß die Schüler Dreisatzaufgaben mit direktem und umgekehrtem Verhältnis — das übrigens meist aus der Aufgabe mühelos zu erkennen war — lösen konnten. Hier lag ein allgemeiner Mangel unseres früheren Mathematikunterrichts vor. Wichtige neue mathematische Begriffe und Verfahren wurden zwar im allgemeinen methodisch richtig eingeführt, aber doch so kurz wie nur irgend möglich, um recht schnell zu einem festen Lösungsschema für bestimmte Aufgabentypen zu gelangen. Das führte zu Drill und Schematismus. Die Schüler versagten, als sie der Unterricht in der sozialistischen Produktion vor Aufgaben stellte, die nicht schulmäßig zurechtgestutzt waren. Auf die Gründe, die zu dieser Vernachlässigung der begrifflichen Klärung im Mathematikunterricht führten, kann hier nicht eingegangen werden.

Es konnte also keine Rede davon sein, daß die Proportionalität damals in einer für den Physikunterricht und überhaupt für die polytechnische Bildung und Erziehung ausreichenden Form erarbeitet wurde. Der Proportionalitätsfaktor tauchte allerdings einmal in dem Lehrplan von 1948 in Verbindung mit den Proportionen auf. Auf Seite 50 ff. wird aber gezeigt werden, daß der Proportionalitätsfaktor nur an Hand von Proportionen, also ohne den Begriff der Proportionalität, nicht gewonnen werden kann. Die Proportionalität wurde weder bei den Proportionen noch bei den linearen Funktionen (auch nicht in den Plänen der damaligen Oberschule) erwähnt, und es ist kaum anzunehmen, daß der Unterricht hier mehr leistete, als der Lehrplan verlangte. So konnten die Schüler tatsächlich nur in der Schlußrechnung einen gewissen Einblick in die Proportionalität gewinnen, der aber, wie gesagt, nicht ausreichend war. — Gleichungen wurden in Klasse 7 eingeführt, so daß die Behandlung der Proportionen in Klasse 8 darauf gestützt werden konnte. Dagegen lag die Behandlung der Prozentrechnung in Klasse 7 *vor* der der Proportionen. Die Prozentrechnung wurde auf dem Bruchbegriff, zum Teil auch auf dem Dreisatz aufgebaut und bereitete die Lehre von den Proportionen vor. Etwa seit 1956 waren Bestrebungen im Gange, die Dreisatzrechnung als selbständiges Unterrichtsgebiet zu tilgen und dafür die Proportionen in Klasse 6 oder 7 zu behandeln. Auf die Argumente dafür soll später eingegangen werden. Es fanden verschiedene Unterrichtsversuche statt, die befriedigend verliefen.

Etwa gleichzeitig begann sich die Erkenntnis der Notwendigkeit durchzusetzen, den Begriff der Proportionalität eingehender zu behandeln. Unabhängig voneinander erfolgten an verschiedenen Orten der Deutschen Demokratischen Republik Vorstöße in dieser Richtung.

In unserem seit September 1959 geltenden Lehrplan ist die Lehre von den Proportionen für Klasse 7 vorgeschrieben, und in Verbindung damit werden die Proportionalität und der Proportionalitätsfaktor genannt. Die Reihenfolge der Behandlung ist nicht festgelegt. Die Dreisatzrechnung hat keinen eigenen Unterrichtsabschnitt mehr. Die Lehre von den Gleichungen geht in Klasse 7 der Lehre von den Proportionen voran, in der die Prozentrechnung als Anwendungsgebiet enthalten ist. Die geometrische Anwendung der Proportionalität und der Proportionen in der Ähnlichkeitslehre erfolgt in Klasse 8. Die Proportionalität bereitet den Funktionsbegriff und die Einführung in die Lehre von den linearen Funktionen in Klasse 8 vor. Diese Reihenfolge ermöglicht einen klaren, fachsystematisch richtigen Aufbau, der auch den Belangen des Physikunterrichts Rechnung trägt. Der neue Plan ist rationeller und sowohl in mathematischer als auch in methodischer Hinsicht, wie wir sehen werden, befriedigender als die alten Pläne.

Das eigentlich Neue dieses Unterrichtsgebiets im gültigen Plan liegt in der Einführung der Proportionalität und des Proportionalitätsfaktors, weniger in der Ersetzung der Dreisatzrechnung durch das Rechnen mit Proportionen. Die Proportionalität bildet den Schwerpunkt dieses Unterrichtsgebiets, und es ist bedauerlich, daß dies — wahrscheinlich infolge der langen Tradition — nicht in der Überschrift des Stoffgebiets zum Ausdruck kommt. Wird die zentrale Stellung dieses Begriffs nicht erkannt und werden statt dessen die Proportionen einseitig in den Vordergrund gerückt, so kann der Unterricht zu demselben Aufgabendrill führen wie die alte Dreisatzrechnung. Auch die aus praktischen Gründen notwendige Vorverlegung der Lehre von den Proportionen in Klasse 7 ist nicht das entscheidend Neue; das Neue und zugleich Wesentliche ist eine begrifflich klare Erfassung und Anwendung der Proportionalität. Dies entspricht durchaus den Zielen der weltanschaulichen Bildung und Erziehung, die unter anderem erfordert, daß die Schüler die in Natur und Gesellschaft bestehenden Gesetzmäßigkeiten erkennen, formulieren und anwenden lernen. Darin liegt eine Erweiterung des bisherigen Unterrichtsgebietes „Proportionen" nach Umfang und Tiefe.

Eine besondere Bedeutung erhält die Entwicklung unseres neuen Unterrichtsgebietes durch den Vergleich mit dem Unterricht in Westdeutschland. Dort ist die Behandlung der Proportionalität in der Volksschule auf die altübliche Schlußrechnung nach der früher bei uns in Klasse 5 und 6 durchgeführten Art und auf Aufgaben aus dem praktischen Leben beschränkt.[39] Da keine Gleichungen behandelt werden, trifft das gleiche auch für Proportionen zu. Aber auch in der zehnklassigen Mittelschule sieht es nicht wesentlich anders aus: Hier scheint das äußerste, das verlangt wird, darin zu bestehen, daß im 7. Schuljahr der Unterricht die letztlich die Schlußrechnung beherrschenden Funktionalzusammenhänge „je mehr, desto mehr" und „je mehr, desto weniger" in Verbindung mit logischen Schlüssen hervortreten läßt.[40] Die dort in den Lehrprogrammen noch enthaltenen Proportionen sind in der Unterrichtspraxis immer mehr durch die Dreisatzrechnung verdrängt worden. Praktische Aufgaben stehen im Vordergrund. Über die Proportionalität, den Proportionalitätsfaktor und die so notwendigen Verbindungen mit dem Physikunterricht fällt kein Wort. In den Gymnasialplänen wird der Proportionalitätsfaktor in der Obertertia, also recht spät, bei der Behandlung der linearen Funktion erwähnt.

[39] Vgl.: Der mathematische Unterricht für die 6- bis 15jährige Jugend in der Bundesrepublik Deutschland. Verlag Vandenhoeck und Ruprecht. Göttingen 1958, S. 164 und 215; ferner: Lehrpläne für den Rechenunterricht an bayrischen Volksschulen; und Hagen: Wir rechnen, Rechenbuch für Volksschulen 7. Buchner-Verlag, Bamberg 1957, S. 9.

[40] F. Drenckhahn: Die Gestaltungsgrundsätze der Oberstufenhefte meines Rechenbuches. Frankfurt a. M., 1952, S. 34.

Dies deutet darauf hin, daß sowohl der Mathematik- als auch der Physikunterricht Westdeutschlands auch auf diesem Gebiet hinter dem auf den Forderungen unseres Lehrplans aufgebauten Unterricht in unserer sozialistischen Schule zurückbleiben. Der fortschrittliche Charakter unserer Schule zeigt sich darin, daß *alle* Kinder in die wissenschaftliche Betrachtungsweise eingeführt werden, daß sie *alle* die in Natur und Gesellschaft herrschenden Gesetzmäßigkeiten erkennen und anwenden lernen. Daher gehört die sorgfältige Einführung und ständige Anwendung der Proportionalität im Mathematik- und Physikunterricht zu den Forderungen der sozialistischen Schule.

5. Wege zum Aufbau des Unterrichtsgebiets „Proportionen“

Für den Aufbau des Unterrichtsgebiets „Proportionen“ sind mindestens drei Wege in unserer zehnklassigen Oberschule ausprobiert worden, die im folgenden dargestellt und diskutiert werden sollen.

5.1. Erster Weg (Weg unseres Lehrbuchs)[41]

Der Leser ziehe bei den folgenden skizzenhaften Darstellungen die betreffenden Lehrbuchstellen heran.

1. Beginn mit dem Verhältnis von gleich benannten Größen (S. 66 bis 69).
2. Die Proportion als identische Gleichung (Namen der Glieder, Produktgleichung, Erweitern und Kürzen von Verhältnissen, S. 69 bis 73).
3. Die direkte Proportionalität. Die Einführung geschieht an Hand eines konkreten Beispiels der Serienproduktion am Fließband:

Arbeitszeit (in Stunden):	1	2	3	4	5	6	7	8
Produzierte Geräte (in Stück):	30	60	90	120	150	180	210	240

   Die Proportionalität wird definiert als Verhältnisgleichheit:
   „Zwischen zwei Größen herrscht Proportionalität, wenn das Verhältnis aus zwei Werten der einen Größe stets genauso groß ist wie das Verhältnis aus den entsprechenden Werten der anderen Größe und wenn die Größen in einem sachlichen Zusammenhang stehen“ (S. 74).
   Veranschaulichung durch grafische Darstellung (S. 73 bis 78).
4. Der Proportionalitätsfaktor als „gemeinsamer Wert“ der Verhältnisse aus zusammengehörenden Werten proportionaler Größen (S. 78 bis 81).
5. Bestimmungsproportionen mit direkter Proportionalität (S. 81 bis 88).
6. Die umgekehrte Proportionalität, eingeführt als Produktgleichheit (S. 88 bis 93).
7. Bestimmungsproportionen mit Produktgleichheit (S. 93 bis 96).
8. Gegenüberstellung von Proportionalität und Produktgleichheit (S. 97 bis 104).

Wenn nun die Vor- und Nachteile dieses Weges aufgezählt werden, so soll dabei nur auf diejenigen Punkte eingegangen werden, die den Aufbau betreffen. Die Erörterung der methodischen Durchführung erfolgt im Rahmen des nächsten Abschnitts.

[41] Rechnen, Messen, Konstruieren — Siebentes Schuljahr. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1959.

Vorteile dieses Weges:

1. Das in unserem Lehrplan liegende Neue wird realisiert: Die Proportionalität erhält ihren gebührenden Platz als eine besondere Gesetzmäßigkeit von Folgen. Das kommt unter anderem durch zahlreiche Beispiele und Gegenbeispiele sowie durch die grafische Darstellung zum Ausdruck. Dadurch wird der in Klasse 8 beginnenden Lehre von den Funktionen und dem Physikunterricht bei der Formulierung der ersten quantitativen Aussagen wertvolle Hilfe geleistet.

2. In logisch-mathematischer Beziehung ist der Weg einwandfrei: Die Proportionalität $y = c \cdot x$ (c = constans) kann in impliziter Form $y : x = c$ geschrieben und als Verhältnisgleichheit aufgefaßt werden. Auch die umgekehrte Proportionalität kann in der impliziten Form ausgedrückt und als Produktgleichheit aufgefaßt werden. Die Zurückstellung der Bestimmungsproportionen hinter die Proportionalität beziehungsweise hinter die Produktgleichheit ist sowohl in mathematischer als auch in didaktischer Beziehung durchaus richtig.

3. Die Gegenüberstellung von Proportionalität und Produktgleichheit in Verbindung mit gemischten Aufgaben regt die Schüler zum kritischen Urteilen an. Die Darstellung ist wirklichkeitsnah und im allgemeinen für die Schüler faßlich.

Nachteile dieses Weges:

1. Die direkte und die umgekehrte Proportionalität erscheinen in der Form von Verhältnis- beziehungsweise Produktgleichheit als völlig verschiedene Gesetzmäßigkeiten. Ihre Gemeinsamkeiten, die darauf beruhen, daß beide Spezialfälle der allgemeinen Proportionalität[42] sind, bleiben im Hintergrund.

2. Der Aufbau wird durch die *implizite* Fassung der direkten und der umgekehrten Proportionalität bestimmt. Die implizite Form bringt aber die funktionale Abhängigkeit einer Größe von einer anderen nicht so klar zum Ausdruck wie die *explizite* Form $y = c \cdot x$ beziehungsweise $y = \frac{c}{x}$. Diese entspricht auch dem Gebrauch in der Physik besser.[43] Dazu kommt, daß das Heranziehen des für die Schüler noch ziemlich neuen Verhältnisbegriffs bei der Erklärung der Proportionalität zu methodischen Schwierigkeiten führt. Auch aus diesem Grund ist es besser, die direkte Proportionalität auf rein multiplikative Beziehungen zu stützen.

3. Die verschiedenen Abänderungen des Verhältnisbegriffs bringen methodische Schwierigkeiten mit sich: Bei der Einführung wurde das Verhältnis zwischen *gleichbenannten* Zahlen als das Übliche hingestellt:

> „Man vergleicht gewöhnlich die Mengen oder Größen gleichartiger Dinge durch Verhältnisse miteinander, zum Beispiel die Milcherträge verschiedener Kühe in Kilogramm je Monat; die Stahlproduktion verschiedener Staaten in Tonnen je Jahr ...
> Die Angabe eines Verhältnisses ist also eine neue Art des Zahlenvergleichs, die dem Messen einer Größe mit einer anderen gleichartigen entspricht" (S. 66).

Auch bei den identischen Proportionen werden, soweit es sich um benannte Größen handelt, auf beiden Seiten Verhältnisse aus gleichbenannten Größen gebildet. Bei

[42] Vgl. S. 20.
[43] Vgl. S. 56.

der Einführung der Proportionalität an Hand des Fließbandbeispiels werden aber dann Proportionen angesetzt, bei denen links *andere* Größen stehen als rechts: 120 Stück zu 90 Stück und 4 Stunden zu 3 Stunden. Im Lehrbuch heißt es dazu:

> „Es ist auch möglich, zwei Verhältnisse zu vergleichen, von denen das eine aus andersartigen Größen gebildet ist als das andere“ (S. 73).

Zwar liegt, rein mathematisch gesehen, hier nichts Neues vor, da nur von der Drittengleichheit Gebrauch gemacht wird. Zum Beispiel wird festgestellt, daß sich die Stückzahlen wie 4 zu 3 verhalten, und die Arbeitsstundenanzahlen auch. Also verhalten sich die Stückzahlen wie die Zahlen der Arbeitsstunden. Aber für die Schüler liegt hier doch eine Erweiterung des Begriffs „Proportion“ vor. Diese Einführung der Proportionalität fällt den Schülern nicht leicht, zumal wenn die etwas abstrakte Formulierung von Seite 76 benutzt wird. Bei der Einführung des Proportionalitätsfaktors muß der Schüler dann wiederum seinen Verhältnisbegriff erweitern und *verschiedene* Größen ins Verhältnis setzen. Wir finden im Lehrbuch auf Seite 78 f. dazu die Sätze:

> „Wir bildeten bisher Proportionen, indem wir Verhältnisse aus gleichartigen, einander entsprechenden Größenwerten gleichsetzten:
>
> $$90:240=3:8.$$
>
> Wir wollen jetzt Verhältnisse aus ungleichartigen, einander entsprechenden Größen bilden, also aus irgendeiner Arbeitszeit und der dazugehörigen Produktionsmenge . . . :
>
> 90 Stück und 3 Stunden; 240 Stück und 8 Stunden.
>
> Diese Verhältnisse müssen gleich sein, denn
>
> $$90:3=240:8\ldots$$
>
> Wenn zwei Größen proportional sind, kann man stets eine solche Kette gleicher Verhältnisse aufstellen. Den gemeinsamen Wert dieser Verhältnisse nennt man den *Proportionalitätsfaktor* . . .“

Diese mehrfachen Veränderungen des Verhältnisbegriffs und seiner Anwendung in der Proportion bringen für die Schüler Schwierigkeiten, die durchaus vermeidbar sind.[44]

4. Der Proportionalitätsfaktor wird als *Quotient* und nicht als Faktor eingeführt. Auf den etwas anfechtbaren Begriff des „Wertes von Verhältnissen“ soll im nächsten Abschnitt eingegangen werden.[45] Zwar wird dann im Buch beschrieben, wie mit Hilfe dieses Quotienten durch Multiplikation aus gegebenen Zeiten die zugehörigen Stückzahlen errechnet werden können; doch wäre es einfacher, den Proportionalitätsfaktor auf Grund der Eigenschaft, die schon in seinem Namen angegeben wird, einzuführen, zumal den Schülern jede Umkehroperation (hier die Division) mehr Schwierigkeiten bereitet als die direkte Operation (hier die Multiplikation).

5. Das zeitliche Auseinanderrücken der Behandlung von Proportionalität und Produktgleichheit kann leicht zu einer Verengung im Denken der Schüler führen,

[44] Vgl. S. 59 ff.
[45] Vgl. S. 59 ff.

zumal Schüler im allgemeinen ohnehin zu einer Bevorzugung der direkten Proportionalität neigen. Die Schüler lernen nur dann ein operatives Arbeiten mit neuen Begriffen, wenn sie diese von Anfang an richtig abgrenzen; das geschieht am besten durch Heranziehen von Nebenbegriffen, wie ja im Buch durchaus richtig auch Beispiele gebracht werden, bei denen überhaupt keine Proportionalität besteht. Die Zusammenstellung von Aufgaben mit direkter und umgekehrter Proportionalität, mit denen die Darstellung im Buch abschließt, kommt etwas spät für eine begriffliche Untermauerung der direkten Proportionalität. Auf die Fassung der umgekehrten Proportionalität als Produktgleichheit soll im nächsten Abschnitt eingegangen werden. Abschließend sei festgestellt, daß, wie Unterrichtsversuche gezeigt haben, trotz der obengenannten Schwierigkeiten der im Lehrbuch eingeschlagene Weg durchaus erfolgreich gestaltet werden kann. Gewisse Umstellungen und Abänderungen sind allerdings zu empfehlen.

5.2. Zweiter Weg (Weg des Methodischen Handbuchs)[46]

Der Lehrgang „Proportionen" des Methodischen Handbuchs enthält eine stundenmäßige Aufgliederung. Sein Aufbau ist folgender:

1. Das Verhältnis von gleich und ungleich benannten Zahlen als Vergleich von Größen, gegenübergestellt der Differenz als anderer Vergleichsmöglichkeit (4 Stunden, S. 228 bis 231).

2. Identische Proportionen unter Benutzung einer Preistafel, die aber nicht zur Einführung der Proportionalität, sondern nur zur Aufstellung von Proportionen verwendet wird:

„1 kg Margarine ... kostet 4 DM. Wir stellen eine Preistafel (Wertetafel) auf.

kg	1	2	3	4	5	6	7	8
DM	4	8	12	16	20	24	28	32

." (2 Stunden, S. 232/33).

Dabei findet sich die Bemerkung:

„In der 6. Stunde ist an weiteren Sachverhalten zu untersuchen, ob Verhältnisgleichheit besteht. Dabei werden vom Lehrer nur Beispiele mit geradem Verhältnis ausgewählt ..." (S. 233).

3. Umstellung von Proportionen an Hand der Preistafel (1 Stunde, S. 233/234)

4. Herleitung der Produktgleichung (1 Stunde, S. 234).

5. Die Proportion als Bestimmungsgleichung mit direktem Verhältnis und mit Produktgleichheit (1 Stunde, S. 235).

Jetzt werden Beispiele von proportionalen und produktgleichen Größen gegenübergestellt, um Stoff für weitere Bestimmungsgleichungen mit Proportionen zu gewinnen. Über die Einführung der Begriffe „Proportionalität" und „Produktgleichheit" wird auch hier nur wenig gesagt:

„Aufgaben der Proportionalität und solche der Produktgleichheit werden über die Proportion gelöst. Dazu ist erforderlich, daß nur gleichartig benannte

[46] Mathematikunterricht — Methodisches Handbuch für den Lehrer. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1960, S. 227 bis 239.

Größen zu einem Verhältnis vereinigt werden. Das bereitet nach der Betrachtung des Vertauschungsgesetzes keine Schwierigkeiten...
Bei diesen Aufgaben vergleichen wir durch das Verhältnis nur solche Zahlen miteinander, die gleiche Benennung tragen. Wir vergleichen die Margarinemengen..." (S. 235).

6. Übungen mit Bestimmungsproportionen (10 Stunden, S. 236/237).

7. Der Proportionalitätsfaktor (1 Stunde, S. 237).

Der Proportionalitätsfaktor wird als Faktor eingeführt, mit dessen Hilfe Berechnungen an Hand der Preistafel erfolgen (Preis von 1 kg Margarine). Als Vorbemerkung finden wir:

„Nachdem die Schüler in weiteren etwa zehn Stunden Sicherheit in der Lösung solcher Aufgaben bekommen haben, wird der Proportionalitätsfaktor und seine Bedeutung betrachtet. Dabei wird der Unterschied zwischen Proportionalität und Produktgleichheit gezeigt. Es empfiehlt sich aber, diese Betrachtungen nicht zu früh anzustellen, um die Schüler nicht zu verwirren" (S. 236/237).

Dann als Stundenziel:

„Wir wollen an unseren Proportionen noch eine weitere Gesetzmäßigkeit untersuchen" (S. 237).

Der Proportionalitätsfaktor ist

„... ein Faktor, der für Proportionen aus dieser Tafel bestimmend ist ... 1. Er bestimmt das Verhältnis der DM-Zahlen zu den kg-Zahlen. 2. Er hat eine bestimmte sachliche Bedeutung: Preis für 1 kg" (S. 237).

8. Gegenüberstellung von Proportionalität und Produktgleichheit zwecks richtiger Aufstellung von Proportionen. Untermauerung durch grafische Darstellungen (1 Stunde, S. 238/239).

Der Abschnitt schließt mit der Bemerkung:

„Bei der Zusammenfassung ist herauszuarbeiten:
Diese beiden so verschiedenen Sachverhalte werden mittels der Proportion erfaßt. Deshalb ist es bei der Aufstellung der Proportion so wichtig, daß wir genau untersuchen, an welcher Stelle x stehen muß" (S. 239).

Vorteile dieses Weges:

1. Das Verhältnis wird sehr sorgfältig in hinreichender Allgemeinheit, in ausreichender Zeit und wirklich operativ erarbeitet, indem sowohl gleich wie ungleich benannte Zahlen ins Verhältnis gesetzt werden und dem Verhältnis die Differenz als andere Vergleichsmöglichkeit gegenübergestellt wird. Es ist bedauerlich, daß das nicht konsequent beibehalten wird.[47]

2. Bei Einführung der Bestimmungsproportion werden von Anfang an sowohl das direkte als auch das umgekehrte Verhältnis herangezogen. Dadurch wird das kritische Urteilen der Schüler gefördert. Auch die Gemeinsamkeit sowie die Unterschiede zwischen direktem und umgekehrtem Verhältnis können so klarer erkannt werden.

[47] Vgl. Punkt 4, S. 44 f.

3. Da die Proportion eindeutig das Ziel aller Betrachtungen des Lehrgangs bildet und auch fast die ganze Zeit ausfüllt, ist anzunehmen, daß die Schüler — mit einer unten zu erörternden Einschränkung — Fertigkeiten im Arbeiten mit Proportionen erlangen.

4. Der Proportionalitätsfaktor wird sinngemäß als wirklicher Faktor eingeführt, mit dessen Hilfe Berechnungen durchgeführt werden.

Nachteile dieses Weges:

1. Der Charakter der direkten und der umgekehrten Proportionalität als einer besonderen, nicht überall bestehenden Gesetzmäßigkeit kommt nicht genügend zum Ausdruck. Beide Begriffe dienen hier in erster Linie dem Zweck, zum richtigen Ansatz von Proportionen zu führen. Dadurch wird dem Physikunterricht ebensowenig geholfen wie durch den Unterrichtsabschnitt „Proportionen“ in früheren Lehrplänen. Es bleibt unklar, wie und wann der Begriff der Proportionalität eingeführt werden soll. Dabei ist nicht entscheidend, daß dieses Wort gebraucht wird, sondern daß die Schüler die bei proportionalen Folgen bestehenden Gesetzmäßigkeiten aktiv erfassen. In dem Handbuchbeitrag werden die Schüler allerdings an das Arbeiten mit proportionalen Folgen herangeführt: Sie erweitern die Preistafel für Margarine durch weitere Kilogramm-Angaben und errechnen die zugehörigen Preise, sie stellen die Wertetabelle auf Millimeterpapier dar und ermitteln graphisch Zwischenwerte.[48] Sicher tragen solche Übungen dazu bei, daß die Schüler die bei proportionalen Folgen bestehenden Gesetzmäßigkeiten erkennen. Es ist aber fraglich, ob sie diese *voll* erfassen können ohne Kenntnis von Zuordnungen, bei denen solch eine Gesetzmäßigkeit *nicht* besteht und von denen sich die Fälle mit Proportionalität wirksam abheben könnten. Derartige Betrachtungen fehlen in dem Handbuchbeitrag. Das richtige Aufstellen von Proportionen steht im Vordergrund der methodischen Bemühungen. *Gute* Lehrer sind früher bei der Schlußrechnung in Klasse 6 ähnlich vorgegangen. Das wesentlich Neue in unserem Lehrplan liegt aber weniger darin, daß unter Beibehaltung der früheren Darstellungen des direkten und des umgekehrten Verhältnisses das Dreisatzschema durch Proportionen ersetzt wird, sondern darin, daß der Begriff der Proportionalität wirklich zum Tragen kommt.

2. Der Ansatz von Bestimmungsproportionen wird nicht in ausreichendem Maße auf funktionale Betrachtungen gestützt. Die Untersuchung vor dem Ansetzen einer Proportion darf sich nicht darauf beschränken, festzustellen, ob ein Wachsen oder Abnehmen stattfindet. Dies allein gibt uns noch nicht das Recht, eine Proportion aufzustellen. Es gibt viele monoton wachsende oder abnehmende Folgen, bei denen keineswegs irgendeine Form der Proportionalität vorliegt.[49]

3. Wenn einseitig die Proportion Zielpunkt aller Teilabschnitte ist, so liegt die Gefahr eines Aufgabenschematismus nahe. Gerade diesen Vorwurf erhebt der Verfasser des hier erörterten Abschnitts des „Methodischen Handbuchs“ an anderer Stelle gegen den Dreisatz[50], und er weist auf die damit gegebene Entfremdung sowohl von der Praxis als auch von der Mathematik hin. All die dort erhobenen Vorwürfe (keine Berücksichtigung des Definitionsbereichs, in dem

[48] Vgl. a. a. O., S. 232 und das Zitat von S. 233.

[49] Vgl. Rechnen, Messen, Konstruieren — Siebentes Schuljahr. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1960, Aufgaben S. 77.

[50] M. Buche: Bericht über ein methodisches Experiment. In „Mathematik und Physik in der Schule“, Heft 11/1957, S. 601 f.

noch Proportionalität besteht, wirklichkeitsfremde Konstruktion von Aufgaben und damit „Verschulung“ dieses Unterrichtsstoffes) können genauso gegen die Anwendung von Proportionen erhoben werden. Die Einengungen bei Aufstellung von Bestimmungsproportionen[51] und der Übergang von der begrifflichen Klärung zum Lösungsschema können leicht zu formalistischem Schematismus führen. Wahrscheinlich werden bei Befolgung dieses Lehrgangs die Schüler Bestimmungsproportionen, bei denen die direkte beziehungsweise die umgekehrte Proportionalität deutlich ersichtlich ist, richtig aufstellen und lösen. Werden sie aber nicht später im Physikunterricht oder im Unterricht in der sozialistischen Produktion, wo die Aufgaben nicht nach Unterrichtsgebieten geordnet anfallen, auch dort zu Proportionen greifen, wo überhaupt keine Proportionalität, weder direkte noch umgekehrte noch verallgemeinerte, vorliegt?[52]

4. Der Aufbau enthält einige Inkonsequenzen: Während anfänglich bei der Verhältnisbildung sowohl gleich als auch ungleich benannte Zahlen zugelassen werden, wird dies bei Bestimmungsproportionen wieder eingeschränkt.[53] Der Grund dafür kann nur in dem Wunsch liegen, dem Schüler formale Hilfen für die Aufstellung von Proportionen zu geben (Entscheidung über die Stellung von x).[54] Wenn die Schüler die in der Proportionalität liegende Gesetzmäßigkeit voll erfassen, sind solche schematischen Einengungen überflüssig. Eine weitere Inkonsequenz liegt darin, daß bei Einführung der Bestimmungsproportionen sowohl das direkte als auch das umgekehrte Verhältnis berücksichtigt werden, daß aber unmittelbar darauf davor gewarnt wird, zu früh auf die Unterscheidung zwischen Proportionalität und Produktgleichheit einzugehen.[55] Abschließend sei festgestellt: Ein an Hand dieses Lehrgangs durchgeführter Unterricht gerät leicht in die Gefahr, die Bedeutung der Proportionalität zu unterschätzen und bei dem ganzen Abschnitt „Proportionen“ *inhaltlich* nicht wesentlich über das Niveau der alten Dreisatzrechnung hinauszugehen; lediglich in der *Form* liegt ein Unterschied, indem die alten Dreisatzaufgaben mittels Proportionen behandelt werden. Der jetzige Lehrplanabschnitt „Proportionen“ geht aber über die bloße Ersetzung des Dreisatzes durch Proportionen hinaus. Die leichte Faßlichkeit ist nicht allein entscheidend. In Klasse 7 sollten die Schüler ruhig vor schwierigere Urteile über das Bestehen gewisser Gesetzmäßigkeiten gestellt werden. Das liegt sowohl im Interesse des Physikunterrichts als auch der in der nächsten Klasse beginnenden Lehre von den Funktionen, die mit der Untersuchung von proportionalen Folgen vorbereitet werden soll. Schließlich entspricht es auch den Bildungs- und Erziehungszielen unserer Schule, die Schüler in zunehmendem Maße vor solche Schwierigkeiten zu stellen, wie sie die Produktionspraxis mit sich bringt. Diese werden aber bei diesem Lehrgang durch die begriffliche Einengung auf die direkte und die umgekehrte Proportionalität und auf das rasche Erarbeiten eines Lösungsschemas aus dem Wege geräumt. Durch die Vernachlässigung der Behandlung von proportionalen Folgen werden die Schüler nicht genügend zur Aufmerksamkeit gegenüber den in Natur und Gesellschaft bestehenden Gesetzmäßigkeiten angehalten.[56]

[51] Vgl. Zitat von S. 235 des Handbuchs auf S. 42 dieser Arbeit.

[52] Vgl. das Beispiel auf S. 30.

[53] Vgl. Zitat von S. 235 des Handbuchs auf S. 42 dieser Arbeit.

[54] Vgl. Punkt 3 und Zitat von S. 239 des Handbuchs auf S. 42 dieser Arbeit.

[55] Vgl. Zitat von S. 236/237 des Handbuchs auf S. 42 dieser Arbeit.

[56] Auf methodische Einzelheiten wird im nächsten Abschnitt eingegangen.

5.3. Dritter Weg

Als dritter Weg sei hier ein Aufbau vorgeschlagen, der von der Abteilung Mathematik des Instituts für Unterrichtsmethodik der Humboldt-Universität Berlin erarbeitet und in den Schuljahren 1958/59 sowie 1959/1960 an einigen Berliner Schulen erprobt wurde. Hier liegt der Schwerpunkt bei dem Begriff der Proportionalität, der aus fachsystematischen und methodischen Gründen an den Anfang gestellt wird.

1. Die direkte Proportionalität. Ausgang von dem Fließbandbeispiel.[57] Erarbeitung der funktionalen Beziehungen: monotones Wachsen, gleichmäßiges Wachsen.[58] Weitere Beispiele von proportionalen Folgen. Ergänzungsübungen.[59] Gegenbeispiele. Beschränkung des Gültigkeitsbereiches, in dem eine bestimmte Folge zu einer anderen proportional ist. Übungen an grafischen Darstellungen.

2. Die umgekehrte Proportionalität. Ausgang von dem Beispiel des Lehrbuchs.[60] Die funktionalen Beziehungen. Weitere Beispiele und Gegenbeispiele. Ergänzungsübungen. Entwicklung der expliziten Schreibweise für die direkte und für die umgekehrte Proportionalität. Hinweis auf die Produktgleichheit.

3. Der Proportionalitätsfaktor. Einführung an Hand von Ergänzungsübungen als derjenige Wert der zweiten Folge, der der 1 in der ersten Folge entspricht. Umwandlung von Proportionalitäten in Gleichungen mit Hilfe des Proportionalitätsfaktors. (So weit etwa 12 Stunden.)

4. Das Verhältnis von gleich und ungleich benannten Zahlen als besondere Art des Vergleichens neben der Differenz.

5. Identische Proportionen; Produktgleichung.

6. Bestimmungsproportionen, entwickelt aus der direkten und der umgekehrten Proportionalität von Folgen; Anknüpfung an die früheren Beispiele; verschiedene Formen des Ansatzes.

Vorteile dieses Weges:

1. Der Begriff der Proportionalität wird als Schwerpunkt behandelt. Er wird in einer Form bereitgestellt, die später im Physikunterricht verwendet und weiter ausgebaut werden kann.

2. Das Stützen der direkten Proportionalität auf den Verhältnisbegriff, der den Schülern noch nicht sehr vertraut ist, wird vermieden. Bei der Erklärung der direkten und der umgekehrten Proportionalität werden nur die einfachen multiplikativen Beziehungen verwendet, an die der Schüler von der Unterstufe an gewöhnt ist.

3. Die Nebeneinanderbehandlung der direkten und der umgekehrten Proportionalität sowie die Gegenüberstellung zu Gegenbeispielen lassen die Gemeinsamkeiten sowie die Unterschiede dieser beiden Gesetzmäßigkeiten deutlicher hervortreten.

[57] Vgl. S. 38.
[58] Vgl. S. 49.
[59] Vgl. S. 49.
[60] Vgl. Lehrbuch S. 89.

4. Die explizite Form $y = c \cdot x$ beziehungsweise $y = \frac{c}{x}$ bringt die funktionale Abhängigkeit besser zum Ausdruck.[61] Sie ermöglicht ein operatives Arbeiten und bereitet den Funktionsbegriff vor.

5. Der Proportionalitätsfaktor erscheint wirklich als Faktor. Er ermöglicht die Umformung einer Proportionalität in eine Gleichung, wie es im Physikunterricht häufig gebraucht wird.

6. Die logisch-mathematische Grundlage für kritisches Denken beim Aufstellen von Proportionen ist vorhanden.

Nachteile dieses Weges:

Es werden bei der ganzen Anlage des Lehrgangs höhere Anforderungen an Lehrer und Schüler gestellt als bei den anderen Wegen; im einzelnen:

1. Die Schüler müssen funktionale Betrachtungen anstellen, an die sie bisher nicht gewöhnt sind.

2. Manche Schüler werden sich nicht leicht an die hohen Ansprüche gewöhnen können, die der Lehrgang an ihre Aktivität stellt. Er ist nicht „bequem" für die Schüler, insbesondere vermittelt er keine Rezepte.

3. Der Lehrer muß Wege finden, diese Schwierigkeiten zu überwinden. Er hat keine Wegleitung durch das Lehrbuch, sondern muß das altgewohnte Gebiet der Lehre von den Proportionen ganz neu durchdenken.

Die Erfahrungen haben gezeigt, daß diese Nachteile überwunden werden können und daß die Vorteile überwiegen. Sie werden sich erst recht im späteren Verlauf des Unterrichts auswirken. Von den Schwierigkeiten, die bei der stärkeren Aktivierung der Schülerarbeit auftauchen, sollten wir nicht zurückschrecken. Gerade bei diesem Lehrgang bestehen gute Möglichkeiten zur selbständigen Schülerarbeit.[62] Eine gute Unterstützung findet der Lehrer in den wertvollen Beispielen und Aufgaben des Lehrbuchs.

Der letzte Weg scheint den Bildungs- und Erziehungszielen unserer Schule besonders gut angemessen.

[61] Die Bezeichnungen x und y für Variable werden im Lehrgang nicht verwendet.

[62] Vgl. S. 49.

6. Methodische Schwerpunkte beim Aufbau des Unterrichtsgebiets „Proportionen“

In diesem Abschnitt sollen einzelne Schwerpunkte und methodische Schwierigkeiten bei dem zuletzt beschriebenen Aufbau der Lehre von den Proportionen erörtert werden. Es sollen zuerst die direkte (6.1.), dann die umgekehrte Proportionalität (6.2.), ferner der Verhältnisbegriff (6.4.) und schließlich die Proportionen (6.5.) behandelt werden. Dabei ist zu beachten, daß bei der unterrichtlichen Behandlung direkte und umgekehrte Proportionalität sich zum Teil überdecken. In den Unterrichtsversuchen mit diesem Lehrgang wurden die Beispiele und Aufgaben des Lehrbuchs verwendet, daher wird es auch hier herangezogen.

6.1. Einführung der direkten Proportionalität

Es wurde schon verschiedentlich erwähnt, daß die Proportionalität für die Schüler nicht etwas völlig Neues darstellt, sondern daß sie schon Vorstellungen davon mitbringen und diese auch oft bei ihren Überlegungen richtig verwenden. Schon beim Einkaufen haben sich die Schüler seit Jahren an Preisberechnungen auf Grund der Proportionalität des Preises zur Warenmenge gewöhnt. Die Aufgabe unseres Unterrichtsabschnitts ist es, solche funktionalen Vorstellungen bewußtzumachen (6.1.1.), zu präzisieren (6.1.2.), eine korrekte Formulierung zu erarbeiten (6.1.3.) und zum richtigen Arbeiten mit proportionalen Folgen zu erziehen (6.1.4.).

6.1.1. Bewußtmachen von Vorstellungen über proportionale Abhängigkeiten

Den Schülern kann die bisher von ihnen unbewußt angewendete Proportionalität bewußtgemacht werden, indem ein Beispiel von zwei proportionalen Folgen näher betrachtet wird. Gut eignet sich dafür die Tabelle der Fließbandproduktion aus dem Lehrbuch[63] (Beispiel 1). Ohne das neue Wort „proportional“ zu erwähnen, werden Stückzahlen, die in verschiedenen Laufzeiten fertig werden, gegenübergestellt. Dabei wird gefunden: Doppelte Laufzeit ergibt die doppelte Stückzahl, dreifache Laufzeit die dreifache Stückzahl, halbe Laufzeit die halbe Stückzahl. Wenn wir wissen, wieviel Stück in irgendeiner Zeit hergestellt werden, so können wir die Stückzahl nach beliebiger Laufzeit angeben. An Hand der Wertetafel kann gelegentlich auch einmal die umgekehrte Frage gestellt werden: Wieviel Stunden muß das Band laufen, damit 280, 75, 100 Stück fertiggestellt werden? Dies darf aber vorläufig nicht dazu führen, die bevorzugte Stellung der Zeitfolge (unabhän-

[63] A. a. O., S. 74; vgl. auch S. 38.

gige Variable!) aufzuheben. Als Veranschaulichungs- und Arbeitsmittel wird eine grafische Darstellung nach Art des Lehrbuchs (Abb. 30 a von S. 75) entwickelt, bei der die Stückzahlen als senkrechte Strecken dargestellt werden. Die Verbindungslinie der Streckenendpunkte ist eine Gerade. Mit dieser Entdeckung nehmen die Schüler schon ein gutes Teil des Unterrichtsstoffes über die *lineare Funktion* aus Klasse 8 vorweg. Der Lehrer versuche hier keine logischen Beweise, für die ohnehin auf dieser Stufe die mathematischen Voraussetzungen fehlen und die nur von dem Schwerpunkt, dem Herausarbeiten des Wesens der Proportionalität, ablenken würden. Besonders einsichtig wird die Geradlinigkeit der grafischen Darstellung, wenn Folgen mit einem kleinen ganzzahligen Proportionalitätsfaktor, zum Beispiel $c = 2$, gewählt und die Zeichnungen auf Kästchenpapier ausgeführt werden (Abb. 3).

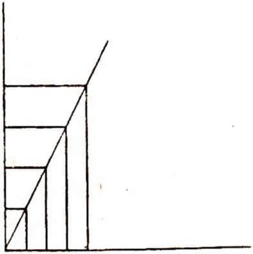

Abb. 3

Die Schüler können an den hier entstehenden Rechteckdiagonalen Entdeckungen machen, die den Begriff des Anstiegs einer Geraden vorbereiten. Jedoch sollten solche Betrachtungen nur am Rande stehen. Sie werden später, wenn der Proportionalitätsfaktor eingeführt worden ist, wieder aufgenommen und fortgeführt. Der Fall $c = 1$ wird besser vermieden, weil die dabei entstehende Identität der beiden Folgen nicht dazu geeignet ist, deren Proportionalität erkennen zu lassen. Bei den ersten grafischen Darstellungen gebe der Lehrer Hinweise für die Wahl der Einheiten und für den für die Zeichnung benötigten Platz auf dem Zeichenpapier. Es muß möglich sein, die Achsen zu verlängern, und die Einheiten dürfen nicht zu klein sein, damit extra- und interpoliert werden kann. Bei den Übungsbeispielen für proportionale Folgen achte der Lehrer darauf, daß eine der beiden Folgen als die erste ausgezeichnet wird; das kann durch Formulierungen wie „Wenn ..., dann ...“ geschehen. Dadurch wird das funktionale Vorstellungsvermögen der Schüler gestärkt und der Begriff der unabhängigen Variablen vorbereitet. Der Lehrer wähle vorläufig nur solche Folgen, bei denen der Definitionsbereich keine Schwierigkeiten macht: Ware—Preis, Fahrzeit—Weg (bei konstanter Geschwindigkeit des Fahrzeugs), Stückzahl—Gewicht. Dabei sollen die Schüler nach Möglichkeit selbst Beispiele bringen. Hier kann als Schülerauftrag für den Unterricht in der sozialistischen Produktion die Aufgabe gestellt werden, sich nach proportionalen Größen im Betrieb umzusehen. Schließlich kann eine vorläufige Erklärung des Begriffs „proportional“ erfolgen (vgl. 6.1.2.).

Als sehr wertvoll zur Entwicklung des Begriffs der Proportionalität haben sich Ergänzungsübungen etwa folgender Art erwiesen:

Mutter hat 4 kg Apfelsinen mitgebracht und 16 DM bezahlt. Der Preis der Apfelsinen ist proportional ihrer Menge. Zum Beispiel 8 kg kosten 32 DM. Folgende Tabelle wird an die Tafel und in die Hefte geschrieben:

	Mengen in kg	Preis in DM
1. Zeile	4	16,—
2. Zeile	5	
3. Zeile	3	
4. Zeile	8	
5. Zeile	10	
6. Zeile	12	
7. Zeile	2	
8. Zeile	7	

(Beispiel 2)

In Stillbeschäftigung wird die Wertetafel vervollständigt, ohne daß jemand an der Wandtafel arbeitet. Der Lehrer, der die Schüler während ihrer Arbeit kontrolliert, wird verschiedene Lösungswege feststellen. In einem Heft findet er vielleicht folgende Reihenfolge der Ausrechnung: 4., 7., 6., 3., 2. Zeile (der Preis für 5 kg läßt sich durch Addition der Preise von 2 kg und 3 kg errechnen), 5., 8. Zeile. In einem anderen Heft ist die Reihenfolge: 7., 4., 6., 2. Zeile; eventuell wurde dabei in Gedanken oder auch schriftlich „1 kg" in einer weiteren Zeile hinzugefügt und für die weiteren Rechnungen verwendet. Bei der Auswertung begründen die Schüler ihre Rechenwege. Bei diesen leichten Rechenoperationen können sie sich leicht in die Rechenwege ihrer Klassenkameraden hineinfinden. Es sollten mindestens 5 Zeilen gegeben werden, um die Gesetzmäßigkeit deutlicher werden zu lassen. Durch derartige Übungen werden die Vorstellungen von der Proportionalität geklärt und entsprechende Formulierungen vorbereitet.

6.1.2. Präzisierung von Vorstellungen über proportionale Abhängigkeiten

Die Aufgabe, die vorstellungsmäßig bekannte Proportionalität zu präzisieren, ist schon schwieriger. Das Ziel ist hier nicht nur, die Grundlagen für das Rechnen mit Proportionen zu schaffen, sondern die Schüler mathematische Beziehungen in der sie umgebenden Realität entdecken zu lehren, diese Beziehungen genauer zu fassen und dabei zugleich den Funktionsbegriff vorzubereiten. Zunächst müssen die Schüler die Proportionalität dort, wo sie vorliegt, erkennen und eine brauchbare Formulierung benutzen lernen. Dazu ist eine exakte mathematische Definition wenig geeignet, wie ja überhaupt solche Definitionen zwar eine Forderung der mathematischen Exaktheit sind, aber im Unterricht erst dann erfolgen sollten, wenn die Schüler die Notwendigkeit einer solchen Genauigkeit eingesehen haben — damit kann in der Altersstufe der Klasse 7 gerechnet werden —, und wenn sie den Gegenstand selbst schon kennen. Eine Definition der Proportionalität schon nach dem ersten Beispiel wäre daher ganz unangebracht. Erst nach mehreren Übungen wird in einem zusammenfassenden Unterrichtsgespräch oder durch Lehrermitteilung festgestellt: „In allen Beispielen liegen Paare von Folgen vor. Zu jeder Zahl der ersten Folge gehört genau eine Zahl der zweiten Folge (die Zahlen stehen paarweise nebeneinander). Die zweite Folge *wächst gleichmäßig* mit der ersten Folge, das heißt, Verdoppelung, Verdreifachung, Halbierung usw. einer Zahl der ersten Folge führt auf Verdoppelung, Verdreifachung, Halbierung usw. der entsprechenden Zahl der zweiten Folge. In solchen Fällen sprechen wir von *Proportionalität* und sagen: die zweite Folge ist der ersten Folge *proportional.* Wir schreiben dafür das Zeichen $\sim$; zum Beispiel ist die Stückzahl P der Arbeitszeit A proportional: $P \sim A$. Diese Sätze sollten nach hinreichender Klärung in das Merkheft diktiert werden. Eine genauere Definition ist vorläufig nicht erforderlich, ja sogar schädlich; denn wenn eine Begriffserklärung nicht durch deutliche Vorstellungen gestützt wird, helfen sich die Schüler in der Regel durch Auswendiglernen der Definition, und der Lehrer könnte leicht die Korrektheit der Formulierung als sachlich fundiertes Wissen der Schüler ansehen.

Bei der Begriffserläuterung weise der Lehrer auch darauf hin, daß „gleichmäßig wachsen" nicht bedeutet, daß die Vermehrung einer Zahl der ersten Folge, etwa um drei, auch die entsprechende Zahl der zweiten Folge um drei wachsen läßt. Das läßt sich gut an den behandelten Beispielen zeigen. Wesentlich ist, daß die Schüler durch ihre Arbeit den Begriff der Proportionalität erfassen: Sie suchen in der linken Spalte des Schemas (vgl. S. 49) multiplikative Beziehungen (etwa: 12 ist das Dreifache von 4) und bilden in der rechten Spalte das zugehörige Glied in der entsprechenden Weise (das Dreifache von 16 ist 48). Auf diese Weise wird der Begriff der Proportionalität *operativ* entwickelt, das heißt, er erwächst aus dem Handeln der Schüler. Weitere Übungen im Ergänzen von Tabellen führen zur Festigung des neuen Begriffs.

Zu der Präzisierung des Begriffs „proportional" gehört unbedingt seine Abgrenzung gegenüber anderen funktionalen Zusammenhängen. Dazu kann folgendes Beispiel dienen:

1. Folge: das Lebensalter eines Schülers in verschiedenen Jahren;

2. Folge: das Alter seines um drei Jahre älteren Bruders jeweils im gleichen Jahr.

Hier liegt keine Proportionalität vor; denn beispielsweise führt die Verdoppelung des Alters des Jüngeren nicht zur Verdoppelung des Alters des Älteren.[64]

Es genügt aber nicht zu erkennen, daß nicht bei allen Folgen, die einander zugeordnet werden können, Proportionalität vorliegt. Die Schüler müssen auch die Erfahrung machen, daß bei vielen Folgen, deren Bau in den ersten Gliedern dem Bildungsgesetz der Proportionalität unterworfen ist, gewisse *Grenzen* für die Gültigkeit der Proportionalität bestehen. Dazu kann folgendes Beispiel verwendet werden: Ein Fußgänger, der 6 km je Stunde zu laufen pflegt, wandere 6 Stunden lang hintereinander. Wie groß ist sein Weg nach jeweils 1, 2, ..., 6 Stunden? Ein Unterrichtsgespräch wird zu der Feststellung führen, daß der Wanderer wohl in der doppelten Zeit, also in zwei Stunden, die doppelte Strecke, also 12 km, zurücklegen kann, aber kaum in sechs Stunden hintereinander 36 km. Als weiteres Beispiel diene die Ausdehnung eines belasteten Drahtes. Ohne daß hier auf die Proportionalität eingegangen wird, ist ohne weiteres klar, daß bei zu starker Belastung der Draht reißt, daß also auch hier nur innerhalb gewisser Grenzen Verdoppelung der Belastung zur Verdoppelung der Verlängerung führt. Durch solche Betrachtungen wird das Verständnis für den Definitionsbereich vorbereitet.

Stellen wir fest, inwieweit wir bisher die zu Anfang von 6.1.2. genannten Ziele erreicht haben: Die Schüler können Zuordnungen herstellen. Sie haben die Proportionalität als eine besondere Gesetzmäßigkeit gewisser Folgen erkannt. Sie kennen Beispiele, bei denen diese Gesetzmäßigkeit unbeschränkt, und solche, bei denen sie innerhalb gewisser Grenzen gilt. Sie kennen aber noch keine exakte mathematische Formulierung für diese Abhängigkeit. Der Umfang der den Schülern

64 Weitere Beispiele folgen in Abschnitt 6.2. (Einführung der umgekehrten Proportionalität).

bekannten Gesetzmäßigkeiten wird bald durch die umgekehrte Proportionalität erweitert werden.

6.1.3. Formulierung des Begriffs der Proportionalität

Die Erarbeitung einer korrekten Formulierung ist an die Einführung des Proportionalitätsfaktors gebunden. Dieser gehört in den Bereich der Proportionalität und kann nicht aus Proportionen entwickelt werden.[65] Wir behandeln ihn nicht in einem besonderen Unterrichtsabschnitt, da die Schüler dies leicht als unnötige Belastung mit immer neuen Begriffen empfinden könnten, sondern lassen ihn aus dem Arbeiten mit proportionalen Folgen in natürlicher Weise herauswachsen. Dazu kann ein Beispiel folgender Art dienen: Der Lehrer teilt zu Schuljahresbeginn Hefte aus, an jeden Schüler die gleiche Anzahl. Für eine Klasse von 32 Schülern nimmt er aus dem Sekretariat 160 Hefte mit, für weitere Klassen mit 25, 35, 28, 22 Schülern 125, 175, 140, 110 Hefte. Wie hat er die Heftzahlen errechnet?

Ein Schüler kommt später. Er erhält 5 Hefte. Wir stellen eine Tabelle auf und rahmen die letzte Zeile ein:

Anzahl der Schüler	Anzahl der Hefte
32	160
25	125
35	175
28	140
22	110
1	5

Jetzt kann einfach durch Multiplikation mit 5 die Anzahl der Hefte für weitere Klassen errechnet werden.

Bisher haben wir innerhalb der Spalten gearbeitet, indem wir die links stehenden Zahlen durch Multiplikation, Division, Addition oder Subtraktion zueinander in Beziehung setzten und in der rechten Spalte das gleiche ausführten. Jetzt gewinnen wir aus einem Glied der linken Spalte unmittelbar das neben ihm stehende Glied der rechten Spalte durch Multiplikation mit 5. Das gilt für jede Zeile der Tabelle. Zur Übung werden noch weitere Schülerzahlen angegeben und dem Schema die entsprechenden Zeilen zugefügt. Wir haben also ein Verfahren gewonnen, das stets zum Ziel führt, solange Proportionalität besteht. Der gemeinsame Faktor bei allen Multiplikationen, hier die Zahl 5, heißt „Proportionalitätsfaktor". Er gibt an, wieviel Hefte jeder Schüler erhält. Damit ist eine operative Fassung des Proportionalitätsfaktors gewonnen, die der Schüler nicht auswendig zu lernen braucht, sondern durch Beschreibung seines eigenen Handelns findet. Während die ersten Ergänzungsübungen nur mit natürlichen Zahlen durchgeführt werden sollten, kann später mit Brüchen (auch mit Dezimalbrüchen) sowie mit positiven und negativen Zahlen gerechnet werden. Alle Zahlen müssen aber den realen Gegebenheiten entsprechen. Die Aufgaben des Lehrbuchs sind mit den

[65] H. Simon: Der Proportionalitätsfaktor. In „Mathematik und Physik in der Schule", Heft 4/1956.

gegebenen Einschränkungen (Vermeidung von Verhältnisbegriff und von Proportionen) im allgemeinen gut brauchbar.

Auf einen Punkt ist zu achten: Zwar ist die Proportionalität als Äquivalenzrelation eine gegenseitige Beziehung, das heißt, es könnte von „zueinander proportionalen“ Folgen gesprochen werden. Davon wurde allerdings kein Gebrauch gemacht, um die Entwicklung der Vorstellungen über funktionale Zusammenhänge nicht zu hemmen. Sobald aber bei proportionalen Folgen nach dem Proportionalitätsfaktor gefragt wird, muß unbedingt eine der beiden Folgen ausgezeichnet werden. Das ist bei Aufgabe 1a auf Seite 79 des Lehrbuchs zu beachten, wo Réaumur- und Celsiusgrade einander gegenübergestellt werden.

Nach ausreichender Übung ist eine exaktere Fassung der Proportionalität möglich: „Eine Folge heißt zu einer anderen proportional, wenn jedem Glied der einen Folge genau eines der anderen Folge entspricht und wenn es aus dem zugehörigen Glied der ersten Folge durch Multiplikation mit einer bestimmten Zahl hervorgeht. Diese Zahl heißt der Proportionalitätsfaktor“.

Die eindeutige Zuordnung der Glieder der Folgen ist mathematisch wesentlich. Es ist nicht erforderlich, von einem „sachlichen Zusammenhang“ der beiden Größen zu sprechen, zwischen denen Proportionalität bestehen soll, wie es in der Erklärung auf Seite 74 des Lehrbuchs geschieht. Dadurch würde der Begriff der Proportionalität auf konkrete Fälle beschränkt und die nötige Allgemeinheit kaum erreicht. Liegt etwa ein „sachlicher Zusammenhang“ zwischen einer Einmaleinsfolge und der Folge der natürlichen Zahlen vor? Bestehen solche Zusammenhänge zwischen den proportionalen Seiten ähnlicher Dreiecke? Zumindest für die Schüler dürfte ein solcher Zusammenhang schwer zu entdecken sein.

Auch die genauere Definition der Proportionalität sollte in das Schülerheft diktiert werden. Besser aber als eine wörtliche Reproduktion ist es, wenn die Schüler mit eigenen Worten das Wesentliche angeben und vor allem mit dem Proportionalitätsfaktor umgehen können. Dies wird durch zahlreiche Übungen gefördert. Zu formalen Aufgaben können Einmaleinsfolgen herangezogen werden.

Erste Folge:	6,	7,	10,	12
Zweite Folge:	72,	85,	120,	144

Sind die Folgen proportional? Stelle durch Abänderung Proportionalität her! Welches ist dann der Proportionalitätsfaktor? Mit dem Proportionalitätsfaktor ist ein zuverlässiges Mittel gegeben, um festzustellen, ob zwei gegebene Folgen proportional sind oder nicht. Die Glieder der zweiten Folge werden durch die entsprechenden Glieder der ersten Folge dividiert, und der Quotient wird geprüft. Ist er konstant, so liegt Proportionalität vor, andernfalls nicht. Der Verhältnisbegriff braucht zu diesem Zweck nicht eingeführt zu werden.

Jetzt kann auch eine Umwandlung der Schreibweise von Beispiel 1 vorgenommen werden: Aus $P \sim A$ wird $P = k \cdot A$; der Proportionalitätsfaktor k gibt hier an, wieviel Stück in einer Stunde hergestellt werden. Diese für die Physik wichtige Umformung wird an vielen Beispielen und Aufgaben geübt. Obwohl der Proportionalitätsfaktor in der Physik häufig eine Benennung trägt, ist es im Mathematikunterricht zunächst nicht nötig, ihn mit Benennung zu schreiben. In den Tabellen standen ja auch unbenannte Zahlen. Der Übergang zu den Benennungen kann später bei Bedarf vollzogen werden.

Schließlich sei noch auf Schülerfehler bei der Formulierung der Proportionalität hingewiesen. Die Schüler prüfen die Proportionalität von zwei Folgen etwa:

Stoffmenge in m	Preis in DM
1,50	22,50
2,40	36,00
3,10	46,50
....	.....
....	.....

Anstatt zu sagen: „Der Preis ist der Stoffmenge proportional“ oder: „Die Anzahl der DM ist der Anzahl der Meter proportional“, wird bisweilen gesagt: „Die DM sind den Metern proportional“ oder auch: „36 DM sind 2,40 m proportional“. Hier kann nur geduldiges Gegenüberstellen und Üben helfen. Es wäre gut, nach einer gewissen Zeit die Ausdrucksfähigkeit in einer Zettelarbeit oder einer Klassenarbeit zu prüfen, in der eine Aufgabe lauten sollte: „Erkläre an einem Beispiel, was Proportionalität bedeutet!“

In Beispiel 1 war schon auf die Umkehrung der Fragestellung eingegangen worden. Sie führt zu der Erkenntnis, daß auch $A \sim P$, $A = m \cdot P$ ist. Der neue Proportionalitätsfaktor ist der Kehrwert des alten: $m = \frac{1}{k}$. Die Herleitung sollte sorgfältig an Hand der beiden gegenübergestellten Folgen geschehen, bei denen jeweils, wie oben angegeben, die Zeile mit der 1 eingerahmt wird. Eine Anwendung findet das später im Physikunterricht, etwa bei der Umrechnung von Wärmeenergie in mechanische Energie und umgekehrt.

6.1.4. Arbeiten mit proportionalen Folgen

Wir kommen zum letzten Punkt, dem richtigen Arbeiten mit proportionalen Folgen. Dazu sind viele Übungen nötig. Hier können die Aufgaben des Lehrbuchs (S. 77/78, Nr. 1 bis 3; S. 79 bis 81, Nr. 1 bis 5) herangezogen werden. Dabei sind natürlich vorerst alle Aufgaben auszuschließen, bei denen nach einem Verhältnis oder nach Proportionen gefragt wird. Da inzwischen, etwa nach der 6. Stunde, auch die umgekehrte Proportionalität eingeführt worden ist, kommen Aufgaben folgender Typen vor:

1. Gegeben sei ein Paar von Folgen. Es ist zu entscheiden, ob Proportionalität vorliegt und, wenn ja, welche Form (Begründung!). Im Falle der direkten Proportionalität ist der Proportionalitätsfaktor anzugeben.
2. Gegeben seien eine Folge und eine Zahl. Es ist diejenige Folge zu bilden, die zu der gegebenen Folge proportional ist, wobei die gegebene Zahl der Proportionalitätsfaktor sein soll.
3. Es werden gar keine Folgen gegeben, sondern nur zwei Größen genannt (oder durch die graphische Darstellung gegeben), deren Abhängigkeit zu untersuchen ist. Damit liegt schon eine echte physikalische Fragestellung vor: Wovon hängt ein beobachteter Effekt ab? Hier müssen die Schüler selber Folgen (Meßreihen) bilden.

Aufgaben dieser drei Typen findet der Leser im Lehrbuch an den angegebenen Stellen. Der Unterricht in der sozialistischen Produktion liefert schon in Klasse 7 viele gute Möglichkeiten, auf die M. Gimpel[66] hingewiesen hat.

[66] M. Gimpel: Über die Einbeziehung technischer Aufgaben in das Stoffgebiet „Proportionen“. In „Mathematik und Physik in der Schule“, Heft 4/1959, S. 177 ff.

In welcher Weise mit proportionalen Folgen bei der Aufstellung von Proportionen gearbeitet wird, soll in Abschnitt 6.5. ausgeführt werden.

Innerhalb des Mathematikunterrichts sollte von nun an jede Gelegenheit wahrgenommen werden, den Begriff der Proportionalität anzuwenden. Gute Gelegenheiten zur Übung bietet die Kreislehre in Klasse 7: Die Messung des Umfangs U und des Durchmessers d verschiedener Kreise an Gegenständen des täglichen Gebrauchs oder an Modellen führt zur Aufstellung einer Tabelle und zur Feststellung der Proportionalität. Werden dagegen die Inhalte I verschiedener auf Millimeterpapier gezeichneter Kreise ausgezählt und mit den Durchmessern in einer Tabelle zusammengestellt, so ergibt sich keine Proportionalität. Daß hier ein Fall der verallgemeinerten Proportionalität vorliegt, $I \sim d^2$, sollte nur in Ausnahmefällen bei einer besonders gut arbeitenden Klasse erörtert werden. Weitere Möglichkeiten bieten die Flächen- und Rauminhaltsberechnungen: Die Flächen des Parallelogramms und des Dreiecks sind bei gleicher Grundlinie, die Volumina von Prisma, Zylinder (Klasse 7), Pyramide (Klasse 8) bei gleicher Grundfläche proportional zu den Höhen. In der Trigonometrie beinhaltet der Sinussatz die Proportionalität der Folge der Dreiecksseiten a, b, c zu der Folge sin α, sin β, sin γ. Auf die zahlreichen Anwendungen in der Ähnlichkeitslehre soll hier nicht eingegangen werden.[67]

Auch im Physikunterricht sollte von jetzt an in allen Klassenstufen bei jeder Gelegenheit der Begriff der Proportionalität angewendet werden. Als Beispiele aus dem Physikunterricht der Klasse 7 seien genannt: Die Hangabtriebskraft, die proportional zur Last[68], die Arbeit, die proportional zur Masse[69], die Leistung, die proportional zur Arbeit[70], der Auftrieb eines in eine Flüssigkeit getauchten Körpers, der proportional zum Gewicht der von diesem Körper verdrängten Flüssigkeitsmenge (und auch zur Wichte der Flüssigkeit)[71] ist. Auch die Frage: „Welcher Zusammenhang besteht zwischen Kolbendruck und Kolbendruckkraft?“[72] bietet ein Beispiel für Proportionalität. Nicht überall werden im Physikunterricht der Klasse 7 schon bei der Erarbeitung die genannten Gesetze mit Hilfe des Begriffs der Proportionalität formuliert werden können, weil die Proportionalität im Mathematikunterricht dieser Klasse nicht als erstes Stoffgebiet behandelt wird. Bei Wiederholungen und Übungen sollten aber, sobald proportionale Folgen behandelt worden sind, diese physikalischen Gesetzmäßigkeiten nach Möglichkeit mit Hilfe des Begriffs der Proportionalität ausgedrückt werden. In den Physiklehrbüchern der höheren Klassen wird dieser Gesichtspunkt weitgehend beachtet. Allerdings wird dabei oft eine Ausdrucksweise benutzt, die nicht einwandfrei ist. So heißt es bei der Gewinnung des Ohmschen Gesetzes nach der Definition der Einheit des Widerstandes: „Durch diese Festlegung kann man von der Proportion $I \sim \frac{U}{R}$ zur Gleichung übergehen. Der Proportionalitätsfaktor hat infolge der Festsetzung der Widerstandseinheit den Wert 1. Es ergibt sich

67 Vgl.: Methodische Beiträge zum Unterricht im Fach Mathematik, Aufbau des Planimetrieunterrichts. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1960, S. 31 ff.

68 Physik, Ein Lehrbuch für das siebente Schuljahr. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1960, S. 46.

69 Ebenda, S. 89.

70 Ebenda, S. 90.

71 Ebenda, S. 111.

72 Ebenda, S. 103.

somit das *Ohmsche Gesetz:* ... $I = \frac{U}{R}$."[73] Statt „Proportion" muß es heißen „Proportionalität". Die gleiche Verwechslung findet sich bei der Proportionalität der Arbeit eines Stroms zu Spannung, Stromstärke und Zeit[74] und an anderen Stellen.[75]

Auch in den anderen Fächern, vor allem aber im Unterricht in der sozialistischen Produktion, sollte der Begriff „proportional" dort, wo er angebracht ist, verwendet werden.

6.2. Einführung der umgekehrten Proportionalität: Produktgleichheit

Hier kann sich der Lehrer nicht in gleichem Maße auf vorhandene Vorstellungen stützen wie bei der direkten Proportionalität. Daher erforderte die Behandlung des „umgekehrten Verhältnisses" schon in den Zeiten des Dreisatzes besondere Aufmerksamkeit. Die Schwierigkeiten werden kaum gemildert, wenn die umgekehrte Proportionalität zeitlich wesentlich später eingeführt wird. Wie wir sahen[76], stehen dem gewichtige Gründe entgegen. Gerade die Gegenüberstellung zur direkten Proportionalität von Anfang an kann zu einer klareren Erfassung der umgekehrten Proportionalität führen, da das Operieren mit multiplikativen Beziehungen von dort auf den neuen Fall — bei entsprechenden Abänderungen — übertragen werden kann. Hier entsteht die Frage, ob die umgekehrte Proportionalität als Produktgleichheit einzuführen ist.

Zweifellos hat das Produkt umgekehrt proportionaler Größen eine ähnlich reale Bedeutung wie der Proportionalitätsfaktor. Der Leser mache sich das an dem Beispiel aus dem Mathematiklehrbuch der Klasse 7, Seite 88f., klar: 72 m³ Bausand sollen durch Kipper mit dem Fassungsvermögen von je 1 m³ abgefahren werden. Es sind also 72 Fuhren nötig, die entweder von einem einzigen oder von mehreren Kippern gefahren werden. Das Produkt aus der Zahl der verwendeten Kipper und der Zahl der Fahrten je Kipper ist demnach stets gleich 72. Wird also irgendeine Zahl K von Kippern genannt, so läßt sich die Zahl F der Fahrten je Kipper durch einfache Division finden. Es entsteht das Schema von Seite 89 des Lehrbuches. Dieses Verfahren läßt sich den Schülern sicher gut erklären.

Ein Vergleich dieses Vorgehens mit dem bei direkt proportionalen Folgen eingeschlagenen Weg zeigt, daß hier von vornherein nicht in Spalten, sondern in Zeilen gearbeitet wird.

Die andere Fassung der umgekehrten Proportionalität stützt sich auf multiplikative Beziehungen innerhalb der linken Spalte: Wir verdoppeln, verdreifachen, halbieren usw. die Anzahl der Kipper. Mit den entsprechenden Gliedern der zweiten Folge ist dann die umgekehrte Rechenoperation vorzunehmen. Von Additionen und Subtraktionen sehen wir ab. Soll nun die umgekehrte Proportionalität als Spezialfall der verallgemeinerten Proportionalität erscheinen, so muß von K zu $\frac{1}{K}$ übergegangen werden. Die Schüler müssen erkennen, daß Ver-

[73] Physik, Ein Lehrbuch für das achte Schuljahr. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1960, S. 141f.

[74] Ebenda, S. 164.

[75] Physik, Ein Lehrbuch für das neunte Schuljahr. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1960, S. 42 und 176.

[76] Vgl. S. 40ff.

doppelung von K gleichbedeutend ist mit Halbierung von $\frac{1}{K}$ und umgekehrt.

Dann erst kann die Proportionalität $F \sim \frac{1}{K}$ ausgesprochen werden. Zweifellos bestehen hier Schwierigkeiten für die Schüler, zumal wenn in der Bruchrechnung keine funktionalen Betrachtungen angestellt worden waren. Diese Schwierigkeiten sind aber nicht unüberwindlich, wenn neben die Spalten von K und F eine dritte Spalte gestellt wird, die die Werte von $\frac{1}{K}$ enthält.

Dagegen steht der Vorteil, daß der Schüler seine Erfahrungen mit proportionalen Folgen zunächst anzuwenden versucht und erkennt, daß gewisse Gemeinsamkeiten, aber auch grundlegende Unterschiede bestehen: Sowohl bei der direkten als auch bei der umgekehrten Proportionalität werden in der linken Spalte multiplikative Beziehungen gesucht und entsprechende Operationen mit den zugehörigen Gliedern der rechten Spalte ausgeführt. Während diese Operation aber bei der direkten Proportionalität mit der in der linken Spalte übereinstimmt, ist bei der umgekehrten Proportionalität die Umkehroperation auszuführen. Bei der direkten Proportionalität wächst die zweite Folge *gleichsinnig* mit der ersten, bei der umgekehrten Proportionalität hängt sie *gegenläufig* von dieser ab.

Wenn die umgekehrte Proportionalität in dieser Weise eingeführt wird, gewöhnen sich die Schüler an das Arbeiten mit *Analogien,* das in der Mathematik ein wertvolles Forschungsmittel ist.

Ein weiteres Argument spricht für die explizite Form der umgekehrten Proportionalität: die in der Physik übliche Ausdrucksweise. Selbst dort, wo — wie beim Boyle-Mariotteschen Gesetz — die Konstanz eines Produkts hervorgehoben wird, findet sich nicht der Ausdruck „produktgleiche Größen". So heißt es in dem Physiklehrbuch für Klasse 8:

> „Für eine abgeschlossene Gasmenge ist das Produkt aus Druck und Volumen bei gleichbleibender Temperatur konstant ... wird ein Gas bei konstanter Temperatur zusammengedrückt, so sind die Drücke den Volumina umgekehrt proportional."[77]

Nun finden wir zwar auch diese Fassung der umgekehrten Proportionalität in unserem Mathematiklehrbuch, aber doch erst an zweiter Stelle. Bekanntlich prägt sich die erste Formulierung eines neuen Begriffs am stärksten ein, zumal wenn sie wie hier dem Rechenweg entspricht. Konsequenterweise müßte, falls die umgekehrte Proportionalität als „Produktgleichheit" bezeichnet wird, die direkte Proportionalität als „Quotientengleichheit" benannt werden. Das entspräche gleichfalls der Einführung dieses Begriffs mittels des Verhältnisses. Quotientengleichheit und Produktgleichheit statt direkter und umgekehrter Proportionalität — eine solche Terminologie würde sich stark von der in der Wissenschaft, in der Technik und im täglichen Leben üblichen Ausdrucksweise entfernen. Wenn aber unsere Schüler die allgemein gebräuchliche Terminologie kennenlernen sollen, entsteht die Frage: Warum werden die neuen Begriffe nicht in der durch den Namen nahegelegten Art eingeführt, warum werden die Schüler durch die andere Formulierung belastet?

77 Physik, Ein Lehrbuch für das achte Schuljahr. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1960. S. 28.

Aus diesen Gründen ist es wohl trotz der erwähnten Schwierigkeiten ratsam, die umgekehrte Proportionalität parallel zur direkten Proportionalität zu erklären durch die Beziehung des Verdoppelns, Halbierens usw. in einer Spalte und die entsprechenden Umkehroperationen in der anderen Spalte. Auf die Produktgleichheit kann dann später als Rechenhilfe hingewiesen werden, ohne diese Eigenschaft als eine völlig neue Gesetzmäßigkeit hinzustellen.

6.3. Gegenüberstellung von direkter und umgekehrter Proportionalität zu anderen Formen der Abhängigkeit

Für die Gegenüberstellung von direkter und umgekehrter Proportionalität gibt es in unseren alten und neuen Lehrbüchern eine Fülle von Beispielen. Die Entscheidung darüber, welcher Fall vorliegt, wird meist unter Benutzung der Formulierungen vorgenommen: „je größer ... desto größer“ (direkte Proportionalität) beziehungsweise „je größer ... desto kleiner“ (umgekehrte Proportionalität). Diese Gegenüberstellung ist aber noch nicht ausreichend. Neben die direkte Proportionalität sollten Abhängigkeiten gestellt werden, bei denen eine Folge zwar mit einer anderen wächst, aber nicht proportional, und neben die umgekehrte Proportionalität solche Abhängigkeiten, bei denen eine Folge abnimmt, während die zugeordnete Folge wächst, ohne daß dies umgekehrt proportional geschieht.

Für den ersten Fall kann eine Tabelle mit Posttarifen für Inlandbriefe im Fernverkehr benutzt werden. Briefe bis zu 20 g (es müßte eigentlich „pond“ heißen!) kosten 0,20 DM, von 20 g bis 250 g — 0,40 DM, von 250 g bis 500 g — 0,60 DM, von 500 g bis 1000 g — 0,80 DM. Wir verwenden als Folge I folgende Briefgewichte in g:

$$10, 20, 30, 40, \ldots, 200, 210, \ldots, 250, \ldots, 300, \ldots,$$

als Folge II das zugehörige Porto in DM. Ein Brief von 10 g kostet 0,20 DM, einer von 100 g aber bedeutend weniger als das Zehnfache. Allerdings liegt hier nicht eine im strengen Sinn monoton wachsende Folge vor. Daher empfiehlt sich das Heranziehen weiterer Beispiele. Von allgemeinem Bildungswert ist der Hinweis auf den Bau von Reihenhäusern oder auf die Massenanfertigung von genormten Einzelteilen; hier ist der Herstellungspreis kleiner, als es der Proportionalität entsprechen würde.

Gute Möglichkeiten für Schülerübungen enthält folgende Aufgabe: „Es sind Dreiecke aus $b = 4$ cm, $c = 6$ cm und $\alpha = 20°, 25°, 30°, 40°, 50°, 60°, 75°$ zu konstruieren, wobei jedesmal die Länge der Seite a auszumessen ist. Stelle die zusammengehörenden Werte von α und a in einer Tabelle zusammen!“ Die Schüler erkennen, daß zu jedem Wert von α genau ein Wert von a gehört, daß ferner a mit α wächst, daß aber Verdoppelung, Verdreifachung usw. von α keineswegs zur Verdoppelung, Verdreifachung usw. von a führt. Zwar genügt schon eine einzige Gegenüberstellung, zum Beispiel $\alpha = 20°$ und $\alpha = 40°$, um zu zeigen, daß keine Proportionalität vorliegt, aber in diesem Alter wächst mit der Anzahl der Messungen die subjektive Gewißheit der Schüler. Der Lehrer kann dann darauf hinweisen, daß auch hier ein Gesetz für die Abhängigkeit der Länge von a von der Größe des Winkels α vorliegt, das sie als Schüler der Klasse 10 kennenlernen werden (Kosinussatz). Bei anderen Beispielen, wie bei der Abhängigkeit des

Flächeninhalts des Quadrats von der Länge der Quadratseite, ist den Schülern das Gesetz der Abhängigkeit bekannt. Diese Tatsache ist aber hier nicht entscheidend. Es kommt vielmehr nur darauf an, die Schüler davon zu überzeugen, daß nicht jede Folge, die einer anderen gliedweise entspricht und gleichsinnig mit ihr wächst, zu ihr proportional sein muß.

Beispiele von Folgen, deren Glieder gegenläufig zu den Gliedern einer entsprechenden Folge abnehmen, interessieren uns hier ganz besonders, um die umgekehrte Proportionalität richtig zu erfassen. Als Gegenbeispiel kann auch hier die Massenanfertigung von genormten Einzelteilen herangezogen werden. Die zur Herstellung von 1000 Stück notwendige Zeit setzt sich zusammen aus der Einrichtungszeit und der Produktionszeit. Betrachten wir als Folge I die Stückzahl, als Folge II die für ein Stück erforderliche Herstellungszeit. Je größer die Glieder der Folge I werden, desto kleiner werden die der Folge II, da die Einrichtungszeit durch eine größere Zahl zu dividieren ist. Dennoch liegt keine umgekehrte Proportionalität vor. Als geometrische Aufgabe, die wieder Gelegenheit zu Schülerübungen gibt, sei folgende vorgeschlagen: „Zeichne gleichschenklige Dreiecke mit den Basiswinkeln $\alpha = 20°, 40°, 60°$ und miß jeweils den Winkel γ an der Spitze. Stelle α und γ in einer Tabelle zusammen!"[78] Auch jetzt gehört zu jedem α genau ein γ; γ wird um so kleiner, je größer α wird, aber es besteht keine umgekehrte Proportionalität. Das Funktionsgesetz können die Schüler finden: $\gamma = 180° - 2\,\alpha$. Während dieses Beispiel daher auch rein rechnerisch erledigt werden kann, sollte die folgende aus der Kreislehre entnommene Problemstellung von einer Zeichnung begleitet sein: „Eine Sekante eines Kreises mit dem Radius r wird parallel zu ihrer Ausgangslage verschoben. Wie ändert sich die Sehnenlänge s mit dem Abstand a der Sekante vom Kreismittelpunkt?" Obwohl hier die Funktionsgleichung $s = 2\sqrt{r^2 - a^2}$ erst nach Behandlung des Satzes des Pythagoras gefunden werden kann, sehen die Schüler ohne weiteres, daß zu jedem a genau ein s gehört, daß s um so kleiner wird, je größer a wird, daß aber beispielsweise die Verdoppelung von a keineswegs zur Halbierung von s führt.

Die Behandlung solcher Beispiele gewöhnt die Schüler daran, vor dem Ansetzen einer Bestimmungsproportion nicht nur die Richtung der Änderung, sondern auch die Proportionalität zu prüfen. Zwar braucht der Lehrer für solche Betrachtungen einige Zeit, die nicht unmittelbar dem Erwerb von Rechenfertigkeiten im Auflösen von Bestimmungsproportionen zugute kommt; derartige Übungen dienen aber der Entwicklung des kritischen Denkens, helfen Fehler, insbesondere beim Aufstellen von Proportionen, vermeiden und bereiten den Funktionsbegriff vor.

6.4. Einführung des Verhältnisbegriffs

Die methodischen Schwierigkeiten, die erfahrungsgemäß bei der Einführung des Verhältnisbegriffs bestehen, liegen weniger in dem mathematischen Sachverhalt als darin begründet, daß hier ein Quotient, ein Bruch, nicht zur Angabe der Quantität einer Menge, sondern zum Messen des Zählers am Nenner verwendet wird. Auch der sprachliche Ausdruck und die Schreibweise bereiten den Schülern anfänglich Schwierigkeiten.

[78] Vgl. mit einer ähnlichen Aufgabe in: Rechnen, Messen, Konstruieren; siebentes Schuljahr. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1959, S. 77 f., Nr. 3.

Bei der Bildung neuer mathematischer Begriffe ist es vorteilhaft, an Bekanntes anzuknüpfen und die Schaffung des neuen Begriffs ausreichend zu motivieren. Daher empfiehlt es sich, trotz der auf Seite 29 geäußerten Bedenken, von Spielen auszugehen, bei denen der Sieg durch Torverhältnisse gemessen wird. Der Lehrer erwähnt beispielsweise das Ergebnis eines Fußballspiels, in dem eine Mannschaft gegen eine andere „mit 5 zu 4 gesiegt" hat. Im Unterrichtsgespräch wird die Bedeutung dieser Aussage geklärt. Dann mag folgender Fall zur Diskussion gestellt werden: Mannschaft A siegte gegen Mannschaft B im Eishockey mit 12 zu 6, gegen eine Mannschaft C in einem anderen Treffen mit 15 zu 8. Wann hat die Mannschaft A besser gespielt? Im Unterrichtsgespräch wird festgestellt, daß Mannschaft A im ersten Treffen 6 Tore mehr als der Gegner erzielte, im zweiten Treffen sogar 7 Tore mehr, daß aber die Mannschaft A dennoch im ersten Spiel besser abgeschnitten hat, weil sie hier doppelt soviel Tore schoß wie der Gegner, beim zweiten Spiel aber weniger als doppelt soviel. An diesem Beispiel wird klar, daß in manchen Fällen ein Vergleich durch Bildung der Differenz (Differenz der Torzahlen) nicht das Wesentliche zum Ausdruck bringt. Damit wird die Verhältnisbildung motiviert.

Der Lehrer führt das Wort „Verhältnis" ein: „Die Spielstärke der Mannschaft A verhält sich zur Spielstärke der Mannschaft B wie 12 zu 6" An weiteren Beispielen von Wettkämpfen wird die Ausdrucksweise geübt: „Die Spielstärke der Mannschaft C verhält sich zur Spielstärke der Mannschaft A wie 8 zu 15." Als schriftliche Kurzform wird eingeführt:

$$\text{Spielstärke}_C : \text{Spielstärke}_A = 8 : 15 .$$

Diese Ausdrucksweise wird auf ähnliche Fälle übertragen, zum Beispiel auf Klassenwettbewerbe, die durch Punktvergleiche entschieden werden. Als vorläufige Erklärung kann sich anschließen: Wir können Spielstärken von zwei Mannschaften (Stand von zwei Klassen im Wettbewerb) miteinander vergleichen, indem wir das Verhältnis der Torzahlen (Punktzahlen) bilden. Diese Zahlen heißen Glieder des Verhältnisses.

Um die Bildung von Verhältnissen noch besser zu motivieren, empfiehlt sich ein Beispiel folgender Art: In der Deutschen Demokratischen Republik studierten 1958 insgesamt 64106, in Westdeutschland 155005 Menschen[79], also bedeutend mehr. Es wäre aber falsch, die Bildungssituation der Bevölkerung nach diesen Zahlen zu beurteilen, denn in Westdeutschland leben etwa dreimal soviel Menschen wie in der Deutschen Demokratischen Republik. Es studieren dort aber viel weniger als dreimal soviel Menschen. Wir bilden das Verhältnis: Zahl der Studierenden zur Gesamtzahl der Bevölkerung. Das Verhältnis für die Deutsche Demokratische Republik lautet 64106 : 17311000, das für Westdeutschland 155005 : 51453000. Wir werden später sehen, wie solche Verhältnisse verglichen werden. Dabei wird sich zeigen, daß in der Deutschen Demokratischen Republik „verhältnismäßig" mehr Menschen als in Westdeutschland studieren. — Beispiele dieser Art, deren Zahl der Lehrer durch aktuelles Material aus der Tagespresse ohne Schwierigkeit vermehren kann, zeigen, daß in manchen Fällen erst Zahlverhältnisse ein sinnvolles Vergleichen ermöglichen.

Schließlich behandeln wir zur Übung der Sprech- und Schreibweise Vergleichsaufgaben aus verschiedenen Gebieten, die nach den Schwierigkeiten zu steigern sind, etwa:

[79] Vgl. das Statistische Jahrbuch der Deutschen Demokratischen Republik 1959. VEB Deutscher Zentralverlag, Berlin 1960, Anhang II, S. 596.

Beispiel 1. Die Anzahl der Arbeiter und Angestellten in der Volkswirtschaft Sibiriens wuchs von 2,3 Millionen im Jahre 1940 auf 5,8 Millionen im Jahre 1960. Erste Möglichkeit eines Vergleichs: Die Anzahl der dort arbeitenden Menschen wuchs um 3,5 Millionen, kurz: $z_2 - z_1 = 3{,}5$ Millionen. Zweite Möglichkeit des Vergleichs: Die Anzahl der dort im Jahre 1960 arbeitenden Menschen verhält sich zur Anzahl der dort im Jahre 1940 arbeitenden Menschen wie 5,8 Millionen zu 2,3 Millionen, kurz: $z_2 : z_1 = 5800000 : 2300000$.

Beispiel 2. Der bisher gebaute Schienendrehkran 10 VS hat eine Tragkraft von 10,5 t, der neue Eisenbahndrehkran dagegen eine solche von 20 t. Die beiden Vergleiche führen auf: $T_2 - T_1 = 9{,}5$ t und $T_2 : T_1 = 20 : 10{,}5$.

Beispiel 3. Die Masse von Sputnik I betrug 83,6 kg, die des am 4. 2. 1961 gestarteten Testsatelliten 6,5 t. Die Vergleiche führen auf $m_2 - m_1 = 6416{,}4$ kg und $m_2 : m_1 = 6500 : 83{,}6$.

Natürlich ist die Sprechweise in jedem Fall zu üben. Um die Schwierigkeiten nicht zu häufen, ist es ratsam, vorläufig nur die gegebenen Zahlen zu einem Verhältnis zusammenzufügen, ohne zu kürzen oder zu erweitern. Vorerst sollte nur in einfachen Fällen die Größe des entstehenden Quotienten betrachtet werden, etwa im Beispiel 1: In Sibirien arbeiten jetzt mehr als doppelt soviel Menschen wie im Jahre 1940. Dadurch wird klar, daß hier das Verhältnis eine bessere Vergleichsmöglichkeit als die Differenz bietet. Allmählich lernen die Schüler selbst entscheiden, welche Form des Vergleichs zu wählen ist. Auf alle Fälle sollten bei der Einführung des Verhältnisbegriffs Zahlenproportionen vorerst vermieden werden. In der Niederschrift stehen links die verglichenen Größen, eventuell zweckmäßig abgekürzt, rechts die Zahlen, die einen quantitativen Vergleich ermöglichen, ohne Benennung. Gegebenenfalls sind dabei Umrechnungen wie in Beispiel 3 vorzunehmen.

Wir wählen jetzt Beispiele, bei denen das Verhältnis aus verschieden benannten Zahlen gebildet wird, ähnlich wie es im Methodischen Handbuch[80] geschieht: Die Pioniergruppe 7 sammelte 78 kg Schrott, die Pioniergruppe 6 sammelte 96 kg. Wenn wir das Verhältnis 78 zu 96 bilden, so sagt dies noch wenig über den Sammeleifer der Pioniergruppen, denn es kommt auf die Anzahl der Pioniere in jeder Gruppe an. In Gruppe 7 befinden sich 20 Pioniere, in Gruppe 6 aber 30. Wir bilden das Verhältnis von Schrottmenge zur Anzahl der Pioniere. Für Gruppe 7 ist dieses Verhältnis 78 : 20. Der Quotient gibt an, wieviel Schrott durchschnittlich ein Pionier gesammelt hat, nämlich 3,9 kg. Das entsprechende Verhältnis für Gruppe 6 ist 96 : 30. Hier hat ein Pionier durchschnittlich 3,2 kg gesammelt. Obwohl diese Gruppe mehr Schrott zusammengebracht hat, war die andere Gruppe tüchtiger. Ähnliche Betrachtungen lassen sich bei dem Beispiel auf Seite 12 dieses Beitrages anstellen, wo die Bevölkerungsdichte der Volksrepublik China durch das Verhältnis Einwohnerzahl zu Flächengröße (in km²) angegeben wird. Sie kann mit der Bevölkerungsdichte anderer Länder verglichen werden: zum Beispiel lautet das entsprechende Verhältnis für die Deutsche Demokratische Republik 17400000 zu 107862 (Stand vom 31. 12. 1957). Ein Beispiel aus der Industrie sei noch hinzugefügt: Im Eisen- und Hüttenwerk Thale wird eine Maschine hergestellt, mit der ein Arbeiter an einem achtstündigen Arbeitstag 6000 Töpfe formen kann. Mit den alten Pressen formten acht Arbeiter an acht Maschinen an einem Tag

[80] Mathematikunterricht — Methodisches Handbuch für den Lehrer. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1960, S. 230 f.

zusammen nur 2000 Töpfe. Wir bilden zum Vergleich das Verhältnis der Anzahl der Töpfe zur Anzahl der Pressen und finden im ersten Fall 6000 : 1, im zweiten 2000 : 8. Die Quotienten sind 6000 beziehungsweise 250. Die neue Maschine arbeitet also sehr viel rentabler. Das kann noch präzisiert werden durch erneute Verhältnisbildung; Leistung der neuen Maschine zu Leistung der alten Maschine wie 6000 : 250. Der Quotient ist 24. Die neue Maschine stellt in gleicher Zeit 24mal soviel Töpfe her wie eine alte.

In unseren Produktionsberichten begegnen uns häufig solche Verhältnisbildungen. Wenn eine landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaft, die sich überwiegend mit der Rinderhaltung befaßt, ihren Kuhbestand in Stück nennt, so gibt dies erst in Verbindung mit der zugehörigen Hektarzahl einen Einblick in die Stärke der LPG. So nennt eine LPG des Typs III aus dem Kreis Stendal einen Besatz von 24 Kühen je 100 Hektar. Dieses Verhältnis will sie auf 31 Kühe je 100 Hektar erhöhen. Die Marktproduktion an Milch wird dabei von 411 kg je Hektar auf 790 kg je Hektar erhöht. Als Unterlagen für Planberechnungen spielen solche Verhältnisse aus verschieden benannten Zahlen gleichfalls eine wichtige Rolle. So erhalten künftig die Genossenschaftsbauern von einer jährlichen Marktproduktion an Milch von 400 kg an für je 100 kg Milch 4 kg Futtermittel.[81] Anregungen zu weiteren Aufgaben dieser Art findet der Leser auch im Lehrbuch für Klasse 7 auf den Seiten 92 und 93.

In diesen Fällen, wo verschieden benannte Größen ins Verhältnis gesetzt werden, hat die Differenzbildung keinen Sinn; dagegen ist die Verhältnisbildung durchaus sinnvoll: Sie schafft neue Begriffe (Milchertrag je Kuh, Hektarertrag, Pro-Kopf-Verbrauch, Bevölkerungsdichte usw.), die wieder mit anderen, gleichartig gebildeten Begriffen verglichen werden können.

An Hand geeignet gewählter Aufgaben wird den Schülern klar, daß der mathematische Ausdruck für das Verhältnis ein *Quotient* ist und daß mit ihm genauso wie mit jedem anderen Quotienten gearbeitet werden kann. Verhältnisse können als gemeine Brüche geschrieben, gekürzt oder erweitert und als Dezimalbrüche angegeben werden. In Beispiel 2 ist das Verhältnis 200 : 105 rund 1,9. In Beispiel 3 ist 65000 : 836 rund 77. Das Verhältnis der Anzahl der Studierenden zur Anzahl der Gesamtbevölkerung ist für die Deutsche Demokratische Republik 0,0037 und für Westdeutschland 0,00303. Auf 10000 Einwohner kommen also in der Deutschen Demokratischen Republik 37, in Westdeutschland nur etwa 30 Studierende im Durchschnitt. An solche Berechnungen wird später die Einführung von Proportionen angeschlossen.

Wertvolle Dienste, um die Brücke vom Verhältnis zum Quotienten zu schlagen, vermag die graphische Darstellung zu leisten. In den Beispielen 1 bis 3 können die beiden miteinander verglichenen Größen jeweils als Rechteckstreifen mit gleicher Breite dargestellt werden. Der Vergleich der Höhen ermöglicht Aussagen wie: Die Zahl der in Sibirien arbeitenden Menschen ist auf mehr als das Doppelte gestiegen (Beispiel 1).

Sobald das Verhältnis als Quotient erkannt ist, können auch Aufgaben mit Maßstäben gerechnet werden, zum Beispiel: „Die Entfernung Berlin—Leipzig beträgt auf der Karte 34 cm, in der Natur 168 km. Berechne den Maßstab der

[81] Die meisten Beispiele sind dem „Neuen Deutschland" aus den Monaten Dezember 1960 bis März 1961 entnommen.

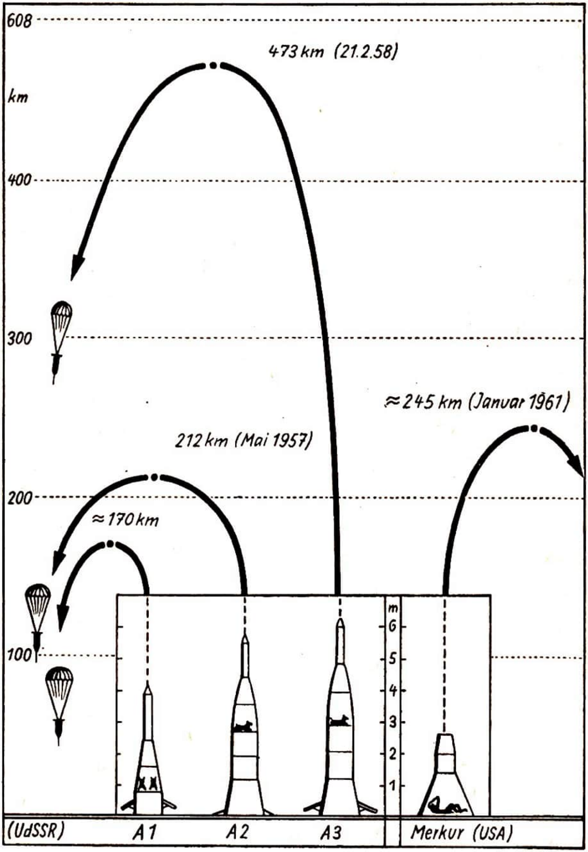
608
km
400
300
200
100
473 km (21.2.58)
≈ 245 km (Januar 1961)
212 km (Mai 1957)
≈ 170 km
m
6
5
4
3
2
1
(UdSSR)
A 1
A 2
A 3
Merkur (USA)

Abb. 4

Karte!" Umgekehrt kann mit Hilfe des gegebenen Maßstabes die Entfernung zweier Orte aus ihrem Abstand auf der Karte berechnet werden. Als weitere Anwendungen von Maßstabrechnungen können wieder graphische Darstellungen herangezogen werden. Unsere Presse liefert zahlreiche gute Beispiele, die zur Berechnung von Verhältnissen verwendet werden können, allerdings auch bisweilen solche, die nicht unbedenklich sind. So werden bisweilen Zahlen für die Getreideproduktion in den einzelnen Ländern veranschaulicht durch gefüllte Säcke, für die Schweinezucht durch Schweine, für den Schiffbau durch Schiffe. Auch Abbildung 4 gehört hierher. Es bleibt bei diesen Darstellungen unklar, ob eine maßstäbliche Verkleinerung sich nur auf die Länge beziehungsweise Höhe, auf die abgebildete Fläche oder den (nur vorstellbaren) Rauminhalt beziehen soll. Die abstrakte Darstellung durch Rechteckstreifen, Strecken oder Kreissektoren drückt die Zahlenverhältnisse viel deutlicher aus, sofern die Abgrenzungslinien unmißverständlich gezeichnet sind. Das ist bei Abbildung 2 auf Seite 10 nicht der Fall. Dagegen zeigen die Abbildungen 5 und 6, daß auch bei abstrakten, maßstabgetreuen Darstellungen eindrucksvolle Wirkungen erzielt werden können.

Schließlich sei noch auf einen sehr weit verbreiteten Fehler in der Ausdrucksweise beim Vergleichen zweier Größen hingewiesen: Es wird gesagt, daß ein Flugzeug „zehnmal schneller", ein Sputnik „77mal schwerer" ist: in ein und derselben Nummer der Zeitschrift „Sowjetwissenschaft"[82] lesen wir richtig: „An den sowjetischen Hochschulen studieren fast viermal soviel Studenten wie in England, Frankreich, Westdeutschland und Italien zusammengenommen"[83] und falsch: „In den höheren Lehranstalten der UdSSR studieren gegenwärtig etwa viermal mehr Studenten als in England, Frankreich, Westdeutschland und Italien zusammengenommen, . . ."[84]. In der falschen Ausdrucksweise werden die beiden Möglichkeiten des Vergleichs, die Bildung der Differenz und die des Verhältnisses, miteinander vermengt. Der Komparativ ist nur bei der Differenz anwendbar und kann nur spezifiziert werden durch die Angabe, *um* wieviel das Flugzeug schneller, der Sputnik schwerer ist usw. In den genannten Fällen muß es heißen: „zehnmal so schnell", 77mal so schwer", viermal soviel".

Der Schüler muß sich die Verhältnisbildung als Hilfsmittel des Größenvergleichs der Sache nach, im Ausdruck und in der Schreibweise völlig zu eigen machen. Sobald der Schüler damit vertrauter geworden ist, sollte der Lehrer auf die Ausgangsbeispiele (Fußball- und Hockeyspiele) zurückkommen und erklären, warum hier keine Verhältnisse im mathematischen Sinn vorliegen: Es kann nicht mit ihnen gerechnet werden wie mit mathematischen Verhältnissen; denn Verhältnisse wie 3 : 0 gibt es in der Mathematik nicht. An Hand von Beispielen lernt der Schüler, ob er in bestimmten Fällen besser eine Differenz oder ein Verhältnis zum Vergleich heranzieht, ob er gleich oder verschieden benannte Größen ins Verhältnis setzt. Seine Aktivität und sein Blick für diese Probleme können gefördert werden durch das Halten kleiner Vorträge oder die Anfertigung schriftlicher Arbeiten aus Gebieten der Erdkunde, Staatsbürgerkunde oder Geschichte auf Grund von Zeitungsartikeln, Broschüren oder Lehrbuchabschnitten, in denen Zahlen verglichen werden.

[82] Sowjetwissenschaft, Gesellschaftswissenschaftliche Beiträge, März 1961.

[83] A. a. O., S. 301.

[84] A. a. O., S. 265.

6.5. Proportionen

Die unterrichtliche Behandlung der Proportionen dürfte bei sorgfältigem Vorgehen nach den in den vorangegangenen Abschnitten gekennzeichneten Schritten auf keine besonderen Schwierigkeiten stoßen. Wenngleich auf Seite 36 ausgeführt wurde, daß das Neue in unserem Lehrplan weniger in der Ersetzung der Dreisatzrechnung durch Proportionen oder in deren früherer Behandlung gesehen wird, so darf dies nicht zu einer Geringschätzung dieses Unterrichtsabschnitts

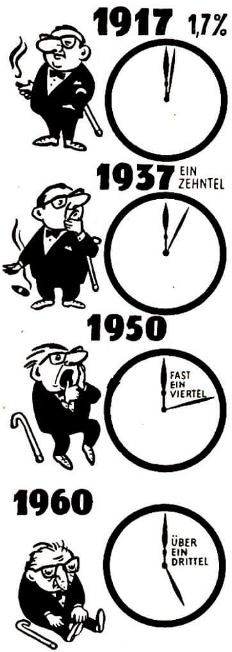

Abb. 5

Anteil der Produktion der sozialistischen Länder an der Weltproduktion

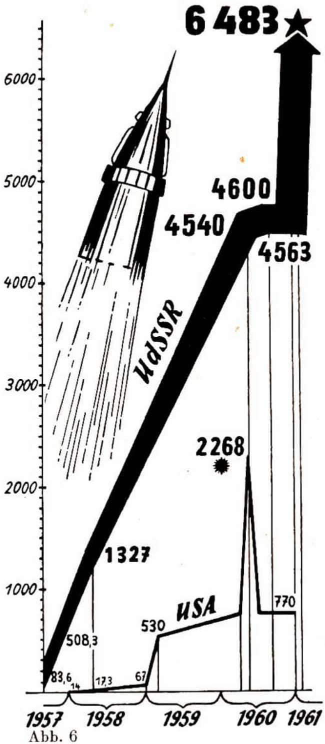

Abb. 6

führen. Die Schüler müssen vielmehr sichere Kenntnisse über Proportionen und Fertigkeiten im Umgehen mit ihnen erwerben.

Wir beschäftigen uns zuerst mit der Einführung von Proportionen (6.5.1.), darauf mit der Aufstellung und Lösung von Bestimmungsproportionen (6.5.2.), um schließlich noch einen Blick auf den Dreisatz zu werfen (6.5.3.) und die Stellung der Proportionen in unserem Unterricht zu klären.

6.5.1. Einführung von Proportionen

Es empfiehlt sich, zuerst die identische Proportion einzuführen, wobei sich gut an das Kürzen und Erweitern von Verhältnissen anknüpfen läßt (vgl. S. 60 f.). Dies geschieht auch bei allen drei im Abschnitt 5 angeführten Wegen. Die Schüler haben ja bereits Proportionen vor sich, wenn sie Verhältnisse kürzen oder erweitern. Der Lehrer braucht nur noch den Namen „Proportion" für solch eine Gleichung zwischen zwei Verhältnissen beizusteuern. Die Bezeichnung der Glieder kann sich anschließen. Der Name „Proportion" erinnert die Schüler an proportionale Folgen. In der Tat gibt es bei solchen viele gleiche Verhältnisse. Nehmen wir noch einmal die Tabelle der Fließbandproduktion von Seite 37 vor und lesen wie folgt:

Arbeitszeit A (in Stunden)	Produzierte Geräte, Anzahl P (in Stück)
1	30
2	60
3	90
4	120
5	150
6	180
7	210
8	240

Es ist $P \sim A$. Wir finden zum Beispiel: $120 : 90 = 4 : 3$; $120 : 4 = 90 : 3$; $240 : 150 = 8 : 5$; $5 : 150 = 8 : 240$ usw.

Das Aufsuchen von Proportionen bei umgekehrt proportionalen Folgen erfordert etwas Vorsicht und sollte fürs erste zurückgestellt werden.

In manchen Darstellungen finden wir die Erklärung: Eine Proportion entsteht, indem zwei Verhältnisse, die den gleichen Wert haben, gleichgesetzt werden. Der Begriff „Wert eines Verhältnisses" ist aber überflüssig. Das Verhältnis zweier Zahlen ist zahlenmäßig gleich ihrem Quotienten, also einer bestimmten Zahl (auf dieser Stufe ist sie eine rationale Zahl). Zwei Verhältnisse sind gleich, wenn sie die gleiche Zahl darstellen. Dann und nur dann dürfen wir die Verhältnisse durch ein Gleichheitszeichen verbinden und erhalten eine Proportion.

Von jetzt an kann die tägliche Rechenübung durch Aufgaben folgender Art bereichert werden: Der Lehrer gibt ein Verhältnis an und fordert die Schüler auf, durch Nennung eines gleichen Verhältnisses eine Proportion zu bilden. Dafür gibt es beliebig viele Möglichkeiten. Bei größeren Zahlen entsteht die Frage nach der Prüfung, ob die Proportion auch wirklich richtig ist. Die Schüler gelangen durch sukzessives Kürzen oder Erweitern zum Ziel. Da dieses Verfahren oft recht beschwerlich und zeitraubend ist, suchen wir nach einem Verfahren, mit dessen Hilfe die Richtigkeit einer Proportion unmittelbar überprüft werden kann.

Die Proportion ist eine Gleichung, wir können also mit ihr wie mit Gleichungen arbeiten. Um ein den Schülern gewohntes Bild zu erhalten, schreiben wir die Verhältnisse als Brüche; zum Beispiel: $\frac{85}{187} \overset{?}{=} \frac{5}{11}$ (I). Solange die Richtigkeit noch nicht gesichert ist, setzen wir ein Fragezeichen über das Gleichheitszeichen. Wir multiplizieren beide Seiten mit dem Produkt der Nenner und erhalten:

$$\frac{85}{187} \overset{?}{=} \frac{5}{11} \qquad \Big| \cdot 11 \cdot 187$$

$$85 \cdot 11 \overset{?}{=} 5 \cdot 187 \qquad (II)$$

$$935 = 935 \qquad (III)$$

Umgekehrt können wir von (III) zu (II) und von (II) durch Division durch $11 \cdot 187$ zu (I) übergehen: Die Proportion ist richtig.

Die Richtigkeit einer Proportion ist also gleichbedeutend mit der ihrer Produktgleichung. Allerdings können wir aus *einer* Produktgleichung *mehrere* richtige Proportionen bilden.

Sollten jetzt auch umgekehrt proportionale Folgen herangezogen werden? In unserem Lehrbuch und im Methodischen Handbuch geschieht das, und in der Tat kann dadurch die Aufstellung von Bestimmungsproportionen bei umgekehrter Proportionalität gut vorbereitet werden. Wählen wir das Beispiel von Seite 97 des Lehrbuchs:

Zahl der Arbeiter (N)	benötigte Zeit in Stunden (T)
1	40
2	20
3	$13^1/_3$
4	10
5	8

Hier gilt: $T \sim \frac{1}{N}$. Wenn wir gleiche Verhältnisse an diesen beiden Folgen suchen, so müssen wir anders vorgehen als bei direkt proportionalen Folgen. Wir bilden das Verhältnis aus zwei beliebigen Gliedern einer Spalte, zum Beispiel $2:5$. Rechts muß bei den entsprechenden Gliedern die Reihenfolge umgekehrt werden; im Beispiel $8:20$, also $2:5 = 8:20$. Werden innerhalb einer Reihe Verhältnisse gebildet und gleichgesetzt, so entstehen keine richtigen Proportionen. Natürlich entfällt diese Schwierigkeit, wenn als dritte Spalte $\frac{1}{N}$ hinzugefügt wird. Zwischen dieser Spalte und der T-Spalte können wieder wie bei dem Beispiel von Seite 65 Proportionen gebildet werden. Da aber die Aufstellung der dritten Spalte etwas gekünstelt und zeitraubend ist, wird in der Regel so vorgegangen: Die Verhältnisbildung wird bei *allen* Folgen (auch bei direkter Proportionalität) auf Glieder einer Spalte, also auf gleich benannte Zahlen, eingeschränkt. Dann braucht bei der umgekehrten Proportionalität nur die Reihenfolge der Hinterglieder richtig bestimmt zu werden. Das ist eine einfache und ziemlich sichere Vorschrift. Nach Möglichkeit sollten aber doch Einschränkungen, deren Sinn der Schüler zunächst nicht einsieht, vermieden werden. Bei der direkten Proportionalität kann sich der Schüler unbedenklich von der Analogie leiten lassen. Bei der umgekehrten Proportionalität muß er aufpassen. Wenn das einige Male geübt worden ist, wird er selbst dazu gelangen, mit dem stets brauchbaren Verhältnis innerhalb einer Spalte (also mit gleich benannten Größen) anzufangen. Dieser Umweg zu dem gleichen Ziel hat seinen Wert darin, daß der Schüler den Grund für die Vorschrift einsieht.

Einen anderen Weg zur Vermeidung dieser Schwierigkeit schlägt M. Gimpel[85] vor. Er geht davon aus, daß bei der umgekehrten Proportionalität Produktgleichheit besteht. Bei der Tabelle von Seite 66 bedeutet das Produkt die Gesamtanzahl der Stunden, die zur Bewältigung der Arbeit erforderlich sind. Die Aufgabe: „5 Arbeiter brauchen 8 Stunden; wie lange brauchen 2 Arbeiter?" wird durch die Gleichung $2 \cdot x = 5 \cdot 8$ gelöst. Gegen dieses Verfahren ist von mathematischer Seite her nichts einzuwenden, nur ist es keine Lösung mittels einer Proportion. Gimpel schreibt dazu in seinem lesenswerten Aufsatz: „Wir unterscheiden nicht mehr zwischen direktem und indirektem Verhältnis (diese Unterscheidung gab es bisher nur im Mathematikunterricht), sondern zwischen Verhältnisgleichheit und Produktgleichheit. Daraus ergibt sich, daß man zwei Arten von Proportionen gegenüberstellen muß, die allerdings in einfacher Weise zusammenhängen, die Verhältnisgleichung und die Produktgleichung." Eine Produktgleichung ist aber zunächst überhaupt keine Proportion, wenn sie auch leicht in eine solche umformbar ist. Sobald dies geschehen ist, kann die so entstandene Proportion nicht von einer, die aus direkt proportionalen Folgen entstanden ist, unterschieden werden. Es gibt also gar nicht zwei Arten von Proportionen, sondern nur zwei Arten, zu einer Proportion zu gelangen.

Die Entscheidung darüber, welcher Weg einzuschlagen ist, muß, wie Gimpel selbst bemerkt, vorher getroffen werden. Sie wird dem Schüler nicht schwerfallen, wenn direkte und umgekehrte Proportionalität vorher sorgfältig gegenübergestellt worden sind.

Schließlich soll noch auf eine Frage eingegangen werden: Sollen in dem Lehrgang „Proportionen" in Klasse 7 auch „fortlaufende Proportionen" behandelt werden, also Ausdrücke wie $90 : 3 = 120 : 4 = 150 : 5 = 240 : 8$ (vgl. die Tabelle von S. 65)?

Manche Lehrer wenden dagegen ein, daß eine Gleichung nur zwei Seiten haben kann. Sie haben damit insofern recht, als die Gleichheitsbeziehung in der Mathematik eine zweistellige Relation ist; da sie aber auch transitiven Charakter hat, ist von mathematischer Seite her gegen eine Aneinanderreihung von Gleichungen nichts einzuwenden. Fortlaufende Proportionen werden in Klasse 8 in der Ähnlichkeitslehre gebraucht. Dort wird für die Seitenverhältnisse ähnlicher Dreiecke geschrieben:

$$a : a' = b : b' = c : c' \qquad \text{oder:} \qquad a : b : c = a' : b' : c'.$$

Diese fortlaufende Verhältnisbildung stellt eine Zusammenfassung der drei Proportionen $a : b = a' : b'$, $b : c = b' : c'$, $a : c = a' : c'$ dar. Dafür kann auch geschrieben werden: $a : a' = b : b'$, $b : b' = c : c'$, $a : a' = c : c'$.

[85] M. Gimpel: Über die Einbeziehung technischer Aufgaben in das Stoffgebiet „Proportionen". In „Mathematik und Physik in der Schule", Heft 4/1959, S. 182.

In dieser Form werden fortlaufende Proportionen auch im Lehrbuch der Klasse 7 verwendet, um den Proportionalitätsfaktor einzuführen. Bei dem hier vorgeschlagenen Weg ist das nicht erforderlich, weil die Proportionalität nicht auf das Verhältnis gestützt wird.

Um eine Zersplitterung zu vermeiden, sollte die Behandlung fortlaufender Proportionen und Verhältnisse bis zum Unterricht in der Ähnlichkeitslehre (Klasse 8) zurückgestellt werden.

Damit seien die Betrachtungen über identische Proportionen abgeschlossen.

6.5.2. Das Aufstellen und Lösen von Bestimmungsproportionen

Bestimmungsproportionen können zwanglos aus den täglichen Übungen erwachsen, indem eine lückenhafte Proportion an die Tafel geschrieben und ergänzt wird, etwa: $3 : 5 = \quad : 55$ oder: $\quad : 7 = 12 : 21$. Dabei kann auch die Bruchform verwendet werden. Weitere Aufgaben, bei denen die Lücke durch x ausgefüllt wird, können für eine Stillbeschäftigung gegeben werden. Auf das Lösungsverfahren soll im nächsten Abschnitt eingegangen werden. Nach formalen Aufgaben werden eingekleidete Aufgaben und Anwendungsaufgaben gestellt. Hierbei muß in jedem Fall geprüft werden, ob Proportionalität vorliegt, und, wenn ja, in welcher Form. Sobald wie möglich sollten Aufgaben mit direkter und umgekehrter Proportionalität gemischt auftreten, ergänzt durch solche Aufgaben, bei denen gar keine Bestimmungsproportionen aufzustellen, sondern Verhältnisse zu errechnen sind, wie im Lehrbuch, Seite 84, Nr. 13:

„Eine Gießpfanne enthält 125 kp Rotguß. Diese Legierung besteht zu 43 Teilen aus Kupfer, zu 5 Teilen aus Zinn und zu 2 Teilen aus Zink. Rechne!“

Diese Übungen können durch Verwendung von Zeitungsberichten aufgelockert und abwechslungsreicher gestaltet werden:

„In der Rumänischen Volksrepublik betrug der Zementausstoß im Jahre 1938 510000 t, im Jahre 1959 aber bereits 2850000 t.“

Nach Möglichkeit sollen die Schüler selber aus solchen Texten Aufgaben bilden. So können sie nach dem Wachstum der Produktion oder nach dem Verhältnis der Produktionszahlen fragen.

Interessant ist folgende Aufgabenstellung: Wie groß wird bei weiterem Wachsen in gleichem Verhältnis die im Jahre 1965 erzeugte Zementmenge sein? Zur Lösung wird zunächst die Differenz gebildet:

$$2850000 \text{ t} - 510000 \text{ t} = 2340000 \text{ t}\,.$$

Um diese Menge wurde die Produktion in 21 Jahren gesteigert. Wir brauchen die Steigerung in weiteren 6 Jahren und stellen die Proportion auf (direkte Proportionalität):

$$x : 2340000 = 6 : 21$$
$$x : 2340000 = 2 : \ 7$$
$$x \approx 700000.$$

Da im Jahre 1959 die Produktion 2850000 t betrug, müßte sie im Jahre 1965 angenähert 700000 t mehr, also 3550000 t, betragen. Der Lehrer kann nach der

Ausrechnung mitteilen, daß nach den Kennziffern des rumänischen Sechsjahrplanes eine Steigerung auf etwa 6,5 Millionen t, also auf fast das Doppelte, vorgesehen ist. Die Planziffern enthalten in der Regel eine Steigerung der Produktion, die größer ist, als sie bei proportionalem Anwachsen erreicht würde.

Außer der Tatsache, daß solche Aufgaben eine hohe Bedeutung für die politisch-moralische Bildung und Erziehung der Schüler besitzen, ist ihr Wert für die fachliche Bildung darin zu sehen, daß zu ihrer Lösung verschiedene mathematische Operationen angewendet werden müssen. Die Schüler werden dadurch veranlaßt, unter ihren mathematischen Hilfsmitteln Ausschau zu halten und brauchbare Verfahren auszuwählen.

Es sei nun noch ein weiterer Bericht aus der Tagespresse als Anregung mitgeteilt:

„Der neue Schaufelradbagger vom Typ RS 315 hat ein Gewicht von 25 t. Ein älterer Bagger dieser Größe wiegt 33 t. Die Baggerleistung des neuen Typs ist dabei um 450 m³/Std. gewachsen. Sie beträgt 1350 m³/Std."

Zunächst können die Schüler die Baggerleistung des alten Typs berechnen. Dann können folgende drei Verhältnisse gebildet und betrachtet werden: das Verhältnis der Gewichte, das Verhältnis der Leistungen beider Bagger und das Verhältnis Leistung je Tonne. Um auch Proportionen dabei üben zu lassen, kann der Lehrer die Angaben ergänzen:

„Bei einem Braunkohlen-Tagebau sind 6000 m³ Abraum fortzuschaffen."

Jetzt können die Arbeitszeiten bei Verwendung des alten und des neuen Baggers verglichen werden (umgekehrte Proportionalität!).

Auf alle Fälle sollte jeder Aufgabendrill vermieden werden. Wenn nur Aufgaben gestellt werden, die das Ansetzen einer Bestimmungsproportion erfordern, so ist ja die Trefferwahrscheinlichkeit für richtigen Ansatz 50 Prozent, gleichgültig, ob das Problem verstanden wurde oder nicht. Eine Verführung zu gedankenlos-formalem Arbeiten liegt in der Verwendung des Entsprechungszeichens „≙". So finden wir in dem bereits erwähnten Artikel von R. Poßecker[86] über Querschnittberechnungen von L-Stählen:

$$\begin{array}{l} \llcorner\ 30 \cdot 30 \cdot 5 \triangleq 2{,}78\ \text{cm}^2 \\ \underline{\llcorner\ 40 \cdot 40 \cdot 5 \triangleq \ \ x\ \ \text{cm}^2} \\ \quad 30 : 40 \quad = 2{,}78 : x \\ \qquad x \qquad \approx 3{,}70 \end{array}$$

Anschließend weist Poßecker auf den symbolischen Charakter der Schreibweise $\llcorner\, b \cdot b \cdot d$ hin und bemerkt, daß nur bei konstantem d angenäherte Proportionalität besteht. Aus der von ihm selbst angegebenen Flächenformel $F = 2\,bd - d^2$ für den Querschnitt ergibt sich aber sofort, daß auch das nicht aufrechterhalten werden kann. Mit „angenäherten" Proportionalitäten sollten die Schüler im Mathematikunterricht sowieso nicht arbeiten.

Bei der auf Seite 68 genannten Aufgabe könnte eine gedankenlose Niederschrift auf den Ansatz führen:

[86] R. Poßecker: Mathematische Schülerübungen mit dem Klassenarbeitssatz „Querschnitt der Profilstähle". In „Mathematik und Physik in der Schule", Heft 1/1960.

$$1938 \mathrel{\widehat{=}} 510000\ \text{t}$$
$$1959 \mathrel{\widehat{=}} 2850000\ \text{t}$$
$$1938 : 1959 = 510000 : 2850000 \qquad (!)$$

Die Schüler neigen stets zu einer Bevorzugung des Proportionalansatzes. Der Lehrer versäume daher keine Gelegenheit, sie zu einer kritischen Haltung zu veranlassen. Zum Beispiel kann er zwischen Aufgaben mit direkter und umgekehrter Proportionalität die Aufgabe stellen:

Ein Würfel mit der Kantenlänge 2 cm wiege 25 p. Wieviel wiegt ein Würfel aus gleichem Material mit der Kantenlänge 5 cm? Die Notierung

$$2\ \text{cm} \mathrel{\widehat{=}} 25\ \text{p}$$
$$5\ \text{cm} \mathrel{\widehat{=}} x\ \text{p}$$

darf nicht zur Aufstellung einer Proportion führen, da hier tatsächlich weder direkte noch umgekehrte Proportionalität vorliegt.

Diese Hinweise sollen aber nicht bezwecken, das sehr brauchbare Entsprechungszeichen, dessen Verwendung vor einem Mißbrauch des Gleichheitszeichens schützt, aus unserem Unterricht zu verbannen.

Schließlich ist noch auf den Gültigkeitsbereich der Proportionalität zu achten. Das kann durch Aufgaben etwa folgender Art geschehen:

Eine Stahlfeder dehne sich bei Belastung mit 5 p um 1,5 mm aus. Um wieviel dehnt sie sich aus bei Belastung mit 7, 25, 100, 1000 p (!)?
Hier sei auch an die bekannte Scherzaufgabe erinnert: 5 Maurer brauchen für die Errichtung einer Mauer von bestimmter Länge 8 Stunden. Wieviel Stunden brauchen 500 Maurer dazu?

Auf eine ähnliche Aufgabe bezieht sich folgende Stelle eines Briefes an einen Lehrer, die Walter Lietzmann in seiner „Methodik des Mathematikunterrichts" wiedergibt: „Und wissen Sie, Herr Lehrer, wenn ein Lehrer einen Jungen 7 Jahre unterrichtet, um einen tüchtigen Menschen aus ihm zu machen, wie viele Lehrer diese Arbeit in einem Tage vollbringen können? Nun, etwa 2100 Lehrer, Herr Lehrer . . ."[87]

Das Lösen von Bestimmungsproportionen stellt eine Weiterführung der Gleichungslehre dar und sollte auch an diese anknüpfen. Schwierigkeiten können dabei weniger durch die Proportion als durch den Charakter der Verhältnisglieder entstehen, wenn beispielsweise Brüche oder Dezimalbrüche auftreten. Hier soll nur auf die Frage eingegangen werden, ob Bestimmungsproportionen mit Hilfe des folgenden Normalverfahrens gelöst werden sollen:

$$3 : 5 = 4 : x \qquad \text{Umschreiben in eine Bruchgleichung:}$$
$$\frac{3}{5} = \frac{4}{x} \qquad \text{„Überkreuzmultiplikation": } \frac{3}{5} \times \frac{4}{x}$$
$$3 \cdot x = 5 \cdot 4$$
$$x = \frac{20}{3}.$$

[87] W. Lietzmann: Methodik des mathematischen Unterrichts, 2. Teil. Verlag von Quelle und Meyer, Leipzig 1923, S. 55.

Dieses Lösungsverfahren mittels der Produktgleichung hat sich sehr eingebürgert. Es ist aber keineswegs das einfachste Verfahren. Es geht schneller, die Proportion so umzuformen, daß mit x angefangen wird:

$$x : 4 = 5 : 3 .$$

Dann wird wie mit einer üblichen Gleichung operiert, beide Seiten werden also mit 4 multipliziert:

$$x : 4 = 5 : 3 \quad | \cdot 4$$
$$x = \frac{20}{3} .$$

Manche Lehrer verteidigen die „Überkreuzmultiplikation" mit der Notwendigkeit, von der Produktgleichung Gebrauch zu machen. Die Produktgleichung aber stellt bei der Lösung einen Umweg dar. Ihre Bedeutung liegt doch wohl mehr darin, die Richtigkeit von identischen Zahlenproportionen zu prüfen. Unsere Schüler, die noch sehr zu einem schematischen Arbeiten neigen, sollten bei jeder Gelegenheit dazu ermuntert werden, Rechenvorteile wahrzunehmen. Bei größeren Zahlen ist vorher ein Überschlag zu machen. In der Art, wie ein Schüler dabei rundet, zeigt sich seine Geschicklichkeit und Kombinationsfähigkeit. Doch da für das Arbeiten mit Überschlag in unserem Lehrbuch gute Beispiele angegeben sind, sei hier darauf nicht weiter eingegangen.

6.5.3. Der Dreisatz in unserem Mathematikunterricht

Wir sahen in Abschnitt 4., daß der Dreisatz mit gutem Grund keinen eigenen Unterrichtsabschnitt mehr in unserem Lehrplan einnimmt. Die Verwendung der Bestimmungsproportion an Stelle des Dreisatzes stellt nun einmal das in mathematischer Beziehung einfachere und klarere Verfahren dar; der Umweg über die Einheit, der auch bei gewissen Problemstellungen irreal sein und daher methodische Schwierigkeiten bereiten kann, wird erspart. Da die Behandlung der Gleichungslehre in Klasse 7 unsere Schüler zum Arbeiten mit Proportionen befähigt, werden wir auf dieses Arbeitsmittel nicht verzichten. Es wäre unnötiger Zeitverlust, daneben ein zweites Lösungsschema zu erarbeiten. Wir erblicken darin einen Fortschritt gegenüber dem Rechenunterricht an den Volksschulen der westdeutschen Bundesrepublik, der auf den Dreisatz angewiesen ist, da die Gleichungslehre nicht behandelt wird.

Dennoch ist die Frage berechtigt, ob die Schlußrechnung, das heißt das Schließen von einer Vielheit auf eine andere durch Zurückgehen auf die Einheit, völlig aus unserem Unterricht verschwinden soll. Wir wüßten in diesem Fall alle derartigen Berechnungen bis Klasse 7 zurückstellen. Das ist unangebracht, da sie im Fach Werken und in anderen Fächern sowieso im täglichen Leben vorkommen. Auch stellt eine vernünftige Behandlung des direkten und des umgekehrten Verhältnisses — etwa in der Art unseres Lehrbuchs von 1950 für Klasse 6[88] — eine gute Vorbereitung auf die Behandlung der Lehre von den

[88] Lehrbuch der Mathematik für die Grundschule, 6. Schuljahr. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1950, S. 57 ff. und 62 ff.

Proportionen dar; denn es werden dabei nicht nur proportionale und umgekehrt proportionale Folgen aufgestellt, sondern auch der Proportionalitätsfaktor wird ermittelt, natürlich ohne diesen Namen zu verwenden. Die einfachen Gesetzmäßigkeiten solcher Folgen können sicher schon von jüngeren Kindern erfaßt werden, besonders dann, wenn einfache, den Schülern geläufige Problemstellungen, wie Einkauf von Brötchen oder Verteilung von Heften, den Ausgangspunkt bilden. Übungen mit den Preistabellen, wie sie im „Methodischen Handbuch — Mathematikunterricht" vorgeschlagen werden, sind durchaus schon in früheren Jahren möglich, da sie nur einfache Überlegungen und als mathematische Hilfsmittel lediglich die Multiplikation und die Division erfordern. An Hand solcher Folgen kann von der Unterstufe an gelegentlich der Zweisatz, das heißt das Schließen von der Einheit auf eine Vielheit oder von einer Vielheit auf die Einheit, und später das Schließen von einer Vielheit auf eine Vielheit geübt werden. Dabei ist dem umgekehrten Verhältnis besondere Aufmerksamkeit zu schenken. Ein besonderes Lösungsschema ist nicht erforderlich. Die tägliche Rechenübung kann durch solche zwanglos eingeflochtenen Aufgaben bereichert werden. Eine auf diese Weise betriebene „Dreisatzrechnung" wird von den meisten der gegen sie erhobenen Einwände[89] nicht betroffen. Die Einwände richten sich in der Hauptsache gegen eine Aufgabenauswahl, die den realen Gegebenheiten nicht Rechnung trägt, und gegen eine gedankenlos-formale Behandlung, unter anderem gegen die Nichtbeachtung der Grenzen, innerhalb derer Proportionalität herrscht.

Ähnliche Gefahren bestehen aber auch bei der Behandlung der Proportionen. Daher ist eines der wichtigsten Anliegen dieses methodischen Beitrages, Wege zur Vermeidung dieser Gefahren zu zeigen. Wir sahen, daß bei ausreichender Stützung auf die Proportionalität die Bestimmungsproportionen keinerlei Schwierigkeiten zu bereiten brauchen. Daher sollten sie, sobald sie in Klasse 7 eingeführt worden sind, überall dort herangezogen werden, wo das Schließen von einer Vielheit auf eine andere Vielheit schriftliche Rechnung erfordert. Wenn allerdings einfache Zahlen eine Lösung durch mündliches Rechnen gestatten, kann auch weiterhin gelegentlich der Schluß über die Einheit angewendet werden, der für das Kopfrechnen besser geeignet ist als die Proportion. Auch hier ist es wichtig, den Mathematikunterricht von jedem Schematismus frei zu halten und die Schüler dahin zu führen, daß sie ihre Arbeitsmittel bewußt wählen und anwenden.

[89] O. Mader: Bemerkungen zur Schlußrechnung. In „Mathematik, Physik und Chemie in der Schule", Heft 5/1954.
Martin Buche: Bericht über ein methodisches Experiment. Die Ablösung des Dreisatzes durch die Proportion; herausgegeben von der Fachkommission Mathematik, Pädagogisches Kreiskabinett Nauen. In „Mathematik und Physik in der Schule", Heft 11/1957.