

KOCH Anleitung zum Lösen
mathematischer Aufgaben

Ausgewählte häufig gebrauchte Formeln

Arithmetische Folgen (konstante Differenz d)

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n \quad s_n = a_1 n + 0,5 d n(n - 1)$$

Geometrische Folgen (konstanter Quotient q)

$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Partialsummenfolgen

$$s_1 = a_1; \quad s_n = s_{n-1} + a_n; \quad a_n = s_n - s_{n-1}$$

Exponential- und Logarithmusausdrücke:

$$\ln e = 1; \quad \ln 1 = 0; \quad \ln a = \lg a \cdot \ln 10 \quad e^{\ln a} = a; \quad \ln e^x = z$$

Punkt-Richtungs-Form der Geradengleichung¹⁾

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad \text{spez.: Tangente an Bild von } f \text{ im Berührungs-punkt } P_0(x_0; y_0) \quad f'(x_0) = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Schnittwinkel nicht-orientierter Geraden mit den Anstiegen m_1 und m_2

$$\tan \varphi = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$$

Orthogonalitätsbedingungen (Auswahl)

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \text{bzw.} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}; \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (\text{f. Vektoren})$$

¹⁾ außer parallelen Geraden zur y -Achse

Anleitung zum Lösen mathematischer Aufgaben

aus dem Bereich des Mathematikunterrichts
an Fachschulen, Volkshochschulen
und erweiterten Oberschulen

Dr. rer. nat. Steffen Koch, Leipzig

5. Auflage

Mit 61 Bildern



VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG

© VEB Fachbuchverlag Leipzig 1985
5. Auflage
Lizenznummer: 114-210/10/85
LSV 1012
Verlagslektor: Dipl.-Ing. Christine Fritzsch
Printed in GDR
Fotomechanischer Nachdruck: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig,
Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit, III/18/97
Redaktionsschluß: 15. 3. 1985
Bestellnummer: 545 850 9
00780

Vorwort

Die Mathematik ist wesentlich an der wissenschaftlich-technischen Entwicklung beteiligt. Ihr Einfluß auf die Forschung und die moderne Gestaltung des Lebens wächst ständig, und ihre Anwendung wird immer mehr zur Voraussetzung für die Analyse und Steuerung der Prozesse in Natur und Gesellschaft.

Vom Mathematiker werden heute nicht mehr allein sichere Kenntnisse von Formeln und Gesetzen verlangt. Er muß in der Lage sein, Vorgänge auf allen Gebieten mathematisch zu erfassen, zu beschreiben und zu interpretieren; er muß fähig sein, geeignete Verfahren der Geometrie, der Algebra und der Analysis sinnvoll, zielgerichtet und rationell zur Lösung der Aufgaben einzusetzen und Ergebnisse umfassend und eindeutig anzuwenden. Oft ist der Lernende anfangs geneigt, Zahl und Formel als die wesentlichen Elemente der Mathematik zu betrachten. Er unterschätzt dabei zuweilen die Rolle der Methoden und Verfahren, deren Beherrschung erst Grundbedingung schöpferischer mathematischer Tätigkeit ist.

Dieses vornehmlich für Studenten der Fachschulen sowie Schüler der Volkshochschulen und ähnlicher Bildungseinrichtungen bestimmte Büchlein soll Anregungen und Hinweise zur Gestaltung des Lösungsweges bei mathematischen Aufgaben geben. Es will weder Lehrbuch noch Wissensspeicher sein. Anliegen des Autors ist es vielmehr, dem Leser, der sich an Hand eines Lehrbuchs, im Unterricht oder im Selbststudium den Stoff erarbeitet hat, Anleitung zum selbständigen Lösen mathematischer Probleme zu geben, wobei vor allem solche Aufgaben gerechnet werden, bei denen erfahrungsgemäß Schwierigkeiten auftreten.

So soll dieses Bändchen Unterrichtshilfe und Unterstützung im Lernprozeß sein.

Gedankt sei an dieser Stelle den Herren Prof. Dr. Lohse und Beinhoff, die durch Anregungen und Ergänzungen an der Gestaltung des Buches mitgewirkt haben.

In der 4. Auflage ist ein zusätzlicher Abschnitt mit Aufgaben zu nichtrationalen Funktionen aufgenommen worden. Außerdem sind Übersichten über Funktionen und zur Integration durch Substitution, Übungen zur quadratischen Funktion sowie eine Aufgabe zur Tangentenproblematik enthalten.

Für Anregungen und Hinweise aus dem Leserkreis sind Verlag und Autor stets dankbar.

Verfasser und Verlag

Inhaltsverzeichnis

Einführung	7
1. Formelumstellungen	8
Aufgaben 1.1. bis 1.9.	11
Einige Bemerkungen zum Lösungsplan	15
2. Funktionen	16
Einige Bemerkungen zur Mengenlehre	16
Funktionen und ihre Darstellung	20
Übersicht über einige Funktionen und deren Bilder	21
Aufgaben 2.1. bis 2.10.	25
3. Anwendungsaufgaben zu linearen Gleichungssystemen mit zwei unbekannten Variablen	29
Aufgaben 3.1. bis 3.6.	31
4. Quadratische Gleichungen und Gleichungen höheren Grades	35
Einige Bemerkungen zu den quadratischen Gleichungen	35
Übung zur quadratischen Funktion	38
Aufgaben 4.1. bis 4.7.	39
5. Ungleichungen, Wurzelgleichungen, goniometrische Gleichungen	43
Einige Hinweise zum Umgehen mit e- und ln-Ausdrücken	48
Aufgaben 5.1. bis 5.5. (Ungleichungen)	49
Aufgaben 5.6. bis 5.10. (Wurzelgleichungen)	49
Aufgaben 5.11. bis 5.14. (goniometrische Gleichungen)	49
Aufgaben 5.15. bis 5.22. (goniometrische Gleichungen)	53
6. Folgen, Grenzwert, Stetigkeit	57
Übersicht über besondere Fälle der Stetigkeit und Differenzierbarkeit	62
Übersicht über einige Folgen und deren Eigenschaften	64
Aufgaben 6.1. bis 6.23.	65
7. Funktionsuntersuchungen, Kurvendiskussionen	77
Bearbeitung einer Aufgabe zur Tangententenproblematik	82
Aufgaben 7.1. bis 7.12.	83
8. Schnittprobleme – Methode der unbestimmten Koeffizienten	91
Aufgabe 8.1. bis 8.8.	93
Übersicht über die Bilder einiger Funktionen	97
9. Extremwertaufgaben	98
Ablaufbild über das Vorgehen bei der Lösung von Extremwertaufgaben	100
Aufgaben 9.1. bis 9.15.	101
10. Flächeninhaltsberechnung durch Integration	113
Differentialquotienten und Grundintegrale einiger wichtiger Funktionen	114
Aufgaben 10.1. bis 10.8.	115
11. Volumenberechnung von Rotationskörpern – Integrationsmethoden	119
Übersicht zur Integration durch Substitution	122
Aufgaben 11.1. bis 11.8.	123
12. Aufgaben zu nichtrationalen Funktionen	127
Aufgaben 12.1. bis 12.12.	127
Einige häufig verwendete mathematische Begriffe	136

Einführung

In diesem Büchlein sind aus dem Bereich des Mathematikunterrichts der Fach- und Oberschulen etwa 140 vollständig durchgerechnete Aufgaben enthalten, deren Lösung jeweils in Schritte unterteilt ist:

Teil A: Aufgabenstellung

Teil B: Erste Lösungsschritte, meist mit dem Lösungsplan, dem Ansatz und den notwendigen Vorüberlegungen.

Teil C: Durchführung der weiteren rechnerischen Operationen.

Teil D: Fixierung des Ergebnisses, Kontrolle und Formulierung der Antwort.

Hier werden auch Schlußfolgerungen gezogen, Verallgemeinerungen erwähnt und Hinweise auf Ergänzungen gegeben.

Bei mehrgliedriger Problemstellung werden gelegentlich die Teilaufgaben getrennt in (B) und (C) bearbeitet.

Neben einfacheren Aufgaben sind auch solche enthalten (Kennzeichnung durch *), die ein tieferes Eindringen in das Stoffgebiet erfordern. Dem fortgeschrittenen Leser wird empfohlen, auch selbständig von der Aufgabenstellung zur Lösung zu gelangen und sein Ergebnis mit dem des Teils D zu vergleichen.

Jedem der 12 Abschnitte sind in gedrängter Form Leitsätze, Verfahrensweisen und Übersichten vorangestellt, die eine gewisse Hilfestellung für die nachfolgenden Aufgaben geben sollen. Diese Vorbetrachtungen ersetzen aber dem Leser weder die Formelsammlung noch das Lehrbuch. Meist sind hier einführende Beispieldaufgaben zu finden, deren Durchrechnung sich vor den Übungen empfiehlt.

Bereitet dem Leser ein Abschnitt Schwierigkeiten oder stellt er Lücken fest, so ist dringend anzuraten, den Abschnitt nach einem Lehrbuch zu wiederholen.

1. Formelumstellungen

In Technik, Physik und Mathematik sind gegenseitige Beziehungen zwischen Größen als Formeln bekannt. Es handelt sich um Gleichungen, die entweder Identitäten sind (für alle Belegungen der Variablen gelten) oder innerhalb eines bestimmten Definitionsbereiches die objektive Realität widerspiegeln. Häufig sind solche Beziehungen ihrer mathematischen Struktur nach gleichartig aufgebaut. Die Bearbeitung der völlig verschiedenen Gebieten entnommenen Gesetzmäßigkeiten erfolgt deshalb oft analog. Ein und derselbe Typ einer mathematischen Beziehung beschreibt und charakterisiert also dann physikalische oder technische Verhältnisse aus verschiedenen Sachgebieten.

Beispiele:

Typ: $A = B \cdot C$	$s = v \cdot t$ gleichförmige Bewegung $\sin \alpha = n \sin \beta$ Brekungs- gesetz Optik	$U = R \cdot I$ OHMSCHES Gesetz $\Phi = I \cdot \omega$ Lichtstrom	$v = r \cdot \omega$ Dreh- bewegung $RT = p \cdot V$ Gas- gleichung	$F_R = \mu \cdot F_N$ Reibung $u = \pi \cdot d$ Kreisumfang
Typ: $A = B \cdot C^2$	$a_r = \omega \cdot r^2$ Radial- beschleunigung $F_z = \frac{m}{r} \cdot v^2$ Zentri- fugalkraft	$E = m \cdot c^2$ Gleichung von EINSTEIN $A = \pi \cdot r^2$ Kreisfläche	$J = \frac{\theta}{2} cu^2$ Schallstärke $P = R \cdot I^2$ Elektrische Leistung	$s = \frac{g}{2} \cdot t^2$ Freier Fall $A_1 = A_0 \cdot k^2$ Ähnlichkeit bei Flächen
Typ: $A = B \cdot \sqrt{C}$	$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ Periodendauer Fadenpendel	$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$ Periodendauer physikalisches Pendel	$c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}$ Schallgeschwindigkeit	$d = a \cdot \sqrt{2}$ Quadratdiagonale
Typ: $A = \frac{B \cdot C}{D \pm E}$	$\varrho = \frac{\gamma_F \cdot G}{G - G_F}$ Dichte- bestimmung	$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ KIRCHHOFF- sches Gesetz	$f = \frac{a \cdot b}{a + b}$ Brennweite beim Spiegel	$Z = \frac{\omega L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2}$ Betrag des Widerstandsoperators Parallelenschaltung
Typ: $A = B \frac{C \cdot D}{E^2}$	$F = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ Anziehung von Massen	$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{s^2}$ COULOMB- sches Gesetz	$F = c \frac{m_1 \cdot m_2}{e^2}$ Magnetisches Feld	$E = \frac{I \cdot \cos \epsilon}{r^2}$ Beleuchtungs- stärke
Typ: $A = B(1 + C)$	$l = l_0(1 + \alpha \Delta t)$ Längen- ausdehnung	$V = V_0(1 + \gamma \Delta t)$ Volumen- ausdehnung	$R = R_0(1 + \alpha t)$ Widerstand in Abhängigkeit von der Temperatur	$a_n - a_1 = d(n - 1)$ arithmetische Folge

Die Beziehungen (Gleichungen, Formeln) enthalten in den Termen Variablen, die voneinander abhängen.

Die Beziehung $s = v \cdot t$
(Weg = Geschwindigkeit · Zeit)

kann als Funktionsgleichung

$s(t) = v \cdot t$ [s und t variabel, v konstant]

dargestellt werden.

Bedeutung: Der zurückgelegte Weg s ist bei gleichförmig geradliniger Bewegung von der Zeit t abhängig.

Entsprechend kann man schreiben:

$U(R) = I \cdot R$ und $v(r) = \omega \cdot r$ und $F_R(F_N) = \mu \cdot F_N$ und $u(d) = \pi \cdot d$ usw. Der Typ einer solchen Abhängigkeit wird mathematisch durch die verallgemeinernde Symbolik $f(x) = \dots$ beschrieben.

In der Regel ist in einer Formel eine bestimmte Variable gesucht (unbekannt), die anderen Größen sind gegeben. Nicht immer ist jedoch die unbekannte Variable in Abhängigkeit von den anderen explizit dargestellt. Dann muß die Formel erst nach einer bestimmten (unbekannten) Variablen aufgelöst werden.

Das geschieht in folgender Weise:

Schritt	Prinzip	Muster
A	Aufgabenstellung (sachgebietsbezogen)	In einer Batterieschaltung sind n Elemente in Reihe (hintereinander) geschaltet. Jedes Element hat die Spannung U und den inneren Widerstand R_i . Die Gesamtstromstärke ist I. Der Außenwiderstand R_a ist gesucht.
	Aufstellen der Formel (bekannt oder gegeben, evtl. aus der Formelsammlung zu entnehmen)	$I = \frac{n \cdot U}{n \cdot R_i + R_a}$
	Formulierung der mathematischen Aufgabe (Kennzeichnung der gesuchten Größe)	$I = \frac{n \cdot U}{n \cdot R_i + R_a}$ ist nach R_a aufzulösen.
B	Beschreibung der mathematischen Terme (Bei komplizierten Aufgaben: Lösungsplan)	Die gesuchte Variable steht als Summand im Nenner eines Bruches.
	Elementare Operationen zur Vereinfachung (falls erforderlich, Wurzeln oder Brüche beseitigen – falls unbekannte Variable innerhalb eines durch Klammern eingeschlossenen Terms, Auflösen desselben oft zweckmäßig)	$I(n \cdot R_i + R_a) = n \cdot U$ $I \cdot n \cdot R_i + I \cdot R_a = n \cdot U$

C	Isolieren der unbekannten Variablen (Ziel: Terme mit der unbekannten Variablen stehen isoliert auf einer Seite der Beziehung)	$I \cdot R_a = n \cdot U - I \cdot n \cdot R_i$
	Division der gesamten Gleichung durch den Koeffizienten (Beiwert) der unbekannten Variablen (Zuvor ist gegebenenfalls die unbekannte Variable auszuheben / auszuklammern)	$R_a = \frac{n \cdot U - I \cdot n \cdot R_i}{I}$

D	Bessere Gestaltung der gefundenen Formel	$R_a = n \frac{U}{I} - n \cdot R_i$
		oder: $R_a = n \left(\frac{U}{I} - R_i \right)$

Deutung und Diskussion

Der Außenwiderstand kann bestimmt werden durch die mit der Anzahl der Elemente multiplizierten Differenz von Gesamtwiderstand und Innenwiderstand.

Beachten Sie:

Bei der Umstellung von Formeln gelten die Gesetzmäßigkeiten des Lösens von Gleichungen. Es dürfen also nur äquivalente Umformungen vorgenommen werden. Grundsätzlich darf auf beiden Seiten einer Gleichheitsbeziehung nur die gleiche Operation ausgeführt werden,

und zwar:

Addition oder Subtraktion eines Terms,
Multiplikation mit einem von Null verschiedenen Term,
Division durch einen von Null verschiedenen Term,
Potenzieren mit ungeradzahligem Exponenten,¹⁾
Radizieren, sofern auf beiden Seiten positive Ausdrücke stehen.
Eine Division durch 0 oder durch einen Term, der den Wert 0 annehmen kann, ist nicht zulässig.

¹⁾ Auch das Potenzieren mit geradzahligem (bzw. beliebig rationalem) Exponenten ist eine äquivalente Umformung, wenn beide Seiten der Gleichung nur positive Werte annehmen, was bei fast allen Formeln aus Naturwissenschaft und Technik gilt.

- 1.1. Die im Beispiel genannte Formel

$$I = \frac{nU}{nR_1 + R_a}$$

ist nach n aufzulösen.

(Gesucht ist die Anzahl der in Reihe geschalteten Elemente.)

- 1.2. Die unter dem Namen „Geradengleichung“ oder „Gleichung einer Linearfunktion“ bekannte Beziehung

$$y = a_0 + a_1 x$$

ist nach x aufzulösen.

- 1.3. Für die Berechnung des Widerstandswertes eines Drahtes gilt die Formel $R = \rho \frac{l}{A}$, wobei ρ eine Materialkonstante (spez. Widerstand), A der Leitungsquerschnitt und l die Länge der Leitung sind.

Für A ist πr^2 einzusetzen. Die Formel ist nach dem Radius des Leitungsdrähtes aufzulösen.

- 1.4. Die Formel der RICHMANNSchen Mischungsregel

$$m_1 c_1 (t - t_1) = m_2 c_2 (t_2 - t)$$

ist nach der Mischtemperatur t aufzulösen.

- 1.5. Die Gleichung

$$\frac{1+m}{1-m} = \frac{a}{b}$$

ist nach m aufzulösen.

- 1.6. Im gleichseitigen Dreieck gilt für die Höhe h und die Seitenlänge a die Beziehung:

$$h = \frac{a}{2} \sqrt{3}$$

Die Seitenlänge a soll in Abhängigkeit von der Höhe h angegeben werden.

- 1.7. Für einen Kreis gelten bekanntlich die Formeln $A = \pi r^2$ für die Kreisfläche und $u = 2\pi r$ für den Kreisumfang.

Lösen Sie beide Formeln nach r auf! Durch Gleichsetzung ist anschließend eine Beziehung zwischen A und u herzustellen, die von r unabhängig ist.

- 1.8. Die Beziehung

$$v = \sqrt{t+1}$$

ist nach t aufzulösen.

- *1.9. Die Formel

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

gilt für die Summe einer geometrischen Reihe. (Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder ist konstant.)

Die Beziehung ist nach der Gliederzahl n aufzulösen.

B

- 1.1. Die gesuchte Variable steht im Zähler und in einem Summanden des Nenners eines Bruches. $InR_1 + IR_n = nU$
(nach Multiplikation mit dem gesamten Nenner)
-
- 1.2. Die gesuchte Variable ist Faktor in einem Summanden der rechten Seite. $y - a_0 = a_1x$
oder
 $a_1x = y - a_0$
-
- 1.3. Es ist zunächst der Ausdruck für A einzusetzen. Die gesuchte Variable r steht dann in quadratischer Form im Nenner eines Bruches.
- $$R = \varrho \frac{l}{\pi r^2}$$
- Mit πr^2 multipliziert:
- wegen $A = \pi r^2$ $R\pi r^2 = \varrho l$
-
- 1.4. Die gesuchte Variable t tritt links- und rechtsseitig als Glied einer Differenz auf, die mit verschiedenen Faktoren multipliziert ist.
- $$m_1c_1t - m_1c_1t_1 = m_2c_2t_2 - m_2c_2t$$
-
- 1.5. Die gesuchte Variable m steht im Zähler und im Nenner eines Bruches in einer Summe bzw. Differenz. $b(1 + m) = a(1 - m)$
 $b + bm = a - am$
-
- 1.6. Die gesuchte Variable a ist Teil eines Produktes, das eine irrationale Zahl enthält. Es wird mit 2 multipliziert, durch $\sqrt{3}$ dividiert. Anschließend werden die Seiten vertauscht.
- $$\frac{2h}{\sqrt{3}} = a; \quad a = \frac{2h}{\sqrt{3}}$$
-
- 1.7. Beide Beziehungen werden durch die Koeffizienten von r bzw. r^2 dividiert.
- $$\frac{A}{\pi} = r^2 \quad \frac{u}{2\pi} = r$$
-
- 1.8. Die gesuchte Variable t tritt als Summand im Radikanden einer Wurzel auf. Es muß $t \geq -1$ gelten. Zweckmäßigerweise wird zunächst quadriert. $v^2 = t + 1$
-
- 1.9. Die gesuchte Variable n tritt im Exponenten eines Gliedes im Zähler eines Bruchs auf. Multiplikation mit $(q - 1)$, Division durch a_1 .

$$\frac{s_n(q - 1)}{a_1} = q^n - 1$$

- 1.1.** Glieder mit der unbekannten Variablen linksseitig zusammengefaßt.

$$IR_1 - nU = -IR_a$$

$$n(U - IR_1) = IR_a$$

Division durch die Klammer.

$$n = \frac{IR_a}{U - IR_1}$$

- 1.2.** Man dividiere durch a_1 :

$$x = \frac{y - a_0}{a_1}$$

- 1.3.** Zunächst ist durch $R\pi$ zu dividieren.

$$r^2 = \frac{\varrho l}{R\pi}$$

Zur Auflösung nach r ist die Wurzel zu ziehen:

$$r = \pm \sqrt{\frac{\varrho l}{R\pi}}$$

Es ist aber nur der positive Wert verwendbar.

- 1.4.** Glieder mit der unbekannten Variablen linksseitig zusammenfassen.

$$(m_1 c_1 + m_2 c_2) t = m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2$$

$$t = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

- 1.5.** Glieder mit m linksseitig zusammenfassen.

$$(a + b)m = a - b$$

$$m = \frac{a - b}{a + b}$$

- 1.6.** Der entstandene Nenner sollte rational gemacht werden (Erweiterung mit $\sqrt{3}$).

$$a = \frac{2h\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{3} h \sqrt{3}$$

- 1.7.** Zwei Wege möglich!

(1) Linksseitig radizieren und r gleichsetzen.

$$\sqrt{\frac{A}{\pi}} = r = \frac{u}{2\pi}$$

(2) Rechte Gleichung quadrieren und r^2 gleichsetzen.

$$\frac{A}{\pi} = r^2 = \frac{u^2}{4\pi^2}$$

$$\frac{A}{\pi} = \frac{u^2}{4\pi^2}$$

←

- 1.8.** $t = v^2 - 1$

- 1.9.** Man addiere beidseitig 1. Hier ist Logarithmieren angezeigt.

$$\frac{s_n(q - 1) + a_1}{a_1} = q^n \Rightarrow \log_a \frac{s_n(q - 1) + a_1}{a_1} = n \log_a q$$

Es können hier Logarithmen einer beliebigen Basis verwendet werden. In der Regel wird man die dekadischen Logarithmen (Basis 10) nehmen.

D

- 1.1. Die Anzahl der Elemente ist $n = \frac{IR_a}{U - IR_1}$.

Die rechtsseitig in der Gleichung stehenden Größen I , U , R_a und R_1 sind bekannt.
Eine Division von Zähler und Nenner durch I führt zu:

$$n = \frac{R_a}{\frac{U}{I} - R_1}$$

- 1.2. Statt des Quotienten $x = \frac{y - a_0}{a_1}$ ist auch die Darstellung $x = \frac{1}{a_1}y - \frac{a_0}{a_1}$ möglich,
aus der ersichtlich ist, daß auch x linear von y abhängt.
-

1.3. $r = \sqrt{\frac{\rho l}{R\pi}}$ oder $r = \sqrt{\frac{\rho}{\pi}} \sqrt{\frac{l}{R}}$

(ρ ist eine Materialkonstante.)

- 1.4. Die Mischtemperatur t ergibt sich als ein Bruch:

$$t = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}.$$

Für $t_1 = t_2$ ergibt sich nach Kürzen $t = t_1 = t_2$ (trivialer Fall).

- 1.5. Die Größe m ist der Quotient aus Differenz und Summe von a und b :

$$m = \frac{a - b}{a + b}$$

- 1.6. Im gleichseitigen Dreieck hängt gemäß $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}h$ die Seitenlänge linear von der Höhe ab (ist ihr direkt proportional).
Zuweilen wird zur Verdeutlichung des funktionalen Zusammenhangs $a(h) = \frac{2\sqrt{3}}{3}h$ geschrieben.
-

- 1.7. Die Abhängigkeit zwischen A und u des Kreises kann durch $A = \frac{1}{4\pi}u^2$ oder $u = 2\sqrt{A\pi}$ dargestellt werden. Die Fläche wächst mit dem Quadrat des Umfangs!
-

- 1.8. t ist eine quadratische Funktion von v ,

$$t = v^2 - 1$$

- 1.9. Die Anzahl der Glieder n läßt sich nach der Formel

$$n = \log_a \frac{s_n(q-1) + a_1}{a_1} : \log_a q$$

bestimmen. Man beachte, daß $n \in N$ sein muß. Zuweilen muß wegen der Ungenauigkeit der Tafelwerte etwas gerundet werden.

Einige Bemerkungen zum Lösungsplan

Bereits bei den Aufgaben des Abschnitts 1. wird der Leser festgestellt haben, daß beim Lösen mathematischer Aufgaben nichts dem Zufall überlassen bleiben sollte, sondern planvoll und zielgerichtet vorgegangen werden muß. In diesem Büchlein wird in der Regel jeweils nur *ein* Lösungsweg vorgeschlagen. Man überzeuge sich jedoch an Hand folgender Aufgabe, daß meist mehrere Wege zum Ziel führen. Jedem dieser Wege liegt ein gewisser Plan, ein gewisses Programm zugrunde, dessen wesentlicher Inhalt die Erreichung eines Teilzieles ist. Nicht nur dem Anfänger fällt es oft schwer, sich sofort für den elegantesten bzw. schnellsten Lösungsweg zu entscheiden. Zu einem Wechsel auf einen anderen Lösungsplan während der Arbeit ist nur dann zu raten, wenn der eingeschlagene Weg nachweisbar nicht zum Ziel führen kann. Im übrigen wird derjenige stets im Vorteil sein, der den größeren Vorrat an Lösungsverfahren parat hat.

Beispiel:

Der Ausdruck $A = \frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ soll vereinfacht werden.

Lösungsweg 1 (Programm: Es handelt sich um zwei Brüche, die zunächst gleichnamig zu machen sind.)

Hauptnenner: $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$ (binom. Formel)

Nach Erweiterung ergibt sich: $A = \frac{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b}) - (a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$

Daraus folgt: $A = \frac{2\sqrt{b}(a-b)}{a-b} = \underline{\underline{2\sqrt{b}}}$

Lösungsweg 2 (Programm: Die Zähler beider Brüche sind gleich, infolgedessen sollte $(a-b)$ ausgeklammert werden.)

Ausheben: $A = (a-b) \left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right)$

Gleichnamigmachen: $A = (a-b) \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}) - (\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$

und weiter: $A = \underline{\underline{2\sqrt{b}}}$

Lösungsweg 3 (Programm: Die beiden Brüche enthalten irrationale Nenner, die Nenner sollten also zunächst rational gemacht werden.)

Rationalmachen:

$$A = \frac{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} - \frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$$

Die beiden Nenner sind gleich groß, nämlich $(a-b)$. Im Zähler wird $(a-b)$ ausgehoben und gegen den Nenner gekürzt. Es bleibt $A = \underline{\underline{2\sqrt{b}}}$.

Lösungsweg 4 (Programm: Man erkennt, daß die Ausdrücke in Zähler und Nenner Bestandteile der dritten binomischen Formel sind. Es gilt $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$. Die beiden Zähler sind in ein Produkt zu verwandeln.)

$$\text{Aufspalten der Zähler: } A = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$\text{Kürzen: } A = (\sqrt{a} + \sqrt{b}) - (\sqrt{a} - \sqrt{b})$$

$$\text{und weiter: } A = \underline{\underline{2\sqrt{b}}}$$

Lösungsweg 5 (Programm: Das Rechnen mit den Wurzeln erscheint unbequem. Man führt eine Substitution durch: $u = \sqrt{a}$ und $v = \sqrt{b}$.)

Neue Form des Ausdrucks nach Substitution:

$$A = \frac{u^2 - v^2}{u - v} - \frac{u^2 - v^2}{u + v}$$

$$\text{Umformung der Zähler: } A = \frac{(u - v)(u + v)}{u - v} - \frac{(u - v)(u + v)}{u + v}$$

$$\text{Kürzen: } A = 2v$$

$$\text{Die Substitution wird rückgängig gemacht: } A = \underline{\underline{2\sqrt{b}}}.$$

Es gibt noch weitere Lösungswege. Alle genannten – doch recht unterschiedlichen – Methoden führen zum Ziel. Nachträglich kann sogar eingeschätzt werden, daß dabei keine großen Unterschiede im Arbeitsaufwand auftreten.

Nachdem diese Aufgabe gelöst ist, sollte man auf die Deutung des Ergebnisses nicht verzichten. Zur – kaum vorauszusagenden – Überraschung hängt A nicht von a ab, sondern nur von b : symbolisch ausgedrückt, durch $A = f(b)$.

Die Werte, die A für bestimmte Größen a und b annimmt (z. B. für $a = 1013,65$ und $b = 6,25$), lassen sich mit der Darstellung $A = 2\sqrt{b}$ viel schneller berechnen als in der Ausgangsform.

Bei der Aufgabenstellung sollte übrigens vermerkt werden, daß sowohl a als auch b nicht negativ sein müssen!

2. Funktionen

Einige Bemerkungen zur Mengenlehre

Die Symbolik der Mengenlehre hat sich weitgehend in allen Bereichen der modernen Schulmathematik durchgesetzt. Sie zeichnet sich durch Kürze und Abstraktion aus. Dem Anfänger – der sich die Grundlagen der Mengenlehre mittels der einschlägigen Literatur aneignen sollte – bereiten aber häufig die elementaren Mengenoperationen und die Darstellung von Intervallen Schwierigkeiten. Dabei sollte beachtet werden, daß die Zahlenbereiche in den Lehrbüchern nicht immer mit den gleichen Symbolen gekennzeichnet werden.

(In der folgenden Übersicht werden die an Fachschulen üblichen Symbole rot ausgedruckt.)

Name der Menge	Symbole nicht standar-disiert	in der Schul-mathem. üblich	sonstige Symbolik	Folgende Rechen-operationen sind innerhalb der Menge unbeschränkt ausführbar					
				Addition	Subtraktion	Multiplikation	Division, außer durch 0	Potenzieren	Radizieren von pos. Größen
Leere Menge		{ }, 0							
Einermenge aus Element 0		{0}		ja	ja	ja	n	n	n
Einermenge aus Element 1		{1}		n	n	ja	ja	ja	ja
Zweiernenge aus den Elementen 0 und 1		{0; 1}		n	n	ja	ja	ja	ja
(Positive ungerade Zahlen	U, Un^+			n	n	ja	n	ja	n
Positive gerade Zahlen	Gr^+				ja	n	ja	n	ja (n)
Natürliche Zahlen (ohne Null)	N^*		$N \setminus \{0\}$	ja	n	ja	n	ja	n
Natürliche Zahlen (mit Null)		N	$\mathfrak{N}, N (\text{ny})$	ja	n	ja	n	ja	n
Ganze Zahlen		G	\mathbb{G}, Γ (gamma)	ja	ja	ja	n	ja	n
Ganze negative Zahlen	G^-				ja	n	n	n	n
Primzahlen	Pr				n	n	n	n	n
Gebrochene (positive) Zahlen		R^+			ja	n	ja	ja	n
Rationale Zahlen		R	$P (\text{rho}), \mathfrak{P}, K$	ja	ja	ja	ja	ja	n
Nichtrationale Zahlen	I				n	n	n	n	ja
Reelle Zahlen		P	$R, \Delta (\text{delta})$ \mathfrak{R}	ja	ja	ja	ja	ja	ja
Komplexe Zahlen			Z, K, \mathfrak{Z}, C						

Weitere Symbole

- $2 \in N$: 2 ist Element von N
- $0,5 \notin G$: 0,5 ist nicht Element von G
- $N \subset G$: N ist („echte“) Teilmenge von G
 N ist enthalten in G
 Alle Elemente von N sind auch Elemente von G
- $A \subseteq B$: A ist Teilmenge von B oder gleich B
 [Verwechseln Sie diese Zeichen nicht mit $<$ oder \leq !]
- $A = B$: Beide Mengen sind gleich. Sie enthalten genau dieselben Elemente. (Die Reihenfolge der Elemente bleibt unberücksichtigt.)
- (Zu den Teilmengen von A rechnet auch die Menge A selbst und die leere Menge \emptyset .)

Angabe von Intervallen

Moderne Schreibweise (Mengenlehre)	herkömmliche Schreibweise mit Ungleichheitszeichen	Sprechweise
$[a; b]$ oder $\langle a; b \rangle$	$a \leq x \leq b$	beiderseits abgeschlossenes Intervall
$(c; d)$	$c < x < d$	beiderseits offenes Intervall
$(m; n]$	$m < x \leq n$	linksseitig offenes Intervall
$(-\infty, -2) \cup (2; \infty)$	$ x > 2$	zwei Intervalle vereinigt
$(-\infty; -8] \cup [12; \infty)$	$ x - 2 \leq 10$	dto.

Man beachte, daß einige der genannten Zeichen in verschiedenen Bereichen der Mathematik zum Teil unterschiedliche Bedeutungen haben. Insbesondere beachte man:

- (2; 3) Koordinaten eines Punktes (Zahlenpaar) oder beidseitig offenes Intervall
- {2; 3} Menge von zwei Elementen
- ... < 4; ... links geschlossene Begrenzung eines Intervalls
- ... < 4 ... oder „Kleiner-als“-Beziehung.

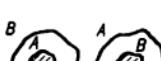
Für die Ausführung von Mengenoperationen werden einheitlich die Symbole \cup , \cap und \setminus verwendet. (Vgl. Übersicht auf der folgenden Seite.)

Mittels dieser Symbole werden vor allem folgende Tatbestände verdeutlicht:

- $K_1 \cap K_2 = S$: Menge der gemeinsamen Punkte zweier Kurven (Schnitt- oder Berührungspunkte)
- $F_1 \cap F_2 = M$: Gemeinsame Wertepaare zweier Funktionen (Lösungen $(x; y)$ eines Gleichungssystems)

L , auch $E = \{\dots\}$: Lösungs- oder Erfüllungsmenge einer Gleichung

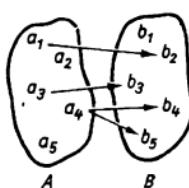
Übersicht über die Mengenoperationen

Symbolik	$A \cup B$	$A \cap B$	$A \setminus B$	$A \times B$
Bezeichnung	Vereinigungs-menge	Durchschnitts-menge	Differenzmenge	Mengenprodukt
Erfäßt werden alle Elemente, die liegen	entweder in A oder in B oder in beiden ...	sowohl in A als auch in B ...	zwar in A , aber nicht in B ...	Menge aller möglichen Zahlenpaare aus je einem Element von A und einem von B
Bild-darstellung (Punktmengen)	  	  	  	Eine Abbildung einer Menge auf eine andere (Funktion) ist Teilmenge des Mengenprodukts.
Beziehungen	$A \cup B = A$ $\Rightarrow B \subset A$	$A \cap B = \emptyset$ $\Rightarrow A, B$ liegen disjunkt (getrennt, isoliert)	$A \setminus B = \emptyset$ $\Rightarrow A \subset B$ $A \setminus B = A$ $\Rightarrow A, B$ disjunkt	

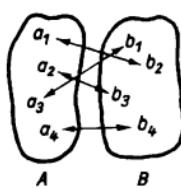
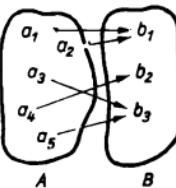
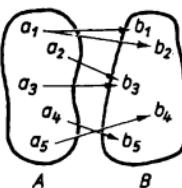
Abbildungen von Mengen

Gegeben sind zwei Mengen A und B .

Eine Abbildung aus der Menge A in die Menge B liegt vor, wenn eine Vorschrift gewissen Elementen aus A gewisse Elemente in B zuordnet. Werden dabei alle Elemente von A und B erfaßt, so spricht man von einer Abbildung von A auf B .



nicht eindeutige Abbildungen



Bei einer eindeutigen Abbildung wird jedem Element $a \in A$ ein und nur ein Element $b \in B$ zugeordnet.

Die Abbildung ist eineindeutig (oder umkehrbar eindeutig), wenn dabei auch jedem Element $b \in B$ ein und nur ein Element $a \in A$ zugeordnet werden kann.

Funktionen und ihre Darstellung

Arbeiten Sie von Anfang an mit der mengentheoretischen Definition der Funktion!

Eine Funktion ist eine eindeutige Abbildung aus der Zahlenmenge X in die Zahlenmenge Y , d. h., jedem $x \in X$ ist ein (und nur ein) Element $y \in Y$ zugeordnet.

$$f: X \Rightarrow Y$$

Die Menge aller dadurch bestimmten Wertepaare $(x_n; y_n)$ ist Teilmenge des Mengenprodukts $X \times Y$.

Ist die Abbildung sogar eineindeutig, so kann auch die Umkehrfunktion (inverse Funktion) gebildet werden. Es ist erstrebenswert, eine Funktion in folgender Form zu kennzeichnen:

$$f = \left\{ (x; y) \mid x \in P \wedge x \Rightarrow \frac{x}{x^2 + 1} \right\}. \quad ^1)$$

Im Bereich der Oberschulen und Fachschulen ist es jedoch in der Regel üblich, aus Zweckmäßigkeitsgründen eine verkürzte Schreibweise zu wählen; für die genannte spezielle Funktion zum Beispiel die zugehörige Funktionsgleichung

$$(y =) f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad \text{mit dem Vermerk: } x \text{ reell}$$

In diesem Büchlein wird diese dem Schüler vertraute Form der Funktionskennzeichnung verwendet. Die $f(x)$ stellen nur die Funktionswerte dar.

Beim Graph einer Funktion werden Definitionsbereich und Wertevorrat zeichnerisch dargestellt und die Abbildung durch Pfeile veranschaulicht.

Man begnügt sich gelegentlich mit einer Wertetafel (Wertetabelle), die auszugsweise einige Zuordnungen angibt.

Die graphische Darstellung einer Funktion wird im allgemeinen als Kurve bezeichnet. Dabei sind die Koordinaten der Kurvenpunkte zugleich die Wertepaare der Abbildung. In der Schulmathematik ist gegenwärtig statt Kurve auch die Bezeichnung Bild der Funktion üblich.

Die geometrischen Eigenschaften der Kurve sind wesentlich durch die Koeffizienten der Funktionsgleichung bestimmt. Eine Übersicht über besonders häufig vorkommende Funktionen und ihre Kurven finden Sie auf den folgenden Seiten.

Die hier gegebenen Erläuterungen zum Funktionsbegriff entheben Sie nicht der Notwendigkeit, sich ausführlich und eingehend an Hand eines Lehrbuchs mit den theoretischen Grundlagen der Mengen- und Funktionslehre auseinanderzusetzen!

¹⁾ Statt f wird zuweilen auch F verwendet. P ist hier die Menge der reellen Zahlen. Das Zeichen \wedge fordert die gleichzeitige Berücksichtigung beider Forderungen.

Übersicht über einige Funktionen und deren Bilder

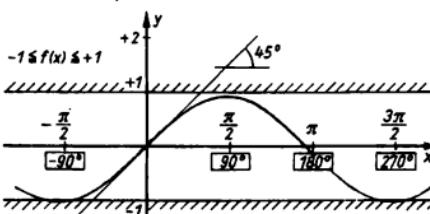
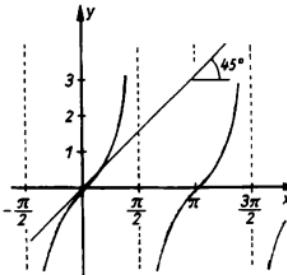
Zu den Abschnitten: Mengenlehre und Kurvendiskussion

$y = f(x)$ Name der Funktion Name der Kurve	Beschränkungen	Bild der Funktion (Kurve)	Bemerkungen	Nullstellen	y -Werte des Schnittpunkts mit der y -Achse
$f(x) = mx + b$ Lineare Funktion	$m, b, x \in P$ (reell)		m kennzeichnet den Anstieg $m < 0$ fallend $m > 0$ steigend $m > 1$ stärker als 45° ansteigend $m = \tan \alpha$ b kennzeichnet den Schnittpunkt $S_y(0; b)$ mit der y -Achse	\rightarrow lin. Gleich.	b
$(fx) = Ax^2 + Bx + C$ Quadratische Funktion	$A \neq 0$ $A, B, C, x \in P$		A kennzeichnet die Öffnung $A > 0$ nach oben $A < 0$ nach unten $ A < 1$ „flach“ B kennzeichnet die Rechts- bzw. Linkslage des Scheitels C kennzeichnet den Schnittpunkt mit der y -Achse	\rightarrow quadr. Gleich.	C
$f(x) = x^n$ (reine) Potenzfunktion Parabeln verschiedener Ordnung	$n \in N$ (für $n = 0$ an $x = 0$ nicht definiert)		Gemeinsame Punkte $O(0; 0)$ (außer $n = 0$) $E(1; 1)$ n gerade n ungerade	0 außer für $n = 0$	0 außer für $n = 0$

Fortsetzung

$y = f(x)$ Name der Funktion Name der Kurve	Beschränkungen	Bild der Funktion (Kurve)	Bemerkungen	Nullstellen	y -Werte des Schnittpunkts mit der y -Achse
$f(x) = \sqrt[n]{x}$ Wurzel-funktion (Halbparabeln nur ein Ast!)	$n \in N \setminus \{0\}$ für $x < 0$ nicht definiert $n = 1$ uninteressant		Gemeinsame Punkte $0(0;0)$ $E(1;1)$ Kurve verläuft nur im ersten Quadranten	0	0
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ Potenzfkt. mit negativen Exponenten (einfache gebrochen-rationale Funktion) Hyperbeln	$n \in N \setminus \{0\}$ für $x = 0$ nicht definiert (Pol) $n = 0$ uninteressant		Annäherung an die Koordinatenachsen (Asymptoten)	keine	keine
$f(x) = a^x$ Exponential-funktion Exponential-kurven	$a \geq 0$ Für $a = 0$ an $x \leq 0$ nicht definiert		Technik: Dämpfung Biologie: Entwicklung Physik: radioaktiver Zerfall $f(0) = 1$ außer $a = 0$ $f(1) = a$ Die Kurven zu $a_1 = a$ und $a_2 = \frac{1}{a}$ liegen symmetrisch zur y -Achse	keine (außer $a = 0$)	1 (außer $a = 0$)

Fortsetzung

$y = f(x)$ Name der Funktion Name der Kurve	Beschrän- kungen	Bild der Funktion (Kurve)	Bemerkungen	Null- stel- len	y -Werte des Schnitt- punkts mit der y -Achse
$f(x) = \sin x$ Sinus- funktion	$-1 \leq f(x) \leq +1$		Periodizität 2π $f(x) = f(x + 2k\pi)$ Anstieg im Ur- sprung 45° Maxima bei $x = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi$ Minima bei $x = \frac{3\pi}{2} \pm 2k\pi$	$0 \pm k\pi$	0
$f(x) = \tan x$ Tangens- funktion	nicht defi- niert für $x =$ $\frac{(2k - 1)\pi}{2}$		Periodizität 2π Pole bei $x = \frac{(2k - 1)\pi}{2}$ $f(x) = 1$ für $x = \frac{\pi}{4};$ $\frac{5\pi}{4}; \dots$	$0 \pm k\pi$	0

Man beachte:

Aus dem Vorliegen einer Gleichung oder eines Kurvenbildes kann nicht auf das Vorhandensein einer Funktion geschlossen werden.

So kann $y = t$ (t const.) eine Funktion darstellen, deren Bild eine Parallele zur x -Achse im Abstand t ist.

Dagegen ist $x = s$ (s const.) Gleichung einer zur y -Achse parallelen Geraden, aber keine Funktionsgleichung. (Zu $x = s$ gehören viele y -Werte!)

$x^2 + y^2 = r^2$ ist Gleichung eines Kreises, aber nicht Funktionsgleichung. (Zu $|x| < r$ gehören stets zwei y -Werte.)

$y^2 = x$ ist Gleichung einer nach rechts geöffneten Parabel (Kegelschnitt), aber nicht Funktionsgleichung. Die Parabel setzt sich aus zwei Ästen zusammen, die Bilder der Funktionen $f_1(x) = \sqrt{x}$ und $f_2(x) = -\sqrt{x}$ sind.

Zusammenstellung einiger Begriffe und Symbole:

(Anwendung in der Differentialrechnung (D))

$F(x) = \dots$ Funktionsgleichung, auch $y = \dots$

$f(x_0)$ Funktionswert, y -Wert an der Stelle $x = x_0$

$f(0)$ Funktionswert an der Stelle $x = 0$, y -Koordinate des Schnittpunkts des Bildes von f mit der y -Achse

$f'(x) = \dots$ (D) Erste Ableitung, Funktionsausdruck für den Tangentenanstieg

$f'(x_0)$ (D) Erste Ableitung (Tangentenanstieg $\tan \alpha$ an der Stelle $x = x_0$)

$f''(x)$ (D) Ausdruck für die Krümmung, zweite Ableitung der Funktion

$f(x) = 0$ Bedingung für Nullstellen zum Bestimmen der x_N -Werte, an denen der Funktionswert Null ist.
Dort schneidet das Bild von f die x -Achse oder berührt sie.

$f'(x) = 0$ (D) Bedingung für Extremstellen.
An diesen Stellen läuft das Bild von f horizontal.

$f(x_s) = g(x_s)$ Bedingung zum Ermitteln der x -Werte gemeinsamer Punkte der Bilder von f und g

$f'(x_1) = g'(x_1)$ (D) Bedingung zur Ermittlung der Stellen x_1 , an denen die Bilder von f und g gleichen Anstieg (parallele Tangenten) haben.

Formel zur Feststellung des „Schnittwinkels“ zwischen zwei Kurven, d. h. des Winkels, den die Tangenten an die Bilder von f und g im gemeinsamen Punkt bilden:

$$m_1 = f'(x_s), \quad m_2 = g'(x_s)$$

$$\tan \varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

-
- 2.1. Die Menge A bestehe aus den Produktivkräften, die Menge B aus den Produktionsinstrumenten einer bestimmten gesellschaftlichen Epoche. Welche Relation besteht zwischen beiden Mengen?
-
- 2.2. Gegeben seien Pr Menge der Primzahlen und U Menge der ungeraden positiven Zahlen. Bestimmen Sie $Pr \cup U$; $Pr \cap U$; $Pr \setminus U$ und $U \setminus Pr$!
-
- 2.3. Von 39 sportinteressierten Studenten eines Seminars an der Universität gehören 11 einer Fußballmannschaft, 19 einer Skivereinigung und 23 einem Schachklub an. Einer der Studenten ist Mitglied aller drei Vereine, 4 weitere sind in der Fußballmannschaft und gleichzeitig im Schachklub, 7 gehören der Skivereinigung an und sind Mitglieder im Schachklub, spielen aber nicht Fußball, und 2 gehören nur zur Skivereinigung und zur Fußballmannschaft. Wieviel Studenten sind nur in einem der drei Vereine, wieviel in keinem der Vereine?
-
- 2.4. Für ein Teilverhältnis λ folgen aus Berechnungen zwei Bedingungen: a) $|\lambda| \geq 1,5$ und b) $-4 \leq \lambda < 2$. Welche Werte für λ sind möglich?
-
- 2.5. Ein Gleichungssystem $a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$ hat die Eigenschaft $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$. Was kann über die Lösungsmenge ausgesagt werden?
-
- 2.6. Eine Parabel verlaufe sehr „flach“, sei nach oben geöffnet und schneide die y -Achse im Scheitel bei $(0; -4)$. Was kann über die Koeffizienten der zugehörigen quadratischen Funktion ausgesagt werden?
-
- 2.7. Gegeben ist $f(x) = -0,5x^2 - 2x + 3$. Welche qualitativen Aussagen sind ohne Rechnung über den Verlauf ihres Bildes möglich?
-
- 2.8. Eine Gerade schneide die y -Achse bei $(0; -3,5)$ und falle unter einem Winkel $< 45^\circ$ gegen die Horizontale. Was kann über die Koeffizienten m und b ausgesagt werden?
-
- 2.9. Der Verlauf der Bilder der Exponentialfunktionen $f(x) = 2^x$, $g(x) = 0,5^x$ und $h(x) = 2^{-x}$ ist zu vergleichen.
-
- 2.10. Geben Sie die Intervalle I_1 ; I_2 und I_3 an, für die mit $x \in P$ gilt: $x + 2 > 3$; $x + 7 \geq 10$; $3 < x - 2 \leq 4$.

B

2.1. Die Produktionsinstrumente sind bekanntlich ein Teil der Produktivkräfte. Überlegen Sie auch, was noch zu den Produktivkräften gehört.

2.2. Man notiert sich zunächst die ersten Glieder der vorkommenden Mengen

$$Pr = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; \dots\}$$

$U = \{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; \dots\}$; 2 ist die einzige gerade Primzahl.

2.3. In der Fußballmannschaft sind 11, davon 4 auch im Schachklub, 2 auch im Skiverein und ein weiterer auch im Schachklub und in der Skivereinigung.

In der Skivereinigung finden wir 19, wovon 7 auch im Schachklub, 2 auch in der Fußballmannschaft und ein weiterer auch im Schachklub und der „Elf“ mitmachen.

Schließlich sind im Schachklub 23, 4 davon auch in der Fußballmannschaft, 7 auch in der Skivereinigung, einer schließlich außerdem in der Fußballmannschaft und in der Skivereinigung.

Nur in der Elf sind also 4, nur im Skiverein 9 und nur im Schachklub 11.

2.4. Die Bedingungen lauten a) $\lambda \leq -1,5$ und $\lambda \geq 1,5$; b) $-4 \leq \lambda < 2$.

2.5. Man löst beide Gleichungen nach y auf:

$$g_1 : y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1} \quad g_2 : y = -\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2}.$$

2.6. Kennzeichen:

- a) sehr flacher Verlauf
 - b) Öffnung nach oben
 - c) der Scheitel liegt auf der y -Achse
 - d) Schnittpunkt mit der y -Achse im Punkt $(0; -4)$.
-

2.7. Aus $A = -0,5$ kann man sofort auf einen „flachen“ Verlauf der Parabel und Öffnung nach unten schließen.

2.8. Aussagen über den Verlauf der Geraden:

- a) die Gerade fällt
 - b) die Gerade verläuft flach
 - c) die Gerade schneidet die y -Achse unterhalb der x -Achse.
-

2.9. Wegen der Potenzgesetze stimmen die Funktionen g und h überein: $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$, d. h., für alle $x \in P$ ist $g(x) = h(x)$.

2.10. Nach Umformung

$$x > 1 \text{ bzw. } x \geq 3 \text{ bzw. } 5 < x \leq 6.$$

2.1. Die Produktionsinstrumente bilden eine Teilmenge der Produktivkräfte. Die letzteren enthalten noch einige Elemente mehr, z. B. den arbeitenden Menschen selbst!

2.2. $Pr \cup U$ wird alle ungeraden Zahlen einschließlich der 2 enthalten.

$Pr \cap U$ enthält nur die Primzahlen außer der 2.

$Pr \setminus U$ kann nur die 2 enthalten, weil diese nicht Element von U .

$U \setminus Pr$ enthält nur einen Teil der ungeraden Zahlen.

2.3. Nur in der „Elf“: 4 Menge der „Fußballer“: F
 Nur bei der Skivereinigung: 9 Menge der „Skisportler“: S
 Nur im Schachklub: 11 Menge der „Schachspieler“: K
 Nur in einer: 24 Menge der Studenten in nur einem der drei Vereine (24)

$$M = [F \setminus (S \cup K)] \cup [D \setminus (F \cup S)] \cup [S \setminus (F \cup K)]$$

Menge der Studenten in keinem der drei Vereine (wenn A die Menge aller 39 Studenten ist): $N = A \setminus (F \cup S \cup K)$.

2.4. Die beiden Intervalle lauten: a) $I_1 = (-\infty; -1,5]$; $I_2 = [1,5; \infty)$; b) $I_3 = [-4; 2)$.

Gesucht: $I = (I_1 \cap I_3) \cup (I_2 \cap I_3)$.

2.5. Auf Grund der Bedingung $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$ sind die „Anstiege“ gleich. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:
 c₁ : b₁ gleich (1) oder ungleich (2) c₂ : b₂.

2.6. Aussagen über die Koeffizienten

- a) $|A| < 1$
- b) $A > 0$
- c) $B = 0$
- d) $C = -4$.

2.7. Die +3 (absolutes Glied) bedeutet: Schnittpunkt mit der y -Achse oberhalb der x -Achse.
 Wegen $B < 0$ und $A < 0$ liegt der Scheitel links der y -Achse.

2.8. Aussagen über m und b :

- a) m ist negativ
- b) $|m| < \tan 45^\circ$; $|m| < 1$
- c) b ist negativ.

2.9. Das Bild von $f(x)$ steigt monoton, das von $g(x)$ fällt. Das Ersetzen von x durch $(-x)$ überführt f und g ineinander.

2.10. Die entsprechenden Intervalle sind:

beidseitig offen	links geschlossen	links offen
rechts offen		rechts geschlossen

D

-
- 2.1. Es gilt $B \subset A$. Es handelt sich um eine echte Teilmenge. Die Fälle $B = \emptyset$ und $B = A$ kommen nicht in Frage!

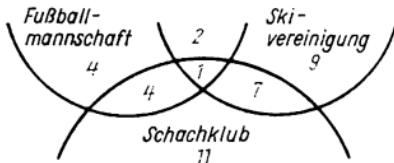
-
- 2.2. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}Pr \cup U &= \{1; 2; 3; 5; 7; 9; 11; \dots\} \\Pr \cap U &= \{3; 5; 7; 11; 13; 17; \dots\} \\Pr \setminus U &= \{2\} \\U \setminus Pr &= \{1; 9; 15; 21; 25; \dots\}\end{aligned}$$

Eleganter geschrieben:

$$\begin{aligned}Pr \cup U &= U \cup \{2\} \\Pr \cap U &= Pr \setminus \{2\}\end{aligned}$$

-
- 2.3. 24 Studenten von den 39 gehören nur einem Verein an. 1 Student ist in keinem der Vereine.



-
- 2.4. Für die möglichen λ gibt es zwei Intervalle:
[-4; -1,5] und [1,5; 2).

-
- 2.5. (1) (Die beiden Geraden) Die Gleichungen sind linear abhängig,
fallen zusammen. $g_1 \cap g_2 = g_1 = g_2$.
(2) (Die beiden Geraden) Es ergibt sich ein Widerspruch,
laufen parallel. $g_1 \cap g_2 = \emptyset$.

-
- 2.6. Es ist $0 < A < 1$, $B = 0$, $C = -4$

-
- 2.7. Es handelt sich um eine flach verlaufende, nach unten geöffnete Parabel mit zwei Schnittpunkten mit der x -Achse. Die Symmetriechse liegt links der y -Achse.

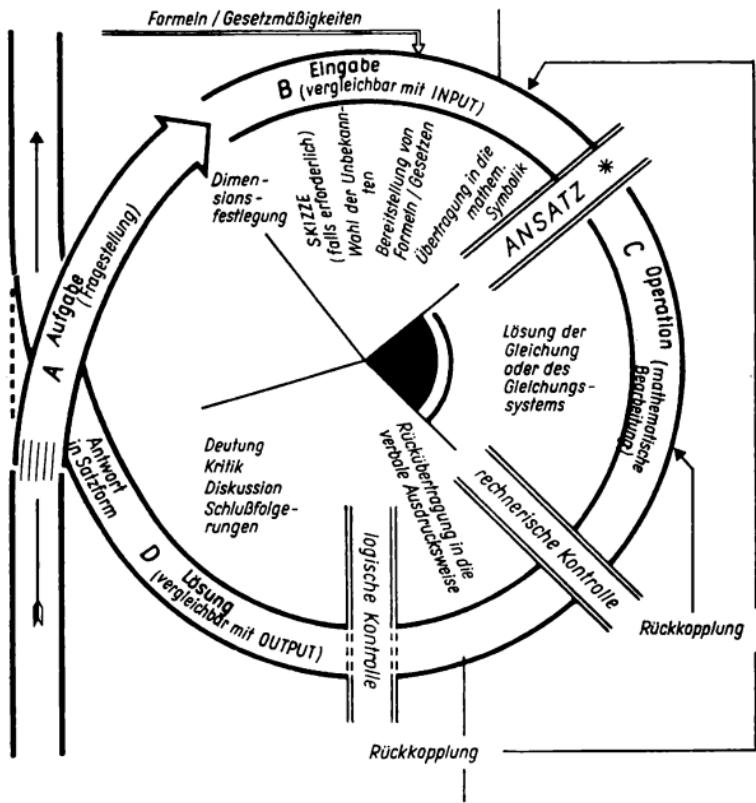
-
- 2.8. $m: -1 < m < 0$
 $b: b = -3,5$.

-
- 2.9. Die Bilder der beiden Funktionen verlaufen symmetrisch zueinander, gespiegelt an der y -Achse, die im Punkt (0; 1) geschnitten wird.

-
- 2.10. $I_1 = (1; \infty)$; $I_2 = [3; \infty)$; $I_3 = (5; 6]$.

3. Anwendungsaufgaben zu linearen Gleichungssystemen mit zwei unbekannten Variablen

Das Lösen von Anwendungsaufgaben (eingekleideten Aufgaben, Textgleichungen) bereitet dem Anfänger im allgemeinen erhebliche Schwierigkeiten. Das „Finden des Ansatzes“ (d. h. der mathematischen Formulierung des Problems) darf nicht dem Zufall überlassen werden. Gibt es schon kein festes „Rezept“ zum Lösen solcher Aufgaben, so helfen doch systematisches Vorgehen und die Beachtung bestimmter Regeln neben dem häufigen Üben weiter. Die Verfahrensweise entspricht im Grunde dem Vorgehen bei allen mathematischen Untersuchungen.



Bei einigen Textaufgaben lassen sich speziellere Regeln für das Vorgehen angeben, so z. B. bei Mischungsaufgaben und Bewegungsaufgaben.

Allgemeine Textaufgaben	Mischungsaufgaben	Bewegungsaufgaben
A Aufgabenstellung (mehrfacl. ..., unklare Begriffe klären)	dto.	dto.
B Dimensionsfestlegung	dto.	Festlegen der Einheiten für Längen und Zeiten. Wahl eines geeigneten Anfangszeitpunkts (Standpunktwahl)
Skizze, Wahl der Unbekannten (Wonach ist gefragt?)	meist ohne Skizze Wahl der Unbekannten	In der Regel: t Zeit bis zum Eintritt des Ereignisses, gerechnet ab Anfangszeitpunkt, s Weg des einen Körpers bis zum Treffen (Einholen), formale Skizze
Bereitstellen von Formeln und Gesetzen	Aufstellen einer Tabelle, enthaltend die Grundstoffe und die Mischung	Berechnung der Geschwindigkeiten beider Körper
Formulierung der Aussageformen und Gesetze mittels der gewählten Unbekannten	In der Tabelle entstehen 2 Gleichungen: eine, die den Preis oder den Gehalt an Wirkstoffen enthält, und die Mengengleichung	Es gilt: Weg = Geschwindigkeit mal Zeit für jeden Körper bis zum Treff- oder Überholungspunkt Jede Bewegung erhält eine eigene Gleichung, beide zusammen bilden ein Gleichungssystem. „Gegenverkehr“: s_1 und s_2 = Gesamtstrecke minus s_1 „Gleichgerichteter Verkehr“: $s_1 = s_2$ (Ausgangspunkt der Zeitrechnung beachten!)
Ansatz	Ansatz (Gelegentlich auf eine Gleichung mit einer Unbekannten zurückzuführen, wenn Mengengleichung aufgelöst wird)	Ansatz
C Lösung der Gleichung oder des Gleichungssystems	dto.	„Gegenverkehr“: Addition der Gleichungen „Gleichgerichteter Verkehr“: Gleichsetzungsverfahren
Probe	Probe	Probe
D Logische Kontrolle Verbale Formulierung	dto.	Deutung der Zeitangabe. Feststellen, ob das Treffen auf der Verbindungsstrecke geschieht.

-
- 3.1. Ein Betrieb plant eine Monatsproduktion von 4500 Erzeugnissen, die in verschiedener Stückzahl von den Teilwerken M und N hergestellt werden. Wenn aber das Teilwerk M nur 80% seines Plansolls, N aber das 1,2fache produziert, verlassen nur 4400 Erzeugnisse den Betrieb. Die Erzeugnisse von M bringen einen Reingewinn von je 40,- Mark, die von N einen solchen von je 60,- Mark. Vergleichen Sie die Produktionsvolumen.
-
- 3.2. Um die Tiefe eines Feuerlöschbeckens zu bestimmen, wird eine Stange senkrecht auf Grund gestellt. Sie ragt dann 80 cm aus dem Wasser heraus. Neigt man die Stange, so berührt sie 2,40 m seitlich die Wasseroberfläche. Die Länge der Stange ist nicht bekannt. Wie tief ist das Feuerlöschbecken?
-

Mischungsaufgabe

- 3.3. Die Teesorten INDIA (51 Mark/kg) und GRUSINIA (36 Mark/kg) sollen so gemischt werden, daß 10 kg der Mischung ORIENTA ohne Verlust für 400,- Mark verkauft werden können. Wieviel Kilogramm jeder Sorte werden für die Mischung verwendet?
-

Bewegungsaufgaben

- 3.4. Die Eisenbahnstrecke von A nach F ist 780 km lang und führt über B (km 189), C (km 229), D (km 251) und E (km 383). Der NORDEXPRESS fährt ab A 15⁰⁶ und trifft in F 4⁵⁰ ein. Der SÜDEXPRESS startet in F 11¹⁷ und trifft in A 22⁵⁶ ein. Wo und wann begegnen sich die Züge?
-
- 3.5. Durch einen Berg soll ein Tunnel getrieben werden. Die beiden Ausgänge A und B liegen in gleicher Höhe und haben eine horizontale Entfernung von 2 km voneinander. Der Vortrieb erfolgt gleich schnell, von A aus mit einem Anstieg 1 : 150, von B aus mit einem solchen von 1 : 60. Wo wird die Verbindung hergestellt werden?
-
- 3.6. Eine Jugendgruppe unternimmt eine Radtour von A nach dem 40 km entfernten B . Sie fahren mit einem nahezu gleichbleibenden Tempo von 15 km h^{-1} und starten um 11⁰⁰. Eineinhalb Stunden später fährt ihnen ein Motorradfahrer mit 55 km h^{-1} nach. Wo und wann holt er die Gruppe ein?
-

B

3.1. Einheit: St./Monat

Skizze: -

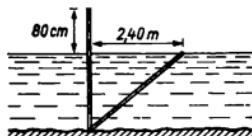
Teilwerk <i>M</i> produziert nach Plan	<i>x</i> St.,
nach Veränderung	0,8 <i>x</i> St.
Teilwerk <i>N</i> produziert nach Plan	<i>y</i> St.,
nach Veränderung	1,2 <i>y</i> St.

Der Reingewinn bleibt zunächst unberücksichtigt.

Ges.:

$$\begin{aligned}x + y &= 4500 \\0,8x + 1,2y &= 4400\end{aligned}$$

3.2. Skizze:



Einheit: cm Gesetz: PYTHAGORAS

Es ist nur eine unbekannte Variable erforderlich.

Tiefe des Beckens: x cm,

Stangenlänge: $(x + 80)$ cm.

PYTHAGORAS $(x + 80)^2 = 240^2 + x^2$
(scheinbar quadratische Gleichung!)

3.3. Einheit: M und kg

Es werden x kg INDIA und y kg GRUSINIA verwendet

Skizze: -

Preisgleichung: $51x + 36y = 400$

Sorte	Preis je kg	Menge in kg	Wert in Mark
INDIA	51	x	$51x$
GRUSINIA	36	y	$36y$
ORIENTA	(40)	$x + y$	$51x + 36y$

Mengengleichung: $x + y = 10$

3.4. Einheit: (z. B. km, min) Beginn der „Zeitrechnung“: 11⁰⁰

Geschwindigkeiten: NORDEXPRESS $780 : 824 = 0,947$

SÜDEXPRESS $780 : 699 = 1,116$

„Gegenverkehr“ y : Entfernung *A* bis zum Treffpunkt in km

x : Zeit bis zum Treffen in min. nach 11⁰⁰

Bewegungsgleichungen: NORDEXPRESS: $y = 0,947 \cdot (x - 246)$

SÜDEXPRESS: $780 - y = 1,116 \cdot (x - 17)$

3.5. Einheit: m

Vortrieb: von *A* aus 1 m Höhe auf 150 m von *B* aus 1 m Höhe auf 60 m

Verbindungs- (Treff-) Stelle in x m Höhe über *AB* und in y m Entfernung von *A* aus.

Diese Stelle ist $(2000 - y)$ m von *B* – horizontal gemessen – entfernt.

Von *A* aus: $\frac{1}{150} \cdot y$

von *B* aus: $x = \frac{1}{60} \cdot (2000 - y)$

3.6. Einheit: km, h. Zeit wird gemessen nach 11⁰⁰.

Geschwindigkeiten: Gruppe 15 km h⁻¹, Motorrad 55 km h⁻¹

Der Motorradfahrer holt die Gruppe x Stunden nach 11⁰⁰ y km hinter *A* ein.

Bewegungsgleichungen: „Gleichgerichteter Verkehr“

Gruppe: $y = 15 \cdot x$

Motorradfahrer: $y = 55 \cdot (x - 1,5)$

- 3.1.** Die erste Gleichung wird mit $(-1,2)$ multipliziert.

$$\begin{array}{r} -1,2x - 1,2y = -5400 \\ 0,8x + 1,2y = 4400 \\ \hline -0,4x = -1000 \\ x = 2500 \quad y = 2000 \end{array}$$

- 3.2.** Beim Auflösen der Quadrate zeigt sich, daß die Glieder mit x^2 sich aufheben. Es entsteht also eine lineare Gleichung.

$$\begin{array}{rcl} x^2 + 160x + 6400 & = & 57600 + x^2 \\ 160x & = & 51200 \\ x & = & 320 \end{array}$$

- 3.3.** Zweite Gleichung mit (-36) multipliziert:

$$\begin{array}{rcl} 51x + 36y = 400 & & \\ x + y = 10 & & \\ 51x + 36y = 400 & 15x = 40 & x = 2,667 \\ -36x - 36y = -360 & 2,667 + y = 10 & \\ & y = 7,333 & \end{array}$$

- 3.4.** Nach Ausmultiplikation der Klammern bietet sich das Additionsverfahren an:

$$\begin{array}{rcl} y & = & 0,947x - 233,0 \\ 780 - y & = & 1,116x - 19,0 \\ \hline 780 & = & 2,063x - 252,0 \\ 2,063x & = & 1032 \\ x & = & 500 \quad y = 0,947 \cdot 500 - 233 \\ & & = 240,5 \end{array}$$

- 3.5.** Die erste Gleichung wird zunächst mit 150, die zweite mit 60 multipliziert:

$$\begin{array}{rcl} 150x & = & y \\ 60x & = & 2000 - y \\ \hline 210x & = & 2000 \quad x = 9,52 \\ y & = & 150 \cdot 9,52 = 1428 \end{array}$$

- 3.6.** Nach Gleichsetzungsverfahren:

$$\begin{array}{l} 15x = 55x - 82,5 \\ 40x = 82,5 \\ x = 82,5 : 40 = 2,0625 \\ y = 15 \cdot 2,0625 = 30,94 \end{array}$$

D

- 3.1. Nach dem Plan produzieren die Teilwerke
 M 2500 und N 2000 St.
mit einem Gesamt-Reingewinn von 220000,- Mark.
- Nach der Veränderung produzieren
 M 2000 und N 2400 St.
mit einem Gesamt-Reingewinn von 224000,- Mark.
- Trotz der geringeren Stückzahl erhöht sich also hier der Gewinn, was durch die unterschiedlichen Gewinnsätze der Erzeugnisse bedingt ist. Überzeugen Sie sich, daß keine brauchbare Lösung entsteht, wenn die in der Aufgabe genannten Stückzahlen 3500 (Plan) und 4400 (nach Veränderung) betragen sollen.
-
- 3.2. Die Tiefe des Bassins beträgt etwa 3,20 m.
Die verwendete Stange ist etwa 4 m lang.
Für eine genaue Tiefenbestimmung reicht das verwendete Prinzip nicht aus. Überzeugen Sie sich davon, daß Veränderungen der Angabe 2,40 m erhebliche Unterschiede in der berechneten Tiefe hervorrufen würden.
Wäre mit zwei unbekannten Variablen (Beckentiefe x cm, Stangenlänge y cm) gerechnet worden, entstünde als Ansatz das Gleichungssystem:
- $$\begin{aligned}y^2 &= 240^2 + x^2 \\y &= 80 + x\end{aligned}$$
-
- 3.3. Für die Mischung werden $2\frac{2}{3}$ kg INDIA und $7\frac{1}{3}$ kg GRUSINIA verwendet.
Dafür werden 136,- Mark (INDIA-Anteil) und 264,- Mark (GRUSINIA-Anteil) ausgegeben und 400,- Mark für die 10 kg Mischung eingenommen.
Von der billigeren Teesorte ist etwa dreimal soviel enthalten wie von der teureren.
-
- 3.4. Die beiden Züge begegnen sich etwa 240 km von A entfernt, und zwar findet das Treffen etwa 500 min nach $11^{\text{h}0}$ statt. Die beiden Expreßzüge fahren etwa gegen $19^{\text{h}20}$ aneinander vorbei.
-
- 3.5. Der Durchstoß erfolgt 9 bis 10 m über der Höhenlinie AB , und zwar in einer horizontal gemessenen Entfernung von etwa 1430 m von A aus.
Daraus folgt, daß bei gleich schnellem Vortrieb der Tunnelbau von B aus wesentlich später begonnen werden muß. Bei gleichzeitigem Baubeginn würde der Stollen von A aus ein Zwischenstück des anderen treffen.
-
- 3.6. Der Motorradfahrer holt die Jugendgruppe nach etwa 31 km gegen $13^{\text{h}05}$ ein.

4. Quadratische Gleichungen und Gleichungen höheren Grades

Einige Bemerkungen zu den quadratischen Gleichungen

Liegt eine gemischtquadratische Gleichung vor, so muß in jedem Fall zunächst die „Normalform“ hergestellt werden: Es wird die gesamte Gleichung durch den Koeffizienten des quadratischen Gliedes (einschließlich seines Vorzeichens) dividiert.

Liegt eine quadratische Gleichung mit bestimmten Zahlen vor, wende man die Lösungsformel an.

Sind die Koeffizienten Variablen (Buchstaben), so ist auch die Anwendung der „Methode der quadratischen Ergänzung“ möglich.

Fehlt das „absolute Glied“ (d. h., ist dieses 0), so ist x „abzuspalten“ (auszuklammern). Entweder sind zwei Proben durch Einsetzen der Lösungen in die erste (!) Zeile vorzunehmen, oder es wird der Satz von VIETA angewendet, wobei dann aber zusätzlich die Lösungsschritte bis zur Herstellung der Normalform kontrolliert werden müssen.

Typische Fälle

$$x^2 - 7x = -12$$

$$7x^2 = 28$$

(Lösungsformel)

$$L = \{3; 4\}$$

(„reinquadratisch“)

$$L = \{-2; 2\}$$

(Elemente der Lösungsmenge unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen)

$$-2x^2 + 5x = 2$$

$$3x^2 - 10x + 9 = 0$$

(Division durch -2)

$$L = \{0,5; 2\}$$

$L = \emptyset$ keine reellen Lösungen

$$x^2 - 8x = -16$$

bzw. $(x - 4)^2 = 0$

$$L = \{4\}$$
 (Doppellösung)

$$-x^2 + 2,42x = 1,19$$

(Koeffizienten sind Dezimalzahlen)

$$L = \{0,6865; 1,7335\}$$

$$5x^2 - 4x = 0$$

(absolutes Glied ist 0)

s. o.

$$x \cdot (5x - 4) = 0$$

$$L = \{0; 0,8\}$$

$$0,5x^2 - 3x = -8$$

(Division durch 0,5 oder Multiplikation mit 2)

$$L = \emptyset$$

$$Ax^2 - x = A + 1$$

(Methode der quadratischen Ergänzung)

$$x^2 - \frac{1}{A}x = \frac{A+1}{A}$$

$$\left(x - \frac{1}{2A}\right)^2 = \frac{1}{4A^2} + \frac{4A^2 + 4A}{4A^2}$$

$$x = \frac{1}{2A} \pm \frac{2A+1}{2A}$$

$$L = \left\{-1; \frac{1+A}{A}\right\}$$

$$x^2 - qx = p$$

(Die Anwendung der Lösungsformel bringt die Gefahr von Fehlern mit sich!)

$$\left(x - \frac{q}{2}\right)^2 = p + \frac{q^2}{4}$$

$$x \text{ hier: } = 0,5(q \pm \sqrt{4p + q^2})$$

nicht mit allgemeiner Lösungsformel verwechseln!

Vor der Bearbeitung von Gleichungen höheren Grades sollten Sie unbedingt Sicherheit im Lösen quadratischer Gleichungen erwerben!

Gleichungen höheren Grades

Stellen Sie zunächst den Grad n (höchster auftretender Exponent von x) fest. Die Lösungsmenge kann höchstens n reelle Elemente aufweisen.

Bei der Lösung von Gleichungen von höherem als dem 2. Grad können Sie folgende Verfahren anwenden:

1. Wenn das absolute Glied 0 ist, so ist x auszuklammern. Eine Lösung ist dann $x_1 = 0$. Sie können danach durch x dividieren und anschließend die übrigen Lösungen suchen.
2. Wenn Ihnen eine Lösung $x_1 = a$ bekannt ist oder Sie haben diese durch Probieren gefunden (man probiere vor allem $x = \pm 1$ und $x = \pm 2$), dann dividieren Sie die Gleichung durch $(x - a)$. Nach dieser Partial- oder Polynomdivision entsteht eine Gleichung niederen Grades, die Sie weiter bearbeiten müssen.
3. Wenn die Gleichung nur Glieder geraden Grades (durch 2 teilbare Exponenten) oder nur Glieder mit durch 3 teilbaren Exponenten enthält, so führt eine Substitution $x^2 = z$ bzw. $x^3 = z$ weiter. Man erhält zunächst die Lösungen für z . Anschließend werden aus der Substitutionsgleichung die Lösungen von x ermittelt.
4. Wenn die Gleichung als ein Produkt zweier Ausdrücke gegeben ist, welches gleich 0 ist, so wird jeder Faktor gleich 0 gesetzt und so die Gleichung „zerlegt“.
5. Im übrigen besteht immer die Möglichkeit, mittels des HORNERSchen Schemas die Lösungen zu finden (siehe folgende Seite).

Die hier genannten Verfahren können auch miteinander gekoppelt werden.

Das Schema von Horner

Die Vorteile der Verwendung des HORNERSchen Schemas:

Bequeme Rechnung (nur Addition und Multiplikation; Einsatz des Rechenstabs möglich). Schnelles Erkennen des Bereiches, in dem die zugehörige Funktion ihre charakteristischen Eigenschaften hat.

Bei der Lösung der betreffenden Gleichung erhält man im interessierenden Bereich zusätzlich genügend viele Werte für eine Wertetafel der zugehörigen Funktion.

Nachteile bestehen bezüglich der Beschränkung auf ganzzrationale Funktionen und im Hinblick auf den seltenen Fall, daß mehrere Lösungen zwischen zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen liegen.

Beispiel:

$$3x^5 + x^4 - 48x = 16$$

Alle Koeffizienten – auch die nicht geschriebene „1“ und „0“ für nichtvorhandene Glieder mit einem Exponenten $< n$ – sind in der Kopfzeile einzutragen. Für jedes „zu probende“ x ist eine Doppelzeile zu verwenden. Die Zahlen der unteren Reihe dieser Doppelzeile werden mit dem x -Wert multipliziert und nach Notieren in der oberen Zeile zum Wert in der Kopfzeile addiert.
* gibt y -Wert an.

x	3	1	0	0	-48	-16	y	Bem.
0	\downarrow	-16	*	ohne Berechnung
1	3 ↗	4	4	4	-44	-44	*	
2	3 ↗	7	14	28	56	16	*	Nullstelle $x_1 = +2$

„Vorzeichengleichheit“ (d. h. in der unteren Zeile überall gleiches Vorzeichen). „Oberhalb 2“ liegen ($x > 0$) keine weiteren Lösungen.¹⁾

0	-16		Zwischen 0 und -1 liegt eine Lösung.
-1	3 ↗	-2	2	-2	-46	30	*	

Die Lösung muß näher an 0 als an -1 liegen. Man probiere mit -0,3 oder -0,4. Man findet, daß die Lösung zwischen -0,3 und -0,4 liegen muß. Nach weiterem Interpolieren findet man Lösung $x_2 = -\frac{1}{3}$.

x	3	1	0	0	-48	-16		Bem.
-2	3	-5	+10	-20	40	16	*	

Die dritte Lösung $x_3 = -2$ ist gefunden. Es können nun höchstens noch zwei weitere Lösungen vorhanden sein.

-3	-9	24	-72	216	-504	*		
-3	3	-8	24	-72	168	-520	*	

Die Vorzeichen der unteren Zeile wechseln ab. Man spricht vom „Vorzeichenwechsel“. „Unterhalb -3“ liegen keine weiteren Lösungen ($x < 0$).²⁾

Das Intervall (-3; +2) ist auch gleichzeitig das Intervall der Funktion $f(x) = 3x^5 + x^4 - 48x - 16$, in dem sich die wesentlichen typischen Eigenschaften zeigen.

Außerhalb dieses x -Bereiches ist der Verlauf des Bildes der Funktion ohne Besonderheiten. Es liegen nur drei (von möglichen fünf) reelle Lösungen vor. Davon kann man sich wie folgt überzeugen:

Der Ausdruck $(3x^5 + x^4 - 48x - 16)$ wird nacheinander durch $(x + 2)$, $(x - 2)$ und $\left(x + \frac{1}{3}\right)$ dividiert.

Zweckmäßigerweise dividiert man gleich durch

$$(x + 2) \cdot (x - 2) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) = \left(x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 4x - \frac{4}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} (3x^5 + x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 48x - 16) : & \left(x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 4x - \frac{4}{3}\right) = 3x^2 + 12 \\ 3x^5 + x^4 - 12x^3 - 4x^2 \end{aligned}$$

$$+ 12x^3 + 4x^2 - 48x - 16$$

$$12x^3 + 4x^2 - 48x - 16$$

Man erhält einen (quadratischen) Ausdruck, den man nun gleich 0 setzt, um eventuelle weitere Lösungen zu finden. Diese quadratische Gleichung hat aber keine reellen Lösungen mehr: $3x^2 + 12 = 0$

$$\Rightarrow x^2 + 4 = 0 \quad L = \emptyset.$$

Die Lösungsmenge der oben angeführten Gleichung 5. Grades lautet:

$$L = \left\{ 2; -\frac{1}{3}; -2 \right\}.$$

¹⁾ „Oberhalb 2“ heißt: für $x > 2$

²⁾ „Unterhalb -3“ heißt: für $x < -3$

Übung zur quadratischen Funktion und zur quadratischen Gleichung

Gegeben ist eine quadratische Funktion f durch die Gleichung $f(x) = -0,25x^2 - 0,5x + 3,75$

(1) Vorüberlegung

Die Parabel ist wegen $A = -\frac{1}{4}$ nach unten geöffnet und flach (gestaucht). Der Scheitelpunkt

(Gipspunkt, Maximumpunkt) liegt links der y -Achse. Die Parabel schneidet die y -Achse bei $Q(0; 3,75)$.

(2) Nullstellen $f(x) = 0$

$$-0,25x^2 - 0,5x + 3,75 = 0$$

$$x_{N1} = -5; \quad x_{N2} = 3$$

(3) Scheitelpunkt

$$x_S = 0,5(x_{N1} + x_{N2}) = -1; \quad y_S = f(-1) = 4$$

Eine Gerade läuft durch die Punkte

$$P_3(-11; -15)$$

$$P_4(3; 6)$$

(4) Gleichung dieser Geraden

$$\begin{array}{rcl} y & = & mx + n \\ \hline P_3 & | & -15 = -11m + n \\ P_4 & | & 6 = 3m + n \end{array}$$

$$m = 1,5; \quad n = 1,5$$

$$y = g(x) = 1,5x + 1,5$$

(5) Schnittpunkte

der Bilder von f und g

I Edingung:

$$f(x_P) = g(x_P)$$

$$-0,25x^2 - 0,5x + 3,75 = 1,5x + 1,5$$

$$-0,25x^2 - 2x + 2,25 = 0$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0 \text{ (Normalform)}$$

$$x_1 = -9, \quad x_2 = 1$$

$$y_1 = g(-9) = -12, \quad y_2 = 3$$

(6) Differentialrechnung (Abschnitt 7.)

Bestimmung der Schnittwinkel

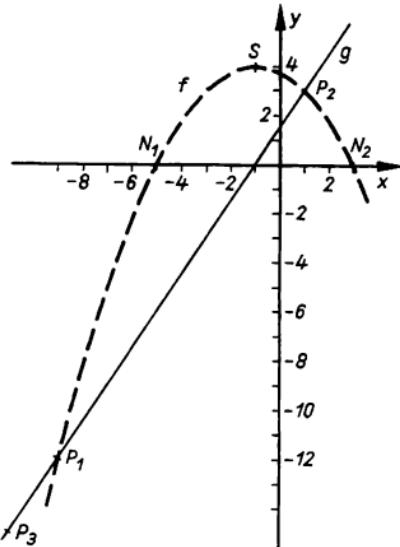
$$f'(x) = -0,5x - 0,5$$

$$f'(-9) = 4 \quad \alpha_1 = 76^\circ$$

$$f'(1) = -1 \quad \alpha_2 = 135^\circ$$

$$\beta \text{ (Gerade)} = 56,3^\circ$$

$$\varphi_1 = 19,7^\circ, \quad \varphi_2 = 78,7^\circ$$



(7) Integralrechnung (Abschnitt 10.)

Inhalt der Fläche zwischen beiden Kurven

$$\begin{aligned} I &= \int_{-9}^1 (f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_{-9}^1 (-0,25x^2 - 2x + 2,25) dx \\ &= 41 \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Der gesuchte Flächeninhalt beträgt $41 \frac{2}{3}$ FE.

4.1. $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 2x + 4 = 0$

(maximal vier reelle Lösungen)

4.2. $x^4 - 7x^3 - 6x^2 + 24x = 0$

(bis zu vier reelle Lösungen)

4.3. $3x^3 - 18x^2 - 59x + 258 = 0$

(kubische Gleichung, höchstens 3 reelle Lösungen, mindestens eine reelle Lösung)

4.4. $x^7 - 7x^4 - 8x = 0$

(Gleichung 7. Grades, es können bis zu 7 reelle Lösungen auftreten, mindestens existiert eine reelle Lösung)

4.5. $y = f(x) = 6x^4 + 37x^3 + 47x^2 + 21x$

Es handelt sich um eine Funktion 4. Grades. Diese kann bis zu 4 Nullstellen haben. Außer den Nullstellen der Funktion (Lösungen der entsprechenden Gleichung) soll auch eine Wertetafel aufgestellt werden.

4.6. $2x^6 - 7x^4 - 14x^2 + 40 = 0$

(Bei dieser Gleichung 6. Grades sind bis zu 6 reelle Lösungen möglich.)

*4.7. $48x^5 + 256x^4 - 1875x = 10000$

(Es liegt eine Gleichung 5. Grades vor, die maximal 5 reelle Lösungen haben kann, mindestens aber eine. Beachten Sie bitte, daß Glieder mit x^3 und x^2 fehlen.)

B

- 4.1. Es sind nicht sofort Lösungen erkennbar. Das HORNERSche Schema liefert für $x = 0$ den Wert 4. Für $x = 1$ ergibt sich:

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 3 & 8 & 10 \\ 1 & \underline{3} & \underline{8} & \underline{10} & \underline{14} \end{array} \quad \text{mit Vorzeichengleichheit.}$$

- 4.2. Das absolute Glied ist 0. Folglich ist eine Lösung $x_1 = 0$. Nach Division durch x bleibt $x^3 - 7x^2 - 6x + 24 = 0$. Durch Probieren mit $x = +2; +1; -1; -2$ findet man schnell $x_2 = -2$ als zweite Lösung.

- 4.3. Das HORNERSche Schema liefert für

$x = 0$ den Wert 258, , für $x = 1$ den Wert 184,

$x = 2$ 92 und für $x = 3$ 0.

Also ist eine Lösung $x_1 = 3$.

- 4.4. Das absolute Glied ist 0. Also ist eine Lösung $x_1 = 0$. Nach Division durch x bleibt $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$. Hier bietet sich die Substitution $x^3 = z$ an, die zu $z^2 - 7z - 8 = 0$ führt.

- 4.5. Da eine Wertetafel gewünscht wird, verfahre man sofort nach dem HORNERSchen Schema. Eine Nullstelle $x_1 = 0$ wird sofort erkannt.

Bereits $x = 1$ führt zu „Vorzeichengleichheit“:

$$\begin{array}{cccccc} & 6 & 43 & 90 & 111 \\ 6 & \underline{43} & \underline{90} & \underline{111} & \underline{111} \end{array}$$

- 4.6. Es wird zunächst substituiert $x^2 = z$, was zu einer Gleichung 3. Grades in z führt:
 $2z^3 - 7z^2 - 14z + 40 = 0$.

Durch Probieren findet man schnell $z_1 = 2$.

- 4.7. Das HORNERSche Schema sieht für positive x wie folgt aus:

$x =$	48	256	0	0	-1875	-10000
0						-10000
1	48	304	304	304	304	-1571
2	48	352	704	1408	2816	1882
3	48	400	1200	3600	10800	26775
probiert mit 2,3, dann mit:		120	940	2350	5875	10000
2,5	48	376	940	2350	4000	0

Vorzeichengleichheit

4.1. Das HORNERSche Schema liefert für $x = -1$ den Wert 6.

Für $x = -2$ ergibt sich:

1	-2	0	-10	16
	0	5	-8	20

Vorzeichenwechsel, denn 0 ist „nichtpositiv“.

4.2. Die Partialdivision durch $(x + 2)$ führt auf eine quadratische Gleichung

$$x^2 - 9x + 12 = 0$$

mit den Lösungen $x_{3,4} = 4,5 \pm 2,872$.

4.3. Die Partialdivision durch $(x - 3)$ führt zu einer quadratischen Gleichung:

$$3x^2 - 9x - 86 = 0;$$

in der Normalform dazu: $x^2 - 3x - 28 \frac{2}{3} = 0$ mit den Lösungen

$$x_{2,3} = 1,5 \pm 5,56.$$

4.4. Die Lösungen der quadratischen Gleichung in z

$$z^2 - 7z = 8 \text{ sind } z_1 = -1 \text{ und } z_{11} = 8.$$

4.5.	.	-24	-52	20	-164	
	$x = -4$	6	13	-5	41	-164
			-30	-35	-60	+195
	$x = -5$	6	7	12	-39	+195

dazwischen Nullstelle

Die Rechnung liefert für $x = -4,63$ den y -Wert $-4,81$; für $x = -4,64$ kommt man der Null am nächsten.

$x = -7$ liefert Vorzeichenwechsel.

4.6. Nach Partialdivision durch $(z - 2)$ kommt man zu $2z^2 - 3z - 20 = 0$ bzw.

$$z^2 - 1,5z - 10 = 0 \text{ mit den Lösungen } z_{11} = 4 \text{ und } z_{111} = -2,5.$$

4.7. Die Fortführung des HORNERSchen Schemas liefert für $x = -1$ den Wert -7917 , für $x = -2$ den Wert -3690 und für $x = -3$ den Wert $+4697$.

Eine weitere Lösung liegt also zwischen -3 und -2 .

		-120	-340	+850	-2125	10000
-2,5	48	136	-340	+850	-4000	0
		240	-80	+400	-2000	19375
-5	48	16	-80	+400	-3875	9375
		-288	192	-1152	6912	-30222
-6	48	-32	192	-1152	5037	-40222

mit Vorzeichenwechsel. Eine letzte Lösung liegt also zwischen -6 und -5 , zweifellos näher an -5 . Man probiere mit $x = -5,3$ (Wert $+1500$) und dann mit: Für $x = -5,33$ kommt man mit $122,9$ der Null recht nahe. Exakt 0 erhält man bei noch stärkerer Annäherung mit $x = -5^{1/3}$.

D

- 4.1. Diese Gleichung 4. Grades hat keine reellen Lösungen. Die Lösungsmenge ist leer:
 $L = \emptyset$.
-

- 4.2. Alle vier möglichen Lösungen existieren:
 $L = \{-2; 0; 1,628; 7,372\}$.
-

- 4.3. Diese Gleichung 3. Grades hat 3 reelle Lösungen:
 $L = \{-4,06; 3; 7,06\}$.
-

- 4.4. $z_1 = x^3 = -1$ liefert $x_2 = -1$
 $z_{II} = x^3 = 8$ liefert $x_3 = 2$
Die Lösungsmenge ist $L = \{-1; 0; 2\}$.
-

- 4.5. Es liegen zwei Nullstellen vor: $x_1 = 0$ und $x_2 = -4,64$.

Die Wertetafel für den interessanten Bereich der Funktion $-7 \leq x \leq 1$ lautet:

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	+1
y	3871	1350	195	-164	-153	-54	-5	0	111

- 4.6. Die Auflösung der Substitution $x^2 = z$ liefert nur für $z_1 = 2$ die Lösungen $x_1 = \sqrt{2}$ und $x_2 = -\sqrt{2}$ und für $z_{II} = 4$ die Lösungen $x_3 = 2$ und $x_4 = -2$, keine weiteren folgen dagegen aus $z_{III} = -2,5$.
 $L = \{-2; -1,414; 1,414; 2\}$.
-

- 4.7. Es liegen insgesamt 3 Lösungen vor:

$$x_1 = -5 \frac{1}{3} \quad x_2 = -2 \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad x_3 = +2 \frac{1}{2}.$$

Bemerkung: Mit etwas Geschick kommt man recht schnell zur Interpolation der Lösungen zwischen ± 2 und ± 3 bzw. zwischen -5 und -6 . Es sieht zwar zunächst so aus, als ob die Lösungen näher an 2 bzw. -2 liegen. Die Krümmung der zugehörigen Funktionskurve lässt es aber ratsam erscheinen, zunächst mit $\pm 2,4$ oder $\pm 2,5$ zu probieren.

5. Ungleichungen, Wurzelgleichungen, goniometrische Gleichungen

Für das Lösen der Aufgaben dieses Abschnittes ist die Einhaltung bestimmter Regeln unerlässlich. Das Vorgehen richtet sich jeweils nach dem Typ der betreffenden Aufgabe. Gerade dem Anfänger sei dringend empfohlen, in jedem Falle die notwendigen Proben durchzuführen. Bei den Wurzelgleichungen sind sie ohnehin Bestandteil der Lösung.

Ungleichungen

Für das Rechnen mit Ungleichungen gelten folgende Regeln:

a)

$$\begin{array}{l} x \cdot a < b \\ x \cdot a \pm c < b \pm c \end{array}$$

- a) Auf beiden Seiten der Ungleichung kann – wie bei Gleichungen – ein beliebiger Term addiert oder subtrahiert werden, ohne daß die Lösungsmenge sich ändert.

b)

$$\begin{array}{l} x \cdot a < b \\ x \cdot a \cdot c < b \cdot c \\ \text{wenn } c > 0 \end{array}$$

- b) Auf beiden Seiten einer Ungleichung kann – ebenfalls wie bei Gleichungen – mit einem beliebigen **positiven** Term multipliziert oder dividiert werden.

$$\begin{array}{l} x \cdot a < b \\ x \cdot a : c < b : c \\ \text{wenn } c > 0 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{l} x \cdot a < b \\ x \cdot a : c > b : c \\ \text{wenn } c < 0 \end{array}$$

- c) Die beidseitige Multiplikation oder Division der Ungleichung mit einem **negativen** Term ist möglich, es muß aber dann das Ungleichheitszeichen gewechselt werden.
Eine Multiplikation oder Division mit 0 ist **unzulässig**.

d)

$$\begin{array}{l} x \cdot a < b \\ b > x \cdot a \end{array}$$

- d) Werden die beiden Seiten einer Ungleichung ausgetauscht (vertauscht), so ist auch das Ungleichheitszeichen zu wechseln.

e)

$$\frac{x \cdot a < b}{x \cdot a} > \frac{1}{b}$$

- e) Wird auf beiden Seiten einer Ungleichung der Kehrwert gebildet, so muß, wenn die **Vorzeichen** gleich sind, das **Ungleichheitszeichen** gewechselt werden.

f)

$$\begin{array}{rcl} x \cdot a & < b \\ x \cdot c & < d \\ \hline x \cdot a + x \cdot c & < b + d \end{array}$$

- f) Ungleichungen mit gleichem Ungleichheitszeichen dürfen addiert oder subtrahiert werden.

g)

$$\begin{aligned}x \cdot a &< b \\x; a; b &> 0 \\x^2 a^2 &< b^2 \\\sqrt{xa} &< \sqrt{b}\end{aligned}$$

g) Das Quadrieren und Radizieren kann beidseitig ausgeführt werden, wenn es sich um positive Ausdrücke handelt.

h)

$$\begin{aligned}x \cdot a &< |b| \\1. \quad x \cdot a &< b \\&\text{wenn } b > 0 \\2. \quad x \cdot a &< -b \\&\text{wenn } b < 0 \\3. \quad x \cdot a &< 0 \\&\text{wenn } b = 0\end{aligned}$$

h) Bei Ungleichungen mit Absolutbeträgen ist besondere Vorsicht geboten. In der Regel sollte dann mit Fallunterscheidungen gearbeitet werden.

Beachten Sie dabei: $|a| = a$, wenn $a > 0$
 $= 0$, wenn $a = 0$
 $= -a$, wenn $a < 0$.

(Dem Anfänger fällt es oft schwer zu begreifen, daß $+z$ auch eine negative Zahl, $-z$ dagegen eventuell auch eine positive Zahl sein kann.)

Die einzelnen Schritte beim Lösen einer Ungleichung folgen im allgemeinen in der gleichen Weise aufeinander (Vereinfachen, Ausklammern, Isolieren usw.) wie bei Gleichungen.

Beispiel:

A: $(x + 3)(x - 4) > (x - 5)(x + 2)$

B: Ausmultiplizieren der Klammern

$$x^2 - x - 12 > x^2 - 3x - 10$$

Beidseitig: Addition von $3x + 12$
Subtraktion von x^2

$$2x > 2$$

C: Division durch die positive Zahl 2

$$x > 1$$

D: x kann jede beliebige (reelle) Zahl größer als 1 sein, um die Ungleichung zu erfüllen.

Die Lösungsmenge L ist ein beidseitig offenes Intervall $L: x = (1; \infty)$, d. h.,
 $1 < x < \infty$.

Probe für

$$\begin{array}{ll}x = -1 \text{ (nicht Lösung)} & x = 2 \text{ (Lösung)} \\2 \cdot (-5) | (-6) \cdot 1 & 5 \cdot (-2) | (-3) \cdot 4 \\-10 < -6 & -10 > -12 \\ \text{nicht erfüllt} & \text{erfüllt}\end{array}$$

(Recht komplizierte Ungleichungen lassen sich zuweilen etwas bequemer lösen, wenn man vorübergehend statt des Ungleichheitszeichens ein Gleichheitszeichen setzt und für die durch die Lösung der „Gleichung“ abgetrennten Bereiche Gültigkeit oder Nichtgültigkeit der Ungleichung mittels geeigneter Repräsentanten des Bereichs untersucht. Für Anfänger kann dieses Vorgehen nicht empfohlen werden, da es wesentliche Gefahren in sich birgt, andererseits aber für einfache Ungleichungen einen zu großen Aufwand erfordert.)

Wurzelgleichungen

Wir unterscheiden zwei Grundtypen:

- I Wenn in der gesamten Gleichung nur eine Wurzel, die die gesuchte Variable enthält, auftritt,
so ist die Wurzel zu isolieren und anschließend die Gleichung (einmal) zu quadrieren.
- II Sind zwei Wurzeln vorhanden, so sollte dafür gesorgt werden, daß die Wurzeln je auf einer Seite der Gleichung stehen. Beim Vorhandensein von zwei oder mehr Wurzeln ist ein mehrfaches Quadrieren erforderlich. Dazwischen ist sinnvoll zu ordnen und zu vereinfachen (Kürzen).

Die Proben sind bei Wurzelgleichungen unerlässlich, da durch das Quadrieren eine Gleichung entsteht, die u. U. mehr Lösungen als die Lösungsmenge der Wurzelgleichung enthält.

Man überzeuge sich an Hand der einfachen Wurzelgleichungen $\sqrt{x} = 3$ und $\sqrt{x} = -3$ davon, die nach dem Quadrieren *beide* in $x = 9$ übergehen. $x = 9$ ist aber nur Lösung der Wurzelgleichung $\sqrt{x} = 3$, da nach Definition die Wurzel einer (positiven) Zahl immer positiv ist!

Beispiel:

A: $2 + \sqrt{7 - 2x} = x \quad x \in P$

Beachten Sie: Der Radikand muß positiv sein, woraus auf alle Fälle folgt: $x \leq 3,5$

B: Ordnen/Isolieren:

$$\sqrt{7 - 2x} = x - 2$$

$$\text{Quadrieren: } 7 - 2x = x^2 - 4x + 4$$

C: Entstandene quadratische Gleichung lösen:

$$x^2 - 2x = 3$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -1$$

D: Beide Lösungen erfüllen die Bedingung $x \leq 3,5$.

Durch die Proben $\sqrt{1+2|3}$
 $3 = 3$

und $\sqrt{9+2|-1}$
 $5 \neq -1$

muß x_2 ausgeschieden werden.

Die Lösungsmenge ist $L = \{3\}$.

Goniometrische Gleichungen

Wir unterscheiden folgende Typen goniometrischer Gleichungen:

- I Die Gleichung enthält nur lineare Terme einer trigonometrischen Funktion.
- II Die Gleichung enthält nur Terme einer trigonometrischen Funktion, aber in mehreren Gliedern oder in quadratischer Form (nichtlinearer Form), zuweilen auch Terme trigonometrischer Funktionen von unterschiedlichen Argumenten.
- III Die Gleichung enthält Terme verschiedener trigonometrischer Funktionen mit dem gleichen Argument.
- IV Die Gleichung enthält Terme verschiedener trigonometrischer Funktionen mit unterschiedlichen Argumenten.

Die Lösungen goniometrischer Gleichungen können in Grad oder Bogenmaß $\hat{x} = \pi - \frac{\alpha}{180^\circ}$ angegeben werden.¹⁾ Beachten Sie die Periodizität der trigonometrischen Funktionen bei der Angabe der Lösungsmenge. (Zuweilen beschränkt man sich auch bewußt auf die Angabe der „Hauptwerte“ der Lösungen zwischen 0° und 360° bzw. zwischen 0 und 2π .) Für die einzelnen Typen gibt es unterschiedliche Lösungsverfahren, zuweilen führt aber auch eine von der Norm abweichende Methode schneller zum Ziel.

- Typ I:** Hier ist nur ein Isolieren des trigonometrischen Terms erforderlich.
- Typ II:** Man führt eine Substitution aus: z. B. $\sin x = z$. Es ist dann zunächst die nicht-goniometrische Gleichung in z zu lösen.
Kommen Ausdrücke von mehrfachen Winkeln $\sin 2x, \cos 2x, \tan 2x, \sin 3x$ usw. vor, so werden diese zunächst entsprechend den Formeln des Tafelwerks umgeformt:

$$\text{z. B. } \sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \text{ usw.}$$

- Typ III:** Man führt für alle Terme die vorkommenden trigonometrischen Funktionen auf eine zurück. Dabei verwendet man die Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen im Tafelwerk, z. B. $\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$. Man beachte hierbei aber, daß die entstehenden Funktionswerte auch negativ sein können. Nach dem notwendigen Quadrieren sind Lösungen auszuscheiden, die die Wurzelgleichung nicht erfüllen.

Bei den goniometrischen Gleichungen der Form

$$a \sin x + b \cos x + c = 0$$

ist der Weg über den Hilfswinkel (siehe Beispiel) meist vorteilhafter.

- Typ IV:** Man führt die Gleichung zunächst auf eine solche vom Typ II oder III zurück. Dazu werden vor allem die Additionstheoreme verwendet.

Beachten Sie:

Beim Dividieren durch einen trigonometrischen Term muß gesichert sein, daß dieser nicht 0 sein kann! Vielfach erfüllen mögliche Lösungen nicht die Ausgangsgleichung, sie sind auszuschließen. Deshalb ist eine Kontrolle (Proben) unerlässlich.

Beispiel zum Typ III:

$$3 \sin x - \sqrt{3} \cos x - 2 = 0$$

Hilfswinkelverfahren:

$$\text{Man formt um zu } \sin x - \frac{\sqrt{3}}{3} \cos x = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Man setzt } \tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ mit } 0 \leq \varphi < 90^\circ; \text{ hier ist } \varphi = 30^\circ.$$

$$\sin x - \tan \varphi \cos x = \frac{2}{3}$$

¹⁾ Einheit der Bogenmaßangabe Radian; $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad

Nach Multiplikation mit $\cos \varphi$:

$$\sin x \cos \varphi - \cos x \sin \varphi = \frac{2}{3} \cos \varphi.$$

Nach Additionstheorem:

$$\sin(x - 30^\circ) = \frac{2}{3} \cos 30^\circ = 0,5773$$

$$x - 30^\circ = 35,26^\circ \text{ bzw. } 144,74^\circ$$

$$x_1 = 65,26^\circ \quad x_2 = 174,74^\circ.$$

Übliches Verfahren:

$$3 \sin x \pm \sqrt{3 - 3 \sin^2 x} = 2$$

$$\sin x = z$$

$$3z - 2 = \pm \sqrt{3 - 3z^2}$$

$$\text{Nach dem Quadrieren ergibt sich } z^2 - z = -\frac{1}{12}$$

$$\text{mit den Lösungen } z_1 = \sin x = 0,908$$

$$z_2 = \sin x = 0,092.$$

Aus den so formal möglichen Lösungen

$$x_1 = 65,25^\circ, \quad x_2 = [114,75^\circ], \quad x_3 = [5,25^\circ], \quad x_4 = 174,75^\circ$$

sind zwei auszuscheiden, da sie die ursprüngliche goniometrische Gleichung nicht erfüllen.
(Proben!)

Es bleiben $x_1 = 65,25^\circ$ und $x_4 = 174,75^\circ$.

Angabe der Lösungsmenge (einschließlich Periodizität)

$$L: x \in \{(65,26^\circ + k \cdot 360^\circ); (174,74^\circ + k \cdot 360^\circ) \mid k \in G\} \text{ oder}$$

$$L: x \in \{1,1390 + 2k\pi; 3,0498 + 2k\pi \mid k \in G\}.$$

¹⁾ In den hier angeführten Beispielen werden zur Verdeutlichung die Hauptwerte (im Bereich also von 0° bis 360°) der Winkel halbfett gekennzeichnet, z. B.: **51,8°**. Winkelwerte, die auszuscheiden sind, weil sie die goniometrische Gleichung nicht erfüllen, werden in eckigen Klammern angegeben.

Einige Hinweise zum Umgehen mit e- und ln-Ausdrücken

(vgl. Tafelwerk Mathematik-Physik-Chemie Klassen 11/12, Volk und Wissen 1982, S. 20ff)

I (Aufschlagen von ln-Werten aus dem Tafelwerk)

Benutzung von Tafel S. 20/21

$$\begin{aligned}\ln 0,5 &= \ln \frac{5}{10} = \ln 5 - \ln 10 \\&= 1,6094 - 2,3026 = -0,6932 \\ \text{oder } &\ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2 \\&= -0,6931 \\ \text{oder } &\ln 10 \cdot \lg 0,5 \\&= 2,303 \cdot (0,6990 - 1) = -0,6932\end{aligned}$$

II (Aufschlagen von e-Werten aus dem Tafelwerk)

Benutzung der Tafel S. 20

$$\begin{aligned}e^{-0,9} &= \frac{1}{e^{0,9}} = \frac{1}{2,4596} \approx 0,408 \\ \text{oder durch Substitution } &\bar{x} = 0,9 \\ \text{Aufschlagen bei } &e^{-\bar{x}} \\&= 0,4066\end{aligned}$$

III Auflösen von ln-Gleichungen:

$$\begin{aligned}2 \ln 0,5x &= 3 \\ \ln 0,5x &= 1,5 \\ \text{umgeschrieben zu: } &e^{\ln 0,5x} = e^{1,5} \\ 0,5x &= e^{1,5} \\&= 4,4817 \\ x &= 8,9634\end{aligned}$$

IV Auflösen von e-Gleichungen:

$$e^{-\frac{1x}{2}} = 0,5$$

„Logarithmieren“ der Gleichung führt zu

$$\begin{aligned}\ln e^{-\frac{1x}{2}} &= \ln \frac{1}{2} \\-0,5x &= -0,6931 \\x &= 1,3862\end{aligned}$$

Man beachte besonders:

$$\begin{array}{l}e^{\ln x} = x; \quad \ln e^a = a \\ \hline \ln e = 1 \\ \ln 1 = 0 \\ \hline \ln x = 1 \quad \text{mit der} \quad x = e \\ \ln x = 0 \quad \text{Lösung} \quad x = 1\end{array}$$

Ungleichungen

5.1. $0,5 + 2x \leq 5$

5.2. $(4 + x)(4x - 5) \leq (2x + 1)(2x - 11)$

5.3. $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+2x}$, wobei $x \notin (-1; -0,5)$

***5.4.** $\sqrt{x} + x \leq 6$

- *5.5.** Die Beziehung $|a_N - g| < \varepsilon$ (wo ε eine beliebig kleine positive Zahl ist) tritt bei der Grenzwertbestimmung von Zahlenfolgen auf. g ist der Grenzwert. Die Formel ist zur geometrischen Veranschaulichung auf dem Zahlenstrahl nach a_N aufzulösen.
-

Wurzelgleichungen

5.6. $3 + \sqrt{x+1} = 0$

5.7. $x - \sqrt{-x} + 2 = 0$

5.8. $3x - 8 - 4\sqrt{4x+1} = 0$

5.9. $\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} = 3$

5.10. $\sqrt{x-a} - \sqrt{b} = 0$

Goniometrische Gleichungen

5.11. $\sin x \cdot \cos x = 0$

5.12. $\sin^2 x - 2 \sin x - 3 = 0$

5.13. $\sin x \cdot \cos x = 1$

5.14. $3 \sin x = 2 \cos^2 x$

B

5.1. Subtraktion von 0,5: $2x \leq 5 - 0,5$
 $2x \leq 4,5$

5.2. Klammern ausmultiplizieren: $16x + 4x^2 - 5x - 20 \leq 4x^2 - 22x + 2x - 11$
Subtraktion von $4x^2$
 $11x - 20 \leq -20x + 11$

5.3. Vorüberlegung: $x = -1$ und $x = -0,5$ sind auszuschließen, da sonst der Nenner 0 wird. Es sind beidseitig die Kehrwerte zu vergleichen, das Ungleichheitszeichen ist zu wechseln.

5.4. Wegen der Definition der Wurzel (positiv) gilt $x \geq 0$ und, da die rechte Seite von $\sqrt{x} \leq 6 - x$ positiv sein muß, $x \leq 6$. Zusammengefaßt: $0 \leq x \leq 6$.
Dann folgt durch Quadrieren: $x \leq 36 - 12x + x^2$
 $x^2 - 13x \leq -36$.

5.5. Fallunterscheidung:
a) $a_N - g > 0$ und b) $a_N - g \leq 0$

5.6. Es folgt zunächst $x \geq -1$.
Nach Subtraktion von 3 folgt $\sqrt{x+1} = -3$.

5.7. $\sqrt{-x}$ wäre nur dann Wurzel aus einer negativen Zahl, wenn $x > 0$ wäre. Es muß also gefordert werden: $x \leq 0$, Isolieren der Wurzel: $-\sqrt{-x} = -x - 2$. Die Vorzeichen werden gewechselt (Multiplikation mit -1).

5.8. $x \geq -0,25$ $3x - 8 = 4\sqrt{4x + 1}$ wird quadriert
 $9x^2 - 48x + 64 = 64x + 16$
 $9x^2 - 112x = -48$

5.9. 1. $x \geq 0$ 2. $x < 1$ - also $[0; 1)$
 $1 + \sqrt{x} = 3 - 3\sqrt{x}$ - also $2\sqrt{x} = 1$

5.10. $x \geq a$ $\sqrt{x-a} = \sqrt{b}$ wird quadriert
 $x-a = b$

5.11. Zweckmäßigerweise spaltet man in zwei Teile auf:
(1) $\sin x = 0$ und (2) $\cos x = 0$.

5.12. Typ II Substitution $\sin x = z$
Es entsteht eine quadratische Gleichung
 $z^2 - 2z - 3 = 0$ mit den Lösungen $z_1 = 3$ und $z_2 = -1$.

5.13. Typ III $\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$
 $\sin x \sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm 1$ wird quadriert, $\sin^2 x = z$ führt zu $z(1-z) = 1$.

5.14. Typ III $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ führt zu:
 $3 \sin x = 2 - 2 \sin^2 x$
Substitution $\sin x = z$.

5.1. Division durch 2 (also durch eine positive Zahl): $x \leq 2,25$.

5.2. Addition von $20x + 20$:

$$31x \leq 9 \text{ Division durch 31 (positiv): } x \leq \frac{9}{31}.$$

5.3. $1 + x > 1 + 2x$

Subtraktion von $(1 + x)$: $0 > x$

5.4. $(x - 6,5)^2 \geq -36 + 42,25 = 6,25$

$$(1) x \geq 6,5 + 2,5 = 9$$

$$(2) x \leq 6,5 - 2,5 = 4$$

5.5. a) $a_N - g < \varepsilon$ b) $-a_N + g < \varepsilon$

$$a_N < g + \varepsilon$$

$$-a_N < -g + \varepsilon$$

$$a_N > g - \varepsilon$$

5.6. Ein Quadrieren ist gar nicht erst erforderlich, denn man sieht sofort die Unerfüllbarkeit, da die Wurzel nie negativ sein kann.

5.7. $\sqrt{-x} = x + 2$ wird quadriert: $-x = x^2 + 4x + 4$.

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung ist $x = -2,5 \pm 1,5$.

5.8. In der Normalform lautet die quadratische Gleichung

$$x^2 - \frac{112}{9}x = -\frac{48}{9} \text{ mit den Lösungen } x_1 = 12, x_2 = \frac{4}{9}.$$

5.9. Beim Quadrieren entsteht $4x = 1$; $x = 0,25$.

5.10. $x = a + b$

5.11. (1) liefert die Hauptwerte $x = 0^\circ; 180^\circ; 360^\circ$,

(2) liefert die Hauptwerte $x = 90^\circ; 270^\circ$.

5.12. Auflösung der Substitution:

$z_1 = \sin x = 3$ nicht erfüllbar, da $\sin x \leq 1$.

$z_2 = \sin x = -1$.

$x = 270^\circ$

5.13. $z^2 - z = -1$.

$z = \sin^2 x = 0,5 \pm \sqrt{-0,75}$
ohne reelle Lösungen in z .

Bequemer kommt man zum Ziel, wenn man statt $\sin x \cdot \cos x = 1$
schreibt: $1/2 \sin 2x = 1 \quad \sin 2x = 2$.

5.14. $2z^2 + 3z = 2$

$z^2 + 1,5z = 1$ mit den Lösungen

$z_1 = \sin x = -2$ nicht erfüllbar.

$z_2 = \sin x = +0,5$

$x = 30^\circ; 150^\circ$

D

5.1. $x \leq 2,25$ oder:

Die Lösungsmenge ist $L = \{x \mid x \in P; (-\infty; 2,25]\}$.

5.2. $x \leq \frac{9}{31}$

Lösungsmenge $L = \{x \mid x \in (-\infty; 9/31]\}$.

5.3. $x < 0$, aber $x \notin [-1; -0,5]$
 $L = \{x \mid x \in (-\infty; -1) \cup (-0,5; 0)$

Überlegen Sie, daß sich ohne die in der Aufgabenstellung genannten Einschränkungen andere Lösungsmengen ergeben.

5.4. Der Fall (1) scheidet wegen $x \leq 6$ aus.

Aus dem Fall (2) bleibt

als Lösung: $0 \leq x \leq 4$

Lösungsmenge als Intervall: $L = \{[0; 4]\}$.

Beachte: $x \geq 0$!

5.5. Lösungsmenge: $L_1: a_N > g - \varepsilon; L_2: a_N < g + \varepsilon$.

Andere Schreibweisen: $g - \varepsilon < a_N < g + \varepsilon$

oder $a_N \in (g - \varepsilon; g + \varepsilon)$.

Auf dem Zahlenstrahl handelt es sich um die sogenannte „ ε -Umgebung von g “.

5.6. Die Lösungsmenge ist leer $L = \emptyset$.

Kein reelles x erfüllt die Gleichung.

5.7. $x_1 = -1; x_2 = -4$ (beide übrigens, wie gefordert, negativ).

Trotzdem ist nur (-1) Lösung! Überzeugen Sie sich, daß -4 die Gleichung nicht erfüllt. $L = \{-1\}$.

5.8. Proben (12) $36 - 8 \mid 4 \cdot 7$

$$\left(\frac{4}{9} \right) \frac{4}{3} - 8 \neq 4 \cdot \frac{5}{3} \quad L = \{12\}$$

5.9. Probe: $\frac{1+0,5}{1-0,5} \mid 3 \quad 3 = 3$

$$L = \{0,25\}$$

5.10. $L = \{a + b\}$

(Nicht verwechseln mit $\{a; b\}\!$)

5.11. $x \in \{0,5k\pi \mid k \in G\}$

$x \in \{90^\circ k \mid k \in G\}$

5.12. Aus $\sin x = -1$ folgt:

$x \in \{270^\circ + k \cdot 360^\circ \mid k \in G\}$

$x \in \{1,5\pi + 2k\pi \mid k \in G\}$

5.13. $L = \emptyset$. Kein reelles x erfüllt die Gleichung.

5.14. $x \in \{30^\circ + k \cdot 360^\circ; 150^\circ + k \cdot 360^\circ \mid k \in G\}$

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in G \right\}$$

5.15. $\cos 2x + \cos x = 0$

*5.16. $\frac{4}{3} \sin x + 2 \cos x - 1 = 0$

5.17. $\sin 2x = 2 \sin x$

5.18. $\cos x - \sin x = -1$

5.19. $\frac{1}{\cos^2 x} = 2 \tan x + 1$

5.20. $\tan x = 2 \sin x$

5.21. $\cos 3x = -0,5\sqrt{2}$

5.22. $3 \cos^2 x + \sin^2 x + 2 \sin x \cos x \leq 4$

Die Gültigkeit dieser goniometrischen Ungleichung soll untersucht werden.

B

- 5.15. Für $\cos 2x$ kann bekanntlich eingesetzt werden:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1.$$

- 5.16. Typ III $4\sin x + 6\cos x - 3 = 0$; $\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$
ferner Substitution $\sin x = z$ führt zu

$4z + 6\sqrt{1 - z^2} = 3$, also nach Isolieren und Quadrieren $-52z^2 + 24z = -27$ mit den Lösungen $z_1 = \sin x = 0,9877$ und $z_2 = \sin x = -0,5262$

$$x_1 = [80,9^\circ] \quad x_2 = 99,1^\circ \quad x_3 = [211,7^\circ] \quad x_4 = 328,3^\circ.$$

Nach einer Probe scheiden x_1 und x_3 aus.

- 5.17. $2\sin x \cos x = 2\sin x$

$$\sin x \cos x = \sin x$$

$$\sin x (\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (1) \sin x = 0 \\ (2) \sin x \neq 0 \\ \cos x = 1 \end{cases}$$

- 5.18. $\pm\sqrt{1 - \sin^2 x} = \sin x - 1$

$$1 - \sin^2 x = \sin^2 x - 2\sin x + 1$$

$$2\sin^2 x - 2\sin x = 0 \Rightarrow 2\sin x(\sin x - 1) \Rightarrow 1 \cdot \sin x = 0, 2 \cdot \sin x = 1$$

$$x_1 = [0^\circ] \text{ (erfüllt nicht die Gleichung)}$$

$$x_2 = 90^\circ \quad x_3 = 180^\circ$$

- 5.19. Gemäß Formel (überzeugen Sie sich!) ist $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

für $\cos x \neq 0$.

$$\text{Damit folgt: } 1 + \tan^2 x = 2\tan x + 1$$

$$\text{oder } \tan^2 x = 2\tan x; \quad \tan x(\tan x - 2) = 0.$$

- 5.20. (1) $\sin x = 0$ ($x = 0^\circ; 180^\circ$)

(2) Für $\sin x \neq 0$;
dividiert durch $\sin x$:

$$\frac{1}{\cos x} = 2$$

Kommt man nicht auf diesen Weg, so sollte man bei gon. Gln. mit Termen mehrerer trigon. Funkt. $\tan x$, $\cot x$ durch $\sin x$, $\cos x$ ersetzen.

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 2 \sin x$$

$$\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 2 \right) = 0$$

- 5.21. Der Lösungsweg $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ (Additionstheorem)

$$4\cos^3 x - 3\cos x = -0,5\sqrt{2}$$

führt auf eine Gleichung 3. Grades und ist hier viel zu aufwendig.

- 5.22. Man subtrahiere zunächst von der Ungleichung $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ und erhält:

$$2\cos^2 x + 2\sin x \cos x \leq 3.$$

Statt $\cos^2 x$ wird $1 - \sin^2 x$ geschrieben.

5.15. $2 \cos^2 x + \cos x = 1$, Substitution $\cos x = z$, $z^2 + 0,5z - 0,5 = 0$
 mit den Lösungen $z_1 = \cos x = -1 \quad x_1 = 180^\circ$
 $z_2 = \cos x = 0,5 \quad x_2 = 60^\circ; 300^\circ$

5.16. Oder: $\sin x + 1,5 \cos x = 0,75$
 $\sin x + \tan \varphi \cos x = 0,75 \quad \varphi = 56,32^\circ$
 $\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = 0,75 \cos \varphi$
 $\sin(x + \varphi) = 0,4159 \quad x_1 + \varphi = 24,58^\circ$
 $x_2 + \varphi = 155,42^\circ$

5.17. Aus (1) folgt $x = 0^\circ; 180^\circ; 360^\circ$
 Aus (2) folgt $x = 0^\circ; 360^\circ$

5.18. Oder: $-\sin x + \cos x + 1 = 0$
 $\sin x - \tan \varphi \cos x = 1; \quad \varphi = 45^\circ$
 $\sin(x - \varphi) = \cos 45^\circ = 0,5\sqrt{2}$
 $x_1 - \varphi = 45^\circ; \quad x_2 - \varphi = 135^\circ$

5.19. (1) $\tan x = 0 \quad x = 0^\circ; 180^\circ$
 (2) $\tan x = 2$
 $x = 63,43^\circ; 243,43^\circ$

5.20. $\cos x = 0,5$
 $x = 60^\circ; 300^\circ$

5.21. Substitution $3x = z$ führt viel schneller zum Ziel:
 $\cos z = -0,5\sqrt{2} \quad z = 135^\circ; 225^\circ$
 $x = 45^\circ; 75^\circ$

5.22. $2 \cos^2 x - 1 + 2 \sin x \cos x \leq 2$
 $\sin 2x + \cos 2x \leq 2$
 Substitution: $2x = z$
 $\sin z + \cos z \leq 2$
 ist natürlich immer erfüllt (d. h. für alle Werte von z bzw. x), denn es ist
 $\sin z \leq 1$
 $\cos z \leq 1$
 addiert: $\sin z + \cos z \leq 2$.

D

5.15. $x \in \{60^\circ + k \cdot 360^\circ; 180^\circ + k \cdot 360^\circ; 300^\circ + k \cdot 360^\circ \mid k \in G\}$

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \pi + 2k\pi; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in G \right\}$$

5.16. $x \in \left\{ \begin{array}{l} \{99,1^\circ + k \cdot 360^\circ\} \\ \{328,3^\circ + k \cdot 360^\circ\} \end{array} \right\} \quad x \in \left\{ \begin{array}{l} \{1,7296 + 2k\pi\} \\ \{5,7300 + 2k\pi\} \end{array} \right\}$

dabei immer: $k \in G$

Die Methode mit dem Hilfswinkel φ ist rentabler.

5.17. $x \in \{k \cdot 180^\circ \mid k \in G\}$

$$x \in \{k\pi \mid k \in G\}$$

5.18. $x \in \{180^\circ + k \cdot 360^\circ; 90^\circ + k \cdot 360^\circ \mid k \in G\}$

$$x \in \{\pi + 2k\pi; 0,5\pi + 2k\pi \mid k \in G\}$$

5.19. $x \in \{0^\circ + k \cdot 180^\circ; 63,43^\circ k + 180^\circ \mid k \in G\}$

$$x \in \{0 + k\pi; 1,1071 + k\pi \mid k \in G\}$$

5.20. $x \in \{0^\circ; 60^\circ; 180^\circ; 300^\circ \text{ sämtl.} + k \cdot 360^\circ \mid k \in G\}$

$$x \in \left\{ 0; \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{5\pi}{3} \text{ sämtl.} + 2k\pi \mid k \in G \right\}$$

5.21. $x \in \{45^\circ + k \cdot 360^\circ; 75^\circ + k \cdot 360^\circ \mid k \in G\}$

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \mid k \in G \right\}$$

5.22. $\sin z$ und $\cos z$ können aber nicht beide gleichzeitig ihren höchsten Wert 1 einnehmen, so daß man die Ungleichung sogar noch allgemeingültig verschärfen kann!

Es gilt für alle x nicht nur

$$3 \cos^2 x + \sin^2 x + 2 \sin x \cos x \leq 4, \text{ sondern}$$

$$\text{sogar } 3 \cos^2 x + \sin^2 x + 2 \sin x \cos x \leq 2 + \sqrt{2}.$$

Versuchen Sie nun selbst, noch eine untere Grenze des angegebenen Ausdrucks zu finden.
Untersuchen Sie insbesondere, ob der Ausdruck immer positiv sein muß.

In der Tat finden Sie, daß $2 - \sqrt{2} \leq 3 \cos^2 x + \sin^2 x + 2 \sin x \cos x$ ist.

. 6. Folgen, Grenzwert, Stetigkeit

Eigenschaften von Folgen

Folgen sind Funktionen, bei denen der Definitionsbereich nur die Menge der natürlichen Zahlen (hier meist ohne die Null) oder eine Teilmenge davon ist:

$$(a_n) \mid a_n = f(n) \quad n \in N.$$

Eine solche Folge (hier werden nur Zahlenfolgen betrachtet) kann auf die eine oder andere der folgenden Arten dargestellt werden:

a) **tabellarisch** (Darstellung der ersten Glieder)

n	1.	2.	3.	4.	5.	... ¹⁾
a_n	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	...

b) **verbal** (in Worten)

c) **analytisch-rekursiv** durch eine Verbindungsbeziehung zweier aufeinanderfolgender Glieder einschließlich der Angabe des (oder der) Anfangsgliedes(r).²⁾
Vgl. die Folgen (b_n) und (c_n) auf S. 64.

d) **analytisch-independent**: Angabe des allgemeinen n -ten Gliedes a_n durch eine Gleichung in n .

e) **graphische Darstellung**: Dabei entstehen im Koordinatensystem „isolierte“, d. h. nicht durch einen Linienzug verbundene, Punkte.

Folgende Eigenschaften von Folgen interessieren vor allem:

I die Monotonie

Dazu ist zu untersuchen, ob $a_{n+1} > a_n$ bzw. $a_{n+1} < a_n$ für alle n gilt.

Bei $a_{n+1} \geq a_n$ spricht man von monoton steigend,

bei $a_{n+1} \leq a_n$ spricht man von monoton fallend.

Zuweilen wird auch zwischen „streng monoton steigend“ $a_{n+1} > a_n$ und nur (einfach) monoton steigend $a_{n+1} \geq a_n$ unterschieden.

Die Untersuchung erfolgt durch einen Vergleich zweier aufeinanderfolgender Glieder.

(Die Differenz) $a_{n+1} - a_n$ muß $\begin{cases} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{cases}$ für alle n sein.

II die Art des Steigens oder Fallens

Dazu untersucht man die Differenzen $d = a_{n+1} - a_n$ zweier aufeinanderfolgender Glieder und den Quotienten $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Mit den Differenzen untersucht man die **absoluten**, mit den Quotienten die **relativen Zu-** bzw. **Abnahmen**. (Diese Begriffe werden vornehmlich in der Ökonomie verwendet.)

¹⁾ Bei der tabellarischen Angabe ist die Fortsetzung der Folge immer ungewiß. Je mehr Glieder gegeben sind, desto sicherer kann man eine naheliegende Gesetzmäßigkeit erkennen.

²⁾ Der Leser beachte die Analogie zum Beweis durch vollständige Induktion (Schluß von n auf $n + 1$ und Anfangsfall).

Ist d konstant, so liegt eine arithmetische Folge vor:

Formel für das n -te Glied Summe der Glieder der Folge (Reihe) oder n -tes Glied der Partialsummenfolge

$$a_n = a_1 + (n - 1) d$$

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

$$s_n = a_1 n + 0,5n(n - 1) d$$

Übersicht über den absoluten und den relativen Verlauf von Folgen

(Beschreibung statistischer Entwicklungsserien)

Gültig für Zahlenfolgen, bei denen alle $a_n > 0$

d	mit zunehmendem n ...	q	Mit zunehmendem n ...	Entwicklung
> 0 Zunahmen	$ d $ wird größer (progressiv) wachsende abs. Zunahmen	> 1	q wird größer wachsende rel. Zunahmen	stärker als exponentiell
			q bleibt gleich gleichbleib. rel. Zunahmen	exponentiell (geometrische Folge)
			q wird kleiner fallende rel. Zunahmen	
	$ d $ bleibt gleich gleichbleib. abs. Zunahmen	> 1	q wird kleiner fallende rel. Zunahmen	linear (arithmetische Folge)
	$ d $ wird kleiner (degressiv) fallende abs. Zunahmen	> 1	q wird kleiner fallende rel. Zunahmen	
< 0 Abnahmen	$ d $ wird größer wachsende abs. Abnahmen	$0 < q < 1$	q wird kleiner wachsende rel. Abnahmen	
	$ d $ bleibt gleich gleichbleib. abs. Abnahmen	$0 < q < 1$	q wird kleiner wachsende rel. Abnahmen	arithmetisch linear
	$ d $ wird kleiner fallende abs. Abnahmen (auch: abnehmende abs. Abnahmen)	$0 < q < 1$	q wird kleiner wachsende rel. Abnahmen	
			q bleibt gleich gleichbleib. rel. Abnahmen	exponentiell gedämpft
			q wird größer fallende rel. Abnahmen	

Ist q konstant, so liegt eine geometrische Folge vor:

n -tes Glied

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Summe

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Bei einer arithmetischen Folge liegt ein linearer (geradliniger, gleichmäßiger) Anstieg vor, bei einer geometrischen Folge ein exponentieller. In Wirtschaft und Technik wird in der Regel eine geometrische Folge angenommen, wenn nur Randwerte vorliegen.

Partialsummen

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Aus dem Bildungsgesetz der Partialsummenfolge (s_n) kann man auf das Bildungsgesetz der Grundfolge schließen. Es gilt:

$$s_1 = a_1; \quad a_n = s_n - s_{n-1}$$

III Grenzen und Grenzwert

Informieren Sie sich zunächst an Hand eines Lehrbuchs über die Definition des Grenzwerts, und machen Sie sich mit der anschaulichen Erläuterung desselben vertraut!

Kann festgestellt werden, daß eine Folge gewisse Werte mit keinem Glied unterschreitet, so heißt der höchste dieser Werte untere Grenze, die obere Grenze ist der kleinste der Werte, die nicht überschritten werden.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ heißt Grenzwert der Folge a_n und braucht weder mit unterer noch oberer Grenze übereinzustimmen. Grenzwert der Folge (a_n) und Grenzwert der Partialsummenfolge (s_n) stimmen in der Regel nicht überein. Konvergenz der Folge (a_n) nach 0 (also Existenz des Grenzwertes $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$) ist aber eine Voraussetzung für die eventuelle Konvergenz der Partialsummenfolge $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.

Nullfolgen

sind Zahlenfolgen mit dem Grenzwert Null. Dazu gehören u. a.

$$\left(\frac{1}{n}\right); \left(\frac{1}{n^2}\right); \left(\frac{1}{n+1}\right); \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right); (q^n) \text{ für } |q| < 1; \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right); (\sqrt[n]{n} - 1); (\sqrt{n+2} - \sqrt{n});$$

$$(na^n) \text{ für } |a| < 1$$

Möglichkeiten zum Vermuten des Grenzwertes

- (1) auf Grund der tabellarischen Aufstellung genügend vieler Glieder
- (2) auf Grund des Vergleiches mit anderen Folgen oder des Zurückföhrens auf Nullfolgen
- (3) Liegt ein Bruch vor, in dessen Zähler und Nenner Potenzen von n auftreten, so vernachlässigt man im Zähler und Nenner alle Glieder mit Ausnahme jeweils desjenigen mit dem höchsten Exponenten von n .
 - (3a) Ist der (höchste) Exponent von n im Nenner größer als der (höchste) im Zähler, so liegt eine Nullfolge vor.
 - (3b) Entsteht bei der Division ein von n unabhängiger Wert, so konvergiert die Zahlenfolge gegen diesen.
 - (3c) Ist der (höchste) Exponent von n im Nenner kleiner als der (höchste) im Zähler, so existiert kein endlicher Grenzwert, die Folge ist divergent.

Nachweis des Grenzwertes

Er kann erfolgen, indem man zeigt, daß die Folge $(a_n - g)$ Nullfolge ist, daß also $|a_N - g|$ für alle $n > N$ kleiner als eine beliebige positive (sehr kleine) Zahl ε ist.

Arithmetische Folgen und geometrische Folgen mit $|q| > 1$ sind immer divergent, geometrische Folgen mit $|q| < 1$ konvergieren gegen Null.

Musterbeispiele

$$(u_n) = \left(\frac{n}{2n - 11} \right)$$

$$(v_n) = (243; 162; 108; 72; \dots)$$

Weitere Darstellungsmöglichkeiten

tabellarisch:

$$\begin{array}{ccccccc} 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 6. \\ -1/9 & -2/7 & -3/5 & -4/3 & -5 & +6 \\ \hline 7. & 8. & 9. \\ +7/3 & +8/5 & +9/7 & \dots \end{array}$$

rekursiv:

$$u_{n+1} = u_n - \frac{11}{99 + 4n^2 - 40n}$$

$$u_{n+1} = u_n \left(1 - \frac{11}{2n^2 - 9n} \right)$$

$$\text{und } u_1 = -\frac{1}{9}$$

verbal: wenig sinnvoll

Monotonie

Nicht monoton, da $u_5 < u_4$, aber $u_6 > u_5$; allerdings ab 6. Glied streng monoton fallend.

Art des Fallens

(ab 6. Glied)

$$d = u_{n+1} - u_n$$

$$= \frac{n+1}{2n-9} - \frac{n}{2n-11}$$

$$= \frac{-11}{99 + 4n^2 - 40n} < 0$$

für $n \geq 6$

independent:

$$v_n = 243 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$$

rekursiv:

$$v_{n+1} = \frac{2}{3} \cdot v_n$$

$$\text{und } v_1 = 243$$

verbal: Folge der mit 243 multiplizierten Potenzen von $\frac{2}{3}$.

Monotonie

streng monoton fallend, denn

$$v_{n+1} - v_n = -81 \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} < 0$$

nämlich

$$= 243 \left(\frac{2}{3} \right)^n - 243 \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$$

$$= 243 \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \left(\frac{2}{3} - 1 \right)$$

$$d = v_{n+1} - v_n = -81 \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$$

d wird mit wachsendem n kleiner, also fallende absolute Abnahmen

$$q = v_{n+1} : v_n = \frac{243 \left(\frac{2}{3} \right)^n}{243 \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}} = \frac{2}{3}$$

$|d|$ wird mit wachsendem n kleiner, also fallende absolute Abnahmen

$$\begin{aligned} q &= u_{n+1} : u_n \\ &= \frac{n+1}{2n-9} \cdot \frac{2n-11}{n} \\ &= \frac{2n^2 - 9n - 11}{2n^2 - 9n} \\ &= 1 - \frac{11}{2n^2 - 9n} \\ &< 1 \quad \text{für } n \geq 6 \end{aligned}$$

Mit wachsendem n nähert sich q

wachsend der 1:

fallende relative Abnahmen

also gleichbleibende relative Abnahmen,
gleichbleibende Quotienten q .
Es liegt eine geometrische Folge vor (exponentielle Dämpfung).

Grenzen, Grenzwert

o. G. = $u_6 = 6$

u. G. = $u_5 = -5$

Wegen (3b) Grenzwert vermutet bei $g = 0,5$. Zum Nachweis wird

$$(u_n - 0,5) = \left(\frac{n}{2n-11} - 0,5 \right) = \left(\frac{11}{4n-22} \right)$$

gebildet, das ist aber eine Nullfolge.
Die Partialsummenfolge divergiert.

o. G. = $v_1 = 243$

u. G. = Grenzwert 0

Da eine geometrische Folge mit $|q| < 1$ vorliegt, ist der Grenzwert 0.

Grenzwert der Partialsummenfolge:

$$s_n = 243 \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = 729 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 729(1 - 0) = 729$$

Grenzwerte von Funktionen, Unstetigkeitsarten

Da bei Funktionen der Definitionsbereich nicht nur auf die natürlichen Zahlen beschränkt bleibt, kann auch ein Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ (auch für ein $x_0 \notin N$) neben $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ interessieren.

Gebrochen rationale Funktionen bestehen aus Zähler- und Nennerfunktion:

$$g(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

Es können folgende Fälle auftreten:

- a) $Z(x_1) \neq 0 \quad N(x_1) \neq 0 \quad$ Normaler Funktionswert
- b) $Z(x_1) = 0 \quad N(x_1) \neq 0 \quad$ Nullstelle
- c) $Z(x_1) \neq 0 \quad N(x_1) = 0 \quad$ Uneigentlicher oder „unendlicher Grenzwert“, Pol
- d) $Z(x_1) = 0 \quad N(x_1) = 0 \quad$ Unstetigkeit, Lücke, Grenzwert untersuchen!

Im letzten Fall ist das Bild der Funktion an dieser Stelle unterbrochen. Gegebenenfalls muß ein Ersatzwert definiert werden.

Weitere Möglichkeiten der Unstetigkeit:

- ... an nicht definierten („nicht erklärten“) Stellen, z. B. $f(x) = \sqrt{x}$ für $x < 0$, kann keine Stetigkeit vorliegen.
- ... an Sprungstellen, z. B. bei $f(x) = \frac{|x|}{x}$ an $x = 0$, mit unterschiedlichen „Grenzwerten“
- ... und vor allem bei trigonometrischen Funktionen, z. B. bei $f(x) = \tan x$ an $x = [90^\circ] = 0,5\pi$.

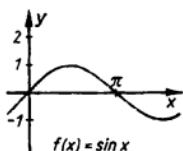
Für die Stetigkeit an einer bestimmten Stelle ist erforderlich:

- I die Definiertheit der Funktion an dieser Stelle $f(x_0)$
- II die Existenz des Grenzwerts an dieser Stelle $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- III die Übereinstimmung beider $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

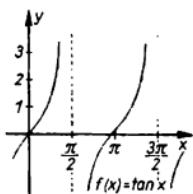
(Vergleichen Sie hierzu auch Aufg. 6.7. bis 6.9.)

Für die Differenzierbarkeit an einer Stelle ist die Stetigkeit dort unbedingte Voraussetzung, außerdem die Existenz eines eindeutigen Differentialquotienten!

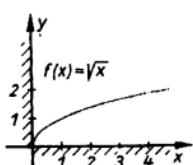
Übersicht über besondere Fälle der Stetigkeit und Differenzierbarkeit



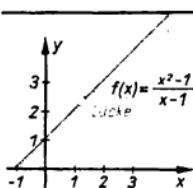
Funktion überall stetig, Verlauf periodisch, Nullstellen bei $x = k\pi$, $k \in G$
 Maxima bzw. Minima $f(x_M) = +1$ bzw. -1
 $-1 \leq f(x) \leq +1$, überall differenzierbar



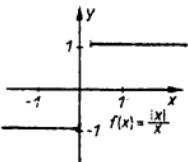
Verlauf der Funktion periodisch, an $x = \pm 0,5\pi; \pm 1,5\pi$ usw. nicht stetig und nicht differenzierbar, Nullstellen bei $x = k\pi$, $k \in G$, keine Extrema, an $x = \frac{k\pi}{3}$ nicht differenzierbar



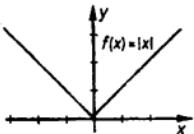
Für $x < 0$ nicht stetig, da dort nicht definiert. In der Umgebung von $x = 0$ nicht überall definiert, nämlich nicht für $x < 0$. An $x \leq 0$ nicht differenzierbar.



$x = 1$ ist eine Lücke, dort zunächst weder stetig noch differenzierbar. Existierender Grenzwert an $x = 1$ ermöglicht die zusätzliche Definition $f(1) = 2$, womit Unstetigkeit behoben.



An $x = 0$ unstetig, da dort nicht definiert. Kurve nähert sich von links und rechts zwei verschiedenen Punkten an. Unstetigkeit nicht hebbbar. Obwohl Tangente dort vorhanden, nicht differenzierbar, da nicht stetig.



Überall stetig.

Aber an $x = 0$ nicht differenzierbar, dort liegen verschiedene Tangentenanstiege für die Kurve vor.

Übersicht über einige Folgen und deren Eigenschaften

s_{n+1}	Tabellarische Darstellungen						Verbale Darstellung	Rekursionsformel	Independente analytische Darstellung $n \in N \setminus \{0\}$	Monotonie	Art	Untere Grenze	Oberste Grenze	Grenzwert		
a_n	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	...								
(a ₁)	1	2	3	4	5	6	7	...	Folge d. natürlichen Zahlen	$a_{n+1} = a_n + 1$	$a_n = n$	mon.stg.	arith. $d = 1$	1		
(b ₁)	1	3	5	7	9	11	13	...	Folge d. ungeraden pos. Zahlen ab 1	$b_{n+1} = b_n + 2$	$b_n = 2n - 1$	mon.stg.	arith. $d = 2$	1		
(c ₁)	3	6	7	9	11	13	15	...	Folge d. ungeraden pos. Zahlen ab 3	$c_{n+1} = c_n + 2$	$c_n = 2n + 1$	mon.stg.	arith. $d = 2$	3		
(d ₁)	2	3	5	7	11	13	17	...	Folge d. Primzahlen	nicht möglich		mon.stg.		2		
(e ₁)	3	3	3	3	3	3	3	...		$e_{n+1} = e_n$	$e_n = 3$	konstant	arith. $d = 0$ geom. $q = 1$	3	3	3
(f ₁)	1	2	4	8	16	32	64	...	Folge der Potenzen der 2 ab $2^0 = 1$	$f_{n+1} = 2 \cdot f_n$	$f_n = 2^{n-1}$	mon.stg.	geom. $q = 2$	1		
(g ₁)	1	1	1	1	1	1	1	...	Folge der reziproken Werte der natürlichen Zahlen	$g_n = \frac{1}{n}$		mon.fall.		0	1	0
(h ₁)	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$...	Folge der Quadratwurzeln d. nat. Zahlen	$h_n = \sqrt{n}$		mon.stg.		1		
(i ₁)	108	36	12	4	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{27}$...		$i_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot i_n$	$i_n = 108 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$	mon.fall.	geom. $q = \frac{1}{3}$	0	108	0
(j ₁)	24	16	8	3	0	-1	0	...		$j_n = 36 - 12n + n^2$		arith. 2. Ord.- nung	-1	"		
(k ₁)	$\frac{48}{23}$	$\frac{23}{13}$	$\frac{44}{29}$	$\frac{21}{16}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{86}{41}$...			$k_n = \frac{50 - 2n}{3n + 20}$		$-\frac{2}{3}$	$\frac{48}{23}$	$-\frac{2}{3}$	
(l ₁)	34	18	$\frac{118}{9}$	11	10	$\frac{86}{9}$	$\frac{198}{21}$...			$l_n = \frac{2n^2 + 100}{3n}$		$\frac{198}{21}$	∞		
(p ₁)	$\frac{11}{7}$	-6	$-\frac{13}{17}$	$-\frac{7}{10}$	$-\frac{13}{15}$	$-\frac{7}{13}$	$-\frac{8}{49}$	$-\frac{17}{137}$...		$p_n = \frac{n+10}{10-3n^2}$		-6	$\frac{11}{7}$	0	

- 6.1.** Als Werbung für den Zoo einer Großstadt will die Deutsche Post eine Tiermotivserie von 7 Postwertzeichen mit dem kleinsten Wert 5 Pf und dem größten 2,- Mark herausgeben. Die Werte sollen annähernd eine geometrische Folge bilden.
-
- 6.2.** Die Jahresproduktion eines Betriebes betrug 1975 230000 Mark und 1981 345000 Mark. Welche Produktion war für 1982 zu erwarten? Wie groß war annehmbar das gesamte Produktionsvolumen von 1975 bis 1982 (einschließlich)?
-
- 6.3.** Ein Sortiment Nägel für eine Haushaltspackung soll 9 verschiedene Sorten (in einer geometrischen Folge der Längen) enthalten. Der kleinste Nagel ist 8 mm lang, der größte 8 cm.
-
- 6.4.** Untersuchen Sie die Eigenschaften der Folge

$$(a_n) = \left(\frac{10n}{n^2 - 20} \right).$$
-
- 6.5.** Untersuchen Sie die Eigenschaften der Folge

$$(a_n) = \left(\frac{n^2 + 100}{2n^2 - 50} \right).$$
-
- 6.6.** Untersuchen Sie die Eigenschaften der Folge

$$(a_n) = ((-1)^n)$$
 und der Folge

$$(b_n) = ((-0,5)^n).$$
-
- 6.7.** Die Stetigkeit der Funktion

$$f(x) = \frac{|x|}{x} \quad \text{für alle } x \in P \setminus \{0\} \quad \text{und} \quad f(0) = 1$$

 ist an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ zu untersuchen.
-
- 6.8.** Die Stetigkeit der Funktion

$$g(x) = \frac{x^2 - 2x}{x} \quad \text{für alle } x \in P \setminus \{0\} \quad \text{und} \quad g(0) = -1$$

 ist an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ zu untersuchen.
-
- 6.9.** 258 Kästchen von 8 cm Breite und 11 cm Höhe sollen so pyramidenförmig an einer Wand gestapelt werden, daß in der obersten Reihe 16 Kästen und in jeder folgenden jeweils ein Kasten mehr untergebracht werden. Wieviel Reihen ergeben sich? Wieviel Kästen liegen in der untersten Reihe? Welche Abmessungen muß die Wand mindestens haben?

B

6.1. $a_1 = 5$ $a_n = a_1 q^{n-1}$
 $a_7 = 5q^6 = 200$
 $q^6 = 200 : 5 = 40$ $q = 1,848$

6.2. Eine geometrische Folge darf angenommen werden.

$$a_1(1975) = 230000 \text{ Mark} \\ a_7(1981) = 345000 \text{ Mark} \quad a_7 = 230q^6 = 345 \\ q^6 = 1,500 \quad q = 1,070$$

6.3. $a_1 = 8 \quad a_n = a_1 q^{n-1}$
 $a_9 = 8 \cdot q^8 = 80$
 $q^8 = 10 \quad q = 1,335$

n	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
a_n	-0,53	-1,25	-2,73	-10	+10	+3,75	2,42	1,82
	9.	10.	12.	15.				
	1,49	1,25	0,97	0,74				

n	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
	-2,1	-2,5	-3,4	-6,4	-	+6,2	3,0	2,2
	9.	10.	20.					
	1,62	1,3	0,67					

5. Glied nicht definiert, ab 6. Glied streng monoton fallend.

Obere Grenze 6,2 und untere Grenze -2,1.

6.6. $a_n = -1; \quad 1; \quad -1; \quad 1; \quad - \dots$
 $b_n = -0,5; \quad 0,25; \quad -\frac{1}{8}; \quad \frac{1}{16}; \quad + \dots$

Die erste Folge ist nicht konvergent, sie ist nicht monoton.

Die zweite Folge ist auch nicht monoton, aber konvergiert gegen 0.

6.7. An beiden Stellen ist die Funktion definiert:

$$f(0) = 1 \quad \text{und} \quad f(2) = 1.$$

6.8. An beiden Stellen ist die Funktion definiert:

$$g(0) = -1 \quad \text{und} \quad g(2) = 0.$$

6.9. Es handelt sich um eine arithmetische Folge mit

$$a_1 = 16; \quad d = 1; \quad s_n = 258.$$

$$258 = a_1 n + 0,5n(n-1) \quad d = 16n + 0,5n(n-1)$$

Daraus ergibt sich eine quadratische Gleichung für n .

$$0,5n^2 + 15,5n - 258 = 0 \quad n_1 = 12 \quad (n_2 = -43)$$

- 6.1. $a_1 = 5; a_2 = 5 \cdot 1,848 = 9,24;$
 $a_3 = 5 \cdot 3,420 = 17,10; a_4 = 5 \cdot 6,325 = 31,63;$
 $a_5 = 5 \cdot 11,70 = 58,50; a_6 = 5 \cdot 21,65 = 108,25; a_7 = 200$
-

- 6.2. $a_8(1982) = 345 \cdot 1,070$
oder $= 230 \cdot 1,070^7 = 369,1$
 $s_8 = 230 \cdot \frac{1,070^8 - 1}{0,070} = 2349$
-

- 6.3. $a_1 = 8; a_2 = 8 \cdot 1,335 = 10,7; a_3 = 8 \cdot 1,335^2 = 14,2$
 $a_4 = 19,0; a_5 = 25,3; a_6 = 33,7;$
 $a_7 = 45,0; a_8 = 59,9; a_9 = 80$

Die logarithmische Berechnung ist empfehlenswert.

- 6.4. Ab 5. Glied streng monoton fallend.
 d (ab 5. Glied) $-6,25; -1,33; -0,60; -0,32; \dots$
 q (ab 5. Glied) $0,38; 0,65; 0,75; 0,82; \dots$
 $d < 0, q < 1$ unt. Grenze $a_4 = -10$, ob. Grenze $a_5 = 10$.
Grenzwert nach (3a) vermutet zu 0.
-

- 6.5. Nach (3b) Grenzwert vermutet zu 0,5. Zum Nachweis bildet man
 $(a_n - g) = \left(\frac{n^2 + 100}{2n^2 - 50} - 0,5 \right) = \left(\frac{62,5}{n^2 - 25} \right).$

Das ist aber eine Nullfolge.

$$\begin{aligned} d \text{ (ab 6. Glied)} &= -3,2; -0,9; -0,48; \dots \\ q \text{ (ab 6. Glied)} &= 0,48; 0,7; 0,77; \dots \end{aligned}$$

Die Partialsummenfolge kann nicht konvergieren.

- 6.6. Die Partialsummenfolge von (a_n) wurde von einem Mönch GUIDO GRANDI 1750 in Paris fehlerhaft gedeutet mit
(1) $-1 + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = -1$
(2) $(-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 0$. Sie kann gar nicht konvergent sein.
- Der Grenzwert der zweiten Folge ist 0, da es sich um eine geometrische Folge mit $|q| < 1$ handelt.
-

- 6.7. An $x_2 = 2$ existiert ein endlicher Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$.
An $x_1 = 0$ existiert kein einheitlicher Grenzwert.
Von rechts her (pos. x) strebt die Funktion der 1 zu, von links her der -1.
- 6.8. An x_1 und x_2 existiert je ein endlicher Grenzwert. $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -2$
-

- 6.9. Man bestimmt $a_{12} = 16 + 11 \cdot 1 = 27$
 $b = 27 \cdot 8 = 216$
 $h = 12 \cdot 11 = 132$

D

- 6.1. Die Serie besteht aus den Markenwerten (in Pf)

5 / 10 / 15 / 30 / 60 / 110 / 200.

Der Wert 1,10 Mark wird aus praktischen Gründen besser durch 1,20 Mark ersetzt werden. Der gesamte Satz kostet 4,30 Mark bzw. 4,40 Mark.

- 6.2. Für 1982 ist eine Produktion von 369100 Mark zu erwarten.

Das durchschnittliche Wachstumstempo beträgt 107%. Von 1975 bis 1982 wurde ein Gesamtproduktionsvolumen von etwa $2,35 \cdot 10^6$ Mark errechnet. Beachten Sie: Im Bereich des Anfangs- und Endwertes (also um 1975 und um 1981) werden die berechneten Werte den wahren am nächsten kommen.

- 6.3. Die Sortimentsauswahl sollte so gestaltet werden, daß vor allem viele Sorten kleinerer Nägel angeboten werden.

Die Längen betragen zweckmäßig (in mm):

8 / 11 / 14 / 19 / 25 / 34 / 45 / 60 / 80.

Eine arithmetische Folge hätte die Werte 8 / 17 / 26 / 35 / 44 / 53 / 62 / 71 / 80 ergeben, was ungünstiger ist.

- 6.4. Es handelt sich um eine ab 5. Glied (streng) monoton fallende Folge mit fallenden absoluten Abnahmen und fallenden relativen Abnahmen. Der Quotient aufeinanderfolgender Glieder nähert sich der 1. Untere Grenze ist -10 , obere Grenze $+10$, der Grenzwert ist 0. Die Konvergenz erfolgt sehr langsam.
-

- 6.5. Es handelt sich ab dem 6. Glied um eine streng monoton fallende Folge mit fallenden abs. und rel. Abnahmen. Untere Grenze ist $-6,4$, ob. Grenze ist $6,2$. Der Wert für $n = 5$ ist nicht definiert. Grenzwert ist $0,5$. Die Partialsummenfolge divergiert.
-

- 6.6. Beide Folgen sind nicht monoton. Die erste ist divergent, die zweite konvergiert als geom. Folge gegen 0, auch ihre Partialsummenfolge ist konvergent mit dem Grenzwert $-1/3$.
-

- 6.7. An $x_1 = 0$ scheitert die Stetigkeit an dem Nichtvorhandensein eines einheitlichen Grenzwerts.

Wegen $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ ist die Funktion an $x_2 = 2$ stetig.

- 6.8. An $x_1 = 0$ scheitert die Stetigkeit an der Nichtübereinstimmung von $g(0) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -2$.

An $x_2 = 2$ liegt Stetigkeit vor: $g(2) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$ (Nullstelle).

- 6.9. Es handelt sich um 12 Reihen. In der untersten Reihe lagern 27 Kästen. Die gestapelten Kästen nehmen eine Breite von 2,16 m und eine Höhe von 1,32 m ein.

- 6.10. Ein Werktätiger verdiente 1973 6420,- Mark, im Jahre 1980 dagegen 7764,- Mark. Der Verdienst erhöhte sich jährlich um den gleichen Betrag. Wieviel hat der Arbeiter insgesamt vom 1. 1. 1973 bis zum 31. 12. 1980 verdient?

- 6.11. Für die Entwicklung der Weltbevölkerung (in Mrd. Menschen) liegen folgende Angaben vor:

1910	1925	1940	1955	1970
1,62	1,86	2,20	2,73	3,62

Des weiteren wird der Energiebedarf in der Welt in Mrd. t Steinkohleneinheiten (SKE) angegeben: 1900 1920 1940 1960

1900	1920	1940	1960
1,1	1,4	2,0	3,6

Untersuchen Sie die Eigenschaften beider Entwicklungen, und ziehen Sie Schlußfolgerungen!

(Angaben z. T. entnommen: URANIA 10/1966, S. 16)

- 6.12. Die Amplituden der Schwingungen eines Fadenpendels wurden für jede Periode (volle Schwingung) gemessen (in cm) und ergaben:

1.	2.	3.	4.	5.	6.
100	82	67	55	45	37

Beschreiben Sie diese Entwicklung.

Versuchen Sie, eine entsprechende Gesetzmäßigkeit analytisch anzugeben.

- 6.13. Beim radioaktiven Zerfall versteht man unter der Halbwertszeit die Zeit, in der eine bestimmte Menge eines radioakt. Isotops durch Strahlung auf die Hälfte reduziert wurde. Sie beträgt für das Isotop ^{211}Pb (β -Strahlung) 36 Minuten. Untersuchen Sie die Zerfallsfolge, und stellen Sie fest, wieviel von dem Stoff nach 4 Stunden noch vorhanden ist.

- 6.14. In der DDR gab es 1981 Münzen mit den Werten 1; 5; 10; 20; 50 Pf und 1,- Mark; 2,- Mark; 5,- Mark.

Untersuchen Sie die Eigenschaften der Münzfolge, und ziehen Sie Schlußfolgerungen.

- 6.15. Gegeben ist eine Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = \frac{n}{3n+9}$. Von welchem $n = n_0$ ab liegen alle Glieder der Folge in der ϵ -Umgebung des Grenzwerts? ($\epsilon = 10^{-2}$)

- 6.16. Ein Waldbestand wird gegenwärtig auf $a_1 = 10000 \text{ m}^3$ Holz, sein jährlicher Zuwachs durch Aufforstung auf 3% geschätzt. Wie groß wird der Holzbestand nach 10 Jahren sein, wenn zwischenzeitlich kein Einschlag erfolgt? Wieviel Holz könnte jährlich eingeschlagen werden, wenn der gesamte Holzbestand nach 10 Jahren aufgebraucht sein soll?

B

- 6.10. Es liegt eine arithmetische Folge vor.

$$\begin{aligned}a_1(1973) &= 6420, - \\a_8(1980) &= 6420 + 7d = 7764 \\7d &= 1344 \quad d = 192\end{aligned}$$

- 6.11. Energiebedarf und Bevölkerungszahl entwickeln sich annehmbar monoton steigend.

Energiebedarf:	d	0,3	0,6	1,6	...
	q	1,27	1,43	1,80	...
Bevölkerungszahl:	d	0,24	0,34	0,53	0,89
	q	1,15	1,19	1,24	1,33

- 6.12. Es handelt sich um eine fallende Folge.

$$\begin{array}{cccccc}d & -18 & -15 & -12 & -10 & -8 \\q & 0,82 & 0,82 & 0,82 & 0,82 & \dots\end{array}$$

Also liegen fallende absolute Abnahmen und gleichbleibende relative Abnahmen vor.

- 6.13. Der Zerfall erfolgt nach einem exponentiellen Gesetz bzw. einer geometrischen Folge.

Man setze an: $a_1 = 100 (\%)$ $a_{37} = 50 (\%)$
 $a_{30} = a_1 q^{36}$ $q^{36} = 0,5$ $q = \sqrt[36]{0,5} = 0,981$
 $\lg q = 0,9917 - 1$

- 6.14. Man könnte natürlich zunächst die absoluten und relativen Veränderungen (Zunahmen) untersuchen:

$$\begin{array}{cccccccc}d & 4 & 5 & 10 & 30 & 50 & 100 & 300 \\q & 5,0 & 2,0 & 2,0 & 2,5 & 2,0 & 2,0 & 2,5\end{array}$$

Es liegen also wachsende absolute und wechselnde relative Zunahmen vor. Schon hier wird deutlich, daß der Schritt von 1 Pf auf 5 Pf gegenüber den anderen zu groß ist! Überlegen Sie, was das bedeutet!

- 6.15. Grenzwert $g = \frac{1}{3}$

$$\left| \frac{n_0}{3n_0 + 9} - \frac{1}{3} \right| < 0,01$$

$$\frac{1}{n_0 + 3} < 0,01$$

$$n_0 > 97$$

- 6.16. Es liegt eine geometrische Folge vor.

$$a_{11} \text{ (Bestand nach 10 Jahren)} = 10000 \cdot 1,03^{10} = 13440$$

Die Menge des eingeschlagenen Holzes ist von der Aufforstung ausgeschlossen. Es ist die Summenformel für die entspr. geom. Folge zu verwenden.

6.10. $s_8 = \frac{6420 + 7764}{2} \cdot 8 = 7092 \cdot 8 = 56736$

- 6.11. Beide Folgen weisen eindeutig steigende absolute und relative Zunahmen auf.
Die Entwicklung erfolgt also stärker als exponentiell. (Es ist empfehlenswert, die Entwicklungen in einer Graphik darzustellen.) Man erkennt sofort, daß die Quotienten

$\frac{\text{Weltenergiebedarf}}{\text{Weltbevölkerungszahl}} = Q$ ständig steigen.

Die Quotienten Q betragen etwa: 1910 1940 1970
 0,77 0,91 1,22

Man erkennt, daß Q etwa um 1945 den Wert 1 annimmt. Zu diesem Zeitpunkt wären also etwa je Weltbewohner 1 t SKE bereitzustellen gewesen.

- 6.12. Es handelt sich – wie physikalisch verständlich – um eine exponentiell gedämpfte Entwicklung!

Man kann also ansetzen: $A_n = A_0 e^{nx}$
 $x = \ln(A_1 : A_0) = \ln 0,82 = -0,201 \approx -0,2$;

oder man setzt eine geometrische Folge an:

$$A_n = A_0 q^n \quad \text{mit} \quad q = A_1 : A_0 = 0,82.$$

- 6.13. Die Zerfallsfolge (in Minutenabständen) gehorcht dem Gesetz:

$$a_n = 100 \cdot 0,981^{n-1}.$$

Nach 4 Stunden sind 240 Minuten vergangen.

$$a_{241} = 100 \cdot 0,981^{240} \quad \lg a_{241} = 0,0080 \\ a_{241} = 1,02$$

- 6.14. Um die Unterschiede besser beurteilen zu können, ist es zweckmäßig, eine (zwangsweise) geometrische Folge mit $a_1 = 1$ und $a_8 = 500$ anzusetzen.

$$a_8 = a_1 q^7; q^7 = 500; q = 2,43.$$

Danach würden sich folgende Glieder (und gerundete Werte) für die Münzfolge ergeben:

Glieder	1	2,4	5,9	14,3	34,9	84,7	205,9	500
gerundet	1	2	6	14	35	85	206	500
Ist-Wert	1	5	10	20	50	100	200	500

Die Abweichungen sind im Anfangsbereich besonders stark.

- 6.15. n_0 muß größer als 97 sein und ganzzahlig, also $n_0 = 98$
-

- 6.16. b (Gesamtmenge des eingeschlagenen Holzes)

$$b = x \cdot \frac{1,03^{10} - 1}{1,03 - 1} \\ = 11,47x \\ = 13\,440 : 11,47 \\ = 1\,172$$

D

- 6.10.** Der Verdienst erhöht sich jährlich um 192,– Mark (das entspricht monatlich 16,– Mark), beginnend mit monatlich 535,– Mark (1973). Insgesamt wurden in den 8 Jahren 56736,– Mark verdient.
-
- 6.11.** Auf Grund einer graphischen Darstellung kann für das Jahr 2000 abgeschätzt werden:
Weltenergiebedarf über 20 Mrd. (man rechnet mit 29 Mrd. t SKE).
Weltbevölkerung über 5 Mrd. (man rechnet mit 7 Mrd. Menschen).
Der Bedarf je Weltbewohner dürfte sich bis dahin auf den fünffachen Wert vom Beginn des Jahrhunderts gesteigert haben. Bei einer genaueren Abschätzung der Weltbevölkerungszahl müßte die unterschiedliche Entwicklung des Bevölkerungszuwachses in den einzelnen Erdteilen berücksichtigt werden (Asien!).
-
- 6.12.** Die Entwicklung kann dargestellt werden entweder durch $A_n = 100 e^{-0,2n}$
(wie in der Physik und Technik üblich)
oder durch $A_n = 100 \cdot 0,82^{n-1}$
(wie in der Mathematik üblich).
-
- 6.13.** Die Zerfallsfolge gehorcht dem exponentiellen Gesetz $a_n = 100 \cdot 0,981^{n-1}$ oder
 $a_n = 100 \cdot e^{-0,0191(n-1)}$.
Für die Zeit nach 4 Std. ergibt sich (nach beiden Formeln), daß noch 1,02% des Stoffes vorhanden sind.
-
- 6.14.** Es fällt auf, daß zwischen den Werten 1 Pf und 5 Pf eigentlich ein Zwischenwert fehlt. Deswegen ist kaum von einer guten geometrischen Staffelung zu sprechen. Überzeugen Sie sich davon, daß die Einführung der 20-Pf-Stücke vorteilhaft war und die Einführung von 2-Pf-Münzen eine bessere Angleichung an eine geometrische Folge brächte.
-
- 6.15.** Vom 98. Glied an liegen alle Glieder der Folge in der ε -Umgebung des Grenzwertes. Das 97. Glied $a_{97} = 0,32333\dots$ liegt auf dem Rand der ε -Umgebung und nicht in ihr.
-
- 6.16.** Es könnten jährlich rund 1170 m^3 Holz eingeschlagen werden.

- 6.17.** Eine aus 10 Gliedern bestehende Folge hat das Anfangsglied $a_1 = 1$ und das 10. Glied $a_{10} = 38,44$. Bestimmen Sie die Summe der 10 Glieder für den Fall, daß es sich a) um eine arithmetische, b) um eine geometrische Folge handelt!

- 6.18.** Jemandem werden zwei Angebote zum Sparen gemacht:

- Je 1000,- Mark sollen pro Jahr 50,- Mark als Zinsen gutgeschrieben werden. Die Zinsen werden nicht weiter verzinst.
- 1000,- Mark Einlage sollen sich jährlich auf 103% des vorherigen Standes erhöhen. Beurteilen Sie die beiden Angebote.

- *6.19.** Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2}$$

sind zu untersuchen.

- 6.20.** Vergleichen Sie die Folge $(a_n) = \left(\frac{n+1}{n} \right)$ mit der Funktion $f(x) = \frac{x+1}{x}$.

- 6.21.** Untersuchen Sie die Funktionen $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ und $g(x) = 2^{\frac{1}{x-2}}$ auf Unstetigkeiten. (Hinweis: Erörtern Sie vor allem die Verhältnisse an $x = 2$.)

- 6.22.** Gegeben ist die Funktion $f(x) = x(x+2) \quad x \in P$.

Vergleichen Sie die Eigenschaften der Funktion $f(x)$ mit denen der Funktionen

$$g(x) = \frac{x^3 - 4x}{x - 2} \quad \text{für } x \in P \setminus \{2\} \quad \text{und} \quad g(2) = 8$$

sowie

$$h(x) = x \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \text{für } x \in P \setminus \{2\} \quad \text{und} \quad h(2) = 6.$$

- 6.23.** Gegeben ist eine Folge (a_n) durch $a_1 = 3$ und $a_{k+1} = a_k + (4k + 3)$. Weisen Sie die Monotonie der Folge nach. Weisen Sie nach, daß die Folge auch dargestellt werden kann durch $b_n = 2n^2 + n$. Weisen Sie nach, daß es sich weder um eine arithmetische noch geometrische Folge handeln kann.

B

6.17. $a_1 = 1 \quad a_{10} = 38,44$

arithmetisch: $38,44 = 1 + 9d$

$$9d = 37,44 \quad d = 4,16$$

geometrisch: $38,44 = 1 \cdot q^9 \quad q = \sqrt[9]{38,44} = 1,50$

- 6.18. Beim ersten Angebot handelt es sich um eine arithmetische Folge mit $a_1 = 1000$ und $d = 50$.

Beim zweiten Angebot liegt eine geometrische Folge mit $a_1 = 1000$ und $q = 1,03$ vor.

- 6.19. Die Nennerfunktion $N(x) = x^2 - 3x + 2$ hat Nullstellen an $x = 1$ und $x = 2$ und kann dargestellt werden als $N(x) = (x - 1)(x - 2)$. Die Zählerfunktion $Z(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ hat Nullstellen an $x = 1$, $x = -1$ und $x = -2$ und kann dargestellt werden als $Z(x) = (x + 1)(x - 1)(x + 2)$.
-

- 6.20. Zunächst werden Wertetabellen aufgestellt:

n	1.	2.	3.	4.	...
a_n	2	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{4}$...

x	-3	...	-1	0	...	0,5	...	1	2
y	$\frac{2}{3}$...	0	nicht defin.	...	3	...	2	$1\frac{1}{2}$

Für alle $x \in N \setminus \{0\}$ stimmt die Wertetabelle der Funktion mit der der Folge überein. Die Folge fällt monoton. Untere Grenze der Folge ist 1, obere Grenze 2.

- 6.21. Unstetigkeiten liegen bei beiden Funktionen nur für $x = 2$ vor.

$$f(2) = \frac{0}{0} \text{ unbestimmt; } g(2) = 2^{\frac{1}{0}} \text{ nicht definiert.}$$

- 6.22. $f(x)$ ist überall stetig. $g(x)$ und $h(x)$ sind an der Stelle $x = 2$ beide unstetig. Es ergibt sich dort formal ein Wert $0 : 0$.

Eine weitere Untersuchung an dieser Stelle ist unter Zuhilfenahme der zusätzlich definierten Werte $g(2)$ und $h(2)$ erforderlich.

- 6.23. a) Es muß nachgewiesen werden $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in N$.
b) Es ist zu zeigen, daß (b_n) die gleiche Rekursionsformel und das gleiche Anfangsglied wie (a_n) hat.
c) Es muß an (a_n) oder (b_n) nachgewiesen werden, daß $a_{n+1} - a_n$ und $a_{n+1} : a_n$ beide nicht unabhängig von n sind.

6.17. arithmetisch: $s_{10} = \frac{1 + 38,44}{2} \cdot 10 = 197,2$

geometrisch: $s_{10} = 1 \cdot \frac{1,5^{10} - 1}{1,5 - 1} = 115,33$

Der Wert bei der arithmetischen Folge ist auch ohne vorherige Bestimmung von d berechenbar.

6.18. $a_p = 1000 + (n - 1) \cdot 50 = 950 + 50n$ (nach $n - 1$ Jahren) bzw. (geometrisch)
 $a_n = 1000 \cdot 1,03^{n-1}$

nach Jahren	arithm.	geom.	nach Jahren	arithm.	geom.
1	1050	1030	15	1750	1558
2	1100	1061	20	2000	1806
5	1250	1159	25	2250	2095
8	1400	1266	30	2500	2429
10	1500	1344	35	2750	2815
12	1600	1426	50	3500	4385

6.19. $x = 2; Z(2) \neq 0; N(2) = 0$
 $x = 1; Z(1) = 0; N(1) = 0$
 $x = -1; Z(-1) = 0; N(-1) \neq 0$
 $x = -2; Z(-2) = 0; N(-2) \neq 0$

Der Differentialquotient lautet:

$$f'(x) = \frac{x^4 - 6x^3 + x^2 + 12x - 8}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

6.20. Der Grenzwert der Folge ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. Für die Funktion ergibt sich der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$. Im Gegensatz zur Folge ist hier auch $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ bildbar. Die Folge hat keine Nullstelle, die Funktion die Nullstelle $x_N = -1$. Einen Pol findet man für die Funktion: $x_P = 0$. Kurvenbild der Funktion ist eine Hyperbel. Die Asymptoten sind die y -Achse und die Gerade $g(x) = 1$.

6.21. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ existiert mit $f(2) = 4$. Die Unstetigkeit von $f(x)$ ist hebbare.

Man vergleiche $f(1,9) = 3,9$ und $f(2,1) = 4,1$.

Dagegen ist $g(1,9) \approx 0,001$ und $g(2,1) \approx 1000$.

Hier liegt offenbar eine Sprungstelle vor. (Vergleichen Sie das Bild auf Seite 97).

6.22. Mit Ausnahme des zusätzlich definierten Wertes stimmen die Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ miteinander überein. Beide stimmen, wenn $x \neq 2$, auch mit $f(x)$ in jeder Weise überein. Als Grenzwert ergibt sich $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 8$, übrigens gleich $f(2)$.

6.23. a) $a_{n+1} > a_n$ gilt, wenn $4n + 3 > 0$, also $n > -0,75$

$$b_{n+1} - b_n = 2(n+1)^2 + n + 1 - 2n^2 - n = 4n + 3 = a_{n+1} - a_n \text{ und } b_1 = 2 + 1 = 3$$

c) $a_{n+1} - a_n = 4n + 3 = h(n)$

$$a_{n+1} : a_n = (2n^2 + 5n + 3) : (2n^2 + n) = k(n)$$

Der Quotient hat den Grenzwert 1.

D

- 6.17. Die Summe der ersten zehn Glieder unterscheidet sich wesentlich, je nachdem, ob es sich um eine arithmetische (197,2) oder eine geometrische (113,32) Folge/Reihe handelt. Zum Vergleich einige Glieder:

	2.	5.	8.	10.
arithm.	5,16	17,64	30,12	38,44
geom.	1,5	5,06	17,08	38,44

-
- 6.18. Bis zu 33 Jahren Laufzeit ist das erste Angebot günstiger. Bei etwa 17 Jahren ist der Unterschied am größten. Bei 33 Jahren unterscheiden sich beide Angebote im aufgelaufenen Kapital nur um 3,- Mark; a) 2650,- Mark, b) 2653,- Mark. Bereits nach 50 Jahren ist Vorschlag b) um 25% überlegen. Die vergleichende Beziehung $10000 \cdot 1,03^{n-1} = 950 + 50n$ ist nur graphisch oder durch systematisches Probieren zu lösen.

-
- 6.19. Es liegt überall außer $x = 1$ und $x = 2$ Stetigkeit und Differenzierbarkeit vor. An $x = 2$ liegt ein Pol. An $x = 1$ liegt eine hebbare Unstetigkeit. Dort müßte der Funktionswert $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = -6$ zusätzlich definiert werden. Die Differenzierbarkeit könnte durch $f'(1) = -11$ zusätzlich gewährleistet werden.

-
- 6.20. Jede Folge ist eine Funktion, der Definitionsbereich der Funktion ist aber größer. Der Pol bei $x = 0$ tritt bei der Folge wegen $0 \notin N \setminus \{0\}$ nicht in Erscheinung. Der Grenzwert für n bzw. x nach ∞ ist der gleiche, nämlich 1. Obere und untere Grenze existieren bei der Funktion nicht, wohl aber bei der Folge.

-
- 6.21. Zur Untersuchung der Unstetigkeit ist das Verhalten in der Nähe von $x = 2$ zu überprüfen:
 $f(1,9) = 3,9$; $f(2,1) = 4,1$; aber $g(1,9) \approx 0,001$; $g(2,1) \approx 1000$. Die Unstetigkeit an $x = 2$ ist bei $f(x)$ hebbbar, bei $g(x)$ liegt dort ein Pol vor.

-
- 6.22. In allen Punkten außer $x = 2$ stimmen die drei Funktionen überein. Die Stetigkeit an $x = 2$ wäre noch gegeben, wenn
a) $g(2) = 8$ bzw. $h(2) = 6$ definiert ist,
b) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 8$ bzw. $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 8$ existiert und
c) der definierte Wert mit dem Grenzwert übereinstimmt. Das ist bei $g(x)$ der Fall, nicht aber bei $h(x)$.

-
- 6.23. Die durch Rekursionsformel gegebene Folge (a_n) stimmt mit der analytisch-independent gegebenen (b_n) total überein. Die Folge ist (streng) monoton steigend. Es liegt weder eine arithmetische noch geom. Folge vor. Die Entwicklung liegt „zwischen beiden“ bei wachsenden absoluten und fallenden relativen Zunahmen.

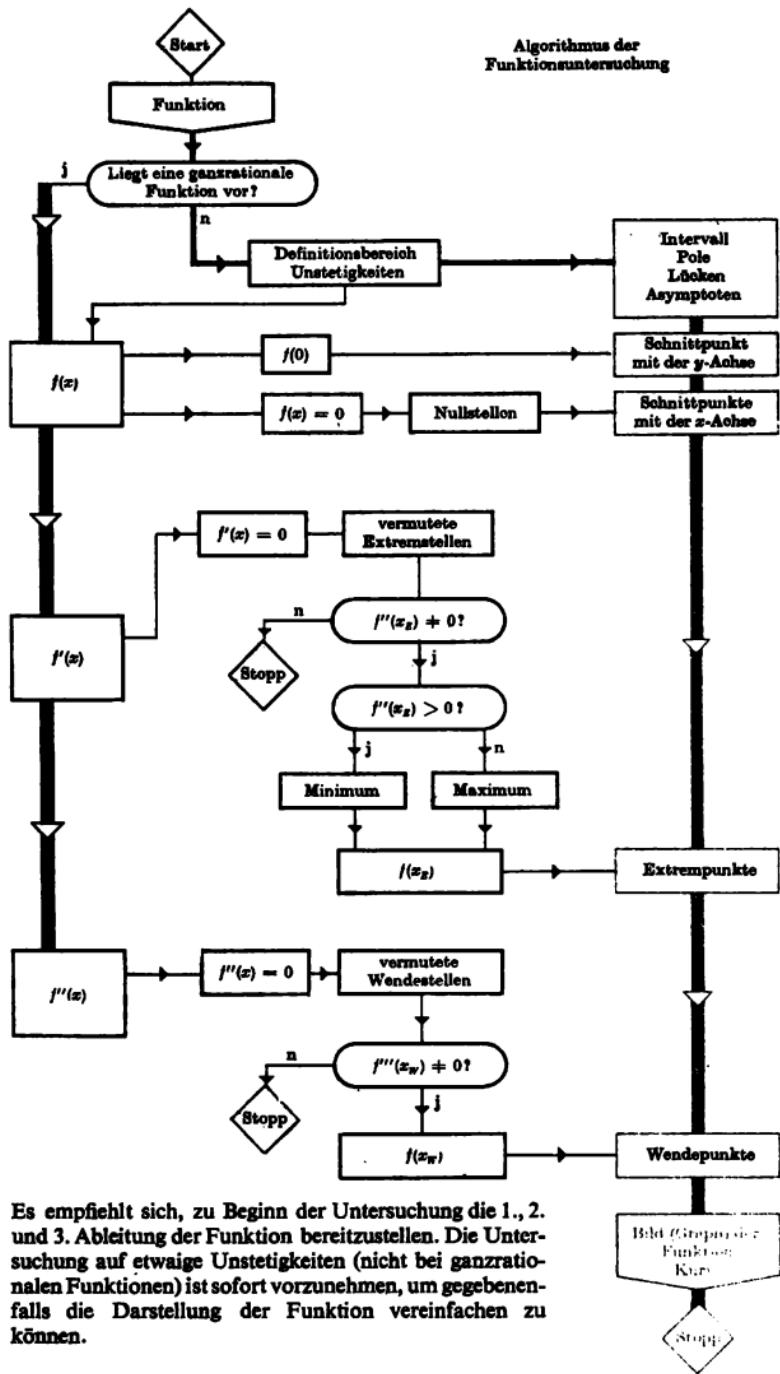
7. Funktionsuntersuchungen, Kurvendiskussionen

Durch eine „Kurvendiskussion“ (besser: Funktionsuntersuchung) werden alle wesentlichen Eigenschaften der betreffenden Funktion f bzw. ihres Bildes erfaßt. Es besteht die Möglichkeit, ein vollständiges „Bild“ der Funktion im Definitionsbereich zu erhalten, indem man den Definitionsbereich, die Pole, die Nullstellen, die y-Werte der Schnittpunkte mit der y-Achse, die Anstiege in diesen Punkten, die lokalen Extrema und die Wendepunkte sowie das Verhalten im Unendlichen untersucht. Oft wird aber nur das Erkennen eines Teils dieser Eigenschaften für die weiteren Untersuchungen benötigt. Für den Anfänger empfiehlt sich dagegen immer, eine vollständige Kurvendiskussion durchzuführen:

Kurven-eigenschaft	Funktions-merkmal	Eigenschaften eines beliebigen Kurvenpunktes					
		(Kehrwert des Funktions-wertes)	Abszisse	Ordinate	Anstieg $\tan \varphi$	Krümmung	
		$\frac{1}{f(x)}$	x^*	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$
Unstetigkeiten und Pole	Unstetigkeits- und Polstellen	$= 0^*$ $\rightarrow x_c$	<i>Bei ganzrationalen Funktionen keine Pole</i>				
Schnittpunkt mit der y-Achse	—	—	$[x_0]$	—	—	—	—
Schnittpunkt(e) mit der x-Achse	Nullstellen	—	$f(x) = 0$ $\rightarrow x_N$	$= 0$	Anstieg dort $f'(0)$	—	—
Extrempunkte	Extrem-stellen	—	$f'(x) = 0$ $\rightarrow x_E$	$f(x_E)$	$= 0$	0 Max. $= 0 \text{ kein Nachweis}$ 0 Min.	—
Wendepunkte	Wende-stellen	—	$f''(x) = 0$ $\rightarrow x_W$	$f(x_W)$	Wende-tangenten-anstieg $f'(x_W)$	$= 0$	Existenz, wenn $\neq 0$

¹⁾ Praktische Handhabung bei gebrochenrationalen Funktionen.
Es sind die Stellen zu suchen, wo kein endlicher Grenzwert existiert.

Algorithmus der
Funktionsuntersuchung



Es empfiehlt sich, zu Beginn der Untersuchung die 1., 2. und 3. Ableitung der Funktion bereitzustellen. Die Untersuchung auf etwaige Unstetigkeiten (nicht bei ganzzrationalen Funktionen) ist sofort vorzunehmen, um gegebenenfalls die Darstellung der Funktion vereinfachen zu können.

Beispiel: Kurvendiskussion der ganzrationalen Funktion

$$y = f(x) = 0,04x^4 - x^2 + 0,96$$

Ableitungen: $y' = f'(x) = 0,16x^3 - 2x$
 $y'' = f''(x) = 0,48x^2 - 2$
 $y''' = f'''(x) = 0,96x$

Schnittpunkte mit den Achsen

$$S_x: y = 0 \quad 0,04x^4 - x^2 + 0,96 = 0$$

$$0,04z^2 - z + 0,96 = 0$$

$x^2 = z$ substituieren

$$\frac{1}{25}z^2 - z + \frac{24}{25} = 0$$

$$z^2 - 25z + 24 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{25}{2} \pm \sqrt{\frac{625}{4} - \frac{96}{4}}$$

$$= \frac{25}{2} \pm \frac{23}{2}$$

$$z_1 = x^2 = 24 \quad z_2 = x^2 = 1$$

$$x_1 = \sqrt{24}; \quad x_2 = -\sqrt{24}; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = -1$$

$$S_{x1}(4,899; 0); \quad S_{x2}(-4,899; 0); \quad S_{x3}(1; 0); \quad S_{x4}(-1; 0)$$

$$S_y: \quad x = 0; \quad f(0) = 0,96; \quad S_y(0; 0,96)$$

Lokale Extrempunkte

$$y' = 0 \quad 0,16x^3 - 2x = 0$$

$$x(0,16x^2 - 2) = 0 \quad x_{E1} = 0$$

$$x^2 = \frac{25}{2} \quad x_{E2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

$$x_{E3} = -\frac{5}{2}\sqrt{2}$$

$$y'' = 0 \quad f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$$

$$f''\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right) = 4 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$$

$$f''\left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}\right) = 4 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$$

$$H(0; 0,96); \quad T_1(3,54; -5,29); \quad T_2(-3,54; -5,29)$$

Wendepunkte

$$y'' = 0 \quad 0,48x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = \frac{50}{12} \quad x_{w1} = \frac{5}{6}\sqrt{6}$$

$$x_{w2} = -\frac{5}{6}\sqrt{6}$$

$$y''' \neq 0 \quad f'''\left(\frac{5}{6}\sqrt{6}\right) \neq 0$$

$$f'''\left(-\frac{5}{6}\sqrt{6}\right) \neq 0$$

$$W_1(2,041; -2,51); \quad W_2(-2,041; -2,51)$$

Anstiegsinkel in den Wendepunkten

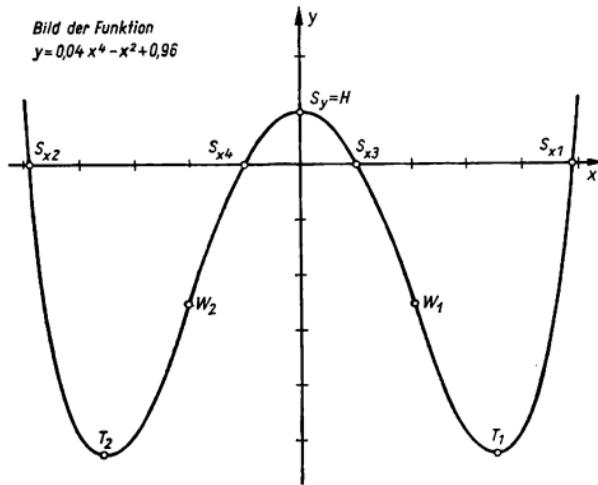
$$f'(2,041) = -2,72 = \tan \alpha_{w1}; \quad \alpha_{w1} = 110,19^\circ$$

$$f'(-2,041) = 2,72 = \tan \alpha_{w2}; \quad \alpha_{w2} = 69,81^\circ$$

Verhalten im Unendlichen

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (0,04x^4 - x^2 + 0,96)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(0,04 - \frac{1}{x^2} + \frac{0,96}{x^4} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x^4 \\ = 0,04 \cdot \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x^4 = \pm \infty$$



Beispiel: Kurvendiskussion der gebrochenrationalen Funktion

$$y = f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{x^2 - 4}{2x^2 - 2}$$

$$N(x) = 2x^2 - 2 = 0 \\ x_1 = +1; x_2 = -1 \quad \text{Pole}$$

Definitionsbereich:
 $x \in P \setminus \{-1; +1\}$

Ableitungen

$$y' = f'(x) = \frac{2x(2x^2 - 2) - (x^2 - 4)4x}{(2x^2 - 2)^2} = \frac{12x}{(2x^2 - 2)^2}$$

$$y'' = f''(x) = \frac{12(2x^2 - 2)^2 - 12x \cdot 2(2x^2 - 2) \boxed{4x}}{(2x^2 - 2)^4} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{Kettenregel beachten} \end{matrix} \\ = - \frac{72x^2 + 24}{(2x^2 - 2)^3}$$

$$y''' = f'''(x) = - \frac{144x(2x^2 - 2)^3 - (72x^2 + 24)3(2x^2 - 2)^2 \boxed{4x}}{(2x^2 - 2)^6} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{Kettenregel beachten} \end{matrix} \\ = \frac{576x^3 + 576x}{(2x^2 - 2)^4}$$

Schnittpunkte mit den Achsen

$$S_x: \quad Z(x_0) = x^2 - 4 = 0 \quad x^2 = 4 \\ x_1 = 2 \quad x_2 = -2 \\ N(x_0) = 2x^2 - 2 \neq 0 \quad N(2) = 6 - 2 \neq 0 \\ N(-2) = 6 - 2 \neq 0 \quad S_{x1}(2; 0), S_{x2}(-2; 0)$$

$$S_y: x_S = 0, y_S = \frac{x_S^2 - 4}{2x_S^2 - 2} = \frac{-4}{-2} = 2 \quad S_y(0; 2)$$

Extrempunkte

$$y' = f'(x_E) = \frac{12x_E}{(2x_E^2 - 2)^2} = 0 \quad x_E = 0 \quad y_E = f(x_E) = 2$$

und $N(0) = 4 \neq 0$

$$y'' = f''(0) = 3 > 0 \text{ (Min.)} \quad T(0; 2)$$

Wendepunkte keine, denn $f''(x) = 0$ ohne reelle Lösungen.

Asymptotengleichung Nebenrechnung

$$y = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{x^2 - 4}{2x^2 - 2} \quad (x^2 - 4):(2x^2 - 2) = \frac{1}{2} + \frac{-3}{2x^2 - 2}$$

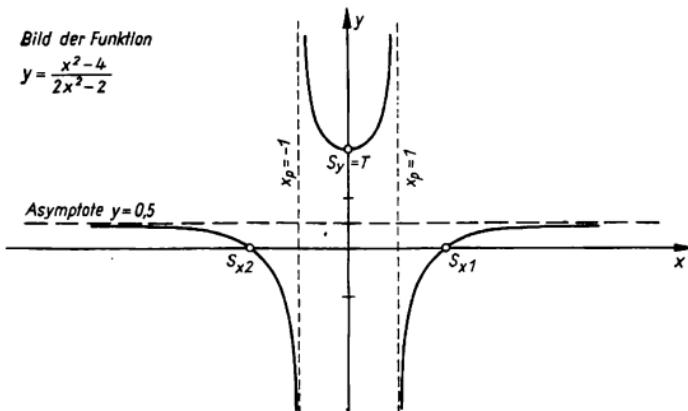
$$\underline{\underline{\frac{-(x^2 - 1)}{-3}}}$$

$$y = g(x) + r(x) = \frac{1}{2} + \frac{-3}{2x^2 - 2}$$

$$y = g(x) = \frac{1}{2} \text{ (Asymptotengleichung)}$$

Bild der Funktion

$$y = \frac{x^2 - 4}{2x^2 - 2}$$



Bearbeitung einer Aufgabe zur Tangentenproblematik auf drei verschiedenen Wegen:

Aufgabe: Eine nach rechts geöffn. Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(2; 0)$ gehe durch den Punkt $P(20; 12)$. Die Gleichung der Parabel lautet dann $y^2 = 8x - 16$. Bestimmen Sie die Gleichung jener Tangenten, die den Anstieg 0,5 besitzt! Geben Sie die Koord. des Berührungsproduktes an!

Elementarer Weg

Gleichungssystem
(Schnitt zweier Kurven)

$$y^2 = 8x - 16$$

$$y = 0,5x + n$$

$$\frac{1}{4}x^2 + xn + n^2 = 8x - 16$$

$$x = -2n + 16 \\ \pm \sqrt{192 - 64n}$$

Im Berührungsfall

Doppelösung
(Radikand = 0)

$$192 = 64n$$

$$n = 3$$

$$y = 0,5x + 3$$

$$P_1(10; 8)$$

**Weg unter Benutzung
der Differentialrechnung**

Untersucht wird nur ein
Parabelast $f(x) = 2\sqrt{2x - 4}$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{2x - 4}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{2x - 4}}$$

$$x_1 = 10$$

$$y_1 = f(10) = 8$$

(Koordin. d. Berühr.-P.)

Tangentengleichung

(Punkt-Richtungs-Form)

$$0,5 = \frac{y - 8}{x - 10}$$

$$y = 0,5x + 3$$

**Weg unter Benutzung
der Tangentengleichung
einer Parabel**

Kegelschnittgleichung

$$y^2 = 8x - 16; p = 4$$

Parabeltangente durch
 $P_1(x_1; y_1)$

$$yy_1 = 4(x + x_1 - 4)$$

$$y = \frac{4}{y_1}x + \frac{4x_1 - 16}{y_1}$$

$$\text{Anstieg} = 0,5$$

$$4 : y_1 = 0,5; y_1 = 8$$

$$x_1 = 10$$

Tangentengleichung:

$$8y = 4(x + 10 - 4)$$

$$y = 0,5x + 3$$

7.1. Untersuchen Sie den Verlauf des Bildes der Funktion

$$y = f(x) = x^3 - 2.$$

7.2. Untersuchen Sie die Eigenschaften der gebrochenrationalen Funktion

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 9}{3x^2 - 3}, \text{ und skizzieren Sie den Verlauf ihres Bildes.}$$

7.3. Die Funktion $f(x) = x^3 + x^2 + ax$ mit $a > 0$ soll einen Horizontalwendepunkt haben.
Bestimmen Sie den Anstieg der Funktion in ihrer größten Nullstelle.

7.4. Charakterisieren Sie die Eigenschaften des Bildes der Funktion

$$y = f(x) = \frac{x^3 - 8}{x}.$$

7.5. Untersuchen Sie die Eigenschaften der Funktion

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4},$$

und beschreiben Sie den Verlauf ihres Bildes.

7.6. Führen Sie eine Kurvendiskussion zur gebrochenrationalen Funktion

$$s = s(t) = \frac{t}{t^2 + 4}$$

durch.

B

- 7.1. Es liegt eine ganzrationale Funktion 3. Grades vor.

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 & f''(x) &= 6x & f'''(x) &= 6 \\f(0) &= -2 \\f(x) = 0 \text{ führt zu } x^3 &= 2; & x_N &= 1,26.\end{aligned}$$

- 7.2. Es liegt eine gebrochenrationale Funktion vor.

$$N(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1).$$

Durch $N(x) = 0$ erhält man Polstellen für $x = \pm 1$

$$f'(x) = \frac{48x}{(3x^2 - 3)^2} = \frac{16x}{3(x^2 - 1)^2}, \quad f''(x) = \frac{-432x^2 - 144}{(3x^2 - 3)^3}$$

Dritte Ableitung nicht erforderlich, $f(0) = 3$.

- 7.3. Es liegt eine ganzrationale Funktion dritten Grades vor.

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + a \quad f''(x) = 6x + 2$$

$$f'''(x) = 6 \quad f(0) = 0$$

$f(x) = 0$ führt zu $x^3 + x^2 + ax = 0$. $x_{N1} = 0$; $x_{N2,3} = -0,5 \pm 0,5\sqrt{1 - 4a}$.

- 7.4. An der Stelle $x = 0$ erkennt man sofort einen Pol. Nullstelle wird durch $Z(x) = 0$; $x^3 = 8$; $x_N = 2$ gefunden.

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 8}{x^2}; \quad f''(x) = \frac{-16x + 2x^4}{x^4} \quad \text{oder} \quad f''(x) = \frac{-16 + 2x^3}{x^3}.$$

- 7.5. $Z(x) = 0$ führt zu $x^2 = 4$; $x_{N1,2} = \pm 2$.

$N(x) = 0$ führt zu $x^2 = -4$ ohne reelle Lösungen, also keine Pole. $f(0) = -1$.

$$f'(x) = \frac{16x}{(x^2 + 4)^2}; \quad f''(x) = \frac{-48x^2 + 64}{(x^2 + 4)^3};$$

$$f'''(x) = \frac{192x^3 - 768x}{(x^2 + 4)^4}$$

- 7.6. Da die Nennerfunktion den Wert 0 nicht annehmen kann, liegen keine Pole vor. Einzige Nullstelle ist $t_N = 0$. $s(0) = 0$.

$$s'(t) = \frac{-t^2 + 4}{(t^2 + 4)^2}; \quad s''(t) = \frac{2t^3 - 24t}{(t^2 + 4)^3};$$

$$s'''(t) = \frac{-6t^4 + 96t^2 - 96}{(t^2 + 4)^4}$$

7.1. $f'(x) = 0$ führt zu $3x^2 = 0$, also $x = 0$.

$f''(0) = 0$, also kein echtes Extremum.

$f''(x) = 0$ führt zu $6x = 0$, $x_w = 0$.

$f'''(0)$ ungleich 0, $f(0) = -2, f'(0) = 0$, also Horizontalwendepunkt.

7.2. $f'(x) = 0$ führt zu $48x = 0$, $x = 0$.

$$f''(0) \doteq \frac{-144}{-27} = 16/3 > 0; \text{ Minimum.}$$

$f''(x) = 0$ führt zu $432x^2 = -144$ ohne reelle Lösungen.

7.3. $f'(x) = 0$ führt zu $3x^2 + 2x + a = 0$,

$$x = -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{1-3a}}{3}.$$

$f''(x) = 0$ führt zu $6x = -2$, $x = -1/3$.

$$f''' \left(-\frac{1}{3} \right) = 6 \neq 0$$

$$f' \left(-\frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{3} + a \text{ soll gleich } 0 \text{ sein,}$$

$$\text{also } a = 1/3, \quad f(-1/3) = -1/27.$$

7.4. $f'(x) = 0$ führt zu $x^3 = -4$; $x = -1,59$.

$f''(x) = 0$ liefert

Wendepunkt für $x_w = 2$.

7.5. $f'(x) = 0$ führt zu $x = 0$ ($y = -1$), Minimum.

$$f''(x) = 0 \text{ führt zu } x = \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$f \left(+\frac{2}{3}\sqrt{3} \right) = -0,5$$

$$f \left(-\frac{2}{3}\sqrt{3} \right) = -0,5 \text{ aus Symmetriegründen.}$$

7.6. $s'(t) = 0$ führt zu $t = \pm 2$

$$s''(t_E) = \pm 1/16$$

$$s(t_E) = \pm \frac{1}{4}$$

$s''(t) = 0$ führt zu $t_{w1} = 0$ und $t^2 = 12$, also

$$t_{w2} = +3,46; t_{w3} = -3,46.$$

D

- 7.1. Das Bild der Funktion ist ständig steigend. Im Punkt $(0; -2)$ liegt ein Horizontalwendepunkt. Der Schnittpunkt mit der x -Achse hat die Koordinaten $(1,26; 0)$. Es handelt sich um das 2 Einheiten nach unten verschobene Bild der allgemeinen kubischen Normalparabel.
-
- 7.2. Es liegen zwei Polstellen $x_p = \pm 1$ vor, ferner zwei Nullstellen $x_N = \pm 3$. Die y -Achse wird vom Bild in $(0; 3)$ geschnitten. Dort liegt ein Minimum. Eine Asymptote ergibt sich durch $(x^2 - 9) : (3x^2 - 3) = \frac{1}{3} + \frac{-8}{(3x^2 - 3)}$
Asymptotengleichung: $y = \frac{1}{3}$ (Bild: siehe S. 97).
-
- 7.3. Die Forderung nach dem Horizontalwendepunkt verlangt $a = 1/3$. Dann befindet sich im Punkt $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{27}\right)$ ein Horizontalwendepunkt, was man auch an der Doppelösung der quadratischen Gleichung für vermutete Extremstellen erkennt. Extrema liegen nicht vor. Die Kurve verläuft durch den Ursprung.
-
- 7.4. Polstelle $x_p = 0$. Die Kurve nähert sich asymptotisch dem Bild der Funktion $y = x^2$ (Asymptotengleichung). Ein Minimum liegt im Punkt $(-1,59; 7,55)$. Der Wendepunkt liegt auf der x -Achse $(2; 0)$.
(Bild: siehe S. 97.)
-
- 7.5. Das Bild der Funktion hat als obere Begrenzungsgerade die Asymptote $y = 1$. Schnittpunkte mit der x -Achse liegen bei $x = \pm 2$, die y -Achse wird im Minimum $(0; -1)$ geschnitten. Wendestellen liegen bei $x = \pm 1,155$; $y_w = 0,5$. Die Kurve ist symmetrisch zur y -Achse (Bild: siehe S. 97).
-
- 7.6. Das Bild der Funktion ist zentrale symmetrisch zum Ursprung. Es steigt nicht über den Maximalwert $\frac{1}{4}$ und sinkt nicht unter das Minimum $(-2; -0,25)$. Ein Wendepunkt ist der Ursprung. Zwei weitere Wendepunkte existieren für $x = \pm 3,46$. Die Kurve nähert sich beidseitig der t -Achse (Bild auf S. 97).

7.7. Diskutieren Sie den Verlauf des Bildes der Funktion

$$f(x) = 0,75x^4 + x^3 - 3x^2 + 1,25.$$

7.8. Eine gebrochenrationale Funktion ist gegeben durch

$$y = f(x) = \frac{24x}{(x+3)^2}.$$

Untersuchen Sie den Verlauf des Bildes dieser Funktion.

*7.9. Untersuchen Sie die Eigenschaften der Funktion $y = f(x) = \frac{ax}{(bx+c)^2}$.
 $a, b, c \in P$;
 b und c nicht beide gleich 0, $a \neq 0$.

7.10. Gegeben ist die trigonometrische Funktion $y = f(x) = \sin x + \cos x$ im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$.

Untersuchen Sie ihre Eigenschaften.

7.11. Ein technisch-physikalischer Vorgang wird durch die Funktion ($t \geq 0$)

$$y = f(t) = e^{-0.1t} \cos t$$

beschrieben.

Untersuchen Sie die Eigenschaften des Verlaufs des Bildes dieser Funktion.

7.12. Untersuchen Sie die Eigenschaften der Funktion $y = f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{0.5} + x^{-0.5}$ für $x > 0$.

B

7.7. $f(0) = 1,25$ $f'(x) = 3x^3 + 3x^2 - 6x$
 $f''(x) = 9x^2 + 6x - 6$
 $f'''(x) = 18x + 6$

Lösungen von $f(x) = 0$: $x_1 = 1$ (durch Probieren),
ebenfalls $x_2 = 1$; $x_3 = -0,61$; $x_4 = -2,72$.

7.8. $f'(x) = 24 \frac{3-x}{(x+3)^3}$ $f''(x) = 48 \frac{x-6}{(x+3)^4}$
 $f'''(x) = 144 \frac{9-x}{(x+3)^5}$ $f(0) = 0$
Nullstelle $x_N = 0$
Pol bei $x = -3$

7.9. $f'(x) = a \frac{c-bx}{(c+bx)^3}$ $f''(x) = 2ab \frac{bx-2c}{(c+bx)^4}$
 $f'''(x) = 6ab^2 \frac{3c-bx}{(c+bx)^5}$ $f(0) = 0$
Nullstelle $x_N = 0$
Pol bei $x = -\frac{c}{b}$

7.10. $f'(x) = \cos x - \sin x$
 $f''(x) = -\sin x - \cos x$
 $f'''(x) = -\cos x + \sin x$
 $f(0) = 1$ $f(x) = 0 \Rightarrow \sin x + \cos x = 0$ (dividiert durch $\cos x$)
 $\tan x = -1 (\cos x \neq 0)$ (s. Abschn. 5.)

führt zu den Nullstellen $x_{N1} = 0,75\pi$ (135°) und $x_{N2} = 1,75\pi$ (315°)
im angegebenen Intervall.

7.11. $f'(t) = -e^{-0,1t}(0,1 \cos t + \sin t)$
 $f''(t) = e^{-0,1t}(-0,99 \cos t + 0,2 \sin t)$
 $f'''(t) = e^{-0,1t}(0,299 \cos t + 0,97 \sin t)$
 $f(t) = 0$ an allen Stellen, wo $\cos t = 0$
 $f(0) = 1$

7.12. $f'(x) = 0,5x^{-0,5} - 0,5x^{-1,5}$
 $f''(x) = -0,25x^{-1,5} + 0,75x^{-2,5}$
 $f'''(x) = 0,375x^{-2,5} - 1,875x^{-3,5}$
 $f(0)$ nicht definiert [$f(x)$ nur definiert für $x > 0$]
 $f(x) = 0$ nicht reell lösbar.

- 7.7. $f'(x) = 0 \Rightarrow x_{E1} = 0$ $x_{E2} = 1$ $x_{E3} = -2$
 $f(0) = 1,25$ $f(1) = 0$ $f(-2) = -6,75$
 Max., weil $f''(0) < 0$. Min., weil $f''(1) > 0$. Min., weil $f''(-2) > 0$.
 $f''(x) = 0 \Rightarrow x_{W1} = 0,55; x_{W2} = -1,22$
-

- 7.8. $f'(x) = 0 \Rightarrow x_E = 3; y_E = 2; f''(3) = -1/9$; Max.
 $f''(x) = 0 \Rightarrow x_W = 6; f(6) = 16/9$
 $f'(6) = -8/81$
-

- 7.9. $f'(x) = 0 \Rightarrow x_E = \frac{c}{b}; y_E = \frac{a}{4bc}$ Max., weil $f''\left(\frac{c}{b}\right) < 0$
 $f''(x) = 0 \Rightarrow x_W = \frac{2c}{b}; y_W = \frac{2a}{9bc}$
 $f'(x_W) = -\frac{a}{27c^2}$
-

- 7.10. $f'(x) = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x$ $x_{E1} = 0,25\pi (45^\circ)$
 $\Rightarrow \tan x = 1$ $x_{E2} = 1,25\pi (225^\circ)$
 $f''(x_{E1}) < 0$ Max. $y_{E1} = \sqrt{2}$
 $f''(x_{E2}) > 0$ Min. $y_{E2} = -\sqrt{2}$
 $f''(x) = 0 \Rightarrow \sin x = -\cos x \Rightarrow \tan x = -1$.

Die Nullstellen sind also gleichzeitig Wendestellen.

- 7.11. Der erste Faktor kann wegen $e^z \neq 0$ für endliche z nicht gleich Null werden, deshalb keine weiteren Nullstellen.

Extrema:

$$\begin{aligned} f'(t) = 0 &\quad 0,1 \cos t = -\sin t \\ &t = (174,29^\circ) \approx 3,04 \\ &\text{Minimum bei } t = 3,04 + 2k\pi \\ &\text{Maximum dagegen für } 6,18 + 2k\pi \end{aligned}$$

unter Berücksichtigung der Periodizität.

Aus $f''(t) = 0$ ergibt sich $0,99 \cos t = 0,2 \sin t$ mit Lösungen für $(78,6^\circ) 1,371 + k\pi$.

- 7.12. $f'(x) = 0$ führt zu $x = x\sqrt{x}$ $x_E = 1$
 $f''(1) = 0,5 > 0$ Minimum
 $f(1) = 2$

$f''(x) = 0$ führt zu $x = 3$

$$f(3) = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

-
- 7.7. Das Bild der Funktion $f(x)$ schneidet die y -Achse bei 1,25. Nullstellen liegen bei 1 (doppelt), $-0,61$ und $-2,72$. In der Doppelnullstelle liegt eine Extremstelle (Minimum). Ein Maximum liegt bei $x = 0$, ein Minimum bei $x = -2$. Wendepunkte existieren für $x = 0,55$ und $x = -1,22$ (Bild s. S. 97).
-
- 7.8. Die zugehörige Kurve besteht aus zwei Teilen, die durch den Pol bei $x = -3$ getrennt sind. Die Kurve geht durch den Ursprung, hat bei $x = 3$ ein Maximum und bei $x = 6$ einen Wendepunkt. Für x nach $\pm\infty$ nähert sich die Kurve der x -Achse (Bild s. S. 97).
-
- 7.9. Es liegen qualitativ dieselben Erscheinungen wie bei der Funktion Aufgabe 7.8. vor.
-
- 7.10. Es entsteht eine Überlagerung zweier sinusartiger Kurven. Schnittpunkt mit der y -Achse $(0; 1)$. Schnittpunkte mit der x -Achse bei $0,75\pi$ und $1,75\pi$, das sind gleichzeitig Wendepunkte. Extrema liegen bei $(0,25\pi; \sqrt{2})$ und $(1,25\pi; -\sqrt{2})$ (Bild s. S. 97).
-
- 7.11. Die cos-Kurve liegt innerhalb der durch das Exponentialgesetz gegebenen Begrenzung. Die Schnittpunkte mit der x -Achse sind die gleichen wie bei der cos-Funktion. Extrema liegen bei $3,04$ und $6,18 + 2k\pi$ (Bild s. S. 97).
-
- 7.12. Ein Schnitt mit der x -Achse liegt nicht vor. Die Kurve hat bei $x = 1, y = 2$ ein Minimum und an der Stelle $x = 3$ einen Wendepunkt (Bild s. S. 97).

8. Schnittprobleme – Methode der unbestimmten Koeffizienten

I Zu untersuchen sind die Verhältnisse beim Schnitt zweier Kurven miteinander. An diesen Stellen müssen die Ordinaten beider Kurven, die Funktionswerte, und damit die Wertepaare beider Funktionen übereinstimmen. $S = K_1 \cap K_2$.¹⁾ Zu diesem Zwecke wird gleichgesetzt: $f(x) = g(x)$. Das führt zu einer Gleichung, deren Lösung(en) die x -Koordinate(n) des Schnitts liefert.²⁾

Gilt außerdem $f'(x_S) = g'(x_S)$, so liegt eine Berührung vor, was man oft auch an der „Doppellösung“ der obigen Gleichung erkennen kann. [$f'(x_1) = g'(x_1)$ allein sagt nur etwas aus über die Parallelität der Tangenten.] Der Schnittwinkel der beiden Kurven ist definiert als Winkel zwischen den Tangenten an die beiden Kurven im Schnittpunkt. Er kann berechnet werden nach Bestimmung der Anstiege $f'(x_S)$ und $g'(x_S)$ nach der Formel:

$$\tan \varphi = \frac{f'(x_S) - g'(x_S)}{1 + f'(x_S) \cdot g'(x_S)}$$

II Oft ist in der Praxis zwar der Charakter (Typ) der Funktion oder Kurve bekannt, gesucht sind aber die Koeffizienten innerhalb der Kurvengleichung. Dazu sind nur die Koordinaten einiger Kurvenpunkte gegeben.

In diesem Falle setzt man die Funktionsgleichung allgemein mit unbestimmten Koeffizienten der Glieder an und findet für jeden Punkt, der gegeben ist, eine Gleichung. Alle diese Gleichungen bilden ein System, das nach den unbestimmten (unbekannten) Koeffizienten aufzulösen ist.³⁾

Musterbeispiel zur Schnittpunktuntersuchung:

A Gegeben sind die Funktionen

$$\begin{aligned}y &= f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 6x + 2 & x \in P \\y &= g(x) = 3(x + 1)^2 - 1 & x \in P\end{aligned}$$

Berechnen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte beider zugehöriger Kurven, und bestimmen Sie den Schnittwinkel.

B Aus $f(x) = g(x)$ ergibt sich $2x^3 = -3x^2$ mit den Lösungen $x_1 = x_2 = 0$; $f(0) = 2$; $x_3 = -1,5$; $f(-1,5) = -0,25$. Die Doppellösung $x_1 = x_2$ lässt eine Berührung vermuten.

C $f'(x) = 6x^2 + 12x + 6$; $g'(x) = 6x + 6$.

Es folgt $f'(0) = 6$; $g'(0) = 6$; $f'(-1,5) = 1,5$; $g'(-1,5) = -3$. Die Gleichung $f'(x) = g'(x)$ liefert $x_1 = 0$ und $x_4 = -1$.

¹⁾ Exakt bedeutet $S = K_1 \cap K_2$:

$\{(x_S; y_S)\} = \{(x; y) | y = f(x)\} \cap \{(x; y) | y = g(x)\}$

²⁾ Grundsätzlich werden die beiden Kurvengleichungen zu einem Gleichungssystem zusammengefaßt. Dieses Gleichungssystem muß dann gelöst werden. Hier wird das dabei am häufigsten verwendete Verfahren angeführt.

³⁾ In der Statistik gibt es übrigens auch Methoden, nach denen die ungefähren Koeffizienten ermittelt werden können, wenn mehr als genügend viele Punkte bzw. Wertepaare gegeben sind. Auf diese Methoden wird hier nicht eingegangen.

- D Die Schnittwinkel betragen 0° bei $x = 0$ – ohne Verwendung der Formel – (Berührung) und (nach der Formel) $127,9^\circ$ bei $x = -1,5$. Bei $x = -1$ laufen die Tangenten der Kurven parallel! Skizzieren Sie jetzt selbst die von beiden Kurven eingeschlossene „nierenförmige“ Fläche (vgl. das Bild auf S. 97 rechts unten).

Musterbeispiel für die Anwendung der Methode der unbestimmten Koeffizienten:

- A Eine Parabel (mit der Symmetriechse parallel zur y -Achse) verläuft durch die Punkte

$$P_1(-2; -1); P_2(2; 3) \text{ und } P_3(4; 2)$$

- B Ansatz einer quadratischen Funktion:

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$P_1 \quad 4A - 2B + C = -1$$

$$P_2 \quad 4A + 2B + C = 3$$

$$P_3 \quad 16A + 4B + C = 2.$$

- C Lösung dieses Gleichungssystems für A , B und C :

$$A = -0,25 \quad B = 1 \quad C = 2.$$

- D Die zugehörige Funktion lautet:

$$f(x) = -0,25x^2 + x + 2.$$

Die Parabel ist relativ flach, nach unten geöffnet, schneidet die y -Achse im Punkt $P_4(0; 2)$ und hat den Scheitelpunkt im Punkt P_2 .

Es liegen 2 Nullstellen der Funktion (zwei Schnittpunkte der Kurve mit der x -Achse) vor, die durch $f(x) = 0$, also durch $-0,25x^2 + x + 2 = 0$ zu finden sind: $P_{N1}(-1,464; 0)$ und $P_{N2}(5,464; 0)$.

-
- 8.1.** Die Bilder der Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$ schneiden sich im Intervall $[0; 1]$ genau zweimal. Untersuchen Sie die Schnittwinkel. Wo laufen die Tangenten beider Kurven parallel?
-
- 8.2.** Die durch die Gleichungen $x^2 + y^2 = 25$ und $(x - 2)^2 + y^2 = 65$ gegebenen Kreise sind bezüglich ihrer gegenseitigen Lage zu untersuchen.
-
- 8.3.** Bestimmen Sie die Winkel, unter denen sich die Kreise mit den Gleichungen $x^2 + y^2 = 100$ und $(x - 14)^2 + (y - 2)^2 = 100$ schneiden.
-
- 8.4.** Unter welchen Winkeln schneiden sich die Parabel mit der Gleichung $f(x) = 0,1x^2 - 2x + 1,5$ und die Gerade mit der Gleichung $g(x) = -x - 1$?
-
- 8.5.** Die Kurve einer Exponentialfunktion nach dem Gesetz $f(x) = e^{4x}$ gehe durch den Punkt mit den Koordinaten $P(4; 7,39)$. Untersuchen Sie den Tangentenanstieg in diesem Punkt.
-
- 8.6.** Gegeben ist eine Funktion durch die Gleichung
 $y = f(x) = ax^3 + cx + d$ (x, a, c, d reell).
- Das Bild der Funktion schneidet die y -Achse im Punkt $P_1(0; 4)$. Die Kurve hat in diesem Punkt P_1 den Anstieg $m_1 = -3$. Der Punkt $P_E(1; y_E)$ ist Extremum. Bestimmen Sie die Koeffizienten a, c und d .
-
- *8.7.** Gegeben sind Funktionen durch eine Gleichung der Form $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ (x, a, b, c reell) $c > 0$.
 Die erste Ableitung einer Funktion dieser Form lautet $y' = f'(x) = 6x + 2$. Die vom Bild der Funktion, der y -Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = 2$ sowie der x -Achse eingeschlossene Fläche hat den Flächeninhalt 16 FE. Wie lautet die Funktion?
-
- 8.8.** Gegeben sind zwei Geraden.
 Erste Gerade: läuft durch die Punkte $P_1(1; 1)$ und $P_2(10; 11)$.
 Zweite Gerade: läuft durch $P_3(4; 4)$ und hat den Anstieg $\tan \beta = 1,05$.
 Wo und unter welchem Winkel schneiden sie einander?

B

- 8.1. Man stellt zunächst die Schnittpunkte fest:

$$\begin{aligned}f(x) = g(x) \rightarrow x^2 &= \sqrt{x} \rightarrow x^4 = x \\x_1 = 0; \quad x_2 &= 1; \quad f(0) = 0; \quad f(1) = 1 \\f'(x) = 2x; \quad g'(x) &= 0,5x^{-0,5}\end{aligned}$$

- 8.2. Beide Kreisgleichungen werden gleichgesetzt oder in einem Gleichungssystem zusammengefaßt.

$$\begin{array}{rcl}x^2 + y^2 &=& 25 \\(x - 2)^2 + y^2 &=& 65 \\ \hline (x - 2)^2 - x^2 &=& 40\end{array}\quad \begin{array}{rcl}y^2 &=& 25 - x^2 \\y^2 &=& 65 - (x - 2)^2 \\ \hline 25 - x^2 &=& 65 - (x - 2)^2\end{array}$$

- 8.3. Schnittpunktbestimmung: $\frac{x^2 + y^2}{x^2 - 28x + 196 + y^2 - 4y + 4} = 100$

$y = -7x + 50$ wird in die erste Kreisgleichung (bequemer!) eingesetzt:

$$x^2 + 2500 - 700x + 49x^2 = 100 \Rightarrow x^2 - 14x = -48$$

- 8.4. Man bestimmt zunächst die x -Werte der Schnittpunkte

$$0,1x^2 - 2x + 1,5 = -x - 1 \Rightarrow x^2 - 10x = -25$$

$x_1 = x_2 = 5$ (Doppellösung, also kann Berührung vermutet werden).

- 8.5. Man setzt nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten an:

$$\begin{aligned}f(4) &= 7,39 \rightarrow 7,39 = e^{4A} \\ \rightarrow \ln 7,39 &= 4A = 2,0001 \Rightarrow A = 0,5\end{aligned}$$

- 8.6. Aus P_1 folgt sofort $d = 4$.

Man bildet $f'(x) = 3ax^2 + c$ $f''(x) = 6ax$
 $f'(0)$ soll gleich -3 sein, also: $c = -3$.

- 8.7. $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$f'(x) = 2ax + b = 6x + 2$$

Also $b = 2$ und $6 = 2a \Rightarrow a = 3$.

- 8.8. $g_1: y = m_1x + n_1 \quad P_1: 1 = m_1 + n_1$

$$P_2: 11 = 10m_1 + n_1$$

$$n_1 = 0,1$$

$$m_1 = 0,9$$

$$g_2: m_2 = 1,05, \text{ also}$$

$$y = 1,05x + n_2$$

$$P_3: 4 = 4,20 + n_2$$

$$g_1: y = 0,9x + 0,1 \quad g_2: y = 1,05x - 0,20$$

8.1. $f'(0) = 0 \quad f'(1) = 2$

$g'(0)$ nicht definiert, Tangente ist y -Achse.

$$g'(1) = 0,5; \quad f'(x) = g'(x) \Rightarrow 2x = 0,5x^{-0,5}; \quad x \neq 0$$

$$4x^2 = \frac{1}{4x} \Rightarrow x^3 = \frac{1}{16} \Rightarrow x = 0,3959$$

8.2. $x = -9$ (Parallele zur y -Achse). Daraus kann noch nicht geschlossen werden, daß die Kreise einander schneiden. Vielmehr ist $y^2 = 25 - 81 = -56$ ohne Lösungen.

8.3. $x_1 = 6; x_2 = 8$. Bestimmung der y -Werte erfolgt zweckmäßigerweise mittels der Schnittgeradengleichung:

$$y_1 = 8; \quad y = \sqrt{100 - x^2}; \quad y' = -\frac{x}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$y_2 = -6; \quad y = 2 + \sqrt{-x^2 + 28x - 96}; \quad y' = \frac{-x + 14}{\sqrt{-x^2 + 28x - 96}}$$

8.4. $f'(x) = 0,2x - 2 \quad f'(5) = -1$
 $g'(x) = -1 \quad g'(5) = -1$

Im gemeinsamen Punkt existiert eine gemeinsame Tangente.

8.5. $f(x) = e^{0,5x} \quad f'(x) = 0,5e^{0,5x}$ (Kettenregel beachten!)

8.6. $f(x) = ax^3 - 3x + 4$
 $f'(x) = 3ax^2 - 3$ gleich Null gesetzt:

$$x^2 = \frac{1}{a}.$$

Das liefert nur dann eine Lösung $x_1 = 1$, wenn $a = 1$.

8.7. $f(x) = 3x^2 + 2x + c$. (Wegen $c > 0$ liegt im Intervall $[0; 2]$ keine Nullstelle!)

$$\int_0^2 (3x^2 + 2x + c) dx = [x^3 + x^2 + cx]_0^2 \\ = 8 + 4 + 2c = 16 \\ c = 2$$

8.8. Schnittpunktbestimmung

$$y = 0,9x + 0,1$$

$$y = 1,05x - 0,2$$

$$x_s = 2; \quad y_s = 1,9; \quad m_1 = 0,9; \quad m_2 = 1,05.$$

D

- 8.1. Der Schnittwinkel im Punkt $O(0; 0)$ ist 90° . (Die Tangentenrichtungen sind zugrunde zu

$$\text{legen!}) \text{ Im Punkte } P(1; 1) \text{ ergibt sich } \tan \varphi = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = 0,75; \\ = 36,87^\circ.$$

An der Stelle $x = 0,3959$ laufen die Tangenten parallel.

(Überprüfen Sie das selbst. Die Kurvenpunkte an dieser Stelle stimmen aber nicht überein.)

- 8.2. Die Kreise schneiden einander **nicht!** Der eine Kreis liegt vollständig im anderen.
-

- 8.3. Die Tangentenanstiege im Punkt $(6; 8)$ werden untersucht:

1. Kreis: $\tan \varphi_1 = -\frac{6}{8} = -0,75; \quad \varphi_1 = -36,87^\circ$ (fallend)

2. Kreis: $\tan \varphi_2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}; \quad \varphi_2 = 53,12^\circ$.

Die Tangenten stehen senkrecht aufeinander. Die Kreise schneiden einander in den Punkten $(6; 8)$ und $(8; -6)$ orthogonal.

- 8.4. Die Gerade ist Tangente an das Bild von $f(x)$,
der Berührungs punkt ist $B(5; -6)$. Die Tangente fällt unter 45° .
-

- 8.5. Die Exponentialfunktion heißt $f(x) = e^{0,5x}$.

Der Tangentenanstieg im Punkt P ist $f'(4) = \tan \varphi = 0,5 e^2 = 3,69; \varphi \approx 74,9^\circ$.

- 8.6. Die Funktion lautet $f(x) = x^3 - 3x + 4$.

Die beiden Extremstellen sind $x_{E1} = 1; x_{E2} = -1$;
 $f(1) = 2$ Min.; $f(-1) = 6$ Max.

- 8.7. Die Funktion lautet $f(x) = 3x^2 + 2x + 2$.

Das Bild der Funktion ist eine Parabel. Der Scheitel (Minimum) liegt im Punkt

$$S\left(-\frac{1}{3}; 1\frac{2}{3}\right).$$

- 8.8. Der Schnittwinkel im Punkt $S(2; 1,9)$ wird bestimmt:

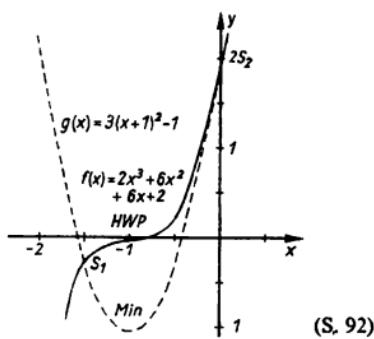
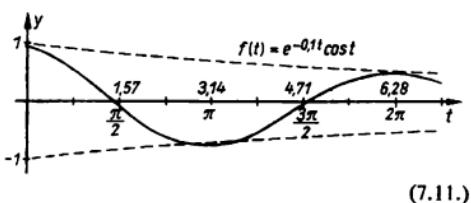
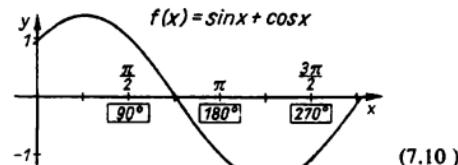
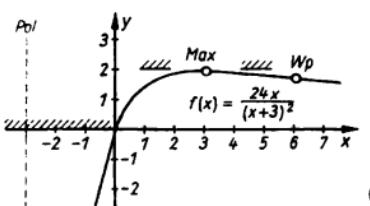
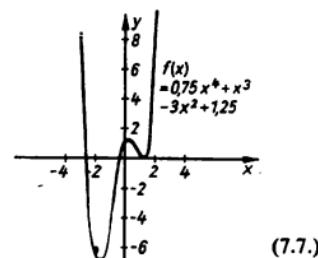
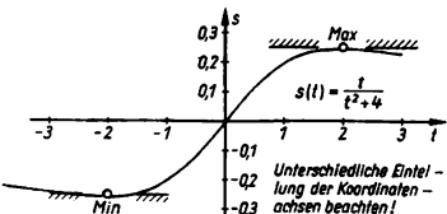
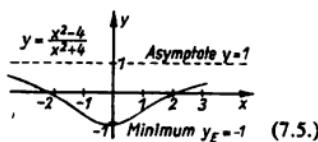
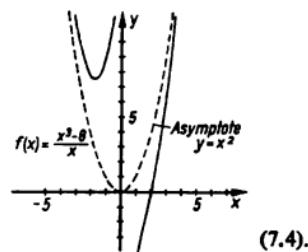
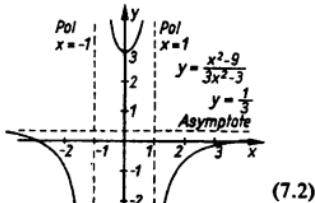
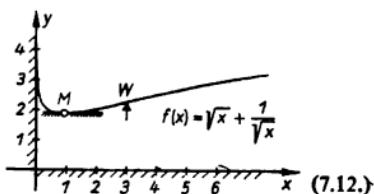
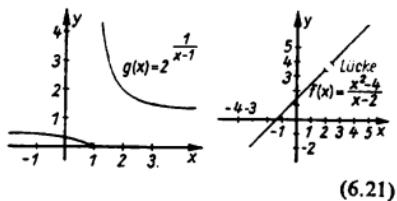
$$\tan \varphi = \frac{1,05 - 0,9}{1 + 0,945} = \frac{0,15}{1,945} = 0,0773;$$

$\varphi = 4,42^\circ$. (Beachten Sie: Bei einer zeichnerischen Lösung ergeben sich wegen des annähernd gleichen Anstiegs Schwierigkeiten beim Ablesen des Schnittpunkts.)

Hinweis zu Seite 97:

Versuchen Sie, sich typische Bilder von Funktionstypen einzuprägen!
(Beachten Sie auch die Tafeln 1 bis 3 auf S. 21 bis 22!)

Übersicht über die Bilder einiger Funktionen



9. Extremwertaufgaben

In der Technik, Ökonomie und vielen anderen Gebieten spielen Problemstellungen eine große Rolle, bei denen Verhältnisse unter *optimalen* Bedingungen erörtert werden müssen. Das Ziel dieser Erörterungen besteht darin, gewisse Größen entweder zu **minimalisieren** (Kosten, Zeiten, Kraftaufwand) oder zu **maximalisieren** (Gewinne, Herstellungsmengen). Handelt es sich dabei um **lineare Funktionen** und mehrere Variablen, so wird die *Linearoptimierung* eingesetzt. Bei **Extremwertaufgaben** lässt sich das Problem auf die Abhängigkeit von nur einer Variablen zurückführen.

Extremwertaufgaben bereiten Anfängern vor allem Schwierigkeiten wegen des „Ansatzes“ der Extremalfunktion, weniger wegen des anschließend notwendigen (meist recht einfachen und formalen) Differenzierens. Die Verschiedenartigkeit der Sachbezüge und die Unterschiedlichkeit der verwendbaren Funktionen und gegebenen Nebenbedingungen lassen ein „allgemeingültiges Rezept“ nicht zu. Es ist zunächst notwendig, sich im „Übersetzen“ verbaler Aussagen in die mathematische Symbolik zu üben.

Des weiteren sollte man sich dann bezüglich

- der Aufstellung der zu extremierenden Größe (Wonach ist gefragt? Was soll extrem werden?)
- der Angabe der Hilfsbeziehungen oder Nebenbedingungen aus der Aufgabenstellung und
- der Formulierung der zu extremierenden Funktion in Abhängigkeit von nur einer Variablen an ein systematisches zielgerichtetes Vorgehen halten.

Die folgende algorithmische Beschreibung gibt dazu Anhaltspunkte.

Beispiel zum Lösen einer Extremwertaufgabe:

- A Aufgabenstellung:** Ein Baubetrieb benötigt pro Jahr 1200 Wandplatten für die Blockbauweise, die je Stück 30,- Mark kosten. Die Lieferungen sollen gleichmäßig in n Teilen zu je x Stück erfolgen, wobei jede Lieferung 80,- Mark Transportkosten verursacht. Für die Lagerung der bereitzustellenden Exemplare entstehen jährliche Kosten. Diese betragen $k_3 = 2,4 \cdot x$ Mark.

Wieviel Lieferungen sind zu planen, damit möglichst geringe Gesamtkosten entstehen?

- B Extremalfunktion (Skizze nicht erforderlich) – Zielfunktion**

$$K = k_1 + k_2 + k_3 = 1200 \cdot 30 + 80 \cdot n + 2,4 \cdot x \rightarrow \text{Min.}!$$

$$\text{Hilfsbeziehung } n \cdot x = 1200$$

$$x = 1200n^{-1}$$

Extremalfunktion in Abhängigkeit von nur einer Variablen

$$K = K(n) = 36000 + 80n + 2,4 \cdot 1200n^{-1} \rightarrow \text{Min.}!$$

- C Differentiation**

$$K'(n) = 80 - 2880n^{-2}$$

$$K''(n) = +5760n^{-3} \quad \text{Da } n \text{ auf alle Fälle } > 0, \text{ ist für alle } n \ K''(n) > 0.$$

„Schlüsselgleichung“

$$K'(n) = 0$$

$$80 - 2880n^{-2} = 0 \Rightarrow 80 = \frac{2880}{n^2}$$

$$n^2 = 36$$

$n = 6$ führt zum Minimum!

$$K''(6) = 5760 : 216 = 26,67 > 0^1)$$

- D Lösung:** Für $n = 6$ bzw. $x = 200$ werden die Gesamtkosten minimal. Die minimalen Gesamtkosten betragen (in Mark):

$$K = 36000 + 480 + 480 = 36960$$

Zum Vergleich seien angeführt die Kosten bei

$$n = 1: K = 36000 + 80 + 2880 = 38960$$

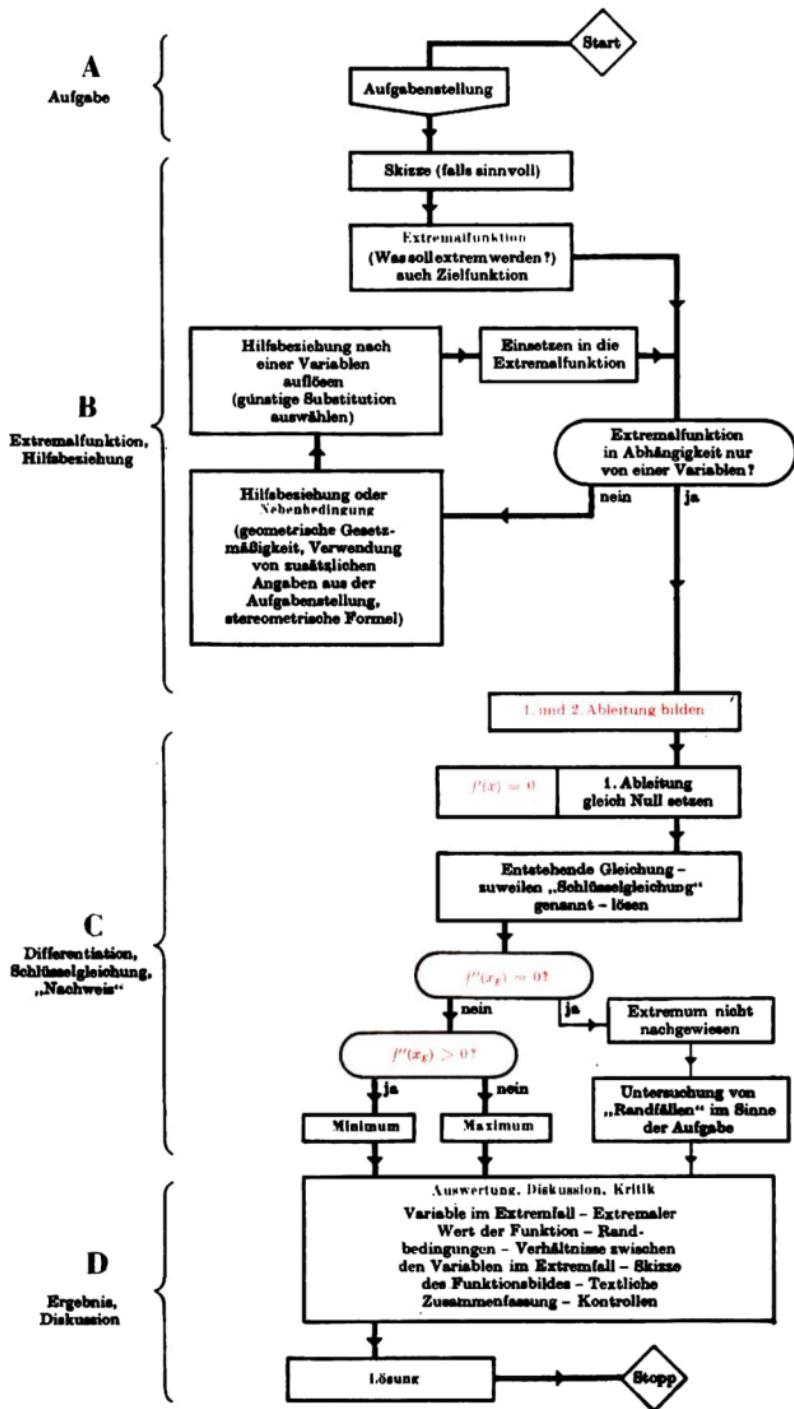
$$n = 5: K = 36000 + 400 + 576 = 36976$$

$$n = 7: K = 36000 + 560 + 411,4 = 36971,4$$

$$n = 12: K = 36000 + 960 + 240 = 37200$$

Man erkennt, daß eine Abweichung in der Wahl des n nach oben (mehr Lieferungen!) nicht so stark kostenerhöhend wirkt wie die Verringerung der Anzahl der Lieferungen. Die Einsparung gegenüber dem Fall einer einzigen Lieferung pro Jahr beträgt etwa 5,1%.

¹⁾ Hier erübrigts sich die Berechnung von $K''(6)$, da weiter oben schon für alle nichtnegativen n die zweite Ableitung als positiv erkannt wurde. Die Berechnung der zweiten Ableitung für die Extremstelle muß jedoch erfolgen, wenn eine allgemeine Aussage obiger Art nicht möglich ist.



-
- 9.1. Zwei rechteckige Schornsteinzüge sollen nebeneinander hochgezogen werden, wobei die Trennwand und die Seitenwände eine Dicke von einheitlich 12 cm bekommen sollen. Der Innenquerschnitt soll je 360 cm^2 betragen. Welche Maße gibt man dem Schornstein, dessen Höhe unberücksichtigt bleiben soll, wenn der Materialverbrauch ein Minimum werden soll?
-
- 9.2. Eine nahezu geradlinige Wasserstraße führt von *A* nach dem Hafen *H*. Ein Ort *C* liegt im rechten Winkel zu *AH* seitlich von *A*. Die Entferungen \overline{AH} sind = 80 km, $\overline{AC} = 40 \text{ km}$. Der Transport von Frachten auf dem Landwege ist 5mal so teuer wie auf dem Wasserwege. Wo wird man die von *C* nach *H* zu transportierenden Waren auf Frachtkähne verladen, damit die gesamten Transportkosten minimal werden?
-
- 9.3. Zwei Autobahnen NS und OW schneiden sich in *K* rechtwinklig. Ein Pkw *P* befindet sich zur Zeit 60 km vor *K* und fährt mit einer Geschwindigkeit von 80 km h^{-1} in nördlicher Richtung, ein Motorradfahrer *M* fährt mit 50 km h^{-1} in westlicher Richtung und befindet sich zur Zeit 40 km östlich von *K*. Zu welchem Zeitpunkt ist die Entfernung (Luftlinie) zwischen den beiden Fahrzeugen am geringsten?
-
- 9.4. Über einem Arbeitstisch (rund, Radius 50 cm) soll eine Lampe mit der Lichtstärke *I* in einer solchen Höhe angebracht werden, daß die Arbeitsplätze am Rande des Tisches bestmögliche Beleuchtung erhalten.
(Die Beleuchtungsstärke *E* ist definiert als $E = I \cdot e^{-2} \cdot \cos \beta$, wobei *e* die Entfernung der Lampe vom Tischrand und β der halbe Öffnungswinkel des Strahlenbündels bis zum Tischrand sind.)
-
- 9.5. Wann ist die Fläche eines Kreissektors bei gegebenem Umfang am größten?

B

9.1. Extremalfunktion:

$$A = ab - 2 \cdot 360 \rightarrow \text{Min.}$$

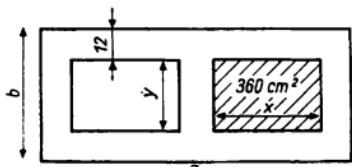
$$A = (2x + 36)(y + 24) - 720$$

$$\text{Hilfsbeziehung: } x \cdot y = 360$$

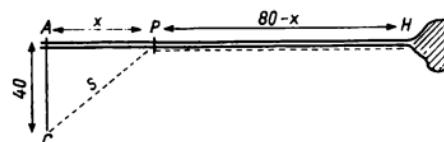
$$y = 360x^{-1} (\text{fast gleichwertig mit } x = 360y^{-1})$$

$$A = (2x + 36) \left(\frac{360}{x} + 24 \right) - 720 = \frac{12960}{x} + 48x + 864 \rightarrow \text{Min.}$$

$$x > 0; y > 0.$$



9.2.



Kosten f. 1 km Wasserweg: r M.

Kosten f. 1 km Landweg: $5r$ M.

Extremalfunktion:

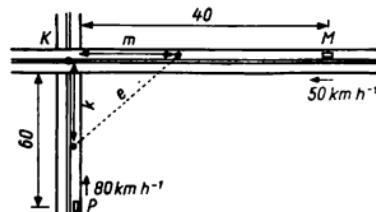
$$K = r(80 - x) + 5rs \rightarrow \text{Min.}$$

$$\text{Hilfsbeziehung: } x^2 + 40^2 = s^2 \text{ (PYTHAGORAS)}$$

$$s = \sqrt{x^2 + 1600}, \text{ also } K = r(80 - x) + 5r\sqrt{x^2 + 1600}$$

$$r \text{ const.; } x > 0$$

9.3.



Extremalfunktion: (Man wählt zweckmäßigerweise $E = e^2$ statt e ; E hat an der gleichen Stelle ein Minimum.)

$$E = m^2 + k^2 \text{ nach PYTHAGORAS}$$

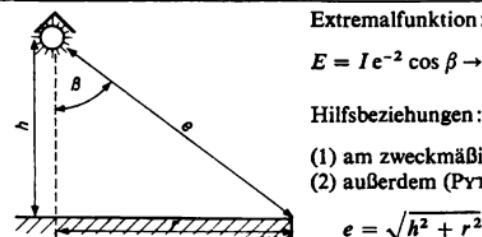
$$\text{Hilfsbeziehungen: } m = 40 - 50t,$$

$$k = 60 - 80t.$$

$$E = (40 - 50t)^2 + (60 - 80t)^2 \\ = 5200 - 13600t + 8900t^2.$$

(Schneiden sich die Bahnen nicht rechtwinklig, müsste der Cosinussatz verwendet werden!)

9.4.



Extremalfunktion:

$$E = Ie^{-2} \cos \beta \rightarrow \text{Max.}; I \text{ const.}$$

Hilfsbeziehungen:

$$(1) \text{ am zweckmäßigsten } \cos \beta = h : e$$

$$(2) \text{ außerdem (PYTHAGORAS)}$$

$$e = \sqrt{h^2 + r^2}$$

$$E = \frac{I \cdot h}{(h^2 + r^2)^{1.5}} \rightarrow \text{Max.}$$

$$r > 0; h > 0.$$

9.5. Extremalfunktion: $A = 0,5br$ (b ist Bogen des Sektors)

(nach Formelsammlung)

$$\text{Hilfsbeziehung: } u = 2r + b$$

$$b = u - 2r$$

$$A = 0,5r(u - 2r) = 0,5ur - r^2 \rightarrow \text{Max.}$$

$$u \text{ const.; } r > 0.$$

$$9.1. \quad A(x) = 12960x^{-1} + 48x + 864$$

$$A'(x) = -12960x^{-2} + 48$$

$$A''(x) = 25920x^{-3} > 0 \text{ (immer Min. f\"ur } x > 0)$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow 48x^2 = 12960 \Rightarrow x^2 = 270$$

$$x_{\text{ex}} = 3\sqrt{30} \approx 16,4; \quad y_{\text{ex}} = 360 / 3\sqrt{30} = 4\sqrt{30} \approx 21,9.$$

Die L\"osung vereinfacht sich wesentlich, wenn man die Wanddicke vernachl\"assigt. Das kann jedoch aus logischen Gr\"unden nicht grunds\"atzlich empfohlen werden.

$$9.2. \quad K(x) = 80r - xr + 5r\sqrt{x^2 + 1600}$$

$$K'(x) = -r + \frac{5r \cdot 2x}{2\sqrt{x^2 + 1600}} = -r + 5rx(x^2 + 1600)^{-0,5}$$

$$K''(x) = \frac{5r \cdot 1600}{(x^2 + 1600)^{1,5}} > 0 \quad \text{immer Min.}$$

$$K'(x) = 0 \Rightarrow r = \frac{5rx}{\sqrt{x^2 + 1600}}$$

$$5x = \sqrt{x^2 + 1600}; \quad 25x^2 = x^2 + 1600;$$

$$x^2 = 66,7; \quad x_{\text{ex}} = +8,2 \quad (\text{Das Minuszeichen entstand durch Quadrieren und entf\"allt.})$$

$$9.3. \quad E(t) = 5200 - 13600t + 8900t^2$$

$$E'(t) = -13600 + 17800t$$

$$E''(t) = 17800 > 0 \quad \text{immer Minimum}$$

$$E'(t) = 0 \Rightarrow 17800t = 13600 \Rightarrow t_{\text{ex}} = 0,764$$

$$m_{\text{ex}} = 40 - 38,2 = 1,8$$

$$k_{\text{ex}} = 60 - 61,1 = -1,1$$

$$E_{\text{ex}} = e^2 = 3,24 + 1,21 = 4,45; \quad e_{\text{ex}} \approx 2,1.$$

$$9.4. \quad E(h) = Ih(h^2 + r^2)^{-1,5}$$

$$E'(h) = I(r^2 - 2h^2)(h^2 + r^2)^{-2,5}$$

$$E''(h) = 3Ih(2h^2 - 3r^2)(h^2 + r^2)^{-3,5}$$

$$E'(h) = 0 \Rightarrow r^2 = 2h^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2}r = 0,7071r$$

$$E''(h_{\text{ex}}) = E''(0,7071r) = \frac{I \cdot 1,5 \sqrt{2}r(-2r^2)}{(1,5r^2)^{3,5}} < 0; \quad \text{also Maximum.}$$

$$9.5. \quad A(r) = 0,5ru - r^2$$

$$A'(r) = 0,5u - 2r$$

$$A''(r) = -2 < 0 \quad \text{immer Max.}$$

$$A(r) = 0 \Rightarrow 0,5u = 2r;$$

$$r_{\text{ex}} = 0,25u; \quad b_{\text{ex}} = 0,5u.$$

D

- 9.1. Die Innenmaße des Schornsteinschachtes verhalten sich bei minimalem Materialverbrauch wie $4:3$ und betragen $y = 21,9$ cm und $x = 16,4$ cm. Die Außenmaße $a = 68,8$ cm und $b = 45,9$ cm verhalten sich dann wie $3:2$.

Die auszumerauernde Querschnittsfläche beträgt $A_{\min} = 2438 \text{ cm}^2$ und ist damit etwa 3,5mal so groß wie die beiden Öffnungen zusammen.

Die Maße des Schornsteins entsprechen etwa den gängigen Verhältnissen in der Praxis, auf durch Mauersteingröße bedingte Gegebenheiten wurde hier keine Rücksicht genommen.

-
- 9.2. Um geringste Transportkosten zu erreichen, ist der Umschlagplatz $8,2$ km von A entfernt einzurichten.

Übersicht über einige interessante Fälle:

x	Umschlag	Wasserweg	Landweg	Kosten (Wasser)	(Land)	gesamt
80	in H	0	89,4	0	447 r	447 r
8,2	in P	71,8	40,8	71,8 r	204 r	275,8 r
0	in A	80	40	80 r	200 r	280 r

Geringfügige Veränderungen der Lage von P spielen keine wesentliche Rolle. Umschlagskosten selbst blieben unberücksichtigt.

-
- 9.3. Die Fahrzeuge haben dann die minimale Entfernung $2,1$ km voneinander, wenn nach $0,764$ Stunden (d. h. nach $45,8$ Min.) sich der Motorradfahrer $1,8$ km vor, der Autofahrer dagegen $1,1$ km hinter (!) der Kreuzung befindet (entgegen der Skizze!).

(Die Aufgabe würde wesentlich erschwert, wenn die Entfernung e selbst minimiert würde. Das erforderte die Differentiation von Wurzeln.)

Ähnliche Aufgabenstellungen können zum Beispiel auch bei der Auswertung scheinbarer Bahnen von Himmelskörpern auf astrophysikalischen Platten auftreten.

-
- 9.4. Die Beleuchtung ist maximal mit

$$E = \frac{1\sqrt{2}r \cdot 2\sqrt{2}}{2r^3 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{2I\sqrt{3}}{9r^2}, \quad \text{wenn } h:r = \sqrt{2}:2 \text{ gilt.}$$

Für $r = 50$ cm ergibt sich $h \approx 35$ cm.

Die Gesetzmäßigkeit benutzt man auch in großen Arbeitsräumen (Schulen) zur guten Ausleuchtung aller Plätze.

Überprüfen Sie das an Ihrem Klassenzimmer. Beachten Sie hierbei bei mehreren Lampen die Beleuchtung der Plätze in der Mitte des Raumes!

-
- 9.5. Die Fläche des Kreissektors ist am größten, wenn der Bogen gleich dem doppelten Radius ist.

Dann ist der Öffnungswinkel (Scheitelwinkel) $114,6^\circ$ (Bogenmaß: 2)

Die Maximalfläche ist $A_{\max} = \frac{1}{16} \mu^2$.

Die Berechnung unter Einbeziehung des Bogenmaßes führt natürlich zum gleichen Ergebnis, ist aber wesentlich komplizierter.

-
- 9.6. Untersuchen Sie, um welchen maximalen Betrag sich eine reelle Zahl x , für die $|x| < 1$ gilt, von ihrer 3. Potenz unterscheiden kann.
-
- 9.7. Ein Wasserbehälter hat die Form eines Zylinders von 2 m Höhe und einem unten ange setzten Kegel von 6 m Mantellinie. Wie wählt man die Maße des Behälters, damit das Volumen (Fassungsvermögen) möglichst groß wird?
-
- 9.8. Ein ovaler Sportplatz soll eine Laufbahnlänge von 450 m bekommen. Die Breite der Lauf bahn bleibe unberücksichtigt. Im Innern liege ein Rechteck für ein Fußballfeld. Wie wählt man die Maße dieses Feldes, damit es maximale Fläche bekommt?
-
- 9.9. Ein gerade gewachsener Baumstamm habe einen Durchmesser von 50 cm. (Die Abnahme der Stammdicke sei so minimal, daß sie vernachlässigt werden kann.) Aus dem Stamm soll ein Balken maximaler Tragfähigkeit geschnitten werden, dessen Querschnitt recht eckig ist.
Die Tragfähigkeit eines Balkens ist durch das Gesetz $T = ca^2b$ bestimmt, wobei b die Breite, a die Höhe des Balkens und c eine Materialkonstante ist; $c > 0$.
-
- 9.10. Zum Bau einer Kiste mit Eisenkanten stehen für sämtliche zwölf Kanten zusammen 3 m Winkeleisen zur Verfügung. Die eine Grundkante der Kiste muß aus technischen Gründen dreimal so groß wie die andere sein. Wie wählt man die Kanten, damit die Kiste maximales Fassungsvermögen bekommt?

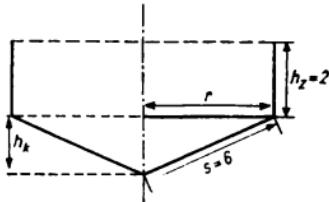
B

9.6. $D(x) = \begin{cases} D_1(x) = x - x^3 & \text{für } x \in [0; 1] \\ D_2(x) = x^3 - x & \text{für } x \in (-1; 0) \end{cases}$

9.7. Extremalfunktion:

$$V = \pi r^2 h_Z + \frac{1}{3} \pi r^2 h_K$$

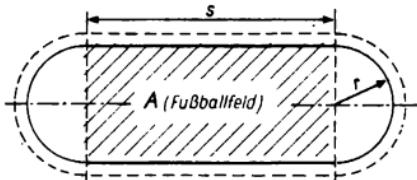
$$= \pi r^2 \left(2 + \frac{1}{3} h_K \right) \rightarrow \text{Max.}$$



Hilfsbeziehung:

$$s^2 = r^2 + h_K^2 \quad (1) \quad h_K = \sqrt{s^2 - r^2} \text{ unzweckmäßig; (2)} \quad r^2 = s^2 - h_K^2$$

$$V = 2\pi(36 - h_K^2) + \frac{1}{3} h_K \pi (36 - h_K^2) \rightarrow \text{Max.}; \quad h_K, r > 0.$$



9.8. Extremalfunktion:

$$A = 2rs \rightarrow \text{Max.}$$

Hilfsbeziehung:

$$2\pi r + 2s = u = 450; \quad 2s = 450 - 2\pi r \text{ vorteilhafter als: } r = \frac{225}{\pi} - \frac{s}{\pi}$$

führt zu $A = 450r - 2\pi r^2 \rightarrow \text{Max.}; \quad s \geq 0; r \geq 0.$

9.9. Extremalfunktion: $T = ca^2b \rightarrow \text{Max.}$

Hilfsbeziehung: (PYTHAGORAS)

$$a^2 = d^2 - b^2 \text{ (vorteilhafter als: } b = \sqrt{d^2 - a^2})$$

$$T = cb(d^2 - b^2) \rightarrow \text{Max.}; \quad a > 0; b > 0; c > 0.$$

9.10. Extremalfunktion: $V = abc \rightarrow \text{Max.}$

1. Hilfsbeziehung: $c = 3b$

2. Hilfsbeziehung: $4(a + b + c) = 4(a + 4b) = 3,00$

am vorteilhaftesten aufgelöst zu:

$$a = 0,75 - 4b.$$

$$V = a \cdot 3b^2 = 2,25b^2 - 12b^3 \rightarrow \text{Max.}; \quad a; b; c > 0.$$

9.6. $D_1'(x) = 1 - 3x^2$ $D_2'(x) = 3x^2 - 1$
 $D_1''(x) = -6x < 0$ in $[0; 1)$ $D_2''(x) = 6x < 0$ in $(-1; 0]$
 immer Max.
 $D_1'(x) = 0$ $D_2'(x) = 0$
 $\Rightarrow 1 - 3x^2 = 0$. $\Rightarrow 3x^2 - 1 = 0.$

$$x = \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0,577 \quad x = -\frac{1}{3}\sqrt{3} = -0,577$$

$$D_1(0,577) = D_2(-0,577) = \frac{2}{9}\sqrt{3} = 0,385.$$

9.7. $V(h_K) = \pi \left(72 + 12h_K + 2h_K^2 - \frac{1}{3}h_K^3 \right)$
 $V'(h_K) = \pi(12 - 4h_K - h_K^2)$
 $V''(h_K) = \pi(-4 - 2h_K) < 0$; maximal immer für $h_K > 0$.
 $V'(h_K) = 0 \Rightarrow h_K^2 + 4h_K = 12$
 $h_K = +2 (h_K = -6 \text{ scheidet aus}).$

9.8. $A(r) = 450r - 2\pi r^2$
 $A'(r) = 450 - 4\pi r$
 $A''(r) = -4\pi < 0$ immer Max.
 $A'(r) = 0 \quad 450 = 4\pi r$
 $2r_{\text{ex}} = \frac{225}{\pi} = 71,6$
 $s_{\text{ex}} = 112,5.$

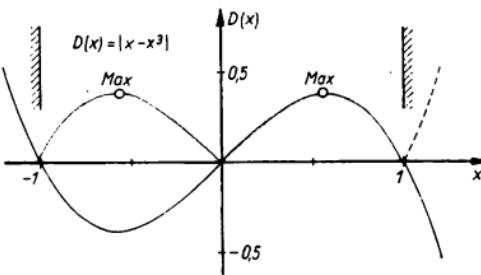
9.9. $T(b) = cd^2b - cb^3$
 $T'(b) = cd^2 - 3cb^2$
 $T''(b) = -6cb < 0$ immer Max. für $b, c > 0$
 $T'(b) = 0 \Rightarrow d^2 = 3b^2$

$$b_{\text{max}} = \frac{d\sqrt{3}}{3} \quad (\text{hier: } 28,9)$$

$$a_{\text{max}} = \frac{d\sqrt{6}}{3} \quad (\text{hier: } 40,8)$$

9.10. $V(b) = 2,25b^2 - 12b^3$
 $V'(b) = 4,5b - 36b^2$
 $V''(b) = 4,5 - 72b$
 $V'(b) = 0 \Rightarrow 4,5b = 36b^2; \quad b \neq 0$
 $b_{\text{ex}} = 0,125; \quad V''(0,125) = 4,5 - 9 = -4,5 < 0;$
 also Max.
 $c = 0,375; \quad a = 0,75 - 0,5 = 0,25.$

D

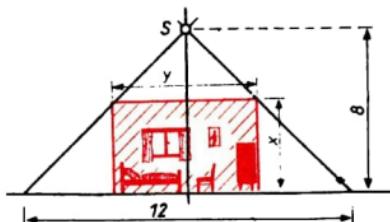
- 9.6.** Es handelt sich um den **absolut genommenen Unterschied** zwischen einer Zahl und ihrer dritten Potenz.
 Dieser ist an $x = \pm 0,577$ mit 0,385 maximal im Bereich $(-1; 1)$, für $|x| > 1$ werden dagegen durchaus höhere Werte erreicht. Die Differenz $D^* = x - x^3$ wäre nur bei $x = +0,577$ gegenüber der Umgebung maximal, dagegen läge bei $x = -0,577$ ein lokales Minimum.
- 
- 9.7.** Das maximale Fassungsvermögen liegt bei $h_K = 2$ vor.¹⁾ Es folgt $r = 4\sqrt{2} = 5,657$.
 Das Maximalvolumen beträgt
- $$V_{\max} = \pi \left(88 - 2 \frac{2}{3} \right) = 85 \frac{1}{3} \pi \approx 268.$$
- Das Verhältnis $r : h_K$ beträgt hier zufällig $2\sqrt{2} : 1$. Über den Materialverbrauch wurden keine Forderungen gestellt. Er wächst mit zunehmendem r linear an gemäß $M = 10\pi r$ bis zum Höchstwert bei $r = 6$.
- 9.8.** Es ergeben sich für die maximale Fußballfläche die Abmessungen 71,6 m mal 112,5 m, was innerhalb der verbindlichen Maße (45 ... 90 m mal 90 ... 120 m, gebräuchlich 70 m mal 105 m) liegt.
 Die Fläche (maximal) des Fußballfeldes beträgt etwa 8060 m^2 . Das Verhältnis Länge zu Breite des Fußballfeldes ergibt sich bei unbestimmter Bahnlänge u im Maximalfall zu $\pi : 2$. Wäre die Forderung nach maximaler Fläche des Ovals erhoben worden, ergäbe sich ein Kreis mit $s = 0$.
- 9.9.** Es kommt bei der Auswahl des Balkenquerschnitts mehr auf die Höhe als auf die Breite an.
 Im Falle extremer Tragfähigkeit ist $a : b = \sqrt{2} : 1$. Die maximale Tragfähigkeit hängt noch von der Konstanten c ab. Sie ist
- $$T_{\max} = \frac{2}{9} \sqrt{3} cd^3.$$
- Maximale Querschnittsfläche ergäbe sich hingegen für einen quadratischen Querschnitt.
- 9.10.** Die Maße der Kiste betragen bei maximalem Volumen 0,125 m; 0,25 m; 0,375 m. Die Kantenlängen stehen also im Verhältnis 1 : 2 : 3.
 Das Volumen beträgt $V_{\max} = \frac{3}{256} \text{ m}^3$ (d. h. etwas weniger als 12 l). Die Materialien für die Oberfläche der Kiste (Holz o. ä.) blieben bei dieser Aufgabe unberücksichtigt.

¹⁾ Bei dieser Aufgabe ergibt sich „zufällig“ $h_K = h_Z$ für den extremen Fall!

-
- 9.11. Ein auszubauendes Dachgeschoß hat als Querschnitt ein gleichschenkliges Dreieck von $h = 8 \text{ m}$ Höhe und $s = 12 \text{ m}$ Grundlinie. Der Querschnitt der auszubauenden Räumlichkeiten soll ein Rechteck mit maximaler Querschnittsfläche sein. Welche Maße haben die Dachgeschoßräume dann?
-
- 9.12. Zwei Betriebe *A* und *B* befinden sich 4 km und 11 km von einer Hochspannungsleitung (nach der gleichen Seite hin) entfernt. Die Lote von den Betrieben auf die Hochspannungsleitung sind 20 km voneinander entfernt. Wo baut man für beide Betriebe die gemeinsame Transformatorenstation, damit aus kostentechnischen Gründen die gesamte Länge beider Zuleitungen von der Transformatorenstation *T* an der Hochspannungsleitung zu den Betrieben minimal wird?
-
- 9.13. Beim Einbau eines Rundbogenfensters (rechteckige Fläche mit aufgesetztem Halbkreis) ist aus bautechnischen Gründen zu gewährleisten, daß ein Umfang von $8,00 \text{ m}$ nicht überschritten werden darf. Welche Maße hat das Fenster zu erhalten, wenn die Lichtausbeute ein Maximum werden soll?
-
- 9.14. (Duale Aufgabe zur vorhergehenden!)
Der Querschnitt eines Abwässerkanals besteht aus einem Rechteck mit angesetztem Halbkreis. Die Querschnittsfläche muß aus wasserwirtschaftlichen Gründen (mindestens) einen Inhalt von $5,00 \text{ m}^2$ haben. Wie wählt man die Maße des Kanalquerschnitts, wenn der Materialverbrauch für die Ummauerung (Umfang der Querschnittsfläche) möglichst klein gehalten werden muß?
(Zuweilen wird gefordert, daß zu Reparaturzwecken eine lichte Höhe von $2,00 \text{ m}$ bzw. sogar $2,50 \text{ m}$ vorhanden sein muß!)
-
- 9.15. Ein geschlossener zylindrischer Ölbehälter mit einem Fassungsvermögen von 180 l soll so konstruiert werden, daß möglichst wenig Material verbraucht wird (Blech). Der wahre Blechverbrauch ist etwa um 20% größer, da Abfälle entstehen. Wie sind die Maße des Zylinders zu wählen?

B

9.11.



$$A(x) = 12x - 1,5x^2 \rightarrow \text{Max.}$$

$$0 < x < 8.$$

$$A = xy \rightarrow \text{Max.}$$

Nach Strahlensatz (Scheitel bei S):

$$(8-x):8 = y:12 \quad \parallel \quad (h-x):h = y:s$$

$$y = 12 - 1,5x$$

$$\text{od. } x = 8 - 0,67y$$

$$y = s - \frac{s}{h}x$$

$$A(x) = sx - \frac{s}{h}x^2 \rightarrow \text{Max.}$$

$$0 < x < h.$$

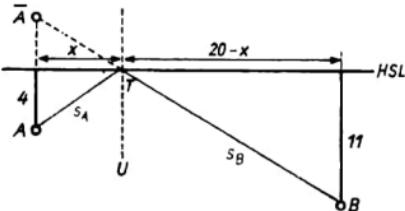
9.12. $L = s_A + s_B \rightarrow \text{Min.}$

$$s_A = \sqrt{x^2 + 16}$$

$$s_B = \sqrt{(20-x)^2 + 121} \text{ nach PYTHAGORAS}$$

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{521 - 40x + x^2} \rightarrow \text{Min.}$$

$$0 \leq x \leq 20$$



9.13. Extremalfunktion: $A = A_{\text{Rechteck}} + A_{\text{Halbkreis}} \rightarrow \text{Max.}$

$$A = 2ar + 0,5\pi r^2 \rightarrow \text{Max.}$$

Hilfsbeziehung: $u = 8 = 2r + 2a + \pi r$

$$\text{Substitution } a = 0,5(8 - 2r - \pi r) \text{ ist gegenüber } r = \frac{8-2a}{2+\pi} \text{ vorzuziehen.}$$

$$A(r) = 8r - 2r^2 - \pi r^2 + 0,5\pi r^2 \\ = 8r - 2r^2 - 0,5\pi r^2 \rightarrow \text{Max.}$$

$$r > 0.$$

9.14. Extremalfunktion hier: $u = 2a + 2r + \pi r \rightarrow \text{Min.}$

Hilfsbeziehung hier:

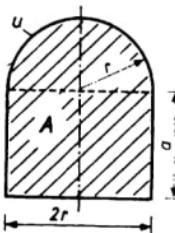
$$A = 5 = 2ar + 0,5\pi r^2$$

zweckmäßigerweise in der Form

$$a = \frac{5 - 0,5\pi r^2}{2r} \text{ als Substitution zu verwenden,}$$

da sonst Wurzeln durch quadratische Gleichung entstehen.

$$u(r) = 5r^{-1} + 0,5\pi r + 2r \rightarrow \text{Min.}; \quad r > 0.$$



9.15. Extremalfunktion: Gesamtfläche = Mantel + 2 Kreisflächen

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2 \rightarrow \text{Min.}$$

$$\text{Hilfsbeziehung: } V = \pi r^2 h = 180;$$

$$\text{zweckmäßige Substitution: } h = \frac{V}{\pi r^2}$$

$$A(r) = \frac{2V}{r} + \pi r^2 \rightarrow \text{Min.}$$

$$\text{bzw. } A(r) = \frac{360}{r} + \pi r^2 \rightarrow \text{Min.}; \quad r > 0.$$

9.11. $A'(x) = 12 - 3x$

$A''(x) = -3 < 0$, also Max.

$A'(x) = 0$ führt zu:

$$12 = 3x \Rightarrow x_{\text{ex}} = 4$$

$$y_{\text{ex}} = 12 - 6 = 6.$$

$A'(x) = s - \frac{2s}{h}x$

$A''(x) = -\frac{2s}{h} < 0$, also Max.

$$s = \frac{2s}{x} \Rightarrow x_{\text{ex}} = 0,5h$$

$$y_{\text{ex}} = 0,5s.$$

9.12. $L'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 16}} + \frac{-40 + 2x}{2\sqrt{521 - 40x + x^2}}$ (Kettenregel beachten!)

$L'(x) = 0$ führt zu: $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} = \frac{20 - x}{\sqrt{521 - 40x + x^2}}$

und nach dem Quadrieren:

$$x^2(521 - 40x + x^2) = (400 - 40x + x^2)(x^2 + 16)$$

$$105x^2 + 640x = 6400x_{\text{ex}} = 5 \cdot \frac{1}{3}$$
 (andere Lösung negativ, scheidet aus)

Überzeugen Sie sich an Hand der 2. Ableitung, daß tatsächlich ein Minimum vorliegt.

9.13. $A'(r) = 8 - 4r - \pi r$

$A''(r) = -4 - \pi < 0$ (also entsteht Maximum)

$A'(r) = 0$ liefert:

$$8 - 4r - \pi r = 0 \quad \text{mit} \quad r_{\text{ex}} = \frac{8}{4 + \pi} = 1,12$$

$$a_{\text{ex}} = 0,5(8 - 2,24 - 3,52) = 1,12.$$

9.14. $u'(r) = -5r^{-2} + 0,5\pi + 2$

$u''(r) = 10r^{-3} > 0$ (also entsteht Minimum)

$u'(r) = 0$ liefert:

$$5r^{-2} = 0,5\pi + 2 \quad \text{mit} \quad r_{\text{ex}} = \sqrt{\frac{5}{2 + 0,5\pi}} = 1,18$$

(negativer Wert liegt nicht im Definitionsbereich)

$$a_{\text{ex}} = (5 - 2,20) / 2,36 = 1,18; \quad a_{\text{ex}} = r_{\text{ex}}.$$

9.15. $A'(r) = 2(-Vr^{-2} + 2\pi r)$ bzw. $A'(r) = -360r^{-2} + 4\pi r$

$A''(r) = 2(2Vr^{-3} + 2\pi) > 0$ (also Minimum)

$A'(r) = 0$ liefert: $Vr^{-2} = 2\pi r$ bzw. $180r^{-2} = 2\pi r$

und $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ bzw. $r = \sqrt[3]{28,7} = 3,06$.

D

-
- 9.11. Der optimale Querschnitt wird erreicht, wenn die Höhe des Dachraums 50% der Dachhöhe und die Breite 50% der Dachbreite sind. Die Querschnittsfläche ist dann 50% des Dachquerschnitts.

Die Höhe der entstehenden Räume ist bautechnisch voll ausreichend.

- 9.12. $s_A = 6,67$; $s_B = 18,33$. Die minimale Gesamtlänge beträgt $L_{\min} = 25$ km.
Spiegeln Sie den Punkt A (siehe Skizze) an der Hochspannungsleitung, dann erkennen Sie, daß dann die kürzeste Verbindung ATB vorliegt, wenn T am Schnittpunkt der Verbindung AB mit der Hochspannungsleitung liegt. Es entstehen ähnliche Figuren. Überzeugen Sie sich, daß die Lage jedes anderen Punktes T ungünstiger wäre.

Betrachten Sie die Figur S. 110 sorgfältig! Die gleiche Figur tritt für das Reflexionsgesetz an einem Spiegel (Optik) auf. Leicht läßt sich zeigen, daß auch für diese Aufgabe gilt:
• $\angle ATU = \angle UTB$. Der Weg des Lichtes von A über den Spiegel nach B ist dann am kürzesten, wenn das Reflexionsgesetz gilt.

- 9.13. Im Falle der maximalen Lichtausbeute beträgt der Radius 1,12 m und die Gesamthöhe des Fensters 2,24 m. Äußere Breite und Höhe des Fensters müssen dann also gleich groß sein.
-

- 9.14. Der Materialverbrauch für die Ummauerung ist am geringsten, wenn die lichte maximale Höhe des Abwässerkanals und seine Breite übereinstimmend 2,36 m betragen (s. o.!). Darf der Wert 2,00 m nicht überschritten werden, so muß dieses Maß als bestmöglicher Wert angesehen werden. Aus $\frac{\pi r^2}{2} + 4r - 2r^2 = 5$; folgt dann $r = 1,13$. Der Materialverbrauch ist allerdings etwas größer in diesem Fall.
-

- 9.15. Im Minimalfall stimmen Höhe und Durchmesser des Behälters überein. Die Höhe beträgt hier 3,06 dm, also fast 31 cm. Der minimale Blechverbrauch beträgt in diesem Fall $BV = A_{\min} + 20\% = 1,2 \cdot (118 + 59,3) \text{ dm}^2 \approx 1,2 \cdot 177 \text{ dm}^2 \approx 2,12 \text{ dm}^2$.

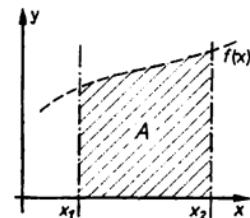
10. Flächeninhaltsberechnung durch Integration

Übersicht zur Flächeninhaltsberechnung mittels der Integralrechnung

**Fläche zwischen Kurve und x-Achse
(keine Nullstellen im Integrationsintervall)**

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx;$$

$$A = |I|.$$

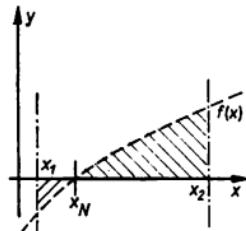


**Fläche zwischen Kurve und x-Achse
(Nullstelle im Integrationsintervall)**

Man setze $f(x) = 0$ und findet x_N . Wenn $x_1 < x_N < x_2$, dann sind zwei Integrationen auszuführen.

$$I_1 = \int_{x_1}^{x_N} f(x) dx; \quad I_2 = \int_{x_N}^{x_2} f(x) dx;$$

$$A = |I_1| + |I_2|.$$



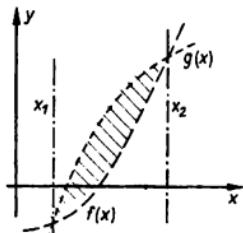
Fläche zwischen zwei Kurven

Durch $f(x) = g(x)$ findet man die gemeinsamen Punkte (nur Abszissen erforderlich).

Die Integrationsgrenzen sind x_1 und x_2 . Die Integration muß unterbrochen werden, wenn noch ein weiterer Schnittpunkt im Intervall liegt.

$$I = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)] dx$$

$A = |I|$. Eine Unterbrechung an den Nullstellen von $f(x), g(x)$ ist nicht nötig!

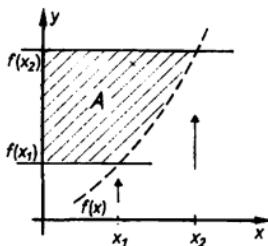


Fläche zwischen Kurven und y-Achse

Man bilde die Umkehrfunktion (formal: $y \leftarrow \rightarrow x$) h zu f:

$$I = \int_{f(x_1)}^{f(x_2)} h(x) dx;$$

$$A = |I|.$$



Differentialquotienten und unbestimmte Grundintegrale einiger wichtiger Funktionen

Differentialquotient $f'(x)$	Funktion $f(x)$	unbestimmtes Integral $\int f(x) dx$
anx^{n-1}	$ax^n (n \neq -1)$	$\frac{a}{n+1} x^{n+1} + C$
$-ax^{-2}$	$ax^{-1} = \frac{a}{x}$	$a \ln x + C$
$\cos x$ $-\sin x$ $\cos^{-2} x = 1 + \tan^2 x$ $-\sin^{-2} x = -(1 + \cot^2 x)$	$\sin x$ $\cos x$ $\tan x$ $\cot x$	$-\cos x + C$ $\sin x + C$ $-\ln \cos x + C$ $\ln \sin x + C$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\sin^2 x$	$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cos x + C$
$-\sin 2x$	$\cos^2 x$	$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x \cos x + C$
$-\frac{\sin 2x}{\sin^4 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$
$\frac{\sin 2x}{\cos^4 x}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
e^x	e^x	$e^x + C$
$a^x \ln a$	$a^x (a > 0; a \neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
x^{-1}	$\ln x$	$x \ln x - x + C$
$\frac{1}{x \ln 10}$	$\lg x$	$x(\lg x - 0,4343) + C$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x} = x^{0.5}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$
$\frac{2x}{(1-x^2)^2}$	$\frac{1}{1-x^2} \quad x < 1$	$\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$
	$ x > 1$	$\ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C$
$\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln x + \sqrt{1+x^2} + C$
$\frac{+x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad x < 1$	$\arcsin x + C$

-
- 10.1. Berechnen Sie den Flächeninhalt der von den Bildern der beiden in Aufg. 8.1. genannten Funktionen $y = x^2$ und $y = \sqrt{x}$ vollständig eingeschlossenen Fläche.
-
- 10.2. Berechnen Sie das Integral der Funktion durch $h(x) = x^2 - \frac{4}{3}$ in den Grenzen $x_1 = 0$ bis $x_2 = 2$, und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.
-
- 10.3. Bestimmen Sie die Fläche zwischen dem Bild der Funktion $s(t) = 10t^{-1}$ und der t -Achse im Intervall zwischen $t_1 = 2$ und $t_2 = 8$.
-
- 10.4. Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Bild der Funktion $f(x) = \sin x$ und der x -Achse im Intervall zwischen 0 und 2π .
-
- 10.5. Die Fläche zwischen der Parabel mit der Funktionsbeziehung $f(x) = ax^2$ und der Geraden mit der Gleichung $g(x) = c$ ist zu berechnen und mit dem umbeschriebenen Rechteck zu vergleichen; $a > 0$.
-
- 10.6. Das Volumen eines Tunnels mit einem durch ein Parabelsegment bestimmten Querschnitt ist zu berechnen, wenn die maximale (Pfeil-) Höhe 8 m, die maximale Breite 20 m und die Länge des Tunnels 1,4 km betragen.
-
- 10.7. Ein geplanter S-Bahnhof erhält ein parabolisches Gewölbe. Die maximale Breite beträgt 50 m, die Höhe maximal 18 m. Die Vorderfläche der Bahnhofshalle soll verglast werden, wobei wegen der Zughöhe (bis zum Fahrleitungsdraht) eine Baufreiheit von 6 m gewährleistet werden muß. Wieviel Quadratmeter Glas sind erforderlich?
-
- 10.8. Gegeben ist die Gerade $y = g(x) = mx$. Auf dieser Geraden befinden sich die Punkte P_1 und P_2 mit den x -Koordinaten x_1 und x_2 . Untersuchen und vergleichen Sie die Flächen zwischen der Geraden und x - bzw. y -Achse in den Grenzen zwischen den beiden Punkten.

B

- 10.1. Die Integrationsgrenzen sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$

$$I = \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^1 (x^2 - x^{0.5}) dx.$$

$$10.2. I = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{4}{3} \right) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{4}{3} x \right]_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{8}{3} = 0.$$

- 10.3. Im Integrationsintervall liegen keine Nullstellen.

$$I = \int_2^8 \frac{10}{t} dt = 10 [\ln |t|]_2^8$$

- 10.4. Im Intervall von 0 bis 2π liegt eine weitere Nullstelle bei $x = \pi$. Hier muß die Integration unterbrochen werden.

$$I_1 = \int_0^\pi \sin x dx \quad I_2 = \int_\pi^{2\pi} \sin x dx$$

- 10.5. $ax^2 = c; \quad x = \pm \sqrt{\frac{c}{a}}$. Man bestimmt die Fläche zwischen dem Bild von f und der x -Achse im Intervall $-\sqrt{\frac{c}{a}}$ bis $+\sqrt{\frac{c}{a}}$.

$$I = \int_{-\sqrt{\frac{c}{a}}}^{+\sqrt{\frac{c}{a}}} ax^2 dx = \left[\frac{a}{3} x^3 \right]_{-\sqrt{\frac{c}{a}}}^{+\sqrt{\frac{c}{a}}}$$

- 10.6. Zur Bestimmung der Querschnittsfläche muß vorher die Methode der unbestimmten Koeffizienten auf $f(x) = ax^2 + c$ angewendet werden:

$$f(0) = 8 = c; \quad f(10) = 0 = 100a + 8; \quad a = -\frac{2}{25}$$
$$f(x) = -\frac{2}{25} x^2 + 8.$$

- 10.7. Wiederum setzt man an: $y^2 = 2px$ (Parabel nach rechts geöffnet, Scheitelpunkt im Ursprung, für die Berechnung im zweiten Teil vorteilhafter)

$$x = 18; \quad y = 25 \Rightarrow 625 = 36p \Rightarrow p = \frac{625}{36}$$

$$y^2 = \frac{625}{18} x.$$

- 10.8. $g(x_1) = mx_1; \quad g(x_2) = mx_2;$

$$I_x = A_x = \int_{x_1}^{x_2} mx dx = [0.5mx^2]_{x_1}^{x_2} = 0.5m(x_2^2 - x_1^2).$$

10.1. $I = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^{1.5} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3};$
 $A = \frac{1}{3}.$

10.2. Im Integrationsintervall hat $h(x)$ eine Nullstelle.

$$x^2 = \frac{4}{3} \quad x_1 < 0 \quad x_2 = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Man bildet zur Flächenberechnung der Fläche zwischen zugehöriger Kurve und x -Achse

$$I_1 = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x \right]_0^{\frac{2}{3}\sqrt{3}} \\ I_2 = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x \right]_{\frac{2}{3}\sqrt{3}}^2 \quad |I_1| + |I_2| = \frac{32}{27}\sqrt{3} = 2,05.$$

10.3. $I = 10[\ln|t|]_2^8 = 10(\ln 8 - \ln 2) = 10 \ln \frac{8}{2}.$

10.4. $I_1 = [-\cos x]_0^\pi = 2; \quad I_2 = [-\cos x]_\pi^{2\pi} = -2.$

10.5. $I = \frac{a}{3} \frac{c}{a} \left(\sqrt{\frac{c}{a}} + \sqrt{\frac{c}{a}} \right) = \frac{2c}{3} \sqrt{\frac{c}{a}}.$

10.6. Vereinfachung: Es wird nur eine der kongruenten Teilstufen berechnet, anschließend Multiplikation mit 2.

$$\bar{A}_{Qu} = 2 \int_0^{10} (-0,08x^2 + 8) dx = 2 \left[-\frac{2}{75}x^3 + 8x \right]_0^{10} \\ = 2 \left[-\frac{80}{3} + 80 \right] = \frac{4}{3} \cdot 80 \approx 106,7.$$

10.7. Man berechnet nur den oberen Teil der Fläche (und multipliziert anschließend mit 2).

$$I = \int_0^{18} \frac{25}{9}\sqrt{2}x^{0.5} dx = \left[\frac{25\sqrt{2}}{9}x\sqrt{x} \right]_0^{18} = 300.$$

10.8. $I_y = A_y = \int_{mx_1}^{mx_2} \frac{y}{m} dy = \frac{1}{2m} [y^2]_{mx_1}^{mx_2} = 0,5m(x_2^2 - x_1^2).$

D

- 10.1. Die Fläche zwischen den beiden Kurven hat den Flächeninhalt $1/3$. Durch diese Fläche wird das Quadrat aus den Punkten $(0; 0)$ $(1; 0)$ $(1; 1)$ $(0; 1)$ in drei gleich große Teile geteilt. (Wären x^n und $\sqrt[n]{x}$ zugrunde gelegt worden, so wäre der Inhalt der eingeschlossenen Fläche $\frac{n-1}{n+1}$. Prüfen Sie das selbst nach.)
-

- 10.2. Das Integral I hat den Wert 0 . Dagegen ist die Fläche zwischen dem Bild der Funktion $h(x)$ und der x -Achse im Intervall $[0; 2]$ $A = 2,05$.
-

- 10.3. $A = |I| = 10 \ln 4 = 13863$.
-

- 10.4. Der Flächeninhalt beträgt $A = |I_1| + |I_2| = 4$.
-

- 10.5. Der Flächeninhalt A des Parabelsegments ist gleich der Differenz zwischen Rechteckfläche und Fläche zwischen Parabel und x -Achse

$$A = 2c \sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{2}{3} c \sqrt{\frac{c}{a}} = \frac{4}{3} c \sqrt{\frac{c}{a}}. \text{ Das ist ein Drittel der Rechteckfläche.}$$

(Unterscheiden Sie: Das Parabelsegment hat $2/3$ der Fläche des umschriebenen Rechtecks.
Das Volumen eines Parabolkörpers ist $1/2$ des Volumens des umbeschriebenen Zylinders.)

- 10.6. Das gesuchte Volumen beträgt 149000 m^3 .

$$V = A_{\text{Qu}} l = 106,7 \cdot 1400 = 149000.$$

- 10.7. Zu verglasen ist nur eine Fläche von $326,5 \text{ m}^2$.

$$A_{\text{vgl.}} = 2 \left[\frac{25\sqrt{2}}{9} x \sqrt{x} \right]_0^{12} = 326,5.$$

- 10.8. Die beiden Flächen sind gleich groß, unabhängig von dem vorliegenden m (d. h. dem Anstieg der Geraden).

Der Flächeninhalt beträgt $A = \frac{m}{2} (x_2^2 - x_1^2)$.

11. Volumenberechnung von Rotationskörpern – Integrationsmethoden

Bei der Volumenberechnung mittels der Integration ist besonders zu unterscheiden, ob die Rotation um die x -Achse oder um die y -Achse erfolgt. Die Berechnungen zur Rotation um die x -Achse werden im allgemeinen als leichter empfunden.¹⁾ Bei durch $y = f(x)$ vorgegebener Kurvengleichung gilt für die Rotation um die x -Achse:

$$V_{(x)} = \pi \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2 dx.$$

Bei Rotation um die y -Achse gilt:

$$V_{(y)} = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy. \text{ Beachten Sie dabei die Grenzen } y_1 = f(x_1) \text{ und } y_2 = f(x_2)!$$

Dazu ist zunächst die Umkehrfunktion $x = \varphi(y)$ zu bilden. Diese Beziehung wird quadriert. Es gilt dann:

$$V_{(y)} = \pi \int_{y_1}^{y_2} [\varphi(y)]^2 dy.$$

Rotiert die Fläche zwischen zwei Kurven um die x -Achse – man orientiere sich dabei immer an Hand einer Skizze über die Form des entstehenden Rotationskörpers – so ist zu berechnen:

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} \{[f_1(x)]^2 - [f_2(x)]^2\} dx \quad \text{bzw.} \quad V = \pi \left[\int_{x_1}^{x_2} [f_1(x)]^2 dx - \int_{x_1}^{x_2} [f_2(x)]^2 dx \right]^2$$

Mittels der Integralrechnung können u. a. berechnet werden

die Bogenlänge: $s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

die Mantelfläche: $M = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

der Schwerpunkt von Rotationskörpern: $x_s = \frac{\int_{x_1}^{x_2} x[f(x)]^2 dx}{\int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2 dx}$

und zahlreiche Ausdrücke in der Physik und Technik (Arbeitsintegral, Trägheitsmoment, elektr. Leistung im Wechselstrom). Ein Beispiel für Untersuchungen an einem interessanten Rotationskörper mittels der Integralrechnung finden Sie in Aufg. 11.4.

Schätzen Sie Ihr erhaltenes Ergebnis immer ab!

¹⁾ Zuweilen lässt die Aufgabenstellung es zu, eine der beiden Möglichkeiten (Lage der Rotationsachse) auszuwählen. Die Erleichterung an Rechenaufwand bei der Integration muss dann oft mit erhöhten Schwierigkeiten bei der Aufstellung der zu integrierenden Funktion erkauft werden. Hier wird im übrigen die Methode der unbestimmten Koeffizienten verwendet.

²⁾ Beachten Sie: Dieser Ausdruck darf nicht mit $\pi \int_{x_1}^{x_2} [f_1(x) - f_2(x)]^2 dx$ verwechselt werden!

Abgesehen von den auf einer (unvollständigen) Übersicht auf S. 114 zusammengestellten Grundintegralen lassen sich in vielen Fällen die Integrale mittels bestimmter **Integrationsmethoden** berechnen. Von diesen Methoden seien besonders die folgenden genannt:

I. Lineare Substitution $s = ax + b$

$$\text{Beispiele: (1)} \quad \int e^{0,5x} dx = \int e^t dt \cdot 2 \\ = 2e^t + C = 2e^{0,5x} + C$$

$$= 2e^x + C = 2e^{0.5x} + C.$$

$$\begin{aligned} (2) \int \sqrt{a - bx} \, dx &= -\frac{1}{b} \int \sqrt{t} \, dt \\ &= -\frac{2}{3b} t^{3/2} + C \\ &= -\frac{2}{3b} (a - bx) \sqrt{a - bx} + C. \end{aligned}$$

$$= -\frac{2}{3b}(a - bx)\sqrt{a - bx} + C.$$

a) $t = 0,5x$

b) $x = 2t$

c) $\frac{dx}{dt} = 2$

$$d) \frac{dx}{dt} = 2dt$$

$$a) t = a - bx$$

$$\text{b) } x = \frac{a}{b} - \frac{t}{b}$$

$$c) \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t}$$

$$d) dx = -\frac{1}{t} dt$$

II. Integrale einer gebrochenen Funktion, bei der im Zähler die Ableitung des Nenners steht

$$\text{Lösung: } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

$$\text{Beispiel: } \int \frac{\sin x \, dx}{a + b \cos x} = -\frac{1}{b} \int \frac{-b \sin x \, dx}{a + b \cos x} = -\frac{1}{b} \ln |a + b \cos x| + C.$$

III. Integration des Produkts einer Funktion von $g(x)$ und der Ableitung $g'(x)$

Lösung: $\int f[\lg(x)] g'(x) dx = \int f(t) dt$

$$\text{Beispiel: } \int \sin^2 x \cdot \cos x \, dx = \int [\sin x]^2 \cdot \cos x \, dx = \int t^2 \, dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$

IV. Integration trigonometrischer Funktionen

Man verwende die Substitution: $t = \tan \frac{x}{2}$

Für eine solche Substitution gilt dann immer:

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Beispiel: $\int \frac{dx}{1 - \sin x}$

$$a) t = \tan \frac{x}{2} \quad b) \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

c) $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

d) $x = 2 \arctan t$

$$\text{e) } \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\begin{aligned} \text{Also: } & \int \frac{dx}{1 - \sin x} = \int \frac{2}{1 + t^2} \frac{1 dt}{1 - \frac{2t}{1 + t^2}} \\ &= \int \frac{2(1 + t^2) dt}{(1 + t^2)(1 + t^2 - 2t)} = \int \frac{2 dt}{(1 - t)^2} = \frac{2}{1 - t} + C = \frac{2}{1 - \tan \frac{x}{2}} + C. \end{aligned}$$

Häufig lassen sich Integrale auf mehrere Arten bearbeiten. Zuweilen findet auch der versierte Rechner nicht immer sofort den bequemsten und schnellsten Weg. Einige Integrale sogenannte „elliptische“ Integrale lassen sich sogar nur numerisch auswerten. Sie finden sehr viele Integrale mit Lösungsansätzen in dem Buch BRONSTEIN-SEMENDJAJEW, Taschenbuch der Mathematik, BSB B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft 1981, oder in Bartsch, Mathematische Formeln, VEB Fachbuchverlag Leipzig 1984.

¹⁾ Im Grunde genommen sind die Typen II bis IV Abarten der Substitutionsmethode.

Übersicht

über verschiedene mögliche Substitutionen bei der Integration

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$$

Substitution 1	Substitution 2	Substitution 3	Substitution 4
$2x + 3 = z$ (naheliegend)	$\sqrt{2x+3} = t$	$\frac{1}{2x+3} = u$ (wenig gebräuchlich)	$\frac{1}{\sqrt{2x+3}} = s$
$x = 0,5z - 1,5$	$x = 0,5t^2 - 1,5$	$x = 0,5u^{-1} - 1,5$	$x = 0,5s^{-2} - 1,5$
$\frac{dx}{dz} = 0,5$	$\frac{dx}{dt} = t$	$\frac{dx}{du} = -0,5u^{-2}$	$\frac{dx}{ds} = -s^{-3}$
$dx = 0,5 dz$	$dx = t dt$	$dx = -0,5u^2 du$	$dx = -s^{-3} ds$
$I = \int 0,5z^{-0,5} dz$ $= z^{0,5} + C$	$T = \int t^{-1} t dt$ $= t + C$	$I = -0,5 \int u^{-2} u^{0,5} du$ $= -0,5 \int u^{-1,5} du$ $= u^{0,5} + C$	$I = - \int s^{-3} s ds$ $= - \int s^{-2} ds$ $= s^{-1} + C$

$$I = \sqrt{2x+3} + C$$

Hat der zu substituierende Ausdruck eine lineare Form ... $Ax + B$..., so kann die Verfahrensweise durch folgende Überlegung erläutert werden: Beim Differenzieren wäre (Kettenregel) eine nachträgliche Multiplikation mit der Ableitung der inneren Funktion erforderlich. Da das Integrieren dem Differenzieren entgegengesetzt ist, entspricht das beim Integrieren einer nachträglichen Division durch A .

- 11.1.** Zwischen der Geraden $y = mx$ und der x -Achse liegt im Intervall $[x_1; x_2]$ eine Fläche, die um die x -Achse rotieren soll.
 Zwischen der Geraden $y = mx$ und der y -Achse liegt im Intervall $[y_1; y_2]$ eine Fläche, die um die y -Achse rotieren soll.
 Es gelte: $y_1 = mx_1$ und $y_2 = mx_2$.
 Das Volumen beider entstehender Rotationskörper soll übereinstimmen. Was kann dann über den Koeffizienten m ausgesagt werden?
-
- 11.2.** Ein parabolisches Gefäß hat eine innere Höhe von 10 cm und einen oberen lichten Durchmesser von 16 cm. Bestimmen Sie das Fassungsvermögen und die Füllhöhe bei halber Füllung.
-
- 11.3.** Ein Stativfuß hat eine hyperbolische Begrenzungskurve gemäß der Funktion $y = \frac{2}{x}$. Der größte Durchmesser beträgt 2 dm, die Länge 3 dm. Berechnen Sie das Volumen.
-
- *11.4.** Die Hülle einer Forschungsrakete besteht aus einem Rumpf und einem kegelförmigen Kopf.
 Der Rumpf wird beschrieben durch Rotation der Fläche zwischen dem Bild der Funktion mit der Gleichung $f(x) = 1 - 0,5 e^{-x}$ und der x -Achse im Intervall $[0; 10]$. Die Mantellinie des Kegels ist Tangente an die Kurve im Punkte $P_0[0; f(0)]$. Maßangaben in m. Bestimmen Sie das Volumen der Rakete.
-
- 11.5.** Weinfässer haben meist ellipsoidale Gestalt. Als Ausgangskurve soll der oberhalb der x -Achse gelegene Teil der Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gewählt werden. Die Fläche zwischen ihr und der x -Achse rotiere im Intervall $[-0,5 l; +0,5 l]$ um die x -Achse. Welches Volumen entsteht für $a = 5$ dm, $b = 3$ dm und $l = 8$ dm?
-
- *11.6.** Berechnen Sie $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx$.
-
- *11.7.** Berechnen Sie $\int\limits_2^4 \frac{dx}{x \ln x}$.
-
- 11.8.** Berechnen Sie $\int\limits_0^1 e^{2x} dx$.

B

11.1. $V_{\text{rot } x} = \pi \int_{x_1}^{x_2} m^2 x^2 \, dx = \pi m^2 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{m^2}{3} \pi (x_2^3 - x_1^3).$

- 11.2.** Zunächst wird eine zweckmäßige Lage des Koordinatensystems gewählt. Den Ursprung legt man günstig in den Scheitelpunkt einer nach rechts geöffneten Parabel, deren Achse mit der x -Achse zusammenfällt.

Danach wird die „begrenzende“ Parabelfunktion bestimmt (Methode der unbestimmten Koeffizienten): $y^2 = 2px$. Für $x = 10$ ist $y = 8$. Daraus folgt $2p = 6,4$; $p = 3,2$; $y^2 = 6,4x$.

$$V(\text{bis zur Füllhöhe } h) = \pi \int_0^h 6,4x \, dx.$$

- 11.3.** Man stellt zunächst die Integrationsgrenzen fest:

$$f(x_1) = 1; \quad \frac{2}{x_1} = 1 \Rightarrow x_1 = 2; \quad x_2 = x_1 + 3 = 5.$$

Zu berechnen ist also $V = \pi \int_2^5 \frac{4 \, dx}{x^2}$.

- 11.4.** Zunächst ist $[f(x)]^2$ zu bilden:

$$[f(x)]^2 = 1 - e^{-x} + 0,25 e^{-2x}$$

$$\begin{aligned} V_{\text{Ru}} &= \pi \int_0^{10} (1 - e^{-x} + 0,25 e^{-2x}) \, dx = \pi [x + e^{-x} - 0,125 e^{-2x}]_0^{10} \\ &= \pi [10 + e^{-10} - 0,125 e^{-20} - 0 - e^0 + 0,125 e^0] \\ &\approx \pi (10 + 0 - 0 - 0 - 1 + 0,125) = 9,125\pi \approx 28,7. \end{aligned}$$

- 11.5.** Man stellt nach y^2 um:

$$y^2 = -\frac{b^2}{a^2} x^2 + b^2. \quad \text{Man berechnet das Doppelte des Volumens bei Rotation im Intervall } [0; 0,5l]$$

$$V = 2\pi \int_0^{0,5l} \left(-\frac{b^2}{a^2} x^2 + b^2 \right) \, dx.$$

- 11.6.** $t = \tan \frac{x}{2}; \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}; \quad dx = \frac{2 \, dt}{1 + t^2}$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{1 + \cos x} \, dx = \int_{x=0}^{x=2\pi} \frac{(1 - t^2)(1 + t^2) 2 \, dt}{(1 + t^2) 2(1 + t^2)} = \int_{x=0}^{x=2\pi} \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \, dt.$$

- 11.7.** Man formt um in $\int_2^4 \frac{dx}{x \ln x} = \int_2^4 \frac{1}{\ln x} \, dx$.

Jetzt steht im Zähler die Ableitung des Nenners.

- 11.8.** Man substituiert $2x = t$; $x = 0,5t$; $dx = 0,5 \, dt$.

11.1. Ferner Umkehrfunktion: $x = y : m$; $f(x_2) = mx_2$; $f(x_1) = mx_1$

$$V_{\text{rot } y} = \pi \int_{mx_1}^{mx_2} \frac{y^2}{m^2} dy = \frac{\pi}{m^2} \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{mx_1}^{mx_2} = \frac{\pi m}{3} (x_2^3 - x_1^3).$$

Beachten Sie bitte, daß dieses Volumen bei Rotation der Fläche zwischen der Geraden und der y-Achse um die y-Achse entsteht. Es handelt sich also nicht um die Rotation der im ersten Teil betrachteten Fläche!

11.2. $V(\text{bis } h) = \pi \int_0^h 6,4x dx = \pi [3,2x^2]_0^h = 3,2\pi h^2.$

11.3. $V = \pi \int_2^5 \frac{4 dx}{x^2} = \pi \left[\frac{-4}{x} \right]_2^5 = \pi [-0,8 + 2] = 1,2\pi \approx 3,59.$

11.4. Man bestimmt den Tangentenanstieg für $x = 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0,5 e^{-x}; & f'(0) &= 0,5 = m; \\ f(0) &= 1 - 0,5 = 0,5. \end{aligned}$$

Schnittpunkt der Begrenzungsgeraden des Kegels mit der x-Achse: $x_S = -1$, Höhe des Kegels = 1.

11.5. $V = 2\pi \left[-\frac{b^2}{3a^2} x^3 + b^2 x \right]_0^{0,5l} = 2\pi \left[-\frac{0,125b^2 l^3}{3a^2} + 0,5b^2 l \right]$
 $= \frac{2}{3} \pi l b^2 \left[1,5 - \frac{0,125}{a^2} l^2 \right].$

11.6. $\int_{x=0}^{x=2\pi} \frac{1-t^2}{1+t^2} dt = \int_{x=0}^{x=2\pi} \frac{2-(1+t^2)}{1+t^2} dt = 2 \int_{x=0}^{x=2\pi} \frac{dt}{1+t^2} - \int_{x=0}^{x=2\pi} dt$
 $= [2 \arctan t - t + C]_{x=0}^{x=2\pi}.$

11.7. $\int_2^4 \frac{1}{\ln x} dx = [\ln (\ln |x|)]_2^4 = \ln 1,3863 - \ln 0,6931.$

11.8. $\int_0^1 e^{2x} dx = \int_{x=0}^{x=1} e^t \cdot 0,5 dt = 0,5 [e^t]_{x=0}^{x=1} = 0,5[e^{2x}]_0^1 = 0,5e^2 - 0,5e^0 = 0,5(e^2 - 1).$

- 11.1. Sollen die beiden Volumen gleich sein, so muß $V_1 = V_2$ gelten. $\frac{\pi m^2}{3} (x_2^3 - x_1^3) = \pi \frac{m}{3} (x_2^3 - x_1^3)$, also $m = 0$ oder $m = 1$; d. h., die Gerade $y = mx$ muß entweder die x-Achse sein oder unter 45° ansteigen.

Der Fall, daß m nach ∞ strebt, bleibt unberücksichtigt. Der Fall $m = 0$ ist uninteressant, das Volumen wäre dann ebenfalls 0.

- 11.2. $h = 10$; $V(10) = 3,2\pi \cdot 100 \approx 1000$.

Für $V = 500$ (halbe Füllung) folgt $500 = \pi \cdot 3,2h^2$; $h = \sqrt{\frac{500}{3,2\pi}} \approx 7,07$. Die Füllhöhe beträgt dann etwa 71 mm (und nicht etwa 5 cm!).

- 11.3. Das Volumen des Stativfußes beträgt etwa $3,6 \text{ dm}^3$. Der Fuß hat an seiner Spitze einen Durchmesser von $0,8 \text{ dm}$. Nähme man einen Kegelstumpf an, so wäre das Volumen etwa $4,9 \text{ dm}^3$.

- 11.4. $V_{\text{Rumpf}} = 28,7$; V_{Kegel} (ohne Integration) = 0,26; Gesamtvolumen der Rakete: $V = 28,96 \text{ m}^3$. Die Rakete ist 11 m lang und hat einen größten Durchmesser von 2 m.

- 11.5. Das Fassungsvermögen kann nach $V = \frac{2lb^2}{3} \left(1,5 - \frac{0,125}{a^2} l^2 \right)$ ermittelt werden. Für $a = 5 \text{ dm}$, $b = 3 \text{ dm}$ und $l = 8 \text{ dm}$ ergibt sich $V \approx 177 \text{ Liter}$. Wäre der Durchmesser einer Seitenfläche gegeben (mit $2c$), so ergäbe sich allgemein:

$$V = \frac{\pi l}{3} (2b^2 + c^2).$$

- 11.6. $2 \arctan t - t = 2 \arctan \left(\tan \frac{x}{2} \right) - \tan \frac{x}{2} = x - \tan \frac{x}{2}$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x \, dx}{1 + \cos x} = \left[x - \tan \frac{x}{2} \right]_0^{2\pi} = 2\pi - 0 - 0 + 0 = 2\pi.$$

- 11.7. $\int_2^4 \frac{dx}{x \ln x} = \ln(\ln 4) - \ln(\ln 2) = \ln \frac{\ln 4}{\ln 2} = \ln \frac{2 \ln 2}{\ln 2} = \ln 2 = 0,6931$

ist eleganter als

$$\int_2^4 \frac{dx}{x \ln x} = \ln 1,3863 - \ln 0,6931 = \ln \frac{1,3863}{0,6931} = \ln 2 = 0,6931.$$

- 11.8. $\int_0^1 e^{2x} dx = 0,5(e^2 - 1) = 0,5 \cdot 6,3891 = 3,1945$.

¹⁾ Man beachte:

$$\arctan(\tan x) = x \text{ bzw. } \arctan \left(\tan \frac{x}{2} \right) = \frac{x}{2}$$

12. Aufgaben zu nichtrationalen Funktionen

(Differential- und Integralrechnung)¹⁾

- 12.1. Gegeben ist eine Funktion f durch

$$f(x) = 2\sqrt{x+6} - x - 6; \quad x \in [-6; \infty].$$

Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts des Bildes von f mit der x -Achse und die des Extrempunktes E an! Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen Kurve und x -Achse im Intervall $[x_E; 3]$!

- 12.2. Wie lautet die Gleichung der mit einem Winkel von $63,43^\circ$ ansteigenden Tangente an das Bild von f mit $f(x) = e^{2x-1} + 1$. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vollständig vom Bild von f , der x -Achse und den Geraden $x = 0,5$ und $x = 1$ eingeschlossen wird!

- 12.3. Gegeben sind die Funktionen f und g durch $f(x) = \sin x$; $g(x) = \sqrt{3} \cos x$. Die Bilder beider Funktionen im I. Quadranten und die y -Achse begrenzen eine Fläche allseitig. Bestimmen Sie deren Innenwinkel und Inhalt!

- 12.4. Gegeben ist $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$; $x > 0$, reell. Bestimmen Sie die Eigenschaften des Bildes von f (Schnittpunkte mit den Achsen, Extrempunkte, Verhalten im Unendlichen), und berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vollständig vom Bild von f , der x -Achse und der Geraden $x = e$ eingeschlossen wird!

- 12.5. Gegeben sind Funktionen f mit

$$y = f(x) = e^{\alpha x} - a^2 x \quad (a \text{ reell}; \alpha > 0).$$

Berechnen Sie die Koordinaten des Extrempunktes aller dieser Funktionen, und ermitteln Sie jene Zahl a , für die gilt: $f(x_E) = 0$.

- 12.6. Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = \frac{8}{\sqrt{2x+1}}$ ($x \in (-0,5; \infty)$).

Das Bild von f , die Koordinatenachsen und die Gerade $x = t$ ($t > 0$, reell) begrenzen jeweils eine Fläche vollständig. Ermitteln Sie t für den Fall, daß der Flächeninhalt 16 FE beträgt!

- 12.7. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Bild von $f(x) = 3 + 2 \sin \frac{1}{2}x$, der x -Achse und den Geraden $x = -0,5\pi$ und $x = 0,5\pi$.

- 12.8. Gegeben ist eine Funktion f mit

$$f(x) = 0,5 \sin 2x + \cos x \text{ im Intervall } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Berechnen Sie die Nullstelle, $f(0)$ und die Extremstelle im angegebenen Intervall, und berechnen Sie $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$!

¹⁾ Vergleichen Sie den Lehrabschnitt 5 und die Bemerkungen auf S. 48

A

12.9. Gegeben ist

$$y = f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (x > 0; x \text{ reell}).$$

Stellen Sie eine Wertetafel für diese Funktion auf, berechnen Sie die Koordinaten des Maximumpunktes vom Bild der Funktion und berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen der Kurve und der x -Achse im Intervall $x \in [1; e]$!

12.10. Gegeben sind zwei Funktionen f und g durch die Gleichungen

$$y = f(x) = 0,25 + \sin x$$

$$y = g(x) = 0,5 + 0,5 \cos 2x$$

im Intervall $0 \leq x \leq \pi$.

Berechnen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte beider Funktionsbilder!

Berechnen Sie, unter welchem Winkel die Funktionsbilder in diesen Punkten einander schneiden!

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vollständig von den Bildern beider Funktionen begrenzt wird!

12.11. Die Bilder der Funktionen $f_{1,2}(x) = \pm\sqrt{169 - x^2}$ ergänzen einander zu einem Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 169$. Auf dem Kreis liegen die Punkte $P(-12; 5)$, $Q(-12; -5)$, $R(-5; 12)$, $S(12; 5)$ und $T(0; -13)$.

Überprüfen Sie, ob die Tangente an den Kreis in P der Strecke \overline{RQ} parallel läuft!

Untersuchen Sie, ob das Dreieck PTS gleichseitig ist! Geben Sie seinen Flächeninhalt an!

12.12. Gegeben ist eine Funktion f durch $y = f(x) = x^{-1}$.

Durch das Bild von f , die x -Achse und die Geraden $x = n$ und $x = n + 1$ ($n \in N$) werden Flächen A_n vollständig begrenzt. Die Inhalte dieser Flächen $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ bilden die Glieder einer Zahlenfolge.

Berechnen Sie A_1, A_2, A_n ! Geben Sie die Glieder s_1, s_2 der zugehörigen Partialsummenfolge an!

Das n -te Glied der Partialsummenfolge hat den Wert $s_n = \ln(n + 1)$. Zeigen Sie das durch vollständige Induktion!

12.1. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+6}} - 1; f''(x) = -0,5(x+6)^{-1,5}; 2\sqrt{x+6} - x - 6 = 0$ führt zu
 $x_1 = -6$ und $x_2 = -2$ (vgl. Abschnitt 5)

$$\int_a^b (2\sqrt{x+6} - x - 6) dx = \left[\frac{4}{3}(x+6)\sqrt{x+6} - 0,5x^2 - 6x \right]_a^b$$

12.2. $\tan 63,43^\circ = 2 = m_{\text{Tang.}}$
 $f'(x) = 2e^{2x-1}$. Es ist $f'(x) = m$ zu setzen. Das Bild der Funktion liegt nur oberhalb der x -Achse. Es ist keine Unterbrechung an einer Nullstelle erforderlich.

12.3. Die Bilder beider Funktionen werden zunächst $0 \leq x \leq 0,5\pi$ skizziert. Aus $\sqrt{3}\cos x = \sin x$ folgt (vgl. Abschn. 5.) $x_1 = \frac{\pi}{3}$ (60°), $y_1 = 0,5\sqrt{3}$. Aus $f'(x) = \cos x$ mit $f'(0) = 1$ und $g'(x) = -\sqrt{3}\sin x$ mit $g'(0) = 0$ folgen 2 der 3 Winkel der dreieckigen Fläche zu 45° bzw. 90° .

12.4. $f'(x) = x^{-2} \ln x (2 - \ln x) = 2x^{-2} \ln x - x^{-2} (\ln x)^2$
 $f''(x) = 2x^{-3} (-3 \ln x + (\ln x)^2 + 1)$ (Kettenregel beachten!).
Ein Pol liegt bei $x_p = 0$ vor; aus $f'(x) = 0$ folgt $x_{E1} = 1$ (Doppelnullstelle; Minimum),
 $x_{E2} = e^2$; $y_{E2} = 4 : e^2 \approx 0,54$ (Maximum); $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = 0$
(S. 48 beachten! Grenzwertsätze Tafelwerk S. 44).

12.5. $f'(x) = a e^{ax} - a^2$ (Kettenregel!) $f''(x) = a^2 e^{ax}$

12.6. Zur Orientierung: $f(0) = 8$
 $f(x) = 0$ unerfüllbar, keine Nullstellen. Eine Unterbrechung der Integration ist nicht erforderlich.

12.7. Das Bild von f verläuft im I. und II. Quadranten. Es existiert kein Schnittpunkt mit der x -Achse.

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3 + 2 \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 3 + 2 \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 3 - \sqrt{2};$$

$$f(0) = 3; \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 + 2 \sin\frac{\pi}{4} = 3 + \sqrt{2}$$

12.8. $0,5 \sin 2x + \cos x = 0$ (Vgl. Abschnitt 5.)

$$\cos x \cdot (1 + \sin x) = 0$$

$$x = 0,5\pi$$
 (90°)

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = \cos 2x - \sin x$$

$$f''(x) = -2 \sin 2x - \cos x$$

B

12.9. Wertetafel (ausgewählte Werte)

x	0,6	1	2	4	6
$f(x)$	-0,85	0	0,35	0,35	0,29
$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$					

12.10. Zu lösen ist die goniometrische Gleichung $0,25 + \sin x = 0,5 + 0,5 \cos 2x$; nach Umformung ergibt sich: $\sin x - 0,5 + \sin^2 x = 0,25$
 $\sin^2 x + \sin x - 0,75 = 0$

Die Ableitungen lauten $f'(x) = \cos x$; $g'(x) = -\sin 2x$.

Zu bilden ist für die Bestimmung des Flächeninhalts das Integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} (0,25 + 0,5 \cos 2x - \sin x) dx \\ = [0,25x + 0,25 \sin 2x + \cos x]_{x_1}^{x_2}$$

12.11. Es gibt mehrere Lösungswege (Berührungsradius, Tangente steht senkrecht darauf; y -Form der Geradengleichungen mit Schnittpunktsuche).

Am einfachsten:

$$f'(x_0) = \frac{-x_0}{\sqrt{169 - x_0^2}} = \frac{12}{\sqrt{25}} = 2,4 \\ m_{RQ} = \frac{17}{7} = 2,429$$

Das Dreieck ist gleichschenklig bei T.

Auch hier mehrere Lösungswege:

Längenvergleich: $\overline{PT} = ? = \overline{PS} = 24$
oder Winkel $\tan \frac{\varphi}{2} = \tan \alpha = PTO = ? = \tan 30^\circ$

12.12. $A_1 = \int_1^2 x^{-1} dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2$

$$A_n = \int_n^{n+1} x^{-1} dx = [\ln(x+1) - \ln x] = \ln \frac{x+1}{x} \\ S_1 = A_1$$

- 12.1.** $f'(x) = 0; \quad x_E = -5; \quad y_E = f(-5) = 1; \quad f''(-5) < 0, \text{ also Maximum}$
 Zur Bestimmung des gesuchten Flächeninhalts ist eine Unterbrechung der Integration an $x_0 = -2$ erforderlich.

$$I_1 = \left[\frac{4}{3} (x+6) \sqrt{x+6} - 0,5x^2 - 6x \right]_{-5}^{-2} = 2$$

$$I_2 = \left[\frac{4}{3} (x+6) \sqrt{x+6} - 0,5x^2 - 6x \right]_{-2}^3 = -7 \frac{1}{6}$$

- 12.2.** $2e^{2x_0-1} = 2; e^{2x_0-1} = 1; 2x_0 - 1 = 0$ (Vgl. auch S. 48) $x_0 = 0,5; f(0,5) = y_0 = 2$

$$I = \int_{0,5}^1 (e^{2x-1} + 1) dx = [0,5 e^{2x-1} + x]_{0,5}^1 = \frac{1}{2} e$$

- 12.3.** $f' \left(\frac{\pi}{3} \right) = 0,5; \quad g' \left(\frac{\pi}{3} \right) = -\frac{3}{2}.$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sqrt{3} \cos x - \sin x) dx = [\sqrt{3} \sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

- 12.4.** $I = \int_1^e \frac{1}{x} (\ln x)^2 dx$ unter Beachtung von S. 120, III
 $= \left[\frac{1}{3} (\ln x)^3 \right]_1^e$

- 12.5.** $y' = 0$ führt zu $a e^{ax} = a^2; x_E = \frac{1}{a} \ln a$ (Beachten Sie S. 48)

$$y'' \left(\ln x = \frac{1}{a} \ln a \right) = a^3 > 0, \text{ also liegt ein Minimum vor.}$$

$$y_E = a - \ln a = a(1 - \ln a)$$

- 12.6.** $I = \int_0^t \frac{8 dx}{\sqrt{2x+1}} = \int_0^t 8(2x+1)^{-0,5} dx$
 $= [8 \sqrt{2x+1}]_0^t$ (Verkettung beachten! Substitution! Vgl. S. 122)

- 12.7.** $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (3 + 2 \sin 0,5x) dx$ (Verkettung beachten!)
 $= [3x - 4 \cos 0,5x]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{3\pi}{2} - 2\sqrt{2} \right)$
 $- \left(-\frac{3\pi}{2} - 2\sqrt{2} \right) = 3\pi$

C

12.8. $f'(x) = 0$

$$\cos 2x = \sin x; \quad t = \sin x; \quad t^2 + 0,5t = 0,5$$

$$(t_1 = -1), \quad t_2 = \sin x = 0,5.$$

$$x_E = \frac{\pi}{6} (30^\circ; \text{Max.}); \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1,5\sqrt{3} \approx 2,6$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0,5 \sin 2x + \cos x) dx$$

$$= [-0,25 \cos 2x + \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

12.9. $f'(x) = 0$ führt zu $\ln x = 1; x = e = 2,718..$ (Vgl. S. 48)

$$f(e) = e^{-1} \approx 0,37$$

$$I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx \quad (\text{Vgl. S. 120, III})$$

$$= [0,5 (\ln x)^2]_1^e$$

12.10. Lösung der Gleichung $\sin x = 0,5$ (und $-1,5$) $x_1 = \frac{\pi}{6}$ und $x_2 = \frac{5\pi}{6}$
 $f(x_1) = f(x_2) = g(x_1) = g(x_2) = 0,75$

Aus Symmetriegründen genügt:

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,5\sqrt{3}$$

$$g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -0,5\sqrt{3}$$

$$I = \left[\frac{5\pi}{24} + 0,25(-0,5\sqrt{3}) - 0,5\sqrt{3} \right]$$

$$- \left[\frac{\pi}{24} + 0,25(0,5\sqrt{3}) + 0,5\sqrt{3} \right]$$

$$= \frac{\pi}{6} - 0,25\sqrt{3} - \sqrt{3} = -1,64$$

12.11. Die Anstiege sind nicht gleich, weichen aber nicht viel voneinander ab!

Am einfachsten: $\tan 0,5\varphi = 12 : 18 = 0,6667$

12.12. Durch vollständige Induktion ist zu zeigen: $s_n = \ln(n+1)$

Ind.-Anf.: $s_1 = A_1 = \ln 2$ (s. o.)

Ind.-Vor.: $s_k = \ln(k+1)$

Ind.-Beh.: $s_{k+1} = \ln(k+2)$

Übergang vom k -ten zum $(k+1)$ -ten Glied durch Addition von $A_{k+1} = \ln \frac{k+2}{k+1}$

- 12.1.** Das Bild der Funktion steigt bei $x = -6$ senkrecht an, hat einen Maximumpunkt $M(-5; 1)$, fällt dann, durchstößt die x -Achse bei $Q(-2; 0)$ und verlässt das Integrationsintervall in $P(3; -3)$. Der Inhalt der gesuchten Fläche beträgt $9 \frac{1}{6}$ FE. Schätzen Sie zur Kontrolle den Flächeninhalt anhand einer Skizze ab!
-
- 12.2.** Die Punkt-Richtungs-Form der Geradengleichung (Tafelwerk S. 51) liefert für die Tangente mit Anstieg 2 und dem Berührungs punkt $P_0(0,5; 2)$ $2 = \frac{y - 2}{x - 0,5}$ oder $y = 2x + 1$. Der gesuchte Flächeninhalt beträgt 1,36 FE.
-
- 12.3.** Die drei Innenwinkel lauten $45^\circ; 90^\circ; 82,9^\circ$. Der gesuchte Inhalt der krummlinig begrenzten dreieckigen Fläche beträgt 1 FE. (Vgl. Bild auf S. 135!)
-
- 12.4.** Es ergibt sich die auf Seite 135 dargestellte Kurve. Der Flächeninhalt (schräffiert) beträgt $\frac{1}{3}$ FE.
-
- 12.5.** Die Minima liegen jeweils in dem Punkt $E\left(\frac{1}{a} \ln a; a(1 - \ln a)\right)$. Aus $f(x_E) = a(1 - \ln a) = 0$ folgt:
 $1 = \ln a; a = e$.
-
- 12.6.** $I = 8\sqrt{2t+1} - 8 = 16$
 $8\sqrt{2t+1} = 24; \sqrt{2t+1} = 3; t = 4$.
 (Vgl. auch Abschn. 5.) Für $t = 4$ ist der Inhalt der angegebenen Fläche 16 FE.
-
- 12.7.** Der gesuchte Flächeninhalt beträgt 9,42 FE.
 Aus Symmetriegründen hätte es genügt, den Inhalt der Fläche A_x zwischen $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{2}$ zu bestimmen.
 $A_{\text{links}} = 3\pi - A_z$
 $A_{\text{rechts}} = A_z; A = 3\pi$.
-
- 12.8.** Das Bild ist ein Teilstück einer sinusförmigen Kurve (siehe Abb. S. 135) mit $f(0) = 1$ und $M\left(\frac{\pi}{6}, 1,5\sqrt{3}; \text{Maximum}\right)$
 $I = \{0,25 + 1\} - \{-0,25 + 0\} = 1,5$
 Der gesuchte Flächeninhalt beträgt 1,5 FE.
-
- 12.9.** Der Maximumpunkt befindet sich bei $M\left(e; \frac{1}{e}\right)$. Die x -Achse wird im Punkte $N(1; 0)$ geschnitten.
 (Ein Wendepunkt befindet sich bei $W(4,48; 0,33)$.) Die Kurve nähert sich allmählich der x -Achse. (Vgl. Bild auf S. 135.)
 Der gesuchte Flächeninhalt beträgt 0,5 FE.

D

12.10. Die Bilder beider Funktionen schneiden einander zweimal:

$$P_1 \left(\frac{\pi}{6}; \frac{3}{4} \right)$$

und

$$P_2 \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{3}{4} \right)$$

$$\tan \varphi = \frac{0,5\sqrt{3} - (-0,5\sqrt{3})}{1 - 0,75}$$

$$= 4\sqrt{3} = 6,928 \quad \varphi = 81,8^\circ$$

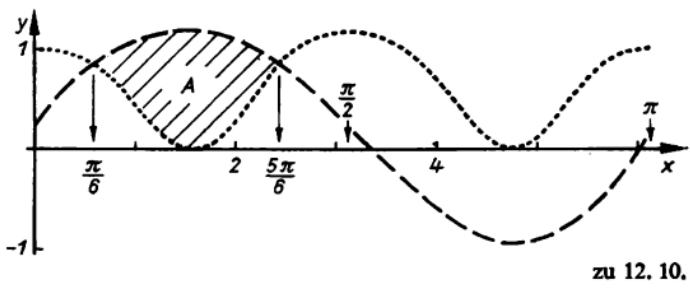
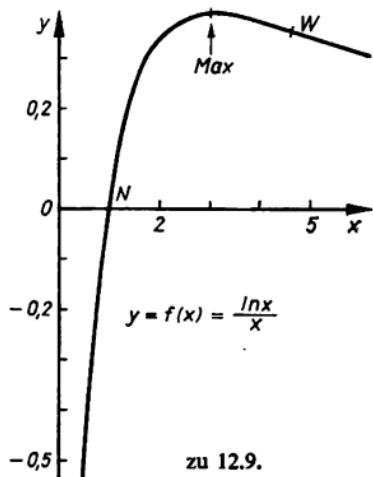
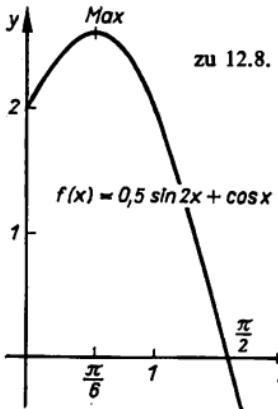
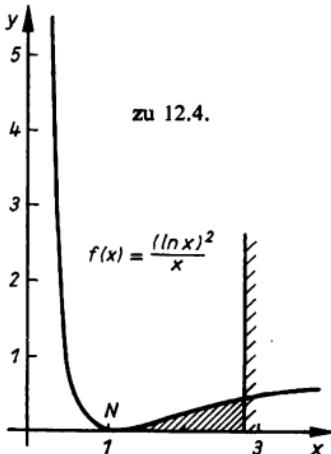
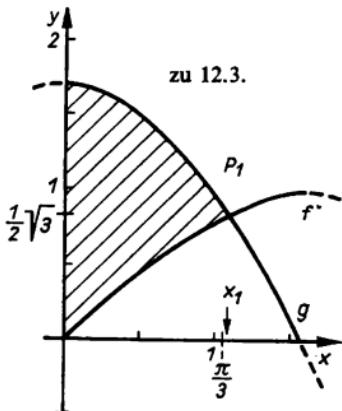
Der gesuchte Flächeninhalt beträgt rund 1,65 FE (s. S. 135).

12.11. Man überzeuge sich durch Aufstellen der Geradengleichungen, daß ein Schnittpunkt sehr weit vom Ursprung entfernt liegt.

$$0,5\varphi = 33,7^\circ. \text{ Das Dreieck ist nicht gleichseitig.}$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt $A = 216$ FE.

12.12. Induktionsbeweis: $s_k + A_{k+1} = \ln(k+1) + \ln \frac{k+2}{k+1}$
 $= \ln(k+1) + [\ln(k+2) - \ln(k+1)]$
 $= \ln(k+2), \text{ q. e. d.}$



Einige häufig verwendete mathematische Begriffe

I. Ableitung Differentialquotient	$\frac{dy}{dx}$; $f'(x)$ funktionaler Ausdruck, durch Differenzieren von $f(x)$ entstanden, kennzeichnet Anstieg von Kurven
absolut (Mathem.)	a) von x freier Summand (konstantes Glied) b) in Betragsstriche eingeschlossen, stets nicht-negativ
Anstieg	m ; $\tan \alpha$; Verhältnis Gegenkathete (Höhe) zu Ankathete im Anstiegsdreieck (Steigung dagegen meist Verhältnis Höhe zu Länge steigender Strecke)
Abstand	Lotrechte Entfernung eines Punktes von einer Geraden, senkrechte Entfernung zweier Parallelen
Argument (Mathem.)	Element des Definitionsbereiches einer Funktion (vor allem bei Log.- und trig. Funktionen)
Betrag (absoluter)	a) nicht-negativer Wert, definiert durch $ a := a$ für $a \geq 0$ und $ a = -a$ für $a < 0$ b) Betrag von Vektoren = Vektorlänge $ a = \sqrt{a \cdot a}$
Funktion	f , Kennzeichnung einer mindestens eindeutigen Abbildung mit dem Bildungsgesetz $y = f(x)$
Funktionswert	$f(x_0)$, y -Wert für den x -Wert x_0
Goniometrische Gleichung	Gleichung, die x als Argument einer trigonometrischen Funktion enthält
Integrand	Größe, die zu integrieren ist; steht zwischen \int und dx

Meiden, Schneiden, Berühren	Lagebeziehung, entscheidbar durch Lösung eines Gleichungssystems. Bei quadratischen Gleichungen gilt:
	Radikand negativ: Meiden
	Radikand gleich 0: Berühren
parallel	Geraden in gleicher Richtung $m_1 = m_2$, mit gleichem Abstand und ohne gemeinsamen Schnittpunkt im Endlichen – nur für Geraden der Ebene
Radikand	Größe, aus der die Wurzel zu ziehen ist (muß nicht-negativ sein)
Rechnen mit 0	$0 : z = 0$; $0 : 0$ unbestimmt; $z : 0$ nicht definiert, über alle Grenzen wachsend; $0 \cdot z = 0$; $\sqrt{0} = 0$; $0^a = 0$ (für $a > 0$)
reziproker Wert (Kehrwert)	Zahl, die durch Vertauschen von Zähler und Nenner eines Bruchs entsteht
senkrecht (orthogonal)	im rechten Winkel zueinander, im rechten Winkel zu einer gegebenen Geraden
vertikal	senkrecht zur Erdoberfläche oder zur Grundebene
Tangentenanstieg	$m = \tan \alpha = f'(x_0)$ Anstieg der Kurve oder der Tangente in einem Punkt $P_0(x_0; y_0)$
Term	mathematischer Ausdruck, meist Summand, kann auch Produkt von Faktoren, mit Koeffizienten multiplizierte Größe oder Klammerausdruck sein
verkettete Funktion	Funktion, die in sich (als Argument) eine andere Funktion enthält. Erkennungsmerkmale: z. B. Klammer mit x in anderer als 1. Potenz oder nicht nur aus x bestehender Exponent, Radikand oder Argument-Ausdruck bei trigonometrischer und Logarithmenfunktion

Der Autor, Dr. rer. nat. Steffen Koch, hat als Lehrer an einer Volkshochschule langjährige Erfahrungen in der Erwachsenenbildung gesammelt. Die im Unterricht aufgetretenen Schwierigkeiten beim Lösen von Mathematikaufgaben haben ihn veranlaßt, etwa 140 ausgewählte Aufgaben zusammenzustellen und die Lösungen in 4 Teilschritten anzugeben. Die Aufgaben entsprechen dem Niveau der Fachschulen und Oberschulen. Jede Aufgabe ist in folgende Abschnitte gegliedert:

Teil A: Aufgabenstellung

**Teil B: Erste Lösungsschritte, meist mit dem Lösungsplan,
dem Ansatz und den notwendigen Vorüberlegungen**

**Teil C: Durchführung der weiteren rechnerischen
Operationen**

Teil D: Fixierung des Ergebnisses, Kontrolle und Formulierung der Antwort.

Hier werden auch Schlußfolgerungen gezogen, Verallgemeinerungen erwähnt und Hinweise auf Ergänzungen gegeben.

