Lehrmaterial für das Fachschulfernstudium

PHYSIK

11

Einführung in das physikalische Praktikum

Institut für Fachschulwesen
der Deutschen Demokratischen Republik
Karl-Marx-Stadt

Lehrmaterial für das Fachschulfernstudium

Physik
11

2. Ausgabe

Herausgeber:
Institut für Fachschulwesen
der Deutschen Demokratischen Republik
Karl-Marx-Stadt

Verfaßt von:

Dipl.-Gwl. Karl Reusch, Ingenieurschule für Textilindustrie, Karl-Marx-Stadt

Erich Dittrich Dresden

Lektoriert von:

Helmut Bock, Ingenieurschule für Technische Glasverarbeitung Ilmenau (Thür.)

Roland Hädrich, Ingenieurschule für Textilindustrie Reichenbach (Vogtl.)

Dipl.-Phys. Dietmar Mende, Ingenieurschule für Walzwerk- und Hüttentechnik Riesa

Bearbeitet von:

Erich Dittrich, Dresden

Abgeschlossen am 30. 6. 1961

1. Bedeutung des physikalischen Praktikums

Das Experiment gestaltet einen in der Natur verlaufenden Vorgang nach und gestattet, diesen Vorgang beliebig oft zu wiederholen. Auf diese Weise können die Gesetzmäßigkeiten aufgefunden werden, die in dem untersuchten Prozeß wirken. Der Versuch ist somit eine der wesentlichsten Methoden, um die menschliche Erkenntnis zu erweitern. Das Experiment erlaubt auch, aus einer Erkenntnis abgeleitete Schlußfolgerungen auf ihre Richtigkeit zu überprüfen. Diese Seite des Experiments hat für die technische Praxis große Bedeutung, denn jede Neuentwicklung stellt eine Anwendung vorhandenen Wissens auf ein neues Problem dar, wobei der Versuch bestätigen muß, ob die Überlegungen richtig waren und brauchbar sind.

Das physikalische Praktikum soll Sie lehren, wie man solche Versuche anlegt und durchführt, wobei Sie zugleich lernen, ihre physikalischen Kenntnisse praktisch anzuwenden, und sich Fertigkeiten im Umgang mit den verschiedenen Meßgeräten und Apparaturen aneignen; schließlich vertieft und erweitert es aber auch Ihre Kenntnisse.

Das physikalische Praktikum gibt Ihnen also nicht nur Gelegenheit, Ihr Grundwissen zu wiederholen und aufzufrischen, sondern befähigt Sie auch, dieses Wissen am Lösen praktischer Probleme zu erproben, und vermittelt Ihnen die Erfahrungen für eine eigene sinnvolle Versuchstätigkeit im Betrieb. Gleichzeitig gewährt es Ihnen einen Einblick in die Methoden der physikalischen und technischen Forschung.

2. Allgemeine Grundsätze einer Laborordnung

Aus organisatorischen, sicherheitstechnischen und disziplinarischen Gründen wird an jeder Schule eine Laborordnung erlassen. Da die meisten der in ihr enthaltenen Punkte allgemeingültig sind, geben wir Ihnen die wichtigsten bereits hier bekannt:

1. Der Praktikant haftet für fahrlässige oder mutwillige Beschädigung der Laboreinrichtungen.

    Gehen Sie daher mit den oft sehr wertvollen Apparaten und Geräten, die Ihnen zur Verfügung gestellt werden, so schonend wie möglich um. Unterlassen Sie bei Unkenntnis der Bedienungsvorschriften jegliches Probieren an den Geräten, um Schäden zu vermeiden. Ein Ausfall von Versuchsapparaten schadet nicht nur Ihnen, sondern auch Ihren Studienkollegen, indem er deren Ausbildung beeinträchtigt.

2. Alle Meßgeräte und Apparaturen, die zu Beginn des Praktikums an Sie ausgegeben wurden, sind nach Beendigung der Versuche an die Ausgabestelle unaufgefordert zurückzugeben.

   Dies gilt auch für besondere Geräte, die zu Beginn eines speziellen Versuches ausgegeben werden sowie für Chemikalien, die nach dem Giftgesetz unter Verschluß gehalten werden müssen.

3. Wird während des Versuches ein Gerät beschädigt, so ist dies unverzüglich dem Praktikumsleiter zu melden.

4. Gehören zur Versuchsapparatur elektrische Geräte, so darf die Schaltung erst in Betrieb genommen werden, wenn sie der Praktikumsleiter geprüft hat.

5. Beim Arbeiten mit Äther oder anderen brennbaren Substanzen sind die erforderlichen Schutzmaßnahmen zu beachten.

   So dürfen Flaschen mit Äther nicht in der Nähe brennender Gasflammen aufbewahrt oder geöffnet werden. Die Versuche mit Äther sind nur in dem dafür vorgesehenen Raum oder an der durch den Praktikumsleiter bezeichneten Stelle durchzuführen.

6. Nach Beendigung eines Versuches ist der Laborplatz aufzuräumen.

7. Den Anweisungen des Praktikumsleiters oder seines Assistenten ist auf jeden Fall Folge zu leisten.

Neben diesen allgemeinen Regeln machen die Besonderheiten der einzelnen Schulen weitere Vorschriften erforderlich, die in der jeweiligen Praktikumsordnung festgelegt sind. Über diese Ordnung werden Sie vor Beginn des Praktikums belehrt, wobei Sie in den meisten Fällen die Kenntnisnahme der Labordnung durch Ihre Unterschrift zu bestätigen haben.

3. Hinweise zur Durchführung eines Versuches

3.1. Vorbereitung des Versuchs

Vor Beginn des Versuches müssen Sie sich Klarheit darüber verschaffen, welches Ziel erreicht werden soll und auf welchem Wege dies erfolgen kann. Der Weg zur Lösung hängt von den Gesetzmäßigkeiten ab, die dem Problem zugrunde liegen. Zur Vorbereitung des Versuches gehört demnach das Studium der theoretischen Grundlagen, auf denen der Versuch aufbaut. Dann erst können Sie den Versuchsablauf überblicken.

Um erfolgreich arbeiten zu können, muß man aber nicht nur die Theorie kennen, sondern auch die Wirkungsweise der zu benutzenden Apparatur. Machen Sie sich daher vor Versuchsbeginn mit dem Versuchsaufbau und mit den Bedienungsvorschriften dieser Geräte vertraut. Ist dies geschehen, so können Sie Störungen in der Arbeit der Geräte frühzeitig feststellen, Fehlerquellen beseitigen und falsche Ergebnisse vermeiden.

Zu jedem Versuch, den Sie im Praktikum durchführen, erhalten Sie eine schriftliche Anleitung, die Ihnen die Vorbereitung erleichtern soll. In diesen Anleitungen finden Sie neben einer kurzen Darstellung der theoretischen Grundlagen des Versuches auch Angaben über die Arbeitsweise der benutzten Geräte sowie in manchen Fällen Hinweise zur Handhabung komplizierterer Apparate. Diese Anleitung erfüllt jedoch nur dann ihren Zweck, wenn sie vorher von Ihnen durchgearbeitet wird!

Zur Vorbereitung eines Versuches gehört weiterhin, daß Sie sich den voraussichtlichen Ablauf überlegen und das Protokollschema vorbereiten. So können Sie die Tabellen inzwischen zeichnen und beschriften, in die dann die Meßwerte eingetragen werden (s. Abschn. 4). Außerdem müssen Sie überlegen, welche Einflüsse das Ergebnis des Versuches verfälschen können und welchen Einfluß die Güte der Meßgeräte hat. Das heißt, Sie müssen den voraussichtlichen Fehler abschätzen, mit dem Ihr Versuchsergebnis behaftet ist. Eine Anleitung zu dieser Fehlerabschätzung finden Sie im Abschnitt 5 dieser Einführung.

Erledigen Sie die hier genannten Vorarbeiten gewissenhaft, so müßte der Erfolg des Versuches gewährleistet sein.

3.2. Aufbau der Apparatur

Wenn Sie sich mit dem Zweck des Versuches und der Wirkungsweise der eingesetzten Geräte vertraut gemacht haben, beginnen Sie mit dem Aufbau der Apparatur. Nähere Hinweise finden Sie in der jeweiligen Versuchsanleitung. Bauen Sie die Apparatur stets selbst auf! Sie haben dann die Gewißheit, daß keine Fehlerquelle im Aufbau enthalten ist. Außerdem können Sie durch den Zusammenbau der Apparatur vieles für spätere Versuche lernen.

Überlegen Sie sich beim Aufbau die Wirkung jedes einzelnen Teiles und das voraussichtliche Zusammenwirken ganzer Baugruppen. Vergessen Sie nie, die fertige Apparatur nochmals zu prüfen, bevor Sie diese in Betrieb nehmen! Sind Sie sich nicht ganz im klaren, so lassen

Sie die Prüfung durch den Praktikumsleiter oder seinen Assistenten vornehmen. Bei elektrischen Schaltungen wird die Überprüfung vor Anlegen der Spannung ohnehin vom Praktikumsleiter durchgeführt.

3.3. Beobachtung des Versuchsablaufs

Ist die Apparatur aufgebaut und geprüft, so konzentrieren Sie sich auf die zu lösende Aufgabe. Dazu gehört unter Umständen eine Verteilung der durchzuführenden Arbeiten innerhalb der Arbeitsgruppe. Ein Mitglied der Gruppe schreibt z. B. die Werte nieder, die ein zweites mißt und abliest.

Achten Sie während der Durchführung des Versuches darauf, daß die Apparatur auch richtig funktioniert. Bei vermutlichen Fehlanzeigen oder bei Störungen ist der Versuch sofort zu unterbrechen und die Ursache zu beseitigen. Halten Sie alle Erscheinungen und Einflüsse fest, die während des Versuches auftreten und den weiteren Ablauf beeinträchtigen könnten. Oft geben diese Wahrnehmungen Aufschluß über Zusammenhänge, die Sie vorher nicht berücksichtigt haben und die deshalb die Ergebnisse verfälschen. Denken Sie stets daran, daß von der gewissenhaften Arbeit des Beobachters der Erfolg des Versuches, eventuell auch der Erfolg oder Mißerfolg einer Forschungsgruppe abhängt. Halten Sie daher nur die Dinge schriftlich fest, die Sie wirklich beobachtet haben, und nicht die, die Sie sehen wollten!

3.4. Wie wird gemessen?

Der Versuch dient zur Ermittlung einer physikalischen **Größe.** Das kann entweder direkt durch eine Messung erfolgen oder indirekt, indem aus einer oder mehreren **Meßgrößen** die gesuchte Größe rechnerisch bestimmt wird. Wir wollen uns zuerst dem ersten, einfacheren Fall zuwenden.

Wenn wir eine physikalische Größe messen, dann vergleichen wir sie mit einer anderen gleicher Art, die als Einheit dient, und mit dem Meßgerät stellen wir fest, wie oft diese Einheit in der zu messenden Größe enthalten ist.

Wir wollen uns den Meßvorgang noch näher anhand der gebräuchlichen meßtechnischen Begriffe klarmachen, wie sie in den Gerätebeschreibungen der Herstellerbetriebe zu finden sind.
Als **Skalenteil** eines Meßgerätes bezeichnet man den Abstand zweier benachbarter Marken (Teilstriche) einer Skale. Die Größe dieses Ab-

standes soll möglichst zwischen 0,8 mm und etwa 5 mm liegen, nur dann lassen sich aus deutlicher Sehweite die Zehntel-Skalenteile gut schätzen.

Der **Skalenwert** ist derjenige Teil oder dasjenige Vielfache der Einheit, das einem Skalenteil entspricht. Der Skalenwert hat also stets die Dimension der Meßgröße.

Der Meßwert der Meßgröße beträgt dann:

Meßwert = Skalenwert mal Anzeige in Skalenteilen

Lehrbeispiel 1

Bei dem Dynamometer in Bild 1 beträgt der Skalenwert der Teilung 10 p. Die Anzeige in Skalenteilen ist 5,5.

Der Meßwert der Kraft ist demzufolge

$$F = 5{,}5 \cdot 10\ \mathrm{p} = 55\ \mathrm{p}$$

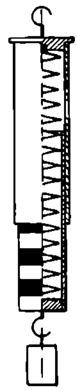

Bild 1

Beim Ablesen der angezeigten Werte sind folgende Punkte zu beachten:

1. Schauen Sie stets senkrecht auf die Skale des Gerätes, nur dann sehen Sie die Marke, die den abzulesenden Wert anzeigt, an der richtigen Stelle, und es tritt kein Ablesefehler durch Parallaxe auf.
2. Jedes Meßgerät besitzt einen gewissen Anzeigefehler, der durch das Herstellungsverfahren bedingt ist. Weitere Fehler treten beim Bedienen und beim Ablesen auf.

   Alle diese Fehler verursachen eine **Unsicherheit**[1] des Meßwertes, die durch mehrmalige Messung verringert werden kann. Dabei sind nach Möglichkeit verschiedene Teile der Skale zu benutzen.
3. Achten Sie während der Messungen darauf, daß die Meßbedingungen die gleichen bleiben. Viele Meßgrößen und Meßgeräte

[1] Nach DIN 1319 wird empfohlen, den Begriff „Genauigkeit“ für quantitative Meßangaben zu vermeiden, da ein Meßergebnis nur durch etwas Negatives beschrieben werden kann, und zwar durch die Abweichung des Meßergebnisses vom richtigen Wert. In Verbindung mit zahlenmäßigen Angaben ist deshalb der Begriff „Unsicherheit“ zu verwenden.

werden durch die Temperatur, den Luftdruck oder andere Größen beeinflußt.

4. Messen Sie stets so genau wie nötig. Um für eine bestimmte Meßaufgabe das geeignete Meßgerät auswählen zu können, merken Sie sich:

> Die **Ungenauigkeit** eines Meßgerätes soll 1/5 bis 1/10 des zulässigen Größtfehlers der Messung nicht übersteigen.

Ist z. B. eine Länge von 1 m mit einer Unsicherheit von 0,1% zu messen, also $l = 1\ \text{m} \pm 0{,}001\ \text{m}$, so soll die Unsicherheit U des Längenmeßgerätes $U = \pm\ 0{,}0001\ \text{m}$ bis $\pm\ 0{,}0002\ \text{m}$ betragen. Nach DIN 864 bis 866 (Strichmaßstäbe) eignet sich für diese Messung ein Stahlmaß aus Federbandstahl vom Genauigkeitsgrad II.

4. Hinweise zur Abfassung des Versuchsprotokolls

Das Protokoll, das Sie über die Durchführung des Versuches anfertigen, muß alles Wichtige enthalten. Dazu gehören Angaben über die benutzten Geräte und Meßinstrumente und eine kurze Beschreibung des Versuchsablaufs sowie der Versuchsbedingungen. Haben Luftdruck, Raumtemperatur und Luftfeuchtigkeit Einfluß auf die Versuchsergebnisse, so müssen ihre Werte während des Versuches laufend überwacht und Änderungen aufgenommen werden.

Nach dieser Beschreibung erfassen Sie die im Versuch gemessenen Werte und die aus ihnen errechneten Werte in einer Tabelle, die ebenfalls Bestandteil des Protokolls sein muß. Die Berechnungen, aus denen sich die gesuchten Größen ergeben, müssen aus dem Protokoll ersichtlich sein, damit jederzeit eine Kontrolle möglich ist. Durchgeführte Nebenrechnungen können wegbleiben, da nur das Wesentliche festgehalten wird.

Ob die Berechnungen mit dem Rechenstab oder mit Logarithmentafeln durchgeführt werden, entscheidet die Fehlerabschätzung, die Sie vor der endgültigen Berechnung durchführen. Die Rechnung darf auf keinen Fall ungenauer sein als die festgestellten Meßwerte, sie kann aber auch nie genauer als die Messung sein. Für Überschlagsrechnungen ist der Rechenstab auf alle Fälle brauchbar.

Haben Sie den durchzuführenden Versuch richtig vorbereitet, so können Sie vor Beginn des Versuches die Tabelle für die Meßwerte und deren Auswertung vorbereiten. Dann können Sie die gemessenen Werte sofort ordnen, und vergessene Messungen verraten sich durch leere Stellen in der Tabelle.

Den Kopf des Protokolls bereiten Sie ebenfalls vor. Dieser Kopf enthält das Ziel des Versuches, die Namen des Protokollanten und seiner Helfer sowie das Datum der Versuchsdurchführung.

Wir geben Ihnen nunmehr ein Beispiel für die Abfassung eines Protokolls, aus dem Sie die Art der Vorbereitung entnehmen können. Die erforderlichen Berechnungen wurden zunächst weggelassen. Sie finden die Fehlerabschätzung als Beispiel des Abschnitts 5.3. Ein Beispiel der Anleitungen, die Sie für das Praktikum ausgehändigt bekommen, wurde vorangestellt.

Lehrbeispiel 2

Versuch M 17: Bestätigung des Gesetzes von Boyle und Mariotte.

1. Aufgabenstellung

Die Gültigkeit des Gesetzes ist innerhalb der erreichbaren Fehlergrenzen zu bestätigen.

2. Geräte

1 einseitig geschlossenes U-Rohr mit Millimeterskale
1 Flasche Quecksilber mit Trichter
1 Glasstab
1 Quecksilberzange, 1 Quecksilbertablett
1 Ableselupe
1 Barometer (Wandgerät im Labor)

3. Theorie

Der Energiezustand einer abgeschlossenen Gasmenge ist durch die Größen Druck, Temperatur und Volumen eindeutig bestimmt. Bleibt die Temperatur gleich, so ist das Produkt aus dem Druck p und dem Volumen V ebenfalls konstant, d. h., es ist

$$p \cdot V = k \tag{1}$$

Gleichung (1) ist das Gesetz von Boyle und Mariotte. Im Versuch schließen Sie im geschlossenen Schenkel des U-Rohres eine Gasmenge mit dem Volumen V_1 durch einen Quecksilberfaden ab. Diese Menge steht unter dem im Raum herrschenden Luftdruck p_1. Durch Zugießen von Quecksilber in den offenen Schenkel des U-Rohres vergrößern Sie den Druck, unter dem das Gas steht. Ist die Höhe des Quecksilberspiegels im offenen Schenkel

h_0, im geschlossenen h_g, so beträgt der Gasdruck p_2 des Gases jetzt

$$p_2 = p_1 + p_{Hg}$$

$$p_2 = p_1 + (h_0 - h_g) \; g \, \varrho_{Hg} \tag{2}$$

Da das Rohr im geraden Teil des Schenkels überall gleichen Querschnitt A hat, kann das Volumen des eingeschlossenen Gases auch durch die Länge des Einschlußzylinders beschrieben werden, denn es ist

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{A\, l_1}{A\, l_2} = \frac{l_1}{l_2} \tag{3}$$

Die Meßfehler für die Druckmessung sind
$\Delta p_1 = 0{,}1$ Torr am Barometer, $\Delta h = 0{,}5$ mm im Rohr. Die Länge der Gassäule kann ebenfalls bis auf 0,5 mm genau gemessen werden.

4. Versuchsdurchführung

4.1. Abschätzen des durch die Meßanordnung bedingten Fehlers.

4.2. Messen der Länge l_1 des Gasraumes. Ablesen des Luftdruckes p_1 am Barometer des Labors.

4.3. Zugießen von Quecksilber. Der Spiegel im offenen Rohr soll dabei um rund 50 mm steigen. Ablesen der Länge l_2 der Gassäule und des Luftdruckes. Gasblasen an der Glaswand entfernen Sie durch Reiben mit dem Glasstab.

4.4. Wiederholung des Arbeitsganges von 3. (3 mal).

4.5. Berechnung des Gesamtdruckes nach Gleichung (2) aus den Meßwerten von 3. und 4.

4.6. Berechnung der Konstanten k nach Gleichung (1) aus den Meßwerten von 2. bis 4. und den Ergebnissen aus 5.

4.7. Berechnung des mittleren relativen Fehlers aus den Ergebnissen von 6.

4.8. Vergleich der nach 1. und 7. ermittelten Fehler und Diskussion des Ergebnisses.

Dieser Anleitung sind der Arbeitsgang und die Art der benutzten Geräte zu entnehmen. Die Tabelle für die Meßwerte läßt sich vorbereiten. Sie muß Spalten für die Länge l des Gasraumes, den Barometerstand p_1, die Niveaudifferenz $h_0 - h_g$, den Gasdruck p_2 und das Produkt $p_2 \cdot l$ enthalten. Die Anzahl der Zeilen richtet sich nach der Anzahl der Messungen, die hier gleich vier ist.

Der Kopf des Protokolls und die Versuchsbeschreibung erhalten folgendes Aussehen:

Physikalisches Praktikum

Protokoll zu Versuch M 17 durchgeführt am ....

Protokollant .... Klasse ....

Mitarbeiter .... abgegeben am ....

Aufgabe: Die Gültigkeit des Boyle-Mariotteschen Gesetzes ist zu bestätigen.

Versuchsbeschreibung: In einem U-Rohr wird eine Gasmenge m_1 abgeschlossen. Der auf das Gas ausgeübte Druck setzt sich zusammen aus dem Luftdruck und dem Druck des Quecksilbers im offenen Schenkel des Rohres. Wird der Barometerwert p_1 in Torr abgelesen und p_{Hg} ebenfalls in Torr angegeben, was durch die Millimeterskale im Rohr möglich ist, so ist der Gesamtdruck gleich

$$p_2 = p_1 + (h_0 - h_g)\ g\ \varrho_{Hg}$$

Meßwerte:

Messung	$\frac{l}{\text{mm}}$	$\frac{(h_0 - h_g)}{\text{mm}}$	$\frac{p_1}{\text{Torr}}$	$\frac{p_2}{\text{Torr}}$	$k = l \cdot p_2$	$k - k_m$	$(k - k_m)^2$
1							
2							
3							
4							

Das Protokoll wird später als Lehrbeispiel 11 fortgeführt.

5. Einführung in die Fehlerrechnung

5.1. Fehlerarten

5.1.1. Definition des Fehlers. Jedes Maß, das ein Gegenstand verkörpert, jedes Meßgerät und auch jeder Meßvorgang sind mit Fehlern behaftet. Es ist deshalb nicht möglich, den tatsächlichen Wert der Meßgröße völlig exakt zu messen. Sie erkennen das schon daraus, daß sich bei Wiederholung der Messung derselben Größe (selbst unter gleichen Bedingungen) meist ein anderer Meßwert ergibt.

Die Abweichung eines Meßergebnisses vom wahren, meist unbekannten Wert der Meßgröße (Sollwert) bezeichnet man als Fehler. Er ist nach Betrag und Vorzeichen eindeutig durch die Beziehung bestimmt:

$$\boxed{\text{Fehler} = \text{Meßwert minus Sollwert}} \tag{1}$$

Der Fehler ist positiv, wenn ein Meßergebnis zu groß ist oder ein Meßgerät zuviel anzeigt; er ist negativ, wenn das Meßergebnis oder die Anzeige zu klein ist.

Die Ursachen für das Auftreten von Fehlern sind verschiedener Art, doch lassen sich die Fehler in zwei Gruppen einteilen, die sich in ihrem Wesen unterscheiden.

5.1.2. Systematische Fehler. Die erste Gruppe von Fehlern umfaßt die systematischen Fehler. Dies sind Fehler, die bei unveränderten Meßbedingungen immer wieder in der gleichen Größe auftreten und deren Ursache deshalb feststellbar ist. Sie sind grundsätzlich — wie der Name sagt — auf systematische Weise bestimmbar und lassen sich daher durch Berichtigung des Meßwertes aufheben.

Ursachen dieser Fehler können sein: unzweckmäßiger Aufbau der Meßanordnung, unsachgemäße Aufstellung oder fehlerhafte Konstruktion des Instruments, ungenaue Skalenteilung u. a.

Da diese Fehler stets in derselben Größe auftreten, werden sie erst bemerkt, wenn die Meßanordnung oder das Meßgerät mit einem genaueren Meßverfahren überprüft wird. Durch bloßes Wiederholen der Messung mit demselben Meßgerät lassen sich systematische Fehler weder erkennen noch ausschalten.

Merken Sie sich:

> Fehler, die regelmäßig und gleichbleibend auftreten, heißen systematische Fehler. Sie sind beherrschbar, d. h., sie können bestimmt und durch Berichtigung des Meßwertes aufgehoben werden.

Bei handelsüblichen geeichten Geräten werden die systematischen Fehler in solchen Grenzen gehalten, daß sie in der Praxis meist vernachlässigt werden können. Geeichten Geräten wird von der Eichbehörde, dem Deutschen Amt für Meßwesen (DAM), ein Eichschein beigegeben, auf dem die Korrektionen vermerkt sind.

5.1.3. Zufällige Fehler. Die zweite Art von Fehlern, die zufälligen Fehler, treten bei jeder Einzelmessung in unterschiedlicher Größe und Richtung auf. Sie verursachen die Streuung der Meßwerte, d. h. das Schwanken der Einzelwerte um einen Mittelwert. Die Ursachen für die zufälligen Fehler liegen in der Person des Beobachters, in unkontrollierbaren Änderungen der Meßbedingungen, in Änderungen der Reibungskräfte im Meßgerät u. a. So treten bei Zeitmessungen mit der Stoppuhr stets zufällige Fehler auf, die auf das unterschiedliche Reaktionsvermögen des Messenden zurückzuführen sind. Zufällige Fehler entstehen weiterhin beim Schätzen der Zehntel des Skalenwerts. Im Gegensatz zu den systematischen Fehlern sind die zufälligen Fehler nicht beherrschbar. Um den Einfluß dieser Fehler auf das Meßergebnis weitgehend auszuschalten, muß man die Messung der Größe bei gleichbleibenden Bedingungen mehrmals wiederholen. Aus den Einzelmessungen läßt sich dann das arithmetische Mittel als wahrscheinlichster Wert der Meßgröße bestimmen.

> Zufällige Fehler sind nicht beherrschbar. Ihr Einfluß auf das Meßergebnis läßt sich weitgehend verringern, wenn man aus mehreren Messungen den Durchschnittswert ermittelt.

Ein Meßwert A kann sowohl systematische als auch zufällige Fehler enthalten. Ein Meßergebnis hingegen darf mit keinem systematischen Fehler F' mehr behaftet sein, sondern nur noch mit einer Unsicherheit $\pm U$ infolge zufälliger Fehler. Wurde z. B. ein Meßwert A mit einem Meßverfahren bestimmt, das mit dem systematischen Fehler F' behaftet ist, so beträgt der berichtigte Meßwert A':

$$A' = A - F'$$

Dieser Meßwert enthält jetzt nur noch die Unsicherheit $\pm U$, so daß für das Meßergebnis E geschrieben werden kann:

$$E = A' \pm U$$

Im Praktikum werden Sie in erster Linie die Unsicherheiten berücksichtigen müssen. Haften den Meßgeräten und Verfahren systematische Fehler an, so erhalten Sie besondere Hinweise.

5.2. Berechnung des Fehlers.

Nach der Art und Weise, wie man quantitativ die Fehler angibt, unterscheidet man zwischen dem absoluten und dem relativen Fehler.

5.2.1. Absoluter Fehler der gemessenen Größe. Die Definition des absoluten Fehlers ist Ihnen vom Fach Mathematik her bekannt:

Der absolute Fehler ist die absolute Abweichung vom wahren Wert. Er wird in einer Maßeinheit der Meßgröße angegeben.

Zum Beispiel lautet das Meßergebnis einer Kraft mit Angabe des absoluten Fehlers

in allgemeiner Form $F + \delta F$

und in spezieller Form $(15 \pm 0{,}5)$ p

Wie hier gezeigt wird, verwendet man im speziellen Fall als Symbol für den Meßwert A' und die Unsicherheit U immer das Symbol der zu messenden Größe, z. B. F und δF. Als Symbol für den Fehler wird sowohl δ als auch Δ (delta, Klein- und Großbuchstabe) benutzt. Üblicherweise werden Fehler, deren Vorzeichen unbestimmt ist ($\pm$), also alle zufälligen Fehler, mit δ bezeichnet. Fehler, deren Vorzeichen bekannt ist (+ oder —), also alle systematischen Fehler, werden durch Δ gekennzeichnet.

5.2.1.1. Berechnung des Durchschnitts einer Meßreihe. Zufällige Fehler lassen sich, worauf schon hingewiesen wurde, weitgehend ausschalten, indem man aus einer Meßreihe den durchschnittlichen Meßwert rechnerisch bestimmt. Bezeichnet man die Einzelwerte mit x_i und die Anzahl der Messungen mit n, so ergibt sich der **Durchschnitt** $\bar{x}$ als das arithmetische Mittel der Einzelwerte der Meßreihe.

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots x_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i} \qquad (2)$$

Mit Hilfe des Durchschnitts lassen sich jetzt erst näherungsweise die zufälligen Fehler δ der Einzelmessungen bestimmen:

$$\delta_1 = x_1 - \bar{x},\ \delta_2 = x_2 - \bar{x},\ \ldots\ \delta_n = x_n - \bar{x}$$

Ein Teil der zufälligen Fehler ist stets negativ, der andere positiv, einzelne können auch null sein.

Für die Kontrolle gilt: $\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n = 0$

5.2.1.2. Mittlerer absoluter Fehler des Durchschnitts. Anhand dieser Einzelfehler ist man in der Lage, die **mittlere Unsicherheit des Durchschnitts** anzugeben; denn auch der Durchschnitt weicht noch geringfügig vom wahren Wert der Größe ab. Theoretisch fällt der Durchschnitt erst dann sicher mit dem wahren Wert der Größe zusammen, wenn die Zahl der Einzelmessungen unendlich groß gemacht würde.

Der **mittlere absolute Fehler des Durchschnitts** ergibt sich aus den Abweichungen der Einzelwerte vom Durchschnitt nach der Beziehung

$$\delta x = \pm \sqrt{\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots + \delta_n^2}{n(n-1)}} \qquad \boxed{\delta x = \pm \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i^2}{n(n-1)}}} \tag{3}$$

Aus den Gleichungen (2) und (3) ergeben sich folgende Hinweise für die praktische Arbeit:

1. Der Durchschnitt wird um so besser den wahren Wert der Größe wiedergeben, je mehr Messungen durchgeführt werden; denn je mehr Meßwerte vorliegen, um so wahrscheinlicher heben sich die begangenen zufälligen Fehler gegenseitig auf.
2. Der mittlere absolute Fehler des Durchschnitts ist der Wurzel aus der Anzahl n der Einzelmessungen umgekehrt proportional. Daraus folgt, daß eine übermäßige Steigerung der Anzahl der Einzelmessungen nur noch eine geringfügige Verbesserung des Fehlers und der durch ihn hervorgerufenen Meßunsicherheit bringt. Führen Sie z. B. an einem Gegenstand eine Längenmessung durch und nehmen zunächst zehn Einzelmessungen, dann aber fünfzig vor, so verhalten sich die mittleren absoluten Fehler beider Meßreihen s_1 und s_2 umgekehrt wie die Wurzeln aus den Anzahlen der Einzelmessungen:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{10}} = \frac{7{,}06}{3{,}16}$$

Das heißt, ein fünfmal größerer Aufwand verringert den Fehler auf nur rund 45% des ursprünglichen Wertes. Im allgemeinen reichen für praktische Erfordernisse zehn bis zwanzig Einzelmessungen aus. Wie aus Bild 2 hervorgeht, verringert sich die Unsicherheit des Durchschnitts bei mehr als zwanzig Messungen nur noch sehr wenig. Es ist deshalb besser, eine geringere Anzahl zuverlässiger Messungen durchzuführen als viele oberflächliche.

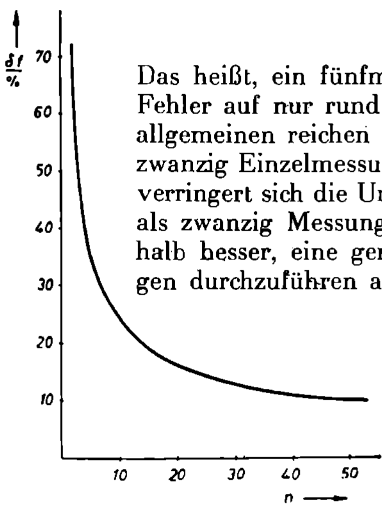

Bild 2

3. Um die gemessenen Werte bequem auswerten zu können, ist es ratsam, die einzelnen Meßwerte untereinander in eine Tabelle aufzunehmen und in die Rubriken seitlich daneben die errechneten Abweichungen der Einzelwerte vom Durchschnitt sowie die Quadrate dieser Abweichungen (siehe Lehrbeispiel 3). Um die Berechnung des Durchschnitts kontrollieren zu können, ist es zweckmäßig, die Einzelabweichungen getrennt nach positiven und negativen Abweichungen in zwei verschiedene Spalten aufzunehmen. Haben Sie den Durchschnitt richtig errechnet, so ist die Summe aus den positiven und negativen Abweichungen gleich null.

4. Enthält die Meßreihe einen Meßwert, der übermäßig stark von den anderen abweicht, so ist dieser zu streichen; denn offensichtlich hat bei dieser Messung ein grobes Versehen vorgelegen. Meist werden solche Ausreißer durch Unaufmerksamkeit des Beobachters verursacht.

   Um im Grenzfall hinreichend sicher nachprüfen zu können, ob ein Ausreißer oder ein zufälliger Fehler vorliegt, benutzen Sie die aus dem Fehlerwahrscheinlichkeitsgesetz abgeleitete Formel $f' = 4 \cdot \delta x \cdot \sqrt{n}$. Hierin ist n die Zahl der Einzelmessungen und δx der Fehler des errechneten Durchschnitts. Ist der Fehler des fraglichen Meßwertes größer als der mit der Formel errechnete Fehler f′, so liegt ein Ausreißer vor.

5. Die Entscheidung darüber, ob eine Meßreihe aufzustellen ist oder nicht, hängt von dem jeweiligen Meßverfahren ab. Sie ist dort durchzuführen, wo zufällige Fehler zu einer deutlichen Streuung der Einzelmeßwerte führen, z. B. bei Zeitmessungen mit der Stoppuhr oder bei Meßgeräten, deren Meßkraft sich mit dem Meßweg ändert, z. B. bei der Federwaage. Die meisten modernen Meßgeräte sind so konstruiert, daß kaum ein Streubereich beobachtet werden kann, vorausgesetzt, daß die Meßgröße während der Messung konstant bleibt. In diesen Fällen reicht eine Messung meist aus. Bei derartigen Meßgeräten kann die Unsicherheit des Meßergebnisses gleich der größten zu erwartenden Geräteungenauigkeit — die vom Hersteller meist angegeben wird — gesetzt werden. Bei sinnvoll konstruierten Meßgeräten sind Skalenwert und Skalenteil so aufeinander abgestimmt, daß die Ungenauigkeit des Meßgerätes höchstens 5 Zehntel des Skalenwertes beträgt. Die abgelesenen ganzen Skalenteile sind dann als genau zu betrachten, die geschätzten Zehntel eines Skalenteils sind mehr oder weniger ungenau. Liegen keine Fehlerangaben

über das Gerät vor, so geht man sicher, wenn man den Skalenwert eines halben Skalenteils als größte zu erwartende Meßunsicherheit (zufälliger Fehler) annimmt.

Lehrbeispiel 3

Die Messung einer Schallwelle im Kundtschen Rohr ergab folgende Werte der Wellenlänge λ_i:

Messung	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ/mm	52,3	52,5	52,9	52,0	52,5	52,5	51,7	53,3	51,4	53,3

Wie groß ist die Wellenlänge, und wie groß ist die mittlere Meßunsicherheit?

Lösung: Zur Lösung der gestellten Aufgabe ordnen Sie die Meßwerte in das vorher beschriebene Schema ein und berechnen den Durchschnitt sowie den mittleren absoluten Fehler des Durchschnitts. Dabei benutzen Sie für die Abweichung $\lambda_i - \overline{\lambda}$ das Symbol δ.

❶ Messung	❷ λ/mm	❸ $+\delta$/mm	❹ $-\delta$/mm	❺ δ^2/mm^2
1	52,3		0,14	0,0196
2	52,5	0,06		0,0036
3	52,9	0,46		0,2116
4	52,0		0,44	0,1936
5	52,5	0,06		0,0036
6	52,5	0,06		0,0036
7	51,7		0,74	0,5476
8	53,3	0,86		0,7396
9	51,4		1,04	1,0816
10	53,3	0,86		0,7396
$n = 10$	$\sum_{i=1}^{10} \lambda_i = 524{,}4$	$+ 2{,}36$	$- 2{,}36$	$\sum_{i=1}^{10} \delta^2 = 3{,}5440$

Zuerst berechnen Sie aus der Summe der 10 Einzelwerte (Rubrik 1) nach Formel (2) den Durchschnitt zu

$$\overline{\lambda} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \frac{1}{10} \cdot 524{,}4 \text{ mm} = 52{,}44 \text{ mm},$$

dann bestimmen Sie den zufälligen Fehler jeder Einzelmessung und schließlich an Hand der Summe der Fehlerquadrate (Rubrik 5) nach Gleichung (3) den mittleren absoluten Fehler des Durchschnitts

$$\delta\lambda = \sqrt{\frac{3{,}544}{10 \cdot 9}\,\mathrm{mm}^2} = \pm\, 0{,}198 \text{ mm} \approx 0{,}2 \text{ mm}$$

Das endgültige Meßergebnis der Wellenlänge lautet also

$$\underline{\underline{\lambda = 52{,}4 \text{ mm} \pm 0{,}2 \text{ mm}}}$$

5.2.2. Relativer Fehler der gemessenen Größe. Der relative Fehler der Meßgröße ermöglicht einen besseren Überblick über die Güte einer Messung.

Der relative Fehler f der gemessenen Größe ist der Quotient aus dem Betrag des absoluten Fehlers Δx und dem Betrag des wahren Wertes x (bzw. Durchschnitts) dieser Größe. Der relative Fehler wird in Teilen oder in Prozenten des Wertes der Größe angegeben.

$$\boxed{f \doteq \frac{|\Delta x|}{|x|}.} \qquad (4)$$

Als relative Fehler lassen sich beide Fehlerarten, also sowohl die zufälligen als auch die systematischen Fehler angeben.

Werden beispielsweise zwei Zeiten $t_1 = 30$ Sekunden und $t_2 = 3$ Sekunden mit einem absoluten Fehler von je + 0,1 Sekunde gemessen, so sind die absoluten Fehler beider Zeitwerte gleich. Ihre relativen Fehler sind jedoch nicht gleich; denn für den ersten Zeitwert errechnen Sie einen relativen Fehler von 0,0033 bzw. 0,33%, und beim zweiten Zeitwert beträgt der relative Fehler 0,033 bzw. 3,3%. Die Unsicherheit der zweiten Messung ist daher zehnmal größer als die der ersten. Aus diesem Beispiel erkennen Sie, daß sich ein und derselbe Meßfehler beim zweiten Meßwert viel größer auf die Unsicherheit des Ergebnisses auswirkt als beim ersten Meßwert.

Der relative Fehler ermöglicht den Vergleich verschiedener Messungen hinsichtlich ihrer Unsicherheiten. Zwei Meßanordnungen sind von gleicher Güte, wenn die erzielten Meßwerte mit dem gleichen relativen Fehler behaftet sind.

5.2.3. Absoluter Fehler einer berechneten Größe bei Beteiligung mehrerer fehlerbehafteter Größen. Es kommt sehr häufig vor, daß eine physikalische Größe nicht unmittelbar durch Messung, sondern rechnerisch aus mehreren einzelnen Meßgrößen bestimmt werden muß. So erfordert z. B. die Ermittlung der Geschwindigkeit die Messung der beiden Einzelgrößen Länge und Zeit. Beide unabhängig voneinander gemessenen Größen sind mit einem Fehler behaftet, der in den für die Geschwindigkeit zu errechnenden Wert eingeht. Es ist also allgemein zu klären, welchen Beitrag die Einzelfehler zum Gesamtfehler der errechneten Größe liefern. Auch hier müssen wir unterscheiden, ob die Einzelfehler systematische oder zufällige Fehler sind.

5.2.3.1. Die Auswirkung systematischer Einzelfehler auf den Gesamtfehler. Sind die einzelnen Meßgrößen mit einem systematischen Fehler behaftet, so entsteht an der zu berechnenden Endgröße ebenfalls ein systematischer Fehler. Im folgenden werden Ihnen zwei Rechenmethoden gezeigt, mit denen sich der Einfluß systematischer Einzelfehler auf das Rechenergebnis ermitteln läßt.

1. Methode. Sie besteht darin, daß man einfach in die Berechnungsformel für die Endgröße die Meßwerte der Einzelgrößen samt ihrer systematischen Fehler einsetzt. Als nächster Schritt der Rechnung werden dann die Glieder, in denen die einzelnen Meßfehler nicht auftauchen, isoliert und die übrigen Glieder zum Gesamtfehler zusammengefaßt. Hierbei treten auch Produkte von Einzelfehlern auf; diese werden in der weiteren Rechnung vernachlässigt, da sie dem Werte nach sehr klein gegenüber den übrigen Gliedern der Rechnung sind. Diese Fehlerberechnung auf elementare Art veranschaulicht das nächste Lehrbeispiel.

L e h r b e i s p i e l 4

Es ist die Dichte einer Flüssigkeit mit Hilfe des Auftriebes F_A nach der bekannten Gleichung $\varrho_F = \frac{F_{AF}}{F_{AW}} \cdot \varrho_W$ zu bestimmen. Hierbei ist der Auftrieb im Wasser und in der betreffenden Flüssigkeit mit einem geeigneten Körper und einer Feinwaage zu ermitteln.

L ö s u n g : Der systematische Meßfehler, mit dem F_{AF} bestimmt wurde, ist ΔF_{AF}, der von F_{AW} ist ΔF_{AW}. Setzen Sie die beiden gemessenen Größen samt ihrer absoluten Fehler in die Gleichung ein, so erhalten Sie

$$\varrho_F + \Delta\varrho = \varrho_W \frac{F_{AF} + \Delta F_{AF}}{F_{AW} + \Delta F_{AW}} = \varrho_W \frac{F_{AF}\left(1 + \frac{\Delta F_{AF}}{F_{AF}}\right)}{F_{AW}\left(1 + \frac{\Delta F_{AW}}{F_{AW}}\right)}$$

Setzt man für ϱ_F für $\varrho_W \frac{F_{AF}}{F_{AW}}$, so ist

$$\varrho_F + \Delta\varrho = \varrho_F \frac{1 + \frac{\Delta F_{AF}}{F_{AF}}}{1 + \frac{\Delta F_{AW}}{F_{AW}}}$$

Die Division ergibt:

$$\left(1 + \frac{\Delta F_{AF}}{F_{FA}}\right) : \left(1 + \frac{\Delta F_{AW}}{F_{AW}}\right)$$

$$= 1 + \frac{\Delta F_{AF}}{F_{AF}} - \frac{\Delta F_{AW}}{F_{AW}} - \frac{\left(\frac{\Delta F_{AF}}{F_{AF}} - \frac{\Delta F_{AW}}{F_{AW}}\right)\frac{\Delta F_{AW}}{F_{AW}}}{1 + \frac{\Delta F_{AW}}{F_{AW}}}$$

Dieses Ergebnis berücksichtigen wir in der Gleichung für die Dichte und erhalten

$$\varrho_F + \Delta\varrho = \varrho_F \left(1 + \frac{\Delta F_{AF}}{F_{AF}} - \frac{\Delta F_{AW}}{F_{AW}} - \frac{\left(\frac{\Delta F_{AF}}{F_{AF}} - \frac{\Delta F_{AW}}{F_{AW}}\right)\frac{\Delta F_{AW}}{F_{AW}}}{1 + \frac{\Delta F_{AW}}{F_{AW}}}\right)$$

Da in dieser Gleichung die Produkte der beiden Fehler sehr klein gegenüber den übrigen Gliedern sind, kann der letzte Bruch in der Klammer vernachlässigt werden. Lösen Sie dann die Gleichung nach dem Fehler der Dichte auf, so erhalten Sie

$$\Delta\varrho = \varrho_F \left(\frac{\Delta F_{AF}}{F_{AF}} - \frac{\Delta F_{AW}}{F_{AW}}\right)$$

Sie erkennen aus diesem Beispiel:

Nach dieser Methode erhält man die Gleichung zur Berechnung des systematischen Fehlers, wenn man in die Grundgleichung den Meßwert und den systematischen Fehler der Einzelgrößen einsetzt. Das Beispiel zeigt gleichzeitig die Schwerfälligkeit dieses elementaren Rechenverfahrens. Umständlich ist besonders, daß neben dem Fehler auch die zu berechnende Größe durch den ganzen Rechnungsgang mitgeführt werden muß.

Stehen Ihnen Kenntnisse aus der Differentialrechnung zur Verfügung, so läßt sich die Fehlerrechnung bedeutend vereinfachen.

2. Methode. Da in der Fehlerrechnung allgemein die Fehler klein gegenüber den gemessenen Werten sind, können die Fehler näherungsweise als Differentiale aufgefaßt werden. Die Differentialrechnung lehrt: Ist y eine Funktion von x, so ändert sich y um dy, wenn x um dx geändert wird. Zwischen den beiden Differentialen, die wir als Fehler zu betrachten haben, besteht die Beziehung $dy = f'(x)\,dx$.

Ist eine Größe z eine Funktion von mehreren Veränderlichen — wie in diesem Abschnitt der Fehlerrechnung — so wird das Differential (Gesamtfehler) der Funktion gebildet, indem man die Funktion nach den einzelnen Veränderlichen differenziert. Dabei entstehen die Teilableitungen (partiellen Ableitungen) der Funktion. Die partiellen Ableitungen werden mit den jeweiligen Differentialen multipliziert. Als Summe dieser Produkte erhalten Sie das totale Differential der Funktion.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy + \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv + \frac{\partial z}{\partial w}dw + \cdots \tag{5a}$$

Zur Berechnung der partiellen Ableitung gelten die gleichen Differentiationsregeln wie für Funktionen mit einer Veränderlichen.

Das folgende Lehrbeispiel zeigt Ihnen, wie man im speziellen Fall das totale Differential einer Funktion berechnet.

Lehrbeispiel 5

Bilden Sie das totale Differential der Funktion

$$z = f\,(x, y\, u, v, w) = \frac{x^3 \cdot y \cdot (u^2 - v)}{w}$$

Lösung: In dieser Funktion sind die Größen u, v, w, x und y alle Veränderliche. Zur Bildung des totalen Differentials dz werden die partiellen Ableitungen der Funktion gebildet. Das Symbol für die partielle Ableitung ist das ∂ (sprich: de). Bei der partiellen Differentation wird jeweils nur nach einer Veränderlichen differenziert, die übrigen Veränderlichen werden als Konstante betrachtet. Differenzieren Sie zunächst z partiell nach x, so sind y, u, v und w konstant, und Sie erhalten nach den Regeln über die Differentation einer Potenz

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3x^2 \cdot y\,(u^2 - v)}{w} \tag{5b}$$

Bei der partiellen Ableitung nach y sind x, u, v und w konstant und es wird

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3\,(u^2 - v)}{w} \tag{5c}$$

Für die anderen Ableitungen erhalten Sie

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{x^3\,y \cdot 2u}{w} \tag{5d}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{x^3\,y \cdot (-1)}{w} \tag{5e}$$

$$\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{x^3\,y\,(u^2 - v) \cdot (-1)}{w^2} \tag{5f}$$

Multiplizieren Sie nun (5b) mit dx, (5c) mit dy usw. und addieren Sie die entstehenden Produkte, so erhalten Sie nach (5a) das totale Differential von z.

$$\mathrm{d}z = \frac{3x^2\,y\,(u^2 - v)}{w}\,\mathrm{d}x + \frac{x^3\,(u^2 - v)}{w}\,\mathrm{d}y + \frac{2x^3\,y\,u}{w}\,\mathrm{d}u - \frac{x^3\,y}{w}\,\mathrm{d}v - \frac{x^3\,y\,(u^2 - v)}{w^2}\,\mathrm{d}w$$

Diese Methode der Fehlerbestimmung wollen wir nun auf die Aufgabenstellung im Lehrbeispiel 4 anwenden.

L e h r b e i s p i e l 6

In der Gleichung

$$\varrho_F = \frac{F_{AF}}{F_{AW}}\,\varrho_W$$

können Sie die Dichte ϱ_F als Funktion der Auftriebe F_{AF} und F_{AW} auffassen. Die Dichte des Wassers ist als Konstante zu behandeln, denn sie ist eine Größe, deren Wert nicht durch den Versuch gemessen, sondern als bekannt vorausgesetzt wurde.

Bilden Sie die partiellen Ableitungen von ϱ_F nach F_{AF} bzw. nach F_{AW}, so wird

$$\frac{\partial \varrho_F}{\partial F_{AF}} = \frac{\varrho_W}{F_{AW}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varrho_F}{\partial F_{AW}} = -\frac{F_{AF} \cdot \varrho_W}{F_{AW}^2}$$

Das totale Differential der Dichte lautet dann unter Verwendung des Symbols Δ für systematische Fehler

$$\Delta \varrho = \frac{\varrho_W}{F_{AW}} \Delta F_{AF} - \frac{F_{AF} \cdot \varrho_W}{F_{AW}^2} \Delta F_{AW}$$

Ersetzen Sie ϱ_W durch $\varrho_F \frac{F_{AW}}{F_{AF}}$, so wird

$$\underline{\underline{\Delta \varrho = \varrho_F \left(\frac{\Delta F_{AF}}{F_{AF}} - \frac{\Delta F_{AW}}{F_{AW}}\right)}}$$

Das ist das gleiche Ergebnis wie im Lehrbeispiel 4.

Aus dem Vergleich der beiden Berechnungsverfahren erkennen Sie sehr deutlich, daß die zweite Methode, die das totale Differential benutzt, die rationellere ist. Diese Feststellung gilt nicht nur für dieses Beispiel, sondern allgemein.

Merken Sie sich:

Der systematische Gesamtfehler einer aus mehreren Meßgrößen zu berechnenden Größe wird aus dem totalen Differential dieser Größe bestimmt. In der Berechnungsformel für die Gesamtgröße gelten die fehlerbehafteten Meßgrößen als Veränderliche, die nicht gemessenen Großen als Konstante.

Zur Berechnung des Fehlers werden die Differentiale durch die einzelnen systematischen Meßfehler ersetzt. Es gilt die Gleichung

$$\boxed{\Delta z = \frac{\partial z}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \cdots} \tag{5}$$

Das Beispiel über die Dichtebestimmung soll nun noch auf zwei konkrete Fälle angewendet werden.

Lehrbeispiel 7

Es wird angenommen, daß die Messung des Auftriebs in den Lehrbeispielen 4 und 6 mit einer Fein-(Balken-)waage durchgeführt wurde. Die Waage hat infolge ungleich langer Hebelarme einen systematischen Fehler von 0,5%. Der Einfluß zufälliger Fehler wird unberücksichtigt gelassen, da die Unsicherheit der Waage geringer ist als die zulässige Ungenauigkeit des Ergebnisses. Die Meßgrößen aus den beiden Auftriebsmessungen betragen:

$F_{AF} + \Delta F_{AF} = 44{,}2\,\text{p} + 0{,}22\,\text{p}$ ($\approx 0{,}5\%$ von $44{,}2$ p) und

$F_{AW} + \Delta F_{AW} = 50{,}2\,\text{p} + 0{,}25\,\text{p}$ ($\approx 0{,}5\%$ von $50{,}2$ p)

Wie groß ist der systematische Fehler der Dichte ϱ_F?

L ö s u n g : Mit den Meßwerten beträgt die Dichte

$$\varrho_F = \frac{F_{AF}}{F_{AW}}\,\varrho_W = \frac{44{,}2\ \text{p}}{50{,}2\ \text{p}}\,1{,}0\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 0{,}88\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Der systematische Fehler der Dichte ist nach der Gleichung des Lehrbeispiels 4

$$\Delta\varrho = \varrho_F\left(\frac{\Delta F_{AF}}{F_{AF}} - \frac{\Delta F_{AW}}{F_{AW}}\right) = 0{,}88\left(\frac{0{,}22}{44{,}2} - \frac{0{,}25}{50{,}2}\right)\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 0$$

Das heißt, in diesem Fall hat der systematische Fehler der Waage auf das Ergebnis keinen Einfluß. Begründung: Hier gleichen sich die beiden systematischen Fehler aus, weil — wie die Formel für die Dichtbestimmung ausweist — nur das Verhältnis der beiden Auftriebe in das Ergebnis eingeht und weil beide Auftriebe mit der gleichen Waage gemessen wurden.

L e h r b e i s p i e l 8

Die Messung des Auftriebs ist wiederum mit einer Fein-(Balken-) waage durchgeführt worden. Der Fehlereinfluß rührt diesmal von den systematischen Fehlern zweier Ersatzwägestücke her. Der Auftrieb F_{AF} wurde zu 43,9 p durch Wägen bestimmt. Hierbei wurde u. a. ein 20 g-Wägestück benutzt, dessen Masse in Wirklichkeit 20,25 g betrug. Der Meßwert des Auftriebes F_{AW} wurde zu 50,40 p bestimmt. Ein bei dieser Messung verwendetes 50 g-Wägestück hat in Wirklichkeit eine Masse von 49,80 g. Von allen übrigen benutzten Wägestücken lagen die Masseabweichungen innerhalb der zulässigen Maßtoleranzen. Die aus den Meßwerten errechnete Dichte der Flüssigkeit beträgt $\varrho_F = 0{,}872$ g/cm^3. Wie groß ist der absolute systematische Fehler der Dichte ϱ_F?

L ö s u n g : Der systematische Fehler des 20 g-Massestückes verursacht nach Gleichung (1) den Auftriebsfehler

$$\Delta F_{AF} = 20\ \text{p} - 20{,}25\ \text{p} = -\,0{,}25\ \text{p}$$

und das 50 g-Massestück veursacht den Auftriebsfehler

$$\Delta F_{AW} = 50\ \text{p} - 49{,}80\ \text{p} = +\,0{,}20\ \text{p}$$

Der durch die Einzelfehler hervorgerufene systematische Fehler der Dichte beträgt:

$$\Delta\varrho = \varrho_F \left(\frac{\Delta F_{AF}}{F_{AF}} - \frac{\Delta F_{AW}}{F_{AW}}\right) = 0{,}872 \left(\frac{-0{,}25}{43{,}90} - \frac{0{,}20}{50{,}40}\right) \frac{g}{cm^3}$$

$$= -\ 0{,}008 \frac{g}{cm^3}$$

Das Meßergebnis für die Dichte ist nach Gleichung (1)

$$\varrho_{F_0} = [0{,}872 - (-\ 0{,}008)] \frac{g}{cm^3} = 0{,}880 \frac{g}{cm^3}$$

In diesem Beispiel läßt sich ϱ_{F_0} auch unmittelbar aus den berichtigten Auftriebswerten bestimmen. Sie erhalten wiederum als Ergebnis

$$\varrho_{F_0} = \frac{\Delta F_{AF_0}}{F_{AW_0}} \varrho_W = \frac{43{,}90\ p + 0{,}25\ p}{50{,}40\ p - 0{,}20\ p} \cdot 1 \frac{g}{cm^3} = 0{,}880 \frac{g}{cm^3}$$

Beim Durcharbeiten der beiden Lehrbeispiele sollten Sie vor allem erkennen:

Die durch s y s t e m a t i s c h e Einzelfehler (Δw, Δx, $\Delta y \ldots$) am Endergebnis hervorgerufenen Teilfehler ($\frac{\partial z}{\partial w} \Delta w$, $\frac{\partial z}{\partial x} \Delta x$, $\frac{\partial z}{\partial y} \Delta y \cdots$) sind nach Gleichung (5) u n t e r B e r ü c k s i c h t i g u n g i h r e s V o r z e i c h e n s zu summieren.

Wie Sie im nächsten Abschnitt erfahren, werden bei zufälligen Einzelfehlern nur die Beträge der Teilfehler summiert.

Die systematischen Fehler gehen immer in voller Größe und mit bestimmten Vorzeichen in die Rechnung ein. Der Grad ihres Einflusses auf die Endgröße hängt von der Art der Fehlerfortpflanzung ab.

5.2.3.2. Die Auswirkung zufälliger Einzelfehler auf den Gesamtfehler. Sind die einzelnen Meßgrößen, aus denen die gesuchte Größe berechnet werden soll, mit zufälligen Fehlern behaftet, so kann der zufällige Gesamtfehler ebenfalls mit dem totalen Differential berechnet werden. Hierbei kommen an zufälligen Fehlern nach Abschnitt 5.2.1.2. in Betracht:

1. mittlere absolute Fehler des Durchschnitts einer Meßreihe,
2. größte zu erwartende Geräteungenauigkeiten (geschätzte Werte oder vom Herstellerbetrieb angegebene Werte).

Sie müssen nun beachten, daß sich mit dem totalen Differential aus den möglichen Einzelfehlern nur der größtmögliche zufällige Gesamtfehler berechnen läßt.

Da nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Praxis der größtmögliche zufällige Fehler mit zunehmender Zahl der beteiligten Meßgrößen immer seltener auftritt, berechnet man den zufälligen Gesamtfehler eigentlich nur dann mit dem totalen Differential, wenn dies sicherheitshalber erforderlich ist. Schon wenn mehr als vier Meßgrößen auf das Endergebnis eingehen, ist der Fall selten, daß alle zufälligen Fehler das Ergebnis in gleicher Richtung beeinflussen; auch wird die größtzulässige Geräteungenauigkeit, die der zufällige Fehler überwiegend verkörpert, nur sehr selten bei den Messungen voll ausgenützt. Der meist zu erwartende zufällige Gesamtfehler ist deshalb erheblich kleiner, als der mit dem totalen Differential errechnete größtmögliche Fehler. Dennoch wird in der Praxis auch bei zufälligen Fehlern die Fehlerbestimmung vorwiegend mit dem totalen Differential vorgenommen. Diese Art der Fehlerbestimmung eignet sich vor allem dazu, den Fehler rasch abzuschätzen. Näheres darüber behandelt der nächste Abschnitt. Außerdem bürgt diese Methode, wie schon hingewiesen wurde, für ein sehr sicheres Ergebnis.

Als wesentlichen Gesichtspunkt müssen Sie noch beachten, daß mit den absoluten Beträgen der zufälligen Fehler gerechnet werden muß, weil zufällige Fehler sowohl positiv als auch negativ sein können.
Das totale Differential lautet dann als **Fehlerfortpflanzungsgesetz für zufällige Fehler:**

$$\boxed{\delta z = \left|\frac{\partial z}{\partial u}\,\delta u\right| + \left|\frac{\partial z}{\partial x}\,\delta x\right| + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\,\delta y\right| + \cdots} \tag{6}$$

Lehrbeispiel 9

Zur Bestimmung der Masse eines Hohlzylinders wurden folgende Werte gemessen: $D = (300 \pm 1)$ mm, $d = (200 \pm 1)$ mm, $h = (1000 \pm 5)$ mm, $\varrho = (2{,}70 \pm 0{,}005)$ gcm^{-3}. Wie groß ist der absolute Fehler, mit dem der errechnete Wert für die Masse behaftet ist?

Lösung: Zur Berechnung fassen Sie die Bestimmungsgleichung für die Masse m als Funktion von D, d, h und ϱ auf. Aus

$$m = \frac{\pi}{4}\, h\, \varrho\, (D^2 - d^2)$$

erhalten Sie für das totale Differential der Masse, wenn Sie gleichzeitig die Differentiale durch die einzelnen zufälligen Fehler ersetzen,

$$\delta m = \frac{\pi}{4} \, [\varrho \, (D^2 - d^2) \, \delta h + h \, (D^2 - d^2) \, \delta \varrho + 2 \, h \, \varrho \, D \, \delta D + (- 2 \, h \, \varrho \, d \, \delta d)]$$

Klammern Sie den Ausdruck für m nach der Bestimmungsgleichung aus und addieren die Beträge der einzelnen Summanden, so wird

$$\delta m = m \left(\frac{\delta h}{h} + \frac{\delta \varrho}{\varrho} + 2 \cdot \frac{D \, \delta D + d \, \delta d}{D^2 - d^2} \right)$$

Setzen Sie nun in die gefundene Gleichung die gegebenen Meßwerte ein, so erhalten Sie zunächst für m

$$m = \frac{\pi}{4} \cdot 10^3 \text{ mm} \cdot 2{,}70 \, \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot (300^2 - 200^2) \text{ mm}^2$$

$$m = \underline{\underline{106{,}03 \text{ kg}}}$$

und für den Fehler der Masse

$$\delta m = 106{,}03 \text{ kg} \cdot \left(\frac{5 \text{ mm}}{1000 \text{ mm}} + \frac{0.005 \text{ g cm}^3}{2{,}70 \text{ g cm}^3} + 2 \cdot \frac{(300 \cdot 1 + 200 \cdot 1) \text{mm}^2}{(300^2 - 200^2) \text{ mm}^2} \right)$$

$$= 106{,}03 \text{ kg} \cdot (0{,}005 + 0{,}00185 + 0{,}02)$$

$$\delta m = \underline{\underline{2{,}85 \text{ kg}}}$$

Der Fehler der Masse beträgt demnach ± 2,85 kg, und das Gesamtergebnis lautet

$$m = \underline{\underline{(106 \pm 2{,}86) \text{ kg}}}$$

Der errechnete Wert der Masse wird auf 106 kg abgerundet, da der Gesamtfehler bedeutend größer ist als der Wert der beiden vernachlässigten Stellen. Nähere Angaben darüber, wie die Stellenzahl der Meßwerte das Ergebnis beeinflußt, erhalten Sie im Abschnitt 5.5.

In dem bisher Erörterten faßten wir von den Gesamtfehlern, die sich aus den zufälligen Fehlern der Einzelgrößen ergeben, immer nur den größtmöglichen ins Auge. Besonders für statistische Angaben interessiert aber nicht dieser größtmögliche, sondern der Fehler, mit dem das Ergebnis am wahrscheinlichsten behaftet ist. Man geht davon aus, daß höchtswahrscheinlich weder alle Einzelfehler das gleiche Vorzeichen haben noch die angenommenen Fehlbeträge in voller Höhe erreicht werden. Dann muß man erwarten, daß sich im Ergebnis die Einzelfehler teilweise aufheben.

Diesen **größten zu erwartenden** Fehler bestimmt man mit dem sogenannten **Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz:**

$$\boxed{\delta z = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\,\delta y\right)^2 + \ldots}} \tag{7}$$

Um eine Vorstellung darüber zu bekommen, wie sehr der zu erwartende Fehler von dem größtmöglichen Fehler abweicht, wollen wir für die Masse im Lehrbeispiel 9 den am häufigsten zu erwartenden Fehler bestimmen. Mit den bereits berechneten partiellen Ableitungen erhalten Sie nach (6)

$$\begin{aligned} \delta m &= \pm \sqrt{\left(\frac{m}{h}\,\delta h\right)^2 + \left(\frac{m}{\varrho}\,\delta \varrho\right)^2 + \left(\frac{2mD}{D^2 - d^2}\,\delta D\right)^2 + \left(\frac{2md}{D^2 - d^2}\,\delta d\right)^2} \\ &= \pm\, m \sqrt{\left(\frac{\delta h}{h}\right)^2 + \left(\frac{\delta \varrho}{\varrho}\right)^2 + \left(\frac{2D\,\delta D}{D^2 - d^2}\right)^2 + \left(\frac{2d\,\delta d}{D^2 - d^2}\right)^2} \\ &= \pm\ 106{,}03\,\text{kg}\sqrt{0{,}005^2 + 0{,}00185^2 + 0{,}012^2 + 0{,}008^2} \\ \text{m} &= \pm\ \underline{\underline{1{,}63\,\text{kg}}} \end{aligned}$$

Für die Fortpflanzung zufälliger Fehler können wir abschließend zusammenfassen:

> Wird der Einfluß zufälliger Einzelfehler auf das Gesamtergebnis mit Hilfe des totalen Differentials berechnet, so erhält man den größtmöglichen Gesamtfehler. Von diesem zu unterscheiden ist der größte zu erwartende Fehler, den man mit dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz ermittelt.

5.2.4. Relativer Gesamtfehler. Aus dem Abschnitt 5.2.2. wissen Sie: Zur Berechnung des relativen Fehlers einer Größe ist der Betrag des absoluten Fehlers dieser Größe durch ihren Betrag zu dividieren. Diese Definition gilt ebenso für den relativen Gesamtfehler, ganz gleich, ob er aus zufälligen oder systematischen Einzelfehlern herrührt.

Im Lehrbeispiel 9 erhalten Sie den relativen Fehler der Masse m sofort, wenn Sie die Gleichung für den Gesamtfehler durch m dividieren:

$$\frac{\delta m}{m}=\left|\frac{\delta h}{h}\right|+\left|\frac{\delta \varrho}{\varrho}\right|+\left|\frac{2(D\,\delta D+d\,\delta d)}{D^2-d^2}\right|$$

Aus dieser Gleichung folgt: Der relative Fehler der Masse ist gleich der Summe der relativen Fehler der Ausgangsgrößen. Da dies allgemein gilt, merken Sie sich:

Der relative Fehler eines Produktes ist gleich der Summe der relativen Fehler der einzelnen Faktoren.

Wie Sie beim Rechnen mit Logarithmen gelernt haben, läßt sich eine Multiplikation auf eine logarithmische Addition zurückführen. Da sich auch die Berechnung des relativen Fehlers als eine Rückführung einer Multiplikation auf eine Addition deuten läßt, liegt die Frage nahe: Können die Logarithmen dazu benutzt werden, um die Berechnung des relativen Fehlers eines Produktes zu vereinfachen? Diese Vermutung wollen wir überprüfen. Wenn Sie die Bestimmungsgleichung für die Masse aus Lehrbeispiel 9

$$m=\frac{\pi}{4}h\,\varrho\,\,(D^2-d^2),$$

logarithmieren, so entsteht, wenn Sie natürliche Logarithmen verwenden,

$$\ln m=\ln\,\frac{\pi}{4}+\ln h+\ln\varrho+\ln\,(D^2-d^2).$$

Differenzieren Sie diesen Ausdruck partiell nach den Veränderlichen h, ϱ, D und d und ersetzen Sie die Differentiale wieder durch die Einzelfehler, so erhalten Sie das totale Differential in der Form

$$\frac{\delta m}{m}=\frac{\delta h}{h}+\frac{\delta\varrho}{\varrho}+\frac{2D\,\delta D}{D^2-d^2}+\frac{-2d\,\delta d}{D^2-d^2}$$

Fassen Sie die beiden letzten Brüche zusammen und rechnen Sie mit den Beträgen der einzelnen Glieder, so erhalten Sie das gleiche Ergebnis für den relativen Fehler der Masse wie vorher, und die Richtigkeit dieser Lösungsmethode ist erwiesen.

Zur Berechnung des relativen Fehlers eines Produktes wird die Bestimmungsgleichung logarithmiert und dann partiell differenziert. Die Summe der Beträge der relativen Einzelfehler ergibt den relativen Gesamtfehler.

Nach dieser sehr rationellen Berechnungsart läßt sich selbstverständlich auch der absolute Gesamtfehler bestimmen. Sie brauchen dann nur zuerst den relativen Gesamtfehler zu berechnen. Diesen multiplizieren Sie mit dem Meßwert der zu bestimmenden Größe und erhalten dann deren absoluten Fehler.

Wie lautet das Ergebnis, wenn eine Meßgröße als Potenz in das Ergebnis eingeht? Hier gilt das Logarithmengesetz: Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem mit dem Potenzexponenten multiplizierten Logarithmus der Basis. Sehen Sie sich in diesem Zusammenhang die Bestimmungsgleichung für die Masse und die Gleichung für Ihren relativen Fehler an, so stellen Sie fest, daß sich der Fehler der Größe, die mit ihrem Quadrat ins Ergebnis eingeht ($D^2 - d^2$), verdoppelt. Allgemein gilt:

> Bei Größen, die mit ihrer n-ten Potenz in das Ergebnis eingehen, erhöht sich ihr Fehlerbeitrag zum Ergebnis um das n-fache.

Der relative Fehler läßt vor allem Schlüsse darüber zu, welchen Einfluß der Einzelfehler auf den Gesamtfehler hat, und liefert Hinweise zur Verbesserung des Meßverfahrens, wie es das nächste Lehrbeispiel zeigt. Auch die erforderliche Stellenzahl der Konstanten, die in die Rechnung eingehen — wie π, g u. a. — läßt sich aus dem relativen Fehler abschätzen.

L e h r b e i s p i e l 10

Zur Ermittlung des Trägheitsmomentes J eines Körpers wurden gemessen: Schwingungsdauer $T = (3{,}0 \pm 0{,}01)$ s, Masse $m = (2{,}00 \pm 0{,}005)$ kg, Abstand des Schwerpunktes vom Aufhängepunkt $d = (0{,}20 \pm 0{,}001)$ m. Wie groß ist der relative Fehler des Trägheitsmomentes? Wieviele Stellen sind in den Werten für die Erdbeschleunigung $g = 9{,}80665$ m/s² und $\pi = 3{,}1415926$ zu berücksichtigen, damit der Gesamtfehler nicht wesentlich beeinträchtigt wird?

L ö s u n g : Die Gleichung zur Bestimmung des Trägheitsmomentes lautet:

$$J = mgd\ \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2.$$

Wird diese Gleichung logarithmiert, so ergibt sich

$$\ln J = \ln m + \ln g + \ln d + 2 \ln T - 2 \ln (2\pi)$$

Differenzieren Sie diese Gleichung partiell und berücksichtigen Sie die Beträge der Ableitung, so wird

$$\left|\frac{\delta J}{J}\right| = \left|\frac{\delta m}{m}\right| + \left|\frac{\delta g}{g}\right| + \left|\frac{\delta d}{d}\right| + \left|\frac{2\ \delta T}{T}\right| + \left|\frac{2 \delta \pi}{\pi}\right|$$

Setzen Sie die gemessenen Werte ein und kürzen Sie, so wird

$$\left|\frac{\delta J}{J}\right| = \frac{0{,}05}{2{,}00} + \left|\frac{\delta g}{g}\right| + \frac{0{,}001}{0{,}20} + 2 \cdot \frac{0{,}01}{3{,}0} + 2 \cdot \left|\frac{\delta\pi}{\pi}\right|$$

$$\left|\frac{\delta J}{J}\right| = 0{,}0142 + \frac{\delta g}{g} + \frac{2\delta\pi}{\pi}$$

Aus der bisherigen Rechnung entnehmen Sie:

1. Durch die Meßgrößen wird das Trägheitsmoment mit einem Fehler von weniger als 1,5% behaftet.
2. Den größten Einfluß auf den Gesamtfehler haben die Messungen der Schwingungsdauer und des Schwerpunktabstandes. Eine genauere Messung dieser beiden Größen würde den Gesamtfehler beträchtlich verringern.
3. Um zu sichern, daß der Gesamtfehler des Trägheitsmomentes kleiner als 1,5% bleibt, sind die Konstanten g und π mit soviel Stellen einzusetzen, daß der Abrundefehler nicht größer als je 0,02% wird.

Um die erforderliche Stellenzahl abzuschätzen, gehen wir davon aus, daß eine Abweichung um 0,01% nur die vierte Ziffer beeinflussen kann. Dann brauchen Sie für g und π nicht mehr als je drei Dezimalen einzusetzen. Ob die dritte Dezimale selbst noch vernachlässigt werden kann, zeigt eine Überschlagsrechnung. Wird g mit drei Dezimalen angegeben, so lautet sein Wert $g/\mathrm{ms}^{-2} = 9{,}807$. Der Fehler durch Runden ist kleiner als 0,0004, wie ein Vergleich mit dem genauen Wert zeigt. Der relative Fehler wird somit

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{0{,}0004}{9{,}807} \approx 0{,}000041 = 0{,}0041\,\%$$

Werden dagegen nur zwei Dezimalen berücksichtigt, so wird der Fehler durch Runden zehnmal größer, wie Sie leicht bestätigen können. Damit würde aber die Ungenauigkeit zu groß. Demnach ist die Angabe von g auf drei Dezimalen notwendig.

Die gleichen Überlegungen ergeben für π den Wert 3,142.

5.3. Abschätzen des voraussichtlichen Fehlers bei vorgegebener Meßanordnung

Haben Sie einen Versuch gut vorbereitet, so können Sie meist schon vor Versuchsbeginn abschätzen, in welcher Größenordnung die zu messenden Werte liegen. Da Sie auch die verfügbaren Meßgeräte und deren Meßfehler kennen, können Sie den voraussichtlichen Fehler des gesuchten Meßergebnisses schon vorher abschätzen. Daraus können Sie wiederum Schlüsse ziehen, wie Sie die Messung durchführen und welche Rechenhilfsmittel Sie anwenden dürfen. Das nächste Lehrbeispiel zeigt Ihnen, wie man im voraus den zu erwartenden Gesamtfehler abschätzt.

Lehrbeispiel 11

Im Lehrbeispiel 2 wurde die Aufgabe gestellt, die Gültigkeit des Gesetzes von Boyle und Mariotte innerhalb der erreichbaren Fehlergrenzen zu bestätigen, d. h., es soll überprüft werden, inwieweit das Produkt pV konstant bleibt, wenn das im U-Rohr eingeschlossene Gas komprimiert und dadurch sein Volumen schrittweise verringert wird. Nach den der Versuchsanleitung zu entnehmenden Einzelheiten ist vor Beginn des Versuches eine Fehlerabschätzung durchzuführen.

Lösung: Der Versuchsanleitung entnehmen Sie im einzelnen:

1. Der Gasdruck liegt zwischen dem normalen Luftdruck (760 Torr) und einem Druck, der um 150 Torr größer ist. Der mittlere Druck beträgt demnach 835 Torr.
2. Die Länge des Gasraumes beträgt rund 250 mm, sie ist gleich der Schenkellänge des benutzten U-Rohres. Der Meßfehler für diese Längenmessung wird mit einem halben Skalenteil, das sind 0,5 mm, angenommen.
3. Die Ungenauigkeit des Barometers ist angegeben mit $\pm$ 0,1 Torr.
4. Die Differenz der Quecksilbersäule wird an zwei Stellen abgelesen. Die hinterlegte Millimeterskala gestattet eine Ableseunsicherheit von je $\pm$ 0,5 Torr.

Damit liegen die voraussichtlichen Meßwerte und deren Fehler fest. Aus der Anleitung entnehmen Sie weiter

$$k = l\,[p_1 + (h_0 - h_g)\,g\,\varrho_{Hg}]$$

Logarithmieren Sie diesen Ausdruck, so entsteht

$$\ln k = \ln l + \ln\,[p_1 + (h_0 - h_g)\,g\,\varrho_{Hg}]$$

Daraus folgt, wenn Sie nach den fehlerbehafteten Größen l, p_1, h_0 und h_g partiell differenzieren und gleichnamige Brüche addieren.

$$\left|\frac{\delta k}{k}\right| = \left|\frac{\delta l}{l}\right| + \left|\frac{\delta p_1 + (\delta h_0 + \delta h_g)\,g\,\varrho_{Hg}}{p_1 + (h_0 - h_g)\,g\,\varrho_{Hg}}\right|$$

Setzen Sie die geschätzten Meßwerte und ihre Meßfehler ein, so erhalten Sie

$$\left|\frac{\delta k}{k}\right| = \frac{0{,}5\,\mathrm{mm}}{250\,\mathrm{mm}} + \frac{(0{,}1 + 0{,}5 + 0{,}5)\,\mathrm{Torr}}{835\,\mathrm{Torr}}$$

$$\left|\frac{\delta k}{k}\right| = 0{,}002 + 0{,}0013 = 0{,}33\%$$

Diskussion: Der Gesamtfehler ist verhältnismäßig klein. Um diese geringe Unsicherheit zu erreichen, müssen die Ergebnisse der Rechnungen mit fünfstelligen Logarithmen auf vier Ziffern berechnet werden. Dieser Rechenaufwand ist notwendig, da die Gültigkeit des Gesetzes innerhalb der erreichbaren Fehlergrenzen untersucht werden soll.

5.4. Auswahl der Meßgeräte nach vorgegebenem relativen Fehler

Das Lehrbeispiel 11 zeigte Ihnen die Abschätzung des voraussichtlichen Fehlers bei bekanntem Meßfehler. Umgekehrt können Sie aus einem vorgegebenen Gesamtfehler abschätzen, mit welcher maximalen Unsicherheit die einzelnen Größen bestimmt werden müssen. Diese Abschätzung ermöglicht die Auswahl der einzusetzenden Meßgeräte, wenn die voraussichtlichen Meßwerte bekannt sind. Die notwendigen Überlegungen und Rechnungen gehen aus dem nächsten Lehrbeispiel hervor.

Lehrbeispiel 12

Die spezifische Wärme eines festen Stoffes ist mit einem Fehler von höchstens 4% zu bestimmen. Welche Meßunsicherheit darf für die einzelnen Größen nicht überschritten werden?

Lösung: Die Gleichung zur Bestimmung der spezifischen Wärme c eines Körpers mit der Masse m lautet

$$c = \frac{m_1 c_1 + C}{m} \cdot \frac{t_m - t_1}{t - t_m}$$

Hierin sind t_m die Mischungstemperatur, $m_1 c_1$ die Werte für die Kalorimeterflüssigkeit, C die Wärmekapazität des Kalorimeters und t die Temperatur des Probekörpers beim Einbringen in das Kalorimeter. Die Grundgleichung wird logarithmiert und anschließend partiell nach m_1, m, t_1, t_m, t und C differenziert. Als Bestimmungsgleichung für den Gesamtfehler erhalten Sie

$$\left|\frac{\delta c}{c}\right| = \left|\frac{c_1\,\delta m_1 + \delta C}{c_1\,m_1 + C}\right| + \left|\frac{\delta m}{m}\right| + \left|\frac{\delta t_m + \delta t_1}{t_m - t_1}\right| + \left|\frac{\delta t + \delta t_m}{t - t_m}\right|$$

Zum Abschätzen der Fehleranteile nehmen Sie für die einzelnen Größen und deren Fehler zunächst Überschlagswerte an. Hierfür gibt die Versuchsanleitung oft Hinweise. Aus der Anleitung zum betrachteten Versuch sei zu entnehmen: Als Kalorimeterflüssigkeit dienen rund 200 ml Wasser von Zimmertemperatur. Die Wärmekapazität des Kalorimeters beträgt $(14{,}4 \pm 0{,}1)$ cal · grd^{-1}. Der Probekörper wird im Dampfbad erhitzt, bis seine Temperatur konstant bleibt.

Somit ergeben sich folgende voraussichtlichen Werte:

$$c_1 = \frac{1\ \text{kcal}}{\text{kg} \cdot \text{grd}}, \quad m_1 \approx 200\ \text{g}, \quad t_1 \approx 20\ °\text{C}, \quad t \approx 100\ °\text{C}.$$

Die Masse des Probekörpers wird auf rund 100 g geschätzt. Die Mischungstemperatur nehmen Sie auf Grund früherer Erfahrungen mit 25 °C an. Als Meßunsicherheit setzen Sie zunächst ± 1 g für die Massenbestimmung und ± 0,1 grd für die Temperaturmessung an. Setzen Sie diese Werte in die vorher gefundene Gleichung ein, so wird

$$\left|\frac{\delta c}{c}\right| = \frac{1 \cdot 1 + 0{,}1}{1 \cdot 200 + 14{,}4} + \frac{1}{100} + \frac{0{,}1 + 0{,}1}{25 - 20} + \frac{0{,}1 + 0{,}1}{100 - 25}$$

$$= 0{,}0052 + 0{,}01 + 0{,}04 + 0{,}0027$$

$$\left|\frac{\delta c}{c}\right| = 5{,}8\,\%.$$

Aus dieser Abschätzung folgt:

1. Der größte Fehler wird durch die Temperaturmessung verursacht, er ist rund 4,3%.
2. Der Fehler durch die Massebestimmungen beträgt rund 1,5%.
3. Soll der Gesamtfehler nicht größer als 4% sein, so muß die Kalorimetertemperatur auf mindestens 0,05 grd genau gemessen werden können. Dann verringert sich der durch die Temperaturen verursachte Fehler auf rund 2,2%.
4. Der durch die Massen verursachte Fehler kann vermindert werden, wenn m als Mittelwert aus mehreren Wägungen bestimmt wird.

Aus diesen Feststellungen ergeben sich folgende Aussagen:

1. Zur Messung der Temperatur t wird ein Thermometer eingesetzt, dessen Skale in Stufen zu 0,2 grd geteilt ist.

2. Die Skale des Thermometers zur Messung der Temperaturen t_1 und t_2 muß in Zehntelgrade geteilt sein.
3. Die Meßunsicherheit der benutzten Waage darf 1 g betragen.
4. Zur Bestimmung von m_1 reicht eine Wägung aus. Für m sind mehrere Wägungen erforderlich, um den Meßfehler zu verkleinern. Die Mindestzahl der Wägungen beträgt fünf, da dann der Meßfehler um etwa die Hälfte verkleinert wird und die Größe des Fehlers von m_1 erreicht.

Wie Ihnen dieses Lehrbeispiel zeigte, gibt die Fehlerabschätzung Hinweise auf die Güte der einzusetzenden Meßgeräte. Darüber hinaus erhalten Sie aus der Diskussion der Fehlerrechnung, Angaben über die anzuwendenden Meßmethoden und die Anzahl der Einzelmessungen je Größe.

5.5. Anzahl der Ziffern im Meßwert und im berechneten Ergebnis

Die Ungenauigkeit der Meßgeräte verursacht eine gewisse Unsicherheit der Meßwerte. Darauf wurde bereits hingewiesen. Durch diese Unsicherheit kann der Meßwert nur mit einer begrenzten Anzahl sicherer Ziffern angegeben werden; meist ist die letzte bereits unsicher. Verwenden Sie zur Messung einer Länge von rund 20 mm einen Maßstab mit Millimeterteilung, so ist es sinnlos, Zehntelmillimeter angeben zu wollen, da diese nicht mehr mit Sicherheit gemessen werden können. Die Angabe der Länge lautet richtig

$$l = (20{,}0 \pm 0{,}5)\ \text{mm}.$$

Der Meßfehler ergibt sich aus der Skalenteilung und beträgt hier ½ Skalenteil.

Daher merken Sie sich:

> Meßwerte dürfen nur mit so vielen Ziffern angegeben werden, wie deren Unsicherheit durch den absoluten Fehler angegeben ist.

Zum Beispiel: $l = (25{,}933 \pm 0{,}005)$ m

Die dritte Stelle nach dem Komma darf angegeben werden, da man ihre Unsicherheit durch die Angabe des absoluten Fehlers kennt.

Benutzen Sie statt des Maßstabes eine Meßschraube mit einem Fehler von $\pm$ 0,01 mm, so lautet die Angabe des Meßwertes

$$l = (20{,}00 \pm 0{,}01\ \text{mm})$$

Jede weitere an dem Meßwert angehängte Null ist falsch, da sie eine viel zu geringe Unsicherheit vortäuscht.

Zum Schluß wollen wir noch klären, welche Rechengenauigkeit zu fordern ist, wenn die Ausgangsgrößen mit einem bestimmten Fehler behaftet sind. Welche Rechenhilfsmittel müssen bzw. dürfen benutzt werden, und wieviele Stellen sind im Ergebnis anzugeben? Diese Fragen betreffen die Ökonomie des Rechnens. Gerade beim Experimentieren gilt es, unnötigen Aufwand zu vermeiden, andererseits aber die erzielte Meßgenauigkeit in der Rechnung auszunutzen. Die Antworten auf die gestellten Fragen sollen wieder mit Hilfe eines Lehrbeispieles gefunden werden.

Lehrbeispiel 13

Um den Querschnitt A einer Kapillare zu bestimmen, wurde der mittlere Durchmesser aus einer Meßreihe ermittelt. Das Ergebnis betrug

$$d = (1{,}46 \pm 0{,}02)\ \mathrm{mm}$$

Diese Angabe ist noch zulässig. Setzen Sie diesen Durchmesserwert in die Gleichung für die Kreisfläche ein, so erhalten Sie

$$A = \frac{\pi}{4}\,(1{,}46 \pm 0{,}02)^2\ \mathrm{mm}^2$$

Werten Sie diesen Klammerausdruck aus und rechnen Sie mit den Beträgen, so ergibt sich

$$A = \frac{\pi}{4}(2{,}1316 + 0{,}0584 + 0{,}0004)\ \mathrm{mm}^2$$

Aus dieser Gleichung folgt:

1. Das Quadrat des Meßfehlers ist sehr klein gegenüber den übrigen Werten und kann daher vernachlässigt werden.
2. Das Produkt aus Meßwert und Meßfehler liegt in der Größenordnung der letzten Stelle des Meßwertes. Deshalb ist es sinnlos, im Ergebnis mehr Stellen anzugeben als in den Ausgangswerten.

Für die Fläche ist als Ergebnis anzugeben

$$A = \frac{\pi}{4}\,(2{,}13 \pm 0{,}06)\ \mathrm{mm}^2$$

Die im Beispiel gewonnene Erkenntnis über die Anzahl der im Ergebnis erforderlichen Stellen bzw. über die angebbaren Ziffern läßt sich auch mit Hilfe der Fehlerrechnung gewinnen.

Der relative Fehler der Fläche ist nach Abschnitt 5.2.4. doppelt so groß wie der relative Fehler des Durchmessers; denn aus $A = \pi\, d^2/4$ folgt für den relativen Fehler der Fläche

$$\frac{\delta A}{A} = \frac{2\delta d}{d}$$

Der relative Fehler des Durchmessers beträgt im Lehrbeispiel 13

$$\frac{\delta d}{d} = \frac{0{,}02\ \text{mm}}{1{,}46\ \text{mm}} = 0{,}0137 \approx 1{,}4\%$$

und der relative Fehler der Fläche annähernd 3%. Berücksichtigen Sie nun, daß Fehler in der Größenordnung von 1% die dritte Ziffer des Grundwertes beeinflussen, so ergibt sich die Notwendigkeit, im Ergebnis die ersten drei Ziffern anzugeben.

Allgemein kann festgestellt werden:

1. Das Ergebnis einer Rechnung ist mit einer Ziffer mehr anzugeben, als im zugehörigen relativen Fehler Nullen vor der ersten von Null verschiedenen Ziffer stehen.
2. Liegt der relative Fehler des Endwertes einer Rechnung in der Größenordnung von mehreren Prozenten, so kann die Rechnung mit dem Rechenstab erfolgen.
3. Beträgt der relative Fehler einer berechneten Größe einige Zehntelprozente, so ist die Berechnung mit vierstelligen Logarithmen durchzuführen. Für kleinere Fehler sind mindestens fünfstellige Logarithmen notwendig.

Lehrbeispiel 14

Die Auswertung des Versuches M 17, Bestätigung des Gesetzes von Boyle und Mariotte, ist gemäß der Aufgabenstellung im Lehrbeispiel 2 zu Ende zu führen (4.5. bis 4.8. der Versuchsanleitung). Wie man den Gesamtfehler der Versuchsanordnung (Bild 3) abschätzt, ist im Lehrbeispiel 11 gezeigt.

Lösung: Zu 4.5. und 4.6.: Der Gesamtdruck p_2 und die Konstante k sind, wie die Fehlerabschätzung im Lehrbeispiel 11 ergeben hat, auf 4 Ziffern genau, also mit 5stelligen Logarithmen zu berechnen.

Meßwerte:

Messung	$\frac{l}{\text{mm}}$	$\frac{(h_0 - h_l)}{\text{mm}}$	$\frac{p_1}{\text{Torr}}$	$\frac{p_2}{\text{Torr}}$	$k = l \cdot p_2$	$k - k_m$	$(k - k_m)^2$
1	297,0	49,0	738,5	787,5	233900	− 25	625
2	280,5	94,5	738,5	833,0	233700	− 225	50625
3	260,0	161,0	738,6	899,6	233900	− 25	625
4	246,5	211,5	738,6	950,1	234200	+ 275	75625
					Σ 935700		Σ 127500

Durchschnitt des k-Wertes:

$$k_m = \frac{935700}{4} = 233925$$

Zu 4.7.: Berechnung des relativen mittleren Fehlers des Durchschnittswertes von k.

Nach Gleichung (3) beträgt der absolute mittlere Fehler des Durchschnittswertes

$$\delta k = \sqrt{\frac{127500}{4 \cdot 3}} = 103,$$

und der relative mittlere Fehler

$$\left|\frac{\delta k}{k_m}\right| = \frac{103}{233925} = 0{,}0004 = \underline{\underline{0{,}04\%}}$$

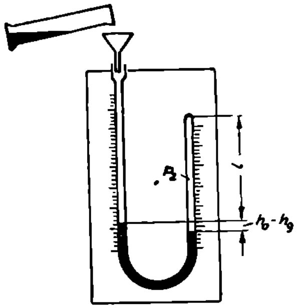

Bild 3

Zu 4.8.: Die Rechnung ergibt, daß der relative mittlere Fehler der aus den Meßwerten errechneten Produkte $p\,V$ viel kleiner ist (0,04%) als der größtmögliche Fehler, der sich auf Grund der Ungenauigkeit der Meßeinrichtung ergeben darf (0,33%, siehe Lehrbeispiel 11). **Das** Meßergebnis liegt also innerhalb der zulässigen Fehlergrenzen. Damit ist die Gültigkeit des Boyle-Mariotteschen Gesetzes experimentell bestätigt worden.

Formelzusammenstellung

Nr.		Formel	Seite
1	Definition des Fehlers	Fehler = Meßwert — Sollwert	10
2	Durchschnitt aus n Meßwerten	$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$	12
3	Mittlerer absoluter Fehler d. Durchschnitts	$\delta x = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2}{n(n-1)}}$	13
4	Relativer Fehler der gemessenen Größe	$f = \left\lvert \frac{\Delta x}{x} \right\rvert$ bzw. $f = \left\lvert \frac{\delta x}{x} \right\rvert$	16
5	Absoluter Endfehler, hervorgerufen durch systematische Einzelfehler	$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \cdots$	21
6	Absoluter Endfehler, hervorgerufen durch zufällige Einzelfehler (größtmöglicher Fehler)	$\delta z = \left\lvert \frac{\partial z}{\partial u} \delta u \right\rvert + \left\lvert \frac{\partial z}{\partial x} \delta x \right\rvert + \left\lvert \frac{\partial z}{\partial y} \delta y \right\rvert + \cdots$	24
7	Absoluter Endfehler, hervorgerufen durch zufällige Einzelfehler (größter zu erwartender Fehler)	$\delta z = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \delta y\right)^2 + \ldots}$	26

INHALTSVERZEICHNIS

Veröffentlicht unter Ag 613/517/68 • 2. Ausgabe • 4. Auflage
Satz und Druck: VEB (K) Druckerei Sebnitz
Nachdruck: VEB Druckerei „Thomas Müntzer", Bad Langensalza
Umschlag: Institut für Fachschulwesen der DDR, Karl-Marx-Stadt, Produktionsabteilung Zwickau

Katalognummer 030.04–01 Vorzugsschutzgebühr: 0,90 M