Mathematik

Klasse 6

Unterrichtshilfen

Unterrichtshilfen Mathematik Klasse 6

Autoren:
Manfred Dennert, Sigrun Gromann, Günter Lorenz,
Manfred Rehm, Günter Pietzsch, Helmut Seibt

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1984

Verfaßt von einem Autorenkollektiv unter Leitung von Prof. Dr. Günter Pietzsch

Autoren:

Prof. Dr. Günter Pietzsch – Einleitung
Dr. Manfred Rehm, Dr. Helmut Seibt – Stoffgebiet 1
Dr. Manfred Rehm, Prof. Dr. Günter Pietzsch – Stoffgebiet 2
Dr. Sigrun Gromann, Prof. Dr. Günter Pietzsch, Dr. Helmut Seibt – Stoffgebiet 3
Dr. Manfred Dennert, Dr. Günter Lorenz – Stoffgebiet 4

Gutachter und Berater:

Dr. Peter Birnbaum, Dr. Günter Erbrecht, Dr. sc. Siegfried Schneider, Ingrid Schneider, Reiner Franck, Kurt Gleitsmann, Prof. Dr. sc. Werner Jungk, Klaus Meier, Ortwin Rink, Erika Schwerin

Redaktion: Ingrid Fabian, Karlheinz Martin

1. Auflage
Lizenz-Nr. 203/1000/84 (E 00 22 09-1)
LSV 0645
Zeichnungen: Jutta Wolff
Einband: Erika Kerschner
Typografische Gestaltung: Atelier vwv
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig,
Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit, III/18/97
Schrift: 9/10 p Times-Antiqua
Redaktionsschluß: 30. November 1983
Bestell-Nr. 709 014 6
01300

Inhalt

Stoffgebiet 3

Einführung in die Gleichungslehre; Proportionalität

Stoffgebiet 4

Planimetrie

Einleitung

1. Zum Mathematikunterricht in Klasse 6

Ziele und Aufgaben des Mathematikunterrichts werden durch den Lehrplan [G 8] festgelegt. Er orientiert zunächst auf solides mathematisches Wissen und Können: „Die Schüler müssen sich ... mathematische Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten ... in einer solchen Qualität aneignen, daß sie ... in zunehmendem Maße mathematische Mittel und Methoden zum besseren Erkennen und tieferen Verstehen ihrer Umwelt einsetzen können ...." (LP 23)

Da die Schüler in dieser Klassenstufe ein Alter erreicht haben, in dem das konkret-anschauliche Denken gegenüber dem abstrakt-logischen Denken zurückzutreten beginnt, können auch für die allgemein-geistige Entwicklung höhere Ziele gesetzt werden:

„Durch die weitere Schulung des Abstraktionsvermögens, durch die Befähigung zum Verallgemeinern, zur Begriffsbildung, zum Erkennen von Zusammenhängen und zum Systematisieren sowie durch das Herausbilden erster Fähigkeiten im Definieren und Beweisen trägt der Mathematikunterricht gleichzeitig zur allgemeinen geistigen Entwicklung der Schüler bei." (LP 23)

Als wichtigste Erziehungsaufgabe wird dem Mathematikunterricht gestellt,
„... die Bedeutung der Mathematik für jeden gebildeten Bürger unseres Staates verständlich und überzeugend darzulegen, dadurch das Interesse der Schüler an dieser Wissenschaft zu wecken und bei ihnen eine positive Lernhaltung zu entwickeln". (LP 30)

Auch wenn sich das Gesagte auf die Klassenstufen 6 bis 8 bezieht, so hat doch der Unterricht auch in Klasse 6, und zwar in allen Stoffgebieten, seinen Beitrag zum Erreichen der angesprochenen Ziele zu leisten.

Der Lehrplan gibt auch Hinweise zur Strukturierung des Stoffes durch Leitlinien (LP 27 ff.); ohne ihn wiederholen und den Vorbemerkungen zu den einzelnen Kapiteln vorgreifen zu wollen, sei gemäß dieser Leitlinienstruktur zum gesamten Unterricht in der Klassenstufe 6 gesagt:

Das Arbeiten mit Mengen wird insofern auf eine höhere Stufe gehoben, als einige Begriffe der Mengenlehre zu Beginn eingeführt und von da an benutzt werden. Die betreffenden Begriffe werden insbesondere dort verwendet, wo dies zu größerer Klarheit führt, z. B. bei „gebrochene Zahl" als Menge (Klasse) gleichwertiger Brüche, bei der Lösungsmenge von Gleichungen und Ungleichungen, bei den Dreiecksarten und bei anderen Begriffssystemen.

Der *Aufbau der Zahlenbereiche* wird durch eine umfassende Behandlung der gebrochenen Zahlen (einschließlich einfacher Überlegungen zum Arbeiten mit Näherungswerten) fortgesetzt, nachdem zuvor im Stoffgebiet „Teilbarkeit" das Wissen der Schüler über die natürlichen Zahlen vertieft und systematisiert worden ist. Hauptaufgabe dieser Behandlung ist die Ausbildung sicher einsetzbaren Könnens beim Rechnen mit gebrochenen Zahlen in den verschiedenen Darstellungsformen, das nur auf der Grundlage soliden Wissens entwickelt werden kann und sichere Rechenfertigkeiten als wichtige Komponente enthält.

Gleichungen und Ungleichungen sind den Schülern ab Klasse 1 bekannt, sie wurden von ihnen ausschließlich inhaltlich gelöst. Auch in den Stoffgebieten „1. Teilbarkeit natürlicher Zahlen" und „2. gebrochene Zahlen" wird weiterhin das inhaltliche Lösen gefordert und für die Entwicklung des Rechnenkönnens genutzt. Das Neue in Klasse 6 (Stoffgebiet „3. Einführung in die Gleichungslehre; Proportionalität") besteht in einer Klärung verschiedener Begriffe und im Übergang zum kalkülmäßigen Lösen für zwei wichtige Gleichungstypen.

Auch bezüglich der Herausbildung eines umfassenden *Abbildungsbegriffs* wird in Klasse 6 ein wichtiger Schritt getan: Nachdem die Schüler in Klasse 4 und 5 mit speziellen Bewegungen gearbeitet haben, lernen sie in Klasse 6 mit deren Zusammensetzungen eine wichtige mathematische Arbeitsweise und den daraus resultierenden Oberbegriff „Bewegung" kennen; sie verwenden dabei auch den noch allgemeineren Begriff „Abbildung". Die Bedeutsamkeit dieser Abbildungen wird ihnen durch deren Benutzung bei der Definition des zentralen Begriffs „Kongruenz von Figuren" bewußt.

Es geht bei dieser Leitlinie jedoch nicht nur um die geometrischen Abbildungen. Überall dort, wo Zuordnungen vorgenommen und untersucht werden, wird an der Umsetzung entsprechender Forderungen gearbeitet. Beim Zuordnen von Zahlenfolgen genauso wie beim grafischen Darstellen von direkter und umgekehrter Proportionalität; beim Zuordnen von Brüchen zu Punkten eines Strahls genauso wie beim Feststellen, daß je zwei natürliche Zahlen (ungleich 0) genau ein k. g. V. haben.

Innerhalb der Linien der *sprachlich-logischen Schulung* wird dadurch eine höhere Qualität angestrebt, daß die Schüler die Begriffe „Definition", „Aussage", „Satz", „Beweis" kennenlernen und diese benutzen, daß sie Einsichten in die Beweisnotwendigkeit gewinnen, die geführten Beweise verstehen und z. T. auch wiedergeben können. Das Aufwerfen von Umkehrfragestellungen, insbesondere das Verständnis dafür, was „Umkehren eines Satzes" bedeutet, das diesbezügliche Können und die Einsicht, daß für eine durch Umkehrung gewonnene Aussage ebenfalls Überlegungen zum Wahrheitswert angestellt werden müssen, sind hier ebenfalls einzuordnen.

Für das Entwickeln erster Fähigkeiten im Definieren und Beweisen kommt dem Stoffgebiet Planimetrie besondere Bedeutung zu.

Auch wenn ab Klasse 6 ausformulierte Beweise, insbesondere für Allaussagen, geführt werden, so hat das Begründen für Einzelaussagen (z. B. für die Teilbarkeit von 360 + 18 durch 9) und für solche Aussagen, bei denen ein Beweis nach dem Schema „*Voraussetzung – Behauptung – Beweis*" zu aufwendig wäre (z. B. „Jede Zahl und ihr Reziprokes haben das Produkt 1"), weiterhin seine Berechtigung. Auch an Begründungen für Allaussagen mit Hilfe von Beispielen ist hier zu denken, wenn den Schülern deutlich gemacht werden kann (wie z. B. beim Kommutativgesetz der Addition gebrochener Zahlen), daß die am Beispiel geführten Überlegungen nicht an das Beispiel gebunden sind.

Ein wichtiger Bestandteil mathematischer Terminologie und Symbolik ist die Verwendung von Variablen und gewisser logischer Redeweisen. Das Verständnis der Schüler für Variable und ihr Können bei deren Verwendung wird dadurch weiterentwickelt, daß der Begriff „Term" eingeführt wird, daß die Schüler lernen, wichtige Zahlenmengen (z. B. die geraden Zahlen) durch einen Term zu charakterisieren und dies sowie einfache Termumformungen bei arithmetischen Beweisen zu benutzen; ferner sollen sie Definitionen, Regeln und Gesetze in verstärktem Maße mit Hilfe von Variablen formulieren können. Über die Verwendung logischer Termini macht der Lehrplan detailliert keine Aussagen. Für das Verständnis des zu behandelnden

Stoffes ist es aber notwendig, daß die Schüler z. B. beim Durchdenken und Beantworten von Existenz- und Lösbarkeitsfragen den bestimmten und den unbestimmten Artikel sowie die Sprechweisen „Es gibt (mindestens, genau) ein/kein ...", „Für jedes/alle ... gilt ..." verstehen und (insbesondere die Artikel) auch richtig verwenden.

Die *Verfahren und Mittel geistiger Arbeit* bilden eine Leitliniengruppierung, deren Komponenten im Lehrplan den einzelnen Klassenstufen und Stoffgebieten explizit am wenigsten zugeordnet sind. Dennoch lassen sich für Klasse 6 einige Aussagen machen: Das Arbeiten mit algorithmischen Vorschriften wird in Klasse 6 beim Rechnen mit gebrochenen Zahlen, beim Lösen gewisser Gleichungen, beim Ausführen elementarer Konstruktionen und beim Berechnen von Flächeninhalten fortgesetzt. Die Schüler sollen wissen, daß sie mit den betreffenden Formeln ein Mittel der Rationalisierung geistiger Arbeit in der Hand haben, weil diese gestatten, alle Aufgaben eines bestimmten Typs ohne tieferes Nachdenken über den Lösungsweg zu lösen. Dennoch darf dieses Wissen nicht dazu führen, daß sie das Lösen gewisser Gleichungen, Ausführen gewisser Konstruktionen und Berechnen gewisser Figuren allein deshalb ablehnen, weil ihnen eine entsprechende Vorschrift nicht bekannt ist.

Von den sogenannten heuristischen Regeln bzw. Strategien rückt das „Zurückführen von Neuem auf Bekanntes" besonders stark ins Bewußtsein der Schüler. Es tritt beim Gewinnen der Definitionen für das Ordnen und Rechnen mit gebrochenen Zahlen (Zurückführen auf das entsprechende Arbeiten mit gleichnamigen Brüchen), beim Gewinnen der Flächeninhaltsformeln (Zurückführen auf Rechteck und Dreieck), beim Umformen von Gleichungen (Zurückführen auf eine Gleichung der Form $x = a$) besonders deutlich hervor.

Im Zusammenhang mit diesem Zurückführen stehen Vorwärtsarbeiten und Rückwärtsarbeiten beim Führen von Beweisen. Auch wenn die Schüler in Klasse 6 kaum Beweise (einschließlich Darstellung) selbständig führen sollen, so müssen ihnen diese beiden Strategien doch (ohne Benutzen der Wörter) durch das gemeinsame Erarbeiten oder durch den Vortrag des Lehrers etwas bekannt werden. Beim Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben sowie von Konstruktionsaufgaben können Schülern nichtalgorithmische Handlungsvorschriften nahegebracht werden, die wegen des Charakters beider Aufgabenarten als Problemaufgaben vieles gemeinsam haben.

Wenn Aussagen bewiesen werden sollen, so müssen sie zuvor gefunden worden sein; auch dies geschieht mittels heuristischer Verfahren. In Klasse 6 kommen als solche vornehmlich das Umkehren (s. o.) und das Untersuchen von Einzelfällen mit anschließender Verallgemeinerung zum Einsatz.

Die voranstehenden Überlegungen zu den Leitlinien des Lehrplans führen unmittelbar zu den Zielen der *Entwicklung allgemein geistiger Fähigkeiten*. Auch für sie gilt, daß sie nur durch entsprechende Tätigkeiten auszubilden sind, für deren erfolgreiche Ausführung ein gewisses Fähigkeitsniveau einerseits Voraussetzung ist, die aber andererseits zu einer Erhöhung bzw. Stabilisierung dieses Niveaus beiträgt. Diese Tätigkeiten sind an mathematische Inhalte gebunden und haben meist nicht das Ziel, die betreffenden Bezeichnungen dem Wortschatz der Schüler einzugliedern.

Beim Aneignen von Begriffen und ihrer Beziehungen untereinander treten vor allem das *Analysieren* und *Vergleichen*, das *Abstrahieren* und *Konkretisieren*, das *Klassifizieren* und Treffen von *Fallunterscheidungen* auf. An verschiedenen Stellen, besonders ausgeprägt im Stoffabschnitt „4.6. Vierecke und Vielecke", wird das *Systematisieren* der betreffenden Begriffe und Sätze zum Unterrichtsgegenstand. Beim Anwenden mathematischer Begriffe, Sätze und Verfahren auf reale Sachverhalte ebenso wie beim Beweisen oder beim Lösen von Konstruktionsaufgaben ist bewußtes *Analysieren* und *Synthetisieren* notwendig.

Beim Aufstellen von Vermutungen, beim Gewinnen neuer Erkenntnisse sind verschiedene reduktive Schlußweisen zu praktizieren. Insbesondere dem *Verallgemeinern*, sowohl vom Einzelnen als auch vom Besonderen aus, ist Raum zu geben. Umgekehrt tritt beim deduktiven Schließen immer wieder das *Spezialisieren* auf und ist als solches bewußtzumachen.

Schließlich sei auf die Potenzen für die *politisch-ideologische Erziehung* eingegangen. Bei der *weltanschaulich-philosophischen* Erziehung geht es vor allem um den Ursprung mathematischer Begriffsbildungen in der Realität sowie um die Anwendbarkeit der Mathematik zur Bewältigung praktischer Probleme. Dabei ist keineswegs an die explizite Erörterung solcher Fragen im Unterricht zu denken. Der Unterrichtsprozeß ist vielmehr so zu gestalten, daß die Schüler beispielsweise bei Begriffserarbeitungen zu den angestrebten Überzeugungen gelangen. Dafür ist auch die Gestaltung eines Unterrichts wichtig, der in seiner Problemhaftigkeit gleichzeitig Erkenntnisoptimismus fördert. Durch praktische Motivierungen und Anwendungen gelangen die Schüler zu Einsichten über das Verhältnis der Mathematik zu ihrer Erfahrungswelt und anderen gesellschaftlichen Erscheinungen. Mehr und mehr sollen sie aber auch die Berechtigung innermathematischer Motivierungen anerkennen und dadurch nicht bei jedem neuen mathematischen Gegenstand vordergründig nach dessen praktischer Nützlichkeit fragen.

Bei der *politisch-moralischen Erziehung* ist einerseits an die Aktualität und Lebensnähe der zur Motivierung und Anwendung benutzten praktischen Sachverhalte zu denken. Sie werden nur dann wirksam werden, wenn die Probleme und ihre Lösungen mit persönlichen Stellungnahmen und parteilichen Wertungen verbunden werden. Andererseits geht es um die Anerziehung von Charaktereigenschaften und Verhaltensweisen, die einen sozialistischen Staatsbürger auszeichnen. Zielorientierungen, auch fachspezifische, tragen zur Befähigung der Schüler bei, planvoll und systematisch zu arbeiten; sie ermöglichen dadurch mehr Erfolgserlebnisse, was wiederum zu einer besseren Einstellung der Schüler zur Mathematik und zum Lernen überhaupt beiträgt. Das Stellen angemessener und erfüllbarer Forderungen (das schließt Differenzierungen ein) sowie Konsequenz bei deren Erfüllung sind Voraussetzung für die Erziehung zu diszipliniertem und beharrlichem Arbeiten. Wiederholtes Auffordern zum Kontrollieren der eigenen Ergebnisse (nicht nur durch die Probe bei Gleichungen) führt zu einer selbstkritischen Einstellung, aber auch zur Achtung vor der Leistung anderer.

Bei der *ästhetischen Erziehung* ist vor allem an Ordnung, Sauberkeit und Übersichtlichkeit in den Heften der Schüler – angeregt durch ein vorbildliches Tafelbild – zu denken. Sie sollten zur selbstverständlichen Norm werden, wobei der Schüler auch die Nützlichkeit des Einhaltens einer solchen Norm einsehen sollte.

Alles zur Erziehung Gesagte ist einzubetten in die Erkenntnis, daß ein lebendiger, lebensverbundener, interessanter, von hoher Schüleraktivität getragener Unterricht von sich aus bereits erzieherisch wirksam ist und daß umgekehrt Langeweile, geistige Inaktivität und Unverständnis seitens der Schüler viele andere erzieherische Bemühungen zunichte machen.

2. Hinweise zum Aufbau und zur Verwendung der Unterrichtshilfen

In jedem der vier Kapitel sind die Ausführungen folgendermaßen angeordnet:

(1) In den *Vorbemerkungen* wird das betreffende Stoffgebiet in die Linienführung des gesamten Lehrgangs und insbesondere in die von Klasse 6 eingeordnet; seine wichtigsten Ziele und Schwerpunkte werden erörtert.

(2) Mit Hilfe von *Kontrollaufgaben* soll das am Ende der Behandlung eines Stoffgebietes oder eines Themas zu erreichende Ziel möglichst genau gekennzeichnet werden. Diese Funktion der Kontrollaufgaben ist zu bedenken, wenn sie für Leistungskontrollen genutzt werden. Würde man z. B. für eine Klassenarbeit die Aufgaben ausschließlich aus diesen Kontrollaufgaben zusammenstellen, so wären Steigerung des Schwierigkeitsgrades und Vielseitigkeit zu wenig ausgeprägt; eine derartige Klassenarbeit würde daher über das Leistungsvermögen der Schüler ein zu wenig differenziertes Bild ergeben.

(3) Die Übersicht *Stoffverteilung* soll Anregungen für das (keineswegs überflüssige) Aufstellen des der konkreten Klassensituation angepaßten Stoffverteilungsplanes durch jeden einzelnen Lehrer geben. Besondere Bedeutung kommt der Spalte „Zu reaktivierender Stoff“ zu, durch die das Ausgangsniveau für den jeweils zu erarbeitenden Stoff umrissen werden soll. Ob im Einzelfall tatsächlich reaktiviert werden muß und ob dies wirklich erst an dieser Stelle geschehen sollte, muß jeder Lehrer selbst entscheiden. Aus dem gleichen Grunde sind Inhalte permanenter Wiederholung weder in der Stoffverteilung noch in den methodischen Hinweisen zu den einzelnen Lerneinheiten berücksichtigt worden.

(4) Den *Lerneinheiten* des Lehrbuches entsprechend sind die dann folgenden Ausführungen untergliedert. Sie enthalten für jede Lerneinheit die wichtigsten fachspezifischen Ziele. Ziele allgemein-geistiger Entwicklung und ideologischer Erziehung wurden dort aufgeführt, wo die betreffenden Lerneinheiten diesbezüglich besondere Potenzen aufweisen, auch wenn sich das Erreichen derartiger Ziele nach einer Lerneinheit kaum kontrollieren läßt; dennoch müssen sie dem Lehrer stets bewußt sein. Ferner werden die didaktischen Schwerpunkte genannt und zu den meisten von ihnen methodische Hinweise gegeben. Auf elementare methodische Maßnahmen wie das Vorbereiten rationeller Kontrollen der selbständigen Schülertätigkeit durch vorgefertigte Folien, Lösungen von Schülern an verdeckter Tafel u. dgl. wird dabei nur in Ausnahmefällen verwiesen. Hervorhebungen bei vorgeschlagenen Tafelbildern (z. B. Einrahmungen) sollten im Unterricht farbig erfolgen.

(5) Den Kapiteln 1 bis 4 sind neben einer *Grafik zur Jahresstoffverteilung* Vorschläge für *Aufgaben für tägliche Übungen* vorangestellt. Die Aufgaben sind als Kennzeichnung von Aufgabentypen zu verstehen und sind durch weitere Aufgaben vom Lehrer zu ergänzen. Zur Festigung des Wissens sind wichtige Definitionen und Regeln, Sätze und Formeln im Zusammenhang mit entsprechenden Aufgaben abzufragen, gegebenenfalls von mehreren Schülern nachzusprechen. Im mündlichen und schriftlichen Arbeiten sowie in der Vorgabe durch Text, Tabellen, Rechenbäume u. dgl. sollte Vielseitigkeit angestrebt werden.

Ebenfalls sehr klassenspezifisch sind die Maßnahmen innerer Differenzierung vorzunehmen. Dabei ist davon auszugehen, daß Wissen und Können der Schüler stets unterschiedlich ausgeprägt sind und daß die optimale Entfaltung der Anlagen *jedes* Schülers Ziel aller Differenzierungsmaßnahmen ist. Die Unterrichtshilfen bringen dafür vor allem Vorschläge durch Aufgabendifferenzierung. Einerseits werden unter Bezug auf das Lehrbuch Aufgaben genannt, die von besonderer Bedeutung sind und von allen Schülern gelöst werden sollten. Das Lehrbuch enthält darüber hinaus weitere Aufgaben für zusätzlichen Übungsbedarf. Außerdem werden Aufgaben mit erhöhtem Schwierigkeitsgrad (meist aus dem Lehrbuch) vorgeschlagen. Sie sind, wenn nichts anderes gesagt wird, stets als Zusatzaufgaben zu verstehen.

In der Methodik des Mathematikunterrichts haben sich in den letzten Jahren – zumindest für die Aneignung von Begriffen – die Wörter „Identifizieren“ und „Realisieren“ durchgesetzt; sie werden deshalb auch in diesen Unterrichtshilfen benutzt. Um keine Verständnisschwierigkeiten entstehen zu lassen, seien sie noch einmal erklärt:

Von „Identifizieren" (eines Begriffes) spricht man, wenn der Schüler vorgelegte Objekte als Beispiele bzw. Gegenbeispiele des betreffenden Begriffs erkennt und seine Entscheidung begründet. Das „Realisieren" (eines Begriffs) liegt vor, wenn der Schüler für diesen Beispiele herstellt oder angibt; meist werden für solche Beispiele noch gewisse Eigenschaften gefordert. Da Rechenoperationen Begriffe besonderer Art sind, werden diese Wörter auch dafür benutzt.

Es gehört zur Konzeption der neu entwickelten Unterrichtshilfen, daß sie dem Lehrer mehr Möglichkeit zum Einbringen seiner Erfahrungen, seines (bewährten) Unterrichtsstils und zum Berücksichtigen konkreter Klassensituationen geben; sie ermöglichen ihm mehr Selbständigkeit und Eigeninitiative, setzen damit aber auch höheres methodisches Können und ein hohes Verantwortungsbewußtsein voraus.

Dies alles kommt darin zum Ausdruck, daß Stoff und Unterrichtsablauf weniger klein portioniert sind und des öfteren Varianten des methodischen Vorgehens dargestellt und diskutiert werden.

Bei allem ist aber zu bedenken, daß auch diese Unterrichtshilfen *nur Anregungen und Vorschläge, höchstens Empfehlungen* sind. *Verbindliche Grundlage des Unterrichtes ist allein der Lehrplan*, dessen Studium notwendige Voraussetzung auch dafür ist, mit diesen Unterrichtshilfen schöpferisch arbeiten zu können.

Abkürzungen

In den Unterrichtshilfen werden einige Abkürzungen mit folgender Bedeutung gebraucht:

LP	Lehrplan;	LB	Lehrbuch;
LE	Lerneinheit;	LB-Bild	Bild im Lehrbuch;
UG	Unterrichtsgespräch;	SSA	Selbständige Schülerarbeit

Beispiele:
(LP 55) heißt: Siehe Lehrplan, Seite 55.
(LB 60) heißt: Siehe Lehrbuch, Seite 60.

Dabei erfolgt die Angabe der Lehrbuchseite nur dann, wenn sich die zitierte Aufgabe, das zitierte Beispiel, Bild usf. *nicht* in der *entsprechenden* Lerneinheit des Buches befindet oder wenn es für die Eindeutigkeit des Hinweises notwendig ist.

3. Zur Arbeit mit dem Lehrbuch

Gleichzeitig mit diesen Unterrichtshilfen wird in Klasse 6 ein neues Lehrbuch eingeführt. Bei seiner Ausarbeitung wurden nicht nur die Veränderungen in den Klassen 4 und 5 berücksichtigt, sondern wichtige schulpolitische Positionen des VIII. Pädagogischen Kongresses sowie im letzten Jahrzehnt gesammelte Erfahrungen und gewonnene Erkenntnisse zugrunde gelegt. So wurde versucht

- die Schwerpunkte der Wissensvermittlung und Könnensentwicklung deutlicher herauszuarbeiten;
- eine bessere Abstimmung zwischen mathematischer Strenge einerseits sowie Praktikabilität und Faßlichkeit andererseits vor allem durch Abbauen einiger theoretischer Überhöhungen, stärkeres Einbeziehen der Erfahrungswelt der Schüler, Erhöhung der Anschaulichkeit und vereinfachte sprachliche Gestaltung zu erreichen;
- vielfältige Schülertätigkeiten in allen didaktischen Funktionen u. a. durch eine

problemhafte Aufbereitung des Stoffes und durch ein reichhaltiges, abwechslungsreiches und differenziertes Angebot von Aufträgen und Aufgaben anzuregen;
- die Entwicklung des Rechnenkönnens als eine der wichtigsten Könnenskomponenten stärker in den Vordergrund zu rücken – und dies nicht nur im Kapitel B –, sowie die Entwicklung der Beweisfähigkeit didaktisch effektiver zu gestalten.

Den Unterrichtshilfen liegen diese Positionen ebenfalls zugrunde.

Die *Lerneinheiten* (LE) des Lehrbuches sind von unterschiedlicher Diktion. In der Mehrzahl tragen sie entwickelnden Charakter und sollen damit zu einem Unterricht anregen, der durch hohe Schüleraktivität, Selbständigkeit und angemessenes Schöpfertum gekennzeichnet ist. Die in ihnen enthaltenen *Schüleraufträge* (●) dienen zu allermeist dem Finden von Erkenntnissen, auch ihrer Vertiefung und Ergänzung; nur gelegentlich soll durch sie auf eine an der betreffenden Stelle unbedingt notwendige Übung aufmerksam gemacht werden. Keineswegs soll der Schüler derartige Aufträge immer dem Buch entnehmen, der Lehrer kann sie auch mit eigenen Worten in das Unterrichtsgespräch einfügen. Das wird insbesondere dann der Fall sein, wenn im Lehrbuch die dem Auftrag folgenden Zeilen seine Lösung enthalten. Einige andere Lerneinheiten enthalten nur den Stoff im engeren Sinn, die mathematischen Fakten. Der Lehrer sollte sich dadurch nicht verleiten lassen, diese Fakten lediglich mitzuteilen, wie ja auch sonst der Lehrbuchtext kein gedruckter Lehrervortrag ist.

Die in den Lerneinheiten zu findenden *Beispiele* (■) zeigen die Anwendung von (algorithmischen und auch nicht-algorithmischen) Verfahren beim Lösen von Aufgaben wichtiger Typen. Sie sind Muster sowohl für die Gedankenführung als auch für die Form des Niederschreibens beim Lösen von Aufgaben. Jeder Lehrer muß jedoch prüfen, ob jedes von ihnen geeignet ist, in seiner Klasse als erstes Beispiel eingesetzt zu werden.

Entsprechend ist auch aus den *Aufgaben* auszuwählen, die sich am Ende einer jeden Lerneinheit befinden. Die Unterrichtshilfen geben dafür Orientierungen, indem sie für die einzelnen didaktischen Funktionen geeignete Aufgaben nennen; aber auch die Ziel- und Schwerpunktangaben sind eine Hilfe für die Auswahl. Der Klassensituation gemäß ist auch aus den am Ende eines jeden Stoffgebiets zu findenden „Aufgaben zur Übung, Vertiefung und Wiederholung" auszuwählen. Zu ihrer Lösung wird oft – im Gegensatz zu den anderen Aufgaben – Stoff aus mehreren Lerneinheiten und z. T. aus anderen Stoffgebieten benötigt. Daher muß der Schüler bei solchen Aufgaben aus einem größeren Bereich des Wissens auswählen, eventuell auch nachschlagen. Man sollte ihm dies nicht abnehmen.

Die im Lehrbuch zu findenden Sach- und Anwendungsaufgaben können nur in geringem Maße aktuell und der Erfahrungswelt jedes Schülers entnommen sein. Viele der Aufgaben sind daher als Anregungen zum Aktualisieren und Anpassen an die örtlichen Gegebenheiten durch den Lehrer zu verstehen.

Soll das Lehrbuch zum selbständigen Wissenserwerb durch die Schüler eingesetzt werden, so sollten dafür vor allem (Teile von) Lerneinheiten entwickelnden Charakters genutzt werden. Die Unterrichtshilfen geben dafür Vorschläge. In keinem Fall sollten die Schüler lediglich zum Lesen von Text aufgefordert werden; vielmehr sollte dieses Lesen durch eingangs gestellte Fragen bzw. Aufträge auf ein Ziel orientiert sein.

Für die Benutzung des Lehrbuches durch den Lehrer sei abschließend betont (vgl. das S. 9ff. für die Benutzung der Unterrichtshilfen Gesagte): Auch wenn das Lehrbuch eine gültige Interpretation des Lehrplans ist, so will es dem Lehrer nur Anregung und Hilfe für eine schöpferische, d. h. auch klassenspezifische, Umsetzung der Lehrplanforderungen durch jeden einzelnen Lehrer sein. Das Studium des Lehrplans und anderer Dokumente ist daher die wichtigste Grundlage für die Vorbereitung und die Durchführung des Unterrichts, auch für die Benutzung des Lehrbuches und der Unterrichtshilfen.

4. Aufgaben für tägliche Übungen

Aufgaben zum Stoff aus vorangegangenen Klassenstufen

1. Fülle die Tabellen aus!

a	b	c	$a+b$	$a+b+c$	$a-b$	$a-b-c$	$a-b+c$	$(a+b)+(b-c)$
546	187	212						

a	b	c	$a \cdot b$	$a \cdot b \cdot c$	$a:b$	$b:a$	$(a \cdot c):b$	$(a+c):b$
48	6	2						

a	b	c	$2 \cdot a + b$	$c \cdot (a+b)$	$a - 3 \cdot c$	$a - c:2$	$a:3 - c$
72	8	22					

a	b	c	a^2	b^3	$2 \cdot b^4$	$a^c:2$	c^3+5	$(a+b-c)^3$
4	3	2						

2. Rechne vorteilhaft! $24 + 80 + 16$, $25 \cdot 17 \cdot 4$, $57 - 18 - 2$, $17 \cdot 6 + 33 \cdot 6$

3. Es gilt $a = 39$ und $b = 45$.
Vermehre den Nachfolger von a um den Vorgänger b!
Vermindere das Dreifache von b um a!
Verdoppele die Summe von a und b!
Halbiere die Differenz von b und a!

4. Setze das richtige Zeichen ($<$; $=$; $>$)!

a) $7 \cdot 9 \quad 9 \cdot 11$
$75:15 \quad 45:9$
$5^2 \quad 2^5$

b) $216 \cdot 0 \quad 3 \cdot 1$
$84:21 \quad 84:12$
$7^2 + 3^2 \quad 10^2$

5. Löse die folgenden Gleichungen!

a) $x + 23 = 100$
$3 \cdot x + 5 = 26$
$5 \cdot (x - 3) = 20$

b) $x - 25 = 100$
$4 \cdot x - 36 = 0$
$(x - 3):4 = 8$

c) $x \cdot 7 = 126$
$25 + 8 \cdot x = 33$
$28:(9 - x) = 7$

6. Gib alle geordneten Paare natürlicher Zahlen an, für die gilt:
a) $x + y = 10$, **b)** $x \cdot y = 24$, **c)** $x \cdot y = 1$, **d)** $3 \cdot x + y = 10$!

7. Gib dasjenige geordnete Paar natürlicher Zahlen an, bei dem a möglichst groß ist und für das gilt: **a)** $3 \cdot a + b = 25$, **b)** $(46 - b):a = 5$!

8. Gib alle natürlichen Zahlen an, für die gilt:
a) $2 \cdot x < 17$, **b)** $10 + 7 \cdot x < 30$, **c)** $46 < 8 \cdot x < 78$, **d)** $43 < 7 \cdot x < 49$!

9. Fülle die Tabelle aus!

wahre Länge der Strecke	**Strecke auf der Karte im Maßstab** 1 : 50000	1 : 100000
7 km		
	4 cm	
		8 mm

10. Wandle in die nächstkleinere Einheit um!
3 km; 7,2 cm; 0,3 dm; 3,25 m
(entsprechend für Flächen-, Raum-, Massen-, Zeitmaße)

11. Wandle in die nächstgrößere Einheit um!
7300 g; 950 mg; 850 kg; 26 dt; 23,6 dt
(entsprechend für die anderen Maße)

12. Wieviel Zeit vergeht
a) von 8.15 Uhr bis 15.30 Uhr, **b)** von 5.23 Uhr bis 10.17 Uhr?

13. Runde auf Vielfache von 10 (100, 1000)!
8423; 37338; 451; 55000; 89499

14. Überschlage!
$35 \cdot 87$, $432 \cdot 67$, $364 : 7$, $969 : 17$

15. Ergänze die Tabelle! (analog für Quader und Würfel)

	Seite a	Seite b	Flächeninhalt A	Umfang u
Rechteck	16 m	8 m		
Quadrat	6 m	–		
Rechteck	15 cm			70 cm
Quadrat		–	144 m²	

16. Zeichne mit Hilfe der Lochschablone die Punkte $A(12)$, $B(15)$, $C(5)$!
a) Miß die Schnittwinkel der Geraden AB mit der Geraden AC und der Geraden BC!
b) Zeichne auf AB einen Punkt D so, daß AC und DC einen Schnittwinkel von 75° haben! Welchen Schnittwinkel haben dann BC und DC?

17. Zeichne einen Punkt M und um M den Kreis mit dem Radius 4 cm!
Zeichne einen von M ausgehenden Strahl a, und bezeichne seinen Schnittpunkt mit dem Kreis mit A!
a) Trage an a nach links die Winkel $\alpha = 50°$, $\beta = 140°$, $\gamma = 215°$ und $\delta = 315°$ an!
Bezeichne die erhaltenen Schnittpunkte mit dem Kreis mit B, C, D, E!
b) Wie groß sind die Winkel, die du an den Strahl a nach rechts hättest antragen müssen, um die gleichen Strahlen mit den Punkten B, C, D, E zu erhalten?

18. Ergänze zum Bild 1 die Tabellen für die jeweilige Verschiebung (Spiegelung)!

a)

Orig.	F	D	M		
Bild	K			E	O

b)

Orig.	H	P	F		
Bild	C			B	N

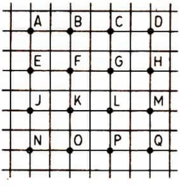


Bild 1

19. Zeichne in ein Koordinatensystem $A(4;7)$, $B(8;7)$, $C(1;6)$, $D(2;5)$, $E(7;5)$, $F(0;3)$, $G(3;2)$, $H(6;1)$, $J(4;0)$, $K(9;0)$!
Gib durch geordnete Zahlenpaare für diese Punkte ihre Bildpunkte an bei
a) der Verschiebung $\overrightarrow{AB}$, **b)** der Verschiebung $\overrightarrow{HK}$, **c)** der Spiegelung an AJ, **d)** der Spiegelung an BG, **e)** der Drehung um A mit dem Drehwinkel 90°!

Aufgaben zum Stoff des Kapitels A

1. Welche Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründe!
a) Es gibt eine Zahl x, für die gilt: $x + 3 < 5$.
b) Für jede Zahl x gilt: $x + 3 < 5$.
c) Es gibt eine Zahl x, für die gilt: $x \cdot 1 = x$.
d) Für jede Zahl x gilt: $x \cdot 1 = x$.
e) $3 \mid 8772 - 7422$, **f)** $5 \mid 123 + 432$, **g)** $4 \mid 1736 + 8942$, **h)** $7 \mid 210 + 56$

2. Ermittle das k. g. V. von **a)** 9 und 12, **b)** 16 und 48, **c)** 7, 12 und 21!

3. Zerlege in Primfaktoren! 42, 50, 81, 100

4. u sei eine natürliche (gebrochene) Zahl. Gib an:
a) das um 3 vermehrte Doppelte von u,
b) das Dreifache des Doppelten von u,
c) das Dreifache des um 2 Vermehrten von u!

5. k sei eine natürliche (gebrochene) Zahl. Sprich die genannte Eigenschaft in Form einer Gleichung aus!
a) Das Zehnfache von k ist gleich dem um 10 Vermehrten von k.
b) Der Nachfolger von k ist gleich dem Doppelten von k.

6. Wie oft ist 24 in $30 \cdot 8 \cdot 15$ enthalten?
Welches Produkt ist größer? $25 \cdot 16 \cdot 21$ oder $75 \cdot 14 \cdot 6$

7. Es gilt: $4 \mid a$ und $6 \mid b$.
Gib von $a + b$ und $a \cdot b$ möglichst viele Teiler an!

Aufgaben zum Stoff des Kapitels B

1. Kürze so weit wie möglich!
a) $\frac{6}{9}, \frac{12}{16}, \frac{44}{99}, \frac{19}{30}, \frac{72}{9}, \frac{12}{144}$ **b)** $\frac{35 \cdot 45}{54 \cdot 21}, \frac{36 \cdot 14}{21 \cdot 48}$

2. Ergänze!
$\frac{11}{15} = \frac{}{120}$, $\frac{5}{} = \frac{45}{81}$, $\frac{0}{13} = \frac{}{17}$, $\frac{6}{25} = \frac{}{7}$

3. a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, $\frac{3}{7} - \frac{1}{5}$, $\frac{3}{8} + \frac{2}{5}$ **b)** $\frac{1}{2} - \frac{1}{6}$, $\frac{17}{3} + \frac{7}{6}$, $2\frac{1}{4} - 1\frac{1}{8}$
c) $\frac{43}{6} + \frac{23}{9}$, $\frac{7}{12} - \frac{4}{15}$, $\frac{18}{24} + \frac{7}{28}$, $1 - \frac{7}{12}$, $\frac{12}{15} + \frac{0}{60}$
d) $5 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, $7 + 3\frac{1}{3} - \frac{3}{4}$, $\frac{7}{10} - \frac{1}{2} + \frac{5}{6}$

4. a) $12{,}8 - 8{,}72$; $45{,}073 + 16{,}29$; $13 - 15{,}273$
b) $0{,}91 + 0{,}991 - 0{,}1$; $19{,}2 - 16{,}403 + 0{,}57 - 1{,}2$

5. $\frac{3}{4} + 0{,}6$; $7{,}2 - \frac{7}{2}$; $\frac{2}{3} - 0{,}23$

6. a) $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}$, $\frac{15}{16}\cdot\frac{4}{5}$, $\frac{4}{15}\cdot 36$, $\frac{2}{3}\cdot 0$, $\frac{7}{9}\cdot 1$, $5\cdot 2\frac{1}{3}$

b) $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{8}{15}$, $\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{0}{6}$

c) $\frac{2}{3}:\frac{5}{12}$, $4:\frac{2}{3}$, $\frac{9}{5}:3$, $0:\frac{8}{9}$, $1:\frac{6}{7}$, $\frac{5}{2}:0$, $\frac{3}{8}:1$

7. a) $13{,}75\cdot 10$; $0{,}8\cdot 100$; $0{,}0034\cdot 1000$; $27\cdot 0{,}001$; $0{,}05\cdot 0{,}001$

b) $4{,}52\cdot 5{,}3$; $0{,}104\cdot 70$; $0{,}02\cdot 7$; $0{,}052\cdot 0{,}03$

c) $2{,}5\cdot 9{,}3\cdot 4$; $50\cdot 0{,}13\cdot 0{,}2$; $7{,}9\cdot 5\cdot 0{,}43$

d) $8{,}76:10$; $0{,}23:100$; $375:1000$; $7{,}05:0{,}001$; $0{,}037:0{,}01$

e) $1{,}44:12$; $6{,}21:3$; $30:0{,}6$; $12{,}78:0{,}3$; $0{,}72:6$

8. $\frac{7}{5}\cdot 0{,}8$; $\frac{2}{3}\cdot 0{,}4$; $\frac{5}{4}:0{,}2$; $0{,}7:\frac{1}{9}$; $\frac{3}{2}:3{,}2$

9. Ergänze!

a	$\frac{4}{3}$	4,7	6			0
$\frac{1}{a}$				$\frac{7}{8}$	1,2	

10. a) $\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{4}+\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{5}$, $2-\frac{8}{15}\cdot\frac{25}{16}$; $2:\frac{3}{5}+\frac{3}{5}:2$

b) $0{,}73\cdot 0{,}2+0{,}4\cdot 0{,}6$; $0{,}75:0{,}3-0{,}25:5$

11. Überschlage!

a) $34{,}7\cdot 7{,}053$; $0{,}81\cdot 0{,}079$; $0{,}055\cdot 0{,}22$; $121\cdot 0{,}00338$

b) $10{,}01:9{,}1$; $0{,}0338:121$; $3{,}285:2{,}176$; $4{,}17:0{,}0834$

12. a) $x+\frac{2}{5}=\frac{17}{15}$, $x+\frac{1}{3}=\frac{1}{7}$, $x-\frac{11}{90}=\frac{5}{18}$

$\frac{17}{8}-x=\frac{5}{6}$, $\frac{2}{7}-x=\frac{1}{3}$, $\frac{33}{44}-x=\frac{27}{36}$

b) $x+12{,}4=15{,}83$; $28{,}4+x=27{,}93$; $25{,}7-x=23{,}04$

c) $\frac{2}{3}\cdot x=\frac{8}{15}$, $\frac{2}{3}\cdot x=0$, $\frac{5}{9}\cdot x=\frac{5}{9}$, $x:\frac{3}{7}=1$, $x:\frac{7}{9}=0$

13. Vergleiche!

$\frac{3}{10}$ und $0{,}3$; $\frac{4}{25}$ und $0{,}16$; $\frac{1}{6}$ und $0{,}6$; $0{,}75$ und $\frac{2}{3}$

14. Ordne! Beginne mit der kleinsten Zahl! a) $0{,}65$; $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{5}$ b) $1\frac{1}{2}$; $1{,}49$; $\frac{5}{3}$

15. Vergleiche!

a) $12{,}7+3{,}8$ und $12{,}7+0{,}9$

b) $0{,}07+0{,}31$ und $1{,}2+0{,}4$

c) $6{,}73-1{,}4$ und $5{,}4-1{,}9$

d) $14{,}2-0{,}88$ und $14{,}2-0{,}808$

e) $31{,}7-2{,}54$ und $29{,}43-4{,}7$

f) $7{,}93\cdot 8{,}56$ und $12{,}217\cdot 8{,}56$

g) $0{,}79\cdot 0{,}051$ und $0{,}006\cdot 0{,}17$

h) $5{,}75:3{,}7$ und $5{,}75:4{,}83$

i) $0{,}063:2{,}8$ und $0{,}0725:2{,}8$

j) $0{,}73:0{,}84$ und $0{,}642:0{,}9$

16. Berechne!

$\frac{3}{10}\left(\frac{2}{5},\frac{3}{4},\frac{1}{8}\right)$ von 160, von 240, von 600, von 2000!

17. Gib Dezimalbrüche an für

a) $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}$ **b)** $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ **c)** $\frac{1}{5}, \frac{4}{5}$ **d)** $\frac{1}{8}, \frac{7}{8}$ **e)** $\frac{1}{50}, \frac{7}{50}$ **f)** $\frac{1}{25}, \frac{9}{25}$

g) $\frac{1}{20}, \frac{9}{20}$ **h)** $\frac{1}{40}, \frac{17}{40}$ **i)** $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ **j)** $\frac{1}{6}, \frac{5}{6}$!

Aufgaben zum Stoff des Kapitels C

1. Löse die Gleichungen in Q_+!

$7 \cdot a = 12, \quad \frac{a}{7} = 12, \quad \frac{7}{a} = 12, \quad \frac{1}{7} \cdot a = 12, \quad 7 \cdot a = \frac{1}{12}, \quad 3 \cdot 5 = a \cdot 8,$

$3 : 5 = 8 \cdot a, \quad 3 : 5 = a : 8, \quad \frac{5}{3} = x : 3, \quad x : 3 = 72 : 8, \quad \frac{x}{7} = \frac{6}{10{,}5}$

2. Ermittle alle geordneten Paare natürlicher Zahlen, für die gilt:
$a : b = 4 : 5$ und $a + b < 50$!

3. Ermittle ein Überschlagsergebnis für x!
a) $\frac{13}{68} = \frac{x}{100}$ **b)** $\frac{x}{25} = \frac{45}{74}$ **c)** $\frac{3{,}5}{x} = \frac{13{,}8}{0{,}8}$

4. Es gilt $a \sim b$ und $c \sim \frac{1}{d}$. Ermittle die fehlenden Glieder und den Proportionalitätsfaktor!

a)

a	12	x_1	600	0,1
b	72	84	x_2	x_3

b)

c	5	x_2	10	0,25
d	x_1	8	5	x_3

5. Untersuche auf Proportionalität!

a)

a	0,1	7	$\frac{5}{4}$
b	1	70	12,5

b)

c	0,25	10	5
d	4	0,1	0,2

Aufgaben zum Stoff des Kapitels D

1. a) α und β sind Scheitelwinkel und zusammen 72° groß.
Wie groß ist jeder der beiden Winkel?
b) γ und δ sind Nebenwinkel, und γ ist doppelt so groß wie δ.
Wie groß ist jeder der Winkel?

2. Was läßt sich über g und h (Bild 2) sagen, wenn gilt:
a) $\alpha = 63°, \beta = 63°$, **b)** $\alpha = 72°, \beta = 75°$,
c) $\alpha = 95°, \beta = 85°$? Begründe!

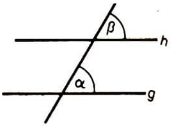


Bild 2

3. Im Bild 3 gilt $a \parallel b$.
Ermittle die Größe der Winkel α und β!
Erläutere und begründe deinen Lösungsweg!

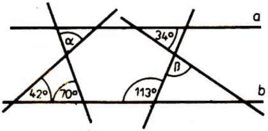


Bild 3

4. Von sechs Dreiecken ABC ist folgendes bekannt:
(1) $\alpha = 42°, \beta = 64°$ (2) $a = b, \alpha = 31°$ (3) $b = c, \alpha = 48°$
(4) $\gamma = 90°, \alpha = 72°$ (5) $\alpha = 80°, \beta = 50°$ (6) $\alpha = 80°, \gamma = 3 \cdot \beta$

a) Berechne die fehlenden Winkelgrößen!
b) Welche Dreiecke sind spitzwinklig (stumpfwinklig, rechtwinklig, gleichschenklig)?
c) Ordne in jedem Dreieck die Seiten nach der Größe!

5. Von einem Dreieck ABC ist bekannt:
$a = 6$ cm, $b = 8$ cm, $c = 10$ cm, $\alpha = 37°, \beta = 53°$.
Gib jeweils an, ob das Dreieck DEF (Bezeichnungen siehe Bild 4) zu diesem Dreieck
- gewiß kongruent ist,
- keinesfalls kongruent ist,
- kongruent sein kann, aber nicht muß!

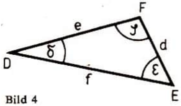


Bild 4

a) $d = 10$ cm, $e = 6$ cm, $f = 8$ cm **b)** $d = 6$ cm, $e = 8$ cm, $\varphi = 90°$ **c)** $\delta = 37°$, $\varepsilon = 53°$ **d)** $f = 10$ cm, $\delta = 37°$, $\varphi = 53°$ **e)** $d = 6$ cm, $e = 8$ cm, $\varepsilon = 53°$ **f)** $d = 10$ cm, $a = 8$ cm, $f = 5$ cm **g)** $e = 6$ cm, $f = 10$ cm, $\varepsilon = 37°$ **h)** $f = 10$ cm, $\varepsilon = 91°$ **i)** $e = 8$ cm, $\delta = 37°, \varphi = 90°$

6. Gib alle im Rechteck $ABCD$ (Bild 5) enthaltenen jeweils kongruenten Dreiecke an!

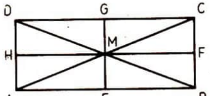


Bild 5

7. Im Bild 6 ist $g \parallel h$, und g und h haben den Abstand 5 cm voneinander. M und N haben jeweils den gleichen Abstand von g und h. Der Durchmesser des Kreises um M beträgt 7 cm, der Kreis um N hat den Radius 2 cm.

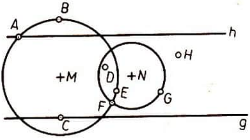


Bild 6

a) Nenne einen Punkt, dessen
- Abstand von g kleiner als 2,5 cm ist!
- Abstand von g 5 cm beträgt und dessen Abstand von M 3,5 cm beträgt!
- Abstand von M kleiner als 3,5 cm und dessen Abstand von N größer als 2 cm ist!

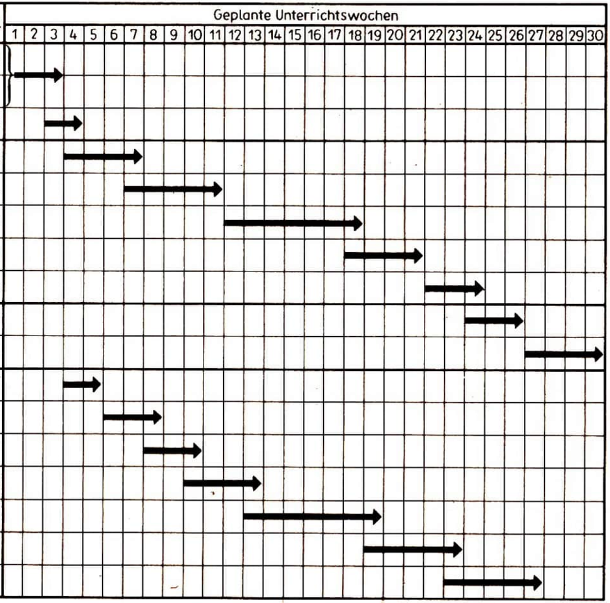
b) Zeichne einen Punkt ein, dessen
- Abstand von N 2 cm beträgt und dessen Abstand von h mehr als 2,5 cm beträgt!
- Abstand von M größer als 3,5 cm und dessen Abstand von N kleiner als 2 cm ist!

c) Gib an, ob folgende Aussagen wahr sind!
- F hat von M den Abstand 3,5 cm und von N den Abstand 2 cm.
- N hat von M einen Abstand, der größer als 3,5 cm ist, und von g einen Abstand, der größer als 5 cm ist.

8. In welchen der folgenden Fälle haben die beiden Dreiecke gewiß den gleichen Flächeninhalt? Die Dreiecke stimmen überein
a) in allen Seiten, **b)** in allen Winkeln, **c)** in einer Seite und der zugehörigen Höhe, **d)** in einer Seite und dem gegenüberliegenden Winkel.

5. Übersicht zur Jahresstoffverteilung

Stoffabschnitte	Std.
1.1. Wiederholung	3
1.2. Teilbarkeitssätze	11
1.3. Gemeinsame Vielfache; gemeinsame Teiler	6
2.1. Ordnung gebrochener Zahlen	8
2.2. Addition und Subtraktion gebrochener Zahlen	14
2.3. Multiplikation und Division gebrochener Zahlen	20
2.4. Gemeine Brüche und Dezimalbrüche; Division von gebrochenen Zahlen in Dezimalbruchdarstellung	10
2.5. Übung des Rechnens mit gebrochenen Zahlen	8
3.1. Einführung in die Gleichungslehre	7
3.2. Proportionalität und Verhältnisgleichungen	23
4.1. Wiederholung und systematische Zusammenfassung	6
4.2. Bewegung und Kongruenz	7
4.3. Beziehungen zwischen Winkeln	7
4.4. Dreiecke	8
4.5. Kongruenz von Dreiecken	18
4.6. Vierecke und Vielecke	13
4.7. Flächeninhalt und Umfang von Vielecken	11



Stoffgebiet 1

Teilbarkeit natürlicher Zahlen (20 Std.)

Vorbemerkungen

Die Forderungen des Lehrplanes für das Stoffgebiet 1 (vgl. [G 8], S. 39f.) lassen sich vor allem vier der Leitlinien (vgl. S. 6ff.) zuordnen:
Die *Leitlinie „Zahlenbereiche“* wird in zweierlei Hinsicht fortgesetzt. Einerseits wird das Wissen und Können der Schüler zum Bereich der natürlichen Zahlen durch die Behandlung (z. T. als Wiederholung) einiger zahlentheoretischer Begriffe und Sätze vertieft und abgerundet. Dazu zählen
- Begriffe wie „Teiler“, „Primzahl“, „kleinstes gemeinsames Vielfaches“ (k. g. V.),
- Sätze über die Teilbarkeit von Summen und Produkten.
- Kriterien für die Teilbarkeit durch spezielle Zahlen.

Andererseits werden Vorleistungen für das Stoffgebiet „2. Gebrochene Zahlen“ erbracht, denn
- das Ermitteln gemeinsamer Teiler natürlicher Zahlen ist eine Hilfe für schnelles und sicheres Kürzen von Brüchen und
- das Ermitteln gemeinsamer Vielfacher, möglichst des k. g. V., ist notwendig für das Gleichnamigmachen und damit für das Ordnen, Addieren und Subtrahieren gebrochener Zahlen.

Für das *„Arbeiten mit Mengen“* nimmt das Stoffgebiet insofern eine Sonderstellung ein, als einige einfache Begriffe der Mengenlehre (endliche bzw. unendliche Menge, Element einer Menge, Teilmenge einer Menge) einschließlich der entsprechenden Symbolik und Möglichkeiten der Veranschaulichung explizit eingeführt werden. Dies ermöglicht es, den Schülern die mengentheoretische Durchdringung des mathematischen Stoffes besser zu verdeutlichen. Das Stoffgebiet ist für derartige übergeordnete Betrachtungen deshalb besonders geeignet, weil die Schüler mit den natürlichen Zahlen und deren Eigenschaften bereits relativ gut vertraut sind.

Aus den gleichen Gründen wird das Stoffgebiet benutzt, in den *Leitlinien „Definieren“* und *„Beweisen“* einen wichtigen Schritt voranzugehen, indem die Schüler mit dem Definieren von Begriffen und dem Beweisen von Sätzen, auch mit den entsprechenden Termini, bekannt gemacht werden. Dies bedeutet nicht, daß in diesem Stoffgebiet besonders viele Definitionen formuliert und Beweise geführt werden, sondern daß die Schüler Einsichten erwerben bzw. vertiefen in die
- Notwendigkeit und Zweckmäßigkeit sowie Struktur von Definitionen,
- Notwendigkeit und Nützlichkeit von Beweisen für Allaussagen,
- Struktur von Implikationen und Gliederung von Beweisdarstellungen,
- Unterschiedlichkeit von „Definition“ und „Satz“.

Das Suchen nach allen Teilern gegebener Zahlen bzw. ihre Zerlegung in möglichst kleine Faktoren wird mehrfach zur Motivierung eingesetzt, so auch für den Begriff „Primzahl“. Daher wird „Primfaktorzerlegung“ bereits im Stoffabschnitt 1.2. eingeführt. Auf diese Weise werden eine gute Zielorientierung der Schülertätigkeiten und Systematisierung des Wissens möglich. Das „Definieren" selbst erst relativ spät, nämlich im Zusammenhang mit der Primzahldefinition zum Unterrichtsgegenstand zu machen, bietet eine sinnvolle Motivierungsmöglichkeit für das „Definieren". Hier wird ein neuer Begriff mit einem unbekannten Begriffswort, das auch für den Schüler einer Erklärung bedarf, eingeführt. Das Definieren bekannter Begriffe geschieht dann lediglich zu Übungszwecken.

Um die beim ersten Beweis (LE 6) zu erwartenden Schwierigkeiten möglichst gering zu halten, ist eine sorgfältige Vorbereitung notwendig. Dies geschieht in den vorangehenden Lerneinheiten durch
- das Begründen vieler Einzelaussagen,
- das Benutzen von Variablen und entsprechender Veranschaulichungen,
- das Aneignen weiterer Beweismittel (insbesondere Distributivgesetz).

Der erste Beweis wird zum Satz über die Teilbarkeit einer Summe geführt. Um die Beweisführung selbst zu erleichtern, wird dieser Satz zunächst für die Teilbarkeit durch 3 formuliert und bewiesen. Erst danach erfolgt eine Verallgemeinerung.

Zu den *Verfahren geistiger Arbeit* ist zu sagen, daß das Lehrbuch für die Ermittlung des k. g. V. nicht das algorithmische Verfahren mittels Zerlegung in Primfaktoren vorschlägt. Dieses Vorgehen wird bisher in der Regel mitgeteilt, also nur formal angeeignet und daher meist sehr schnell vergessen. Es ist außerdem bei relativ kleinen Zahlen – und solche treten später als Nenner von Brüchen ausschließlich auf – unrationell. Daher orientiert das Lehrbuch auf systematisches Probieren, also auf inhaltliches Arbeiten, und beschränkt sich auf Zahlen, die den Rahmen der Grundaufgaben der Multiplikation nicht wesentlich überschreiten. Dem Bemühen um inhaltliches Arbeiten entspricht es auch, wenn allgemeinere Erörterungen z. B. zu „Teilmenge" und „Definition" im Lehrbuch und in den Unterrichtshilfen stark an geeignete Sachverhalte der Teilbarkeitslehre gebunden werden. Dies soll begünstigen, daß im Unterricht nicht *über* die Dinge geredet, sondern *mit* ihnen in richtiger Weise gearbeitet wird.

Auch ohne die Erarbeitung einer algorithmischen Vorschrift dient das Stoffgebiet in starkem Maße der Entwicklung des Rechnenkönnens. Neben der Ermittlung des k. g. V. sind vor allem das systematische Suchen nach (allen) Teilern, das Zerlegen in Produkte und die Betonung der Sätze über die Teilbarkeit von Produkt und Summe gegenüber den Teilbarkeitsregeln zu nennen.

Die *erzieherischen* Potenzen sind in der sprachlich-logischen Schulung und in der Charakterbildung zu sehen. Die behandelten Fakten der Teilbarkeitslehre finden in der Praxis kaum bewußte Anwendung in dem Sinne, daß man die betreffenden praktischen Probleme nicht lösen kann, wenn man die entsprechenden Begriffe aus der Teilbarkeitslehre nicht kennt. Die im Lehrbuch enthaltenen praktischen Probleme können also die theoretischen Erörterungen nicht als notwendig, wohl aber als zweckmäßig und sinnvoll nachweisen; sie sind daher mehr mit der Absicht einzusetzen, den Schülern das Verhältnis „Realität – mathematisches Modell" näherzubringen.

Der Lehrplan gliedert dieses Stoffgebiet in drei Stoffabschnitte, wobei der erste ausschließlich der Wiederholung wichtiger Kenntnisse über natürliche Zahlen dient. Für diesen ersten Stoffabschnitt stellt das Lehrbuch Aufgaben zur Verfügung, aus denen man in Abhängigkeit von der Klassensituation auswählen kann. Von den dafür vorgesehenen drei Stunden könnten für die Folge der natürlichen Zahlen eine Stunde und die Grundrechenoperationen mit natürlichen Zahlen zwei Stunden geplant werden. Dabei sollte man sich aber davor hüten, daß überwiegend allgemeine Sätze und Regeln nur abgefragt, also zu wenig Tätigkeiten organisiert werden, die ein selbständiges Anwenden des zu Wiederholenden fordern.

Eine andere Variante besteht darin, die Wiederholung dort vorzusehen, wo die zu erarbeitenden Fakten das Wiederholen der betreffenden Kenntnisse erfordern oder nahelegen. Ein solches Vorgehen befriedigt auch stärker das Bedürfnis der Schüler, zu Beginn eines neuen Schuljahres möglichst bald zu neuen Erkenntnissen zu gelangen. Die vorliegenden Unterrichtshilfen legen diesen Weg zugrunde und bieten eine entsprechende Stoffverteilung an.

Entscheidet sich der Lehrer für die erste Variante, müßte er 3 Stunden aus der nachstehenden Stoffverteilung dafür abzweigen, etwa durch Reduzierung der für die Lerneinheiten 2, 6 und 7 vorgesehenen Zeit um je 1 Stunde.

Kontrollaufgaben zum Stoffgebiet „1. Teilbarkeit natürlicher Zahlen“

1. a) Gib alle Vielfachen von 24 an, die kleiner als 100 sind!
b) Gib alle Zahlen an, für die 24 ein Vielfaches ist!
c) Gib alle Teiler von 30 an!
d) Gib alle Zahlen an, die kleiner als 30 sind und 7 als Teiler haben!

2. Ermittle das k. g. V. von **a)** 12 und 9, **b)** 5 und 7, **c)** 8 und 48, **d)** 4, 6, 8, **e)** 4, 10, 15!

3. a) Zerlege 105 in Primfaktoren! **b)** Gib alle Primzahlen zwischen 20 und 30 an!

4. Gib zwei Zahlen an, deren k. g. V. gleich 20 ist!

5. Welche Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründe!
a) $7 \mid 56$ **b)** $11 \mid 1$ **c)** $1 \mid 17$ **d)** $23 \mid 23$ **e)** $0 \mid 5$ **f)** $5 \mid 0$
g) $9 \mid 95627$ **h)** $2 \mid 12143$ **i)** $5 \mid 4685$ **j)** $3 \mid 87141$
k) $4 \mid 11128$ **l)** $6 \mid 57852$ **m)** $8 \mid 3256$ **n)** $7 \mid 14355$

6. Vervollständige die Tabellen!

a)

n	3	5	11		
$8 \cdot n$				56	160

b)

n	4	11			13
	8	22	30	14	

c)

n	3	5	4	
	7	11		21

d)

n	7	10	3	9	
	28	40			32

7. Wenn man in $2 \cdot n$ für n beliebige natürliche Zahlen einsetzt und die Summen ausrechnet, so erhält man wieder Zahlen. Welche gemeinsame Eigenschaft haben die erhaltenen Zahlen?

8. Ersetze * in 35*90 durch eine solche Ziffer, daß eine **a)** durch 7, **b)** durch 9 teilbare Zahl entsteht!

9. Welche Aussage ist wahr, welche falsch? Begründe!
a) $12 \cdot n$ ist stets durch 4 teilbar.
b) $14 \cdot n$ ist niemals durch 6 teilbar.
c) Die Summe zweier gerader Zahlen ist stets durch 4 teilbar.

10. Wenn man in $4 \cdot n + 2$ beliebige natürliche Zahlen für n einsetzt und die Summen ausrechnet, so erhält man wieder Zahlen. Begründe, welche der folgenden Aussagen wahr sind!
a) Alle erhaltenen Zahlen sind gerade.
b) Alle erhaltenen Zahlen sind durch 4 teilbar.
c) Alle erhaltenen Zahlen sind durch 6 teilbar.

Stoffverteilung

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Stoffabschnitt 1.1. Wiederholung 3 Std.			
Stoffabschnitt 1.2. Teilbarkeitssätze 11 Std.			
Vielfache und Teiler (LE 1)	1	– Produkt, Faktor, Dividend, Divisor, Quotient – Definieren von „a ist Vielfaches von b", „b ist Teiler von a", „a ist durch b teilbar", „$b \mid a$" – Aussage; Beweisnotwendigkeit	
Beschreibung von Vielfachen mit Hilfe von Variablen (LE 2)	2	– Nachfolger, Vorgänger – gerade Zahl, ungerade Zahl	– Darstellung gerader (ungerader) Zahlen – Darstellung der Vielfachen von a – Veranschaulichung gerader (ungerader) Zahlen
Teilbarkeit eines Produkts (LE 3)	1	– Teilbarkeit eines Produkts durch seine Faktoren – Grundgesetze der Addition und Multiplikation – Summand, Summe	– Satz über die Teilbarkeit eines Produkts – Anwenden des Satzes zur Überprüfung der Teilbarkeit von Zahlen – Begründen von Aussagen
Mengen von Teilern und Vielfachen (LE 4)	2		– „Menge"; endliche und unendliche Mengen; „$M = \{\ldots\}$" – „Element einer Menge", „$a \in M$" – „Teilmenge einer Menge", „$A \subset B$" – Mengendiagramme
Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen (LE 5)	2	– Ermitteln aller Teiler einer Zahl – $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ – $a : a = 1\ (a \neq 0)$; $a : 1 = a$ – Potenz, Basis, Exponent – Definition für „$a < b$"	– Zerlegung einer Zahl – Definition von „Primzahl" – „zusammengesetzte Zahl" – Zerlegen in Primfaktoren – „Definition"; Unterschied zwischen Definition und Aussage
Teilbarkeit von Summen und Differenzen (LE 6)	3	– Satz über die Teilbarkeit eines Produkts – Beweisnotwendigkeit – Distributivgesetz – Ausführbarkeit von Rechenoperationen im Bereich der natürlichen Zahlen – dekadisches Positionssystem	– Sätze über die Teilbarkeit von Summen und von Differenzen – Beweis eines dieser Sätze – Anwenden der Sätze zur Überprüfung der Teilbarkeit von Zahlen – „Satz", „Beweis" – Schema „Voraussetzung – Behauptung – Beweis" bei der Beweisdarstellung
Teilbarkeitsregeln (LE 7)	3	– Teilbarkeitsregeln für 2, 5, 10, 100	– Einführen von „Ziffer" statt „Grundziffer" – Teilbarkeitsregeln für 4 und 8

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
			– „Quersumme"; Teilbarkeitsregeln für 3, 9 und 6
Stoffabschnitt 1.3.		Gemeinsame Vielfache; gemeinsame Teiler	6 Std.
Gemeinsame Teiler (LE 8)	1	– Zahlenpaar – Kürzen von Brüchen – Mengendiagramme	– Eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung – „gemeinsamer Teiler", „größter gemeinsamer Teiler" (g. g. T.); „teilerfremd" – Ermitteln des g. g. T. zweier Zahlen
Gemeinsame Vielfache (LE 9)	2		– „gemeinsames Vielfaches" – Definition von „kleinstes gemeinsames Vielfaches" (k. g. V.) – Ermitteln des k. g. V. von zwei (drei) Zahlen
Zusammenfassung	1		
Leistungskontrolle und Auswertung	2		

Stoffabschnitt 1.1. (Wiederholung) (3 Std.)

Stoffabschnitt 1.2.

Teilbarkeitssätze (11 Std.)

Vielfache und Teiler (1 Std.)

LE 1 (LB 6 bis 8)

Ziele

Die Schüler
- können erklären, was „*a* ist ein Vielfaches von *b*", „*b* ist ein Teiler von *a*" („$b \mid a$"), „*a* ist durch *b* teilbar" bedeutet, und wissen, daß es sich um gleichbedeutende Sprechweisen handelt,
- können diese Begriffe identifizieren und realisieren,
- wissen, was man unter Aussagen versteht, können bei einfachen Formulie-

rungen entscheiden, ob es Aussagen sind, und die Wahrheit oder Falschheit einfacher Aussagen beweisen,
- wissen, daß Aussagen über mehrere Zahlen nicht durch Angabe eines Beispiels bewiesen werden können.

Schwerpunkte

- Motivieren des Stoffgebiets
- Festigen des Wissens und Könnens zu „Vielfaches“ und „Teiler“
- Bekanntmachen mit dem Begriff „Aussage“ und mit der Notwendigkeit des Beweisens von Aussagen

Methodische Hinweise

Zum **Motivieren des Stoffgebiets** kann der das Kapitel A einleitende Text (LB 5) genutzt werden. Die Schüler erkennen beim Durchdenken der Probleme (jede Kantenlänge der Schachtel muß Vielfaches von 15 bzw. durch 15 teilbar sein), daß Teilbarkeitsfragen eine gewisse praktische Bedeutung haben. Dabei wird man zweckmäßigerweise mit den Schülern verabreden, in den folgenden Stunden für „natürliche Zahlen“ stets nur „Zahlen“ zu sagen, obwohl die Schüler bereits auch gebrochene Zahlen kennen.

Hinweis: Andererseits sollte man an solchen Stellen, an denen sich ein Unterschied beider Zahlenbereiche deutlich machen läßt, die zusätzlichen Bezeichnungen fordern, z. B. bei Aufgabe 2d in LE 2 (LB 10).

Festigen des Wissens und Könnens zu „Vielfaches“ und „Teiler“ Da die Schüler bereits wissen, was man unter „a ist ein Vielfaches von b“, „b ist ein Teiler von a“, „a ist durch b teilbar“ versteht, können diese Begriffe anhand der Aufgaben 1 bis 3 weitgehend selbständig reaktiviert und gefestigt werden. Es ist wichtig, möglichst häufig zwischen den Sprechweisen und den Begriffen zu wechseln und dabei auch die Aufgabenformulierungen zu variieren. Falls erforderlich, kann aber auch jede Sprechweise zuvor gesondert gefestigt werden. Die Zahlen in den Aufgaben 1 bis 3 sind so gewählt, daß die Schüler die Beziehungen leicht überblicken können. Es sollte nicht nur mündlich, sondern auch schriftlich gearbeitet werden. Beim schriftlichen Lösen der Aufgaben kommt es darauf an, daß die Schüler den vollständigen Satz schreiben. Die Zusammenhänge zwischen den Begriffen und Definitionen können wie im Lehrbuch durch ein entsprechendes Tafelbild gezeigt werden. Das Wort „Definition“ sollte man hier aber noch nicht verwenden. Dennoch sollte der Charakter von Merksatz A 1 als Festlegung (Verabredung, Namensgebung) bereits bewußt werden. Die im Lehrbuch für diesen Merksatz gewählte Form erleichtert dem Schüler zu erkennen, a) daß es sich um eine Definition handelt (Signalwort „bedeutet“), b) was definiert wird, c) wodurch es definiert wird.

Im Interesse sprachlich-logischer Schulung muß beim Arbeiten mit den Begriffen die unterschiedliche Verwendung des bestimmten und des unbestimmten Artikels bewußtgemacht werden. Großer Wert ist auf Begründungen (entsprechend Beispiel A 1) zu legen, vor allem bei Identifizierungsübungen (Aufg. 5a, b, e bis h und Aufg. 6). In der Regel wird man sich mit Begründungen wie „$6 \mid 30$; denn $30 = 6 \cdot 5$“, „$6 \nmid 47$; denn 47 liegt zwischen $6 \cdot 7 = 42$ und $6 \cdot 8 = 48$“ begnügen. Die Schüler sollten auch erkennen und begründen, daß 0 Vielfaches jeder Zahl und jede Zahl Teiler von 0 ist.

Dabei muß aber stets deutlich werden (auch bei auftretenden Fehlern und Meinungsverschiedenheiten, z. B. über $3 \mid 3$, $3 \mid 0$, $0 \mid 0$), daß man sich auf die getroffene Festlegung (Merksatz A 1) zu stützen hat. Auf diese Weise wird zugleich die Notwendigkeit einer klar und unmißverständlich formulierten Definition motiviert.

Bekanntmachen mit dem Begriff „Aussage" und der Beweisnotwendigkeit . . . Die bereits umgangssprachlich verwendeten Begriffe „Aussage" und „wahre (falsche) Aussage" werden nun (eventuell unter Anknüpfung an den seit Klasse 2 im Deutschunterricht benutzten Begriff „Aussagesatz") vor allem anhand von Teilbarkeitsaussagen präzisiert. Die Schüler sollen an Beispielen und Gegenbeispielen erkennen, daß man nur dann von Aussagen spricht, wenn es bei einer Formulierung sinnvoll ist zu fragen, ob sie wahr oder falsch ist. Zur Festigung empfiehlt sich Aufgabe 7.

Durch Auftrag A 1 erkennen die Schüler, daß eine Entscheidung über die Wahrheit einer Aussage bisweilen schwierig ist und die Angabe von Beispielen (bei Universalaussagen) dafür nicht ausreicht, daß aber eine solche Aussage durch Angabe eines einzigen Gegenbeispiels als falsch bewiesen ist. Sind Schüler tatsächlich zunächst geneigt, die Aussage in Auftrag A 1 als wahr anzusehen, so ergibt sich eine Möglichkeit, ihnen die Beweisnotwendigkeit noch deutlicher zu machen.

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 5c, d **2.** Aufg. 4

Beschreibung von Vielfachen mit Hilfe von Variablen (2 Std.)

LE 2 (LB 8 bis 10)

Ziele

Die Schüler
- kennen die Definitionen für „gerade Zahl" und „ungerade Zahl" und können diese Begriffe identifizieren und realisieren,
- wissen, daß sich jede gerade bzw. durch a teilbare Zahl in der Form $2 \cdot n$ bzw. $a \cdot n$ schreiben läßt und jede Zahl, die sich so schreiben läßt, gerade bzw. durch a teilbar ist,
- wissen, daß sich jede ungerade Zahl in der Form $2 \cdot n + 1$ schreiben läßt und jede Zahl, die sich so schreiben läßt, ungerade ist.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Reaktivieren von „gerade Zahl" und „ungerade Zahl"
- Erarbeiten der Darstellung $2 \cdot n$ für gerade Zahlen

2. Stunde
- Erarbeiten der Darstellung $2 \cdot n + 1$ für ungerade Zahlen
- Erarbeiten der Darstellung $a : n$ für durch a teilbare Zahlen

Methodische Hinweise

Das **Reaktivieren von „gerade Zahl“ und „ungerade Zahl“** kann mit Hilfe der Aufgaben 13 (Zur Wiederholung; LB 6) sowie 1 und 2 (LE 2) (SSA) erfolgen. Beim mündlichen Begründen werden die Definitionen der Begriffe wiederholt. Dabei werden folgende Erkenntnisse reaktiviert: Jede natürliche Zahl ist entweder gerade oder ungerade; der Größe nach aufgeschrieben bzw. auf dem Zahlenstrahl gekennzeichnet wechseln ständig gerade und ungerade Zahlen einander ab. Anders: „Jede gerade (ungerade) Zahl (außer 0) ist Nachfolger einer ungeraden (geraden) Zahl.“

Erarbeiten der Darstellung $2 \cdot n$ für gerade Zahlen Die schriftliche Bearbeitung von Auftrag A 3 führt zu der Erkenntnis, daß sich jede gerade Zahl als Produkt $2 \cdot n$ schreiben läßt und jedes Produkt $2 \cdot n$ eine gerade Zahl ist. Man kann aber auch deduktiv vorgehen, indem man, anknüpfend an Aufgabe 1, über die Spezialisierung der Definition A 1 sofort zum Term $2 \cdot n$ gelangt. Zur Festigung eignet sich Aufgabe 6a.

Erarbeiten der Darstellung $2 \cdot n + 1$ für ungerade Zahlen Einleitend wird bei Nutzung der Aufgabe 1 (Zur Wiederholung; LB 5) nochmals der Begriff „Nachfolger (Vorgänger) einer natürlichen Zahl“ wiederholt. Die Erkenntnis über die Darstellung ungerader Zahlen kann auf der Grundlage des in der 1. Stunde reaktivierten Wissens deduktiv erarbeitet und durch Auftrag A 4 bekräftigt werden. Auf das Veranschaulichen gerader bzw. ungerader Zahlen durch Mengen, deren Elemente sich paarweise zusammenfassen lassen, bzw. Mengen, bei denen dabei ein Element übrigbleibt (LB-Bilder A 1 und 2), sollte im Interesse eines Abstützens und Anreicherns der Vorstellungen der Schüler und des Vorbereitens auf Beweisführungen in LE 6 nicht verzichtet werden.

Erarbeiten der Darstellung $a \cdot n$ für durch a teilbare Zahlen Zur induktiven Erkenntnisgewinnung läßt sich Auftrag A 5 nutzen. Auch hier ist (analog zu den geraden Zahlen) eine deduktive Erkenntnisfindung möglich. Dem unmittelbaren Festigen dient Aufgabe 8 (mdl.). Beim weiteren Festigen sollten Aufgaben vom Typ der Aufgaben 6b, 6c, 7b berücksichtigt werden.

Das Finden der Terme in den „Tabellenköpfen“ (Aufg. 6c) sollte durch Analysieren der jeweils ersten beiden Zahlenpaare (eventuell nach Denkanstoß) jedem Schüler möglich sein. Zur Aufgabendifferenzierung kann Aufgabe 5* genutzt werden.

In Ergänzung zu den Abbildungen A 1 und 2 (LB 9) sollten auch durch 3 teilbare Zahlen mit Hilfe von Mengen veranschaulicht werden (Bild 7).

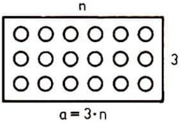


Bild 7

Zusammenfassung durch folgendes *Tafelbild*:

a ist gerade $\rightleftarrows a = 2 \cdot n$
a ist ungerade $\rightleftarrows a = 2 \cdot n + 1$
a ist durch 3 teilbar $\rightleftarrows a = 3 \cdot n$

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 3 **2.** Aufg. 6d

Teilbarkeit eines Produkts (1 Std.)

LE 3 (LB 11 bis 12)

Grundlage für Teilbarkeitsuntersuchungen sind (neben der Definition für Teilbarkeit) vor allem die Sätze über die Teilbarkeit von Produkten und Summen. Im Lehrbuch wird in dieser Lerneinheit noch von „Merksatz" gesprochen, da „Satz" erst in LE 6 eingeführt wird.

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß ein Produkt durch alle Teiler seiner Faktoren teilbar ist (Satz A 2),
- können diesen Satz sicher anwenden und Aussagen über die Teilbarkeit von Produkten begründen.

Schwerpunkte

- Erarbeiten von Satz A 2 (Wenn $c \mid a$ oder $c \mid b$, so $c \mid a \cdot b$.).
- Festigen des Satzes

Methodische Hinweise

Erarbeiten von Satz A 2 Zur Sicherung des Ausgangsniveaus sollten das Assoziativ- und das Kommutativgesetz der Multiplikation wiederholt und beim Rechnen (Rechenvorteile) bewußt angewendet werden (Zur Wiederholung; LB 5, Aufg. 5d bis f).

Der Satz kann dadurch motiviert werden, daß man das Suchen nach (allen) Teilern insbesondere für größere Zahlen erleichtern möchte. (Man kommt mit den Grundaufgaben der Multiplikation nicht aus; ein Ausdividieren ist mühsam.) Die weiteren Überlegungen können mit dem im Lehrbuch zu findenden Produkt $24 \cdot 15$ begonnen werden. Die Erkenntnis „Die Faktoren eines Produkts sind auch Teiler des Produkts" wird durch Rückgang auf Definition A 1 begründet. Die Frage nach der Existenz weiterer Teiler führt auf den Vorschlag, aus dem vorhandenen Produkt ein solches herzustellen, in dem die Faktoren ihrerseits als Produkte geschrieben werden. Ohne bei der Angabe weiterer Teiler auf Vollständigkeit Wert zu legen, sollte deutlich werden:
- Es gibt Teiler (hier die Zahl 3), die beide Faktoren teilen. (Dadurch wird die Verwendung von „mindestens" bzw. „oder" in Satz A 2 vorbereitet.)
- Das Produkt kann auch Teiler haben, die keinen der Faktoren teilen.

Der Satz selbst sollte erst nach dem Untersuchen mindestens eines weiteren Beispiels formuliert werden. Abschließend lesen die Schüler Satz A 2 im Lehrbuch und die anschließende Bemerkung, daß die Umkehrung des Satzes nicht gilt.

Zum **Festigen des Satzes** können die Aufgaben 1 (ersten vier Produkte) und 2a bis c genutzt werden. Eine ausreichende Begründung für z. B. $6 \mid 24 \cdot 13$ wäre „denn $6 \mid 24$". Ein weiteres Festigen kann anhand der Aufgaben 4a, d, e (schriftl., analog Beispiel A 3), 7, 8 erfolgen. Dabei geht es vor allem um ein Begründen mit Hilfe von Satz A 2.

Zur weiteren Entwicklung des abstrakten Denkens und des Könnens im Umgang mit Variablen sollten nicht nur spezielle Zahlen auf Teilbarkeit untersucht, sondern auch z. B. die Aufgaben 3 und 5* bearbeitet werden. Aufgabe 5* bietet Möglichkeiten zur Differenzierung: Die Teilbarkeit von $x \cdot y$ durch 4 und 15 wird man z. B. von allen Schülern (mit Hilfe von Satz A 2) begründen lassen, nicht von allen Schülern dagegen die Teilbarkeit von $x \cdot y$ durch 2, 3 und 5 (durch zweimaliges Anwenden von Satz A 2) und nur von einigen Schülern die Teilbarkeit durch 6, 10, 12, 20, 30 und 60 (durch Zerlegen von $x \cdot y$ in $2 \cdot 2 \cdot m \cdot 3 \cdot 5 \cdot n$).

Kontrollaufgaben

1. Aufg. 1 (die Produkte $35 \cdot 49$; $35 \cdot 56$)   **2.** Aufg. 4b, c

Mengen von Teilern und Vielfachen (2 Std.)

LE 4 (LB 12 bis 14)

Die einzuführenden Begriffe der Mengenlehre werden vor allem an Sachverhalten der Teilbarkeitslehre verdeutlicht. Allgemeine Erklärungen für diese Begriffe sind nicht zu verlangen.

Ziele

Die Schüler
- kennen die Begriffe „Menge", „Element einer Menge" und „Teilmenge einer Menge" (einschließlich Symbolik) und können sie identifizieren und realisieren,
- wissen, daß man endliche Mengen durch Aufzählen ihrer Elemente angeben kann,
- können (an Beispielen) die Teilmengenbeziehung durch Diagramme veranschaulichen.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Einführen von „Menge", „Element einer Menge" und der entsprechenden Symbolik
- Festigen der Begriffe und Symbolik

2. Stunde
- Einführen von „Teilmenge einer Menge" und der entsprechenden Symbolik
- Festigen der Begriffe und Symbolik

Methodische Hinweise

Einführen von „Menge", „Element einer Menge" . . . Durch selbständiges Bearbeiten von Auftrag A 6 erkennen die Schüler die unterschiedliche Bedeutung des Wortes „Menge"; anhand der Mengen von Beispiel A 4 und Auftrag A 7 wird die Verwen-

dung dieses Begriffs und des Elementbegriffs in der Mathematik deutlich. Der Lehrplanforderung nach „Einführen“ des Begriffs entspricht es, wenn er (an Beispielen) in verschiedenen Zusammenhängen verwendet und sein Inhalt lediglich umschrieben wird. Diese Einführung kann mit Identifizierungs- und Realisierungsübungen verbunden werden (Aufg. 1 und 2). Dabei sind auch Begründungen zu verlangen (z. B.:
„$16 \in M_1$, denn $16 \mid 16$“;
„$18 \notin M_2$, denn $4 \nmid 18$“;
„$20 \in M_3$, denn $10 \mid 20$ und $12 < 20 < 29$“).

Bei Begründungen für die Mengen M_2 und M_3 wird man hervorheben, daß stets alle Bedingungen zu überprüfen sind. Unter Bezug auf Auftrag A 7 können die Schüler den Lehrbuchtext zur Darstellung von Mengen mit Hilfe geschweifter Klammern (bis einschließlich Beispiel A 5) selbständig durcharbeiten.

Das **Einführen von „Teilmenge einer Menge“ . . .** kann anhand zweier endlicher Mengen, z. B. der Mengen T_{12} und T_6 aus Beispiel A 5, vorgenommen werden. Die Angabe ihrer Elemente sollte an der Tafel möglichst instruktiv sein, z. B.:

$$\begin{array}{lllllllll} T_{12} & = \{1, & 2, & 3, & 4, & 6, & 12\} \\ & \;\;\;\; | & | & | & & | & \\ T_6 & = \{1, & 2, & 3, & & 6 & \} \end{array}$$

Zum Anreichern der Vorstellungen der Schüler über den Begriff werden sie mit dem Veranschaulichen durch ein Mengendiagramm vertraut gemacht (LB-Bild A 5). Anschließend kann zum Bilden von Teilmengen aufgefordert werden (z. B. Mengen von Schülern der eigenen Klasse). Dabei muß deutlich werden, daß „Teilmenge“ stets auf eine andere Menge zu beziehen ist und man daher genauer von „Teilmenge einer Menge“ sprechen sollte. Zur Erstfestigung dient Aufgabe 5a bis c.

Zum **Festigen der Begriffe und Symbolik** sollten dann etwas anspruchsvollere Aufgaben gewählt werden, unter Einbeziehen von endlichen und unendlichen Mengen und Veranschaulichungen durch Mengendiagramme. Dafür werden die Aufgaben 7a, b; 11a (beschränkt auf einige Wörter) und 12a empfohlen. Sie dienen sowohl der Ausdrucksschulung und Übung der Sprech- und Schreibweisen der Mengenlehre als auch dem weiteren Festigen von „Teiler“ und „Vielfaches“. Bei unendlichen Mengen sollte eine (Schüler-) Schreibweise wie $V_4 = \{0, 4, 8, 12, \ldots\}$ toleriert werden, obwohl sie eigentlich nur für endliche Mengen zulässig ist. Zur Differenzierung können auch die Aufgaben 9* und 10* genutzt werden; sie dienen durch das Umkehren von Fragestellungen dem Vertiefen von Begriffsvorstellungen.

Nach Aufgabe 12a könnten als Ergebnis einer Zusammenfassung die folgenden drei *Tafelbilder* entstehen:

(1)
V_5 sei die **Menge** der Vielfachen von 5.
$V_5 = \{0, 5, 10, 15, \ldots\}$
V_{10} sei die **Menge** der Vielfachen von 10.
$V_{10} = \{0, 10, 20, 30, \ldots\}$

(2)
10 ist **Element der Menge** V_5.
$10 \in V_5$ $(15 \in V_5,\ 7 \notin V_5)$.
V_{10} ist **Teilmenge der Menge** V_5.
$V_{10} \subset V_5$

(3)

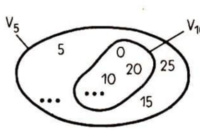


Bild 8

Hinweis: Die eingeführten Begriffe und Bezeichnungsweisen sind im weiteren Unterricht an (möglichst vielen) geeigneten Stellen zu verwenden, da sich erworbene Kenntnisse mit Hilfe der neuen Begriffe und Bezeichnungsweisen klar und einheitlich (häufig auch rationell) formulieren und darstellen lassen.

Kontrollaufgaben

1. Aufg. 3b **2.** Aufg. 5d **3.** Aufg. 8

Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen (2 Std.)

LE 5 (LB 14 bis 16)

In dieser Lerneinheit wird im Zusammenhang mit der Erarbeitung von „Primzahl" der Begriff „Definition" eingeführt.

Ziele

Die Schüler
- können die Begriffe „Primzahl" und „zusammengesetzte Zahl" identifizieren und realisieren,
- können eine Definition für Primzahl angeben,
- können natürliche Zahlen in Primfaktoren zerlegen,
- wissen, daß Definitionen Festlegungen (Verabredungen, Namensgebungen) und von Aussagen zu unterscheiden sind, und erkennen die Notwendigkeit, Begriffe klar und unmißverständlich zu definieren.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Motivieren und Erarbeiten von „Primzahl"
- Festigen von „Primzahl"

2. Stunde
- Üben im Zerlegen in Primfaktoren
- Einführen von „Definition"

Methodische Hinweise

Motivieren und Erarbeiten von „Primzahl" Zur Sicherung des Ausgangsniveaus begründen die Schüler (mdl.) die Wahrheit oder Falschheit von Teilbarkeitsaussagen wie $7 \mid 21$, $8 \mid 57$, $1 \mid 27$, $9 \mid 9$. Der Begriff „Primzahl" kann auf deduktivem oder induktivem Wege erarbeitet werden. (Vgl. auch [7].)

Der deduktive Weg ist zeitsparend und bereitet auf das selbständige Erarbeiten von Begriffen mit Hilfe von Literatur vor. Er ist gangbar, weil die Schüler mit dem Oberbegriff „natürliche Zahl" und den Definitionsmerkmalen bereits vertraut sind; sie

haben gewiß bereits bemerkt, daß jede Zahl (mindestens) durch 1 und sich selbst teilbar ist. Daran anknüpfend werden sie zu der Erkenntnis geführt, daß es Zahlen gibt, die keine weiteren Teiler haben. Nach dem Nennen einiger solcher Zahlen und dem Ausschließen von 1 bezeichnet der Lehrer diese Zahlen als Primzahlen. Zur Erstfestigung schließen sich Identifizierungs- und Realisierungsübungen an. Dabei wird herausgestellt:
- Alle übrigen Zahlen (außer 0 und 1) heißen zusammengesetzte Zahlen.
- 0 und 1 sind weder Primzahlen noch zusammengesetzte Zahlen.

Tafelbild:

Primzahlen:	2, 3, 5, 7, 11, 13, ...
Zusammengesetzte Zahlen:	4, 6, 8, 9, 10, 12, ...
Sonstige:	0, 1

Beim induktiven Weg werden stärker allgemein-geistige Fähigkeiten entwickelt; außerdem wird der Begriffsmotivierung mehr Rechnung getragen. Er entspricht dem Vorgehen im Lehrbuch. Die Schüler bearbeiten Auftrag A 8 und die Aufgaben 1 und 2 (SSA). Als Mittel zum systematischen Finden kann ein Teilerstern (LB-Bild A 7) verwendet werden. Ebenso ist es möglich, daß die Schüler arbeitsteilig alle Zahlen von 0 bis 15 bezüglich der Anzahl ihrer Teiler analysieren und vergleichen. Dabei könnte das folgende *Tafelbild* entstehen:

Anzahl der Teiler	**Natürliche Zahlen**	
1	1	
2	2, 3, 5, 7, 11, 13, ...	(Primzahlen)
3 4 . . .	4, 9, ... 6, 8, 10, 14, 15, ...	(zusammengesetzte Zahlen)
unendlich viele	0	

(Das in Klammern Stehende wird erst später ergänzt.)

Anschließend lösen die Schüler mit Hilfe dieses Tafelbildes Aufgabe 4 (mdl.); sie dient vor allem der sprachlich-logischen Schulung („genau ein“, „mindestens ein“, „jedes“). Danach wird anhand von Beispielen (12, 17, 1, 0) das Zerlegen einer Zahl erarbeitet. Die Schüler erkennen:
- Jede Zahl läßt sich als Produkt von Teilern schreiben.
- Es gibt Zahlen mit genau zwei Teilern, sie lassen sich nicht zerlegen.
- Jede zerlegbare Zahl läßt sich als Produkt von Zahlen schreiben, die sich nicht zerlegen lassen.

Der Lehrer hebt die besondere Rolle der nicht weiter zerlegbaren Zahlen (außer 0 und 1) hervor, also der Zahlen, die nur 1 und sich selbst als Teiler haben und größer als 1 sind. Sie sind „Bausteine“, aus denen sich (außer 0 und 1) alle übrigen natürlichen Zahlen durch Multiplikation „herstellen" lassen. Erst jetzt erfolgt die Namensgebung „Primzahl" und wird der (weniger bedeutungsvolle) Begriff „zusammengesetzte Zahl" eingeführt.

Festigen von „Primzahl". Noch vor dem Formulieren einer Definition wird der Begriff „Primzahl" durch schriftliche und mündliche Identifizierungs- und Realisierungsübungen gefestigt: Aufgaben 6a, 7a und c. Durch sie wird das selbständige Formulieren einer Definition in der 2. Stunde erleichtert.

Üben im Zerlegen in Primfaktoren Zur Sicherung des Ausgangsniveaus empfiehlt sich das Reaktivieren von „Potenz", „Basis" und „Exponent" (Zur Wiederholung; LB 6, Aufg. 8 bis 10).

Anliegen des Schwerpunktes ist das Festigen des Zerlegens als Verfahren; zugleich wird dabei die Rechensicherheit erhöht. Die Notwendigkeit eines weiteren Übens kann durch den Hinweis auf die Nützlichkeit der Primfaktorzerlegung beim späteren Ermitteln gemeinsamer Vielfacher und Teiler motiviert werden. Keine der beiden Vorgehensweisen im Beispiel A 7 sollte bevorzugt werden; jedem Schüler sollte der Weg freigestellt sein. Trotz des Reaktivierens der Potenzschreibweise sollte auf sie kein Nachdruck gelegt werden. Die Eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung kann hier bereits erwähnt werden. Für eine selbständige Schülerarbeit sind die Aufgaben 8a, b, c, zur zusätzlichen Differenzierung 8h, k und 10*, geeignet.

Zum weiteren Festigen stehen wahlweise die Aufgaben 9 und 11 zur Verfügung.

Einführen von „Definition" Am Ende der Lerneinheit wird der bereits bekannte Inhalt des Begriffs „Primzahl" in eine Definition gefaßt. Dieses Beispiel wird zum Einführen des Wortes „Definition" und zum Verdeutlichen des Charakters einer Definition genutzt. Es empfiehlt sich, dabei auch andere Definitionen einzubeziehen (Definition A 1, Definition für „$a < b$", LB 15). Auf theoretische Erörterungen sollte man weitestgehend verzichten. Dennoch muß deutlich werden: Definitionen sind zweckmäßige Verabredungen, Festlegungen, Namensgebungen. Sie sind von den (entweder wahren oder falschen) Aussagen zu unterscheiden.

Hinweis: Mittels einer Definition wird einem (meist unhandlichen) sprachlichen Ausdruck bzw. Term ein neugebildeter abkürzender oder besonders präziser sprachlicher Ausdruck bzw. Term zugeordnet. Definitionen sind damit ein wichtiges Mittel zur Vereinfachung von Sätzen. Welche Begriffe innerhalb einer mathematischen Theorie definiert werden (natürlich so, daß keine Mißverständnisse oder Widersprüche auftreten), ist eine reine Zweckmäßigkeitsfrage. Definitionen sind daher nicht beweisbar und insofern weder wahr noch falsch. Aussagen dagegen sind Formulierungen, die entweder wahr oder falsch sind. Der Nachweis der Wahrheit einer Aussage erfolgt durch Angabe einer Kette von Aussagen, die aus schon bekannten Sätzen und Definitionen durch logisches Schließen sukzessive abgeleitet wurden; das letzte Glied dieser Kette ist die zu beweisende Aussage. Zu den schon „bekannten Sätzen" gehören innerhalb der betreffenden Theorie auch die an die Spitze dieser Theorie gestellten Axiome, deren Wahrheit man auf Grund anschaulicher Vorstellungen und gesammelter Erfahrungen anerkennt. Trotz der relativen Willkür bei Definitionen muß man sich innerhalb einer Theorie für bestimmte Definitionen entscheiden und kann diese nicht im nachhinein ohne Auswirkung auf den gesamten Theorieaufbau abändern. Insofern wird man, wenn man sich für eine bestimmte Definition entschieden hat, diese als „richtig", als „gültig" (als „wahr") anerkennen. Dabei sollte man den Schülern andeuten, daß Definitionen einerseits weder wahr noch falsch sind, andererseits als „wahr" anzuerkennen sind, nachdem man sich auf eine bestimmte Definition festgelegt hat.

Anhand der Aufgabe 12a läßt sich zeigen, daß ein Begriff durch verschiedene Definitionen erfaßt werden kann. Als weiteres Beispiel eignet sich: „Eine natürliche Zahl heißt gerade, wenn sie durch 2 teilbar ist" oder „..., wenn ihre letzte Grundziffer 0, 2, 4, 6 oder 8 ist".

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 7b **2.** Aufg. 8d, e
3. Nenne Definitionen für **a)** „Primzahl", **b)** „gerade Zahl", **c)** „$a \mid b$", **d)** „$a < b$"!

Teilbarkeit von Summen und Differenzen (3 Std.)

LE 6 (LB 16 bis 19)

In dieser Lerneinheit werden „Satz" und „Beweis" eingeführt; es wird erstmalig ein Beweis nach dem Schema *Voraussetzung – Behauptung – Beweis* geführt. Um den Schülern die erste Beweisführung zu erleichtern, wird der Satz über die Teilbarkeit einer Summe zunächst nur für die Teilbarkeit durch 3 formuliert (LB 18) und bewiesen und erst danach auf die Teilbarkeit durch eine beliebige Zahl n verallgemeinert.

Ziele

Die Schüler
- können den Satz über die Teilbarkeit von Summen selbständig formulieren und haben seinen Beweis verstanden,
- wissen, daß aus der Nichtteilbarkeit genau eines Summanden die Nichtteilbarkeit der Summe folgt,
- kennen analoge Sätze über Differenzen,
- können jeden dieser Sätze auf einfache Beispiele anwenden,
- wissen, daß ein Satz eine wahre Aussage ist und eines Beweises bedarf.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeiten des Satzes „Wenn $3 \mid a$ und $3 \mid b$, so $3 \mid a + b$"
- Beweis des Satzes
- Festigen der Beweisdarstellung

2. Stunde
- Gewinnen des Satzes „Wenn $n \mid a$ und $n \mid b$, so $n \mid a + b$"
- Erarbeiten des Satzes „Wenn $n \mid a$ und $n \nmid b$, so $n \nmid a + b$"
- Vertiefen und Anwenden dieser Sätze

3. Stunde
- Erarbeiten der Sätze über die Teilbarkeit von Differenzen
- Festigen der Sätze

Methodische Hinweise

Erarbeiten des Satzes „Wenn $3 \mid a$ und $3 \mid b$, so $3 \mid a + b$" Zur Sicherung des Ausgangsniveaus sollte reaktiviert werden:

– das Distributivgesetz (Zur Wiederholung; LB 5, Aufg. 5g bis l),
– die Beweisnotwendigkeit von Aussagen (z. B. durch Überprüfen der Aussage „Die Vorgänger aller durch 6 teilbaren Zahlen sind Primzahlen").

Die Erkenntnisfindung kann durch Analogiebetrachtungen motiviert werden: Es wird reaktiviert, daß die Teilbarkeit einer größeren Zahl (z. B. 2436 durch 3) durch Zerlegen in geeignete Faktoren überprüft und durch den Satz über die Teilbarkeit eines Produkts begründet werden kann. Das führt auf die Frage, ob es einen entsprechenden Satz über die Teilbarkeit einer Summe (durch 3) gibt und ob demzufolge ein Zerlegen in geeignete Summanden sinnvoll, vielleicht sogar zweckmäßiger ist. Durch den Auftrag A 10 erkennen die Schüler, daß die Teilbarkeit eines einzigen Summanden für die der Summe nicht ausreicht, möglicherweise aber die Teilbarkeit beider Summanden. (Voreilige Analogieschlüsse unterstreichen die Notwendigkeit, jede neue Aussage auch zu beweisen.) Die Schüler formulieren die Vermutung möglichst vielfältig (sprachlich-logische Schulung!), z. B.:

Wenn zwei Zahlen ..., *so* ist ihre Summe ...
Wenn zwei Zahlen a und b ..., *so* ist ihre Summe $a + b$ ...
Wenn a und b ..., *so* ist $a + b$ ...

Abschließend wird die Zweckmäßigkeit von Wenn-so-Formulierungen und der Verwendung von Variablen hervorgehoben.

Beweis des Satzes Die Beweisfindung kann entsprechend dem Vorgehen im Lehrbuch im Unterrichtsgespräch erfolgen. Die Schüler sollten möglichst selbständig formulieren, was vorausgesetzt und was behauptet wird, und die inhaltliche Bedeutung des Vorausgesetzten und Behaupteten durch Besinnung auf die Definition A 1 überdenken. Dabei sollte mit Veranschaulichungen gearbeitet werden (LB-Bilder A 8 und 9). Es muß deutlich werden, daß a und x in „$a = 3 \cdot x$" als beliebige Zahlen anzusehen sind, auch wenn man in den Bildern spezielle Anzahlen erkennen kann. (Schüler, die hierbei Verständnisschwierigkeiten haben, können für einige spezielle Zahlen a und b die Zahlen x, y und $x + y = z$ ermitteln.) Dem Lehrer ist es freigestellt, die Variabilität anzudeuten (Bild 9).

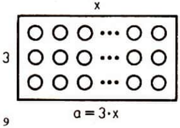


Bild 9

Wird mit der Manipermtafel gearbeitet, so kann die Summe $a + b$ durch „Zusammenschieben" zweier Applikationen (für a und b) veranschaulicht werden.

Die Schüler sollten erkennen, daß das Distributivgesetz eine „vereinfachte Schreibweise" gestattet. In der Schreibweise $3 \cdot (x + y)$ ist die Definition der Teilbarkeit durch 3 „wieder zu entdecken". Als Zielorientierung dient stets die Behauptung.

Bei der Beweisdarstellung sind die klare Gliederung in *Voraussetzung – Behauptung – Beweis* und das Aufschreiben in zwei Spalten (Beweisschritte – Begründungen) als „Modell" für die Form künftiger Beweisdarstellungen zu beachten (*Tafelbild* entsprechend Beispiel A 8). Dabei ist konsequent mit Variablen zu arbeiten; auf anschauliche Elemente ist nun zu verzichten.

Möglichkeiten zum **Festigen der Beweisdarstellung** sind z. B.:
– Die Schüler formulieren einen entsprechenden Satz für die Teilbarkeit durch 7 und beweisen ihn selbständig (Auftrag A 11a).
– Der Lehrer verändert das Tafelbild mit den geführten Beweisen in einen Lückentext (z. B. durch Löschen aller oder einzelner Begründungen, einzelner Zeilen o. ä.); die Schüler übernehmen das Tafelbild in ihr Heft und ergänzen die Lücken.

Für das **Gewinnen des Satzes „Wenn $n \mid a$ und $n \mid b$, so $n \mid a + b$"** sind z. B. folgende Varianten des Vorgehens möglich:

- Durch Beispiel A 8 und das Lösen des Auftrages A 11a erkennen die Schüler, daß in dieser Weise nicht nur für 3 und 7, sondern für jede Zahl gedacht werden kann. Damit kann der Satz als bewiesen angesehen werden.
- Nach Beispiel A 8 wird unmittelbar der Auftrag A 11b bearbeitet.
- Man verallgemeinert den Satz aus Beispiel A 8 zu Satz A 4, verzichtet hier auf den Beweis und beweist den Satz A 4 entsprechend Beispiel A 8 sofort für beliebiges n.

Der Satz wird durch schriftliches (z. T. auch mündl.) Lösen einiger Aufgaben (z. B. Aufg. 2a, b; 3a; 5) gefestigt.

Beim **Erarbeiten des Satzes „Wenn $n \mid a$ und $n \nmid b$, so $n \nmid a + b$“** kann an Satz A 4 und an Auftrag A 10b angeknüpft werden. Bisher wurde nur die letzte Zeile der Tabelle dieses Auftrags betrachtet. Deren erste Zeile dagegen legt die Vermutung von Satz A 5 nahe. Diese Überlegungen sollten durch Aufgabe 7* (wenigstens 7*c und d, für einige Schüler auch e und f) gefestigt werden. Auf einen Beweis von Satz A 5 ist zu verzichten.

Beim **Vertiefen und Anwenden dieser Sätze** sollte man sowohl das Begründen (Aufg. 2c, 3b) als auch das Verallgemeinern auf mehr als zwei Summanden (Aufg. 8a) berücksichtigen. Die Aufgaben können arbeitsteilig in selbständiger Schülertätigkeit gelöst werden. Je nach Klassensituation können sie auch durch das Stellen zusätzlicher Bedingungen abwechslungsreicher gestaltet werden (Aufg. 10a und 13).

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 1e; 2d; 5 **2.** Aufg. 3c, d **3.** Aufg. 6

Teilbarkeitsregeln (3 Std.)

LE 7 (LB 19 bis 22)

Auch wenn in dieser Lerneinheit gewisse Teilbarkeitsregeln in den Mittelpunkt gerückt werden, sollte deutlich werden, daß die Sätze über die Teilbarkeit von Produkt und Summe auch künftig wichtige Mittel für Teilbarkeitsuntersuchungen sind und daß die Regeln für 2, 4, 5 und 10 eine Rationalisierung der Anwendung dieser Sätze darstellen.

Ziele

Die Schüler
- kennen die Teilbarkeitsregeln für 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 und 10 und können sie anwenden,
- können die Teilbarkeitsregel für 4 begründen.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Wiederholen der Regeln für 2, 5, 10
- Erarbeiten der Regel für 4 (mit Begründung)

2. Stunde
- Festigen der Regel für 4
- Einführen der Regeln für 3 und 9

3. Stunde
- Einführen der Regel für 6
- Festigen der Regeln für 3, 6 und 9

Methodische Hinweise

Das **Wiederholen der Regeln für 2, 5, 10** läßt sich mit dem Suchen nach Vereinfachungen für das Feststellen der Teilbarkeit größerer Zahlen motivieren, zumal sich diese Regeln bereits als nützlich erwiesen haben. Das Wiederholen sollte sich nicht auf ein Abfragen der Regeln beschränken, sondern im Lösen von Aufgaben bestehen. Diesem Anliegen dienen die Aufgaben 1a, c und d, aber auch die Aufgaben 2 und 3*. Die Aufgaben 2 und 3* verlangen infolge ihres „Umkehrcharakters" gewisse produktive Tätigkeiten (Herstellen einer Zahl). Für eine differenzierte Unterrichtsgestaltung läßt sich die Aufgabenstellung noch erweitern (Gib *alle* vierstelligen Zahlen an, die ...!). Die Regeln werden dabei stets als Begründung abverlangt. Bei dieser Gelegenheit ist zu vereinbaren (im Interesse einer kürzeren Sprechweise), „Grundziffer" künftig durch „Ziffer" zu ersetzen.

Beim Formulieren der Regeln ist auch auf den jeweiligen „Nachsatz" *Alle anderen Zahlen sind nicht durch 2 (5, 10) teilbar* zu achten, da sonst nicht entschieden werden kann, ob eine Zahl nicht durch 2 (5, 10) teilbar ist.

Hinweis: Teilbarkeitsregeln sind logische Äquivalenzen und müßten mit „... genau dann, wenn ..." formuliert werden, was aber erst Lehrplanstoff der Klasse 8 ist.

Zur Vorbereitung auf das Gewinnen der Teilbarkeitsregel für die Zahl 4 empfiehlt es sich, eine Begründung für die Teilbarkeitsregel für die Zahl 5 mit Hilfe der Sätze A 4 und A 5 anzudeuten. Sie kann anhand eines Beispiels, an dem das Allgemeine sichtbar wird, erfolgen. Durch Beispiele wird deutlich gemacht, daß jede Zahl sich als Vielfaches von 10 oder als Summe, bei der ein Summand Vielfaches von 10 und der andere kleiner als 10 ist, schreiben läßt. Danach könnte das folgende *Tafelbild* entstehen:

7985	$= 7980 + 5$	(Zerlegen, 1. Summand Vielfaches von 10)
	$= 798 \cdot 10 + 5$	($5 \mid 10$, also $5 \mid 798 \cdot 10$)
	$5 \mid 798 \cdot 10, \quad 5 \mid 5$	(beide Summanden durch 5 teilbar)
also	$5 \mid 798 \cdot 10 + 5$	(Summe durch 5 teilbar)
also	$5 \mid 7985$	

(Das in Klammern Stehende wird nur mündlich ergänzt.)

Erarbeiten der Regel für 4 (mit Begründung) Zunächst müssen die Schüler an Beispielen erkennen, daß jede Zahl a sich als Vielfaches von 100 ($a = x \cdot 100$) oder als Summe eines solchen Vielfachen und einer der Zahlen $y = 1, 2, \ldots, 99$ schreiben läßt ($a = x \cdot 100 + y$). Danach wird Auftrag A 13 selbständig bearbeitet. Im Heft und an der Tafel sollte folgende Niederschrift entstehen:

$7324 = 7300 + 24$	(Zerlegen, 1. Summand Vielfaches von 100)
$\quad = 73 \cdot 100 + 24$	($4 \mid 100$, also $4 \mid 73 \cdot 100$)
$\quad 4 \mid 73 \cdot 100, \quad 4 \mid 24$	(beide Summanden durch 4 teilbar)
also $4 \mid 73 \cdot 100 + 24$	(Summe durch 4 teilbar)
also $4 \mid 7324$	

(Das in Klammern Stehende wird nur mündlich ergänzt.)

Die Schüler erkennen, daß die Teilbarkeit einer Zahl durch 4 von ihren letzten Ziffern abhängt. Anschließend wird die Regel für 4 formuliert. Zur Erstfestigung läßt man einige vier- oder fünfstellige Zahlen auf Teilbarkeit durch 4 überprüfen.

Zum **Festigen der Regel für 4** eignen sich die Aufgaben 6a und 7a. Letztere stellt gewisse Ansprüche an das Rechnenkönnen (Größenvorstellungen, Ordnung, dekadisches Positionssystem) und an das kombinatorische Denken. Solche Aufgaben tragen dazu bei, die Sicherheit im Umgang mit den Zahlen weiter zu erhöhen.

Ergänzend zur Regel für 4 wird man eine entsprechende Regel für 8 nur mitteilen. Da diese praktisch unbedeutsam ist, wird man darauf keinen Nachdruck legen. Wer dennoch auf eine Erarbeitung nicht verzichten möchte, kann dafür Aufgabe 8 (analog zu Auftrag A 13) nutzen.

Das **Einführen der Regeln für 3 und 9** läßt sich mit dem Streben nach Vollständigkeit motivieren. Es sollte bewußt werden, daß es für diese Zahlen keine „Endziffernregeln" geben kann, da keine Zehnerpotenz Vielfaches von 3 bzw. 9 ist. Vor dem Formulieren der Regeln ist durch Beispiele der Begriff „Quersumme" zu verdeutlichen. Anhand einiger vier- oder fünfstelliger Zahlen sollte eine Erstfestigung der Regeln erfolgen.

Zum **Einführen der Regel für 6** läßt sich Auftrag A 14 nutzen. Dazu ist zu reaktivieren:
- Jede durch 6 teilbare Zahl a läßt sich als $a = 6 \cdot n$ schreiben.
- Jeder Teiler eines Faktors in einem Produkt ist auch Teiler des Produkts.

Die Schüler sollten erkennen, daß diese Aussage noch keine Teilbarkeitsregel ist, da in ihr die Teilbarkeit durch 6 vorausgesetzt, nicht aber behauptet wird. Man hätte eine Regel, wenn auch das „Umgekehrte" gelten würde, d. h. Voraussetzung und Behauptung vertauscht wären. (Von „Umkehrung" wird man noch nicht sprechen, sondern sich mit einer umgangssprachlichen Formulierung begnügen.) Zur Erhärtung der Vermutung eignet sich Auftrag A 15. Im Interesse einer rationellen mündlichen Bearbeitung wird die auf Folie übertragene Tabelle im Gespräch ergänzt. Es muß deutlich werden, daß trotz des Ausfüllens der Tabelle ungewiß ist, ob die Vermutung wahr ist; sie bedarf daher eines Beweises. Auf den Beweis wird aber verzichtet.

Zum **Festigen der Regeln für 3, 6 und 9** sollten Teile der Aufgaben 9 und 10 und Aufg. 14a bis c bearbeitet werden. Zur Differenzierung dienen Aufgaben mit zusätzlichen Bedingungen (z. B. Aufg. 11, 13d und 15*). Man kann aber auch die Schüler überprüfen lassen, ob es eine zu 6 analoge Teilbarkeitsregel für 8 (Aufg. 16a) und für 12 (Aufg. 16b*) gibt.

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 12 **2.** Aufg. 14d

Stoffabschnitt 1.3.

Gemeinsame Vielfache; gemeinsame Teiler (6 Std.)

Gemeinsame Teiler (1 Std.)
LE 8 (LB 23 bis 24)

Ziele

Die Schüler
- kennen die Begriffe „gemeinsamer Teiler", „größter gemeinsamer Teiler" (g. g. T.) und „teilerfremd",
- können zu zwei höchstens zweistelligen Zahlen gemeinsame Teiler und in einfachen Fällen den g. g. T. ermitteln,
- wissen, daß jede natürliche Zahl eine eindeutige Primfaktorenzerlegung hat.

Schwerpunkte

- Erarbeiten der Begriffe „gemeinsamer Teiler", „größter gemeinsamer Teiler" und „teilerfremd"
- Übungen im Ermitteln gemeinsamer Teiler und des g. g. T. zweier Zahlen

Methodische Hinweise

Zum **Erarbeiten der Begriffe „gemeinsamer Teiler", „größter gemeinsamer Teiler" und „teilerfremd"** gibt es mehrere Möglichkeiten.

1. Die Schüler zerlegen zwei Zahlen (198, 385) in Primfaktoren. Bei der Auswertung wird deutlich gemacht:
   - Wie auch immer man an das Zerlegen einer Zahl in Primfaktoren herangeht, stets erhält man (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) die gleiche Zerlegung.
     $198 = 11 \cdot 18 = 11 \cdot 9 \cdot 2 = 11 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \qquad 385 = 11 \cdot 35 = 11 \cdot 5 \cdot 7$
     $198 = 2 \cdot 99 = 2 \cdot 9 \cdot 11 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 \qquad 385 = 5 \cdot 77 = 5 \cdot 7 \cdot 11$
   - Jeder Faktor der Zerlegung ist ein Teiler der Zahl.
   - Gibt es in den Primfaktorenzerlegungen zweier Zahlen einen gemeinsamen Faktor, so ist er gemeinsamer Teiler beider Zahlen. Sonst haben sie keinen gemeinsamen Teiler.

   Abschließend werden die obengenannten Begriffe entsprechend Beispiel A 13 (ohne Nutzung der Primfaktorenzerlegung) eingeführt:
   Die Schüler ermitteln die Teiler von 24, 18 und 25 (SSA) und kennzeichnen (unterschiedlich) die gemeinsamen Teiler von 24 und 18 sowie 25 und 18. Anschließend vergleichen die Schüler ihre Ergebnisse mit der übersichtlichen Darstellung der Teiler im Lehrbuch (Beispiel A 13) und lesen den nachfolgenden Lehrtext.
2. Nach kurzem Rückbesinnen auf Brüche lösen die Schüler Aufgabe 4 und erkennen:
   - Man benötigt zum Kürzen Zahlen, die Teiler von Zähler und Nenner, also deren gemeinsame Teiler sind.

– Man findet sie durch Probieren oder Zerlegen in Primfaktoren.
– Am zweckmäßigsten ist das Kürzen durch den größten gemeinsamen Teiler; danach haben Zähler und Nenner keinen gemeinsamen Teiler (außer 1); sie sind „teilerfremd".

Abschließend werden die obengenannten Begriffe anhand Beispiel A 13 gefestigt.

3. Man läßt Aufgabe 6 weitgehend selbständig lösen. Dies führt auf das Ermitteln gemeinsamer Teiler von 24 und 18 bzw. 25 und 18. In der Auswertung wird Beispiel A 13 herangezogen und dabei werden die Begriffe eingeführt. (Es kann kurz erörtert werden, warum „kleinster gemeinsamer Teiler" sinnlos ist.) Zum besseren Verständnis empfiehlt sich eine instruktive Veranschaulichung durch Mengendiagramme (Bilder 10 und 11)

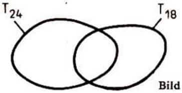


Bild 10

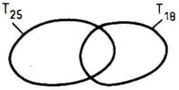


Bild 11

Die Schüler vervollständigen diese Diagramme durch Eintragen der Zahlen. (Sie erhalten durch dieses Beispiel eine Vorstellung von „Durchschnittsmenge", ohne daß dieser Begriff verwendet wird.) Abschließend wird herausgestellt, daß es zu zwei Zahlen (außer 0) stets genau einen g. g. T. gibt (uneingeschränkte, eindeutige Ausführbarkeit; analog zu den Rechenoperationen). Es wird erneut die unterschiedliche Bedeutung und Verwendung der Artikel („ein gemeinsamer Teiler", „der g. g. T.") hervorgehoben.

Übungen im Ermitteln gemeinsamer Teiler ... Ein Verfahren zur Ermittlung des g. g. T. wird nicht behandelt. Die Schüler stützen sich auf inhaltliche Überlegungen und auf ihr Können im Umgang mit Teilern und Vielfachen. Daher wurden für die Aufgaben nur „überschaubare" Zahlen ausgewählt. Zum Üben sind die Aufgaben 1a bis c, 3a bis d und 5 geeignet. Eventuell kann das Ermitteln des g. g. T. von drei Zahlen anhand eines Beispiels angedeutet werden:
Gesucht ist der g. g. T. von 12, 18 und 15.
Lösung: Der g. g. T. von 12 und 18 ist 6; der g. g. T. von 6 und 15 ist 3. *Also:* Der g. g. T. von 12, 18 und 15 ist 3.

Von leistungsstärkeren Schülern kann die Frage untersucht werden, ob die Ermittlung des g. g. T. (analog zu den Rechenoperationen) assoziativ ist.

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 1d **2.** Aufg. 3e

Gemeinsame Vielfache (2 Std.)

LE 9 (LB 24 bis 26)

Ziele

Die Schüler
– kennen den Begriff „gemeinsames Vielfaches" und können eine Definition

für den Begriff „kleinstes gemeinsames Vielfaches" (k. g. V.) angeben,
- wissen, daß das k. g. V. von a und b, falls $a < b$ ist, mindestens gleich b und höchstens gleich $a \cdot b$ ist,
- können an zwei und drei Zahlen gemeinsame Vielfache und das k. g. V. angeben, (sofern die Rechnungen Grundaufgaben der Multiplikation nicht wesentlich überschreiten).

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeiten von „gemeinsames Vielfaches" und einer Definition für „kleinstes gemeinsames Vielfaches" (k. g. V.)
- Festigen des k. g. V. (Üben, Vertiefen)

2. Stunde
- Erarbeiten eines Verfahrens zum Ermitteln des k. g. V.
- Festigen des Verfahrens

Methodische Hinweise

Erarbeiten von „gemeinsames Vielfaches" und einer Definition für „kleinstes gemeinsames Vielfaches" (k. g. V.) Zum Motivieren der Begriffe eignet sich Auftrag A 18. (Ist der Sachverhalt den Schülern zu ungewohnt, ist statt dessen Aufg. 9 geeignet.) In die Auswertung kann Auftrag A 19 einbezogen werden. Dabei verwendet der Lehrer „gemeinsames Vielfaches" und hebt hervor,
- daß 0 gemeinsames Vielfaches jedes Zahlenpaares ist und daher künftig ausgeschlossen wird,
- daß gemeinsame Vielfache bei Zahlenpaaren wie (0;6), (6;0), (0;0) ausgeschlossen werden, da diese nur 0 als gemeinsames Vielfaches haben.

Die besondere Bedeutung von 24 unter den gemeinsamen Vielfachen von 8 und 12 (Beispiel A 14, innermathematische Bedeutung: Alle gemeinsamen Vielfachen sind Vielfache von 24. Auftrag A 18, praktische Bedeutung: *erst*maliges Zusammentreffen der Straßenbahnen) rechtfertigt eine Namensgebung und die Wahl von 24 als k. g. V. von 8 und 12. Zusammenfassend ergibt sich Definition A 10. Abschließend wird auf die Analogie zu den Rechenoperationen hingewiesen: Zu je zwei natürlichen Zahlen gibt es stets genau ein k. g. V. (uneingeschränkte, eindeutige Ausführbarkeit). Auf die richtige Verwendung der Artikel „das" und „ein" sollte geachtet werden.

Wie beim g. g. T. ist es auch hier günstig, Mengendiagramme zum Veranschaulichen der Beziehungen zwischen den Vielfachenmengen aus Beispiel A 14 anzufertigen. Das Eintragen der Zahlen erfolgt durch die Schüler selbständig. Den Schülern sollte die Bedeutung von „..." (analog Bild A 12, LB 26) bewußt gemacht werden. Dabei kann (in Analogie zum g. g. T.) kurz erörtert werden, daß es ein größtes gemeinsames Vielfaches nicht gibt.

Hinweis: Wie beim g. g. T. ist auch beim k. g. V. eine Motivierung durch Orientieren auf (das Vergleichen ungleichnamiger) Brüche möglich; allerdings besteht hier die Gefahr, daß einige Schüler überfordert werden.

Zum **Festigen des k. g. V.** kann man die Aufgaben 3 und 9 nutzen. Im Mittelpunkt sollte aber die Vorbereitung auf ein systematisches, auf inhaltlichen Überlegungen beruhendes Ermitteln des k. g. V. stehen, bei dem sich die Schüler auf Definition A 10 und ihr Können im Umgang mit Teilern und Vielfachen stützen. Durch Auftrag A 20 (SSA) gelangen sie zu wichtigen Eigenschaften des k. g. V.:

Sind a und b natürliche Zahlen und ist $a < b$, so ist ihr k. g. V.

- die größere Zahl b, wenn a ein Teiler von b ist;
- das Produkt $a \cdot b$, wenn a und b teilerfremd sind;
- eine Zahl zwischen b und $a \cdot b$ (in allen übrigen Fällen).

In Aufgabe 6 lassen sich diese Einsichten anwenden (mdl.).

Erarbeiten eines Verfahrens zum Ermitteln des k. g. V. Das Ermitteln des k. g. V. zweier Zahlen durch Aufschreiben *aller* Vielfachen der Zahlen bis zum k. g. V. wird nun durch ein rationelleres Verfahren ersetzt. Die Erarbeitung knüpft an die behandelten Eigenschaften an. Der Lehrer entnimmt die Aufgaben aus der Tabelle nach Auftrag A 20 und läßt die Schüler das Verfahren weitestgehend selbständig finden. Anschließend vergleichen sie ihr Vorgehen mit dem des Lehrbuchs (LB 25). Das weitere Ermitteln des k. g. V. sollte möglichst mündlich und nur bei größeren Zahlen mit halbschriftlicher Nebenrechnung erfolgen. Bei letzterem kann die folgende schriftliche Fixierung angestrebt werden:

Das k. g. V. von 15 und 20 ist *60* ($15 \nmid 20$, $15 \nmid 40$, $15 \mid 60$)
(Die *60* wird erst am Schluß ergänzt.)

Dieses Vorgehen wird auf das k. g. V. dreier Zahlen entsprechend Beispiel A 15 verallgemeinert. Eventuell läßt man von einigen Schülern die Assoziativität bei der k. g. V.-Ermittlung untersuchen.

Festigen des Verfahrens Im Mittelpunkt sollte das Ermitteln des k. g. V. zweier Zahlen (mit fast durchweg höchstens zweistelligem k. g. V.) stehen. Es sind Fertigkeiten auszubilden, damit die Schüler im Stoffgebiet 2 schnell und zuverlässig gemeinsame Nenner bzw. Hauptnenner gegebener Brüche angeben können. Dafür kann Aufgabe 1 genutzt werden (bis h mdl., ab i halbschriftl.). In zwei Fällen sollte auch das k. g. V. dreier Zahlen ermittelt werden; empfohlen werden die Aufgaben 1q und s.

Im Interesse der Könnensentwicklung im Rechnen und bei der k. g. V.-Ermittlung sollte man umgekehrt auch Zahlen ermitteln lassen, von denen das k. g. V. gegeben ist (einige Teile der Aufg. 2, 4 und 5).

Hinweis: Darüber hinaus kann man vor allem Schüler mit geringerem Übungsbedarf zu der Erkenntnis führen (vgl. [6]), daß man das Probieren abkürzen kann, indem man z. B. bei 15 und 21 überlegt: Das k. g. V. muß Vielfaches von 15 sein; 15 ist Vielfaches von 5, denn $15 = 5 \cdot 3$; da 21 kein Vielfaches von 5 ist, kommt von den Vielfachen von 21 frühestens $5 \cdot 21$ in Frage; wegen $5 \cdot 21 = 5 \cdot 3 \cdot 7$ ist dieses Produkt Vielfaches von 15; also ist $5 \cdot 21 = 105$ das k. g. V. Möglicherweise gibt es Schüler, die den Gedanken fortsetzen: Da 3 der g. g. T. von 15 und 21 ist, steckt 3 als Faktor in 15 *und* 21, braucht also beim k. g. V. nur einmal genommen zu werden; man rechnet also: $15 : 3 = 5$; $5 \cdot 21 = 105$. Diese Einsichten können durch Aufgabe 8* vertieft werden. Sie kann parallel zu den Aufgaben 2, 4 und 5 bearbeitet werden.

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 1m, n und r **2.** Aufg. 4a

Zusammenfassung zur Teilbarkeit natürlicher Zahlen

(LB 27)

Diese Lerneinheit dient dem zusammenfassenden Wiederholen des Stoffgebiets und dem Vorbereiten einer Klassenarbeit. Durch Systematisierung des Wissens sollen seine Dauerhaftigkeit und Anwendungsbereitschaft erhöht werden. Dies läßt sich erreichen, wenn die zu systematisierenden Begriffe und Definitionen sowie Sätze und Verfahren nicht abgefragt werden, sondern die Schüler diese beim selbständigen Lösen von Aufgaben und Begründen der Lösungen anwenden. Dabei dürfen diese Fakten nicht isoliert voneinander auftreten, vielmehr muß die Möglichkeit zum Vergleichen und Feststellen von Zusammenhängen bestehen.

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß zum Feststellen der Teilbarkeit von Zahlen die Definition für $a \mid b$, Teilbarkeitssätze und für spezielle Zahlen Teilbarkeitsregeln genutzt werden können,
- können in Abhängigkeit von den Zahlen das rationellste Verfahren zum Feststellen der Teilbarkeit auswählen,
- können Teiler und Vielfache einer Zahl und das k. g. V. von zwei oder drei Zahlen (im Rahmen der Grundaufgaben der Multiplikation) ermitteln,
- können zweistellige Zahlen in Primfaktoren zerlegen.

Schwerpunkte

- Anwenden von Teilbarkeitssätzen und -regeln
- Übung im Ermitteln von k. g. V. und Primfaktorzerlegungen

Methodische Hinweise

Anwenden von Teilbarkeitssätzen und -regeln Die Schüler suchen aus den folgenden, auf Folie gegebenen Ausdrücken alle Aussagen heraus und begründen ihre Entscheidung:

a) $7 \mid 56$	**b)** $a \mid 42$	**c)** $8 \mid 50$	**d)** $6 \mid b$
e) $4 \mid 628$	**f)** $3 \mid x \cdot 10$	**g)** $8 \mid 4800$	**h)** $11 \mid 253$
i) $7 \mid 639$	**j)** $a \mid 20$ und $a \mid 30$	**k)** $d \mid e$	**l)** $9 \mid 3762$

Anschließend wird überprüft, welche Aussagen wahr, welche falsch sind. Für die Aussagen c), e), h) erfolgt dies im Unterrichtsgespräch. Dabei sollte das folgende *Tafelbild* entstehen:

$8 \mid 50$ *falsch*;	$4 \mid 628$ *wahr*;	$11 \mid 253$ *wahr*;
denn $6 \cdot 8 = 48$	denn $4 \mid 28$	denn $11 \mid 220$
und $7 \cdot 8 = 56$		und $11 \mid 33$

Das Nebeneinanderstellen soll deutlich machen, daß man sich auf die Teilbarkeitsdefinition, spezielle Teilbarkeitsregeln oder allgemeine Teilbarkeitssätze stützen kann. Die Begründung im Tafelbild ist als Minimalforderung zu sehen, um den Schreibaufwand beim anschließenden schriftlichen Üben gering zu halten. Die mündliche Begründung sollte ausführlicher sein. Dabei sollten auch die Definition A 1, die Teilbarkeitsregel für 4 und die Sätze A 2, A 4 und A 5 genannt werden. Die übrigen Aussagen a), g), i), l) werden in gleicher Weise von den Schülern selbständig untersucht.

Es sollte deutlich werden, daß aus den „Nicht-Aussagen" b), d), f), j), k) durch Einsetzen von Zahlen für die Variable(n) Aussagen entstehen. Die Schüler nennen jeweils eine Zahl (bei k ein Zahlenpaar), so daß eine wahre Aussage entsteht. Zum weiteren Festigen kann Aufgabe 2 (LB 27) genutzt werden.

Schülern, die schon anspruchsvollere Aufgaben lösen können, kann statt dessen (über Folie) die folgende Aufgabe gestellt werden:

Gib alle Ziffern an, die man für x einsetzen kann, damit

a) 145*0 eine durch 4 (5, 6) teilbare Zahl wird,

b) 73*21 eine durch 2 (7, 9) teilbare Zahl wird!

(*Lösung:* **a)** 0, 2, 4, 6, 8; 0, 1, ..., 9; 2, 5, 7;
b) n. l.; 5; 5)

Übung im Ermitteln von k. g. V. und Primfaktorzerlegungen Die Schüler ermitteln (SSA) das k. g. V. von 30 und 21 und danach die Primfaktorzerlegungen von 30, 21 und vom k. g. V. dieser Zahlen. In der Auswertung (spätestens) sollte jeder Schüler die folgenden Überlegungen zum Vereinfachen des Probierens beim Ermitteln des k. g. V. verstehen:

- 30 ist Vielfaches von 10,
- also muß auch das k. g. V. von 30 und 21 Vielfaches von 10 sein;
- das kleinste Vielfache von 10, das auch Vielfaches von 21 ist, ist 210.
- Überprüfen zeigt: $210 = 21 \cdot 10 = 30 \cdot 7$.

Anhand der Primfaktorzerlegungen sollte der Zusammenhang deutlich werden:

k. g. V. von 30 und 21: $30 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{5}$; $21 = 3 \cdot \mathbf{7}$

$210 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{5} \cdot \mathbf{7}$

(„Jedes Vielfache von 30 ist Vielfaches von 3. Ein Vielfaches von 30 ist auch Vielfaches von 21, wenn es Vielfaches von 7 ist.") Die Schüler erkennen an diesem Beispiel, daß die Kenntnis der Primfaktorzerlegung zweier Zahlen die Ermittlung des k. g. V. dieser Zahlen erleichtert.

Zur weiteren Festigung wird Aufgabe 1 (LB 27) empfohlen.

Stoffgebiet 2

Gebrochene Zahlen (60 Std.)

Vorbemerkungen

Das Stoffgebiet 2 ist vor allem der Leitlinie *Zahlenbereiche* zuzuordnen. Mit ihm wird die in Klasse 5 begonnene Behandlung der gebrochenen Zahlen fortgesetzt, das dort erworbene Wissen und Können der Schüler wird nun in Klasse 6 vertieft und erweitert. Als die wichtigsten Ergebnisse von Klasse 6 sind anzusehen:

- Die Schüler haben ihr Wissen über den Begriff „gebrochene Zahl" vertieft und ihre Kenntnisse vom Zahlenstrahl erweitert. Sie wissen, daß jede gebrochene Zahl durch viele gemeine Brüche, aber auch durch endliche Dezimalbrüche bzw. einen periodischen Dezimalbruch angegeben werden kann. Sie können bei einfachem Zahlenmaterial alle Umwandlungen vornehmen mit Ausnahme der von den periodischen Dezimalbrüchen zu gemeinen Brüchen.
- Die Schüler können beliebige gebrochene Zahlen ordnen. Sie haben die Dichtheit der gebrochenen Zahlen als eine wichtige, diesen Bereich von den natürlichen Zahlen unterscheidende Eigenschaft erfaßt und können zu beliebigen a, b ($a < b$) ein x mit $a < x < b$ angeben.
- Die Schüler können Grundrechenoperationen mit gebrochenen Zahlen sowohl als gemeine als auch als endliche Dezimalbrüche sicher ausführen und gegebenenfalls entscheiden, welche Umwandlung zweckmäßig ist. Sie können die entsprechenden Regeln beim Beschreiben und Begründen benutzen.
- Die Schüler kennen die Gesetzmäßigkeiten für das Rechnen mit gebrochenen Zahlen und können diese bei Begründungen und Kontrollen anwenden.
- Die Schüler haben N als Teilbereich von Q_+ erfaßt und können folglich a und $\frac{a}{1}$ zweckgemäß durcheinander ersetzen. Sie wissen, daß $a : b = \frac{a}{b}$ für beliebige a und b ($b \neq 0$) gilt und daß von den Grundrechenoperationen nur die Subtraktion nicht uneingeschränkt ausführbar ist.

Die hier gewählte systematische Anordnung der Ziele darf nicht darüber hinwegtäuschen, daß das Hauptziel in der Entwicklung von Können im Umgang mit den gebrochenen Zahlen besteht. Sichere Rechenfertigkeiten sind eine unverzichtbare Komponente dieses Könnens, erschöpfen es aber nicht.

Andere Lehrplanleitlinien treten im Stoffgebiet 2 in folgender Weise in Erscheinung:

Das *Arbeiten mit Mengen* äußert sich vor allem im *mengentheoretisch-genetischen* Aufbau der Zahlenbereiche. Bei der Erweiterung von N zu Q_+ kommt er darin zum Ausdruck, daß

- die gebrochenen Zahlen Mengen sind und beim Arbeiten mit ihnen auf sie eindeutig repräsentierende Elemente zurückgegangen wird,
- sich N als Teilmenge bzw. als Teilbereich von Q_+ erweist.

Dieses Grundkonzept wird nicht verletzt, wenn im Unterricht zur sprachlichen Vereinfachung nach Klärung des betreffenden Sachverhalts

- z. B. „Man multipliziert Dezimalbrüche, indem ...“ statt „Man multipliziert gebrochene Zahlen in Dezimalbruchdarstellung, indem ...“ gesprochen wird,
- die gebrochenen Zahlen $\frac{a}{1}$ frühzeitig durch die entsprechenden natürlichen Zahlen a ersetzt werden.

Das inhaltliche Lösen von *Gleichungen und Ungleichungen* der Typen $x \circ a = b$; $x \circ a < b$ und $a \circ x = b$; $a \circ x < b$ („o“ steht für „+“, „−“, „·“ oder „:“) begleitet das gesamte Arbeiten mit gebrochenen Zahlen, auch wenn dabei im Interesse der Ausbildung sicherer Rechenfertigkeiten Aufgaben des Typs $a \circ b = x$ im Vordergrund stehen.

Die Leitlinie *Abbildungen und Funktionen* kommt vor allem durch funktionale Betrachtungen zum Ausdruck:

- Beim Arbeiten mit dem Zahlenstrahl werden Zuordnungen von Brüchen und Zahlen einerseits und Punkten andererseits getroffen. Überlegungen zur Eindeutigkeit und Existenz bei solchen Zuordnungen bereiten den Funktionsbegriff vor.
- Die dynamische Seite des Funktionsbegriffs steht im Vordergrund, wenn insbesondere bei Multiplikation und Division untersucht und erkannt wird, wie sich das Ergebnis in Abhängigkeit von den Ausgangszahlen verändert.

Explizite Erörterungen zum *Definieren und Beweisen* kommen vor allem im Stoffgebiet „4. Planimetrie“ zum Tragen, das parallel zum Stoffgebiet 2 behandelt wird. Um beim Schüler nicht den Eindruck zu erwecken, es gäbe in diesem Stoffgebiet nichts zu definieren und zu beweisen, sind Definitionen z. B. für „Hauptnenner“ und „Reziprokes“ als solche hervorzuheben. Auch die Rechenregeln sind im mathematischen Sinne Definitionen, doch sollte man bei ihnen auf ein solches Hervorheben verzichten. Die Schüler können nur schwer verstehen, was die als Abfolge von Handlungsschritten formulierten Rechenregeln mit den anderen Definitionen gemeinsam haben. Man könnte eventuell darauf hinweisen, daß es auch bei den Rechenregeln um Verabredungen (also nicht um zu beweisende Aussagen) geht; mit ihnen wird jedoch nicht die Benutzung eines neuen (Fremd-) Wortes festgelegt, sondern das Ausführen einer Handlung, die sich auf bereits bekannte Handlungen stützt. Der Lehrplan fordert für das gesamte Stoffgebiet keinen Beweis. Daher muß man die Beweisbedürftigkeit der behandelten Gesetze trotz Bestätigung durch Beispiele hervorheben und sollte für eines dieser Gesetze, z. B. für das Kommutativgesetz der Addition, den Beweis zumindest andeuten. Ebenso gehört zur Leitlinie *Beweisen*, wenn immer wieder Begründungen sowohl für Einzelfälle (z. B. Aufg. 10, LE 1) als auch für allgemeine Aussagen gefordert werden, z. B.

- Begründe, warum von zwei zueinander reziproken Zahlen nur eine kleiner als 1 sein kann.

Bei den *Verfahren und Mitteln geistiger Arbeit* ist zunächst und vor allem an die vielen Rechenregeln zu denken. Sie haben als algorithmische Vorschriften die Aufgabe, die Ausbildung von Rechenfertigkeiten zu unterstützen. Ihre Formulierung sollte daher kurz und übersichtlich sein, auf das Wesentliche orientieren, gegebenenfalls unter Verzicht auf Vollständigkeit.

Von den heuristischen Verfahren steht das Zurückführen des Neuen auf Bekanntes im Vordergrund. Dieses Prinzip kommt überall dort zur Geltung, wo das Arbeiten mit gebrochenen Zahlen zurückgeführt wird auf das Arbeiten mit gleichnamigen Brüchen (vgl. z. B. LE 2). Es äußert sich auch im sog. Isomorphieprinzip: Wenn die natürlichen Zahlen sich als Teilbereich der gebrochenen Zahlen erweisen sollen, muß sich das Operieren in N als Spezialfall des Operierens in Q_+ ergeben; letzteres kann also durch Verallgemeinerung gewonnen werden. Ein Verallgemeinern liegt auch vor, wenn von dem (bekannten) Multiplizieren von Dezimalbrüchen zu dem gebrochener Zahlen übergegangen wird.

Die *Potenzen politisch-ideologischer Erziehung* sind im Stoffgebiet 2 vor allem in folgendem zu sehen:

- Die Schüler erleben, daß reale Sachverhalte ihrer Umwelt, also gesellschaftliche Erfordernisse, das Bilden neuer Zahlen veranlassen. Da dies bei nachfolgenden Zahlenbereichserweiterungen weit weniger gut möglich ist, sollten bei den gebrochenen Zahlen alle Möglichkeiten praktischer Motivierung genutzt werden.
- Beim Erarbeiten der Operationen erkennen die Schüler, daß praktische Sachverhalte sowohl das Einführen überhaupt als auch die Art der Ausführung festlegen.
- Wie bei kaum einem anderen Stoffgebiet erkennen die Schüler Zusammenhang und Verflochtenheit der einzelnen Bereiche, Begriffe und Operationen und erleben, welche Auswirkung gut bzw. schwach ausgebildetes Können in dem einen oder anderen Teilgebiet hat.
- Es kann schon der ästhetischen Erziehung zugerechnet werden, wenn beim Arbeiten mit gemeinen Brüchen mit Nachdruck auf das Zeichnen der Bruchstriche (auch kürzerer) mit Lineal, auf das Setzen von Relations-, Operationszeichen und Bruchstrich in gleicher Höhe geachtet wird. Die Schüler sollten auch einsehen, daß dies nicht nur wegen des schöneren Aussehens, sondern wegen größerer Rechensicherheit erfolgt.

Kontrollaufgaben zum Stoffgebiet „2. Gebrochene Zahlen“

1. Markiere die folgenden Zahlen auf einem Zahlenstrahl!
Wieviel verschiedene Punkte ergeben sich?

$\frac{1}{3}$; 0,25; 2,2; 0,3; $2\frac{1}{5}$; 7; 1,25; $\frac{1}{4}$; $\frac{21}{3}$; $\frac{5}{4}$

2. Setze zwischen den beiden Zahlen jeweils das richtige Zeichen (<, >, =)!

a) $\frac{3}{4}\quad\frac{5}{6}$ **b)** $\frac{21}{5}\quad 4{,}2$ **c)** $3\frac{1}{3}\quad 3{,}3$ **d)** $2{,}3\quad\frac{2}{3}$

3. Ordne! Beginne mit der kleinsten Zahl!

a) 0,5; 0,188; 1,88; 0,499; 0,05; **b)** $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{5}{3}$; 3; $\frac{5}{6}$

4. Gib jeweils fünf gebrochene Zahlen x an, für die gilt:

a) $\frac{1}{2} < x < 1$ **b)** $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{3}$ **c)** $0 < x < 0{,}1$

d) $2{,}2 < x < 2{,}3$ **e)** $3{,}95 < x < 4$ **f)** $2\frac{1}{2} < x < 2\frac{2}{3}$

5. a) $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$ **b)** $\frac{11}{12}-\frac{3}{4}$ **c)** $\frac{6}{9}+\frac{8}{24}$ **d)** $\frac{7}{8}-\frac{5}{12}$ **e)** $\frac{6}{7}-\frac{7}{6}$

f) $2\frac{1}{4}+1\frac{4}{5}$ **g)** $3\frac{1}{2}-2\frac{3}{5}$ **h)** $\frac{3}{4}+0{,}8$ **i)** $2{,}3-\frac{2}{3}$ **j)** $0{,}37+\frac{1}{2}$

6. a) $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}+\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{3}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{3}{4}-\frac{2}{5}-\frac{1}{2}$

e) $5{,}5 + 0{,}73 + 6{,}89$ f) $5{,}5 - 0{,}73 + 6{,}89$ g) $5{,}5 - 0{,}73 - 6{,}89$

7. Setze zwischen den Summen oder Differenzen jeweils das richtige Zeichen ($<$, $>$, $=$)!
a) $5{,}7 + 6{,}86 \quad 4{,}8 + 5{,}59$ **b)** $18{,}3 - 0{,}85 \quad 12{,}7 - 0{,}85$
c) $12{,}4 - 0{,}876 \quad 12{,}4 - 1{,}234$ **d)** $6{,}9 - 3{,}57 \quad 7{,}9 - 4{,}57$

8. Löse die Gleichungen!
a) $2{,}3 + x = 5{,}8$ **b)** $x + 5{,}8 = 2{,}3$ **c)** $5{,}8 - x = 2{,}3$
d) $x - 2{,}3 = 5{,}8$ **e)** $2{,}3 - x = 5{,}8$ **f)** $x - 5{,}8 = 2{,}3$

9. Gib alle natürlichen Zahlen x an, für die gilt:
a) $3{,}3 + x < 6{,}2$ **b)** $x - 5{,}5 < 3{,}6$ **c)** $4{,}6 - x < 1{,}1$!

10. **a)** $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$ **b)** $\frac{3}{5} \cdot \frac{35}{12}$ **c)** $2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{2}{5}$ **d)** $\frac{4}{3} \cdot 2{,}5$;
e) $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$ **f)** $\frac{24}{28} : \frac{36}{21}$ **g)** $3\frac{1}{2} : 2\frac{2}{3}$

11. Berechne bis auf drei Stellen nach dem Komma!
a) $3{,}25 \cdot 0{,}73$ **b)** $32{,}5 \cdot 0{,}703$ **c)** $253{,}7 : 3$
d) $62{,}5 : 3{,}5$ **e)** $0{,}4961 : 4{,}1$ **f)** $20{,}5 : 0{,}55$

12. Die Zahlen $u = 0{,}734$; $v = 4{,}3$; $x = 7{,}06$ und $y = 9$ sollen Näherungswerte sein. Ermittle die Zahlen a bis g mit sinnvoller Genauigkeit!
$a = u + v + x + y,\quad b = y - x + v - u,\quad c = u \cdot y,$
$d = v \cdot x,\quad e = u \cdot x,\quad f = u : y,\quad g = x : v$

13. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründe!
a) $\frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} < 1$ **b)** $1{,}01 \cdot 2{,}35 > 2{,}35$ **c)** $\frac{7}{9} \cdot \frac{6}{5} < 1$
d) $3{,}5 \cdot 7{,}2 < 4{,}3 \cdot 7{,}5$ **e)** $3{,}5 : 7{,}2 < 3{,}5 : 7{,}5$
f) $\frac{2}{3} : \frac{5}{2} < 1$ **g)** $0{,}35 : 0{,}65 < 0{,}35$ **h)** $3{,}5 : 1{,}01 > 3{,}05$

14. **a)** $3{,}7 + 2{,}2 \cdot 5$ **b)** $(3{,}7 + 2{,}2) \cdot 5$ **c)** $3{,}2 - 2{,}5 : 0{,}5$
d) $(3{,}2 - 2{,}5) : 0{,}5$

15. Vervollständige die Tabelle!

a	b	c	$a + b - c$	$a + b \cdot c$	$a - b : c$	$a : b - c$
12,6	6,3	0,7				

16. Gib gebrochene Zahlen a, b, c an, für die gilt:
a) $a + b < b + a$ **b)** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
c) $a - b - c = a + b + c$ **d)** $a - b - c > a + b + c$

17. Ein quaderförmiges Zimmer hat die Abmessungen 8,4 m; 5,2 m; 3,6 m. Ermittle den Rauminhalt des Zimmers!

18. Ein Band fördert aus einer Baugrube in 4,5 Stunden 112 m^3 Erde. Wieviel Erde fördert es durchschnittlich in einer Stunde?

Stoffverteilung

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Stoffabschnitt 2.1.		Ordnung gebrochener Zahlen	8 Std.
Brüche und gebrochene Zahlen (LE 1)	3	– Bruch und gebrochene Zahl – Dezimalbruch – Gleich- und ungleichnamige Brüche – Erweitern und Kürzen	– Gleichnamigmachen von Brüchen – Q_+ als Symbol für die Menge der gebrochenen Zahlen – $N \subset Q_+$
Vergleichen und Ordnen gebrochener Zahlen (LE 2)	2	– Vergleichen gleichnamiger Brüche – Gleichnamigmachen von Brüchen	– Vergleichen mittels Zahlenstrahl – Vergleichen mittels Gleichnamigmachen von Brüchen – Hauptnenner
Wieviel Zahlen liegen zwischen 19 und 20? (LE 3)	2	– Erweitern von Brüchen – Nachfolgerrelation in N – Sprechweise „liegt zwischen"	– Zu beliebigen a und b ($a < b$; $a, b \in Q_+$) gibt es unendlich viele x ($x \in Q_+$) mit $a < x < b$ – Ermitteln solcher Zahlen
Kleiner, gleich oder größer (LE 4)	1	– Vergleichen gebrochener Zahlen – Ungleichungen der Form $x < a$, $a < x$ und $a < x < b$	– Zeichen und Sprechweise „$\leqq$" – Ungleichungen der Form $x \leqq a$ und $a \leqq x \leqq b$
Stoffabschnitt 2.2.		Addition und Subtraktion gebrochener Zahlen	14 Std.
Addition gebrochener Zahlen (LE 5)	3	– Addieren natürlicher Zahlen, gleichnamiger Brüche und von Dezimalbrüchen – Ausführbarkeit der Addition in N – Gleichnamigmachen von Brüchen – Ermitteln des k. g. V. natürlicher Zahlen – Umwandeln gemeiner Brüche in Dezimalbrüche und umgekehrt – Inhaltliches Lösen von $a + x = b$ $(a, b \in N)$	– Definition der Addition gebrochener Zahlen – Ausführbarkeit der Addition in Q_+ – Addieren gebrochener Zahlen als gemeine Brüche oder Dezimalbrüche – Inhaltliches Lösen von $a + x = b$, $a + x < b$ $(a, b \in Q_+)$
Subtraktion gebrochener Zahlen (LE 6)	2	– Subtrahieren natürlicher Zahlen, gleichnamiger Brüche und von Dezimalbrüchen – Ausführbarkeit der Subtraktion in N – Subtraktion als Umkehrung zur Addition in N	– Definition der Subtraktion gebrochener Zahlen – Ausführbarkeit in Q_+ – Subtrahieren gebrochener Zahlen als gemeine Brüche oder Dezimalbrüche – Subtraktion als Umkehrung zur Addition in Q_+

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
		– Vergleichen gebrochener Zahlen – Inhaltliches Lösen von $x - a = b$, $a - x = b\ (a, b \in N)$	– Inhaltliches Lösen von $x - a = b$, $a - x = b\ (a, b \in Q_+)$
Kommutativ- und Assoziativgesetz der Addition (LE 7)	2	– Kommutativ- und Assoziativgesetz der Addition in N – Addieren und Subtrahieren natürlicher Zahlen mit mehreren Operanden – Umwandeln gemischter Zahlen in gemeine Brüche und umgekehrt	– Kommutativ- und Assoziativgesetz der Addition in Q_+ – Addieren und Subtrahieren gebrochener Zahlen mit mehreren Operanden – Addieren und Subtrahieren „gemischter Zahlen“
Addition und Subtraktion gebrochener Zahlen in verschiedenen Darstellungen (LE 8)	4	– Umwandeln gemeiner Brüche, gemischter Zahlen und (endlicher) Dezimalbrüche ineinander – Ordnen gebrochener Zahlen – Inhaltliches Lösen von $x + a < b$, $x - a < b$, $a - x < b\ (a, b \in N)$	– Addieren und Subtrahieren gebrochener Zahlen in verschiedenen Darstellungen – Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben – Ermitteln von Lösungen zu $a + x = b$, $x - a = b$, $a - x = b$, $a + x < b$, $x - a < b$, $a - x < b$ $(a, b \in Q_+)$
Zusammenfassung	1	– Üben, Vertiefen, Systematisieren und Wiederholen des Wissens und Könnens zum Ordnen, Addieren und Subtrahieren gebrochener Zahlen	
Leistungskontrolle und Auswertung	2		
Stoffabschnitt 2.3.		Multiplikation und Division gebrochener Zahlen	20 Std.
Multiplikation gebrochener Zahlen (LE 9)	3	– Multiplikation natürlicher Zahlen und deren Ausführbarkeit – Vergleich des Produkts natürlicher Zahlen mit seinen Faktoren – Multiplizieren von Dezimalbrüchen – Flächeninhalt von Rechtecken – Inhaltliches Lösen von $a \cdot x = b \quad (a, b \in N)$	– Definition der Multiplikation gebrochener Zahlen – Ausführbarkeit der Multiplikation in Q_+ – Multiplizieren gebrochener Zahlen – Bedeutung von „$\frac{a}{b}$ von c“ – Vergleich des Produkts gebrochener Zahlen mit seinen Faktoren – Inhaltliches Lösen von $a \cdot x = b \quad (a, b \in Q_+)$
Multiplikation gebrochener Zahlen in Dezimalbruchdarstellung	3	– Multiplikation von Dezimalbrüchen – Umwandeln von Dezimalbrüchen in gemeine Brüche und umgekehrt – Vervielfachen von Dezi-	– Zusammenhang zwischen Multiplikation von Dezimalbrüchen und der gemeiner Brüche – Überschlagen der Produkte von Dezimalbrüchen

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
(LE 10)		malbrüchen mit Zehnerpotenzen – Runden von Dezimalbrüchen	– Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben
Eigenschaften der Multiplikation gebrochener Zahlen (LE 11)	4	– Kommutativ- und Assoziativgesetz der Multiplikation sowie Distributivgesetz für natürliche Zahlen – Rechenvorteile beim Rechnen mit natürlichen Zahlen – Vorrangregeln für das Rechnen in N	– Kommutativgesetz und Assoziativgesetz der Multiplikation sowie Distributivgesetz in Q_+ – Multiplizieren dreier gebrochener Zahlen – Vermischtes Rechnen mit gebrochenen Zahlen
Division gebrochener Zahlen (LE 12)	3	– Multiplikation gebrochener Zahlen – Division in N als Umkehrung zur Multiplikation – Inhaltliches Lösen von $x : a = b \quad (a, b \in N)$	– Reziprokes einer gebrochenen Zahl – Definition der Division gebrochener Zahlen – Dividieren gebrochener Zahlen – $a : a = 1$; $a : 1 = a$; $0 : a = 0$; $a : 0$ nicht erklärt – Ausführbarkeit der Division in Q_+ – $a : b \gtrless a$ für $b \lessgtr 1$
Bruchstrich und Divisionszeichen (LE 13)	2	– Erweitern von Brüchen – Dividend, Divisor, Quotient – Regeln für das Arbeiten mit Klammern – Arithmetisches Mittel – Zu beliebigen a und b $(a < b)$ gibt es ein x mit $a < x < b$	– Austauschbarkeit von Bruchstrich und Divisionszeichen – Erweitern von Quotienten – Doppelbrüche, Umformen von Doppelbrüchen – Berechnen von Termen mit verschiedenen Operationszeichen
Division von Dezimalbrüchen (LE 14)	4	– Dividieren natürlicher Zahlen – Dividieren gemeiner Brüche – Umwandeln gemeiner Brüche in Zehnerbrüche und umgekehrt	– Regel für das Dividieren von Dezimalbrüchen – Didivieren durch Zehnerpotenzen
kurze Leistungskontrolle und Auswertung	1		
Stoffabschnitt 2.4.		Gemeine Brüche und Dezimalbrüche; Division von gebrochenen Zahlen in Dezimalbruchdarstellung 10 Std.)[1]	
Endliche und unendliche Dezimalbrüche	2	– Teiler von Zehnerpotenzen	– Umwandeln gemeiner Brüche in endliche Dezimalbrüche (zwei Möglichkeiten)

[1] Im folgenden sind nur 8 Stunden ausgewiesen. Die beiden übrigen Stunden werden für die am Ende des Stoffabschnittes 2.5. vorgesehene Kontrollarbeit (einschließlich Auswertung) verwendet.

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
(LE 15)			– Endliche und unendliche Dezimalbrüche
Periodische Dezimalbrüche (LE 16)	4	– Ordnen endlicher Dezimalbrüche – Rundungsregeln – Dividieren von Dezimalbrüchen (Quotient endl. Dezimalbruch) – Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren von Dezimalbrüchen	– Periodischer Dezimalbruch; Periode; *n*-stellige Periode – Darstellbarkeit jeder gebrochenen Zahl als endlicher bzw. als periodischer Dezimalbruch – Ordnen von Dezimalbrüchen – Dividieren von Dezimalbrüchen (Quotient periodisch)
Zusammenfassung	2	– Üben, Vertiefen, Systematisieren und Wiederholen des Wissens und Könnens zum Multiplizieren und Dividieren gebrochener Zahlen	
Stoffabschnitt 2.5.		Übung des Rechnens mit gebrochenen Zahlen	(8 Std.)[1]
Näherungswerte; zuverlässige Ziffern (LE 17)	2	– Runden von natürlichen Zahlen und Dezimalbrüchen – Ermitteln von Zahlen, die beim Runden auf gegebene Zahlen führen – Näherungswert – periodischer Dezimalbruch	– Gebrochene Zahlen als Näherungswerte – Angaben von Ungleichungen zu Näherungswerten – zuverlässige Ziffer – Näherungswerte zu periodischen Dezimalbrüchen
Addition und Subtraktion von Näherungswerten (LE 18)	1	– Gemischtes Addieren und Subtrahieren von Dezimalbrüchen	– Regel für das Addieren oder Subtrahieren von Näherungswerten – Addieren und Subtrahieren von Näherungswerten
Multiplikation und Division von Näherungswerten (LE 19)	3	– Multiplizieren und Dividieren von Dezimalbrüchen, Überschlag – Flächeninhalt von Rechtecken – Volumen und Oberflächeninhalt von Quadern	– Regel für das Multiplizieren oder Dividieren von Näherungswerten – Regel für das Runden von Zwischenergebnissen – Rechnen mit Näherungswerten, auch für periodische Dezimalbrüche
Lösen von formalen und Sach- und Anwendungsaufgaben zur Wiederholung	2	– Ordnen und Rechnen in Q_+ – Grundbegriffe und Gesetzmäßigkeiten in Q_+ – Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben	
Leistungskontrolle und Auswertung	2[2]		

[1] Vgl. Fußnote zu Stoffabschnitt 2.4.!
[2] Vgl. Fußnote zu Stoffabschnitt 2.4.!

Stoffabschnitt 2.1.

Ordnung gebrochener Zahlen (8 Std.)

Brüche und gebrochene Zahlen (3 Std.)

LE 1 (LB 29 bis 33)

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß man jede Menge von Brüchen, die demselben Punkt auf dem Zahlenstrahl zugeordnet sind, gebrochene Zahl nennt und jede gebrochene Zahl eine Menge von Brüchen ist, die durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervorgehen,
- können gebrochene Zahlen durch gemeine Brüche oder Dezimalbrüche angeben,
- können gemeine Brüche erweitern und kürzen,
- wissen, daß die Menge der gebrochenen Zahlen mit Q_+ bezeichnet wird und auch jede natürliche Zahl zu Q_+ gehört,
- können Paare gebrochener Zahlen durch zueinander gleichnamige Brüche angeben.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Wiederholen von „gemeiner Bruch", „Dezimalbruch", „gebrochene Zahl" und des Darstellens von Brüchen und gebrochenen Zahlen am Zahlenstrahl
- Festigen des Darstellens am Zahlenstrahl

2. Stunde
- Üben im Erweitern und Kürzen gemeiner Brüche

3. Stunde
- Erarbeiten des Gleichnamigmachens von Brüchen
- Üben des Gleichnamigmachens

Methodische Hinweise

Wiederholen von „gemeiner Bruch" . . . Die Schüler werden zunächst daran erinnert, daß im Stoffgebiet „Teilbarkeit" nur natürliche Zahlen eine Rolle spielten, uns aber aus dem Alltag und aus Klasse 5 auch andere Zahlen, gebrochene Zahlen, bekannt sind. Anschließend orientiert man darauf, daß das Arbeiten mit diesen Zahlen ein Schwerpunkt in Klasse 6 sein wird. Die Schüler nennen Beispiele für die Verwendung von Brüchen (gemeine Brüche, auch Zehnerbrüche, Dezimalbrüche) bei Größenangaben. Hier lassen sich auch die vor LE 1 angeführten Beispiele (LB 28) einbeziehen. Durch Applikationen von Kreis- oder Rechtecksflächenteilen kann erneut verdeutlicht werden, daß man gleich große Teile eines Ganzen (Torte, Schokoladentafel, Kreisfläche, Strecke) durch verschiedene Brüche angeben kann. Dafür läßt sich auch Auftrag B 1 nutzen. Bei c bis e des Auftrages (mdl.) kann durch Umwandeln in kleinere Einheiten, z. B. $\frac{750}{1000}$ m = 750 mm, $\frac{3}{4}$ m = 750 mm, also $\frac{3}{4}$ m = $\frac{750}{1000}$ m, oder bereits durch Erweitern oder Kürzen begründet werden.

Als Übergang zum Zahlenstrahl werden nun Brüche zur Angabe von Streckenlängen bezüglich einer Einheitsstrecke benutzt. Die Schüler übernehmen dazu das folgende *Tafelbild:*

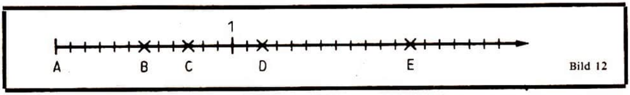


Bild 12

Danach suchen sie jeweils für die Strecken $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$ verschiedene Brüche und schreiben diese über die Punkte B, C, D bzw. E (SSA). Für $\overline{AB}$ kann dies zunächst gemeinsam erfolgen, so daß dann (als Muster) über B z. B. $\frac{6}{12}, \frac{3}{6}, \frac{2}{4}, \frac{1}{2}$, 0,5 steht. In der Auswertung wird deutlich, daß Punkten eines Strahls Brüche zugeordnet werden können und daß zu ein und demselben Punkt verschiedene Brüche (sogar unendlich viele) gehören. Man wird dabei auch dem Punkt A Brüche zuordnen. Zum weiteren Festigen wird Aufgabe 1 a gelöst (SSA).

Die Frage, wie man zu den obigen Punkten weitere Brüche findet, führt auf das bekannte Erweitern und Kürzen, das anhand einfacher Beispiele („Erweitere $\frac{2}{3}$ mit 5, 7, 9!" oder „Kürze $\frac{24}{36}$!") wiederholt wird. Abschließend teilt man mit:

- Alle zu ein und demselben Punkt gehörenden Brüche werden zu einer einzigen *Zahl* zusammengefaßt; man nennt sie *gebrochene Zahl*, um sie von Brüchen, aber auch von natürlichen Zahlen zu unterscheiden. (Hier kann man auch die Projektionsfolie Nr. 24 7355 einsetzen.)
- Jede gebrochene Zahl ist also eine Menge von Brüchen, die durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervorgehen.
- Es ist in der Mathematik üblich, diese Mengen auch als *Klassen* zu bezeichnen; man will damit ausdrücken, daß jeder Bruch zu einer gebrochenen Zahl gehört, aber kein Bruch zugleich zu zwei verschiedenen Zahlen. (Hier wird man auf die Analogie zu *Schulklasse* eingehen: Jeder Schüler gehört einer, aber auch nur einer Schulklasse an.)

Dem weiteren Vertiefen dient Auftrag B 3. In der Auswertung wird erarbeitet, daß $m \cdot q = n \cdot p$ Bedingung dafür ist, daß $\frac{m}{n}$ und $\frac{p}{q}$ zur gleichen gebrochenen Zahl gehören. Darauf sollte aber kein Nachdruck gelegt werden; auch künftig wird man in der Regel durch Erweitern oder Kürzen überprüfen, ob Brüche zur gleichen Zahl gehören.

Zum **Festigen des Darstellens am Zahlenstrahl** kann Aufgabe 2 genutzt werden (SSA, arbeitsteilig). Die zu den Punkten gehörenden Brüche werden im Heft tabellarisch aufgeschrieben. Danach schreiben die Schüler an einen an der Tafel entsprechend Bild B 7 (LB 31) vorbereiteten Zahlenstrahl „ihre" Brüche. Dabei wird wiederholt, daß jeder zu einer Zahl gehörende Bruch zu ihrer Bezeichnung verwendet werden kann. Die Punktbezeichnungen werden durch (farbig hervorgehobene) Zahlbezeichnungen ersetzt. Dabei muß deutlich werden, daß z. B. bei B statt 1,25 auch $\frac{5}{4}$ oder bei A statt $\frac{4}{8}$ auch 0,5 stehen kann. Es wird vereinbart, daß künftig kurz z. B. von „der gebrochenen Zahl $\frac{5}{4}$" statt von „der durch den Bruch $\frac{5}{4}$ gegebenen gebrochenen Zahl" gesprochen wird.

Man wird dabei auch herausstellen, daß bei den gebrochenen (wie bei den natürlichen) Zahlen zu jeder Zahl genau ein Punkt des Zahlenstrahls und umgekehrt zu jedem dieser Punkte genau eine gebrochene Zahl gehört.

Danach wird die Bezeichnung Q_+ für die Menge der gebrochenen Zahlen mitgeteilt und die Teilmengenbeziehung $N \subset Q_+$ am Zahlenstrahl und anhand eines Diagramms erläutert (Bild 13). Zum weiteren Festigen kann Aufgabe 8a genutzt werden (SSA).

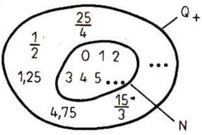


Bild 13

Das **Üben im Erweitern und Kürzen gemeiner Brüche** ist erforderlich, da sicheres Erweitern Voraussetzung für das Arbeiten mit gebrochenen Zahlen ist. Dafür werden die Aufgaben 6a, d; 3a bis d; 4a bis e, 7a bis c empfohlen (SSA). Für eine Übergangszeit können wie in Klasse 5 Erweiterungs- oder Kürzungszahlen jeweils über dem Gleichheitszeichen angegeben werden, z. B. $\frac{2}{3} \overset{\cdot 5}{=} \frac{10}{15}$, $\frac{15}{25} \overset{:5}{=} \frac{3}{5}$. Beim Erweitern darf man sich keineswegs auf das Erweitern von Brüchen mit *gegebenen* Zahlen beschränken; das Schwergewicht liegt im Hinblick auf spätere Anwendungen auf Aufgaben vom Typ der Aufgabe 4. Dabei muß deutlich werden, daß die Nenner erweiterter Brüche Vielfache der Nenner zu erweiternder Brüche sind. (Daher z. B. nicht auf Aufg. 4c verzichten!)

Zum weiteren Vertiefen werden die Aufgaben 5a bis d und nur für einige Schüler Aufgabe 10 vorgeschlagen.

Das **Erarbeiten des Gleichnamigmachens von Brüchen** läßt sich motivieren, indem man darauf orientiert, daß wir künftig gebrochene Zahlen vergleichen und mit ihnen rechnen wollen, dies bisher aber nur können, wenn sie durch gleichnamige Brüche gegeben sind. Man kann dies auch durch Einbeziehen einer Aufgabe vom Typ des Beispiels B 13 aus dem Lehrbuch für Klasse 5 (S. 66) verdeutlichen. Die Schüler erkennen: Es ist nötig, gebrochene Zahlen, die durch ungleichnamige Brüche wie $\frac{5}{12}$ und $\frac{3}{8}$ gegeben sind, durch gleichnamige zu ersetzen.

Im Unterrichtsgespräch wird erarbeitet: Die Brüche müssen so erweitert werden, daß gleiche Nenner entstehen; dafür kommen nur gemeinsame Vielfache von 8 und 12 in Frage, also 24, 48, 72, ... (alles Vielfache von 24, dem k. g. V. von 8 und 12). Die gleichnamigen Brüche werden wie im Beispiel B 2 ermittelt. Zusammenfassend wird hervorgehoben und begründet, daß zwei gebrochene Zahlen stets durch gleichnamige Brüche dargestellt werden können.

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 12a, b **2.** Aufg. 7f, i **3.** Aufg. 8c **4.** Aufg. 13g, h, k

Vergleichen und Ordnen gebrochener Zahlen (2 Std.)

LE 2 (LB 33 bis 36)

Diese Lerneinheit ist die erste (weitere sind LE 5 und 6), in der das (noch nicht bekannte) Arbeiten mit gebrochenen Zahlen zurückgeführt wird auf das (bekannte) Arbeiten mit gleichnamigen Brüchen.

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß die Lage der gebrochenen Zahlen auf dem Zahlenstrahl deren Ordnung festlegt und daß dem das Ordnen mit Hilfe des Gleichnamigmachens gleichwertig, jedoch meist einfacher ist,
- wissen, daß der Hauptnenner zweier nicht kürzbarer Brüche das k. g. V. der beiden Nenner ist,
- können gebrochene Zahlen durch Hauptnenner-Ermittlung vergleichen bzw. ordnen.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeiten des Vergleichens gebrochener Zahlen (durch Gleichnamigmachen von Brüchen) und des Begriffs „Hauptnenner von Brüchen“

2. Stunde
- Üben des Vergleichens gebrochener Zahlen mittels Hauptnenner
- Üben im Ordnen gebrochener Zahlen auf unterschiedlichen Wegen

Methodische Hinweise

Erarbeiten des Vergleichens gebrochener Zahlen und des Begriffs „Hauptnenner von Brüchen“ Zur Sicherung des Ausgangsniveaus werden Übungen im Gleichnamigmachen durchgeführt (Aufgaben in der Art von LE 1, Aufg. 13 bis 15). Als (innermathematische) Motivierung bieten sich zwei Analogieüberlegungen an:

(1) Natürliche Zahlen können wir ordnen, addieren ...; also werden wir versuchen, das auch mit gebrochenen Zahlen zu tun.

(2) Gleichnamige Brüche können wir ordnen, addieren ...; also werden wir versuchen, dies auf gebrochene Zahlen auszudehnen.

Als sachbezogene Motivierung könnte eine Frage wie „Was ist mehr, $\frac{3}{4}$ oder $\frac{5}{6}$ von 12 M?“ dienen.

Auf Definition B 2 und damit auf Bild B 8 (LB 33) kommt man am leichtesten von (1) aus. Diese Erklärung ist den Schülern nach LE 1 selbstverständlich. Man wird daher Übungen wie Auftrag B 5 nicht überbetonen. Indem z. B. von $\frac{7}{8}$ und $\frac{5}{6}$ die kleinere Zahl mittels Zahlenstrahl ermittelt wird (von allen Schülern im Heft oder von einem an der Tafel), wird das Suchen nach einem einfacheren Weg und damit das Zurückführen auf das bekannte Vergleichen gleichnamiger Brüche motiviert. Nach dieser Teilzielstellung werden bereits gelöste Aufgaben aus LE 1 genutzt (z. B. Aufg. 13 bis 15, gestellt als Hausaufgaben oder in täglicher Übung), um entsprechende Ungleichungen für die vorgegebenen Zahlen formulieren zu lassen. An den Zahlen $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{6}$ (LB 34) wird erkannt, daß das Ergebnis des Größenvergleichs unabhängig vom gewählten gemeinsamen Nenner ist und daß man demzufolge zweckmäßigerweise den kleinsten, das k. g. V. der Einzelnenner, wählen wird.

Indem das neue Verfahren gemäß Beipiel B 4 erarbeitet wird, kann das durch Abtragen gefundene Ergebnis $\frac{7}{8} > \frac{5}{6}$ bestätigt und die Gleichwertigkeit beider Vergleichsmöglichkeiten (am Beispiel) gezeigt werden.

Üben des Vergleichens gebrochener Zahlen mittels Hauptnenner Zunächst treten zwei unkürzbare Brüche auf; die Nenner entsprechen den drei Fällen der Ermittlung des k. g. V. (z. B. Aufgabe 2a, b, c).

Danach sollten auch solche Zahlen vorkommen, bei denen ein Kürzen der Brüche zum Ziel führt (z. B. Aufgabe 3e).

Schließlich kann zum Ordnen mehrerer Zahlen übergegangen werden. Dabei denken und schreiben die Schüler etwa:

Aufgabe: Ordne der Größe nach!	$\frac{3}{2}, \frac{7}{10}, \frac{4}{2}, \frac{2}{3}, \frac{10}{12}$
Es wird überlegt: $\frac{4}{2}$ und $\frac{10}{12}$ können gekürzt werden:	$\frac{3}{2}, \frac{7}{10}, 2, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$
Da 6 Vielfaches von 2 und 3 ist, wird nur das k. g. V. von 6 und 10 ermittelt.	
$30 = 3 \cdot 10 = 6 \cdot 5$ führt auf:	$\frac{45}{30}, \frac{21}{30}, \frac{60}{30}, \frac{20}{30}, \frac{25}{30}$
Ordnen und Kürzen führt zu:	$\frac{2}{3} < \frac{7}{10} < \frac{5}{6} < \frac{3}{2} < 2$

Hinweis: Die Transitivität der Kleinerbeziehung ist den Schülern von den natürlichen Zahlen und gleichnamigen Brüchen so vertraut, daß man sie nur im Zusammenhang mit den Beispielen bewußtmachen sollte. Von einer allgemeinen Formulierung „Wenn $a < b$ und $b < c$, so $a < c$" sollte i. allg. abgesehen werden.

Üben im Ordnen gebrochener Zahlen auf unterschiedlichen Wegen Das Vergleichen gleichnamiger Brüche ist als Normalverfahren für das Vergleichen gebrochener Zahlen anzusehen. Hierin muß jeder Schüler bei entsprechend kleinen Nennern Sicherheit erreichen. Es gehört aber auch zum Rechnenkönnen, in geeigneten Fällen abkürzende Verfahren einzusetzen, wie sie im Beispiel B 6 dargestellt sind. Bei den Aufgaben a, b und d wird man die Transitivität aufgreifen und insbesondere bei b die natürlichen Zahlen als „Meilensteine des Ordnens" hervorheben. Bei einer Begründung von Aufgabe c ist auf die Anschauung zurückzugreifen.

Gemischte Zahlen kennen die Schüler vor allem aus ihrer Umwelt. Ihre Nützlichkeit beim Ordnen legt einige Übungen im Umwandeln nahe (Beispiel B 5, Aufg. 11 und 12), ohne es zu stark in den Mittelpunkt zu rücken.

Das Vergleichen von Dezimalbrüchen ist den Schülern bekannt und sollte durch Auftrag B 6 wiederholt werden. Das Einbeziehen von Dezimalbrüchen soll Einseitigkeit bezüglich der gemeinen Brüche vermeiden. Es sollten jedoch nur leichte Umwandlungen in beiden Richtungen auftreten (Aufg. 4 und 5).

Für die Zusammenfassung empfiehlt sich eine Folie, von der hier nur die Spalte „Ordnen“ aufgedeckt wird:

	Ordnen	Addieren	Subtrahieren
Bekannt	gleichnamige Brüche	gleichnamige Brüche	gleichnamige Brüche
Neu	gebrochene Zahlen	gebrochene Zahlen	gebrochene Zahlen
Zurückführung	Gleichnamigmachen	Gleichnamigmachen	Gleichnamigmachen

Beim Addieren und Subtrahieren (LE 5 und 6) kann diese Folie der Zielorientierung sowie der Zusammenfassung dienen und das Gemeinsame deutlich machen

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 3h, i, k **2.** Aufg. 7d **3.** Aufg. 8b **4.** Aufg. 12d

Wieviel Zahlen liegen zwischen 19 und 20? (2 Std.)

LE 3 (LB 36 bis 38)

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß es zwischen zwei beliebigen gebrochenen Zahlen weitere gebrochene Zahlen und daher in Q_+ keine Nachfolgerrelation (bezüglich $<$) gibt,
- können zu beliebigen gebrochenen Zahlen a und b ($a < b$, dargestellt als gemeine oder als Dezimalbrüche) Zahlen x mit $a < x < b$ angeben,
- sind in der Überzeugung bestärkt worden, daß oberflächliches Beantworten von Fragen zu Fehlern führen kann.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Üben im Verwenden von „liegt zwischen“
- Erarbeiten der Erkenntnis, daß zwischen zwei beliebigen gebrochenen Zahlen unendlich viele weitere liegen

2. Stunde
- Üben im Ermitteln von Zahlen, die zwischen zwei gegebenen liegen

Methodische Hinweise

Das **Üben im Verwenden von „liegt zwischen“** bereitet den nächsten Schwerpunkt vor. Bei den vorangegangenen Übungen zum Ordnen waren vornehmlich Entscheidungen über vorgegebene Zahlen zu treffen (Identifizieren). Jetzt sind Zahlen anzugeben (Realisieren), die bezüglich der Ordnung zwei Bedingungen erfüllen. Die Schreibweise als Doppelungleichung ist den Schülern nicht neu; dennoch wird man noch einmal hervorheben: $3 < x < 5$ bedeutet $3 < x$ *und* $x < 5$.

Gesucht ist also eine Zahl (oder mehrere), die *sowohl* größer als 3 *als auch* kleiner als 5 ist. Die Sprechweise „liegt zwischen“ ist den Schülern ebenfalls bekannt (Punkte einer Strecke – Zahlenstrahl – Zahlen). Zur Übung werden Aufgaben genutzt, die dem nächsten Schwerpunkt nicht vorgreifen, aber an ihn heranführen, z. B. 2b, c; 5a, b.

Das **Erarbeiten der Erkenntnis, daß zwischen zwei beliebigen gebrochenen Zahlen unendlich viele weitere liegen,** kann mit folgender Aufgabe begonnen werden:

Nenne eine natürliche und eine gebrochene Zahl x, für die gilt

(1) $3 < x < 4$ (2) $\frac{3}{11} < x < \frac{4}{11}$!

Die meisten Schüler werden bei (1) zutreffende Antworten geben (keine natürliche Zahl, aber z. B. 3,5), bei (2) jedoch „nicht lösbar“ sagen. Wenn kein Schüler den Vorschlag zum Erweitern macht, also zum Benutzen anderer Repräsentanten, kann eine analoge Frage für $\frac{1}{2} < x < 1$ und $\frac{3}{5} < x < \frac{4}{5}$ weiterhelfen:

Ungleichung:	$\frac{1}{2} < x < 1$	$\frac{3}{5} < x < \frac{4}{5}$	
Lösung:	$x = \frac{3}{4}$	$x = 0{,}7$	$x = \frac{7}{10}$
Begründung:	$\frac{2}{4} < \frac{3}{4} < \frac{4}{4}$	$0{,}6 < 0{,}7 < 0{,}8$	$\frac{6}{10} < \frac{7}{10} < \frac{8}{10}$

Hier wird das Erweitern als Lösungsweg offenkundig, wodurch auch ein Lösen von (2) möglich wird.

Ein Beginn der Erarbeitung mit Auftrag B 8 läßt einen gleichartigen Überraschungseffekt nur entstehen, wenn man recht früh die Frage nach der größten gebrochenen Zahl stellt, die kleiner als 20 ist. Daß es eine solche Zahl nicht gibt, finden die Schüler über 19,9; 19,99; ... relativ leicht. Doch führt dieser Ansatz nicht unmittelbar zum allgemeinen Vorgehen des Erweiterns der gegebenen gebrochenen Zahlen. Da man mit beliebig großen Zahlen erweitern kann, kommt man von der Erkenntnis *Zwischen zwei verschiedenen gebrochenen Zahlen liegt mindestens eine weitere* leicht zu der allgemeineren *Zwischen ... liegen beliebig viele weitere.* (Das Einführen von „überall dicht liegen“ sieht der Lehrplan erst für den Abschnitt 2.3. vor.)

Das **Üben im Ermitteln von Zahlen, die zwischen zwei gegebenen liegen,** soll nicht zu Fertigkeiten im Lösen von Ungleichungen der Art $a < x < b$ führen. Deshalb wird man von den Aufgaben 1, 2 und 5 unter Beachtung differenzierender Maßnahmen jeweils nur einige Beispiele wählen, wobei den jeweils vorhandenen Rechenfertigkeiten angepaßt, gemeine und Dezimalbrüche gleichermaßen zu berücksichtigen sind. Für das Lösen sollte man lediglich auf das Erweitern sowohl bei gemeinen als auch bei Dezimalbrüchen orientieren.

Die Übungen sollen aber auch erste Anfänge analytischen Denkens ermöglichen und auf spätere Anforderungen, z. B. beim Einschachteln, vorbereiten. So wird man mittels Aufgabe 4 herausarbeiten, daß die jeweiligen Zahlen immer größer werden, die Zahl 1 nie erreichen, aber „beliebig dicht“ herankommen – wenn man nur weit genug fortsetzt. Dabei kann man auch nach der kleinsten gebrochenen Zahl, die größer als 0 ist, fragen.

Die Aufgaben 3 und 7 bereiten in besonderer Weise auf das Arbeiten mit Näherungswerten und auf das Einschachteln vor. Ihre Schwierigkeit hängt stark vom Zahlenmaterial ab, so daß man hier differenzieren muß (3a, e, g für alle Schüler).

Auch bei den Übungen wird man den Schülern durch Gegenüberstellung zur Nachfolgerrelation in N bewußtmachen, daß sie in dieser Lerneinheit einen der wichtigsten Unterschiede von N und Q_+ kennengelernt haben, der auch für die Praxis (Genauigkeit beim Messen) bedeutsam ist.

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 2d, e und f   **2.** Aufg. 5f und g

Kleiner, gleich oder größer (1 Std.)

LE 4 (LB 38 bis 39)

Ziele

Die Schüler
- haben den Unterschied der Zeichen „$<$" und „$\leqq$" verstanden,
- können für einfache Ungleichungen der Form $x \leqq a$; $a \leqq x \leqq b$; $a \leqq x < b$ ($a, b, x \in N$ bzw. Q_+) alle bzw. einige Lösungen angeben und die Lösungsmengen am Zahlenstrahl veranschaulichen.

Schwerpunkte

- Erarbeiten von „$\leqq$" und der zugehörigen Sprechweise
- Üben im Umgang mit Ungleichungen, in denen „$\leqq$" auftritt

Methodische Hinweise

Das Erarbeiten von „$\leqq$" und der zugehörigen Sprechweise kann mit einigen Größenvergleichen anhand von LB-Bild B 11 beginnen. Nach der Feststellung „Werner ist größer als Hans" führen die Fragen „Welche Aussage gibt den Vergleich für alle anderen Schüler mit Hans an?" und „Welche zwei Möglichkeiten bestehen dabei?" zu folgendem *Tafelbild:*

Werner ist **größer** als Hans.
$>$

Alle anderen sind $\boxed{\text{nicht größer}}$ als Hans.

$\underbrace{\boxed{\textit{kleiner}\ <} \quad \text{oder} \quad \boxed{\textit{gleich}\ =}}_{\leqq}$

Eine erste Festigung (mündlich und schriftlich) erfolgt durch Teile der Aufgaben 2 und 5. Das Wort „Ungleichung“ wird ohne Kommentar verwandt.

Hinweis: Für manche Schüler ergibt sich dabei folgendes Problem: Sie können relativ leicht die Lösungsmenge z. B. von $a \leqq 5$ ($a \in N$) angeben, weil sie immer mehrere Zahlen für a vor Augen haben. Sie haben jedoch (z. B. bei einer Probe) Schwierigkeiten, die Aussagen $4 \leqq 5$ bzw. $5 \leqq 5$ als wahr anzusehen und argumentieren: „4 ist doch nicht kleiner oder gleich 5, sondern 4 ist kleiner als 5“ (entsprechend für $5 \leqq 5$). Da in Klasse 6 nicht über die Wahrheit von Aussageverknüpfungen gesprochen wird (hier von Alternative bzw. Disjunktion), empfiehlt es sich einerseits (insbesondere bei der Einführung), die Sprechweisen „kleiner oder gleich“ und „nicht größer“ des öfteren synonym zu verwenden und für beide das Zeichen „$\leqq$“ zu benutzen; andererseits wird man solche speziellen Aussagen wie $4 \leqq 5$ weitestgehend vermeiden und immer auf die z. B. zu $a \leqq 5$ gehörige Lösungsmenge orientieren.

Üben im Umgang mit Ungleichungen, in denen „$\leqq$“ auftritt Zum Motivieren der Betrachtung solcher Ausdrücke kann die Angabe der Masse m eines Päckchens Rahmbutter (LB 81) dienen; 250 g ± 4 g bedeutet z. B.:

m beträgt mindestens 246 g und höchstens 254 g	m ist nicht kleiner als 246 g und nicht größer als 254 g

$$246\text{ g} \leqq m \leqq 254\text{ g}$$

Diese ausführliche Sprechweise sollte bei den ersten Übungen (Aufg. 4, 6) benutzt werden, um derartige Ungleichungen als Konjunktionen deutlich werden zu lassen.

Das Veranschaulichen der Lösungsmengen bildet hier keinen Schwerpunkt. Man wird es daher aus Zeitgründen nur gemäß LB-Bilder B 11, B 12 für beiderseits abgeschlossene Intervalle vornehmen (z. B. bei Aufg. 7) und dabei den Unterschied für N bzw. Q_+ als Grundbereiche herausstellen.

Kontrollaufgabe
Aufg. 7

Stoffabschnitt 2.2.

Addition und Subtraktion gebrochener Zahlen (14 Std.)

Addition gebrochener Zahlen (3 Std.)

LE 5 (LB 42 bis 44)

Ziele

Die Schüler
- können zwei als gemeine Brüche oder Dezimalbrüche gegebene gebrochene Zahlen addieren und ihr Vorgehen beschreiben,

- können in einfachen Fällen einen gemeinen Bruch und einen Dezimalbruch addieren,
- wissen, daß die Summe gebrochener Zahlen unabhängig von deren Darstellung ist,
- wissen, daß die Addition gebrochener Zahlen stets ausführbar ist.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeiten der Addition zweier als gemeine Brüche gegebener gebrochener Zahlen

2. Stunde
- Üben im Addieren zweier als gemeine Brüche oder Dezimalbrüche gegebener gebrochener Zahlen

3. Stunde
- Vertiefen des Addierens gebrochener Zahlen

Methodische Hinweise

Erarbeiten der Addition zweier als gemeine Brüche gegebener gebrochener Zahlen Zur Sicherung des Ausgangsniveaus sollte in Abhängigkeit von der Klassensituation das Ermitteln des k. g. V. natürlicher Zahlen, das Gleichnamigmachen gemeiner Brüche und das Addieren von zwei oder drei natürlichen Zahlen (z. T. leicht über Grundaufgaben der Addition hinausgehend) reaktiviert werden.

Dabei sollte hervorgehoben werden, daß das Addieren natürlicher Zahlen und das Gleichnamigmachen von Brüchen stets ausführbar sind.

Die Addition ungleichnamiger Brüche kann durch das die Lerneinheit einleitende Problem (LB 42) oder durch die folgende noch ausdrücklicher auf das Addieren orientierende Aufgabe motiviert werden: „Ein Traktorist bearbeitet an einem Tag vormittags die Hälfte und nachmittags ein Drittel eines Feldes. Welchen Anteil des Feldes hat er an diesem Tag bearbeitet?" Sollten keine Vorschläge zur Problemlösung kommen, kann man daran erinnern, daß schon beim Vergleichen ungleichnamige Brüche betrachtet wurden, und fragen, wie das Problem dort gelöst worden ist. Hier läßt sich auch die Folie aus LE 2 weiterführend einsetzen. Die Schüler werden so auf das Addieren gleichnamiger Brüche geführt, dessen Wiederholung dadurch motiviert wird. Es wird anhand einfacher Beispiele geübt (mdl.); danach wird Auftrag B 12 (schriftl.) bearbeitet. Das eingangs gestellte Problem wird nun im Unterrichtsgespräch durch Zurückführen auf gleichnamige Brüche gelöst. Dabei kann LB-Bild B 16 (LB 42) (oder eine entsprechende Folie) benutzt werden. Man sollte nicht vorschnell auf den Hauptnenner orientieren, um deutlich zu machen, daß jeder gemeinsame Nenner möglich ist und sich als Summe zwar unterschiedliche, aber stets zur gleichen Zahl gehörende Brüche ergeben. Daher ist es günstig, die Zahlen bei verschiedenen gemeinsamen Nennern zu addieren und die Summen miteinander zu vergleichen. Ferner sollte das Addieren auch am Zahlenstrahl (LB-Bild B 17) veranschaulicht werden. Zusammenfassend beschreiben die Schüler das Ermitteln der Summe, formulieren Definition B 5 und begründen die Zweckmäßigkeit der Wahl des Hauptnenners.

Danach wird ein rationelles Vorgehen zum Addieren entsprechend Beispiel B 7 erarbeitet. Die letzte Zeile darin sollte an der Tafel sukzessive, in der Form die Rechnung vorausplanend, entstehen: $\frac{7}{12} + \frac{5}{8} = \frac{7\cdot}{12\cdot} + \frac{5\cdot}{8\cdot} = \frac{\quad + \quad}{} = \frac{}{}$

Erst danach werden fehlende Zahlen ergänzt. Das k. g. V. wird dabei im Kopf ermittelt; als Nebenrechnung wird schriftlich lediglich festgehalten: $24 = \mathbf{2} \cdot 12$, $24 = \mathbf{3} \cdot 8$. Auf das Aufschreiben der Erweiterungszahlen wird man hier noch nicht verzichten.

Üben im Addieren ... Für eine einleitende Reaktivierung empfiehlt sich das Umwandeln gemeiner Brüche in Dezimalbrüche und umgekehrt. Danach werden gemeine Brüche addiert. Es sollten Paare von Brüchen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ berücksichtigt werden, bei denen der Hauptnenner
- zwischen b bzw. d und $b \cdot d$ liegt (z. B. Aufg. 2e),
- gleich $b \cdot d$ ist (z. B. Aufg. 1b),
- gleich b bzw. d ist (z. B. Aufg. 1c; teilweise mdl.),

und dabei auch solche, bei denen
- $a = 1$ und (oder) $c = 1$ ist (z. B. Aufg. 1a),
- $a = 0$ oder $b = 0$ ist (z. B. Aufg. 3d),
- man vor dem Rechnen kürzen wird (z. B. Aufg. 2c und 4b).

Auf das Aufschreiben der Erweiterungszahlen und der erweiterten Brüche wird man nun zunehmend verzichten. Die Schüler sollten auf ein mögliches Kürzen nach dem Ermitteln der Summe weitgehend selbständig achten.

Das Addieren von Dezimalbrüchen ist nur kurz zu üben (Aufg. 5, SSA). Zuvor sollte entsprechend Beispiel B 9 deutlich werden, daß das bereits bekannte Addieren von Dezimalbrüchen durch die Definition B 5 gerechtfertigt wird. Das Vorgehen beim Addieren eines gemeinen und eines Dezimalbruchs kann anhand eines Beispiels erarbeitet werden:

$0{,}8 + \frac{3}{4} = \frac{8}{10} + \frac{3}{4} = \ldots, \qquad 0{,}8 + \frac{3}{4} = 0{,}8 + 0{,}75 = \ldots$

Die Summen ermitteln die Schüler arbeitsteilig. Dabei wird hervorgehoben, daß beide sich als Summe ergebende Brüche zur gleichen gebrochenen Zahl gehören. Auf Vor- und Nachteile der Vorgehensweisen wird noch nicht eingegangen. Zum Üben wird Aufgabe 6a bis f empfohlen.

Zum **Vertiefen des Addierens gebrochener Zahlen** eignen sich vor allem Aufgaben, bei denen die Summe gegeben und ein Summand (oder beide) durch Ergänzen zu ermitteln ist (Aufg. 8 bis 13). Dies bereitet zugleich die Subtraktion vor.

In Abhängigkeit von der Klassensituation ist eventuell das *inhaltliche* Lösen von Gleichungen ($x + 20 = 35$, $x + 15 = 5$, $2 \cdot x + 3 = 15$) zuvor zu reaktivieren. Auch Aufgabe 9a bis d kann hier einbezogen werden.

Anschließend werden im Unterrichtsgespräch die Gleichungen aus dem folgenden *Tafelbild* entsprechend dem daraus erkennbaren Vorgehen *inhaltlich* gelöst (die rechte Gleichung ist schon etwas anspruchsvoller):

$\frac{5}{14} + \frac{x}{14} = \frac{1}{2}$ $\frac{5}{14} + \frac{x}{14} = \frac{7}{14}$ $x = 2$	$\frac{x}{28} + \frac{1}{4} = \frac{9}{14}$ $\frac{x}{28} + \frac{7}{28} = \frac{18}{28}$ $x = 11$	$\frac{5}{6} + \frac{x}{3} = \frac{7}{2}$ $\frac{5}{6} + \frac{x}{3} = \frac{21}{6}$ $\frac{x}{3} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$ $x = 8$

Die Schüler ermitteln x, indem sie z. B. überlegen, wieviel Vierzehntel zu $\frac{5}{14}$ zu ergänzen sind, um $\frac{7}{14}$ zu erhalten. Die Probe sollten sie selbständig durchführen. Danach lösen sie Aufgabe 8a bis e und g (SSA). In der Auswertung sollten nicht nur Lösungen genannt, sondern auch bewußtwerden, daß es beim Lösen von Gleichungen verschieden viele Lösungen geben kann: *genau eine* Lösung (Aufg. 8a, b, c, d), *keine* Lösung (Aufg. 8e), *mehrere* Lösungen (Aufg. 8g).

Zum weiteren Vertiefen wird Aufgabe 10 empfohlen (10a gemeinsam; b, c selbständig). Gedankengänge zur Lösungsfindung bei Aufgabe 10b könnten sein: Es ist $\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 1$; also ist $x < \frac{3}{8}$; x kann $0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}$ sein; durch Erweitern von $\frac{3}{8}$ zu $\frac{6}{16}$ findet man z. B. $\frac{1}{16}$ und $\frac{3}{16}$. Es sollte herausgestellt werden, daß hier x (im Gegensatz zu Aufg. 8) für gebrochene Zahlen steht und künftig bei Variablen zu beachten ist, welche Zahlen sie bezeichnen.

Der Festigung des Addierens dienen auch Identifizierungen, bei denen die Schüler vorgelegte Gleichungen (gelöste Additionsaufgaben) auf Richtigkeit untersuchen. Dabei sind auch typische Schülerfehler $\left(\text{z. B. } \frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{6}{8}; \ \frac{7}{5} + \frac{2}{3} = \frac{9}{15}; \ \frac{7}{2} + \frac{7}{3} = \frac{7}{5}\right)$ zu berücksichtigen und zu besprechen.

Kontrollaufgaben

1. Aufg. 1h, i; 2f **2.** Aufg. 6g, h, i **3.** Aufg. 8f, h

Subtraktion gebrochener Zahlen (2 Std.)

LE 6 (LB 44 bis 46)

Ziele

Die Schüler
- können zwei als gemeine Brüche oder Dezimalbrüche gegebene gebrochene Zahlen subtrahieren und ihr Vorgehen beschreiben,
- wissen, daß die Subtraktion Umkehroperation zur Addition gebrochener Zahlen und die Differenz zweier gebrochener Zahlen unabhängig von deren Darstellung ist,
- wissen, daß die Subtraktion nur ausführbar ist, wenn der Subtrahend nicht größer als der Minuend ist.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeiten der Subtraktion zweier als gemeine Brüche gegebener gebrochener Zahlen
- Üben im Subtrahieren

2. Stunde
– Üben und Vertiefen des Subtrahierens

Methodische Hinweise

Erarbeiten der Subtraktion . . . Zur Sicherung des Ausgangsniveaus kann in Abhängigkeit von der Klassensituation das Vergleichen gebrochener Zahlen und das Subtrahieren zweier natürlicher Zahlen (mdl., z. T. etwas über die Grundaufgaben hinausgehend) reaktiviert werden. Dabei sollte hervorgehoben werden: $a - b$ ist für natürliche Zahlen a und b nur dann eine (eindeutig bestimmte) natürliche Zahl, wenn b nicht größer als a ist; die Subtraktion natürlicher Zahlen ist Umkehroperation zur Addition, da z. B. $x = 50 - 15$ gleichbedeutend mit $15 + x = 50$ ist.

Danach wird die Subtraktion von gleichnamigen Brüchen und von Dezimalbrüchen wiederholt. Die Schüler lösen weitgehend selbständig die Aufgaben 1 und 2a bis d. In der Auswertung wird erneut die Frage der Ausführbarkeit der Subtraktion aufgeworfen.

Die Subtraktion ungleichnamiger Brüche kann durch denselben Sachverhalt wie die Addition (vgl. S. 62) motiviert werden, allerdings mit abgeänderter Frage, z. B. „Wieviel Liter Saft sind in der größeren Flasche mehr als in der kleineren?“ Eine

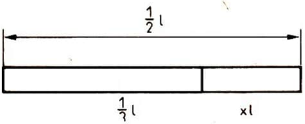


Bild 14

Skizze (Bild 14) kann das Finden der Lösung erleichtern. Sie führt auf $\frac{1}{3} + x = \frac{1}{2}$ oder $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$. Die Schüler erkennen, daß das Problem auf die Subtraktion gebrochener Zahlen führt und diese wie bei den natürlichen Zahlen Umkehroperation zur Addition ist. Da das Zurückführen auf gleichnamige Brüche wegen Analogie und Zusammenhang zur Addition naheliegend ist, sollte die Differenz selbständig ermittelt und durch Addieren überprüft werden. In der Auswertung wird hervorgehoben, daß das Arbeiten mit dem Hauptnenner am rationellsten ist, bei Wahl anderer gemeinsamer Nenner sich dennoch stets die gleiche Zahl als Differenz ergibt. Anschließend wird Definition B 6 formuliert. Unter Bezugnahme auf natürliche Zahlen und gemeine Brüche sollte begründet werden, daß es zu zwei gebrochenen Zahlen a und b nur dann eine Differenz $a - b$ gibt, wenn b nicht größer als a ist. Man kann diese Erkenntnis aber auch erst nach einer Bearbeitung von Auftrag B 14a formulieren lassen.

Ergänzend kann auch das Subtrahieren am Zahlenstrahl veranschaulicht werden (LB-Bild B 18, LB 45). Darauf wird man vor allem dann nicht verzichten, wenn man statt des Motivierungsproblems eine formale Aufgabe (LB 44) gewählt hat.

Üben und Vertiefen des Subtrahierens Es empfiehlt sich, eingangs das inhaltliche Lösen von Gleichungen wie $x - 15 = 20$, $37 - x = 20$, $15 - x = 40$ zu reaktivieren. Zum weiteren Üben des Subtrahierens werden die Aufgaben 6a bis e gelöst und die berechneten Differenzen durch Addition kontrolliert (SSA). Durch die Aufgaben 6b, c und d sollte erneut vorheriges Kürzen als zweckmäßig erkannt werden. Zum Vertiefen werden wie in LE 5 natürliche bzw. gebrochene Zahlen ermittelt, die Lösungen von Gleichungen oder Ungleichungen sind (Aufg. 7 bis 10*). Einige davon wird man mündlich lösen lassen (z. B. 7a bis d). Lösungsfindung und Aufschreiben des Lösungswegs erfolgen wie bei analogen Aufgaben in LE 5. Man kann aber auch ausnutzen, daß die Subtraktion Umkehroperation zur Addition ist:

$\frac{m}{3} - \frac{2}{3} = 1; \quad \frac{m}{3} = 1 + \frac{2}{3}; \quad \frac{m}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}; \quad m = 5$

In Abhängigkeit von der Klassensituation wird man vor dem schriftlichen Arbeiten ein oder zwei Beispiele gemeinsam lösen. Beim Auswerten ist erneut hervorzuheben, daß es beim Lösen von Gleichungen verschieden viele Lösungen geben kann. Die Schüler sollten eine offensichtlich nicht ausführbare Subtraktionsaufgabe $\left(\text{z. B. } \frac{2}{3} - \frac{5}{2},\ \frac{3}{4} - x = \frac{9}{8}\right)$ möglichst vor dem Rechnen erkennen und begründen. Auf ständiges vorheriges Überprüfen der Ausführbarkeit sollte verzichtet werden.

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 4d, e, h **2.** Aufg. 6g **3.** Aufg. 8a, b

Kommutativ- und Assoziativgesetz der Addition (2 Std.)

LE 7 (LB 46 bis 49)

Ziele

Die Schüler
- können das Kommutativ- und das Assoziativgesetz der Addition formulieren, kennen deren Namen und wissen, daß es entsprechende Gesetze für die Subtraktion nicht gibt,
- können diese Gesetze für ein rationelles Rechnen nutzen,
- können gebrochene Zahlen bei mehr als zwei Operanden addieren und subtrahieren.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeiten und Begründen der Gesetze
- Üben im Addieren von drei (oder mehr) gebrochenen Zahlen

2. Stunde
- Erarbeiten der Nicht-Kommutativität und Nicht-Assoziativität der Subtraktion
- Üben und Vertiefen des Addierens und Subtrahierens mehrerer gebrochener Zahlen

Methodische Hinweise

Erarbeiten und Begründen der Gesetze Zur Sicherung des Ausgangsniveaus wird empfohlen, die Schreibweise „gemischte Zahl" zu wiederholen und das Umwandeln gemischter Zahlen in gemeine Brüche und umgekehrt zu üben. Ferner sollte einleitend das Assoziativ- und Kommutativgesetz für natürliche Zahlen dadurch wiederholt werden, daß die Schüler Summen wie $53 + 35 + 65$; $130 + 68 + 70$; $23 + 9 + 7 + 11$ möglichst vorteilhaft berechnen. Beim Erläutern des Rechenweges muß deutlich werden, daß bei der ersten Summe das Assoziativgesetz, sonst beide Gesetze nützlich sind. Die Namen und der Wortlaut der Gesetze werden (mit Hilfe von Variablen) an der Tafel festgehalten und ihr Inhalt ohne Verwendung von Variablen von den Schülern wiedergegeben.

Hieran schließt sich zwanglos die Frage nach der Gültigkeit solcher Gesetze für gebrochene Zahlen an. Obwohl die Schüler kaum daran zweifeln werden, sollte man im Interesse eines gewissen Realitätsbezugs auf Plausibilitätsbetrachtungen, wie sie im Lehrbuch (LB 46) zu finden sind, nicht verzichten:

Rübeland–Treseburg:	12,9 km	Thale–Treseburg:	7,2 km
Treseburg–Thale:	7,2 km	Treseburg–Rübeland:	12,9 km
Rübeland–Thale:		Thale–Rübeland:	

Da die Weglänge zwischen Rübeland und Thale unabhängig von der durchwanderten Richtung ist, muß $12{,}9 + 7{,}2$ gleich $7{,}2 + 12{,}9$ sein. Der gleiche Sachverhalt kann auch zur Illustration des anderen Gesetzes herangezogen werden:

Zwei Gruppen wandern von Rübeland nach Thale; die eine rastet in Altenbrak, die andere in Treseburg. Sie ermitteln die für beide gleiche Weglänge auf unterschiedliche Weise:

	Gruppe 1	*Gruppe 2*
vor der Rast:	9,8 km	9,8 km + 3,1 km
nach der Rast:	3,1 km + 7,2 km	7,2 km
Weg:	9,8 km + (3,1 km + 7,2 km)	(9,8 km + 3,1 km) + 7,2 km

Beide Gesetze sollten wie im Lehrbuch mit Variablen für gebrochene Zahlen formuliert werden, um sie nicht an die Darstellung gebrochener Zahlen durch gemeine Brüche zu binden und den Schülern das Erfassen der Gesetze zu erleichtern.

An den genannten praktischen Sachverhalten haben die Schüler erkannt: Die Addition gebrochener Zahlen muß kommutativ und assoziativ sein, da sie sonst praktischen Erfahrungen (der Realität) nicht entsprechen würde. Obwohl der Lehrplan keinen Beweis der Gesetze fordert, sollte den Schülern dennoch bewußtgemacht werden: Für die von uns erarbeitete Addition gebrochener Zahlen gelten diese Gesetze auch tatsächlich, weil sie auf die Addition der Zähler gleichnamiger Brüche, also natürlicher Zahlen zurückgeführt wird und diese kommutativ und assoziativ ist. Als beispielgebundene Begründung des Satzes B 7 ist Beispiel B 11 gedacht; eine entsprechende Begründung des Satzes B 8 ist möglich.

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)+\frac{5}{8}=\left(\frac{4}{8}+\frac{6}{8}\right)+\frac{5}{8}=\left(\frac{4+6}{8}\right)+\frac{5}{8}=\frac{(4+6)+5}{8}$$
$$=\frac{4+(6+5)}{8}=\frac{4}{8}+\left(\frac{6+5}{8}\right)=\frac{4}{8}+\left(\frac{6}{8}+\frac{5}{8}\right)=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{8}\right)$$

Bei erhöhtem Übungsbedarf der Klasse kann jedoch darauf verzichtet werden. Zusammenfassend wird noch einmal verdeutlicht, daß die Addition dreier Zahlen auf Grund des Satzes B 8 stets auf die zweier Zahlen zurückgeführt wird und auf Grund beider Gesetze gebrochene Zahlen in beliebiger Reihenfolge addiert werden können. Ferner kann anhand der Aufgaben aus Beispiel B 13 gezeigt werden, daß sich durch Anwenden der Gesetze Rechenvorteile ergeben können.

Üben im Addieren von drei (oder mehr) gebrochenen Zahlen Vor dem selbständigen Lösen von Aufgabe 3 wird ein Beispiel gemeinsam gelöst. Dabei sollte deutlich werden, daß z. B. $2\frac{2}{5} + 6\frac{1}{3}$ auf zwei Wegen berechnet werden kann: durch vorheriges Umwandeln in gemeine Brüche und anschließendes Addieren oder wie in Beispiel B 13c. Obwohl letzterer Weg rationeller ist und größere Zahlen vermeidet, wird darauf kein Nachdruck gelegt, da Schüler ihn oft unkritisch auf die Multiplikation übertragen.

Zum weiteren Festigen der Gesetze kann Aufgabe 6 (SSA) eingesetzt werden. „Sehen" die meisten Schüler die Lösungen nicht, geht man zum Unterrichtsgespräch über und läßt die Lösungen gemeinsam finden und begründen.

Erarbeiten der Nicht-Kommutativität und Nicht-Assoziativität der Subtraktion Zur Sicherung des Ausgangsniveaus sollte anhand von Beispielen wie $85 - 18 + 15 - 12$ folgendes reaktiviert werden: Bei natürlichen Zahlen kann man die Reihenfolge der Operanden verändern, jeweils die Summanden und Subtrahenden addieren und die zweite von der ersten Summe subtrahieren ($85 + 15 = 100$, $18 + 12 = 30$, $100 - 30 = 70$). (Vgl. Lehrbuch für Klasse 5, Beispiel A 2, Seite 9.)

Die Frage, ob es zu den Sätzen B 7 und B 8 für die Subtraktion entsprechende Gesetze gibt, sollte möglichst selbständig durch den Hinweis auf ihr Fehlen für die Subtraktion natürlicher Zahlen beantwortet werden. Man sollte dies aber auch durch Beispiele abstützen. Dazu können die Aufgaben aus Beispiel B 14 (SSA, arbeitsteilig) genutzt werden. Die Auswertung erfolgt durch Vergleich mit dem Lehrbuch. Es muß deutlich werden, daß man bei der *Addition* Klammern weglassen oder setzen *darf*, nicht aber bei der Subtraktion. Diese Einsicht wird durch selbständiges Bearbeiten von Auftrag B 15 gefestigt.

Üben und Vertiefen des Addierens und Subtrahierens mehrerer gebrochener Zahlen Es werden die Aufgaben 7a, b; 5c bis f und 3c, d (zur Differenzierung auch Aufg. 8*a, b) empfohlen. Bei den Aufgaben 5 und 7 läßt sich auf das reaktivierte Addieren und Subtrahieren mehrerer natürlicher Zahlen bezugnehmen und auch Beispiel B 15 einbeziehen. Bei Aufgabe 3 wird wie bei der Addition auf das Umwandeln in gemeine Brüche als Normalverfahren orientiert.

Zum Vertiefen kann man die von natürlichen Zahlen bekannte Monotonie und die Bedeutung der Null bei Addition und Subtraktion auch für gebrochene Zahlen durch das Lösen der Aufgaben 12 und 13 (SSA) bewußtmachen; Verallgemeinerungen sollten daran nicht geknüpft werden. Die Lösungen bei Aufgabe 12 könnten etwa so aufgeschrieben werden:

$\frac{1}{3} + \frac{3}{5} < \frac{3}{5} + \frac{5}{4}$, denn $\left(\frac{1}{3} < 1, \frac{5}{4} > 1, \text{also}\right) \frac{1}{3} < \frac{5}{4}$

(In Klammern Stehendes wird nur gesprochen oder gedacht.)

Kontrollaufgaben

1. Aufg. 1g **2.** Aufg. 4d **3.** Aufg. 11e

Addition und Subtraktion gebrochener Zahlen in verschiedenen Darstellungen (4 Std.)

LE 8 (LB 49 bis 54)

Ziele

Die Schüler
- können mehrere als gemeine Brüche, gemischte Zahlen oder Dezimalbrüche gegebene gebrochene Zahlen sicher addieren und subtrahieren und dabei sicher mit Klammern umgehen,
- können für die Addition und Subtraktion gebrochener Zahlen in unterschiedlichen Darstellungen die für das Rechnen jeweils zweckmäßigste auswählen,
- können einfache Sach- und Anwendungsaufgaben lösen, die auf das Addieren oder Subtrahieren gebrochener Zahlen führen,
- können gebrochene Zahlen x angeben, die Gleichungen bzw. Ungleichungen der Form $a + x = b$, $x - a = b$, $a - x = b$, $x + a < b$, $x - a < b$, $a - x < b$ $(a, b \in Q_+)$ erfüllen.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Üben des Addierens und Subtrahierens gemeiner Brüche
- Üben des Addierens und Subtrahierens von Dezimalbrüchen

2. Stunde
- Üben des Umwandelns gemeiner Brüche in Dezimalbrüche und umgekehrt
- Üben des Addierens und Subtrahierens von gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen

3. Stunde
- Vertiefen des Addierens und Subtrahierens durch Einbeziehen von Gleichungen und Ungleichungen

4. Stunde
- Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben

Methodische Hinweise

Üben des Addierens und Subtrahierens gemeiner Brüche Zur Sicherung des Ausgangsniveaus kann das Umwandeln gemischter Zahlen in gemeine Brüche und umgekehrt geübt werden. Danach läßt man die folgenden Summen bzw. Differenzen berechnen:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1\frac{1}{2}$ **c)** $5\frac{1}{4} - \frac{7}{3} + \frac{5}{4}$ **e)** $\frac{11}{3} - \left(1\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)$

b) $\frac{3}{4} + 1\frac{1}{5} + \frac{1}{2}$ **d)** $5 - \left(2 - 1\frac{5}{6}\right)$ **f)** $\frac{8}{3} - \left(2\frac{1}{2} + \frac{4}{5}\right)$

Bei d) bis f) wird erneut die Priorität der Klammern bewußtgemacht. Die Lösung sollte möglichst fortlaufend, also ohne Nebenrechnung und das Ergebnis im Interesse der Entwicklung von Größenvorstellungen als gemischte Zahl aufgeschrieben werden (z. B.): **e)** $\frac{11}{3} - \left(1\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{11}{3} - \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{11}{3} - \frac{9-4}{6} = \frac{11}{3} - \frac{5}{6}$

$$= \frac{22-5}{6} = \frac{17}{6} = 2\frac{5}{6}$$

In der Auswertung sollte auch zu einem kritischen Werten der Größenordnung falscher Ergebnisse angeregt werden, obgleich konsequente vorherige Überschläge wie beim Multiplizieren und Dividieren nicht anzustreben sind. Dadurch werden die Größenvorstellungen der Schüler weiter ausgeprägt. Bei einigen Aufgaben wird man das Ergebnis vor dem Rechnen mündlich abschätzen lassen; bei c könnte z. B. überlegt werden: $\frac{7}{3}$ bzw. $\frac{5}{4}$ liegen „nahe" bei 2 bzw. 1, das Ergebnis wird also nahe bei $5 - 2 + 1 = 4$ liegen. Den Schülern soll bewußtwerden, daß man dadurch grobe Rechenfehler vermeiden und nicht lösbare Aufgaben (wie f) rechtzeitig erkennen kann. Man kann vor dem Rechnen aber auch fragen, ob das Ergebnis größer oder kleiner als eine bestimmte Zahl ist, z. B.: „Ist die Summe bei b größer oder kleiner als 2?"

Zum weiteren Üben können die aus Klasse 4 und 5 bekannten magischen Quadrate verwendet werden. Erinnern sich die Schüler nicht mehr daran, sollten sie zuvor in ein Quadrat die natürlichen Zahlen von 1 bis 9 (Summe 15) eintragen. Beim Ausfüllen einiger Quadrate der Aufgaben 10 und 11 kann man bereits Gleichungen aufschreiben lassen; einfacher aber ist es, die Summe gegebener Zahlen zu bilden und (mdl.) zu 3 bzw. 1 zu ergänzen.

Zum Üben des Umwandelns gemeiner Brüche in Dezimalbrüche und umgekehrt können Auftrag B 16 und Aufgabe 1 a genutzt werden. (Vgl. hierzu auch LE 2.) Durch das Einbeziehen von $\frac{5}{6}$ (Aufg. 1 a) soll deutlich werden, daß nicht jeder gemeine Bruch in einen Dezimalbruch umgewandelt werden kann. In der Auswertung kann man dies anhand des Beispiels $\frac{1}{3}$ auch plausibel machen: Jede Zehnerpotenz ist Nachfolger einer Zahl mit „lauter Neunen"; da diese Zahl stets durch 3 teilbar ist, ist es der Nachfolger nicht; also kann $\frac{1}{3}$ nicht zu einem Zehnerbruch erweitert und in einen Dezimalbruch umgewandelt werden. Besser, wenn auch schwieriger, ist eine allgemeinere Begründung wie: Da 3 nicht in der Primfaktorenzerlegung von 10 enthalten ist, ist keine Zehnerpotenz Vielfaches von 3. An diesen Beispielen kann erläutert werden, daß sich nur diejenigen *nicht kürzbaren* gemeinen Brüche in Dezimalbrüche umwandeln lassen, deren Nenner außer 2 oder 5 keine weiteren Primfaktoren enthalten.
Ferner sollte in der Auswertung bewußtwerden, daß es nützlich ist,

- sich die Dezimalbrüche zu $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}$ zu merken, da man aus ihnen durch Vervielfachen schnell Dezimalbrüche zu z. B. $\frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}$ erhalten kann (dient zugleich der Vorbereitung bequemer Prozentsätze),
- gemischte Zahlen sofort in Dezimalbrüche und nicht erst in gemeine Brüche umzuwandeln.

Beim Lösen der Aufgaben 2a, f, g (mdl.) wird auch das Ordnen gebrochener Zahlen weiter gefestigt.

Üben des Addierens und Subtrahierens von gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen
Die Schüler sollen erneut erkennen, daß es (wenn auch nicht in jedem Fall) zwei Be-

rechnungsmöglichkeiten gibt; ferner sind sie zu befähigen, sich in Abhängigkeit von der jeweiligen Aufgabe für den rationellsten Weg zu entscheiden. Dafür können die beiden Beispiele aus dem Lehrbuch (LB 50) verwendet werden. Die Möglichkeiten mit ihren Vor- und Nachteilen sollten im Gespräch diskutiert, die Ergebnisse dagegen selbständig berechnet werden. Als grobe Orientierung ist geeignet: Sind mehr gemeine als Dezimalbrüche vorhanden, ist das Rechnen mit gemeinen Brüchen oft vorteilhafter; sonst wird man mit Dezimalbrüchen arbeiten, sofern das Umwandeln möglich ist. Für weiteres Üben kann Auftrag B 18 (SSA) eingesetzt werden. Dabei wird deutlich, daß die obige Orientierung keine Handlungsanweisung zum Feststellen des rationellsten Weges ist. Bei b ist es z. B. trotz der Überzahl gemeiner Brüche sinnvoller, entweder nur mit Dezimalbrüchen oder „gemischt“ zu arbeiten:

$$38{,}5 - 7\frac{1}{2} = 38{,}5 - 7{,}5 = 31; \quad \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{6}{8} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}; \quad \text{also: } 31\frac{5}{8}.$$

Beim späteren Üben sollte zwar jeweils zur Wahl des bequemsten Weges angehalten, ein Reglementieren aber vermieden werden.

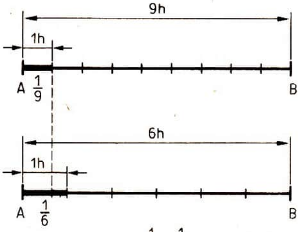
Vertiefen des Addierens und Subtrahierens durch Einbeziehen von Gleichungen und Ungleichungen Zum Vergleichen von Summen oder Differenzen mit gegebenen Zahlen wird Aufgabe 14a bis d empfohlen (SSA). Bei größeren Schwierigkeiten sollte individuelle Hilfe oder Partnerlernen organisiert werden. Während die Schüler bei den Aufgaben a, c und d die Frage nicht ohne Rechnen beantworten können, sollten sie die „Wahrheit“ bei Aufgabe b (möglichst von selbst) durch Abschätzen feststellen, z. B.: $0{,}25 = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$, also: $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} < 1$, erst recht $\frac{2}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} < 1$. Für das Lösen von Gleichungen werden die Aufgaben 7a, b, c, i vorgeschlagen. Man wird darauf orientieren, daß man diese Gleichungen auf Gleichungen des Typs $x \pm a = b$ oder $a - x = b$ zurückführt und sie danach in bekannter Weise inhaltlich löst.

Entsprechend können auch Ungleichungen einbezogen werden. Dabei muß eine Abstufung des Anforderungsniveaus vorgenommen werden, wie sie in Aufgabe 15 zum Ausdruck kommt (SSA). Diese Aufgabe kann differenziert bearbeitet werden; Abteilung 1: Aufg. 15a, Abteilung 2: a und b, Abteilung 3: b und c.

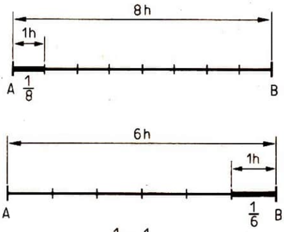
Zur Sicherung des Ausgangsniveaus kann man zuvor das inhaltliche Lösen von Ungleichungen wie $x + 7 < 12$, $x - 5 < 8$, $9 - x < 5$ reaktivieren.

Zum **Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben** kann man unter den Aufgaben 16 bis 24 wählen. Welche der genannten Aufgaben für vorwiegend selbständiges Lösen genutzt werden, wird vom erreichten Niveau der Rechenfertigkeiten und Fähigkeiten im Lösen solcher Aufgaben sowie von örtlichen Gegebenheiten abhängen. Dabei muß das selbständige Finden eines Lösungsansatzes und das Befähigen dazu Vorrang vor dem Rechnen haben. Dafür sollten vor allem Skizzen eine Hilfe sein. Zum Lösen der Aufgaben 18 und 19 könnten z. B. die Skizzen (Bilder 15 und 16, S. 72) erarbeitet werden.

Im Zusammenhang mit dem Lösen solcher Aufgaben sollen die Schüler erneut an das Rechnen mit Näherungswerten herangeführt werden, ohne daß dafür bereits Regeln eine Rolle spielen. Vielmehr soll durch geeignete Beispiele ein „Gefühl“ für unangebrachte, übertriebene, nicht gerechtfertigte Genauigkeit beim Angeben von Ergebnissen entwickelt werden, die sich beim Rechnen mit Meßwerten unterschiedlicher Genauigkeit ergeben. (Geeignet ist hierfür auch die scherzhafte Aufgabe 25.) Zum Verdeutlichen der Problematik wird man die Aufgaben aus den Beispielen B 18 und B 19 nutzen (SSA). In der Auswertung sollten die von Schülern mit unterschiedlicher Genauigkeit angegebenen Ergebnisse gegenübergestellt werden; die Schüler müssen



$\frac{1}{6}-\frac{1}{9}$ **Bild 15**



$\frac{1}{8}+\frac{1}{6}$ **Bild 16**

erkennen, daß der Meßwert mit der „geringsten Genauigkeit“ die Genauigkeit des Endergebnisses bestimmt und daher ein entsprechendes Runden des errechneten Wertes notwendig ist. Durch Beispiel B 19 wird außerdem deutlich, daß man nicht immer entsprechend den Rundungsregeln, sondern (vor allem bei Materialberechnungen) nach praktischen Gesichtspunkten rundet.

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 3d, e; 5f **2.** Aufg. 7d **3.** Aufg. 21

Zusammenfassung (1 Std.)

(LB 54 bis 55)

Durch Wiederholen, Vertiefen und Systematisieren, verbunden mit entsprechendem Üben, sollen Dauerhaftigkeit und Anwendungsbereitschaft des Wissens und Könnens erhöht werden. Dadurch wird zugleich die nachfolgende Klassenarbeit vorbereitet.

Ziele

Die Schüler
- können gebrochene Zahlen in verschiedenen Darstellungen sicher vergleichen, ordnen, addieren und subtrahieren,
- haben erneut Gemeinsamkeiten und Zusammenhänge bei Ordnung, Addition und Subtraktion erkannt und können allgemeine Kenntnisse auf Spezialfälle anwenden.

Schwerpunkt

- Vertiefen und Systematisieren des Wissens und Könnens zum Ordnen, Addieren und Subtrahieren gebrochener Zahlen

Methodische Hinweise

Zum **Vertiefen und Systematisieren ...** wird das schrittweise Ausfüllen der folgenden Tabelle empfohlen:

	x	y	u	v	$x + y$	$x - y$	$u + v$	$u - v$
gemeiner Bruch			$\frac{7}{2}$					
gemischte Zahl	$3\frac{2}{5}$			$1\frac{2}{3}$				
Dezimalbruch		2,25						

In der ersten Phase sollten die vier Spalten rechts verdeckt sein und die Schüler die anderen Darstellungen für x im Gespräch, für y, u und v selbständig ermitteln. (In die letzte Zeile sollten sie für v einen Strich oder n. l. eintragen.) In der zweiten Phase werden die Summen und Differenzen ermittelt. Die Darstellung, in der die Schüler rechnen, sollten sie selbst wählen; die anderen Darstellungen der Summen und Differenzen werden durch Umrechnen gewonnen. Es sollte möglichst viel im Kopf gerechnet werden. (In die letzte Zeile wird für $u + v$ und $u - v$ wieder ein Strich oder n. l. eingetragen.) Um erneut das unterschiedliche Vorgehen bewußtzumachen, werden die Schüler abschließend aufgefordert, die Teile I, II und III der Zusammenfassung (LB 54f.) zu lesen und zu erläutern. Die obige Tabelle kann man auch zum Wiederholen des Ordnens nutzen, indem die Schüler x, y, u, v (bei selbst gewählter Darstellung) ordnen. Hierzu formulieren die Schüler selbst eine entsprechende Zusammenfassung. Im Interesse einer Systematisierung der Kenntnisse kann auch die für LE 2, 5 und 6 vorgeschlagene Folie zum erneuten Bewußtmachen von Gemeinsamkeiten bei der Ordnung, der Addition und der Subtraktion eingesetzt werden.

Für weitere selbständige Schülerarbeit wird Aufgabe 26 (LB 54) empfohlen. Bereits vor dem Rechnen sollten folgende Fragen von den Schülern überdacht werden:

- Muß in jeder Zeile „n. l.“ stehen?
- Wieviel Rechnungen sind in jeder Zeile auszuführen?

Zum Begründen müssen sie allgemeine Kenntnisse über die Addition und Subtraktion (Kommutativität, Ausführbarkeit) spezialisieren. Bei dem anschließenden Rechnen wird erneut deutlich, daß die beiden Rechenoperationen zueinander Umkehroperationen sind. Zusätzlich kann Aufgabe 27* (LB 54) gestellt werden.

Kontrollaufgaben
Aufgaben aus Teil I, II, III der Zusammenfassung (LB 54f.)

Stoffabschnitt 2.3.

Multiplikation und Division gebrochener Zahlen (20 Std.)

Multiplikation gebrochener Zahlen (3 Std.)

LE 9 (LB 55 bis 59)

Die Multiplikation gebrochener Zahlen ist für viele Schüler schwerer vorstellbar als Addition und Subtraktion. Daher kommt der Motivierung beim Erarbeiten besondere Beachtung zu. Die sich dabei bietenden Möglichkeiten für die mathematische und weltanschauliche Bildung und Erziehung sollten bewußt genutzt werden. Die Schüler sollten erkennen, daß mathematische Begriffsbildungen durch praktische Probleme stimuliert werden und deren Lösung dienen und daß diese nicht willkürlich erfolgen können, sondern sich praktischen und mathematischen Bedingungen unterordnen müssen.

Ziele

Die Schüler
- können zwei als gemeine Brüche oder gemischte Zahlen gegebene gebrochene Zahlen multiplizieren und ihr Vorgehen beschreiben,
- wissen, daß das Produkt gebrochener Zahlen unabhängig von deren Darstellung ist und auch kleiner sein kann als jeder Faktor,
- wissen, daß die Multiplikation stets ausführbar ist,
- wissen, daß „$\frac{a}{b}$ von c" dasselbe bedeutet wie „$\frac{a}{b} \cdot c$".

Schwerpunkte

1. Stunde
- Motivieren und Erarbeiten der Multiplikation gebrochener Zahlen, die als gemeine Brüche gegeben sind

2. Stunde
- Üben im Multiplizieren zweier gemeiner Brüche
- Erarbeiten der Bedeutung von „$\frac{a}{b}$ von c"

3. Stunde
- Vertiefen der Multiplikation gebrochener Zahlen

Methodische Hinweise

Motivieren und Erarbeiten der Multiplikation . . . Zum Sichern des Ausgangsniveaus wird das Multiplizieren natürlicher Zahlen (mdl., Grundaufgaben) bei Einbeziehen der Faktoren 0 und 1 geübt. Dabei sollte die eindeutige Ausführbarkeit bewußt werden und ferner, daß stets $0 \cdot a = 0$, $1 \cdot a = a$ und sonst das Produkt stets größer als jeder Faktor ist. Zusammenfassend ergibt sich das folgende *Tafelbild*:

$a \cdot b$	$b = 0$	$b = 1$	sonst
in N	$a \cdot 0 = 0$	$a \cdot 1 = a$	$a \cdot b > a$ $a \cdot b > b$

Es gibt verschiedene Möglichkeiten zum Motivieren und Erarbeiten, je nachdem, ob an das bekannte Multiplizieren von Dezimalbrüchen angeknüpft wird oder nicht. Es ist aber möglich, Teile eines Weges auch beim anderen zu nutzen.

Variante 1: (a) *Motivierung anhand eines praktischen Beispiels*
Anknüpfend an ein Beispiel aus dem Physik-Lehrbuch für Klasse 6 (S. 27, oben) wird als Problem formuliert:

Welchen Weg legt eine Pioniergruppe zurück, wenn sie $3\frac{1}{2}$ Stunden mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $4\frac{1}{2}\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ wandert?

Es führt auf die noch nicht erklärte Multiplikation von $3\frac{1}{2}$ und $4\frac{1}{2}$. Dies wird durch vorheriges Beantworten analoger Fragen für 3 h und $4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ (vgl. Physik-LB) sowie 4 h und $5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ nahegelegt. Dadurch wird auch deutlich, daß das Produkt zwischen $3 \cdot 4 = 12$ und $4 \cdot 5 = 20$ liegen muß.

Tafelbild:

Zeit in h	**Geschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$**	**Weg in km**	
3	4	$12 = 3 \cdot 4$	
4	5	$20 = 4 \cdot 5$	
$3\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	$\boxed{x = 3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{1}{2}}$	← noch nicht erklärt
		$12 < x < 20$	

Die Schüler wissen, daß die gebrochene Zahl $\frac{n}{1}$ beim Ordnen, Addieren und Subtrahieren durch die natürliche Zahl n ersetzt werden kann und umgekehrt. Es liegt nahe, dies auch für die Multiplikation zu fordern. Wegen $5 \cdot 4 = 20$ müßte $\frac{5}{1} \cdot \frac{4}{1} = \frac{20}{1}$ gelten. Man läßt nun eine Regel für das Multiplizieren vermuten. Kommt der Vorschlag, die Zähler zu multiplizieren und die Nenner beizubehalten, wird dessen Unbrauchbarkeit verdeutlicht: Einige Schüler berechnen nach der vermuteten Regel $3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{1}{2}$ und erhalten $\frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2} = \frac{63}{2} = 31\frac{1}{2}$ (Widerspruch zu $12 < x < 20$); die übrigen ermitteln entsprechend für andere gleichnamige Darstellungen zu $\frac{5}{1}$ und $\frac{4}{1}$ die Produkte $\left(\text{z. B. } \frac{10}{2} \cdot \frac{8}{2} = \frac{80}{2} = 40,\ \frac{15}{3} \cdot \frac{12}{3} = \frac{180}{3} = 60\right)$ und sehen, daß die Produkte verschieden und abhängig von der jeweiligen Darstellung sind. Durch Orientieren auf das bekannte Ergebnis 20 erkennen die Schüler die Notwendigkeit des Multiplizierens der Nenner. Danach wird $3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{1}{2}$ berechnet (SSA) und deutlich gemacht, daß das Produkt $15\frac{3}{4}$ zwischen 12 und 20 liegt. Abschließend wird Definition B 9 formuliert und durch Berechnen einfacher, nicht kürzbarer Produkte gefestigt, z. B.: $\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15}$.

(b) *Motivierung anhand eines innermathematischen Sachverhalts* (LB 55f.)
Man läßt den Flächeninhalt von Rechtecken mit natürlichen Zahlen als Seitenlängen ermitteln und gibt danach gebrochene Zahlen für die Seitenlängen vor.

Tafelbild:

a in m	b in m	A in m²
3	5	$15 = 3 \cdot 5$
6	7	$42 = 6 \cdot 7$
1	1	$1 = 1 \cdot 1$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$y = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$

Die Schüler müssen dabei erkennen: Soll der Flächeninhalt auch bei gebrochenen Zahlenwerten mit Hilfe von $A = a \cdot b$ berechnet werden können, muß die Multiplikation so festgelegt werden, daß z. B. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$ die Zahlenwerte der Flächeninhalte entsprechender Rechtecke ergeben. Zur Problemlösung können die Bilder B 20 und 21 (LB 56) genutzt werden. Die Schüler erkennen daran, daß $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ und $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$ sein müßte. Hieraus läßt sich Definition B 9 vermuten. Danach wird durch Beispiele verdeutlicht, daß die so definierte Multiplikation in Einklang steht mit der natürlicher Zahlen und unabhängig ist von der Darstellung der gebrochenen Zahlen. (Erstfestigung wie bei Variante 1 (a).)

Der Weg (b) ist einfacher und kürzer als (a), weist aber geringere Potenzen für die mathematische und weltanschauliche Bildung und Erziehung auf.

Variante 2: Die Motivation erfolgt praktisch oder innermathematisch wie bei 1. Die Schüler werden an das Multiplizieren von Dezimalbrüchen erinnert und berechnen $0{,}75 \cdot 2{,}5$ (SSA). Danach sollen sie die Faktoren und das Produkt als gemeine Brüche angeben und überlegen, wie man mit ihnen hätte rechnen müssen.

Tafelbild:

$$\begin{array}{r} \underline{0{,}75 \cdot 2{,}5} \\ 150 \\ \underline{\quad 375} \\ 1{,}875 \end{array} \qquad \frac{75}{100} \cdot \frac{25}{10} = \frac{1875}{1000} \qquad \text{gekürzt: } \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$$

Hieraus läßt sich leicht die Definition B 9 vermuten.
(Erstfestigung wie bei 1 (a).)

Üben im Multiplizieren zweier gemeiner Brüche Bei der Aufgabenauswahl ist folgende Abstufung des Schwierigkeitsgrades zu bedenken:

	Faktoren	Produkt	Zahlenmaterial
a	nicht kürzbar	nicht kürzbar	im Rahmen der Grundaufgaben der Multiplikation
b	nicht kürzbar	kürzbar	
c	nicht kürzbar	kürzbar	nicht im Rahmen der Grundaufgaben der Multiplikation
d	kürzbar	kürzbar	

Aufgaben vom Typ **a** sollten z. T. mündlich gelöst werden. Vor allem für Aufgaben vom Typ **b** und **c** ist es angebracht, verschiedene Möglichkeiten des Kürzens und des Aufschreibens zu erläutern und gegenüberzustellen:

(1) $\frac{15}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{15 \cdot 2}{4 \cdot 5} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$

(3) $\frac{15}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{{}^{3}\cancel{15} \cdot \cancel{2}^{1}}{{}_{2}\cancel{4} \cdot \cancel{5}_{1}} = \frac{3}{2}$

(2) $\frac{15}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{{}^{3}\cancel{15} \cdot \cancel{2}^{1}}{{}_{2}\cancel{4} \cdot \cancel{5}_{1}} = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$

$\left((4)\ \frac{{}^{3}\cancel{15}}{{}_{2}\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{5}_{1}} = \frac{3}{2} \right)$

Das Durchstreichen und Danebenschreiben von Zahlen im Zähler und Nenner sollten erlaubt werden, damit erkennbar ist, „was womit" gekürzt wurde; bei mehrfachem Kürzen werden wegen der Unübersichtlichkeit Zwischenergebnisse fixiert. Es sollte bewußt werden, daß durch möglichst frühzeitiges Kürzen ein Arbeiten mit großen Zahlen vermieden wird. Anzustreben ist ein Vorgehen entsprechend (3); bei Schülern mit sicheren Rechenfertigkeiten kann auch (4) toleriert werden. Zum Üben kann unter den Aufgaben 1 bis 3 ausgewählt werden.

Anhand einiger Beispiele sollte man (auch bei Variante 1 (a)) auf die Multiplikation gemischter Zahlen eingehen und verdeutlichen, daß im Gegensatz zur Addition die Zahlen vor dem Rechnen in Brüche umzuwandeln sind (Beispiel B 20b). Zum Üben (SSA) eignet sich Aufgabe 2g und k.

Das Multiplizieren gebrochener mit natürlichen Zahlen sollte speziell geübt werden. Dabei wird auf das im Beispiel B 21 erkennbare Vorgehen (links) als Normalverfahren orientiert, da es auch bei der Division nützlich ist. Es ist aber auch auf das in diesem Beispiel rechts angedeutete rationellere Vorgehen hinzuweisen und für einige Schüler sogar anzustreben. Zum Üben können die Aufgaben aus Beispiel B 21 genutzt werden; die Ergebnisse werden danach mit dem Lehrbuch verglichen.

Erarbeiten der Bedeutung von „$\frac{a}{b}$ von c" Die Bedeutung dieser historisch gewachsenen Sprechweise als $\frac{a}{b} \cdot c$ ist für Schüler nicht selbstverständlich. Daher muß ausdrücklich auf diese Sprechweise eingegangen werden.

Hinweis: Oft finden die Schüler bei Anwendungsaufgaben intuitiv die „richtige" Rechenoperation, weil sie unbewußt die komplizierten Zahlen ignorieren, an gerundete natürliche Zahlen denken und daran die Zusammenhänge erkennen. Dies hilft ihnen jedoch hier nicht: Man sagt z. B. „$\frac{3}{4}$ von 7,2 km", nicht aber „0,75 von 7,2 km" oder gar „4 von 7,2 km".

Diesem Anliegen dient Auftrag B 23. Beim Ermitteln von z. B. „$\frac{1}{4}$ $\left(\text{bzw. } \frac{3}{4}\right)$ von $\frac{8}{7}$“ stützt man sich auf die naive Bruchvorstellung, daß dies „der vierte Teil von $\frac{8}{7}$“, also $\frac{2}{7}$ bzw. „das Dreifache des vierten Teils von $\frac{8}{7}$“, also $\frac{6}{7}$ bedeutet. Der Zusammenhang zwischen „$\frac{a}{b}$ von c“ und „$\frac{a}{b} \cdot c$“ wird durch Verallgemeinern erkannt. Eine befriedigende Erklärung ist erst nach der Behandlung der Division möglich. Zum Festigen wird Aufgabe 16c bis f empfohlen. (Zusatzaufgaben: 17, 18)

Das **Vertiefen der Multiplikation gebrochener Zahlen** dient vor allem dem Erkennen von Gesetzmäßigkeiten. Anknüpfend an die Übersicht (S. 75) sollen die Schüler überlegen, ob diese Eigenschaften auch für gebrochene Zahlen gelten. Anhand einiger von Schülern genannter Beispiele, die gegebenenfalls so ergänzt werden, daß jeder der Fälle
(1) $a \cdot 0$, (2) $a \cdot 1$, (3) $a > 1$, $b > 1$, (4) $0 < a < 1$, $0 < b < 1$,
(5) $0 < a < 1$, $b > 1$, bzw. $a > 1$, $0 < b < 1$
unter den Produkten vorkommt, sehen sie, daß $a \cdot b$ größer oder kleiner als a und b sein kann, also die Überschrift „sonst“ zu präzisieren ist. Durch Vergleich von Produkten des Typs (3) und (4) erkennen die Schüler, daß $a \cdot b$ größer bzw. kleiner als a und b ist, wenn a und b größer bzw. kleiner als 1 sind. Für die übrigen Produkte ergibt der Vergleich mit ihren Faktoren, daß sie zwischen den Faktoren liegen. Diese Einsichten faßt man in folgendem *Tafelbild* zusammen:

$a \cdot b$	$b = 0$	$b = 1$	$a > 1$ $b > 1$	$0 < a < 1$ $0 < b < 1$	sonst
in N	$a \cdot 0 = 0$	$a \cdot 1 = a$	$a \cdot b > a$ und $a \cdot b > b$		
in Q_+				$a \cdot b < a$ und $a \cdot b < b$	$a < a \cdot b < b$ oder $b < a \cdot b < a$

Es muß deutlich werden, daß hier eine vollständige Fallunterscheidung vorliegt und man diese Erkenntnisse zur Kontrolle von Rechenergebnissen nutzen kann.

Diese Gesetzmäßigkeiten können auch durch Aufgabe 5 (SSA) erarbeitet werden. Zum weiteren Vertiefen werden Gleichungen und Ungleichungen einbezogen: Aufgaben 9, 11, 13a bis d (alle mdl.), 4a, 12a. Die Nichtlösbarkeit bei 9b sollte begründet werden. Aufgabe 13 dient der Vorbereitung der Division. Eventuell kann hier schon „Reziprokes einer gebrochenen Zahl“ eingeführt und geübt werden (vgl. S. 86). Die Zahlen sollten durch Nutzen der Grundaufgaben der Multiplikation und des Wissens und Könnens im Multiplizieren gebrochener Zahlen, aber auch durch Probieren gefunden werden. Beim Arbeiten mit Ungleichungen wird wie in LE 8 auf entsprechende Gleichungen orientiert. Die Lösungen können am Zahlenstrahl veranschaulicht werden.

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 3m, n **2.** Aufg. 6a **3.** Aufg. 16h **4.** Aufg. 10

Multiplikation gebrochener Zahlen in Dezimalbruchdarstellung (3 Std.)

LE 10 (LB 59 bis 61)

Ziele

Die Schüler
- können Dezimalbrüche sicher multiplizieren,
- können den Zusammenhang zwischen der Multiplikation von Dezimalbrüchen und der gemeiner Brüche erläutern,
- können Produkte von Dezimalbrüchen überschlagen,
- können Produkte von Näherungswerten sinnvoll runden.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Wiederholen, Üben und Vertiefen der Multiplikation von Dezimalbrüchen

2. Stunde
- Weiteres Üben des Multiplizierens von Dezimalbrüchen

3. Stunde
- Erarbeiten von Näherungswerten für Produkte von Näherungswerten

Methodische Hinweise

Wiederholen, Üben und Vertiefen der Multiplikation von Dezimalbrüchen In Abhängigkeit von der Klassensituation wird neben dem Umwandeln von Dezimalbrüchen in gemeine Brüche und umgekehrt das Multiplizieren von Dezimalbrüchen mit Zehnerpotenzen (Aufg. 4) wiederholt.

Das weitere Vorgehen hängt davon ab, ob in LE 9 die Definition B 9 durch Verallgemeinern des Multiplizierens von Dezimalbrüchen gewonnen wurde oder nicht. In jedem Fall kann zur Motivierung und Zielorientierung Auftrag B 24 genutzt werden. Dabei wird wiederholt, daß man Dezimalbrüche multipliziert, indem man
- das Produkt der entsprechenden natürlichen Zahlen ermittelt,
- in diesem Produkt so viele Stellen (von rechts nach links) durch ein Komma trennt, wie die Faktoren zusammen Stellen nach dem Komma haben.

Zugleich wird auch auf den Überschlag orientiert. Zum weiteren Üben lösen die Schüler die Aufgabe aus Beispiel B 22 (SSA) und vergleichen danach die Lösung mit dem Lehrbuch. Um Mißverständnissen im Handhaben der Regel vorzubeugen, ist auch eine Aufgabe zu stellen, bei der sich „hinten“ Nullen ergeben. (Beispiel: „Ralf rechnet $2{,}25 \cdot 5{,}04$. Sein Ergebnis lautet 11,34. Stimmt es, obwohl zwei und nicht vier Stellen nach dem Komma stehen?“)

Wurde in LE 9 die Multiplikation von Dezimalbrüchen nicht berührt, wird deutlich gemacht, daß wir nun eine Multiplikation von Dezimalbrüchen und eine gemeiner Brüche kennen. Als Ziel wird gestellt, einen Zusammenhang zwischen beiden herzustellen, ihre „Verträglichkeit“ nachzuweisen. Die Schüler sollten weitestgehend selbständig anhand eines Beispiels (z. B. der Faktoren und des Produkts aus Beispiel B 22) erkennen, daß das Verfahren zum Multiplizieren von Dezimalbrüchen durch Definition B 9 gerechtfertigt und damit begründet werden kann, also nur ein Spezialfall der Multiplikation gebrochener Zahlen ist.

Wurde in LE 9 von Dezimalbrüchen ausgegangen, so genügt es, den Zusammenhang anhand eines Beispiels kurz bewußtzumachen.

Zum Üben werden die Aufgaben 1 (mdl.) und 6a bis c empfohlen. Dabei ist darauf zu achten, daß die Schüler das Komma nicht nur formal durch „Abzählen der Dezimalstellen" setzen; sie müssen auch erfassen, daß z. B. „Zehntel mal Hundertstel" auf Tausendstel führt. Bei schriftlichem Arbeiten sollte auf den Überschlag als Mittel zur *Kontrolle* geachtet werden. Dabei sollten die Schüler erkennen, daß man dadurch auch ohne Stellenzählen das Komma richtig setzen kann. Der Lehrer wird darauf orientieren, jeden Faktor durch das nächstgelegene Ein- bis Neunfache einer Zehnerpotenz bzw. von 0,1; 0,01 usw. zu ersetzen, so daß der dadurch entstandene Dezimalbruch nur eine von 0 verschiedene Ziffer enthält. (Man ändert also so, daß man beim Überschlag im Rahmen der Grundaufgaben rechnet.) Dies sollte nicht durch Theoretisieren, sondern an Beispielen deutlich werden. Zum Üben im Überschlagen läßt sich Aufgabe 3 (SSA) nutzen. Die Faktoren wird man nicht immer den Rundungsregeln entsprechend verändern, sondern bei einigen Aufgaben auch einen Faktor verkleinern, den anderen vergrößern, um so den Fehler beim Überschlag möglichst gering zu halten.

Zum **weiteren Üben des Multiplizierens und Überschlagens** stehen die übrigen Teile der Aufgabe 6 (SSA) zur Verfügung. Auf keinen Fall sollte auf d und i verzichtet werden, da bei diesen Produkten ein Hinzufügen von Nullen erforderlich ist, um die richtige Anzahl von Dezimalstellen zu erhalten. Danach kann das Multiplizieren von Dezimalbrüchen anhand selbst gewählter Aufgaben (entsprechend der Klassensituation) weiter geübt werden (mdl., schriftl.).

Für eine vielfältige, abwechslungsreiche Gestaltung des Übens lassen sich aber auch die Aufgaben 5 und 7a bis c gut nutzen. Bei Aufgabe 5 sollten die Schüler auf Grund eines Überschlags (b, e), falscher Endziffer (d) oder auf Grund nicht möglicher Dezimalstellenanzahlen nach dem Komma (c, e) entscheiden. Bei Aufgabe 7 können sie die Wahrheit der Aussage b nur durch Rechnen feststellen; bei a und c dagegen sollten sie das weitgehend ohne Rechnen erkennen:

7. a) $27{,}9 \cdot 0{,}028 < 30 \cdot 0{,}03 = 0{,}9 < 1$ **c)** $0{,}052 \cdot 6{,}74 < 0{,}06 \cdot 7 = 0{,}42 < 1$
$0{,}073 \cdot 230{,}8 > 0{,}07 \cdot 200 = 1{,}4 > 1$

Gegebenenfalls kann man auch einfache Gleichungen wie $0{,}2 \cdot x = 1{,}2$; $0{,}7 \cdot x = 0{,}28$; $0{,}4 \cdot x = 0{,}2$ lösen oder ein Rechenschema (vgl. nebenstehendes Beispiel, * ist jeweils durch eine Ziffer zu ersetzen; seit Klasse 4 bekannt) vervollständigen lassen.

$$\begin{array}{r} 5{,}2 \cdot {**} \\ \hline {**} \\ {**} \\ \hline {*}{,}{**} \end{array}$$

Erarbeiten von Näherungswerten für Produkte von Näherungswerten In der täglichen Übung sollte das Runden von Dezimalbrüchen entsprechend den Rundungsregeln für natürliche Zahlen (vgl. Lehrbuch für Klasse 4, S. 57ff.) durch Aufgaben folgender Art geübt werden:

1. Runde 7,35; 7,25; 7,34; 7,249; 7,349 auf eine Stelle nach dem Komma!

2. a) Gib alle Dezimalbrüche mit zwei Dezimalstellen nach dem Komma an, die bei richtigem Runden auf 2,4 führen!

b) Gib von diesen Dezimalbrüchen den kleinsten und größten an!

Anhand der 2. Aufgabe läßt sich auch das Schreiben in Form von Ungleichungen wie $x \leqq 2{,}4 \leqq y$ und $2{,}35 \leqq 2{,}4 \leqq 2{,}44$ (oder $2{,}35 \leqq 2{,}4 < 2{,}45$) reaktivieren.

Das Ziel dieses Schwerpunkts besteht darin, das Gefühl der Schüler für übertriebene Genauigkeit beim Angeben von Ergebnissen zu stärken, die sich beim Multiplizieren von Meßwerten ergeben. Zum Bewußtmachen des Problems kann die Aufgabe aus dem Lehrbuch (LB 59f.) von den Schülern selbständig gelöst werden. Danach werden die nicht oder unterschiedlich gerundeten Flächeninhalte einander gegenübergestellt und nach einem „sinnvoll genauen" Ergebnis gefragt. Viele Schüler halten gewiß schon gefühlsmäßig 15,84 m^2 für übertrieben genau, da 6 dm^2 und selbst 16 dm^2 bei einer Fläche von rund 16 m^2 (also der eines Quadrats mit der Seitenlänge 4 m) bedeutungslos sind, und schlagen 15,8 m^2 oder 16 m^2 als „sinnvoll genaues" Ergebnis vor. Damit sie sich auch rational für 16 m^2 entscheiden, sollte sich ein Rechnen mit Werteschranken anschließen. Die Dezimalbrüche, die durch Runden auf die Meßwerte 4,4 m und 3,6 m führen, werden wie in der täglichen Übung ermittelt. Ein Aufschreiben durch Ungleichungen ist möglich, aber nicht notwendig. Man kann sich mit verbalen Beschreibungen wie „... liegt zwischen ... und ..." begnügen.

Zum Festigen werden die Aufgaben 10 und 11 empfohlen.

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 6f, k, i **2.** Aufg. 3c **3.** Aufg. 9

Eigenschaften der Multiplikation gebrochener Zahlen (4 Std.)

LE 11 (LB 61 bis 64)

Ziele

Die Schüler
- können das Kommutativ- und das Assoziativgesetz der Multiplikation sowie das Distributivgesetz formulieren und kennen die Namen der Gesetze,
- können diese Gesetze für ein rationelles Rechnen nutzen,
- können Produkte aus drei gebrochenen Zahlen berechnen,
- können Aufgaben mit mehreren Rechenoperationen sicher lösen,
- haben Gemeinsamkeiten und Unterschiede bei Addition und Multiplikation erkannt.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeiten und Begründen des Kommutativ- und des Assoziativgesetzes
- Üben im Multiplizieren dreier gebrochener Zahlen

2. Stunde
- Erarbeiten des Distributivgesetzes
- Festigen des Distributivgesetzes

3. Stunde
- Üben im rationellen Rechnen bei Nutzung der Gesetze
- Vertiefen der Gesetzmäßigkeiten der Multiplikation

4. Stunde
- Üben im vermischten Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren
- Systematisieren des Wissens zum Addieren und Multiplizieren

Methodische Hinweise

Erarbeiten und Begründen des Kommutativ- und des Assoziativgesetzes Zunächst werden diese Gesetze für natürliche Zahlen reaktiviert, indem die Schüler Produkte wie $17 \cdot 2 \cdot 50$; $25 \cdot 13 \cdot 4$; $14 \cdot 8 \cdot 5$; $5 \cdot 7 \cdot 18$ möglichst vorteilhaft berechnen (SSA) und ihren Rechenweg erläutern und begründen. Es sollte deutlich werden, daß man zum rationellen Rechnen beim ersten Produkt das Assoziativgesetz, sonst beide Gesetze ausnutzt. Anschließend werden die Gesetze mit Hilfe von Variablen an die Tafel geschrieben und wie in LE 7 von den Schülern mit eigenen Worten ohne Verwendung von Variablen wiedergegeben.

Die Frage nach der Gültigkeit entsprechender Gesetze für gebrochene Zahlen läßt sich hieran zwanglos anschließen. Wie bei der Addition können im Interesse eines gewissen Realitätsbezugs auch hier Plausibilitätsbetrachtungen angestellt werden, und zwar für das Kommutativgesetz anhand des Flächeninhalts unterschiedlich gelegener, kongruenter Rechtecke (vgl. *Tafelbild*, Bild 17) und entsprechend für das Assoziativgesetz anhand des Volumens unterschiedlich gelegener kongruenter Quader. (Letzteres ist allerdings etwas schwer für die Schüler zu überblicken, da man hier auch das Kommutativgesetz einbeziehen muß.)

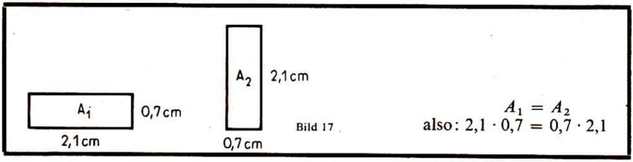


Bild 17

Beide Gesetze sollten wie in LE 7 mit Variablen für gebrochene Zahlen formuliert und aufgeschrieben werden. Obwohl der Lehrplan keinen Beweis der Gesetze fordert, sollte man deren Gültigkeit durch den Hinweis bewußtmachen, daß die Multiplikation gebrochener auf die natürlicher Zahlen zurückgeführt wird und diese kommutativ und assoziativ ist. Als beispielgebundene Begründung des Kommutativgesetzes ist Beispiel B 23 gedacht. In leistungsstärkeren Klassen kann dieses Gesetz durch Verwenden von Variablen bewiesen werden.

Zusammenfassend wird herausgestellt, daß durch das Assoziativgesetz die Multiplikation von drei auf die von zwei Zahlen zurückgeführt wird und auf Grund beider Gesetze gebrochene Zahlen in beliebiger Reihenfolge multipliziert werden können.

Beim **Üben im Multiplizieren dreier gebrochener Zahlen** sind vor allem Sicherheit, aber auch Schnelligkeit anzustreben. Die Gesetze sollten dabei gelegentlich auch *bewußt* angewendet werden. Es werden die Aufgaben 1, 5, 4b, c (schriftl.) und 4a, d, e (mdl.) empfohlen. Bei Aufgabe 5a bis d sollten die Schüler möglichst selbständig von vornherein mit gemeinen Brüchen rechnen. Beim Rechnen mit Dezimalbrüchen sollten sie möglichst gleich zu Beginn das Komma weglassen, mit natürlichen Zahlen rechnen und danach das Komma entsprechend der Gesamtanzahl der Stellen nach dem Komma setzen.

$$\begin{array}{l|llr}
0,23 \cdot 1,7 \cdot 0,02 & \quad \textit{NR:} & 17 \cdot 2 = 34 & \underline{23 \cdot 34} \\
 & & & 69 \\
 & & & \underline{92} \\
= 0,00782 & & & 782
\end{array}$$

Beim Rechnen mit Dezimalbrüchen sind Überschläge besonders wichtig. Das Überschlagen kann durch Aufgabe 6 auch eigenständig gefestigt werden, z. B.
Aufgabe 6c: $30 \cdot 0{,}08 \cdot 7 = 30 \cdot 0{,}56$; $30 \cdot 0{,}6 = 18$.

Erarbeiten des Distributivgesetzes Zum Reaktivieren des Gesetzes für natürliche Zahlen kann an das Vorgehen beim mündlichen Multiplizieren angeknüpft werden: $53 \cdot 7 = (50 + 3) \cdot 7 = 50 \cdot 7 + 3 \cdot 7 = 350 + 21 = 371$.
Anschließend erhalten die Schüler den Auftrag, Summen wie $14 \cdot 7 + 16 \cdot 7$ und $17 \cdot 23 + 17 \cdot 77$ möglichst vorteilhaft zu berechnen und den Rechenweg zu erläutern und zu begründen. (Ein solches „Ausklammern" wird bei der Herleitung von Flächenformeln später benötigt.) Nach dem Formulieren des Gesetzes für natürliche Zahlen wird wieder die Frage nach der Gültigkeit im neuen Zahlenbereich aufgeworfen. Zum Verdeutlichen des im Distributivgesetz erfaßten Zusammenhangs sollte auf Veranschaulichungen durch Rechtecksflächeninhalte (LB-Bild B 23, LB 61) nicht verzichtet werden. (Man kann auch an Veranschaulichungen zum Beweis über die Teilbarkeit von Summen im Stoffgebiet 1, LE 6 anknüpfen.) Allerdings sollte man die beiden Rechtecke (als Applikation an der Manipermtafel) getrennt vorgeben und nach der Summe der Flächeninhalte fragen. Nachdem die Schüler erkannt haben, daß die Rechtecke in einer Seitenlänge übereinstimmen, liegt das „Zusammenschieben" zu einer einzigen Rechtecksfläche nahe. Dadurch wird bereits vor dem Berechnen deutlich, daß es zwei Wege zum Ermitteln des Inhalts gibt, die naturgemäß zum gleichen Resultat führen müssen. Die Rechnung entsprechend Beispiel B 24 zeigt dann, daß Addition und Multiplikation dieser Forderung tatsächlich genügen. Zum rechnerischen Abstützen wird noch Produkt und Summe aus Beispiel B 25 berechnet (SSA) und die Rechnung anschließend mit dem Lehrbuch verglichen. Dabei muß bewußtwerden, daß einer solchen „Bestätigung" keinerlei Beweiskraft zukommt, aber auf einen Beweis verzichtet wird, da er relativ schwer ist. Abschließend wird das Gesetz „für gebrochene Zahlen" formuliert und hervorgehoben, daß es (wie bei natürlichen Zahlen) „in beiden Richtungen" angewendet werden kann.

Zum **Festigen des Distributivgesetzes** werden die Aufgaben 2a, b, 17b, c und 7a, c gerechnet. Dabei muß auch deutlich werden, wann die Anwendung des Distributivgesetzes unzweckmäßig ist. Durch Aufgabe 7 sollten die Schüler erneut erkennen, daß $a + b \cdot c$ im allgemeinen von $(a + b) \cdot c$ verschieden ist, *jeder* Summand in der Klammer mit dem Faktor außerhalb der Klammer zu multiplizieren ist und die Klammer nicht einfach weggelassen werden darf.

Üben im rationellen Rechnen bei Nutzung der Gesetze Die Reaktivierung hat bereits den Nutzen der Gesetze für ein vorteilhaftes Rechnen gezeigt. Nun sollen sie *bewußt* für ein vorteilhaftes Rechnen mit gebrochenen Zahlen angewendet werden. Dafür eignen sich die Aufgaben aus den Beispielen B 26 und 27 und Auftrag B 26 (SSA). Durch den Auftrag gelangen die Schüler zugleich zu der Vermutung, daß es auch für die Multiplikation und die Subtraktion ein (wenn auch wegen der Ausführbarkeit eingeschränktes) Distributivgesetz gibt und dieses Rechenvorteile gestattet. Sie kann durch Lösen von Aufgabe 2c (SSA) bestärkt werden. Zum weiteren Üben werden Summen und Differenzen entsprechend Beispiel B 26 gegeben und von den Schülern rationell berechnet. Sie erkennen: Durch Ausklammern gemeinsamer Faktoren verringert sich in jedem Fall der Rechenaufwand, bei „günstigen" Summanden (vgl. Beispiele B 26 und 27) manchmal erheblich.

Ferner werden die Aufgaben 8, 11 und 15b empfohlen. Bei Aufgabe 8 wird man zunächst nur den ersten Term für 0,1 und 0,5 berechnen lassen, dann gegebenenfalls ein rationelles Vorgehen erörtern und danach weiter rechnen lassen. Aufgabe 15b zeigt erneut deutlich, daß man das Distributivgesetz nur dann anwenden wird, wenn es von Vorteil ist.

Zum **Vertiefen der Gesetzmäßigkeiten der Multiplikation** können Aufgaben folgenden Typs eingesetzt werden:
Für welche gebrochenen Zahlen x gilt

a) $\frac{13}{11} \cdot \frac{7}{5} = \frac{7}{5} \cdot x$ **b)** $7{,}9 \cdot x \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \cdot 7{,}9 \cdot \frac{8}{3}$

c) $0{,}3 \cdot \left(x + \frac{3}{5}\right) = 0{,}3 \cdot 7{,}2 + 0{,}3 \cdot \frac{3}{5}$ **d)** $0{,}2 \cdot x + 0{,}2 \cdot 8{,}9 = (8{,}9 + x) \cdot 0{,}2$?

Für einzelne Schüler sollte in einigen Aufgaben „=“ durch „<“ oder „≦“ ersetzt werden.

Zum weiteren Vertiefen kann die von natürlichen Zahlen bekannte, beim Rechnen mit Näherungswerten (LE 10) angewandte Monotonie der Multiplikation durch Lösen der Aufgabe 19 bewußtgemacht werden. Die Lösungen werden wie bei entsprechenden Aufgaben in LE 7 aufgeschrieben. Nur wenn sich trotz gewisser Impulse Schwierigkeiten beim Vergleichen ergeben, sollte ein Ausrechnen gestattet werden. Auf das Formulieren eines Monotoniegesetzes mit Hilfe von Variablen wird verzichtet, nicht aber auf Formulierungen wie „*Ein Produkt wird größer (kleiner), wenn ein Faktor größer (kleiner) wird.*“

Üben im vermischten Addieren, Subtrahieren und Multiplizieren Das Ziel besteht darin, daß die Schüler Aufgaben mit diesen Rechenoperationen sicher lösen können. Vorrangregeln über die Reihenfolge auszuführender Rechenoperationen sollten anhand von Beispielen für natürliche Zahlen wiederholt und danach auch für gebrochene Zahlen „in Kraft gesetzt“ werden:
- Was in Klammern steht, gehört zusammen.
- Multiplikation (und Division) vor Addition und Subtraktion („Punktrechnung vor Strichrechnung“)
- Sonst wird schrittweise von links nach rechts gerechnet, sofern nicht Rechengesetze eine andere Reihenfolge erlauben.

Anhand der Terme aus Beispiel B 28 werden diese Regeln erläutert. Die Aufgaben 10 und 18a, b eignen sich zum Üben. Außerdem können auch Anwendungsaufgaben mit einbezogen werden, z. B.: „Aus einem Faß mit 250 l Inhalt wird Saft in 110 Flaschen zu je 0,7 l und 190 Flaschen zu je $\frac{3}{4}$ l gefüllt. Beim Abfüllen gehen insgesamt $1\frac{1}{2}$ l Saft verloren. Wieviel Liter Saft bleiben im Faß?“

Zum **Systematisieren des Wissens zum Addieren und Multiplizieren** wird das Ausfüllen der folgenden Tabelle empfohlen:

	x	y	$x+y$	$x \cdot y$
(a) gemeiner Bruch				
(b) gemischte Zahl	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$		
(c) Dezimalbruch				

Zunächst sollten die Schüler die anderen Darstellungen für x und y im Unterrichtsgespräch finden und danach Summe und Produkt durch Rechnen mit (a) gemeinen Brüchen, (b) gemischten Zahlen, (c) Dezimalbrüchen arbeitsteilig (entsprechend dem individuellen Festigungsbedarf) ermitteln. In der Auswertung werden die Rechenoperationen einander gegenübergestellt, und zwar bei (a) bezüglich des Gleichnamigmachens und Operierens in Zähler und Nenner, bei (b) bezüglich der Notwendigkeit, gemischte Zahlen in gemeine Brüche oder Dezimalbrüche umzuwandeln, und bei (c) bezüglich des Rechnens und der Kommasetzung. Dabei kann folgende Übersicht (Folie) erarbeitet werden:

		Addition	Multiplikation
Gemeine Brüche	Gleichnamigmachen	ja	nein
	Zähler	addieren	multiplizieren
	Nenner	beibehalten	multiplizieren
Dezimalbrüche	Rechnen	mit natürlichen Zahlen	
	Stelle des Kommas im Ergebnis ergibt sich durch	„Komma unter Komma"	Gesamtstellenanzahl nach dem Komma bei den Faktoren
Gemischte Zahlen	Umrechnen in gemeine Brüche oder Dezimalbrüche	möglich, nicht notwendig	notwendig

Es sollte nochmals hervorgehoben werden, daß beide Rechenoperationen stets eindeutig ausführbar sind, unabhängig von der Darstellung, in der man rechnet.

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 4f **2.** Aufg. 1c **3.** Aufg. 10d
4. Aufg. 12b, c **5.** Aufg. 11a, b

Division gebrochener Zahlen (3 Std.)

LE 12 (LB 65 bis 69)

Diese Lerneinheit bildet im gesamten Stoffgebiet insofern einen Höhepunkt, als jetzt das ursprünglich gestellte Ziel, einen Zahlenbereich mit uneingeschränkt ausführbarer Division aufzubauen, erreicht wird. Indem die Schüler erkennen, daß die Erarbeitung der Division unter Berücksichtigung praktischer und mathematischer Bedingungen erfolgt, kommt dieser Lerneinheit für die mathematische Allgemeinbildung und für die weltanschauliche Erziehung eine große Bedeutung zu.

Ziele

Die Schüler
- kennen den Begriff „Reziprokes einer gebrochenen Zahl" und können zu jedem $\frac{a}{b}$ $(a, b \neq 0)$ das Reziproke bilden,
- können gebrochene Zahlen als gemeine Brüche dividieren und ihr Vorgehen beschreiben,
- können begründen, daß die Division gebrochener Zahlen uneingeschränkt ausführbar ist (außer durch 0).

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeiten von „Reziprokes einer gebrochenen Zahl“
- Erarbeiten von $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

2. Stunde
- Üben im Dividieren
- Vertiefen der Division

3. Stunde
- Weiteres Vertiefen der Division
- Üben im Lösen von Gleichungen

Methodische Hinweise

Das **Erarbeiten von „Reziprokes einer gebrochenen Zahl“** hat sich – falls nicht schon anhand von Aufgabe 13 in Lerneinheit 9 geschehen – dem der Divisionsregel unterzuordnen, darf also nur wenig Zeit beanspruchen. Eine Motivierung ist erst dort möglich, wo man die Regel formulieren muß. Da deren Erarbeitung aber nicht unnötig verlängert werden sollte, empfiehlt sich ein Vorwegnehmen mit dem Hinweis, daß man diesen Begriff später benötigt. Dem Üben dient Auftrag B 30; die Schüler sollten aber auch zu einigen vorgegebenen oder selbst gewählten Zahlen die Reziproken bilden; Dezimalbrüche brauchen dabei noch nicht aufzutreten.

Für das **Erarbeiten von** $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ ist die Erkenntnis, daß in N die Division Umkehrung zur Multiplikation ist, zum Ausgangsniveau zu zählen. Sie kann durch Lösen folgender Aufgaben (SSA) reaktiviert werden:

1) Löse die Gleichungen! Bilde dann aus den 3 Zahlen jeweils eine richtig gelöste Divisionsaufgabe!
$x \cdot 15 = 75$ $\quad x \cdot 500 = 1000$ $\quad 23 \cdot x = 69$

2) Was muß für die Zahlen x gelten?
$1505 : 32 = x$ $\quad 16236 : 451 = x$ $\quad 6786 : 78 = x$

3) Rechne bequem!
$(412 \cdot 57) : 57$ $\quad (83 \cdot 47) : 83$ $\quad (1504 : 32) \cdot 32$

Das Erarbeiten selbst beginnt mit einer gründlichen Problem- und Zielformulierung:
- Von den vier Grundrechenoperationen sind bisher erst drei auf die gebrochenen Zahlen erweitert worden. Diejenige Operation steht noch aus, die das Hauptziel der Einführung gebrochener Zahlen war.
- Man kann zwar 3 Äpfel gleichmäßig auf 4 Kinder verteilen, indem man jedem Kind $\frac{3}{4}$ Apfel gibt; die Divisionsaufgabe $3 : 4$ ist aber in N nicht lösbar. Es kann auch das Einführungsbeispiel zur Multiplikation (S. 75) aufgegriffen und nach der Geschwindigkeit gefragt werden.
- Die wichtigsten Bedingungen für das zu erarbeitende Dividieren sind also:
  (1) Das Dividieren führt z. B. *bei* $\frac{3}{1} : \frac{4}{1}$ *zu* $\frac{3}{4}$.
  (2) Das Dividieren ist uneingeschränkt ausführbar.
  (3) Das Dividieren ist (auch in Q_+) Umkehrung zum Multiplizieren.

Die Forderungen (1) bis (3) sollten als Abschluß der Problemerarbeitung an der Tafel fixiert werden, um später darauf zurückgreifen zu können.

Das eigentliche Gewinnen der Regel beginnt mit einem Beispiel wie $\frac{8}{15} : \frac{4}{3} \left(= \frac{x}{y} \right)$. Im Anschluß an Forderung (3) vermuten die Schüler, daß man Zähler durch Zähler und Nenner durch Nenner dividieren muß. Einige Schüler erkennen und begründen sicher sofort, daß damit das Ziel noch nicht erreicht ist. Andere kommen durch Vorlegen eines Quotienten wie $\frac{7}{5} : \frac{4}{3}$ zu dieser Einsicht. Die Nicht-Anwendbarkeit obiger Regel wird begründet: „weil 7 kein Vielfaches von 4 und 5 kein Vielfaches von 3 ist".

Den entscheidenden Schritt zur Problemlösung finden bzw. verstehen die Schüler um so leichter, je bewußter sie das Gleichnamigmachen als einen Übergang zu geeigneteren Brüchen der gleichen Zahl vollzogen haben:

> Man kann statt $\frac{7}{5}$ einen anderen Bruch der gleichen Zahl nehmen. Man findet solche Brüche durch Erweitern. Der dadurch entstehende Zähler muß Vielfaches von 4, der entstehende Nenner Vielfaches von 3 sein. Also muß $\frac{7}{5}$ sowohl mit 4 als auch mit 3 erweitert werden.

Aus dieser Gedankenführung, gegebenenfalls durch Impulse unterstützt, entsteht an der *Tafel:*

$$\frac{7}{5} : \frac{4}{3} = \frac{7 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 3} : \frac{4}{3} = \frac{7 \cdot 4 \cdot 3 : 4}{5 \cdot 4 \cdot 3 : 3} = \frac{7 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{4}$$

$$\frac{7}{5} : \frac{4}{3} = \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{4}$$

Dieser Gleichung ist eine Regel sofort zu entnehmen. In den meisten Klassen wird man das Untersuchen der Forderungen (1) und (2) zurückstellen zugunsten von Übungsaufgaben (Beispiel B 29a). Wie groß man die Zahlen wählt, ob Kürzungsmöglichkeiten auftreten oder nicht, muß von der Sicherheit der Schüler im Multiplizieren abhängig gemacht werden.

Für das **Üben im Dividieren** sind die Aufgaben 1 bis 6 geeignet. Die Steigerung des Schwierigkeitsgrades erfolgt durch das Zahlenmaterial (bis zu einigen wenigen gemischten Zahlen) und durch Kürzungsmöglichkeiten. Beim Niederschreiben sollte man während dieser Übungen

von $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ zu $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

übergehen. Dabei werden natürliche Zahlen als Brüche mit dem Nenner 1 geschrieben. An den Quotienten 3 : 4 wird das Erfülltsein von Bedingung (1) gezeigt. Desgleichen wird bei diesen Übungen erkannt:

$a : 1 = a \qquad a : a = 1 \qquad 0 : a = 0$

Das **Vertiefen der Division** ist durch die zuvor gewonnenen Erkenntnisse bereits eingeleitet worden. Die Bedingung (3) kann durch die Art der Einführung als erledigt angesehen werden. Für (2) sind allgemeine Begründungen (vgl. LB 67) zu verlangen.

Die Frage, ob der Ausschluß des Divisors 0 nur am Fehlen eines Reziproken liegt, können die Schüler nach Lesen des (eingerahmten) Lehrbuchtextes nach dem Beispiel B 29 selbständig beantworten.

Das **weitere Vertiefen der Division** kann mit der durch Analogie motivierten Frage nach der Gültigkeit von Gesetzen beginnen. Infolge der uneingeschränkten Ausführbarkeit existiert mit $a : b$ auch $b : a$ (für $a \neq 0$). Die Frage nach der Kommutativität ist also nicht mehr (wie in N) sinnlos. Zwar werden die Schüler kein Kommutativgesetz der Division, wohl aber einen Zusammenhang beider Quotienten vermuten. Man wird sie daher zum Vergleichen der (zuvor von ihnen gelösten) Aufgaben 1b und c oder zum teilweisen Lösen von Aufgabe 9 auffordern. Die dabei gewonnene Erkenntnis „Vertauscht man Dividend und Divisor, so entsteht das Reziproke des Quotienten" soll nicht als Gesetz formuliert werden, kann aber dadurch gefestigt werden, daß die Schüler z. B. $\frac{9}{10} : \frac{3}{5}$ angeben, indem sie auf die bereits gelöste Aufgabe $\frac{3}{5} : \frac{9}{10}$ zurückgreifen.

Analog kann anhand etwas komplizierterer Übungsaufgaben gezeigt werden, daß die Division auch nicht assoziativ ist.

Wichtiger sind jedoch funktionale Betrachtungen. Indem die Schüler Aufgabe 8 lösen, erkennen sie nicht nur, daß auch in Q_+ (wie in N) der Quotient größer wird, wenn sich bei gleichbleibendem Dividend der Divisor verkleinert. Ihnen wird vor allem bewußt, daß der Quotient (anders als in N) größer sein kann als der Dividend und wann dies der Fall ist.

Beim **Üben im Lösen von Gleichungen** geht es um inhaltliches Lösen, gestützt auf das Wissen von der Division als Umkehrung zur Multiplikation. Die Aufgabe 14 knüpft unmittelbar an die Gedanken zur Erarbeitung der Divisionsregel an. Bei Aufgabe 7 ist zum Produkt umzuformen und die dadurch entstehende Gleichung inhaltlich zu lösen, z. B.:

$$\frac{5}{4} : \frac{3}{n} = \frac{25}{12} \rightarrow \frac{5 \cdot n}{4 \cdot 3} = \frac{25}{12} \rightarrow n = 5$$

Die zuvor durch funktionale Betrachtung gefundenen Erkenntnisse sind bei Aufgabe 11 anzuwenden. Beim Lösen von Aufgabe 16* werden die Schüler zu einem durchdachten Probieren angehalten, z. B. für 16*c: Abschätzungen zeigen, daß weder „+" noch „−" in Frage kommen. Auch „:" scheidet aus, da der Quotient größer als $3\frac{1}{5}$ ist. Also ist das Produkt zu überprüfen.

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 1d; 2d; 4b; 5b, c **2.** Aufg. 7a; 11e **3.** Aufg. 14a

Bruchstrich und Divisionszeichen (2 Std.)

LE 13 (LB 69 bis 72)

Mit der Gleichsetzung von Divisionszeichen und Bruchstrich wird das Ziel, einen N umfassenden Zahlenbereich zu konstruieren, in dem jede in N nicht lösbare Divisionsaufgabe eine Lösung hat, endgültig erreicht; denn ein Umformen von $a : b$ ($a, b \in N$) in $\frac{a}{1} : \frac{b}{1}$ entfällt jetzt.

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß man Bruchstrich und Divisionszeichen durcheinander ersetzen kann und daß Zähler und Nenner auch gebrochene Zahlen sein können,
- können einfache Doppelbrüche umformen,
- können Terme berechnen, in denen außer dem Divisionszeichen (auch als Bruchstrich) noch andere Rechenzeichen auftreten.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeiten der Erkenntnis „Bruchstrich und Divisionszeichen sind austauschbar"
- Üben im Umformen von Doppelbrüchen

2. Stunde
- Üben im Berechnen von Termen mit verschiedenen Rechenzeichen

Methodische Hinweise

Das **Erarbeiten der Erkenntnis „Bruchstrich und Divisionszeichen sind austauschbar"** ist bereits in Lerneinheit 12 mit einem Beispiel wie $3:4=\frac{3}{4}$ begonnen worden und wird durch Auftrag B 32 fortgesetzt. Dabei wird erkannt, daß ein Umformen zu $\frac{n}{1}$ entfallen kann, weil durch Anwenden der Divisionsregel Dividend und Divisor im Ergebnis stets als Zähler bzw. Nenner auftreten. Nach einigen formalen Übungen (Beispiel B 32) wird Satz B 16 formuliert und dabei auch die Sprechweise „a durch b" $\left(\text{für } \frac{a}{b}\right)$ eingeführt, zumindest nachträglich gerechtfertigt.

Hinweis: Eigentlich besteht erst jetzt die Berechtigung, $\frac{a}{b}$ nicht mehr als „a-b-tel" zu sprechen, sondern als „a durch b". Mitunter benutzen Lehrer diese Sprechweise aus Gewöhnung auch schon vorher, wissen sie doch, daß „a durch b" später berechtigt und üblich ist und beim Auftreten anderer als natürlicher Zahlen im Nenner notwendig ist; doch bleibt dies bis zu dieser Lerneinheit den Schülern unverständlich.

Die Erweiterung von „Bruch" zu „Doppelbruch" kann man praktisch motivieren: Man knüpft an die Definition eines physikalischen Begriffs an, bei der ein Quotient als Bruch auftritt (Geschwindigkeit bei gleichförmiger Bewegung, Dichte).

Beim **Üben im Berechnen von Termen mit verschiedenen Rechenzeichen** (Aufg. 12 bis 18) steht die Division im Vordergrund. Bei allen Aufgaben sind die Vorrangregeln bzw. die Kenntnisse vom Arbeiten mit Klammern zu festigen. Besondere Beachtung verdient das Setzen von Klammern beim Ersetzen des Bruchstrichs durch das Divisionszeichen, z. B.: $\frac{5-\frac{3}{7}}{8}=\left(5-\frac{3}{7}\right):8$

Dabei müssen die Schüler einsehen: Der gesamte Zähler ist durch 8 zu dividieren, also ist er in Klammern zu setzen. Ein Distributivgesetz wird nicht formuliert. In erster Linie ist an ein Abarbeiten der Regeln gedacht, was durch Analysieren der Terme vor dem Berechnen erleichtert wird; z. B. sollen die Schüler bei den Aufgaben 18a und b sprechen:

a) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$ ist ein Quotient aus zwei Summen.

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} : \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ ist eine Summe aus drei Summanden, der zweite Summand ist ein Quotient.

Man sollte solche Analysen die Schüler auch selbständig anfertigen und etwa in folgender Kurzform schriftlich fixieren lassen:
a) Summe durch Summe, b) Zahl plus Quotient plus Zahl.
Beim schriftlichen Berechnen ist auf exaktes Niederschreiben Wert zu legen, z. B.

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = \frac{3+2}{6} : \frac{5+4}{20} = \frac{5}{6} : \frac{9}{20} = \frac{5 \cdot 20}{6 \cdot 9} = \frac{50}{27}.$$

Durch das Bearbeiten von Auftrag B 34 erkennen die Schüler, daß beim Ermitteln des arithmetischen Mittels zweier beliebiger (jetzt gebrochener) Zahlen mit $\frac{a+b}{2}$ ein Term auftritt, der dem zuvor berechneten entspricht; man kann diesen Schwerpunkt auch so einleiten. Anschließend wird dem Zahlenstrahl die Ungleichung $a < \frac{a+b}{2} < b$ entnommen; damit werden die Erkenntnisse von Lerneinheit 3 ergänzt, und es wird die dort noch nicht erwähnte Bezeichnung „überall dicht liegen" eingeführt.

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 3f **2.** Aufg. 6e **3.** Aufg. 12b **4.** Aufg. 13a, b

Division von Dezimalbrüchen (4 Std.)

LE 14 (LB 72 bis 75)

Ziele

Die Schüler
- können Dezimalbrüche sicher dividieren (Dividend höchstens vier, Divisor höchstens zwei gültige Ziffern; Quotient endlicher Dezimalbruch) und ihr Vorgehen kommentieren,
- können sicher durch Zehnerpotenzen dividieren,
- können für die auftretenden Divisionsaufgaben den Überschlag ausführen,
- wissen, daß es Quotienten aus Dezimalbrüchen gibt, die keine (endlichen) Dezimalbrüche sind,
- können bei Sachaufgaben mit Anzahlberechnungen sinnvolle Ergebnisse angeben.

Schwerpunkte

1. Stunde
– Motivieren der Division von Dezimalbrüchen
– Reaktivieren der Division natürlicher Zahlen

2. Stunde
– Anwenden der Regel für gemeine Brüche auf das Dividieren von Dezimalbrüchen
– Erarbeiten der Divisionsregel für Dezimalbrüche

3. Stunde
– Üben im schriftlichen Dividieren von Dezimalbrüchen

4. Stunde
– Anwenden des Dividierens von Dezimalbrüchen auf praktische Sachverhalte

Methodische Hinweise

Das **Motivieren der Division von Dezimalbrüchen** kann mit folgender Aufgabe beginnen: „Aus welchem Metall könnte ein Körper bestehen, der eine Masse von 37,4 g und ein Volumen von 4,4 cm^3 hat?“

Der Schüler weiß, daß er die Art des Metalls aus der Dichte entnehmen und diese im vorliegenden Fall durch Lösen von 37,4 : 4,4 ermitteln kann. Er kann den Zahlen entnehmen, daß die Dichte etwas kleiner als 9 ist; es kommen demzufolge mehrere Metalle in Frage: So sieht er ein: Für genauere Überlegungen müßte man dividieren und den Quotienten als Dezimalbruch angeben können. Der von den Schülern zu erwartende Vorschlag $37{,}4 : 4{,}4 = \frac{374}{10} : \frac{44}{10} = \frac{374 \cdot 10}{10 \cdot 44} = \frac{374}{44}$ macht deutlich, daß dieses Ziel noch nicht erreicht ist und woran das liegt: Der Nenner ist keine Zehnerpotenz; er kann auch durch Kürzen nicht beseitigt werden, weil 44 kein Teiler von 374 ist. Somit ist auch in Analogie zu den vorangegangenen Rechenoperationen das Fernziel umrissen: Es muß eine Regel für das Dividieren von Dezimalbrüchen gefunden werden, die ohne den Umweg über die Zehnerbrüche zu einem Dezimalbruch führt und sich – ebenfalls analog zu den anderen Rechenregeln für Dezimalbrüche – an das Dividieren natürlicher Zahlen anlehnt.

Damit ist das **Reaktivieren der Division natürlicher Zahlen** nahegelegt. Es beginnt mit dem Lösen (im Kopf) von Aufgaben wie

- Berechne! 84 : 12; 108 : 3; 264 : 24
- Löse die Gleichungen!
  $7 \cdot x = 98$; $12 \cdot x = 132$; $x \cdot y = 135$ $(x, y \in N;\ x, y > 1)$

Nach dem Lösen von Aufgabe 1 wird dann formuliert: Zehnerpotenzen sind Vielfache nur von solchen Zahlen, die außer 2 und 5 keine anderen Primfaktoren haben.

Zum Üben im schriftlichen Dividieren ist das Zahlenmaterial so zu wählen, daß die Schüler die Schritte des Algorithmus reaktivieren, ohne beim Ermitteln der Teilquotienten Rechenschwierigkeiten zu haben; folgende Quotienten könnten gewählt werden: **a)** 4953 : 13 (= 381) **b)** 564 : 12 (= 47) **c)** 7890 : 15 (= 526)
Dabei werden im Gespräch zu a) noch einmal die einzelnen Stellenwerte aufgegriffen:

49 Hunderter	durch 13	———	3 Hunderter
105 Zehner	durch 13	———	8 Zehner
13 Einer	durch 13	———	1 Einer

Das Dividieren durch Zehnerpotenzen läßt sich hier bereits behandeln. Aufgaben wie

$$495{,}3 : 10 = \frac{4953}{10 \cdot 10} = 49{,}53 \qquad 789 : 1000 = \frac{789}{1000} = 0{,}789$$

machen die Regel deutlich und begründen sie.

Das **Anwenden der Regel für gemeine Brüche auf das Dividieren von Dezimalbrüchen** soll nicht zu Fertigkeiten führen, sondern die drei Fälle verdeutlichen:

(1) $3{,}78 : 1{,}8 = \frac{378}{100} : \frac{18}{10} = \frac{378 \cdot 10}{100 \cdot 18} = \frac{21}{10} = 2{,}1$

Das Anwenden der Regel führt zu einem Dezimalbruch, weil 18 Teiler von 378 ist. Die Schüler lösen nicht nur einige solche Aufgaben, sondern bilden auch einige derartige Quotienten, z. B. aus dem Produkt $24 \cdot 13 = 312$.

(2) $7{,}7 : 4 = \frac{77}{10 \cdot 4} = \frac{77 \cdot 100}{10 \cdot 4 \cdot 100} = \frac{7700}{10 \cdot 4 \cdot 100} = \frac{1925}{1000} = 1{,}925$

Auch hier entsteht ein Dezimalbruch, weil durch Erweitern mit einer Zehnerpotenz ein Zähler erzeugt werden kann, der durch 4 teilbar ist. Es wird dentlich, daß sowohl (1) als auch (2) auf das Dividieren natürlicher Zahlen führt, die in der Ziffernfolge mit den Dezimalbrüchen übereinstimmen.

(3) $3{,}7 : 0{,}9 = \frac{37}{10} : \frac{9}{10} = \frac{37 \cdot 10}{10 \cdot 9} = \frac{37}{9}$

Hier kann kein (endlicher) Dezimalbruch entstehen, weil sowohl (1) als auch (2) versagen. (Die Schüler werden auf kommende Lerneinheiten verwiesen.)

Durch (1) und (2) ist der nächste Schwerpunkt vorbereitet worden, indem einerseits das Aufwendige des Vorgehens deutlich, andererseits auf die Division natürlicher Zahlen orientiert wurde.

Das **Erarbeiten der Divisionsregel für Dezimalbrüche** kann gemäß Beispiel B 36 und B 37a erfolgen. Man kann aber auch an vorangegangene Übungen anknüpfen und den Schülern die Quotienten

a) 49,53 : 13 **b)** 56,4 : 12 **c)** 7,890 : 15

vorlegen. Durch Anwenden erkannter Gesetzmäßigkeiten der Division (vgl. LE 12) läßt sich aus den bekannten Gleichungen (z. B. 4953 : 13 = 381) der Quotient 3,81 für a) ermitteln. Man könnte also in den Fällen, wo nur der Dividend ein Dezimalbruch ist, zunächst ohne Rücksicht auf das Komma dividieren, im Ergebnis das Komma gemäß Überschlag setzen, oder beim Dividieren schon dann, wenn es im Dividenden überschritten wird. Nach einigen selbständigen Übungen (z. B. 38,4 : 4; 79,8 : 14; 472,8 :12) wird der letzte Schritt durch Vorlegen von Quotienten aus benutztem Zahlenmaterial eingeleitet:

7,98 : 1,4 47,28 : 0,12 384 : 0,4

Nach den beschriebenen Vorbereitungen liegt das Zurückführen auf natürliche Divisoren nahe.

Bevor Regel B 18 im Buch gelesen und von einigen Schülern gesprochen wird, werden einige einfache Übungsaufgaben gelöst, z. B. 2c, d; 4a, b, c.

Beim **Üben im schriftlichen Dividieren von Dezimalbrüchen** kommt es nicht so sehr darauf an, daß Operanden und Quotient viele gültige Ziffern haben (vgl. Ziele). Bei der Fertigkeitsentwicklung sind vor allem diejenigen Aspekte zu berücksichtigen, die bei der Erarbeitung unbeachtet blieben:

- das Anfügen von Nullen im Dividenden beim Erweitern des Quotienten, z. B. Aufgabe 8a,
- das zusätzliche Anfügen von Nullen im Dividenden, z. B. in 1,239 : 0,35,

– das Auftreten der Null als Teilquotient, wobei ihre Stellung unmittelbar vor bzw. nach dem Komma bzw. am Schluß zu beachten ist (z. B.: 3,651 : 1,7; 9,80 : 28; 15,5 : 0,31),
– die Gewöhnung an Überschlag und Kontrolle.

Für das Überschlagen muß deutlich werden, daß das Verändern von Dividend und Divisor abweichend von den Rundungsregeln und in Anpassung an das individuelle Können im Kopfrechnen geschehen kann. So kann man am Beispiel 7,89 : 1,4 folgende Möglichkeiten demonstrieren und zulassen:

7,98 : 1,4 → 79,8 : 14

7 : 1 7,5 : 1,5 80 : 10 70 : 10 75 : 15 70 : 14

Als Kontrollhandlung wird auf den Vergleich mit dem Überschlag orientiert, gelegentlich auch das Multiplizieren verlangt. Eine andere Kontrollmöglichkeit wird angedeutet, wenn die Aufgaben

30,71 : 3,7 30,71 : 8,3

differenziert gestellt werden. Ein Vergleich der Ergebnisse zeigt die Vertauschbarkeit von Quotient und Divisor.

Spätestens jetzt muß das Einführungsbeispiel aufgegriffen und wegen 37,4 : 4,4 = 8,5 Messing als mögliches Metall genannt werden.

Beim **Anwenden des Dividierens auf praktische Sachverhalte** geht es hier um zwei Aspekte:

Das rechnerische Ergebnis einer Sachaufgabe ist eine gebrochene (aber nicht natürliche) Zahl (Dezimalbruch), die Antwort erfordert aber eine natürliche Zahl (z. B. Beispiel 38 und Aufgabe 12). Deshalb sind die Schüler (nicht nur hier) daran zu gewöhnen, schon bei der Aufgabenanalyse an den Zahlenbereich für das Ergebnis zu denken und auch daran, ob eine als Quotient gefundene gebrochene Zahl auf- oder abzurunden ist, möglicherweise entgegen den Rundungsregeln.

Der andere Aspekt ist die sinnvolle Genauigkeit, die auch schon bei natürlichen Zahlen eine Rolle spielt. So wird man in vielen Fällen „sicherheitshalber" etwas mehr bestellen (z. B. Aufg. 12). Aber auch dort, wo eine gebrochene Zahl als Ergebnis sinnvoll ist, wird man seine Genauigkeit hier allein nach Erfahrung und Vorstellung festlegen (mit Hinweis auf LE 19): Bei Dichteberechnungen (Aufg. 13) orientiert man sich z. B. an den Angaben in Tabellen, bei Aufgabe 16 z. B. am Sachverhalt und am Zweck der Angabe. (Deshalb wäre hier auch ein Runden von 24,8 m^2 auf 25 m^2 und demzufolge Kopfrechnen angebracht.)

Bei Aufgabe 12 und anderen derartigen Aufgaben spielt das „Zaunpfahl-Problem" eine Rolle. Eine Skizze erleichtert schon in der Aufgabenanalyse die Erkenntnis, daß die durch Dividieren gefundene Zahl noch um 1 zu vergrößern ist.

Kontrollaufgaben

1. Aufg. 5 **2.** Aufg. 6 **3.** Aufg. 7a, f, g **4.** Aufg. 14; 15

Stoffabschnitt 2.4.

Gemeine Brüche und Dezimalbrüche (8 Std.)

Endliche und unendliche Dezimalbrüche **(2 Std.)**
LE 15 (LB 76 bis 78)

Ziele

Die Schüler
- haben den Begriff unendlicher Dezimalbruch erfaßt,
- können sicher solche gemeine Brüche umwandeln bzw. entsprechende Divisionsaufgaben lösen, bei denen die Periode des Quotienten höchstens 2-stellig ist,
- wissen, daß unendliche Dezimalbrüche mit beliebiger Genauigkeit durch endliche angenähert werden können.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Üben im Umwandeln gemeiner Brüche in endliche Dezimalbrüche

2. Stunde
- Erarbeiten von „unendlicher Dezimalbruch"

Methodische Hinweise

Beim **Üben im Umwandeln gemeiner Brüche ...** sollten drei Möglichkeiten des Umwandelns bedacht werden: aus dem Gedächtnis, durch Erweitern, durch Dividieren.

Für besonders einfache Brüche $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{1}{5}\right)$ sollte sich der Schüler die zugehörigen Dezimalbrüche gedächtnismäßig aneignen (bzw. schon angeeignet haben). Dies kann gegebenenfalls schon als Reaktivierung durch Auftrag B 37 geschehen. Beim Umwandeln von z. B. $\frac{3}{5}\left(\frac{3}{5} = 3 \cdot \frac{1}{5} = 3 \cdot 0{,}2 = 0{,}6\right)$ oder $\frac{7}{4}\left(\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4} = 1{,}75\right)$ sollte er dann sicher darauf zurückgreifen können.

Für andere (weitestgehend gekürzte) Brüche, in deren Nenner nur die Primfaktoren 2 oder 5 höchstens mit dem Exponenten 2 auftreten, sollten die Schüler den Weg des Erweiterns kennen und in einfachen Fällen benutzen können, z. B.: $\frac{7}{20} = \frac{35}{100} = 0{,}35$.
Entsprechende Übungen (z. B. Auftrag B 37b) sollen nicht zu Fertigkeiten führen, auch wenn ein entsprechendes Können für Verständnis und Können in der Prozentrechnung von Nutzen ist. Diese Übungen sollen vielmehr die Erkenntnis vertiefen, daß ein solches Umwandeln nur dann möglich ist, wenn der Nenner des weitest-

gehend gekürzten Bruches nur 2 und 5 als Primfaktoren enthält. Die Schüler nennen einige derartige Brüche und wandeln sie um. An einem Beispiel wie $\frac{3}{8}$ sehen sie ein, daß dies bei größeren Nennern mühsam sein kann, was das Suchen nach einem einfacheren Weg motiviert.

Auf das Dividieren als dritte Möglichkeit und als Normalverfahren werden die Schüler durch Erinnern an die in LE 14 gewonnene Erkenntnis „Bruchstrich und Divisionszeichen sind gleichwertig" aufmerksam gemacht. An der Tafel sollten dann die beiden Arten des Umwandelns z. B. für $\frac{3}{8}$ (vgl. LB 76) gegenübergestellt werden.

Erarbeiten von „unendlicher Dezimalbruch" Die Schüler erhalten den Auftrag, die gemeinen Brüche $\frac{40}{9}$, $\frac{7}{11}$, $\frac{51}{22}$ durch Division in Dezimalbrüche umzuwandeln. Dabei ist es günstig, in Gruppen arbeiten zu lassen:

$\frac{40}{9}$ $(= 4{,}\overline{4})$; $\frac{7}{11}$ $(= 0{,}\overline{63})$; $\frac{51}{22}$ $(= 2{,}3\overline{18})$

Ein Vergleich der Ergebnisse (vorerst noch ohne Periodenstrich und angefügte Punkte geschrieben) führt zu folgenden Erkenntnissen und Vereinbarungen:

- *Beim Dividieren bleibt stets ein Rest. Wir kennzeichnen dies durch angefügte Punkte.*
  An folgende Begründung kann gedacht werden: „Würde kein Rest bleiben, so müßte sich der entstandene Dezimalbruch als Zehnerbruch schreiben lassen. Wir wissen aber, daß das z. B. für $\frac{7}{11}$ nicht möglich ist."
- *Im Ergebnis wiederholen sich Ziffern.* (Diese Überlegungen können auch in der nächsten Lerneinheit erfolgen.)
  Als Begründung wird auf die sich wiederholenden Reste verwiesen, die infolge des ständigen Anfügens der Null zu Wiederholungen bei den Teilquotienten führen müssen. Zu einer Begründung für das Wiederholen dieser Reste kann man durch eine Frage nach der größtmöglichen Anzahl dieser Reste hinführen.
- *Ergebnisse wie 4,44 ... (oder 0,222 ...; LB 77)* haben für uns noch keinen Namen. Wegen ihres Entstehens und ihres Aussehens können wir sie aber *auch Dezimalbrüche nennen.*

Damit ist durch Angabe von Beispielen der Begriff „Dezimalbruch" erweitert worden. Die Schüler erkennen die Notwendigkeit einer Unterscheidung der bekannten von den neuen Dezimalbrüchen. Beim Mitteilen der Namen „endlicher Dezimalbruch" bzw. „unendlicher Dezimalbruch" kann auch eine Verbindung zu den Mengen im Kapitel A hergestellt werden.

Es bereitet die Behandlung der irrationalen Zahlen vor und dient einem besseren Verständnis des Arbeitens mit Näherungswerten, wenn wenigstens für ein Beispiel beim Dividieren eine Schachtelung erarbeitet wird (vgl. LB 77). Dabei sollte das Verhalten der Näherungswerte zum gemeinen Bruch etwa folgendermaßen hervorgehoben werden:

„Die Abstände werden immer kleiner. Sie kommen der Null immer näher. Es gibt keinen kleinsten Abstand."

Diese Überlegungen sind im Zusammenhang mit Aufgabe 4 aus LE 3 zu sehen.

Kontrollaufgabe
Aufgabe 5f bis i

Periodische Dezimalbrüche (4 Std.)

LE 16 (LB 79 bis 80)

Ziele

Die Schüler
- haben die Begriffe „periodischer Dezimalbruch“, „Periode“, „*n*-stellige Periode“ erfaßt,
- wissen, daß jede gebrochene Zahl entweder als endlicher oder als periodischer Dezimalbruch angegeben werden kann,
- können Dezimalbrüche ordnen,
- können Dezimalbrüche dividieren (Quotient auch periodisch),
- können periodische Dezimalbrüche runden,
- können die Struktur von Termen mit höchstens vier Dezimalbrüchen und mehr als einer Rechenoperation beschreiben und entsprechende Terme berechnen.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeiten von „periodischer Dezimalbruch“
- Erarbeiten und Festigen des Ordnens periodischer Dezimalbrüche

2. Stunde
- Üben im Dividieren von Dezimalbrüchen (Quotient beliebig)

3. Stunde
- Festigen von „periodischer Dezimalbruch“ (Näherungswerte)

4. Stunde
- Üben im Rechnen mit Dezimalbrüchen

Methodische Hinweise

Das **Erarbeiten von „periodischer Dezimalbruch“** (der Name hätte auch schon in Lerneinheit 15 eingeführt werden können) kann durch Gegenüberstellung von z. B.
a) 0,636363 ... und **b)** 0,6363363336 ...
motiviert werden. Das Beispiel b) soll zeigen, daß es auch unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche gibt. Durch Vergleich werden Gemeinsamkeit (Wiederholung der Ziffern 6 und 3 nach bestimmter Vorschrift) und Unterschied (bei a) unmittelbare Wiederholung der Zifferngruppe 63, bei b) nicht) festgestellt. Nachdem die bisher behandelten unendlichen Dezimalbrüche als von der Art a) erkannt worden sind, wird der Name genannt. Anhand bisher bearbeiteter Beispiele werden „Periode“ und „*n*-stellige Periode“ und der „Periodenstrich“ eingeführt, und es wird folgendes erarbeitet:
- Die Periode kann schon vor dem Komma beginnen; man setzt den Strich dennoch erst nach dem Komma, dort aber so früh wie möglich.
- Vor der Periode können sowohl vor als auch nach dem Komma Ziffern stehen, die nicht zur Periode gehören; es muß dies aber nicht sein.

Der Periodenstrich ist zunächst nur ein Abkürzungssymbol. Eine Gegenüberstellung von z. B. 0,751 mit

$0{,}75\overline{1}$; $0{,}5\overline{71}$; $0{,}\overline{751}$

zeigt jedoch seine zwei Bedeutungen: Er ersetzt nicht nur die Punkte und gibt an, *daß* fortgesetzt wird, er gibt vor allem auch an, *wie* fortgesetzt wird (vgl. Aufg. 2 und 3*).

Zusammenfassend kann (*Tafelbild*) formuliert werden:

Jede gebrochene Zahl läßt sich	
entweder	oder
als **endlicher Dezimalbruch**	als **periodischer Dezimalbruch**
darstellen.	

Dieser Komplex wird abgeschlossen durch die Mitteilung, daß auch jeder periodische Dezimalbruch (solche können ja einfach hingeschrieben werden und müssen nicht durch Division erzeugt werden) eine gebrochene Zahl angibt, daß ein Verfahren zum Umwandeln aber nicht behandelt wird. Für einige wenige gemeine Brüche $\left(\text{z. B. } \frac{1}{3}\right)$ sollte der Schüler sich die zugehörigen Dezimalbrüche gedächtnismäßig aneignen.

Das **Erarbeiten und Festigen des Ordnens periodischer Dezimalbrüche** ist relativ problemlos, da die den Schülern vertraute Ordnung endlicher Dezimalbrüche in naheliegender Weise fortgesetzt wird. Zur Vorbereitung können die Schüler z. B.

0,232; 0,233; 0,322; 0,222; 0,223; 0,332

ordnen und dies (mündlich) begründen. Paarweises Untereinanderschreiben macht den Unterschied in der betreffenden (farbig gekennzeichneten) Stelle besonders deutlich. Es vertieft die Erkenntnis und belebt den Unterricht, wenn die Schüler hier das gleiche Prinzip erkennen bzw. verwenden wie beim alphabetischen Ordnen von z. B.:

Schulz; Schultz; Schulze; Schutz; Schultze; Schueler.

Dieses Vorgehen wird auf Aufgabe 4 übertragen, wobei für viele Schüler ein ausführlicheres Niederschreiben (z. B. bei 4b) zunächst notwendig ist. Bei 4c und 4d sollte herausgearbeitet werden: Während bei c eine Entscheidung möglich ist, gleichgültig wie 0,09009 ... fortgesetzt wird, ist dies bei d nur bei Kenntnis einer Fortsetzungsvorschrift möglich. Mit diesen Übungen dient das Ordnen periodischer Dezimalbrüche vor allem der Festigung dieses Begriffs.

Das **Üben im Dividieren von Dezimalbrüchen** führt zwei bisher getrennt gesehene Aspekte zusammen: Bisher wurden

- ausschließlich solche Divisionsaufgaben gelöst, bei denen das Ergebnis ein endlicher Dezimalbruch ist; das Schwergewicht lag auf dem Einüben des Algorithmus,
- periodische Dezimalbrüche beim Umwandeln gemeiner Brüche gewonnen; das Dividieren relativ kleiner natürlicher Zahlen war nur Mittel zum Zweck.

Der zweite Aspekt wird den Schülern beim Lösen der beiden Aufgaben

$5{,}31 : 1{,}2\ (= 4{,}425)$ $5{,}32 : 1{,}2\ (= 4{,}4\overline{3})$

bewußt. Sie erkennen, daß nunmehr auch jede Divisionsaufgabe mit (endlichen) Dezimalbrüchen zu einem Dezimalbruch (endlich oder periodisch) führt. Zum Üben dienen die Aufgaben 5 und 6. Bei der Auswahl muß bedacht werden: Wenn der Divisionsalgorithmus geübt werden soll – und das steht hier im Vordergrund –, dann muß seine Anwendung bei den betreffenden Zahlen von Vorteil sein. Dies ist z. B. bei

Aufgabe 5a nicht der Fall. Hier sollten alle Schüler zu folgenden Lösungsüberlegungen angehalten werden:

- Beide Zahlen haben 2 Stellen nach dem Komma, also: $0{,}28 : 0{,}35 = 28 : 35$
- Beide natürliche Zahlen sind durch 7 teilbar, also: $28 : 35 = \frac{4}{5} = 0{,}8$

Dies führt bei derartigen Zahlen zu höherer Rechensicherheit, als würde die Divisionsaufgabe 28 : 35 gelöst werden müssen.

Das (weitere) **Festigen von „periodischer Dezimalbruch“** ist dem Arbeiten mit Näherungswerten gewidmet. Es kann dadurch eingeleitet werden, daß beim Lösen einer Aufgabe die einzelnen Schritte gemäß LB-Bild B 29 veranschaulicht werden. Geeignet dafür ist Aufgabe 5b: $0{,}28 : 0{,}42 = \frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$. Hier werden die auf Seite 97 angedeuteten Erkenntnisse gefestigt.

Danach folgen Aufgaben, in denen periodische Dezimalbrüche als Operanden auftreten, z. B.:

a) $36{,}\overline{76} : 26$ **b)** $6{,}32 : 0{,}\overline{79}$ **c)** $12{,}\overline{81} + 3{,}75$ **d)** $43{,}6 - 4{,}\overline{52}$

e) $3{,}84 \cdot 5{,}0\overline{5}$ **f)** $6{,}\overline{8} \cdot 13{,}5$

Nach beschriebener Vorbereitung sollten die Schüler selbst erkennen, daß hier mit Näherungswerten gearbeitet werden muß, die auf Grund der Rundungsregeln entstanden sind.

Üben im Rechnen mit Dezimalbrüchen Da die Schüler mit zwei Dezimalbrüchen schon häufig gerechnet haben, sollte jetzt das Rechnen mit mehr als zwei Ausgangszahlen, dabei das Auftreten unterschiedlicher Rechenoperationen (Aufg. 7 bis 10), im Vordergrund stehen.

Die Schüler werden angehalten, auch bei der selbständigen Arbeit an folgendes zu denken:

- Beschreiben der Terme,
- Überschlagen, meist im Kopf,
- zumindest teilweises Kopfrechnen und Nutzen von Rechenvorteilen

Dabei sind die Unterschiede der beiden Aufgaben 8a und 8b herauszuarbeiten, die auch durch den Überschlag bestätigt werden können.

So könnte als Lösung für 10c in den Schülerheften entstehen (Berechnung auf 2 Stellen nach dem Komma):

$\frac{5{,}28 + 7{,}08}{4{,}33 + 5{,}44}$ ist ein Quotient aus zwei Summen.

Ü: $12 : 10 = 1{,}2$

$$\begin{array}{l} 12{,}36 : 9{,}77 \\ \underline{1236} : 977 = 1{,}265 \\ \;\;\underline{2590} \quad\;\; = \underline{\underline{1{,}27}} \\ \;\;\;\underline{6360} \\ \;\;\;\;\underline{4980} \\ \;\;\;\;\;\;95 \end{array}$$

Kontrollaufgaben

1. Aufg. 2a **2.** Aufg. 4b **3.** Aufg. 6c und d **4.** Aufg. 8e und 10b

Stoffabschnitt 2.5.

Übung des Rechnens mit gebrochenen Zahlen (8 Std.)

Näherungswerte, zuverlässige Ziffern (2 Std.)

LE 17 (LB 80 bis 83)

Anliegen der Lerneinheiten 17 bis 19 ist die Reaktivierung und Erweiterung des in den Klassen 4 und 5 sowie in den Lerneinheiten 8, 10 und 14 erworbenen Wissens und Könnens über Näherungswerte. Die Erarbeitung von Regeln für das Rechnen mit solchen Werten dient nicht nur der Erhöhung der Lebensverbundenheit und der polytechnischen Bildung und Erziehung, sondern sie ist auch für die weltanschauliche Bildung und Erziehung bedeutsam.

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß Näherungswerte mit einer gewissen Ungenauigkeit behaftet sind und daß bei einem Näherungswert, für den keine Genauigkeitsgrenzen angegeben sind, seine Entstehung durch richtiges Runden als vereinbart gilt,
- können mit Hilfe von Ungleichungen angeben, zwischen welchen Zahlen gegebene Näherungswerte liegen,
- kennen „zuverlässige Ziffer" und können bei gegebenen Näherungswerten die Anzahl zuverlässiger Ziffern angeben,
- wissen, daß man bei Näherungswerten die Ziffern nach dem Komma nicht durch Nullen ergänzen darf.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Wiederholen und Vertiefen von „Näherungswert"

2. Stunde
- Erarbeiten und Festigen von „zuverlässige Ziffer"

Methodische Hinweise

Wiederholen und Vertiefen von „Näherungswert" Zur Sicherung des Ausgangsniveaus sollte das Runden natürlicher Zahlen auf Vielfache von Zehnerpotenzen und von Dezimalbrüchen auf eine oder zwei Stellen nach dem Komma geübt werden sowie umgekehrt das Angeben natürlicher Zahlen, die beim Runden auf eine gegebene Zahl führen: Auftrag B 42 (a mdl., b schriftl.), Aufg. 1 und 4 (mdl.), Aufg. 3 (schriftl.).

Den Begriff „Näherungswert" kann man unter Einbeziehen von Auftrag B 43 reaktivieren. Dabei wird erneut bewußtgemacht, daß beim Messen von Längen, Massen oder Zeiten stets Näherungswerte auftreten, die in Abhängigkeit vom jeweiligen Sachverhalt, von ihrem Verwendungszweck sowie vom verwendeten Meßinstrument unterschiedliche Genauigkeit aufweisen. Im allgemeinen werden Sachverhalt und Verwendungszweck die Wahl des Meßinstruments beeinflussen, sogar bestimmen. Durch einige Beispiele wird die unterschiedliche Genauigkeit von Meßinstrumenten deutlich: Personenwaage (1 kg), Küchenwaage (10 g), Briefwaage (1 g), Zeichenlineal (1 mm), Tafellineal (1 cm), Skisprung-Weitenmeßanlagen (0,5 m), Stoppuhr (0,1 s), elektronische Zeitmessung (0,01 s). Dabei ergibt sich zwanglos die Frage, wie man die Genauigkeitsgrenzen eines Näherungswertes aufschreiben bzw. einem gegebenen Näherungswert seine Genauigkeit „ansehen" kann. Zum Motivieren einer angemessenen Schreibweise lassen sich Massenangaben auf Verpackungen nutzen: z. B. Würfelzucker 500 g $\pm$ 10 g. Die Schüler sollten diese Angaben erklären, selbständig die jeweils kleinste und größte enthaltene Masse ermitteln und die Genauigkeitsgrenzen durch eine Ungleichung der Form $a \leqq m \leqq b$ angeben.

Erarbeiten und Festigen von „zuverlässige Ziffer" Einleitend wird mitgeteilt, daß für jeden Näherungswert, bei dem keine Genauigkeitsgrenzen vermerkt sind, vorausgesetzt wird, daß er durch richtiges Runden entstanden ist. Man wird aber darauf hinweisen, daß diese Vereinbarung relativ willkürlich und nicht immer gerechtfertigt ist. Dies sollte durch Beispiele erläutert werden, ohne dabei vorschnell eine Ungleichung anzugeben. Die Schüler erhalten z. B. den Auftrag, für den Näherungswert $l = 2{,}4$ cm (LB 81) zunächst den kleinsten (größten) Dezimalbruch mit zwei (drei, vier) Dezimalstellen anzugeben, der bei richtigem Runden auf 2,4 führt: also 2,35 und 2,44; 2,350 und 2,449; 2,3500 und 2,4499. Dadurch wird ihnen die Abgeschlossenheit des Intervalls $2{,}35 \leqq l < 2{,}45$ nach links und seine Offenheit nach rechts deutlich.

Im Interesse der Vereinfachung wird danach allerdings vereinbart, auf *beiden* Seiten der Ungleichung künftig das Zeichen „=" zu setzen, was auch aus der Sicht der im Schwerpunkt zuvor erläuterten und in der Praxis weit verbreiteten Beispiele nahegelegt wird, also: $2{,}35 \leqq l \leqq 2{,}45$ (im Sinne von $l = 2{,}4$ m $\pm$ 0,05 m). Die Ziffern 2 und 4 dieses Näherungswertes l werden nun als „zuverlässige Ziffern" bezeichnet und durch Unterstreichen als solche gekennzeichnet. Zur Begriffsfestigung unterstreichen die Schüler die zuverlässigen Ziffern der Näherungswerte aus Beispiel B 43 und ermitteln jeweils deren Anzahl. Dabei muß deutlich werden, daß bei Dezimalbrüchen die Nullen links von der ersten von Null verschiedenen Ziffer nicht zu den „zuverlässigen Ziffern" gezählt werden. Dies bedeutet natürlich nicht, daß diese Nullen etwa „unsicher" oder „ungewiß" sind. Ferner ist auf die unterschiedliche Anzahl zuverlässiger Ziffern der Näherungswerte 7,9 und 7,90 einzugehen und dies durch Bild B 30 (LB 82) zu verdeutlichen. Die Schüler erkennen, daß man Näherungswerte nicht durch Nullen nach dem Komma ergänzen darf, da eine ergänzte Null einen genaueren Näherungswert vortäuscht.

Es ist auch möglich, hier auf das Problem der „End-Nullen" bei natürlichen Zahlen als Näherungswerte einzugehen. Der Angabe $m = 400$ g kann man nicht ansehen, ob sie eine, zwei oder drei zuverlässige Ziffern hat. Dies hängt davon ab, welche der folgenden Ungleichungen für m gilt:

$350 \text{ g} \leqq m \leqq 450 \text{ g}, \quad 395 \text{ g} \leqq m \leqq 405 \text{ g}, \quad 399{,}5 \text{ g} \leqq m \leqq 400{,}5 \text{ g}.$

Rechnet man also mit einem solchen Näherungswert, muß stets dazu gesagt werden (eventuell durch Unterstreichen), wieviel zuverlässige Ziffern er hat.

Bei statistischen Näherungswerten wird die Genauigkeit häufig durch die Verwendung von Zahlwörtern deutlich; durch die Angabe *Die Einwohnerzahl der Hauptstadt der DDR beträgt 1,166 Millionen* wird ausgedrückt, daß der Näherungswert 1166000 vier zuverlässige Ziffern hat. Die Schüler können selbst derartige Zahlenangaben zusammentragen, als Näherungswerte durch Angabe entsprechender Ungleichungen interpretieren und die jeweilige Anzahl zuverlässiger Ziffern angeben.

Zum Festigen werden die Aufgaben 5, 9 (mdl.) und 8 (schriftl.) empfohlen. Ferner sollte das Angeben von Näherungswerten zu gegebenen unendlichen periodischen Dezimalbrüchen bei vorgegebener Anzahl zuverlässiger Ziffern geübt werden. Dazu können Beispiel B 44 und Auftrag B 44 genutzt werden.

Hinweis: Auf die Einführung eines Zeichens zur Unterscheidung zwischen Näherungswert und genauem Wert wird verzichtet. Es ist üblich, bei einem Näherungswert mit zuverlässigen Ziffern das Zeichen „=" zu verwenden; sonst müßte bei gemessenen Werten stets nur mit dem Zeichen „≈" gearbeitet werden. Dieses Zeichen sollte nur dann verwendet werden, wenn offensichtlich gerundet oder geschätzt worden ist.

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 13 **2.** Aufg. 10

Addition und Subtraktion von Näherungswerten (1 Std.)

LE 18 (LB 83 bis 85)

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß eine mit Näherungswerten berechnete Summe oder Differenz höchstens so genau sein kann wie der ungenaueste dieser Näherungswerte,
- kennen eine Regel zum Addieren oder Subtrahieren von Näherungswerten und können diese anwenden.

Schwerpunkte

- Erarbeiten einer Regel zum Addieren oder Subtrahieren von Näherungswerten
- Üben und Anwenden der Regel

Methodische Hinweise

Erarbeiten einer Regel zum Addieren oder Subtrahieren von Näherungswerten Die Notwendigkeit von Regeln für das Rechnen mit Näherungswerten wird damit motiviert, daß bisher eine gewisse Unsicherheit besteht, auf welche Stellenzahl das jeweilige Ergebnis zu runden ist. Beim Erarbeiten der 1. Regel kann wie im Lehrbuch auf Beispiel B 18 (LB 51) zurückgegriffen und daran mit Hilfe der Ungleichungen

$$17{,}5\text{ kg} \leqq m_1 \leqq 18{,}5\text{ kg} \qquad 3{,}615\text{ kg} \leqq m_3 \leqq 3{,}625\text{ kg}$$
$$5{,}55\text{ kg} \leqq m_2 \leqq 5{,}65\text{ kg} \qquad 4{,}65\text{ kg} \leqq m_4 \leqq 4{,}75\text{ kg}$$

begründet werden, daß man über den Zahlenwert der Gesamtmasse nur weiß, daß er jede Zahl von 31,315 bis 32,525 sein kann. Die Angabe 31,92 kg täuscht daher eine sinnlose Genauigkeit (nämlich von 31,915 bis 31,925) vor; nur 32 kg kommt als dem

Sachverhalt angemessener Näherungswert für m in Frage. Man sollte aber nicht verschweigen, daß 32 kg kein „idealer“ Näherungswert für m ist, da daraus eigentlich $31{,}5\text{ kg} \leqq m \leqq 32{,}5\text{ kg}$ folgen würde, obwohl m auch z. B. 31,4 kg sein kann. (32 kg ist eigentlich ein noch „zu genauer“ Näherungswert.)

Es ergibt sich nun die Frage, ob man auch ohne Arbeiten mit Ungleichungen erkennen kann, auf welche Stelle eine Summe von Näherungswerten gerundet wird. Anhand des *Tafelbildes* (rechts) läßt sich deutlich machen, daß man sich beim Runden der Summe am ungenauesten Näherungswert orientiert, also an demjenigen, bei dem die letzte zuverlässige Ziffer am weitesten links steht; auf deren Stelle wird gerundet. Abschließend lesen die Schüler die Regel 1 (Merksatz B 19). Sie müssen einsehen,

Tafelbild:

$$
\begin{array}{rrrrl}
 & 1 & \underline{8} & & \text{kg} \\
 & & 5, & 6 & \text{kg} \\
 & & 3, & 6\;2 & \text{kg} \\
+ & & 4, & 7 & \text{kg} \\
\hline
 & 3 & \underline{1}, & 9\;2 & \text{kg} \\
\approx & 3 & 2 & & \text{kg}
\end{array}
$$

- daß ein solches Vorgehen praktischen Bedürfnissen gerecht wird und ein Mitführen von Dezimalstellen, die ein genaues Ergebnis nur vortäuschen, vermeidet,
- daß diese Regel nicht beweisbar, sondern nur eine „Faustregel“ zum Vereinfachen des Rechnens mit Näherungswerten ist und
- daß sie zwar nicht in jedem Fall die Zuverlässigkeit aller Ziffern garantiert, es aber gewiß sinnlos wäre, noch mehr Ziffern, als die Regel fordert, anzugeben.

Hinweis: In der Regel wird nichts über die Zuverlässigkeit der Ziffern im Ergebnis ausgesagt. Man sollte daher beim Ergebnis auch nicht von zuverlässigen oder unzuverlässigen Ziffern reden.

Es ist unbedingt erforderlich, auch auf natürliche Zahlen als Näherungswerte einzugehen und an einem Beispiel das Handhaben der Regel zu verdeutlichen. Sind z. B. 35000, 4800 bzw. 980 Näherungswerte, die durch Runden auf Vielfache von 1000, 100 bzw. 10 entstanden sind, so wird ihre Summe 40780 der Regel 1 entsprechend auf 41000 gerundet. (Da 35000 der Näherungswert ist, bei dem die letzte zuverlässige Ziffer (5) am weitesten links (Vielfaches von 1000) steht, ist die Summe auch auf ein Vielfaches von 1000 zu runden.)

Zum **Üben und Anwenden der Regel** werden die Aufgaben aus Beispiel B 45 (UG) und die Aufgaben 2a und 3a (SSA) empfohlen. Dabei wird darauf orientiert, bereits vor dem Rechnen den „entscheidenden“ Operanden herauszusuchen und die betreffende Dezimalstelle zu unterstreichen (im Beispiel B 45a also 7). Zum weiteren Üben bietet sich Beispiel B 46 an. Daran sollte deutlich werden, daß man eigentlich mit 12,4 und 0,5 anstelle von 12,428 und 0,54321 hätte rechnen können, da vor dem Rechnen schon feststeht, daß die Summe auf „Einer“ zu runden ist. Im Interesse rationelleren Rechnens wird man für künftiges Addieren oder Subtrahieren von Näherungswerten empfehlen, zunächst die Eingangswerte so zu runden, daß sie nur noch eine Stelle mehr haben als das Ergebnis entsprechend Regel 1.

Anschließend wird Aufgabe 5 gelöst. Der Ansatz (einschließlich Skizze) sollte möglichst selbständig gefunden werden. Beim Berechnen von $2 \cdot 21{,}7$ m bzw. $2 \cdot 42{,}5$ m wird hervorgehoben, daß die Multiplikation mit 2 eine verkürzte Addition und 2 kein Näherungswert ist. Die Schüler sollten aber auch erkennen, daß bei Anwendungsaufgaben (vor allem Materialberechnungen) der Näherungswert des Ergebnisses nicht immer auf Grund der Rundungsregeln, sondern nach praktischen Gesichtspunkten ermittelt wird. (Vgl. LE 14)

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 2c, 3c **2.** Aufg. 6

Multiplikation und Division von Näherungswerten (3 Std.)

LE 19 (LB 85 bis 89)

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß die Genauigkeit eines Produkts oder Quotienten von Näherungswerten von deren Genauigkeit abhängt,
- kennen eine Regel zum Multiplizieren oder Dividieren von Näherungswerten und können diese anwenden,
- kennen eine Regel für das Runden von Zwischenergebnissen beim Rechnen mit Näherungswerten und können diese anwenden,
- können Näherungswerte für Summen und Produkte periodischer Dezimalbrüche ermitteln.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeiten einer Regel für das Multiplizieren oder Dividieren von Näherungswerten
- Üben und Anwenden der Regel

2. Stunde
- Erarbeiten einer Regel für das Runden von Zwischenergebnissen
- Anwenden der Regeln beim Rechnen mit Näherungswerten

3. Stunde
- Vertiefen des Arbeitens mit Näherungswerten für periodische Dezimalbrüche

Methodische Hinweise

Das **Erarbeiten einer Regel für das Multiplizieren oder Dividieren von Näherungswerten** kann anhand der zu Beginn der LE stehenden Aufgabe (LB 85) erfolgen. Sie wird überwiegend im Unterrichtsgespräch gelöst. Das Verwenden von Ungleichungen liegt wegen des analogen Vorgehens beim Addieren nahe; zudem ist in LE 10 bereits in dieser Weise gearbeitet worden. Die Produkte $32{,}4 \cdot 22{,}3$; $32{,}35 \cdot 22{,}25$ und $32{,}45 \cdot 22{,}35$ sollten arbeitsteilig berechnet werden. Die Schüler müssen erkennen, daß die Angabe $722{,}52\ \mathrm{m}^2$ vortäuscht, daß der genaue Wert zwischen $722{,}515\ \mathrm{m}^2$ und $722{,}525\ \mathrm{m}^2$ liegt, was sie gewiß für übertrieben genau halten werden. Man kann auch bewußtmachen, daß bei einer Rechtecksfläche, deren Seiten etwas länger als 35 m und 20 m sind, eine Fläche von $0{,}5\ \mathrm{m}^2$ (etwa ein Quadrat der Seitenlänge 0,7 m) ohnehin vernachlässigt werden kann. Die Schüler werden daher von selbst auf $723\ \mathrm{m}^2$ oder $720\ \mathrm{m}^2$ runden. Durch Vergleich mit $719{,}7875\ \mathrm{m}^2 \leq l \cdot b \leq 725{,}2575\ \mathrm{m}^2$ erkennen sie, daß 723 etwas zu genau ($l \cdot b$ müßte zwischen 722,5 und 723,5 liegen), 720 dagegen etwas zu ungenau ist ($l \cdot b$ würde zwischen 715 und 725 liegen). Es wird mitgeteilt, daß im Interesse eines künftig einheitlichen Vorgehens beim Runden der Produkte (und auch der Quotienten) eine grobe, keineswegs allen Ansprüchen genügende, aber leicht handliche „Faustregel“ vereinbart wird. Die Schüler lesen die Regel 2 (Merksatz B 20) im Lehrbuch, wenden sie auf das berechnete Produkt an und erhalten als Näherungswert 723 m². Abschließend wird darauf hingewiesen, daß man die Ergebnisse auf keinen Fall mit mehr Stellen angeben wird, als es die Regel fordert, daß es manchmal aber sinnvoll ist, sie mit weniger Stellen anzugeben. Es darf allerdings nicht der Eindruck entstehen, daß die Forderung nach exakter Ergebnisermittlung damit hinfällig wird oder im Widerspruch dazu steht. Der Schüler muß also künftig stets überlegen, ob er mit genauen oder Näherungswerten rechnet.

Zum **Üben und Anwenden der Regel** berechnen die Schüler 1,51 · 7,4 (Beispiel B 47); 4,7 · 0,75; 16,4 : 2,5 (Beispiel B 48) als Produkt bzw. Quotient von Näherungswerten; die Nebenrechnung führen sie selbständig aus. Das Runden des dabei erhaltenen Ergebnisses wird im Unterrichtsgespräch begründet. Die Schüler sollten für eine Übergangszeit dazu angehalten werden, die zuverlässigen Ziffern der Eingangswerte zu unterstreichen und nach dem Überschlag, vor dem Rechnen die „Struktur“ des gerundeten Ergebnisses anzugeben. Dabei könnte das folgende *Tafelbild* entstehen:

1. *Aufgabe:*	1,51 · 7,4	4,7 · 0,75	16,4 : 2,5
2. (*z:*	*3 2*	*2 2*	*3 2)*
3. (kleinstes *z*:	*2*	*2*	*2)*
4. Überschlag:	2 · 7 = 14	5 · 0,8 = 4	16 : 2 = 8
5. Runden auf:	– –	–,–	–,–
6. Ergebnis (Nebenr.):	11,174	3,525	6,56
7. Ergebnis (rund):	11	3,5	6,6

(*z* bedeutet: Anzahl zuverlässiger Ziffern; in Klammern Stehendes wird nur gesprochen.)

Damit deutlich wird, daß beim Runden des Ergebnisses der Nebenrechnung die Nullen vor der ersten von Null verschiedenen Ziffer nicht mitgezählt werden und wie man beim Runden des Ergebnisses auf Vielfache von Zehnerpotenzen vorgeht, sollte auf die folgenden Beispiele nicht verzichtet werden:

1. *Aufgabe:*	0,204 · 0,19	5860 · 0,074
2. (*z*:	*3 2*	*3 2)*
3. (kleinstes *z*:	*2*	*2)*
4. Überschlag:	0,2 · 0,2 = 0,04	6000 · 0,07 = 420
5. Runden auf:	0,0_ _	_ _0
6. Ergebnis (Nebenr.):	0,03876	433,64
7. Ergebnis (rund):	0,039	430

Zum weiteren Üben können die Aufgaben 1b, f oder auch die (Anwendungs-) Aufgaben 12 und 9 gelöst werden (SSA). Dabei schreiben die Schüler nur die Zeilen 1, 4, 5, 7 und die Nebenrechnung.

Das **Erarbeiten einer Regel für das Runden von Zwischenergebnissen** kann anhand der Aufgabe 7 erfolgen. Die Schüler erkennen, daß wegen Regel 2 das Volumen $V = 8{,}4\ \mathrm{m} \cdot 5{,}4\ \mathrm{m} \cdot 3{,}7\ \mathrm{m}$ auf zwei (zuverlässige) Ziffern zu runden ist und daher wegen des Überschlags $8 \cdot 5 \cdot 4 = 160$ für V ein Näherungswert der Form _ _0 m³ anzugeben ist. Die Nebenrechnung wird schrittweise ausgeführt (SSA): 8,4 · 5,4 = 45,36; 45,36 · 3,7 = 167,832. Die Schüler runden auf 170 m³. Es wird nun die

Frage gestellt, ob man das Zwischenergebnis schon auf 45,4 oder 45 hätte runden können. Die Schüler berechnen arbeitsteilig $45{,}4 \cdot 3{,}7$ $(= 167{,}98)$ und $45 \cdot 3{,}7$ $(= 166{,}5)$ und erkennen, daß auch diese Produkte auf 170 m³ führen. Für künftiges Rechnen mit Näherungswerten wird zum Vermeiden unnötigen Rechenaufwands vereinbart, Zwischenergebnisse zu runden, dabei aber „vorsichtshalber" eine Ziffer mehr beizubehalten, als die Regeln für das Endergebnis empfehlen. Abschließend lesen die Schüler Regel 3 (Merksatz B 21) im Lehrbuch. Eventuell können sie danach auch das Beispiel B 49 durchlesen und erläutern.

Zum **Anwenden der Regeln** werden die Aufgaben 8 und 2a, c empfohlen (SSA). Dabei wird konsequent auch von Regel 3 Gebrauch gemacht. Es ist aber auch möglich, die Oberfläche eines Quadermodells berechnen zu lassen, nachdem die Schüler dessen Kantenlängen (auf mm genau) gemessen haben. Die Teilprodukte werden arbeitsteilig (SSA), deren Summe wird im Unterrichtsgespräch berechnet.

Durch folgende Aufgabe wird der Nutzen von Regel 3 besonders deutlich: „Wie groß ist der durchschnittliche Hektarertrag auf einem rechteckigen Weizenfeld, das 820 m lang und 530 m breit ist und auf dem 2200 dt Weizen geerntet wurden?"

Lösung: $A = \underline{82}0\ \text{m} \cdot \underline{53}0\ \text{m}$

NR: $\underline{820 \cdot 530}$
$$\begin{array}{r} 4100 \\ \underline{24600} \\ 434600 \end{array}$$

$A = \underline{434}600\ \text{m}^2$
$ = \underline{43},4600\ \text{ha}$
$ \approx \underline{43},5\ \text{ha}$

$x = \underline{22}00\ \text{dt} : A$

NR: $\underline{22}00 : \underline{43},5$
$$\begin{array}{r} \underline{22000 : 435} = \underline{50},57 \\ \underline{2500} \quad \approx \underline{51} \\ \underline{3250} \\ 105 \end{array}$$

Der durchschnittliche Hektarertrag beträgt rund 51 dt. (Der Überschlag wird mündlich ausgeführt.)

Die Schüler erkennen, daß das Zwischenrunden von 43,46 auf 43,5 die Division erheblich erleichtert.

Beim **Vertiefen des Arbeitens mit Näherungswerten für periodische Dezimalbrüche** sollten die Schüler zunächst an Beispielen erkennen, daß man das schriftliche Rechnen nicht ohne weiteres von endlichen auf unendliche Dezimalbrüche übertragen kann (vgl. S. 98). Diese Erkenntnis kann auf folgende Weise verstärkt werden: Man läßt vermuten, auf welche Ergebnisse die Produkte $p_1 = 0{,}\overline{3} \cdot 0{,}\overline{7}$, $p_2 = 0{,}\overline{3} \cdot 0{,}7$ und $p_3 = 0{,}3 \cdot 0{,}\overline{7}$ führen. Manche Schüler werden in jedem Fall $0{,}\overline{21}$ vorschlagen; ihnen kann entgegengehalten werden, daß p_2 und p_3 kleiner als p_1 sein müssen. Eventuell wird auch vorgeschlagen, zugehörige gemeine Brüche zu suchen, diese zu multiplizieren und das Produkt wieder in einen Dezimalbruch umzuwandeln. Sollten sich Schüler erinnern, daß $0{,}\overline{7} = \frac{7}{9}$ $\left(\text{und } 0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}\right)$ ist, so kann dieser Gedanke aufgegriffen werden:

$$p = 0{,}\overline{3} \cdot 0{,}\overline{7} = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{27} = 0{,}\overline{259};$$

dadurch läßt sich die Vermutung $0{,}\overline{21}$ endgültig widerlegen. Zugleich werden aber auch die Schwierigkeiten beim Rechnen mit unendlichen Dezimalbrüchen deutlich. Als praktikabler Ausweg bietet sich das Ersetzen der unendlichen Dezimalbrüche durch gerundete endliche (als Näherungswerte) an. Man erhält dann allerdings nur Näherungswerte als Ergebnisse. Diese können aber beliebig genau ermittelt werden, je nachdem, wieviel zuverlässige Ziffern man für die gerundeten endlichen Dezimalbrüche wählt:

1 zuverlässige Ziffer	$0{,}3$	$\cdot\, 0{,}8$	$= 0{,}24$	$\approx 0{,}2$
2 zuverlässige Ziffern	$0{,}33$	$\cdot\, 0{,}78$	$= 0{,}2574$	$\approx 0{,}26$
3 zuverlässige Ziffern	$0{,}333$	$\cdot\, 0{,}778$	$= 0{,}259074$	$\approx 0{,}259$
4 zuverlässige Ziffern	$0{,}3333$	$\cdot\, 0{,}7778$	$= 0{,}25924074$	$\approx 0{,}2592$

(Die Ergebnisse können arbeitsteilig berechnet werden; das letzte kann auch gegeben werden.)

Obwohl diesbezüglich keine Fertigkeiten anzustreben sind, sollte das Rechnen mit periodischen Dezimalbrüchen anhand einfacher Aufgaben geübt werden. Dabei wird man stets vorgeben, auf wieviel Stellen die Operanden oder das Ergebnis gerundet werden sollen. Dies gilt auch dann, wenn endliche Dezimalbrüche als Operanden vorkommen, da diese als genaue und nicht als Näherungswerte anzusehen sind. Zum Üben eignen sich die Aufgaben 13 bis 15.

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 1a, e; 2d **2.** Aufg. 6 **3.** Aufg. 15a

Lösen von formalen und Sach- und Anwendungsaufgaben (2 Std.)
(LB 89 bis 92)

Der Lehrplan fordert für den Stoffabschnitt 2.5. das wiederholende Behandeln von Aufgaben, in denen mehrere Rechenoperationen miteinander verknüpft werden, sowie von Sach- und Anwendungsaufgaben. Obwohl Schwerpunktsetzung und Aufgabenzusammenstellung für diese beiden Stunden in Abhängigkeit vom erreichten Wissens- und Könnensniveau der jeweiligen Klasse vom Lehrer selbst vorgenommen werden sollten, werden nachstehend zwei Beispiele zur Gestaltung dieser Stunden im Sinne „komplexer Übungen" (vgl. Lehrplan Mathematik, Klassen 4 und 5, S. 10ff.) vorgeschlagen. Es ist aber auch möglich, die Aufgaben jeder Stunde unter einem „Dachthema" zusammenzufassen. Das Lehrbuch bietet dafür einige Aufgabenkomplexe an. Auf jeden Fall sollten die Stunden auch der Vorbereitung der abschließenden Kontrollarbeit dienen.

Ziele

Die Schüler
- haben ihr Können im mündlichen und schriftlichen Rechnen mit und im Ordnen von gebrochenen Zahlen vervollkommnet,
- haben ihre Fähigkeiten im inhaltlichen Lösen von Ungleichungen und gleichzeitigen Bedenken unterschiedlicher Bedingungen weiterentwickelt,
- haben sich darin geübt, Aufgabentexte zu analysieren, durch Nutzen von Skizzen, Tabellen o. ä. den jeweiligen mathematischen Sachverhalt zu erkennen und einen (rationellen) Lösungsweg zu finden,
- können bei Sach- und Anwendungsaufgaben numerische Ergebnisse sachlich richtig interpretieren und diese mit der möglichen Genauigkeit angeben.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Festigen des Ordnens und Rechnens sowie der Gesetzmäßigkeiten in Q_+

2. Stunde
- Festigen des Lösens von Sach- und Anwendungsaufgaben

Methodische Hinweise

Festigen des Ordnens und Rechnens sowie der Gesetzmäßigkeiten in Q_+ Die Schüler berechnen $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$, $x : y$; $y : x$, $y \cdot x$ für $x = 2{,}4$ und $y = 0{,}8$ (mdl.) und ordnen danach x, y und die berechneten Ergebnisse:

$0{,}\overline{3} < 0{,}8 < 1{,}6 < 1{,}92 < 2{,}4 < 3 < 3{,}2$.

Dabei werden folgende Gesetzmäßigkeiten und Begriffe bei gebrochenen Zahlen wiederholt:
- Kommutativgesetz der Multiplikation
- „Die Summe ist nicht kleiner als ihre Differenz."
- „Das Produkt kann kleiner als jeder Faktor, der Quotient größer als der Dividend sein."
- endlicher und unendlicher periodischer Dezimalbruch
- Reziprokes einer gebrochenen Zahl.

Möglich ist auch, die Gesetzmäßigkeiten zur Kontrolle der geordneten Zahlen heranzuziehen.

Die Schüler werden nun aufgefordert, dieselben Terme für $x = \frac{7}{6}$ und $y = \frac{9}{4}$ bei möglichst geringem Rechenaufwand (durch Nutzen bekannter Gesetzmäßigkeiten und Eigenschaften) selbst zu ordnen. Als Impulse seitens des Lehrers wären möglich: Denkt an die Abhängigkeit der Summe (der Differenz, des Produkts, des Quotienten) von den Summanden (Minuend und Subtrahend, den Faktoren, Dividend und Divisor)! Die Schüler sollten einige der Beziehungen $x < y$ (wegen $x < 2$, $y > 2$), $x + y > x$, $x + y > y$ (wegen $x > 0$, $y > 0$) sowie $x \cdot y > x$, $x \cdot y > y$, $x : y < x$, $y : x < y$ (wegen $x > 1$, $y > 1$), $x : y < y : x$ (wegen $x < y$) ohne zu rechnen herausfinden. Während einige Schüler bereits daraus z. B. die Ungleichungskette $x : y < x < y < x \cdot y$ und durch Berechnen von $y : x$ und Vergleichen mit x sowie von $x + y$ und $x \cdot y$ und Vergleichen untereinander ordnen können, gelangen die übrigen Schüler durch arbeitsteiliges Berechnen der Termwerte ebenfalls zu einer Ordnung der Zahlen. Dabei sollten sie möglichst durch Abschätzen zum Ziel gelangen, etwa: $\frac{14}{27} < 1$ und $\frac{7}{6} > 1$; $\frac{7}{6}$ ist „etwas" größer als 1 und $\frac{27}{14}$ „etwas" kleiner als (ist fast) 2.

Abschließend ergibt sich folgendes *Tafelbild:*

$x - y$	$x : y$	$< x$	$< y : x$	$< y$	$< x \cdot y$	$< x + y$
n. l.	$\frac{14}{27}$	$< \frac{7}{6}$	$< \frac{27}{14}$	$< \frac{9}{4}$	$< \frac{21}{8}$	$< \frac{41}{12}$

Danach unterstreichen die Schüler die Brüche, die sich als periodische Dezimalbrüche schreiben lassen, und begründen ihre Entscheidung. Man kann aber auch zusätzlich einige Zahlen zwischen zwei im Tafelbild „benachbarten" Zahlen, z. B. $\frac{9}{4}$ und $\frac{21}{8}$, oder alle Zahlen, die sich von einem der Termwerte um $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ oder 0,1 unterscheiden, angeben lassen. Dabei läßt sich erneut bewußtmachen, daß gebrochene Zahlen dicht liegen und zwischen einer Zahl (außer 0 und 1) und ihrem Reziproken stets die Zahl 1 liegt.

Abschließend ermitteln die Schüler umgekehrt zu einigen der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen (nichtnatürliche) gebrochene Zahlen (in beliebiger Darstellung), die diese erfüllen:

a) $x : y < x \cdot y$ **b)** $x \cdot y < x : y$ **c)** $x \cdot y = x : y$
d) $x + y < x \cdot y < y : x$ **e)** $x + y < x - y < x \cdot y$
f) $x - y > x : y$ **g)** $x + y < x : y$ **h)** $x + y < x : y < x \cdot y$

Lösungen werden durch Probieren gefunden, z. T. auch durch Nutzen von Gesetzmäßigkeiten. Die Nichtlösbarkeit bei e) und h) sollte begründet werden. Bei h) kann etwa so überlegt werden: $x : y < x \cdot y$ ist nur erfüllbar, wenn $y > 1$ gilt; dann gilt $x + y > x$ und $x : y < x$; alle Bedingungen können also nicht erfüllt werden. Durch solche instruktiven Ketten von Begründungsschritten werden die Fähigkeiten im Beweisen weiterentwickelt.

Festigen des Lösens von Sach- und Anwendungsaufgaben Hauptgegenstand der Stunde könnte Aufgabe 25 (LB 91) sein. Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine komplexe Anwendungsaufgabe mit einer überflüssigen Zahlenangabe (50 cm). Es ist günstig, sie möglichst problemhaft zu stellen und die Schüler in die Problemfindung weitestgehend einzubeziehen. Auch die weitere selbständige Schülerarbeit sollte sich nicht nur auf das Berechnen, sondern auf das Mathematisieren und Lösungsfinden erstrecken. So wird man z. B. dazu auffordern, die Form des Kastens und die seiner Seitenflächen mathematisch zu beschreiben, eine Skizze anzufertigen, gesuchte Größen zu benennen sowie gegebene und gesuchte Größen mittels Variablen zu notieren. Zu Aufgabe 25a kann zusätzlich das Skizzieren einer „Abwicklung" gefordert werden. Vor dem Rechnen sollte man zum Überschlag anhalten. Als Maßeinheit aller Längen wird „Meter" gewählt, da bereits zwei Längen in Metern angegeben sind und bei 510 cm (statt 5,1 m) die Unsicherheit der Null nicht mehr erkennbar wäre. Bei der Angabe der Ergebnisse müssen die Schüler darauf achten, daß es sich um Näherungswerte handelt, wobei das Runden sich nach praktischen Erfordernissen richten wird. Bei Aufgabe 25b sollte man als Büchsenanzahl sowohl 2 als auch 3 gelten und dies begründen lassen (Man kommt eventuell mit 2 Büchsen aus, wird aber sicherheitshalber doch drei kaufen). Bei Aufgabe 25e kann für einige Schüler auch ein anderer Maßstab (z. B. 1 : 50) gewählt werden.

Statt dessen könnte man als „Komplexaufgabe" auch das Problem stellen: Berechnet, wieviel Farbe, Leim und Tapete wir brauchen, wenn wir das Klassenzimmer renovieren und tapezieren wollen! Dadurch kann auch zum selbständigen *Finden* und *Formulieren* von Teilproblemen, Messen zugänglicher und für die Rechnung erforderlicher Größen usw. angeregt werden.

Stoffgebiet 3

Einführung in die Gleichungslehre; Proportionalität (30 Std.)

Vorbemerkungen

Beide Abschnitte dieses Stoffgebietes nehmen innerhalb zweier stofflicher Leitlinien eine zentrale Stellung ein:
Gleichungen und Ungleichungen haben die Schüler von Klasse 1 an gelöst, teilweise sogar Gleichungen, die in ihrer Struktur komplizierter sind als die im Abschnitt 3.1. zu behandelnden. Doch wurden bisher alle Gleichungen inhaltlich gelöst, meist durch Ausnutzen der Beziehungen der auftretenden Operationen zu ihren Umkehroperationen. Es wurden auch keine Gleichungstypen betrachtet, sondern es wurde über jede Gleichung einzeln nachgedacht. Jetzt hingegen werden Umformungsregeln für zwei Typen von Gleichungen erarbeitet und angewandt. Dadurch wird für diese Gleichungen, von denen jede einzelne (zumindest für natürliche Zahlen als Koeffizienten und Lösungen) von den Schülern bereits gelöst werden kann, das inhaltliche Lösen durch das kalkülmäßige abgelöst. In diesem Zusammenhang werden einige Begriffe definiert bzw. eingeführt, die z. T. in vorangegangenen Klassenstufen lediglich verwendet wurden. Als die wichtigsten Ergebnisse dieses Abschnittes sind anzusehen:
- Die Schüler kennen den Begriff „Term". Sie sind mit den Begriffen „Gleichung" und „Ungleichung" vertraut und können den Unterschied von Gleichungen (Ungleichungen) ohne und mit Variablen hinsichtlich des Wahrheitswertes beschreiben. Sie kennen den Begriff „leere Menge". Sie sind mit den Begriffen „Lösung" und „Lösungsmenge" vertraut und wissen, daß die Lösungsmenge vom Variablengrundbereich abhängt.
- Sie können Gleichungen vom Typ $a \cdot x = b$ bzw. $a : x = b$ sicher lösen, dabei ihr Vorgehen unter Bezug auf das allgemeine Verfahren beschreiben und begründen.
- Sie wissen, daß die allgemeine Betrachtung dieser Gleichungstypen durch das häufige Auftreten derartiger Gleichungen bei innermathematischen und praktischen Anwendungen berechtigt und als ein Mittel der Rationalisierung der geistigen Arbeit anzusehen ist.

Im Stoffabschnitt 3.2. beginnt mit der Behandlung der Proportionalität die explizite Behandlung von *Funktionen*. Dieser Stoffabschnitt ist ein Höhepunkt in der Vorbereitung des Funktionsbegriffs, der in Klasse 8 eingeführt wird. Durch ihn werden wichtige Voraussetzungen für viele praktische Anwendungen im Mathematikunterricht und für andere Unterrichtsfächer geschaffen. Zwar haben die Schüler zuvor in den Klassen 4 und 5 Sachaufgaben gelöst bzw. in Klasse 6 im Physikunterricht Sachverhalte betrachtet, denen direkte Proportionalität zugrunde liegt, beim Lösen haben sie jedoch immer nur den Einzelfall gesehen. Die zugrunde liegenden Gesetzmäßigkeiten haben sie mehr intuitiv genutzt. Jetzt sollen sie allgemeine Zusammenhänge und Eigenschaften der Funktionen $y = c \cdot x$ und $y = c \cdot \frac{1}{x}$ betrachten und die ge-

wonnenen Erkenntnisse beim Lösen von Aufgaben bewußt nutzen. Die wichtigsten Ergebnisse dieses Abschnittes sind:
- Die Schüler sind mit den Begriffen „(direkte) Proportionalität", „umgekehrte Proportionalität" (von Folgen bzw. Größenarten), „Proportionalitätsfaktor" vertraut und können sie definieren. Sie wissen, daß je nach Sachverhalt der Proportionalitätsfaktor eine Zahl oder eine Größe ist.
- Die Schüler können (direkte und umgekehrte) Proportionalitäten im kartesischen Koordinatensystem darstellen und wissen, daß in dem einen Fall die Punkte stets auf ein und derselben Geraden durch (0; 0) liegen, in dem anderen Falle auf einer gekrümmten Linie, die nicht durch (0; 0) geht.
- Sie kennen den Begriff „Verhältnis" und können Aussagen über gleiche Verhältnisse bei beiden Funktionstypen machen.
- Die Schüler können praktische Sachverhalte daraufhin untersuchen, ob ihnen direkte bzw. umgekehrte Proportionalität zugrunde liegt, und sie können entsprechende Aufgaben mit einer gesuchten Größe mittels Gleichungen sicher lösen.

Überdenkt man auch die anderen Lehrplanleitlinien, so kann gesagt werden:
- Das *Arbeiten mit Mengen* tritt an vielen Stellen auf:
  - Lösungsmengen bei Gleichungen und Ungleichungen
  - Folgen als geordnete Mengen, deren Elemente eine bestimmte Reihenfolge haben; geordnete Paare beim Zuordnen von Folgen; Proportionalität als geordnete Paare von Folgen
  - Grafische Darstellung als geordnete Paare mit geordneten Zahlenpaaren und Punkten als Bestandteile der Paare.
- Bezüglich der Könnensentwicklung kommt der Leitlinie *Zahlenbereiche* eine besondere Bedeutung zu. Dem Arbeiten mit Termen, dem Lösen von Gleichungen (insbesondere Verhältnisgleichungen), dem grafischen Darstellen direkter und umgekehrter Proportionalitäten liegen die gebrochenen Zahlen mit ihren Eigenschaften und Operationen zugrunde. Somit sind bei jeder Lerneinheit gewisse Könnenskomponenten im Umgang mit gebrochenen Zahlen wichtige Bestandteile des erforderlichen Ausgangsniveaus. Es ist jedoch jede Lerneinheit auch mit dem Ziel zu gestalten, dieses Niveau zu erhöhen. Ausgenommen sind davon solche Unterrichtssituationen, in denen neue Begriffe (z. B. Proportionalität) oder Gesetzmäßigkeiten (z. B. gleiche Verhältnisse bei umgekehrter Proportionalität) gewonnen werden sollen. In ihnen ist das Zahlenmaterial so zu wählen, daß Blick und Verständnis für das Wesentliche des Neuen nicht durch Rechenschwierigkeiten verdeckt werden.
- Die *sprachlich-logische Schulung* wird durch das Arbeiten mit einer Reihe wichtiger Definitionen fortgesetzt, durch deren Erarbeitung auch die Befähigung der Schüler zum Definieren weiterentwickelt wird.
  Beweise im engeren Sinne des Wortes werden in diesem Stoffgebiet nicht geführt. Die Sätze über gleiche Verhältnisse (LB 116) werden durch Beispiele gewonnen. Dies muß den Schülern in seiner Unvollkommenheit bewußtwerden. Allerdings läßt sich dieses Gewinnen durch Beispiele auch so gestalten, daß sich jeder Schritt verallgemeinern läßt, daß man also von einem beispielgebundenen Beweis sprechen kann. Begründungen, wozu auch die Probe bei Gleichungen zu zählen ist, treten jedoch mit gleicher Zielsetzung wie im Stoffgebiet 2 häufig auf.
- *Verfahren und Mittel geistiger Arbeit* kommen in vielfältiger Form zur Anwendung:
  - Das Lösen gewisser Gleichungen (einschließlich Verhältnisgleichungen) erfolgt nach festen Regeln.
  - Die dem Schüler bekannte (nicht-algorithmische) Handlungsanweisung für das Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben wird ausgebaut und spezifiziert.

- Das Anordnen von einander zugeordneten Daten bzw. von Gegebenem und Gesuchtem durch Tabellen ist als ein rationelles und übersichtliches Verfahren zur Erfassung des Wesentlichen zu verstehen.
- Das grafische Darstellen funktionaler Zusammenhänge wird von den Schülern als eine einprägsame Veranschaulichung wichtiger Eigenschaften dieser Zusammenhänge erkannt.

Auch für die *allgemeingeistige Entwicklung* und die *ideologische Erziehung* bestehen große Potenzen:

- Die Erörterung unterschiedlicher Ausgangs- (Motivierungs-) und Anwendungsbeispiele
  - trägt zur Entwicklung des Abstraktionsvermögens der Schüler bei;
  - zeigt den Schülern den Ursprung wichtiger mathematischer Begriffsbildungen in der Realität;
  - läßt die Schüler die Bedeutung derartiger Abstraktionen einerseits und die Grenzen der Anwendbarkeit mathematischer Modelle andererseits erkennen;
  - bietet durch die Auswahl von Sachverhalten, die für bestimmte Ausschnitte unserer gesellschaftlichen Wirklichkeit kennzeichnend sind, durch die klassenmäßige Wertung der Ergebnisse und persönliche Stellungnahme des Lehrers gute Möglichkeiten politisch-moralischer Erziehung (z. B. Stolz auf die Errungenschaften des sozialistischen Aufbaus; Sparsamkeit beim Verbrauch von Material).
- Die Probe bei formalen Gleichungen und Anwendungsaufgaben ist als Begründen nicht nur der sprachlich-logischen Schulung zuzurechnen. Sie ist vor allem als Beitrag zur Herausbildung von Gewissenhaftigkeit, Verantwortungsbewußtsein und einer kritischen Einstellung zur eigenen Arbeit zu sehen. Den gleichen Zielen dient es, wenn das grafische Darstellen in den Dienst der Erziehung zur Sauberkeit und Genauigkeit gestellt wird.
- Sauberkeit in den grafischen Darstellungen, beim Anlegen von Tabellen und Skizzen, beim übersichtlichen Anordnen der Lösung bei Sach- und Anwendungsaufgaben sind aber auch als Beitrag zur ästhetischen Erziehung zu sehen.

Kontrollaufgaben zum Stoffgebiet „3. Einführung in die Gleichungslehre; Proportionalität“

1. Bilde mit Hilfe der Terme $\frac{3}{13-4}$; $1-\frac{2}{3}$; $3\cdot\frac{1}{3}$

a) eine wahre Gleichung, **c)** eine falsche Gleichung,
b) eine wahre Ungleichung, **d)** eine falsche Ungleichung!

2. Löse die Gleichungen im Zahlenbereich Q_+ und führe die Probe durch!

a) $4\cdot e-10=38$ **c)** $0{,}25\cdot x=1$ **e)** $\frac{8}{x}=2$

b) $7\cdot u=3$ **d)** $\frac{w}{5}=1{,}2$ **f)** $\frac{2}{t}=\frac{3}{8}$

3. a) Die Hälfte einer Zahl ergibt $\frac{3}{4}$. Wie heißt die Zahl?

b) Wodurch muß man 7 dividieren, um 9 zu erhalten?

4. Für das Einzäunen eines rechteckigen Gartens benötigt man 76 m Maschendraht. Die Länge des Gartens beträgt 22 m.
   a) Berechne seine Breite!
   b) Wieviel Quadratmeter beträgt die Fläche des Gartens?
   c) Bei Verlängerung des Gartens um 10 m soll sich der Flächeninhalt nicht verändern.
   Wie breit muß dann der Garten sein?

5. Untersuche nachstehende Paare von Zahlenfolgen auf direkte bzw. umgekehrte Proportionalität!

a)

x	1,2	2	2,5
y	0,6	1	$\frac{5}{4}$

b)

x	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{4}$
y	$\frac{3}{2}$	1	0,75

c)

x	2	5	8
y	3	6	9

Übertrage die Zahlenpaare in ein Koordinatensystem!

6. Es gilt $s \sim \frac{1}{u}$. Berechne die fehlenden Glieder! Stelle zwei wahre Gleichungen der Form $s \cdot u = c$ auf!

s	1	$\frac{1}{2}$	?
u	?	20	4

7. Es gilt $a \sim b$. Berechne die fehlenden Glieder! Stelle zwei wahre Gleichungen der Form $b = c \cdot a$ auf!

a	$\frac{1}{5}$	0,8	?
b	?	8	10

8. Beim Abtransport von Kies muß ein LKW, dessen Fassungsvermögen $1{,}75\ m^3$ beträgt, 16 Fahrten durchführen. Wieviel Fahrten wären notwendig, wenn er bei jeder Fahrt $2\ m^3$ Kies laden könnte?

9. Petra ist jetzt doppelt so alt wie ihr 6jähriger Bruder Olaf. Wie alt wird Olaf sein, wenn Petra 24 Jahre alt ist?

10. Ein D-Zug legt in 2 h 20 min eine Entfernung von 210 km zurück. Wieviel Kilometer würde er bei gleicher Durchschnittsgeschwindigkeit in 3 h zurücklegen?

Stoffverteilung

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Stoffabschnitt 3.1.		Einführung in die Gleichungslehre	7 Std.
Terme, Gleichungen, Ungleichungen (LE 1)	1	– inhaltl. Lösen von Gleichungen, Ungleichungen – wahre, falsche Aussagen – Ausdrücke ohne Wahrheitswert	– „Term“ – „Gleichung“, „Ungleichung“, ohne und mit Variablen
Gleichungen und Ungleichungen mit Variablen	1	– inhaltl. Lösen von Gleichungen, Ungleichungen – Mengen, Elementbezie-	– Überführen von Gleichungen und Ungleichungen mit Variablen in Aussagen – „erfüllen“, „lösen“,

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
(LE 2)		hungen, Angabe von Mengen	„Lösung", „Lösungsmenge", „leere Menge", Zeichen „∅" – Existenz, Anzahl der Lösungen; Abhängigkeit vom Grundbereich
Lösen von Gleichungen der Form $a \cdot x = b$ (LE 3)	2	– Multiplikation und Division in Q_+ (insbes.: Umkehroperation; $\frac{x}{a} = \frac{1}{a} \cdot x$) – Division eines Produktes durch einen seiner Faktoren	– Gleichungen des Typs $a \cdot x = b$ – Lösungsverfahren für Gleichungen des Typs $a \cdot x = b$ – Probe
Lösen von Gleichungen der Form $\frac{a}{x} = b$ (LE 4)	3	– siehe LE 3 – Multiplikation von Quotienten	– Gleichungen des Typs $\frac{a}{x} = b$ – Lösungsverfahren für Gleichungen des Typs $\frac{a}{x} = b$ – Probe
Stoffabschnitt 3.2.		Proportionalität und Verhältnisgleichungen	23 Std.
Darstellen von Zusammenhängen in einem rechtwinkligen Koordinatensystem (LE 5)	1	– geordnetes Zahlenpaar – rechtwinkliges Koordinatensystem – Zuordnen von geordneten Zahlenpaaren zu Punkten und umgekehrt	– Abszissenachse, Ordinatenachse, Koordinatenursprung; Koordinaten eines Punktes (Abszisse/Ordinate) – Beschreiben der Lage von Punkten durch Koordinaten – Lesen von grafischen Darstellungen
Beispiele für direkte Proportionalität (LE 6)	1	– Vervielfachen – Kürzen, Erweitern – Rechteck/Quadrat (Umfang, Flächeninhalt) – Zerlegung einer nat. Zahl in zwei Faktoren	– Def. C 5 (zueinander proportionale Zahlenfolgen, Proportionalitätsfaktor) – Analyse und Vergleich von Graphen bzw. daraus entwikkelten Zahlenfolgenpaaren
Darstellen von Proportionalität in einem rechtwinkligen Koordinatensystem (LE 7)	1	– Def. C 5 (zueinander proportionale Zahlenfolgen) – Darstellen von geordneten Zahlenpaaren im Koordinatensystem	– Zahlenfolgenpaare als Punkte im Koordinatensystem abbilden – Bild einer Proportionalität – Graph als Kontrollmöglichkeit für proportionalen Sachverhalt
Proportionalität in der Praxis (LE 8)	1	– Proportionalitätsfaktor – Dichte – Vergleich von Brüchen	– Proportionalitätszeichen „~" – Untersuchen von Zusammenhängen auf Proportionalität – Proportionalitätsfaktor als abgeleitete Größe

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Umgekehrte Proportionalität (LE 9)	2	– Lesen von Graphen im Koordinatensystem – Flächeninhalt eines Rechtecks – Umkehroperation (Multiplikation/Division)	– Def. C 7 (umgekehrt proportionale Zahlenfolgen) – Untersuchen vorgegebener Sachverhalte auf umgekehrte Proportionalität – Darstellen umgekehrt proportionaler Sachverhalte im Koordinatensystem
Weitere Eigenschaften der direkten bzw. umgekehrten Proportionalität (LE 10)	1	– Vergleich gebrochener Zahlen – Lösen von Gleichungen der Form $a \cdot x = b$ und $a : x = b$ – Def. C 5 und Def. C 7 (zueinander proportionale und umgekehrt proportionale Zahlenfolgen)	– Steigen (Fallen) beider Zahlenfolgen als notwendiges, aber nicht hinreichendes Kriterium für direkte bzw. umgekehrte Proportionalität – wenn $a \sim b$, so $b \sim a$ bzw. wenn $a \sim \frac{1}{b}$, so $b \sim \frac{1}{a}$ und Verhalten des Proportionalitätsfaktors
Verhältnisse (LE 11)	1	– Differenzbildung – Kürzen und Erweitern – Bruchstrich und Divisionszeichen – Maßstab	– Verhältnisbegriff – Merksatz C 8 (Vergleich von Größen durch Verhältnisbildung)
Verhältnisse bei zueinander direkt proportionalen und bei zueinander umgekehrt proportionalen Zahlenfolgen (LE 12)	2	– direkte Proportionalität – Kürzen, Erweitern – Verhältnisbildung – umgekehrte Proportionalität – Verhältnisbildung – Reziprokenbildung	– gleiche Verhältnisse bei zueinander proportionalen Zahlenfolgen – Gleichwertigkeit mit Def. C 5 – gleiche Verhältnisse bei zueinander umgekehrt proportionalen Zahlenfolgen – Gleichwertigkeit mit Def. C 7 – Gegenüberstellung der Bildung gleicher Verhältnisse bei direkter und bei umgekehrter Proportionalität
Anwendungen zur direkten und umgekehrten Proportionalität (LE 13)	2	– Gleichungen – Verhältnis – Produkt – direkte und umgekehrte Proportionalität	– Anwenden der Kriterien für direkte und umgekehrte Proportionalität auf praktische Sachverhalte – Verschiedene Ausgangssituationen für Aufgabentypen – Systematisierung
Verhältnisgleichungen (LE 14)	2	– Umformungsregeln für Gleichungen der Form $a \cdot x = b$, $a : x = b$	– „Verhältnisgleichung“ („Proportion“) – Aufstellen und Lösen von Verhältnisgleichungen mit einer Variablen
Aufstellen und Lösen von Verhältnisglei-	5	– direkte und umgekehrte Proportionalität – Gleichungen der Form	– Anwenden der Eigenschaften der direkten und umgekehrten Proportionalität auf prak-

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
chungen (LE 15)		$\bar{a} \cdot x = b$ und $a : x = b$ bzw. Verhältnisgleichungen – Überschlag (Schätzen, Runden) – Rechnen mit Näherungswerten – Verfahren beim Lösen von Sachaufgaben (Gegebenes, Gesuchtes, usw.) – grafische Darstellung – Geschwindigkeit, Weg, Zeit – Volumenberechnung von Quadern	tische Sachverhalte – Funktionale Betrachtungen beim Analysieren praktischer Probleme – Lösen von Sachaufgaben zur direkten und umgekehrten Proportionalität sowie von Aufgaben, denen keine Proportionalität zugrunde liegt – Graphen zum Lösen von Aufgaben zu proportionalen Sachverhalten
Schwerpunkte zum gesamten Stoffgebiet	2	Aufgaben zur Wiederholung, Anwendung und Systematisierung gemäß Klassensituation, Vorbereitung der Klassenarbeit	
Leistungskontrolle und Auswertung	2		

Stoffabschnitt 3.1.

Einführung in die Gleichungslehre (7 Std.)

Terme, Gleichungen, Ungleichungen (1 Std.)

LE 1 (LB 93 bis 95)

Ziele

Die Schüler
- kennen die Begriffe „Term“, „Gleichung“ und „Ungleichung“ und können sie identifizieren und realisieren,
- wissen, daß Gleichungen und Ungleichungen ohne Variable Aussagen sind, die entweder wahr oder falsch sind.

Schwerpunkte

- Erarbeiten der Begriffe „Term“, „Gleichung“, „Ungleichung“
- Festigen der Begriffe „Term“, „Gleichung“, „Ungleichung“

Methodische Hinweise

Beim **Erarbeiten der Begriffe „Term", „Gleichung", „Ungleichung"** ist zu beatench, daß die Schüler mit den Begriffen „Gleichung" und „Ungleichung" seit Klasse 1 vertraut sind (inhaltliches Lösen). Es ist deshalb wichtig, weitere Ausführungen darüber besonders zu motivieren. Das kann dadurch geschehen, daß die Schüler Beispiel C 1 und den sich daran anschließenden Text im Lehrbuch durcharbeiten. Es können auch Teile der Aufgabe 3 besprochen werden.

Zweifelsfälle (wie Aufgabe 3d) werden als Motiv dafür genommen, den Begriff „Gleichung" („Ungleichung") präziser zu fassen. Bei dieser Begriffspräzisierung erkennen die Schüler:

- Äußeres Begriffsmerkmal für das Vorliegen einer Gleichung (Ungleichung) ist das Vorhandensein des Zeichens „=" („≠", „>", „<").
- Auf beiden Seiten vom Gleichheitszeichen muß etwas „Sinnvolles" stehen, und es muß sinnvoll sein, dazwischen das Gleichheitszeichen zu setzen. So ist z. B. $5 \mid 15 = 3$ nicht sinnvoll (obwohl auf beiden Seiten etwas „Sinnvolles" steht), weil man nicht eine Aussage mit einer Zahl gleichsetzen kann.
- Ob Gleichungen (Ungleichungen) vorliegen ist unabhängig davon, ob etwas Wahres ausgesagt wird bzw. ob man überhaupt von Wahrheit (Falschheit) sprechen kann (wie z. B. bei $x + y = 8$). Die Beantwortung der Frage, was als „sinnvoll" anzusehen ist, führt auf den Begriff „Term". Bei seiner Erarbeitung kann man von der Problemstellung ausgehen, eine Schreibmaschine bauen zu wollen, mit der man besonders gut mathematische Texte schreiben kann. (Welche Schriftzeichen müßte sie besitzen?) Beim Ausprobieren der Maschine wurde folgendes geschrieben:

a) 349	**b)** $5 \cdot a < 16$	**c)** $\frac{2}{3} + z:$	**d)** $3{,}4 : 5 > 6 \nmid 8$
e) $(a : 2 - 5) \cdot s$	**f)** $2 \cdot y - 1 = 21$	**g)** $3 \nmid 216$	**h)** $(3 + 7) \cdot a - b$

Die Diskussion, warum c), d) und h) nicht sinnvoll sind, führt zur Erklärung von „Term" (LB 94) und schließlich zur Definition C 1.

Hinweis: Obwohl Größengleichungen im Sinne von Definition C 1 keine Gleichungen sind (links und rechts vom Gleichheitszeichen stehen keine Terme im oben genannten Sinne), sollten sie im Unterricht mit in die Betrachtungen einbezogen werden. Das ist auch aus fachübergreifenden Aspekten heraus notwendig (Physikunterricht). Bei Anwendungsaufgaben führt das „Übersetzen" des Sachverhalts zunächst zu einer Gleichung zwischen Größen und Variablen für Größen und von dieser dann zu einer Gleichung mit Zahlen und mit Variablen für Zahlen.

Das **Festigen der Begriffe „Term", „Gleichung", „Ungleichung"**, das man hier nicht streng vom Erarbeiten trennen sollte, kann für alle drei Begriffe Identifizierungs- und Realisierungsübungen enthalten und zur sprachlich-logischen Schulung (Begründungen) genutzt werden. (Beispiele C 1 bis C 3, Teile der Aufgaben 1 bis 3)
Als weitere Realisierungsübungen können eingesetzt werden:

- Gib einen Term an, der eine Summe ist!
- Bilde eine Gleichung mit einer Variablen, deren linke Seite eine Summe, deren rechte Seite ein Quotient ist!

Begründungen, die zur Begriffsabgrenzung auch bei „Gegenbeispielen" zu verlangen sind, könnten z. B. lauten:

$6 = x + 1$	Gleichung („6", „$x + 1$" sind Terme; durch Gleichheitszeichen verbunden),
$18 + x < (5 \cdot 4)$	Ungleichung ($18 + x$, $5 \cdot 4$ sind Terme; verbunden durch „<"; Klammern überflüssig),
$15 - 8 = 7 < 3 \cdot x$	weder Gleichung noch Ungleichung (drei Terme; sowohl „=" als auch „<").

Zur Begriffsfestigung kann die Aufgabe 1 aus LE 2 (LB 96) herangezogen werden.

Hinweis: Man beachte, daß im Stoffgebiet „2. Gebrochene Zahlen" bereits Ausdrücke der Art $x \leqq 3$ bzw. $7 < x < 9$ verwendet wurden. Sie sind durch die Definitionen C 1 und C 2 nicht erfaßt. Man sollte Schülern hier aber plausibel machen, daß man z. B. „$x \leqq 3$" als Zusammenfassung von „$x < 3$ *oder* $x = 3$" und „$7 < x < 9$" als Zusammenfassung von „$7 < x$ *und* $x < 9$" auffassen muß.

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 1d, e, f **2.** Aufg. 3c, f, i

Gleichungen und Ungleichungen mit Variablen (1 Std.)

LE 2 (LB 95 bis 97)

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß Gleichungen und Ungleichungen mit Variablen kein Wahrheitswert zugeordnet werden kann und können solche Gleichungen und Ungleichungen durch Einsetzen von Zahlen für die Variablen in Aussagen überführen sowie deren Wahrheitswert überprüfen,
- können die Begriffe „erfüllen", „lösen", „Lösung", „Lösungsmenge", „Grundbereich" und „leere Menge" (Zeichen „$\emptyset$") zum Beschreiben des Lösens von Gleichungen und Ungleichungen sicher verwenden,
- wissen, daß Existenz und Anzahl der Lösungen vom Grundbereich der Variablen abhängig sind.

Schwerpunkte

- Erarbeiten bzw. Präzisieren der Begriffe „erfüllen", „lösen", „Lösung", „Lösungsmenge", „Grundbereich", „leere Menge"
- Festigen der obengenannten Begriffe

Methodische Hinweise

Vor dem **Erarbeiten bzw. Präzisieren der Begriffe . . .** werden die bisherigen Kenntnisse über Gleichungen und Ungleichungen wiederholt. Dabei kann das folgende *Tafelbild* entstehen:

	Gleichungen		**Ungleichungen**	
ohne eine Variable	$4 + 5 = 9$	(w)	$7 + 1 > 2$	(w)
	$\frac{1}{2} \cdot 3 = 1,6$	(f)	$3^2 - 2 < 5$	(f)
mit einer Variablen	$21 : a = 14$	–	$\frac{3}{4} + x < 0,75$	–

Bei der Auswertung anschließender Übungen [Beispiel C 4 gemeinsam, dann Aufg. 2a (oder e, g) und 3e in SSA] wird festgestellt:

- Das probierende Einsetzen ist eine umständliche und unzuverlässige Lösungsmethode (wünschenswert wäre eine effektivere).
- Wir kennen schon eine bessere Lösungsmethode (z. B. Aufg. 2a: „Wenn das Dreifache einer Zahl 12 sein soll, dann muß diese Zahl 4 sein.“). Solche Überlegungen versagen aber bei „unübersichtlicheren“ Gleichungen und Ungleichungen.

Bereits bei diesen Aufgaben wird man das Angeben der Lösungsmenge auf einen vorgegebenen Grundbereich beziehen. Diese Notwendigkeit läßt sich auch durch folgende Aufgabe motivieren:

„In Veras Klasse sind 31 Schüler. Vera behauptet, daß in ihrer Klasse 4 Jungen mehr als Mädchen sind. Kann das stimmen?“

Bei der Begriffserarbeitung und -präzisierung entsteht folgendes *Tafelbild*:

a) $4 \cdot x = 10,$	$x \in N$	**b)** $4 \cdot x = 10,$	$x \in Q_+$
$x = \frac{5}{2}$	$\frac{5}{2} \notin N$	$x = \frac{5}{2}$	$\frac{5}{2} \in Q_+$
$L = \emptyset$		$L = \left\{\frac{5}{2}\right\}$	

Den Schülern muß klar sein, daß stets zu überprüfen ist:

- Wird durch Einsetzen dieser Zahl die Gleichung zu einer wahren Aussage?
- Gehört die gefundene Zahl zum angegebenen Grundbereich?

Damit sind die Schüler gleichzeitig auf den folgenden Stoff (LE 3 und 4) eingestimmt.

Das Zahlenmaterial sollte in den einführenden Beispielen recht einfach zu überblicken sein. (An dieser Stelle sind keine Rechenfertigkeiten zu entwickeln, dies erfolgt erst in LE 3 und 4.)

Wegen der Häufung der Begriffe muß den Schülern gezeigt werden, daß ihnen die Begriffsinhalte seit Jahren bekannt sind.

Zunächst wird man die Sprechweise „eine Zahl erfüllt eine Gleichung (Ungleichung)“ üben (vgl. Auftrag C 2). Das Ermitteln der Lösungen wird dann als „Lösen“ bezeichnet (Sprechweisen: „wir lösen die Gleichung“, „die Zahl erfüllt die Gleichung“).

Danach folgt, daß man jede solche Zahl, die die Gleichung, Ungleichung erfüllt, „Lösung“ nennt und alle derartigen Zahlen (aus dem vorgegebenen Grundbereich) zur „Lösungsmenge“ zusammengefaßt werden. In den einführenden Beispielen wird man dabei Schreibweisen wie $L = \left\{\frac{5}{2}\right\}$ benutzen, beim kalkülmäßigen Arbeiten ist es jedoch günstig, dann bald (verkürzend) zu $\underline{\underline{x = \frac{5}{2}}}$ überzugehen (insbesondere dort, wo nur eine Zahl als Lösung auftritt; vgl. LB, S. 96).

Unter den Beispielen sollten auch Ungleichungen mit mehr als einer, aber endlich vielen Lösungen auftreten (z. B. $4 - x > 1$, $x \in N$). Werden Ungleichungen mit unendlichen Lösungsmengen behandelt (z. B. $2 \cdot x > 18$, $x \in N$ oder $2 \cdot x < 18$, $x \in Q_+$), wird man die Lösungsmenge nicht hinschreiben, sondern bei der Zeile „$x > 9$“ bzw. „$x < 9$“ stehenbleiben und anschließend einen Satz über die Lösungsmenge formulieren lassen.

Aufgabe 2e bietet Gelegenheit zur Einführung des Begriffs „leere Menge" (einschließlich Symbolik). Von hierab kann bei allen Gleichungen und Ungleichungen von deren Lösungsmenge gesprochen werden.

Festigen der obengenannten Begriffe Bei der Angabe des Grundbereichs, der zur eindeutigen Angabe der Lösungsmenge erforderlich ist, sollte man sich für eine (möglichst kurze) Variante entscheiden (z. B. „$x \in N$", „x nat. Z."), hingegen Schreibweisen wie „$x = 0; 1; 2; \ldots$", $x \in \{0; 1; 2; \ldots\}$ vermeiden.

Die Übungsaufgaben lassen sich vielseitiger gestalten, wenn nicht nur nach der jeweiligen Lösungsmenge gefragt wird, sondern umgekehrt auch Gleichungen und Ungleichungen gemäß vorgegebener Lösungsmenge gebildet werden (z. B. Aufg. 7).

Das inhaltliche Lösen von Gleichungen und Ungleichungen kann zur Benutzung und damit Festigung der eingeführten Begriffe dienen, z. B.
Aufg. 5a, b: $3 \cdot x = 7$, $x \in N$, $x \in Q_+$.
„In N hat diese Gleichung keine Lösung"; „Für $x \in N$ ist die Lösungsmenge dieser Gleichung leer"; „Es gibt kein natürliches x, das diese Gleichung erfüllt"; „$\frac{7}{3}$ erfüllt diese Gleichung in Q_+"; „Wenn Q_+ der Grundbereich ist, dann erfüllt $\frac{7}{3}$ diese Gleichung"; „$\frac{7}{3}$ ist die Lösung dieser Gleichung"; „$\frac{7}{3}$ ist (einziges) Element der Lösungsmenge dieser Gleichung" (Einzigkeitsfragen, wenn Zeit; sonst in LE 3).

Am Stundenende kann festgestellt werden, daß die bisherigen Lösungsüberlegungen für Gleichungen und Ungleichungen nur für recht einfache (im Kopf zu lösende) Beispiele praktikabel sind, und es kann ein Ausblick auf die kommende Stunde gegeben werden: Wenn Rechnungen nicht mehr im Kopf ausführbar waren, wurde bisher zu schriftlichen Rechenverfahren übergegangen; wir werden versuchen, diese Vorgehensweise auf das Lösen von Gleichungen und Ungleichungen zu übertragen.

Kontrollaufgaben
Aufg. 6a, b; Erläutere und begründe dein Vorgehen!

Lösen von Gleichungen der Form $a \cdot x = b$ (2 Std.)

LE 3 (LB 97 bis 100)

In dieser Lerneinheit wird erstmalig ein kalkülmäßiges Lösungsverfahren erarbeitet.

Ziele

Die Schüler
- können die Gleichungen der Form $a \cdot x = b$ (a, b, $x \in Q_+$; $a \neq 0$) kalkülmäßig sicher lösen,
- haben die Begründung für das Lösungsverfahren verstanden und sehen dessen Zweckmäßigkeit ein,
- sind sich bewußt, daß verschiedenartige Sachverhalte durch ein und dieselbe mathematische Gleichung beschrieben und die betreffenden Fragestellungen durch das gleiche Verfahren gelöst werden können.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Motivierung für das Erarbeiten eines Lösungsverfahrens
- Erarbeiten des Lösungsverfahrens

2. Stunde
- Festigen des Lösungsverfahrens

Methodische Hinweise

Zur **Motivierung ...** kann überlegt werden: Gleichungen des Typs $a \cdot x = b$ kommen häufig vor (z. B. aus dem parallel laufenden Planimetrieunterricht: Berechnungen von Seiten bzw. Höhen von Rechtecken, Parallelogrammen, Dreiecken, wenn der Flächeninhalt und die andere Seite bzw. die Höhe gegeben sind, vgl. auch Aufg. 7; oder: Stückpreisberechnungen). Obwohl solche Gleichungen inhaltlich gelöst werden können (unter Ausnutzung der Umkehroperation, die Motivierung „noch nicht können" also entfällt), ist es zur Rationalisierung des Lösens sinnvoll, ein Verfahren zu suchen, das für alle Gleichungen dieses Typs – ohne weiteres Nachdenken – die Lösung, alle Lösungen liefert, also ein sicheres und schnelles Lösen ermöglicht und die Denkarbeit entlastet.
Der Sicherung des Ausgangsniveaus können dienen:
- Berechne $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$; bilde aus $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$ Divisionsaufgaben!
- Schreibe $\frac{4}{3}$; $\frac{x}{a}$ als Produkt!

Erarbeiten des Lösungsverfahrens Zunächst sollten die Schüler an bereits behandelten Beispielen des inhaltlichen Lösens von Gleichungen des Typs $a \cdot x = b$ Gemeinsamkeiten erkennen, die sich aus dem reaktivierten Zusammenhang zwischen Multiplikation und Division als Umkehroperationen ergeben. Das kann durch Auftrag C 4 geschehen. Zu den einzelnen Aufgaben sind auch Begründungen zu verlangen, z. B. „Wenn das 19fache einer Zahl 247 ist, dann muß die Zahl der 19. Teil von 247 sein"; „Wenn das Produkt $3 \cdot x$ gleich 7,5 sein soll, dann erhält man den Faktor x als Ergebnis von $7{,}5 : 3$"; „Um die Gleichung $\frac{2}{3} \cdot x = \frac{4}{5}$ zu lösen, muß man $\frac{4}{5}$ durch $\frac{2}{3}$ dividieren". Dabei kann das folgende *Tafelbild* entstehen, wobei die letzte Spalte durch Vergleich und Abstraktion aus den anderen Spalten gewonnen wird:

$19 \cdot x = 247$	$3 \cdot x = 7{,}5$	$\frac{2}{3} \cdot x = \frac{4}{5}$	$\boldsymbol{a \cdot x = b}$
$x = 247 : 19$	$x = 7{,}5 : 3$	$x = \frac{4}{5} : \frac{2}{3}$	$\boldsymbol{x = b : a \; (a \neq 0)}$
$x = 13$	$x = 2{,}5$	$x = \frac{6}{5}$	$\boldsymbol{x = \frac{b}{a}}$

Läßt man hier die jeweils letzte Zeile betrachten, so können die Schüler für diese Gleichungen die Lösungen leicht angeben. Beim Vergleich der 2. mit der 1. Zeile kann folgendes erarbeitet werden:

- Beide Zeilen unterscheiden sich sowohl in den links als auch in den rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Termen.
- Beim Übergang von der 1. zur 2. Zeile ist rechts durch 19 (durch a) dividiert worden.
- Das trifft auch für die Terme der linken Seite zu $\left(\frac{19 \cdot x}{19} = x \text{ bzw. } \frac{a \cdot x}{a} = x\right)$.
- Beide Seiten der Gleichung sind also durch ein und dieselbe Zahl dividiert worden.
- Man kann eine Gleichung des Typs $a \cdot x = b$ lösen, indem man beide Seiten durch a dividiert und damit die Gleichung $x = \frac{b}{a}$ erhält, aus der man die Lösung $\frac{b}{a}$ ablesen kann.
  Die Einschränkung $a \neq 0$ sollte erst jetzt gemacht werden, da sie sich hier augenfällig ergibt.

In manchen Klassen kommt man möglicherweise mit weniger Beispielen aus. Zur differenzierten Unterrichtsgestaltung können Schüler der Frage nachgehen, was sich für den Fall $a = 0$ ergibt (Beispiel C 7). Beim Erarbeiten des Lösungsverfahrens sind an den verwendeten Beispielen auch die Sprechweisen „umformen“ (einer Gleichung), „auflösen“ (einer Gleichung nach einer Variablen) und „isolieren“ (einer Variablen in einer Gleichung) einzuführen und zu üben.

Für das Lösen von Gleichungen dieses Typs ist eine verbindliche Form festzulegen (Beispiel C 8); in diesem Falle kann man das „Dividieren durch $\frac{3}{4}$“ auch gleich als „$\cdot \frac{4}{3}$“ schreiben).

Das fertige Schriftbild der Probe (Beispiel C 8) entsteht in folgender Reihenfolge, begleitet von entsprechenden Überlegungen:

- Einsetzen von $\frac{20}{23}$ führt zu: $\frac{20}{23} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{23}$
- Um zu entscheiden, ob diese Gleichung wahr ist, muß die linke Seite ausgerechnet werden: $\frac{\overset{5}{\cancel{20}}}{23} \cdot \frac{3}{\underset{1}{\cancel{4}}} = \frac{15}{23}$

  $\frac{15}{23} = \frac{15}{23}$
- Die entstehende Gleichung ist wahr. $\frac{15}{23} = \frac{15}{23}$ (w)

Bei der schriftlichen Fixierung der Probe sollten die Schüler darauf orientiert werden, als erste Zeile stets die Ausgangsgleichung hinzuschreiben, in der die Variable durch die als Lösung ermittelte Zahl ersetzt worden ist. Als letzte Zeile sollte eine sich daraus ergebende Gleichung folgen, bei der links und rechts dieselben Terme stehen; diese wird dann als wahr (w) gekennzeichnet. Die Anzahl der Zwischenschritte sollte so klein wie möglich gehalten werden (deshalb sollte man auch erlauben, gleich in der 1. Zeile zu kürzen).

Abschließend kann auf Fragen der Eindeutigkeit der Lösung eingegangen werden, z. B.: Die Gleichung $19 \cdot x = 247$ kann nur die Lösung 13 haben, jede andere Zahl ist größer oder kleiner als 13, das Produkt mit 19 ist dann auch größer oder kleiner als 247.

Das Üben des Lösungsverfahrens nimmt nach einer Teilzusammenfassung (Beschreiben des Lösungsverfahrens am Beispiel, Begründen der einzelnen Schritte, schriftliche Form) den Rest der Stunde ein. Die Bearbeitung von Teilen der Aufgabe 1 durch alle Schüler dient dem Erwerb erster Fertigkeiten. Deshalb sollte man in $a \cdot x = b$ vorerst für a nur natürliche Zahlen, dann Dezimalbrüche, später gemeine Brüche verwenden; erst anschließend sollte man zu $\frac{x}{a} = b$ übergehen. Durch die Auswahl des Zahlenmaterials muß der Eindruck vermieden werden, daß eine leichte (bereits beherrschte) Sache nun kompliziert niedergeschrieben werden muß.

Beim Vergleich der Ergebnisse können diese für verschiedene Grundbereiche der Variablen diskutiert werden. (Aufg. 1b besitzt für $a \in N$ keine Lösung, für $a \in Q_+$ eine Lösung, während 1g für alle Grundbereiche die Lösung 0 besitzt und bei 1h die Lösungsmenge stets leer ist.)

Beim **Festigen des Lösungsverfahrens** sollten Aufgaben zum Üben (Aufg. 2b, 2d, 3*) und zum Vertiefen im Mittelpunkt stehen. (Das Auffassen der Vorschrift „$: a$" als „$\cdot \frac{1}{a}$" kann beim Lösen von Gleichungen Vorteile bringen, vgl. Beispiel C 8; zu beachten ist hierbei, daß man dadurch zu einer anderen Umformungsregel kommt.) Dem Vertiefen von Zusammenhängen dient die Aufgabe 4. Beim Lösen von Aufgaben mit Größen sollte stets so verfahren werden wie in Beispiel C 9: Hauptrechnung mit Größen, Nebenrechnung mit Zahlen, Ergebnis mit Größen, dabei an die Kenntnisse aus Klasse 5 und zum Arbeiten mit Näherungswerten anknüpfen.

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 2a, c **2.** Aufg. 4b **3.** Aufg. 8c

Lösen von Gleichungen der Form $\frac{a}{x} = b$ (3 Std.)

LE 4 (LB 100 bis 102)

Ziele

Die Schüler
- können Gleichungen der Form $\frac{a}{x} = b$ ($b, x \neq 0$; $a, b, x \in Q_+$) kalkülmäßig sicher lösen,
- haben das Rückführen auf $a \cdot x = b$ verstanden und sehen dessen Zweckmäßigkeit ein,
- sind sich bewußt, daß verschiedenartige Sachverhalte durch ein und dieselbe mathematische Gleichung beschrieben und die betreffenden Fragestellungen durch das gleiche Verfahren gelöst werden können,
- haben das kalkülmäßige Lösen als rationelles Mittel erkannt, um alle Gleichungen der vorliegenden Typen schnell zu lösen.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeiten eines Verfahrens zum Lösen von Gleichungen der Form $\frac{a}{x} = b$
- Üben dieses Verfahrens

2. Stunde
– Festigen des Verfahrens für die Gleichungstypen $a \cdot x = b$ und $\frac{a}{x} = b$

3. Stunde
– Systematisierende Zusammenfassung
– Kurzkontrolle

Methodische Hinweise

Beim **Erarbeiten eines Verfahrens ...** kann man sich am Lehrbuch orientieren (Beispiel C 10, anschließend die Beispiele C 11 und 12, evtl. Auftrag C 6). Nachdem man das Neue zum bisher betrachteten Typ $a \cdot x = b$ herausgestellt hat (Variable im Nenner), sollte die Lösungsidee unbedingt mit den Schülern erarbeitet werden. (Können wir die vorliegende Gleichung so umformen, daß sie in eine Gleichung des zuvor behandelten Typs übergeht? Letztere können wir inzwischen lösen.) Beim schriftlichen Fixieren des Lösungsweges, der Lösung und der Probe ist wie in LE 3 zu verfahren. Der Beginn der Erarbeitung eines Verfahrens kann auch noch anders gestaltet werden:

1. Aufgaben wie $12 : x = 4$ haben wir bei der Division gebrochener Zahlen dadurch gelöst, daß wir über $4 \cdot 3 = 12$ (Probe zu $12 : 3 = 4$ durch Umkehroperation) zur Lösung kamen. Wollen wir nun Gleichungen der Form $\frac{a}{x} = b$ bzw. $a : x = b$ lösen, so können wir uns daran orientieren:
   (1) $12 : x = 4$ (2) $4 \cdot x = 12$
   (Das bereitet insbesondere dann keine besonderen Probleme, wenn darauf auch bei der Sicherung des Ausgangsniveaus für diese LE Wert gelegt wurde – vgl. S. 120.) Die Gleichung (2) können wir aber bereits lösen (LE 3). Welche Umformungen müssen wir vornehmen, um aus der Gleichung (1) die Gleichung (2) zu erhalten?
2. Aufgaben wie $\frac{x}{5} = 2$ haben wir dadurch gelöst (LE 3), daß wir beide Seiten der Gleichung mit dem Nenner 5 multipliziert haben. Die nun vorliegende Aufgabe $\frac{12}{x} = 4$ hat mit der Aufgabe $\frac{x}{5} = 2$ gemeinsam, daß ein gemeiner Bruch auftritt (Unterschied: die Variable steht diesmal im Nenner, also $x \neq 0$). Wenn wir auch hier $\left(\text{in Analogie zu } \frac{x}{5} = 2\right)$ beide Seiten der Gleichung mit dem Nenner x $(x \neq 0)$ multiplizieren, haben wir zwar noch nicht die Lösung erhalten, das Lösen der Gleichung $12 = 4 \cdot x$ bereitet uns aber keine Schwierigkeiten (LE 3).

Beim **Festigen ...** (weiteres Üben und Vertiefen) werden zunächst Beispiele für $\frac{a}{x} = b$ im Vordergrund stehen; anschließend sollten Aufgaben zu beiden Gleichungstypen behandelt werden. Bei der Aufgabenauswahl ist nicht nur der „Normalfall" (geg.: a, b; ges.: x) zu berücksichtigen; es sollten auch einige der Aufgaben 3, 4*, 5* behandelt werden.
Spätestens in dieser Stunde ist auf eine verkürzte Schreibweise einzugehen:
– „Zwischenzeilen" weglassen,
– nur noch eingeschränkte Grundbereiche angeben, sonst gilt als Verabredung, daß Q_+ Grundbereich ist.

Die Proben werden weiterhin stets durchgeführt. Dadurch werden Stoffelemente aus den Lerneinheiten 1 und 2 ständig gefestigt.

Die **systematisierende Zusammenfassung** stellt das Wichtigste aus den Lerneinheiten 1 bis 4 zusammen (erforderlicher begrifflicher Apparat, Lösungsverfahren für beide Gleichungstypen). Der Schwerpunkt liegt auf dem sicheren Lösen der Gleichungen, wobei es nicht um das Lernen einer Formel geht, sondern darum, die Lösungsschritte der jeweiligen Aufgaben immer wieder neu zu durchlaufen, zu kommentieren und zu begründen.

Die systematisierende Zusammenfassung wird man nicht mit der Beschreibung des Lösungsverfahrens, sondern mit dem Lösen von Gleichungen beginnen, bei dem die notwendigen Erläuterungen und Begründungen parallel laufen oder sich anschließen, etwa in folgender Abfolge:

1. Welche der folgenden Gleichungen können mit dem behandelten Verfahren gelöst werden?
   a) $6{,}4 \cdot x = 10$ (evtl. auch folgende Formen: $x \cdot a = b$, $b = a \cdot x$, $b = x \cdot a$, $a \cdot x = 0$, $0 \cdot x = b$, $0 \cdot x = 0$)
   b) $\frac{3}{x} = \frac{12}{17}$ $\left(\text{evtl. auch: } b = \frac{a}{x},\ a : x = b,\ b = a : x,\ a \cdot \frac{1}{x} = b,\ b = \frac{1}{x} \cdot a,\ \frac{1}{x} \cdot a = b,\ b = a \cdot \frac{1}{x},\ \frac{0}{x} = b,\ \frac{a}{x} = 0,\ \frac{0}{x} = 0\right)$
   c) $0{,}95 + x = 1{,}7$ e) $3{,}8 - 5 \cdot x + 3 = \frac{5}{7} - 0{,}4 \cdot x$
   d) $2 - x = 17{,}8$ f) $x^2 + 2 = 5$
2. Nenne aus den obigen Gleichungen Beispiele für Terme!
3. Nenne weitere Beispiele für den jeweiligen Gleichungstyp!
4. Löse Aufgabe 1 a) und 1 b) ($x \in Q_+$)!
5. Stelle das Wichtigste über das Lösungsverfahren zusammen!
6. Bilde jeweils zu jedem der beiden Typen Gleichungen, die die Lösung 2, $\frac{3}{4}$, ... haben!

Die (abschließende) **Kurzkontrolle** kann folgende Aufgaben enthalten:

(1) **a)** $\frac{x}{0{,}9} = 72$ **b)** $21 \cdot \frac{1}{x} = 8$ **c)** $x \cdot \frac{1}{5} = 10$
d) $\frac{2}{x} = 117{,}8$ **e)** $79 + x = 72$ **f)** $14{,}7 : x = 7$
g) $0{,}77 \cdot x = 0{,}78$ **h*)** $17 - 3 \cdot x = 4$ **i*)** $x^2 + 4 = 13$
– Welche der obigen Gleichungen sind vom Typ $a \cdot x = b$?
– Welche der obigen Gleichungen sind vom Typ $\frac{a}{x} = b$?
– Löse c), e) und f)!

(2)* Wie groß muß b in $9{,}5 \cdot x = b$ sein, damit die Gleichung die Lösung 7,8 hat?
(3) Ein Parallelogramm mit der Seite $a = 40$ m hat den Flächeninhalt $A = 24\ \text{m}^2$. Wie lang ist die Höhe h_a?
(4) Gib eine Gleichung des Typs $\frac{a}{x} = b$ an, die die Lösung 5 hat!

Kontrollaufgaben
Siehe Kurzkontrolle!

Stoffabschnitt 3.2.

Proportionalität und Verhältnisgleichungen (23 Std.)

Darstellen von Zusammenhängen in einem rechtwinkligen Koordinatensystem (1 Std.)

LE 5 (LB 102 bis 105)

Ziele

Die Schüler
- können die Begriffe „rechtwinkliges Koordinatensystem", „Koordinatenachsen", „Abszissenachse", „Ordinatenachse", „Koordinaten eines Punktes (Abszisse, Ordinate)", „geordnetes Zahlenpaar" und „Koordinatenursprung" sicher anwenden,
- können geordnete Zahlenpaare $(x; y)$ als Punkte $P(x; y)$ im rechtwinkligen Koordinatensystem darstellen und umgekehrt die Lage von Punkten durch geordnete Zahlenpaare beschreiben,
- erkennen die Bedeutung der Mathematik für die Praxis.

Schwerpunkte

- Wiederholen der Kenntnisse über die Darstellung geordneter Zahlenpaare in einem rechtwinkligen Koordinatensystem
- Einführen und Festigen der Bezeichnungen für die obengenannten Begriffe

Methodische Hinweise

Das **Wiederholen ...** dient gleichzeitig der Motivierung für den ganzen Stoffabschnitt. Dazu wird den Schülern anhand grafischer Darstellungen deren Zweckmäßigkeit bewußtgemacht. Der Lehrer veranschaulicht auf Folien, die wiederholt in den nächsten Stunden eingesetzt werden, Zusammenhänge in einem rechtwinkligen Koordinatensystem. Dabei werden berücksichtigt:
- bedeutsame Beispiele aus der Erfahrungswelt der Schüler (Fieberkurve, Klimadiagramm, aktuelles bzw. lokales Material, Zensuren-Schüler-Diagramm),
- direkt proportionale Sachverhalte (Weg-Zeit-Diagramm, Benzinverbrauch-Weg-Diagramm, Währungsdiagramm),
- umgekehrt proportionale Sachverhalte (Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm, Seiten-Längen-Diagramm eines Rechtecks bei konstantem Flächeninhalt).

Es eignen sich ebenfalls Abbildungen aus dem Physik- bzw. Geographielehrbuch, sowie Lb 103 (Bild C 2). Die gewählten Sachverhalte müssen verständlich und den Schülern vertraut sein. Die Achsen sind entsprechend den Sachverhalten bezeichnet, und die Schüler werden aufgefordert, das jeweilige Diagramm zu „lesen". Es wird diskutiert, *wie* man diese Diagramme erhält, *wozu* sie angefertigt werden, ob und wie man Punkte innerhalb eines Diagramms verbinden darf.

Zum Beispiel:
- Bei der Fieberkurve ist es sinnvoll, obwohl nicht *alle* Zwischenwerte bekannt sind; doch existiert zu jedem Zeitpunkt ein bestimmter Temperaturwert.
- Beim Zensuren-Schüler-Diagramm ist es sinnlos.

Aus dieser Diskussion ergibt sich die folgende Zielstellung: Zwei Größenarten, die in einem Zusammenhang stehen, treten im täglichen Leben vielfältig auf. Dabei gehört zu jeder Größe der einen Art eine Größe der anderen Art.

Kennt man die Gesetzmäßigkeiten und kann man sie mathematisch beschreiben, so ergeben sich rationelle Verfahren für das Lösen von Aufgaben (evtl. die Aufg. 2, 6 oder 8 aus LE 15 vorlesen). Dazu müssen vorerst alle Kenntnisse über das rechtwinklige Koordinatensystem und die Darstellung geordneter Zahlenpaare in ihm wiederholt werden.

Die Schüler erhalten die Aufgabe, die Punkte $P_1(8; 2)$ und $P_2(4; 8)$ in ein Koordinatensystem einzutragen (Vergleichsmöglichkeiten: Tafel oder Folie). Es werden nun die Geraden P_1O und P_2O gezeichnet. Die Aufgabe für die Schüler lautet (SSA):
- Auf der Geraden P_1O liegen A und B, auf der Geraden P_2O liegen C und D. Gib die fehlenden Zahlen an:
  $A(4;\quad);\quad B(\quad; 1{,}5);\quad C(\quad; 3);\quad D(3;\quad)!$

Bei der Auswertung erkennen die Schüler, daß es „Verständigungsschwierigkeiten“ gibt.

Einführen und Festigen der Bezeichnungen für die obengenannten Begriffe Aufgrund des „Bedürfnisses“ nach besserer Verständigung vermittelt der Lehrer die Begriffe: „Koordinaten eines Punktes“, „Abszisse“, „Ordinate“, „Koordinatenachse“, „Abszissenachse“, „Ordinatenachse“ und „Koordinatenursprung“. Das geschieht anhand eines Tafelbildes oder anhand der zentral gelieferten Folie (Koordinatensystem I. Quadrant; Bestell-Nr. 017703). Die Schüler schreiben sich die Bezeichnungen in ihr bereits vorhandenes Koordinatensystem. Die Begriffe werden durch Übungen folgender Art gefestigt: (UG, SSA; Begründungen mündlich)
- Nennen die Abszisse (Ordinate) von $A(B; P_1; D; P_2)$!
- LB 104, Bild C 5 (Fragen und Aufträge in der Art von Auftrag C 7a)
- Welche Eigenschaft haben alle Punkte, die auf der Ordinatenachse (Abszissenachse) liegen?
- Welche Eigenschaft haben alle Punkte, die auf einer Geraden parallel zur Ordinatenachse (Abszissenachse) liegen?
- Welcher Punkt ist weiter von der Abszissenachse entfernt $P(3; 7)$ oder $Q(4; 6)$?
- Gib die Koordinaten von Punkten an, deren Entfernung von der Ordinatenachse kürzer ist als die von $A(4; 1)$!

Anschließend wird folgende Aufgabe gemeinsam bearbeitet:
„Die Seitenlänge a eines gleichseitigen Dreiecks legt dessen Umfang u fest. Stelle den Sachverhalt anhand von 6 geordneten Zahlenpaaren $(a; u)$ im Koordinatensystem dar! Was stellst Du fest?“ Bei der Auswertung wird diskutiert, ob und wie die Punkte verbunden werden dürfen.

Vorschlag für Hausaufgaben (zur Vorbereitung für die nächste Stunde):
Aufgaben 4a und b jeweils anhand von 6 Zahlenpaaren.

Kontrollaufgaben

1. Auftrag C 7

2. Welche Koordinate gibt den Abstand eines Punktes von der Abszissenachse an?

Beispiele für direkte Proportionalität (1 Std.)

LE 6 (LB 105 bis 108)

Ziele

Die Schüler
- kennen die Definition C 5 für die „direkte Proportionalität“ und können sie (evtl. mit eigenen Worten) wiedergeben,
- wissen, daß bei dieser Art der Zuordnung die Quotienten zweier einander zugeordneter Zahlenwerte stets gleich sein müssen.

Schwerpunkte

- Erarbeiten gemeinsamer Merkmale praktischer Sachverhalte
- Erarbeiten der Definition für direkte Proportionalität (Def. C 5)

Methodische Hinweise

Das **Erarbeiten gemeinsamer Merkmale praktischer Sachverhalte** anhand von Graphen (*Variante 1*) motiviert im nachherein die Thematik der LE 5. Auch nutzen bzw. wiederholen die Schüler bei diesem Vorgehen Kenntnisse und Verfahren aus dem Physikunterricht. Bei zu erwartenden Schwierigkeiten (Klassensituation; Einsatz des Polylux) empfiehlt es sich, die Erarbeitung gemeinsamer Merkmale nur anhand der Beispiele des Lehrbuches vorzunehmen (*Variante 2*)..

Variante 1: Bei der Auswertung der Hausaufgaben 4a, b (LE 5) nennen die Schüler von ihnen ermittelte Zahlenpaare. Diese werden in Tabellen eingetragen (Tabellen 1). Anschließend wird die grafische Darstellung ausgewertet (Vergleichsmöglichkeit durch Folie). Erarbeitet wird, daß die den Zahlenpaaren entsprechenden Punkte auf einer Geraden liegen, die durch $O(0; 0)$ geht (Aufg. 4a) bzw. auf einer Kurve liegen, die bei $O(0; 0)$ beginnt (Aufg. 4b). Abhängigkeiten der ersten Art kommen in der Praxis sehr oft vor und sollen aufgrund charakteristischer Eigenschaften untersucht und definiert werden. Die bereits in der LE 5 eingesetzten Folien zeigen den Schülern nochmals entsprechende Bilder. Beim Suchen nach Eigenschaften wird mit Beispielen verglichen, deren Darstellung keine Gerade oder eine Gerade nicht durch $O(0; 0)$ ergibt. Dazu erhalten die Schüler die Aufgabe, zu einigen in der vergangenen Stunde vorgestellten Diagrammen die Tabellen (Tabellen 2) zu vervollständigen (SSA).

Tabellen 1 und 2 (bereits vollständig):

Hinweis: Der Lehrer fordere in jedem Fall, daß die Schüler den „Kopf“ der Tabelle exakt lesen: z. B. „Zeit *t*, gemessen in Stunden“.

1. Gerade durch $O(0; 0)$

a in cm	0	1	1,5	2
u in cm	0	4	6	8

$u = 4 \cdot a; \quad \frac{u}{a} = 4$

keine Gerade durch $O(0; 0)$

a in cm	1	2	3	4
A in cm²	1	4	9	16

$A = a \cdot a$

2.

t in h	1	2	4	5
s in km	60	120	240	300

v in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$	10	20	40	80
t in h	8	4	2	1

$s = 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t;\quad \frac{s}{t} = 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = v$

$v \cdot t = 80\text{ km} = s$

Benzinverbrauch-Weg-Diagramm:

s in km	100	200	400	500
V in l	9	18	36	45

$$\frac{100}{9} = \frac{200}{18} = \frac{400}{36} = \frac{500}{45}$$

$$V = \frac{9\text{ l}}{100\text{ km}} \cdot s$$

Hinweis: Proportionalitätsfaktor farbig hervorheben!

Die Schüler erarbeiten durch Analysieren, Vergleichen und Abstrahieren charakteristische Eigenschaften, was durch „günstig" gewählte Zahlenwerte unterstützt wird. Das Resultat ist (UG):

- Bei allen Zuordnungen, deren Graph eine Gerade durch $O(0; 0)$ ist, bedeutet Verdoppeln, ... der Zahlenwerte der einen Größenart auch ein Verdoppeln, ... der Zahlenwerte der ihr zugeordneten Größenart.
  (Erfahrungsgemäß wird diese Eigenschaft von den Schülern sehr leicht, meist sogar als erste erkannt. Wo dies nicht so ist, sollte sie der Lehrer nicht hineintragen, sondern erst gemäß Lehrbuch in LE 10 behandeln.)
- Bei allen Zuordnungen, deren Graph keine Gerade durch $O(0; 0)$ ist, verhalten sich die Zahlenwerte nicht so (aus der Situation ergibt sich, ob man bereits auf das Verhalten einander zugeordneter Zahlenwerte bei umgekehrter Proportionalität eingeht).
- Bei Zuordnungen der ersten Art sind die Zahlenwerte einer Größe stets das k-fache der Zahlenwerte der ihr zugeordneten Größe; daher haben einander zugeordnete Zahlenwerte stets den gleichen Quotienten; bei Zuordnungen der zweiten Art ist das nicht so.

Variante 2: Die Beispiele des Lehrbuches werden auf gemeinsame Merkmale hin untersucht. Dabei orientieren sich die Schüler an folgenden Fragen:

- Wie verändern sich einander zugeordnete Glieder in einem Folgenpaar?
- Wie erhält man zu beliebig vorgegebenen Gliedern der einen Folge die dazugehörigen Glieder der anderen Folge?
- Welche Beziehung besteht jeweils zwischen zwei einander zugeordneten Gliedern in einem Folgenpaar?

Es bieten sich dabei Differenzierungsmaßnahmen (formulierte Fragen, Lehrbuchbeispiele) an:

- Brause-Bier-Tabelle (getrennt untersuchen)
- Masse-Volumen-Tabelle
- Folge der Vielfachen von 7 (wird von den Schülern vervollständigt).

Die Auswertung beinhaltet die wesentlichen Merkmale, die sich bei Variante 1 ergaben.

Erarbeiten der Definition für direkte Proportionalität Die Schüler erkennen, daß es im täglichen Leben vielfältige Zuordnungen „gleicher Art" gibt, daß es daher zweckmäßig ist, dieser Art der Abhängigkeit einen Namen zu geben, sie zu definieren. Der Lehrer nennt den Begriff für diesen Zusammenhang: „proportional"; die Schüler erhalten die Aufgabe, eine Definition für diesen Begriff zu formulieren. Anschließend wird die Formulierung im Lehrbuch (Definition C 5) der eigenen gegenübergestellt. (Hinweis des Lehrers, daß in der Fachliteratur die Proportionalität auch durch die gleichen Quotienten zugeordneter Glieder definiert wird.) Es empfiehlt sich, das Wort „direkt“ erst dann einzuführen, wenn es zur Unterscheidung von „umgekehrter“ Proportionalität notwendig wird.

Zur Festigung der Definition werden folgende Aufgaben gelöst (SSA): Aufgaben 1a, c, e; 3a, 4b.

Kontrollaufgaben
1. Definiere den Begriff „Proportionalität“!
2. Aufg. 2e; 3c und 4a

Darstellen von Proportionalität in einem rechtwinkligen Koordinatensystem (1 Std.)

LE 7 (LB 108 bis 109)

Die Gestaltung der LE 7 hängt sehr stark von der Gestaltung der LE 5 und 6 ab. Das sollte im folgenden beachtet werden.

Ziele

Die Schüler
- können die Definition für direkte Proportionalität anwenden, um Zahlenfolgenpaare zu untersuchen,
- können Proportionalitäten grafisch darstellen,
- wissen, daß bei jeder Proportionalität und nur bei diesen das Bild auf einer Geraden durch $O(0; 0)$ liegt; sie können diese Eigenschaft als Kontrollmöglichkeit nutzen.

Schwerpunkte

- Festigen der Definition C 5
- Erarbeiten und Festigen der Kenntnis über das charakteristische Bild einer Proportionalität

Methodische Hinweise

Das **Festigen der Definition C 5** erfolgt durch eine schriftliche Übung, die auch das Wissen über den Inhalt der Definition C 5 sichern soll: LE 6, Aufgaben 2b, c, 3b, d (SSA) mit anschließender Auswertung und Begründung.

Das Erarbeiten und Festigen der Kenntnis ... könnte durch folgende Betrachtungen beginnen:
Bisher haben wir aus grafischen Darstellungen Zahlenfolgen gebildet, diese analysiert und verglichen, um die Definition für direkte Proportionalität zu erarbeiten. Wir wollen nun umgekehrt zu Proportionalitäten die grafischen Darstellungen entwickeln

und dabei untersuchen, ob man *immer* die gleichen charakteristischen Bilder erhält, ob man aus den Bildern eindeutig auf Proportionalität schließen kann.

Die Schüler erhalten die Aufgabe, Bilder zu den Zahlenfolgenpaaren der Aufgaben 2b sowie 3b und d (LE 6) zu entwickeln (SSA). (Ein Schüler arbeitet an verdeckter Tafel.) Zur Gegenüberstellung wird das Bild zu Aufgabe 2c (keine Proportionalität) in einem zweiten Koordinatensystem dargestellt. Die dabei gewonnene Erkenntnis wird von den Schülern formuliert und anschließend mit Satz C 6 verglichen. Das Festigen kann im Zusammenhang mit der Beantwortung der Frage erfolgen: „Wieviel Zahlenpaare muß man mindestens kennen, um eine Proportionalität grafisch darstellen zu können; welche Kontrollmöglichkeiten ergeben sich? Begründe!" (SSA)

Kontrollaufgaben

1. Zwischen zwei Zahlenfolgen besteht Proportionalität. Beschreibe die grafische Darstellung!

2. Aufg. 2

Proportionalität in der Praxis (1 Std.)

LE 8 (LB 109 bis 110)

Der Lehrplan fordert für die Proportionalität von Größenarten keine Definition, sondern lediglich ein „Einführen". Das bedeutet, vornehmlich mit Beispielen zu arbeiten und dadurch hinreichend klare Vorstellungen vom Begriff zu schaffen. Sie sind dadurch vorbereitet worden, daß schon in den vorangegangenen Lerneinheiten mit Folgen gearbeitet wurde, deren Glieder Größen waren. Jetzt sind zwei Verallgemeinerungsschritte durchzuführen, um z. B. zur Proportionalität von Volumen und Masse zu kommen (vgl. Sachverhalt im Lehrbuch): Für je eine Folge von je vier zusammengehörigen Meßwerten für Volumen und Masse von Körpern aus Kupfer wird Proportionalität festgestellt. Daraus wird für alle derartigen Folgenpaare bei Körpern aus Kupfer und daraus wiederum für alle derartigen Folgenpaare für Volumen und Masse Proportionalität gefolgert, unabhängig vom Material (bei den üblichen physikalischen Voraussetzungen).

Ziele

Die Schüler
- kennen die Notwendigkeit von „Idealisierungen" beim Mathematisieren,
- wissen, daß der Proportionalitätsfaktor als Zahl oder als Größe existiert,
- können praktische Sachverhalte, bei denen Größenarten einander zugeordnet sind, auf Proportionalität untersuchen und ihre Entscheidung begründen.

Schwerpunkte

- Erarbeiten der Proportionalität von Größenarten, des Zeichens „$\sim$" und des Charakters von Proportionalitätsfaktoren
- Festigen der Proportionalität von Größenarten

Methodische Hinweise

Erarbeiten der Proportionalität von Größenarten ... Zur Reaktivierung werden die Schüler auf die Ausgangsbeispiele (Diagramm zum Benzinverbrauch, Weg-Zeit-Diagramm) orientiert (Folie). Sie diskutieren die Diagramme und sollten dabei berücksichtigen, daß z. B. der Benzinverbrauch innerhalb eines zurückgelegten Weges schwankt (Fahrweise), daß bei einem Versuch die Geschwindigkeit nur annähernd konstant gehalten werden kann, um Meßwerte für ein Weg-Zeit-Diagramm zu erhalten, daß bei einfachen physikalischen Versuchen der Luftwiderstand, die Reibung nicht berücksichtigt werden. Die Ergebnisse derartiger Untersuchungen rechtfertigen jedoch, bei einem Sachverhalt von Proportionalität zu sprechen, sofern keine großen Abweichungen auftreten. Die Schüler erhalten den Auftrag, LE 8 unter Berücksichtigung folgender Aufgabenstellung zu lesen: „Welches Zeichen schreibt man für ‚ist proportional zu'? Charakterisiere den Proportionalitätsfaktor!" Folgender Lückentext (Tafelbild) wirkt orientierend:

1. Beim Quadrat mit der Seitenlänge a und dem Umfang u gilt: $a \ldots u$; der Proportionalitätsfaktor ist ... (4, also eine Zahl)
2. Bei gleibleibender Geschwindigkeit v gilt für den Weg s und die Zeit t: $s \ldots t$; der Proportionalitätsfaktor ist ... (die Geschwindigkeit v, also eine Größenart)

Beim Auswerten erkennen die Schüler, daß der Proportionalitätsfaktor oft eine abgeleitete Größenart ist: Die „Dichte" ist abgeleitet von „Masse" und „Volumen", die „Geschwindigkeit" von „Weg" und „Zeit".

Festigen der Proportionalität von Größenarten Die Schüler lösen Aufgabe 1 (SSA). Beim Auswerten empfiehlt es sich, auf alle Verfahren zum Nachweis der direkten Proportionalität (1a) einzugehen:
Quotientenbildung; Kürzen; Multiplikation der Glieder der 2. Folge mit $k = 6$; Veranschaulichung im Koordinatensystem (sehr aufwendig). Anschließend werden die Aufgaben 2a und d diskutiert (UG). Die Schüler begründen ihre Entscheidungen. Für Aufgabe 2d ist zu beachten: Viele Schüler werden aus ihren Erfahrungen relativ schnell „Nichtproportionalität" feststellen. Der Lehrer sollte dann interessierte Schüler auffordern, zu Hause etwa 200 Würfe auszuführen und nur jeweils die vollen Zehner zu notieren. So entdecken diese Schüler und berichten dann davon (unter Benutzung einer grafischen Darstellung), daß die entstehenden Folgen einem proportionalen Verhalten immer näher kommen.

Kontrollaufgaben
Aufg. 2b und c (beim Energieverbrauch ohne Grundpreis)

Umgekehrte Proportionalität (2 Std.)

LE 9 (LB 110 bis 112)

Ziele

Die Schüler
- kennen die Definition C 7 für die umgekehrte Proportionalität und können sie (evtl. mit eigenen Worten) wiedergeben,

– können Zusammenhänge auf umgekehrte Proportionalität untersuchen und ihre Entscheidung begründen,
– wissen, daß die grafische Darstellung einer umgekehrten Proportionalität eine „fallende Kurve“ ist, daß man jedoch aus einer „fallenden Kurve“ nicht unbedingt auf umgekehrte Proportionalität schließen kann.

Schwerpunkte

1. Stunde
– Erarbeiten gemeinsamer Merkmale praktischer Sachverhalte
– Erarbeiten der Definition für umgekehrte Proportionalität

2. Stunde
– Einführen und Festigen der umgekehrten Proportionalität von Größenarten
– Erarbeiten der grafischen Darstellung

Methodische Hinweise

Erarbeiten gemeinsamer Merkmale praktischer Sachverhalte Ausgangspunkt sind die bereits mehrmals vorgestellten Grafen aus LE 5. Der Lehrer orientiert auf die Zusammenhänge, bei denen keine Proportionalität vorliegt. Die Schüler ermitteln nach vorgegebenen – günstig gewählten – Zahlenwerten aus der grafischen Darstellung die fehlenden Zahlenwerte (Länge-Breite-Diagramm eines Rechtecks, Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm bzw. Tafelbild aus LE 6). Die Auswertung führt vorerst zu der Erkenntnis, daß es Zusammenhänge gibt, bei denen das Verdoppeln, ... der Zahlenwerte einer Größenart ein Halbieren, ... (also ein umgekehrtes Verhalten) der Zahlenwerte der ihr zugeordneten Größenart zur Folge hat. Nun wird die Bezeichnung „umgekehrt proportional“ für diesen Zusammenhang vom Lehrer genannt. Analog zum Vorgehen bei der Erarbeitung von Eigenschaften der direkten Proportionalität untersuchen die Schüler einander zugeordnete Zahlenwerte und stellen Produktgleichheit fest (UG). Sie werden selbst darauf kommen, daß man im Beispiel des Rechtecks von diesem konstanten Produkt (dem Flächeninhalt) ausgeht und die Seitenlängen bestimmt.

Erarbeiten der Definition für umgekehrte Proportionalität Weitere Beispiele für Zusammenhänge gleicher Art untersuchen die Schüler schriftlich (SSA):
– *Höhe* einer einzelnen Stufe und *Anzahl* der benötigten Stufen, um eine bestimmte Höhe zu überwinden,
– *Tagesration* Trinkwasser und *Anzahl* der Tage, die ein Trinkwasservorrat reicht.
Tafelbild und Heft:

Höhenunterschied 9 m

Höhe in cm (je Stufe)	10	20	15
Anzahl der Stufen			

Trinkwasservorrat ... l

Tagesration in l	20	40	80
Anzahl der Tage	80		

Anschließend werden folgende Zusammenhänge diskutiert:
– *Breite* eines Brettes und *Anzahl* der Bretter, die benötigt werden, um den Fußboden eines Zimmers neu zu dielen;

- *Anzahl* der Schüler, die in einer Reihe marschieren und *Anzahl* der Reihen eines Demonstrationszuges (bei gleicher Anzahl von Schülern);
- *Höhe* eines Geldbetrages, der pro Schüler ausgegeben wird und *Anzahl* der Schüler, für die ein bestimmter Betrag zur Verfügung steht;
- *Anzahl* der Schüler und *benötigte Zeit*, um einen Arbeitsauftrag zu erfüllen.
  Ein Gegenbeispiel wäre:
- *Anzahl* der Verkehrsampeln in einer Stadt und *Anzahl* der Verkehrsunfälle in dieser Stadt.

Absicht dieser Übungen ist es einerseits, dic bereits gewonnenen Erkenntnisse an anderen Sachverhalten zu erproben, und zum anderen, die Vielfalt derartiger Zusammenhänge im täglichen Leben aufzuzeigen. Letzteres motiviert die Schüler, auch diesen Zusammenhang selbständig zu definieren. Anschließend vergleichen sie ihre Formulierung mit der Definition des Lehrbuches. Gefestigt wird die Definition durch die Aufgaben 1a, 1c und 2a (SSA).

Das **Einführen und Festigen der umgekehrten Proportionalität von Größenarten** erfolgt analog zur direkten Proportionalität. Die Schüler können dazu den Lehrbuchtext zwischen Definition C 7 und Auftrag C 13 lesen. Die Aufforderung zum Vergleich des Tabellenkopfes mit dem der vorangegangenen Tabellen weist auf die Größen(arten) hin. Hier lernen die Schüler gleichzeitig die besondere Schreibweise der umgekehrten Proportionalität kennen.

Zur weiteren Festigung eignet sich Aufgabe 4. Bei auftretenden Schwierigkeiten werden die Sachverhalte durch Tabellen mit Zahlen konkretisiert. Im Hinblick auf die Entwicklung des funktionalen Denkens, allgemein-geistiger Fähigkeiten und auf die Anwendbarkeit des Wissens ist es jedoch anzustreben, daß die Schüler nicht mehr an die Tabellen gebunden sind, daß sie die Entscheidung aus praktischen Erwägungen treffen und begründen.

Erarbeiten der grafischen Darstellung Aus den gleichen Erwägungen heraus ist es zweckmäßig, vor dem grafischen Darstellen zu überlegen, *wie* wohl die Verbindung der Punkte aussehen wird. Die Schüler begründen ihre Vermutung: „Wenn die Abszissen größer werden, so verkleinern sich die Ordinaten (bzw. umgekehrt), also müssen die Punkte auf einer Linie liegen, die von ‚links oben‘ kommt und nach ‚rechts unten‘ verläuft“. Über unexakte Formulierungen sollte man an dieser Stelle im Hinblick auf die Entwicklung des funktionalen Denkens hinwegsehen. Die Vermutungen werden bestätigt, indem die Schüler die Folgen aus Aufgaben 1a und 2a grafisch darstellen (SSA). Es sollten hierzu Vergleichsmöglichkeiten organisiert werden. Abschließend wird diskutiert, ob man umgekehrt aus einer entsprechenden grafischen Darstellung auf umgekehrte Proportionalität schließen kann. Zu diesem Zweck ist es günstig, ein Gegenbeispiel heranzuziehen:

a	1	2	3	4	5
b	10	9	8	7	6

Kontrollaufgaben
1. Definiere den Begriff „Umgekehrte Proportionalität“!
2. Aufg. 1b und 3a (jeweils mit Begründung)

Weitere Eigenschaften der direkten bzw. umgekehrten Proportionalität (1 Std.)

LE 10 (LB 112 bis 114)

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß aus $a \sim b$ $\left(\text{bzw. } a \sim \frac{1}{b}\right)$ auch $b \sim a$ $\left(\text{bzw. } b \sim \frac{1}{a}\right)$ folgt und können die betreffenden Proportionalitätsfaktoren angeben,
- entwickeln ihre Fähigkeit im Begründen weiter und werden zu einer kritischen Arbeitshaltung erzogen.

Schwerpunkte

- Wiederholen der Kenntnisse über direkte und umgekehrte Proportionalität
- Anwenden und Vertiefen der Kenntnisse beim Beurteilen von Aussagen und Begründen von Entscheidungen

Methodische Hinweise

Das **Wiederholen ...** erfolgt anhand folgender Aufgaben (SSA):

Tafelbild

1.

p	0,4	0,7	1	$\frac{8}{5}$
q				

Es gilt $p \sim q$ und $k = 5$.
Berechne die Glieder von q!

2.

x	24		60		100
y		0,6	2	12	

Es gilt $x \sim \frac{1}{y}$.
Ermittle die fehlenden Glieder!

Beim Vergleich der Ergebnisse sollten diese auch von den Schülern begründet werden (UG). Dabei ist besonderer Wert auf das Anwenden der Definitionen zu legen.

Anwenden und Vertiefen der Kenntnisse ... Die Schüler erhalten die Aufgabe, den Dialog LE 10 – eventuell mit verteilten Rollen – zu lesen. Dabei werden sie auf das Anliegen der Aufträge C 14 und C 15 orientiert. Grundlage für die Auseinandersetzung mit den Aufträgen sind die Argumente der Dialogpartner. Für Auftrag C 14 wird herausgearbeitet, daß das Steigen (Fallen) der Zahlenfolgen zwar notwendig ist, jedoch nicht ausreicht, um eine Aussage über direkte oder umgekehrte Proportionalität zu machen; es dient lediglich als Hinweis, welche Art der Proportionalität evtl. in Frage kommt. Ein gründlicheres Durchdenken ist immer notwendig. Um Auftrag C 15 zu erfüllen, werden viele Schüler die Aussagen durch überschaubare Zahlenwerte konkretisieren und gegenüberstellen müssen. Es entsteht folgendes *Tafelbild* (je nach Klassensituation als Lückentext, der im UG oder in SSA ausgefüllt wird):

Tafelbild (vollständig); $\boxed{}$ wird leer vorgegeben

Direkte Proportionalität

a	1	2	4	8
b	5	10	20	40

$a = \boxed{\frac{1}{5}} \cdot b$ $\qquad$ $b = \boxed{5} \cdot a$

$a \sim b$ $\qquad$ $b \sim a$

Umgekehrte Proportionalität

a	1	2	4	8
b	24	12	6	3

$a \cdot b = \boxed{24}$ $\qquad$ $b \cdot a = \boxed{24}$

$a = \boxed{\frac{1}{b}} \cdot 24$ $\qquad$ $b = \boxed{\frac{1}{a}} \cdot 24$

$a \sim \frac{1}{b}$ $\qquad$ $b \sim \frac{1}{a}$

Die Ergebnisse werden von den Schülern abschließend kommentiert.

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 1 und 3
2. Es gilt $v = 7 \cdot w$, also $v \sim w$. Gib die Gleichung für $w \sim v$ an!

Verhältnisse (1 Std.)

LE 11 (LB 114 bis 116)

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß Vergleiche von Größen nicht nur durch Differenzbildung, sondern auch durch Verhältnisbildung möglich sind, und wann das eine bzw. das andere zweckmäßig ist,
- können vorgegebene Verhältnisse durch Kürzen (Erweitern) in möglichst kleinen natürlichen Zahlen angeben,
- wissen, daß Verhältnisse sowohl von Größenarten gleicher Qualität als auch von Größenarten unterschiedlicher Qualität gebildet werden können und daß im letztgenannten Fall oftmals neue Größenarten entstehen.

Schwerpunkte

- Erarbeiten des Begriffs „Verhältnis"
- Anwenden des Begriffs „Verhältnis"

Methodische Hinweise

Für das **Erarbeiten des Begriffs „Verhältnis“** eignet sich folgende Aufgabe:

1. Die Klasse 6a (24 Schüler) überwies im Mai auf das Solidaritätskonto 48 M, die Klasse 6b (30 Schüler) überwies 54 M.
2. Die Masse von Sputnik I betrug 83,6 kg, die von Wostok I, mit Juri Gagarin an Bord, 4725 kg.

Vergleiche die Solidaritätsspenden miteinander und die Massen beider Raumflugkörper miteinander! (SSA)

Das noch nicht vollständig ausgefüllte Tafelbild orientiert die Schüler auf auszuführende Tätigkeiten.

Tafelbild (vollständig) – als Lückentext geben

1. Klasse 6b 54 M
   Klasse 6a 48 M

   Differenz 6 M

   Klasse 6b spendet **6 M mehr.**

2. Sputnik I 83,6 kg
   Wostok I 4725 kg

$$\frac{4725\ \text{kg}}{83{,}6\ \text{kg}} \approx \frac{4800\ \text{kg}}{80\ \text{kg}} = 60$$

Wostok I war **60mal** so schwer wie Sputnik I.

$$\textbf{6b:}\ \frac{54\ \text{M}}{30\ \text{Schüler}} = \frac{1{,}80\ \text{M}}{1\ \text{Schüler}}\ \text{(1,80 M je Schüler)}$$

$$\textbf{6a:}\ \frac{48\ \text{M}}{24\ \text{Schüler}} = \frac{2{,}00\ \text{M}}{1\ \text{Schüler}}\ \text{(2 M je Schüler)}$$

Klasse **6a war besser.**

In der Auswertung wird erarbeitet, daß es vom Sachverhalt und von der Absicht des Vergleichs abhängt, ob man einen Vergleich durch Differenz- oder durch Quotientenbildung vornimmt:

- Welche Klasse hat *mehr* gespendet? 6b (6 M mehr)
- Welche Klasse war *besser*? 6a (2 M je Schüler)
- 100 M und 101 M unterscheiden sich um 1 M. Der Unterschied fällt kaum ins Gewicht.
- 2 M und 3 M unterscheiden sich auch um 1 M. Der Unterschied ist beträchtlich.

Das Untersuchen des mathematischen Hintergrundes von Vergleichen durch Quotientenbildung wird als Ziel für die Schüler formuliert. Sie erhalten den Auftrag, LE 11 bis Beispiel C 16 durchzuarbeiten und dabei folgende Fragen zu berücksichtigen: „Welcher Begriff wird erläutert? Wie wird er erklärt? Wende ihn auf das Beispiel mit den Raumflugkörpern an!“ Die Schüler formulieren etwa:

- Die Massen von Wostok I und Sputnik I verhalten sich wie 60 zu 1.
- Die Masse von Sputnik I verhält sich zur Masse von Wostok I wie 1 zu 60.
- Das Verhältnis der Massen von Sputnik I und Wostok I ist 1 zu 60.

Anschließend wird im Unterrichtsgespräch der mathematische Verhältnisbegriff mit den Kenntnissen und Erfahrungen der Schüler aus dem täglichen Leben in Beziehung gesetzt: Torverhältnis (nur aufgrund der Sprechweise, nicht im hier gemeinten Sinn), Maßstabangaben, Mischungsverhältnis an Tanksäulen ... An diesen Beispielen wird gezeigt, daß Größen gleicher Art und Einheit, aber auch Größen unterschiedlicher Art ins Verhältnis gesetzt werden können, wobei im letztgenannten Fall oftmals neue Größen entstehen (Dichte, Geschwindigkeit...).

Tafelbild / Heft

Beispiele:

Verhältnis von Massen

$$\frac{4800\ \text{kg}}{80\ \text{kg}} = 60$$

Verhältnis von Volumina

$$\frac{66\ \text{l Benzin}}{2\ \text{l Öl}} = 33 : 1$$

Verhältnis von Weg und Zeit

$$\frac{300\ \text{km}}{5\ \text{h}} = 60\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = v$$

Verhältnis von Masse und Volumen

$$\frac{35{,}6\ \text{g}}{4\ \text{cm}^3} = 8{,}9\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = \varrho$$

Zur Übung werden die Aufgaben 1a, b, d (Hinweis LB 114 und Beispiel C 16) gelöst.

Das **Anwenden des Begriffs „Verhältnis“** erfolgt beim Lösen von Aufgabe 3a und je einer Teilaufgabe der Aufgaben 4a und 4b (SSA). Mit nachstehenden Fragen kann überprüft werden, ob sich die Schüler sicheres Wissen über den Verhältnisbegriff angeeignet haben:

- Welche Größen werden ins Verhältnis gesetzt, wenn man von
  - der Bevölkerungsdichte eines Landes spricht (UG),
  - der Arbeitsleistung eines Drehers spricht (UG)?
- Was wird zum Ausdruck gebracht, wenn man folgende Verhältnisse bildet?

a) $\dfrac{8{,}5\ \text{l Kraftstoff}}{100\ \text{km Weg}}$ (Kraftstoffverbrauch)

b) $\dfrac{5\ \text{mg Gold}}{1\ \text{kg goldhaltiges Gestein}}$ („Ausbeute“)

Kontrollaufgaben
Aufg. 2 und 5

Verhältnisse bei zueinander direkt proportionalen und bei zueinander umgekehrt proportionalen Zahlenfolgen (2 Std.)

LE 12 (LB 116 bis 118)

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß bei direkter Proportionalität je zwei Glieder der einen Folge das gleiche Verhältnis bilden wie die ihnen zugeordneten Glieder der anderen Folge und daß diese Eigenschaft gleichwertig ist mit der in der Definition C 5 benutzten Eigenschaft,
- können wahre Gleichungen aus Verhältnissen bei zueinander proportionalen Zahlenfolgen aufstellen,

- wissen, daß bei umgekehrter Proportionalität das Verhältnis zweier beliebiger Glieder der einen Folge gleich dem reziproken Verhältnis der entsprechenden Glieder der anderen Folge ist und daß diese Eigenschaft gleichwertig ist mit der in der Definition C 7 benutzten Eigenschaft,
- können wahre Gleichungen aus Verhältnissen bei zueinander umgekehrt proportionalen Zahlenfolgen bilden?

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeiten der Eigenschaft gleicher Verhältnisse bei direkter Proportionalität
- Erarbeiten der Gleichwertigkeit dieser Eigenschaft mit der in Definition C 5
- Festigen der Kenntnis über gleiche Verhältnisse bei direkter Proportionalität

2. Stunde
- Erarbeiten der Eigenschaft gleicher Verhältnisse bei umgekehrter Proportionalität
- Festigen der Kenntnisse über gleiche Verhältnisse bei direkter und bei umgekehrter Proportionalität

Methodische Hinweise

Erarbeiten der Eigenschaft gleicher Verhältnisse ... Die tägliche Übung enthält Aufgaben folgender Art:
- Erweitere die gegebenen Brüche mit 5!
  Sprich als Gleichungen! $\left(\frac{7}{3}; \frac{3}{4}; \frac{3}{5}\right)$
- Bestimme x so, daß wahre Aussagen entstehen!
  $\frac{5}{2} = \frac{x}{20}$; $\frac{5}{x} = \frac{45}{63}$; $\frac{72}{27} = \frac{8}{x}$

Anschließend erläutert ein Schüler an der Tabelle des folgenden Tafelbildes die Definition der direkten Proportionalität. Dabei muß die Gleichwertigkeit der Verhältnisgleichheit $\left(\text{z. B. } \frac{60}{1} = \frac{120}{2} = \frac{240}{4}\right)$ mit der Definition C 5 und die Beziehung zum Proportionalitätsfaktor sichtbar werden. Werden Schwierigkeiten erwartet, so können die Einheiten unberücksichtigt bleiben:

Tafelbild

Weg s in km	60	120	240	300
Zeit t in h	1	2	4	5

$120 = \boxed{60} \cdot 2$ $\qquad$ $300 = \boxed{60} \cdot 5$

$\frac{120}{2} = \boxed{60}$ $\qquad$ $\frac{300}{5} = \boxed{60}$

$$\frac{120}{2} = \frac{300}{5}$$

$\left(\boxed{}\ \text{farbige Kreide}\right)$

Ausgehend vom Merkmal, daß ein Ver-k-fachen der Werte von s auch ein Ver-k-fachen der Werte von t bedeutet, wird als Ziel formuliert, Verhältnisse von beliebigen Gliedern einer Folge mit den Verhältnissen der ihnen zugeordneten Glieder der anderen Folge zu vergleichen. Die Schüler bilden Verhältnisse der Glieder der Folge s und ordnen sie im Heft untereinander an. Ein Schüler arbeitet an der Tafel.

Anschließend bilden die Schüler die entsprechenden Verhältnisse der Folge t und vergleichen (SSA). Das Erkennen gleicher Verhältnisse ist Anlaß, ähnliche Untersuchungen an Zahlenfolgenpaaren, denen keine direkte Proportionalität zugrunde liegt, vorzunehmen (z. B. Tabelle der Aufg. 1 aus LE 10). Bevor die Schüler verallgemeinern, werden sie auf eine notwendige Begründung für diese Eigenschaft orientiert. Die alleinige Feststellung, daß beide Folgen „im gleichen Verhältnis" steigen bzw. fallen reicht dazu nicht aus.

Das **Erarbeiten der Gleichwertigkeit ...** kann auf drei Niveaustufen erfolgen (bei Differenzierung zu beachten):

1. Niveaustufe (rechtfertigt i. allg. keine Verallgemeinerung)
Die Schüler lesen unmittelbar aus der Tabelle (Tafelbild, S. 138) ab, daß folgende Beziehungen gelten:

$$\frac{120}{240} = \frac{2}{4} \quad \left(\text{Durch Kürzen erhält man } \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\right)$$

$$\frac{300}{120} = \frac{5}{2} \quad \left(\text{Durch Kürzen erhält man } \frac{5}{2} = \frac{5}{2}.\right).$$

2. Niveaustufe (genügt den Lehrplananforderungen an einen Nachweis in Klasse 6 – beispielgebundener Beweis)
Die Schüler führen den Nachweis mit Hilfe von Zahlen aufgrund der Definition.
Entsprechend der Definition gilt:

$120 = \mathbf{60} \cdot 2$
$240 = \mathbf{60} \cdot 4$

Daraus folgt:

$$\frac{120}{240} = \frac{\mathbf{60} \cdot 2}{\mathbf{60} \cdot 4}$$

Kürzen mit **60** (dem Proportionalitätsfaktor) ergibt:

$$\boxed{\frac{120}{240} = \frac{2}{4}}$$

3. Niveaustufe (übersteigt gering die Lehrplanforderungen)
Die Schüler führen den Nachweis mit Hilfe von Variablen aufgrund der Definition:

s in km	a	b
t in h	c	d

$(a, b, c, d \in Q_+)$

Entsprechend der Definition gilt:

$c = \boldsymbol{k} \cdot a$
$d = \boldsymbol{k} \cdot b$

Daraus folgt:

$$\frac{c}{d} = \frac{\boldsymbol{k} \cdot a}{\boldsymbol{k} \cdot b}$$

Kürzen mit $\boldsymbol{k}$ (Proportionalitätsfaktor) ergibt:

$$\boxed{\frac{c}{d} = \frac{a}{b}}$$

Will man sich dem Vorgehen im Lehrbuch anschließen, dann bietet sich folgendes *Tafelbild* an:

t	2	5
s	120	300

$s \sim t$

$$\frac{2}{5} = \frac{60 \cdot 2}{60 \cdot 5} \quad \text{(Erweitern mit 60)}$$

$$\boxed{\frac{2}{5} = \frac{120}{300}}$$

t	a	b
s	c	d

$(a, b, c, d \in Q_+)$

$$\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b} \quad \text{(Erweitern mit } k\text{)}$$

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

Das Festigen der Kenntnisse über gleiche Verhältnisse . . . erfolgt anhand folgender Aufgaben (SSA):

a) Die Schüler bilden nach Vorgabe Zahlenfolgen und erhärten ihr Wissen über bestehende Proportionalität durch das Bilden von gleichen Verhältnissen aus Gliedern der einzelnen Folgen bzw. durch den Nachweis der Nichtgültigkeit entsprechender Verhältnisse bei zueinander nicht proportionalen Folgen, z. B.:

x	7	5	$\frac{4}{3}$
$3 \cdot x$			

a	8	4	1
$a + 3$			

Die Schüler sollten erkennen, daß ein derartiges Feststellen der Proportionalität unrationeller bzw. unsicherer ist als mittels des Proportionalitätsfaktors; denn sie wissen (bei mehr als 2 Gliedern je Folge) nicht, wieviel Gleichungen sie überprüfen müssen.

b) Die Schüler ermitteln über das Erweitern (Kürzen) fehlende Glieder:

a	2,7	x
b	5,4	3,6

$a \sim b$

$$\frac{2{,}7}{x} = \frac{5{,}4}{3{,}6} \quad \text{(Erweiterungszahl ist 2)}$$

$$x = 1{,}8$$

Das Erarbeiten der Eigenschaft gleicher Verhältnisse . . . beginnt mit dem Lösen der Aufgaben 1a und b (SSA). Die Auswertung führt direkt zur Problemstellung, auch bei Aufgabe 1b Verhältnisse aus zueinander gehörigen Gliedern zu untersuchen. Ausgangsbeispiel kann folgendes *Tafelbild* sein.

Weg $s = 60$ km

v in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$	10	15	20	30	60
t in h	6	4	3	2	1

Wie in der vergangenen Stunde werden Verhältnisse der Glieder aus Folge (v) gebildet und anschließend mit den Verhältnissen der entsprechenden Glieder der Folge (t) verglichen (SSA):

$\frac{15}{30} \neq \frac{4}{2}$; $\frac{20}{60} \neq \frac{3}{1}$; $\frac{10}{15} \neq \frac{6}{4}$

Es schließen sich Überlegungen folgender Art (UG) an:

- Aufgrund des Fallens der Folge (t) und des Steigens der Folge (v) können keine gleichen Verhältnisse aus den entsprechenden Gliedern der Folge (t) entstehen. Wir wissen ja bereits: *Nur* bei zueinander direkt proportionalen Zahlenfolgen gelten Gleichungen dieser Art.

Zur Erkenntnisfindung wird der Lehrer je nach Klassensituation weitere Impulse geben:

- Ein Verdoppeln der Werte von v bedeutet ein Halbieren der Werte von t, 2 ist der reziproke Wert von $\frac{1}{2}$ ...
- Im Zähler müßte ein kleinerer Wert stehen als im Nenner (bezogen auf obiges Beispiel).
- Kann das Wort „umgekehrt" hier nicht genutzt werden?

Die Schüler stellen fest, daß man das Verhältnis der Glieder der Folge (t) umkehren muß. Sie bilden anhand des Ausgangsbeispiels und der Aufgabe 1b weitere gleiche Verhältnisse (SSA) – evtl. nach Vorgabe eines Verhältnisses durch den Lehrer. Der Nachweis für die Gültigkeit solcher Gleichungen kann analog wie in der vorigen Stunde in unterschiedlichen Niveaustufen erfolgen:

1. Niveaustufe: Die Schüler lesen unmittelbar aus der Tabelle ab, daß gilt $\frac{15}{30} = \frac{2}{4}$ $\left(\text{durch Kürzen erhält man } \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\right)$.

2. und 3. Niveaustufe: Die Schüler gehen von der Definition aus und überlegen, welche Umformungen nötig sind, um die „Ziel"-Gleichung zu erhalten. Dabei entspricht das Arbeiten mit Zahlen der Niveaustufe 2, das Arbeiten mit Variablen der Niveaustufe 3:

Tafelbild (Lückentext, Pfeile erst zum Schluß)

v	15	30
t	4	2

$v \sim \frac{1}{t}$

v	a	b
t	c	d

$(a, b, c, d \in Q_+)$

$15 \cdot 4 = 30 \cdot 2$ ← Definition → $a \cdot c = b \cdot d$

? ?

$\boxed{\frac{15}{30} = \frac{2}{4}}$ ← Ziel → $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{d}{c}}$

(An der richtigen Stelle stehen bereits 15 und 2 (bzw. a und d); diese Werte farbig hervorheben; durch welche Umformung „beseitigt" man 4 und 30 (bzw. c und b)?)

Anschließend formulieren die Schüler über dieses Merkmal der umgekehrten Proportionalität einen Satz. Die Erkenntnis wird optisch durch Pfeilrichtung (Tafelbild) gefestigt.

Es ist nichts dagegen einzuwenden, schon hier derartige Gleichungen als Verhältnisgleichungen zu bezeichnen und fehlende Zahlen berechnen zu lassen, z. B.: $5 : 20 = x : 10$.

Das Festigen der Kenntnisse . . . erfolgt durch eine Gegenüberstellung der Verhältnisbildung bei direkter und bei umgekehrter Proportionalität:

Tafelbild (besser Folie, da in folgender Stunde nochmals genutzt)

Direkte Proportionalität

I	1	2	4	5
II	20	40	80	100

Je zwei Glieder von **I** bilden das **gleiche Verhältnis** wie die entsprechenden Glieder von **II**.

Umgekehrte Proportionalität

I	1	2	4	5
II	100	50	25	20

Je zwei Glieder von **I** bilden das **umgekehrte Verhältnis** wie die entsprechenden Glieder von **II**.

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 2
2. Bilde anhand der Tabelle im Auftrag C 19 gleiche Verhältnisse!

Anwendungen zur direkten und umgekehrten Proportionalität (2 Std.)

LE 13 (LB 118 bis 121)

Ziele

Die Schüler
- können die erarbeiteten Kriterien für direkte und umgekehrte Proportionalität anwenden,
- können bei vorgegebenem Proportionalitätsfaktor zu einem Sachverhalt entsprechende Zahlenfolgenpaare bilden,
- können durch inhaltliches Lösen von Gleichungen zu einfachen Sachverhalten fehlende Zahlenwerte ermitteln.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Anwenden aller Kriterien auf praktische Sachverhalte zur direkten bzw. umgekehrten Proportionalität
- Systematisieren verschiedener Ausgangssituationen beim Anwenden der Kenntnisse

2. Stunde
- Systematisieren der Kenntnisse durch Gegenüberstellung der direkten und umgekehrten Proportionalität; Kurzkontrolle

Methodische Hinweise

Dem **Anwenden aller Kriterien ...** wird eine Wiederholung anhand der Tabellen aus LE 12 (Tafelbild bzw. Folie, S. 142) vorangestellt (UG). Anschließend werden die Kenntnisse durch Übungen gefestigt (SSA): Aufgaben 1, 2, 5a und 6. Der Lehrer organisiert eine Vergleichsmöglichkeit, auch zur Vorbildwirkung bezüglich der äußeren Form (Folie oder ein Schüler arbeitet an der verdeckten Tafel).

Tafelbild (bezogen auf Aufg. 1 und 2)

1.

Alter von Peter	12	11	10	...	6
Alter von Ute	24	23	22	...	18

$$\left.\begin{array}{l} 24 = \boxed{2} \cdot 12 \\ 23 \neq \boxed{2} \cdot 11 \end{array}\right\} \text{keine Proportionalität}$$

($\boxed{}$ farbig)

Vor 6 Jahren war Ute 3mal so alt wie Peter.

2.

Geschwindigkeit v in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$	60	40
Zeit t in h	3	4,5

$60 \cdot 3 = \boxed{180}$

$40 \cdot 4{,}5 = \boxed{180}$

$v \sim \frac{1}{t}$

$s = v \cdot t$

$s = 60 \frac{\text{km}}{h} \cdot 3\ \text{h} = 180\ \text{km}$

Antwortsatz:

Die grafische Darstellung der Altersangaben von Ute und Peter würde den Schülern zeigen, daß die Punkte auf einer Geraden liegen, diese jedoch nicht durch $O(0; 0)$ verläuft.

Das **Systematisieren verschiedener Ausgangssituationen ...** kann anhand der bearbeiteten Aufgaben erfolgen (UG):

1. Wir wissen, daß Proportionalität vorliegt (Aufg. 5a); wir bilden Zahlenfolgenpaare bzw. ermitteln fehlende Werte.
2. Zahlenfolgenpaare liegen vor (z. B. Meßreihen, Aufg. 6, auch obige Tabellen); wir untersuchen auf Proportionalität.

Die Schüler untersuchen anschließend die im Lehrbuch vorgestellten Beispiele (Beispiele C 19 bis C 21) und entscheiden, welche Situation jeweils vorliegt. Dazu eignen sich differenzierte Aufgabenstellungen mit anschließendem Schülervortrag. Die Schüler erkennen, daß im Beispiel C 20 der 2. Fall und in dem Beispiel C 19 der 1. Fall vorliegt.

Systematisieren der Kenntnisse ... Zum Festigen können die Schüler Aufgabe 4* lösen (SSA). Die systematisierende Gegenüberstellung erfolgt mit dem Ziel, das Wissen und Können der Schüler abschließend in einer Kurzkontrolle zu überprüfen.

Zur Erarbeitung der Übersicht kann ein Arbeitsblatt dienen, das die Schüler selbständig – unter starker Einbeziehung der „Zusammenfassung“ des Lehrbuches (S. 120f.) – ausfüllen. Dabei festigen sie ihr Wissen darüber, daß sich die Eigenschaften beider Beziehungen aufgrund gleicher Fragestellungen mit den gleichen Mitteln formulieren lassen. Anschließend begründen die Schüler ihre Entscheidungen.

Arbeitsblatt

Direkte Proportionalität

a	1	2	4	5
b	20			

$b = \boxed{} \cdot a$

$80 =$

$\frac{a}{b}$ ist immer gleich.

a steigt und b ....
Das k-fache von a bedeutet
.... von b.

Umgekehrte Proportionalität

x	1	2	4	5
y	100			

$x \cdot y = \boxed{}$

$4 \cdot \quad =$

.... ist immer gleich.

x steigt und y ....
Das k-fache von x bedeutet
.... von y.

Zwei Glieder

a bilden das .... | x bilden das ....

Verhältnis wie die zugehörigen Glieder

von b. | von y.

1 : 4 = ... | 1 : 4 = ...

Kontrollaufgaben (geeignet für Kurzkontrolle)
Aufg. 5b; und aus LE 15 Aufg. 19

Verhältnisgleichungen (2 Std.)

LE 14 (LB 121 bis 122)

Ziele

Die Schüler
- haben das Lösungsverfahren für $a \cdot x = b$ und $a : x = b$ reaktiviert,
- kennen den Begriff „Verhältnisgleichung“ und können Verhältnisgleichungen sicher lösen,
- können bei zueinander proportionalen (umgekehrt proportionalen) Zahlenfolgen unbekannte Glieder mit Hilfe von Verhältnisgleichungen ermitteln.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Einführen des Begriffs „Verhältnisgleichung" („Proportion")
- Üben im Lösen von Verhältnisgleichungen, dabei Wiederholen des Lösungsverfahrens für $a \cdot x = b$ und $a : x = b$

2. Stunde
- Üben im Lösen von Verhältnisgleichungen

Methodische Hinweise

Das **Einführen des Begriffs „Verhältnisgleichung" („Proportion")** kann unterschiedlich erfolgen:
Variante 1: Es wird der im Lehrbuch gezeigte Weg beschritten und mit einer täglichen Übung begonnen:

a)

I	7	5	3	x	0,5
II	105	75	45	15	y

b)

III	1	2	m	4	5
IV	48	24	16	12	n

- Untersuche a) und b) auf Proportionalität! Begründe mittels der Definition!
- Was kannst du daraus für einige Verhältnisse folgern?
- Ergänze die Tabellen!

Einige (an der Tafel fixierte) Gleichungen, z. B. $\frac{x}{5} = \frac{15}{75}$; $\frac{1}{4} = \frac{12}{48}$ werden anschließend zur Begriffseinführung genutzt. Dabei wird festgestellt, daß an der Tafel *Gleichungen* stehen und daß die *Terme* auf beiden Seiten *Verhältnisse* sind.

Die Begriffseinführung kann kurz sein, da die Schüler derartigen Gleichungen bereits in den Lerneinheiten 12 und 13 begegnet sind (auch im Stoffgebiet 2, Division gebr. Zahlen).

Es sollten auch gleich Verhältnisgleichungen ohne und mit Variablen in die Betrachtungen einbezogen werden. Die Frage nach dem Lösen derartiger Gleichungen kann zum nächsten Stundenteil überleiten.

Variante 2: Der Begriff wird an einem praktischen Beispiel erarbeitet: „Für Kraftfahrzeuge mit Zweitaktmotoren enthalten die Zapfsäulen an den Tankstellen als Angabe über das benötigte Gemisch aus Öl und Benzin: Mischungsverhältnis 1 : 33 (oder 1 : 50).

Wieviel l Öl muß man mit 20 l Benzin mischen, um das Gemisch 1 : 33 zu erhalten?" (vgl. Aufg. 1, LE 15, LB 124). Zunächst ist zu klären, was die Angabe 1 : 33 bedeutet (1 l Öl und 33 l Benzin) und daß direkte Proportionalität vorliegt. Anschließend wird man versuchen, die Kenntnisse über zueinander direkt proportionale Zahlenfolgen für die Beantwortung der gestellten Frage auszunutzen:

Benzin in l	33	3,3	16,5	19,8	20
Öl in l	1	0,1	0,5	0,6	x

Durch derartige inhaltliche Überlegungen (oder mittels einer graphischen Darstellung) erhält man kein genaues Ergebnis. Erinnert man daran, daß bei zueinander direkt proportionalen Zahlenfolgen das Verhältnis aus zwei beliebigen Gliedern der einen Zahlenfolge gleich dem Verhältnis der ihnen entsprechenden Glieder der anderen Zahlenfolge ist (LE 12), so läßt sich schreiben:

$x : 1 = 20 : 33$ (leichter zum Lösen)
oder $x : 20 = 1 : 33$ (geeigneter zur Begriffserarbeitung)

Solchen Gleichungen kann dann leicht der Name „Verhältnisgleichung" gegeben werden (bzw. der evtl. in LE 12 bereits benutzte Begriff kann hier reaktiviert werden). In beiden Varianten wird die Erarbeitung mit der Erkenntnis abgeschlossen, daß Verhältnisgleichungen mit einer Variablen zu den Typen $a \cdot x = b$ oder $a : x = b$ gehören. Dies motiviert nachträglich deren gesonderte Behandlung.

Bei der Begriffsbildung wird man erwähnen, daß Verhältnisgleichungen auch „Proportionen" (wegen ihrer Bedeutung für die direkte bzw. umgekehrte Proportionalität) genannt werden.

Die Sprechweise ist besonders zu üben, wobei sowohl die „Kurzform" („x zu 5 wie 15 zu 75") als auch die „Langform" („x verhält sich zu 5 wie 15 zu 75") gefordert werden sollten. Die Langform hat einen deutlicheren Bezug auf „Verhältnis". Die Schreibweisen $\frac{x}{5} = \frac{15}{75}$ und $x : 5 = 15 : 75$ sind gleichberechtigt zu verwenden.

Üben im Lösen von Verhältnisgleichungen ... An dem behandelten Beispiel $\left(\frac{x}{1} = \frac{20}{33} \text{ oder } \frac{x}{5} = \frac{15}{75}\right)$ wird den Schülern bewußtgemacht, daß diese Verhältnisgleichung eine Gleichung des Typs $a \cdot x = b$ ist $\left(\text{vgl. } \frac{x}{10} = \frac{1}{10} \cdot x, \text{ LB } 122\right)$ und daß damit ein Lösungsverfahren zur Verfügung steht.

Abschließend können alle für das Auftreten einer Variablen möglichen Fälle einer Verhältnisgleichung betrachtet werden:

(1) $x : 5 = 15 : 75$ (2) $1 : x = 15 : 75$ (3) $1 : 5 = x : 75$ (4) $1 : 5 = 15 : x$

An den Beispielen (1) bis (4) sollten die Schüler erkennen, daß es sich eigentlich nur um zwei verschiedene Fälle handelt (Variable im Zähler – (1), (3); Variable im Nenner – (2), (4); auf der anderen Seite der Verhältnisgleichung steht jeweils eine Zahl – Verhältnis als Quotient):

(1) $\frac{x}{5} = \frac{15}{75}$ (2) $\frac{1}{x} = \frac{15}{75}$

Das Lösen von (1) oder (2) kann nun unter Verwendung des Lösungsverfahrens für $a \cdot x = b$ bzw. $a : x = b$ erfolgen und sollte gemeinsam mit den Schülern geschehen (Tafel, Heft).

Beim Lösen von Sachaufgaben ist das Aufstellen der Gleichung zweckmäßigerweise stets mit dem gesuchten Wert zu beginnen, da sich dadurch die Anzahl der Lösungsschritte verringert (vgl. LE 15, 1. Stunde).

Beim **Üben im Lösen von Verhältnisgleichungen** ist die Aufgabenauswahl von der Klassensituation abhängig (in manchen Klassen wird man mit Aufg. 3b beginnen können). Für das schriftliche Üben müssen die Aufgaben so beschaffen sein, daß sie zur Anwendung des Lösungsverfahrens zwingen (Aufg. 3b, d). Es ist wichtig, nicht nur die Aufgaben zu wählen, bei denen der Quotient ganzzahlig ist (auch: $x : 17 = 4 : 12$). Für das mündliche Üben (inhaltl. Lösen) eignen sich die Aufgaben 2 und 3a.

Die Aufgaben bieten gute Möglichkeiten, das Rechnen mit gebrochenen Zahlen weiter zu festigen (Multiplikation und Division gemeiner Brüche, Kürzen). Auch Aufgaben mit Dezimalbrüchen dürfen nicht fehlen:

– $2{,}5 : 3{,}5 = x : 7$ (mündlich) $2{,}7 : x = 6{,}3 : 0{,}35$ $98{,}4 : 4{,}2 = x : 1{,}4$

Außerdem könnten auch folgende Aufgaben eine Rolle spielen:

– Bilde Verhältnisgleichungen der Form $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$ (oder: $\frac{\ }{x} = -$) mit der Lösung 7!

– Gib die Zahlen x und y an, so daß die Verhältnisgleichung $\frac{3}{8} = \frac{x}{y}$ wahr ist!

Kontrollaufgabe
$\frac{5}{2} : \frac{5}{7} = x : \frac{8}{7}$

Aufstellen und Lösen von Verhältnisgleichungen (5 Std.)

LE 15 (LB 123 bis 127)

Um Potenzen der ideologischen Erziehung zu nutzen, sollte der Lehrer die Sachaufgaben örtlich und zeitlich in den Lebensbereich der Schüler rücken, die Schüler selbst mit dem Beschaffen aktuellen Zahlenmaterials beauftragen sowie das richtige Ausdeuten gefundener Ergebnisse veranlassen. Das bietet wiederum eine Möglichkeit, die Abfolge der Sachaufgaben für die Schüler interessant und bedeutsam zu gestalten, die Aufgaben miteinander zu verknüpfen, auseinander zu entwickeln. So sollte auch das inhaltliche Lösen von Aufgaben zugelassen sein. An geeigneter Stelle ist das Rechnen mit Näherungswerten aufzugreifen und den Schülern der Praxisbezug sichtbar zu machen.

Die Probe erfolgt in der Regel durch einen Vergleich mit dem bei der Aufgabenanalyse gefundenen Überschlagsergebnis. Gelegentlich sollten die Schüler aber aufgefordert werden, mit dem gefundenen Ergebnis andere (als bei der Lösung benützte) Gleichungen zu bilden und deren Wahrheit zu überprüfen.

Ziele

Die Schüler
- können die Eigenschaften der direkten und umgekehrten Proportionalität auf praktische Sachverhalte anwenden,
- sind befähigt, funktionale Betrachtungen beim Analysieren praktischer Probleme vorzunehmen,
- können entscheiden, ob einer Sachaufgabe direkte oder umgekehrte Proportionalität zugrunde liegt,
- können die benötigten Gleichungen aufstellen und lösen,
- können mit grafischen Darstellungen zur direkten Proportionalität bei Sachaufgaben arbeiten.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Sicherung des Ausgangsniveaus
- Anwenden der Kenntnisse bei einfachen Sachaufgaben zur direkten und umgekehrten Proportionalität

2. Stunde
- Festigen der Kenntnisse anhand von Aufgaben zur direkten und umgekehrten Proportionalität

3. Stunde
- Anwenden der Kenntnisse über grafische Darstellungen beim Lösen von Sachaufgaben

4. Stunde
- Anwenden der Kenntnisse bei Aufgaben zu physikalischen Sachverhalten

5. Stunde
- Festigen des Wissens und Könnens anhand schwierigerer Sachaufgaben zur direkten und umgekehrten Proportionalität, bei denen der Analyse der Aufgabe besondere Beachtung zukommt

Methodische Hinweise

Zur **Sicherung des Ausgangsniveaus** sollte möglichst in allen Stunden das Lösen von Aufgaben folgender Art geübt werden:

- Lösen von Gleichungen, z. B. $3{,}5 \cdot x = 0{,}6 \cdot 7$ bzw. $\frac{x}{1{,}2} = \frac{35}{48}$;
- Bilden zueinander proportionaler bzw. umgekehrt proportionaler Zahlenfolgen bei vorgegebenem k bzw. c;
- Bestimmen fehlender Glieder von Zahlenfolgen (siehe LB 121).

Anwenden der Kenntnisse ... Die Schüler kennen bereits die Schrittfolge: *Gegebenes – Gesuchtes – Überschlag – Lösung – Antwortsatz.* An diese Schrittfolge kann angeknüpft werden. Der Bezug der neuen Form (Tabelle) zum bisherigen Vorgehen muß den Schülern deutlich werden. Am Beispiel der Aufgabe 3 entsteht folgendes *Tafelbild* (UG), das die Schüler anschließend ins Heft übertragen (Hervorgehobene „Stichpunkte" an Nebentafel festhalten):

Tafelbild

Das Gegebene und Gesuchte, einschließlich der jeweiligen Zugehörigkeit, wird übersichtlich in einer *Tabelle* angeordnet:

Energie in kWh	55	75
Kosten in M	4,40	x

Zwecks *Entscheidung* und *Überschlag* wird überlegt: Das Doppelte an Energie verursacht das Doppelte an Kosten ... (Angabe der Pfeile)

Energie $\sim$ Kosten

Es wird etwa die Hälfte der Energie zusätzlich verbraucht, also müssen die Kosten auch um die Hälfte der bisherigen Kosten erhöht werden:

$x \approx 6{,}60$ M

Entsprechend obiger Überlegung wird die *Gleichung* aufgestellt und gelöst:

$$\frac{x}{75} = \frac{4{,}40}{55}$$

$$x = \frac{4{,}40 \cdot 75}{55} \quad \text{(Kürzen)}$$

Vergleich mit dem Überschlag:

$$\underline{\underline{x = 6}} \quad (6 \approx 6{,}60)$$

Antwortsatz:

75 kWh kosten 6,00 M.

Die Schüler werden darauf hingewiesen, beim Aufstellen der Gleichung immer mit dem gesuchten Wert zu beginnen. Anschließend lösen sie die Aufgaben 1a und 6a (SSA). Dabei orientieren sie sich an den „Stichpunkten".

Tafelbild

Aufg. 6a

Anzahl der Schüler n	5	6
benötigte Zeit t in h	12	x

$x < 12;\ n \sim \frac{1}{t}$

$$6 \cdot x = 5 \cdot 12$$

$$x = \frac{5 \cdot 12}{6}$$

$$\underline{\underline{x = 10}}$$

Antwortsatz!

$$10 < 12$$

Das **Festigen der Kenntnisse . . .** erfolgt durch folgende Aufgaben und bezieht sich auch auf die Schrittfolge (Stichpunkte):
- Aufgabe 7a (umgekehrte Proportionalität) – in SSA;
- Aufgaben 1b und c (direkte Proportionalität) – SSA, Aufgabe 4 (Ergebnis erzieherisch nutzen). Ein Vergleich ist möglichst durch eine Folie zu organisieren;
- Aufgabe 10 (keine Proportionalität) – im UG;
- Aufgabe 2 – Analyse im UG (siehe *Tafelbild*):

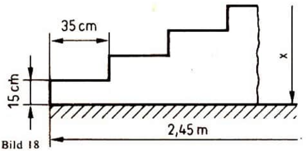


Bild 18

Breite in cm	35	245
Höhe in cm	15	x

Breite $\sim$ Höhe

$x \approx 100$

usw.

Beim Lösen einer jeden Aufgabe formulieren die Schüler ihre Überlegungen und die daraus abgeleitete Entscheidung sowie den Überschlag mit einer entsprechenden Begründung. Dieses Überlegen kann durch kein Schema ersetzt werden. Bei dieser Gelegenheit kann auch folgende Aufgabe diskutiert werden: „Wie weit kann man einen Stein mit der Masse von 2,4 kg werfen, wenn man einen 1,6 kg wiegenden Stein 12 m weit wirft?"

Das Anwenden der Kenntnisse über grafische Darstellungen . . . kann mit einer Wiederholung anhand einer Folie aus LE 7 beginnen. Dabei wird das charakteristische Bild der Darstellung von Proportionalitäten im Koordinatensystem hervorgehoben (UG). Als Ziel für die Stunde wird formuliert, derartige Grafen für Sachaufgaben zu entwickeln, um aus ihnen Lösungen zu entnehmen. Dabei vertiefen und nutzen die Schüler die Einsicht, daß nur ein einziges Zahlenpaar für die Darstellung benötigt wird, daß dieses Lösungsverfahren jedoch nur dann zweckmäßig ist, wenn man viele Aufgaben zu einem speziellen Sachverhalt zu lösen hat. Dazu eignet sich Aufgabe 3 (auch wenn sie bereits bearbeitet wurde; danach Aufg. 15 in SSA). Gemeinsam wird das *Tafelbild* entwickelt und ins Heft übertragen:

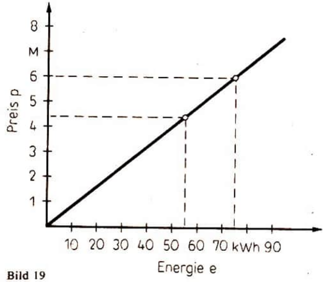


Bild 19

Energie *e* in kWh	55	75
Preis *p* in M	4,40	x

$e \sim p$

Es werden abgelesen:

$x = 6{,}00$ (in M)

Zusätzliche Aufgaben:

a) Lies den Preis für 25 kWh; 40 kWh ab!

b) Wieviel kWh kann man für 3,20 M; 2,40 M verbrauchen?

Antwortsätze!

Beim **Anwenden der Kenntnisse auf physikalische Sachverhalte** spielen u. a. die Größenarten Weg, Zeit und Geschwindigkeit eine Rolle.

Anhand der Aufgabe 8a wird erarbeitet (UG), daß im Tabelleneingang die Größen Weg und Zeit stehen müssen, da nach der benötigten *Zeit* für einen bestimmten *Weg* gefragt ist. Die gegebene Geschwindigkeit muß also „zerlegt" werden: 12 km in 1 Stunde. (Der Lehrer gehe an dieser Stelle auf Größengleichungen und das Mitführen der Einheiten ein, [B 3], S. 216). Einige Schüler werden vorschlagen, die Gleichung $s = v \cdot t$ nach der jeweils gesuchten Größe umzustellen. Dieser Vorschlag wird nachträglich aufgegriffen, beide Lösungswege werden gegenübergestellt.

Tafelbild

Weg *s* in km	12	11
Zeit *t* in min	60	x

$s \sim t$ und $x < 60$

$$\frac{x}{11} = \frac{60}{12}$$

$$x = \frac{60 \cdot 11}{12}$$

$$\underline{\underline{x = 55}} \quad 55 < 60$$

Antwortsatz: ...

$$s = v \cdot t \quad |:v$$

$$\frac{s}{v} = t$$

$$t = 11\,\text{km} : 12\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$t = 11\,\text{km} : \frac{12\,\text{km}}{60\,\text{min}}$$

$$t = \frac{11\,\text{km} \cdot 60\,\text{min}}{12\,\text{km}}$$

$$\underline{\underline{t = 55\,\text{min}}}$$

Aufgabe 8b lösen die Schüler selbständig. Einige Schüler werden aufgefordert, ihr Ergebnis zu Aufgabe 8b durch das Lösen folgender Aufgabe zu überprüfen: „Bei einer Geschwindigkeit von $12\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ benötigt man für 11 km eine Zeit von 55 min. Wieviel Zeit benötigt man für dieselbe Strecke bei einer Geschwindigkeit von $15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$?“ $\left(\text{Lösung über } v \sim \frac{1}{t}\right)$.

Tafelbild

v in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$	12	15
t in min	55	x

$$x < 55;\; v \sim \frac{1}{t}$$

$$15 \cdot x = 12 \cdot 55$$

$$x = \frac{12 \cdot 55}{15}$$

$$\underline{\underline{x = 44}} \quad \text{Antwortsatz!}$$

Man wird diese Schüler jedoch darauf hinweisen, daß es sicherer ist, mit unmittelbar gegebenen Werten zu arbeiten. Der errechnete Wert von 55 min (Aufg. 8a) könnte fehlerhaft sein.

Anschließend lösen alle Schüler selbständig Aufgabe 16, erster Teil (für differenziertes Arbeiten sollte die 2. Fragestellung berücksichtigt werden). Bei der Auswertung begründen die Schüler ihre Entscheidung und den Überschlag; abschließend ermitteln sie die Durchschnittsgeschwindigkeit des Rennfahrers (SSA).

Beim **Festigen des Wissens und Könnens ...** steht im verstärkten Maße eine gründliche Analyse des Sachverhalts im Mittelpunkt. Auch sind die Ergebnisse der Aufgaben stets daraufhin zu überprüfen, ob sie praktisch sinnvoll oder möglich sind, ob Proportionalität nur innerhalb gewisser Grenzen vorliegt.

Die Schüler erkennen, daß das Gegebene und Gesuchte oft nicht unmittelbar in eine Tabelle übernommen werden kann. Sie lernen, die Angaben der Aufgabe sinnvoll zu fixieren, z. B.:

- Aufgaben 8 und 11 (Aufgaben zur Übung, Vertiefung ...)
  In die Tabelle werden Differenzen vorgegebener Zahlenwerte eingetragen.
- Aufgabe 13a (Aufgaben zur Übung, Vertiefung ...)

Tafelbild (Skizze)

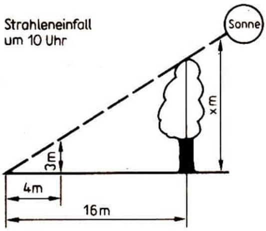


Bild 20

Während die Schüler diese drei Aufgaben lösen, notiert der Lehrer an der Tafel folgende Aufgabe: „Bei einem 100-m-Lauf legt ein Schüler in 3 s genau 20 m zurück. Wieviel Meter legt er in 6 s (25 s, 65 s) zurück?“ Die Schüler ermitteln die gesuchten Entfernungen (SSA). Die Auswertung der Antwortsätze wird eine Diskussion im erwähnten Sinn auslösen. Analog erfolgt die Auswertung der Lösungen zu Aufgabe 13, die die Schüler in Stillarbeit ermitteln. Anschließend werden die Schüler auf Beispiel C 23 (S. 123) orientiert. Sie sollen dazu Stellung nehmen, ob zwischen der Belastung F einer Schraubenfeder und der zugehörigen Verlängerung s hinsichtlich Proportionalität Grenzen gesetzt sind (UG).

Die noch *verbleibenden 2 Stunden* werden genutzt, um eine Auswahl der „Aufgaben zur Übung, Vertiefung ...“ zu lösen und die abschließende Kontrollarbeit gründlich vorzubereiten. Beim Lösen von Sachaufgaben in den letzten Stunden wird von den Schülern auch gefordert, die selbständig gelöste Aufgabe anschließend an der Tafel vorzutragen. So gewinnen sie Sicherheit und Selbstvertrauen. Außerdem wird der Lehrer vollständige Lösungen auf Folie vorbereiten und sie den Schülern nach der eigenen Bearbeitung als Kontrollmöglichkeit bieten. Sie lernen dabei, ihre Arbeit kritisch zu werten, eigene Fehler zu finden.

Die abschließende *Kontrollarbeit* wird das Lösen einfacher formaler Ungleichungen und Gleichungen unter Betonen des kalkülmäßigen Lösens von Gleichungen der behandelten Typen enthalten, je eine Sachaufgabe zur direkten und zur umgekehrten Proportionalität sowie auch eine grafische Darstellung.

Ebenso werden Fragen einbezogen, die das Definieren bzw. Erklären von Begriffen (aus der Gleichungslehre) fordern (siehe LE 2, 6, 9 – Zusammenfassung LB 120f.). Die *Auswertung* der Arbeit ergibt die Schwerpunkte der künftigen Wiederholung und Übung.

Kontrollaufgaben

1. Aufg. 7d (LE 15); Aufg. 5a (Aufgaben zur Übung, Vertiefung ...)
2. Aufg. 14 (LE 15); Aufg. 12 (Aufgaben zur Übung, Vertiefung ...)
3. Aufg. 17 (LE 15) – Löse anhand grafischer Darstellungen (nur für TU 134)!
4. Aufg. 9a und 9b (LE 15)
5. Aufg. 9, 10 und 15 (Aufgaben zur Übung, Vertiefung ...)

Stoffgebiet 4

Planimetrie (70 Std.)

Vorbemerkungen

Mit 70 Unterrichtsstunden ist dieses Stoffgebiet das umfangreichste des Mathematikunterrichts in Klasse 6 und gleichzeitig das umfangreichste zusammenhängende geometrische Stoffgebiet des gesamten Mathematiklehrgangs von Klasse 1 bis 10. Es ist das *Kernstück des abbildungsgeometrisch orientierten Vorgehens*, durch das sich der gesamte Planimetrielehrgang in den Klassen 4 bis 8 auszeichnet und das vornehmlich darauf gerichtet ist, zunächst einen logisch einwandfreien und auf klaren inhaltlichen Vorstellungen beruhenden Zugang zu den wichtigen Relationen *Kongruenz* und *Ähnlichkeit* für beliebige Punktmengen (Figuren) – also nicht beschränkt auf Vielecke oder gar auf Dreiecke – zu gewinnen, um dann mit diesen Relationen arbeiten zu können. Folgende fünf Etappen sind in Klasse 6 zu durchlaufen (vgl. allgemein dazu [28]; [30]):

(1) Es werden Bewegungen als eineindeutige punktweise Abbildungen der Ebene auf sich erklärt. (Dies geschieht über die Nacheinanderausführung der bereits in den Klassen 4 und 5 behandelten Elementarbewegungen Verschiebung, Spiegelung und Drehung.)

(2) Es wird nach *Eigenschaften* der Bewegungen gefragt: Was für Bilder haben Figuren (Punktmengen) wie Strecke, Gerade, Winkel ...? (Ausgangspunkt ist die Frage, welche der bereits behandelten Eigenschaften von Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen diesen drei Elementarbewegungen gemeinsam sind.)

(3) Auf der Grundlage des Bewegungsbegriffs wird die *Kongruenz zwischen Figuren* (Punktmengen) definiert, eine Äquivalenzrelation.

(4) Gewisse Figuren(paare) werden auf *Eigenschaften* bei *Bestehen der Relation „Kongruenz“* untersucht, und es wird gefragt, ob diese Eigenschaften umgekehrt Kongruenz zur Folge haben.

(5) Für Dreiecke wird im Zusammenhang mit (4) nach einfache(re)n *Möglichkeiten* (Kriterien) gesucht, die *Kongruenz festzustellen*, um daraus auf andere Eigenschaften dieser Figuren schließen zu können.

Obwohl in diesem Stoffgebiet eine starke Konzentration auf Fragen der ebenen Geometrie erfolgt, sollten alle sich bietenden Möglichkeiten zur Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens genutzt werden. So sind beispielsweise reale Gegenstände in die Betrachtungen einzubeziehen, wodurch auch dem wichtigen Prinzip der Lebens- und Praxisverbundenheit Rechnung getragen werden kann; es ist mit Körpermodellen zu arbeiten, an denen die fraglichen ebenen Figuren auftreten; es sind solche räumliche Aufgaben zu bearbeiten, die sich mit Verfahren der Planimetrie lösen lassen (etwa Untersuchungen und Berechnungen an Begrenzungsflächen von Körpern).

Von den inhaltlichen Leitlinien spielt in diesem Stoffgebiet die Leitlinie *Abbildungen* *und Funktionen* eine zentrale Rolle. Mit den Bewegungen lernen die Schüler eine wichtige, neue und die ihnen bereits vertrauten Elementarbewegungen umfassende Klasse von Abbildungen (Funktionen) kennen. Dabei wird – wie schon in den Klassen 4 und 5 – häufig mit Tabellen für die Zuordnung „Punkt → Bildpunkt" gearbeitet, und so werden die Schüler mit einer wichtigen Darstellungsweise von Funktionen allmählich vertraut. Bei der Nacheinanderausführung von Bewegungen handelt es sich außerdem im Prinzip um die Verknüpfung zweier Funktionen, die auf eine dritte führt.

Darüber hinaus ist in den unterschiedlichsten Zusammenhängen die „funktionale Denkweise" zu entwickeln. So ist häufig, etwa bei Flächeninhalten oder bei der (eindeutigen) Ausführbarkeit von Konstruktionen, die Abhängigkeit des Ergebnisses von den „Eingabewerten" bewußtzumachen. Zuweilen wird die Betrachtung „Was hängt wovon in welcher Weise ab?" sogar in den Mittelpunkt des Unterrichts gestellt, insbesondere wenn man neue Zusammenhänge vermuten, zu neuen Erkenntnissen kommen will.

Im Sinne der Leitlinie *Arbeiten mit Mengen* geht es auch im Stoffgebiet „Planimetrie" immer primär um die mathematischen Objekte, erst sekundär um ihre Beschreibung. So hat die Frage, welche geordneten Paare von Punkten zu einer Bewegung gehören, den Vorrang gegenüber der nach der Möglichkeit der Charakterisierung dieser Paare oder auch der Erzeugung der Abbildung durch Nacheinanderausführung von (Elementar-) Bewegungen auf verschiedene Weise. Vor allem aber werden Figuren stets als Punktmengen aufgefaßt.

Darüber hinaus geht es um Mengen und ihre Teilmengen (unterschiedlicher Art) bei der Klassifizierung geometrischer Figuren (ebene – nichtebene Figuren, konvexe – nichtkonvexe Vielecke, Einteilung der Dreiecke, Viereckarten). Hier erfolgt teilweise eine Veranschaulichung mit Mengendiagrammen, und das Verhältnis Oberbegriff – Unterbegriff ist stets deutlich als Teilmengenbeziehung zu erfassen.

Die der Leitlinie *Zahlenbereiche* zuzuordnende Frage der Zahlenbereichserweiterung klingt lediglich bei den Überlegungen zur Gültigkeit der Formel $A = a \cdot b$ auch für gebrochene Zahlenwerte von a und b im Stoffabschnitt 4.7. „Flächeninhalt und Umfang von Vielecken" an. Darüber hinaus ist aber nicht nur in diesem Stoffabschnitt sicheres Umgehen mit Größen, Zahlen und Einheiten, schnelles und fehlerfreies Durchführen von Berechnungen gefragt, das in das zentrale Anliegen des Mathematikunterrichts einzuordnen ist, nach dem es solides und anwendbares Können im Rechnen zu entwickeln gilt.

Gleichungen und Ungleichungen treten in unterschiedlichen Zusammenhängen und an vielen Stellen auf. Als typische Beispiele seien die Behandlung der Dreiecksungleichung und die Anwendung des Satzes von der Innenwinkelsumme in Dreiecken zur Berechnung von Dreieckswinkeln genannt. Darüber hinaus wird ständig das Einsetzen von Zahlen bzw. Größen für Variable in Termen praktiziert, und auch in Tabellen wird häufig mit Variablen gearbeitet. Bei vielen Beweisführungen und insbesondere bei den Formeln im Stoffabschnitt 4.7. steht der Umgang mit Gleichungen sogar stark im Vordergrund.

Von den Leitlinien der sprachlich-logischen Schulung ist die Leitlinie *Beweisen* diejenige, für deren Realisierung das Stoffgebiet „Planimetrie" die größte Bedeutung hat.

Für das Erreichen der hier gestellten Ziele ist es notwendig,
– die Sätze, die ausführlich zu beweisen sind, sorgfältig auszuwählen[1]) und insbe-

[1] Man beachte: Im Lehrplan werden neben Sätzen mit dem Zusatz „mit Beweis" bzw. „ohne Beweis" auch solche genannt, bei denen dem Lehrer die diesbezügliche Entscheidung überlassen bleibt, etwa wenn das „Kennzeichnen von Parallelen, Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden als Punktmengen mit bestimmten Eigenschaften" (LP 52) gefordert wird. Bei den Viereckarten bleibt sogar offen, welche Eigenschaften zu behandeln sind.

sondere zu vermeiden, daß das Beweisen bei längst bekannten oder zu selbstverständlich scheinenden Sachverhalten dies als eine überflüssige Erschwernis erscheinen läßt;

- genau zu überlegen, in welcher Weise bei anderen Sätzen die an sich bestehende Notwendigkeit eines Beweises und Gründe für den Verzicht auf einen solchen erörtert werden;
- die Schüler an der Beweisfindung in größtmöglichem Maße zu beteiligen, Hilfslinien zu motivieren usw., damit Beweise nicht als „Kunstgriffe" erscheinen;
- die Einsicht in die Beweisidee, den wesentlichen Gedankengang eines Beweises nicht zugunsten der Darstellung des Beweises zu vernachlässigen, auf jeden Fall die Phasen der Beweisfindung und der Beweisdarstellung nicht zu vermischen, um so erstere nicht durch Schwierigkeiten bei letzterer zu behindern und den Schülern die Übersicht über den Gesamtzusammenhang nicht zu erschweren;
- bei den Beweisen, die ausführlich dargestellt werden, eine möglichst prägnante Form zu bevorzugen, bei der Voraussetzung und Behauptung klar formuliert werden und in einem Beweisschema die Beweisschritte und die Begründungen für diese deutlich hervortreten;
- sich bei manchen Sätzen mit einer – von der Form, aber nicht vom Gedankengang her – etwas anspruchsloseren „Begründung" zu begnügen, nicht zuletzt dann, wenn eine derartige Begründung mit großer Selbständigkeit von den Schülern erwartet werden kann;
- nicht nur bei Sätzen, sondern auch sonst bei jeder Gelegenheit, etwa bei Berechnungen, die auf Einzel-Aussagen führen, auf das Begründen besonderen Wert zu legen.

Insgesamt ist für die Befähigung zum Beweisen ein sehr behutsames und schrittweises Vorgehen angezeigt, so daß einer sorgsamen Teilzielbestimmung (Näheres dazu siehe [3], H. 7/8) besondere Bedeutung zukommt.

Besonders bei den Sätzen über Winkelbeziehungen (Stoffabschnitt 4.3.) und im Stoffabschnitt „4.6. Vierecke und Vielecke" spielen Umkehrungen eine Rolle. In dem zuletzt genannten Stoffabschnitt sind die Schüler in Anfängen bereits an Probleme heranzuführen, die bei nicht von vornherein implikativ formulierten Sätzen auftreten. (Ohnehin ist dem Umformulieren von Sätzen im Rahmen der Leitlinie „Beweisen" Bedeutung beizumessen.)

Die Leitlinie *Definieren* kommt am deutlichsten dort zum Tragen, wo Definitionen formuliert und als solche hervorgehoben werden, in größerem Umfang im Stoffabschnitt „4.6. Vierecke und Vielecke". Dort sollen die Schüler in ihren Fähigkeiten, inhaltlich klar erfaßte Begriffe auch logisch und verbal einwandfrei auf bereits zur Verfügung stehende Begriffe zurückzuführen, ein erhebliches Stück vorangebracht werden. Darüber hinaus ist aber jegliche Begriffseinführung unter dem Aspekt dieser Leitlinie zu gestalten, auch wenn die Hervorhebung einer Definition häufig unterbleibt.

In den Bereich der Leitlinie „Definieren" gehören schließlich die Einteilung der Dreiecke und das Beachten der Besonderheiten von Relationsbegriffen, etwa bei der Kongruenz oder bei Scheitelwinkeln, Stufenwinkeln ...

Bezüglich der Leitlinie *Terminologie und Symbolik* ist zu beachten:

Auch in den in der Geometrie nicht seltenen Fällen, in denen – eigentlich unzulässigerweise – die gleichen Termini und Symbole für unterschiedliche Sachverhalte benutzt werden (etwa bei Vieleck als Linie oder Fläche, Strecke – Streckenlänge, Winkel – Winkelgröße) kann und muß eine richtige Vorgehensweise im Unterricht einen Beitrag zur Herausbildung guter Arbeitsgewohnheiten leisten. Daß hier „aus dem Zusammenhang hervorgeht, was gemeint ist", darf nicht nur einmalig erörtert, sondern muß des öfteren an geeigneten Beispielen bewußtgemacht werden. Der Schüler muß erfassen, daß hier eine sehr ökonomische Bezeichnungstechnik praktiziert wird, an der nicht nur der Tradition wegen festgehalten wird, daß aber bei manchen Sachverhalten eine sorgfältige Unterscheidung auch von der Terminologie und Symbolik her erforderlich und möglich ist.

Zur Vermittlung von *Verfahren und Mitteln geistiger Arbeit* gehört das Vertrautmachen der Schüler mit heuristischen Verfahren.

Um solche geht es in diesem Stoffgebiet vornehmlich beim Finden von Beweisen und bei Konstruktionsaufgaben, deren Bearbeitung fast durchweg als Problembearbeitungsprozeß zu gestalten ist. Dabei müssen grundlegende heuristische Prinzipien (Rückführungsprinzip, Analogieprinzip) und Strategien (Vorwärtsarbeiten, Rückwärtsarbeiten) stets das Vorgehen bestimmen. Sie sind den Schülern genügend zum Bewußtsein zu bringen, ohne daß sie deshalb selbst zum Unterrichtsgegenstand werden.

Algorithmische Verfahren spielen vor allem bei Berechnungen, etwa nach Flächeninhaltsformeln, eine Rolle. Die Konstruktionsbeschreibungen haben insofern einen Beitrag zur Entwicklung des algorithmischen Denkens zu leisten, als sie so zu formulieren sind, daß ein ihnen folgendes Vorgehen mit Sicherheit zum geforderten Ergebnis führt. Dies steht nicht im Widerspruch dazu, daß sie mit „ich" (im Lehrbuch mit „wir") und nicht mit „man" zu formulieren sind, geht es doch für den Schüler immer vorrangig um das Beschreiben seiner konkreten Tätigkeit. Vor allem soll aber so – in voller Übereinstimmung mit dem, was der Schüler im Muttersprachunterricht lernt – ein ausgesprochener „Rezeptcharakter" für das Bewältigen der jeweiligen Aufgabe schlechthin vermieden werden. Er würde den Konstruktionsweg in einer Weise objektivieren, die der Bearbeitung der Konstruktionsaufgabe als Problem, für das es mehrere Lösungswege gibt, entgegenstünde.

An der Vervollkommnung der Zeichenfertigkeiten muß in diesem Stoffgebiet konsequent weiter gearbeitet werden. Zügiges und exaktes Zeichnen und Konstruieren, dabei Beherrschen der Ausführung von Grundkonstruktionen (nicht unbedingt mit Zirkel und Lineal!) und sicherer Umgang mit unterschiedlichen Zeichenhilfsmitteln, sind ebenso anzustreben wie eine zielbewußte Entwicklung von Fähigkeiten im Skizzieren.

Besondere Bedeutung nicht nur für ein rationelles Arbeiten kommt dem sachgerechten Einsatz von Hilfsmitteln wie Lochschablone, Quadratraster und Koordinatensystem zu. Hier ist der in den Klassen 4 und 5 beschrittene Weg konsequent weiter zu verfolgen.

Bezüglich der *Entwicklung allgemeingeistiger Fähigkeiten* sei lediglich betont: Im Stoffgebiet „Planimetrie" sind die Möglichkeiten, die zur Ausbildung des logischen Denkens, zur Sprachschulung sowie zur Entwicklung phantasievoll-schöpferischen und konstruktiven Denkens genutzt werden können, besonders groß. Deshalb muß man einerseits zwar auf die bewußte und alle Komponenten gleichermaßen erfassende Ausschöpfung dieser Potenzen achten, sich andererseits jedoch vor jeder Übertreibung hüten. Unter einer solchen würde die Aneignung des – auch im Interesse der polytechnischen Bildung und Erziehung – notwendigen Faktenwissens und des fachspezifischen Könnens ebenso leiden wie die Lebensverbundenheit und die Altersgemäßheit des Unterrichts.

Der spezifische Beitrag, den das Stoffgebiet zur *politisch-ideologischen Erziehung* zu leisten vermag, ist ebenfalls erheblich:

Der Ursprung mathematischer Begriffsbildungen in der Realität kann gerade in der Geometrie unmittelbarer und sinnfälliger deutlich werden als in anderen Disziplinen, und dem ist durch die Unterrichtsgestaltung Rechnung zu tragen. Wichtig ist auch das organische Einbeziehen historischer Fakten, zu dem sich gerade im Stoffgebiet „Planimetrie" häufig Gelegenheit bietet. Anregungen geben [B7] und [B8].

Unter ausdrücklichem Hinweis darauf, daß es keinesfalls um das explizite Erörtern derartiger Fragen im Unterricht geht, sei schließlich mit dem (lokal) axiomatisch-deduktiven Aufbau ein Merkmal dieses Stoffgebiets genannt, das für die weltanschaulich-philosophische Erziehung wichtig ist. Die relativ hohe Anzahl der Beweise, die bei richtiger Auswahl und Gestaltung dem Schüler Zusammenhänge zwischen verschiedenen mathematischen Sätzen deutlich machen, können auch zur Herausbildung der Überzeugung beitragen, daß es in der Welt gesetzmäßig zugeht und daß es sich bei den behandelten Sätzen um Widerspiegelungen objektiver Gesetzmäßigkeiten handelt.

Bezüglich der Anerziehung wertvoller Charaktereigenschaften und Verhaltensweisen sowie der ästhetischen Erziehung sei nur auf bewußtes Streben nach Genauigkeit, Sorgfalt, auf sorgsamen Umgang mit den Arbeitsmitteln und kritische Einstellung zu den Ergebnissen der eigenen Arbeit verwiesen. Ferner ist an alles zu denken, was Sauberkeit von Zeichnungen (auch Skizzen), übersichtliche Anordnung im Heft und somit das gesamte äußere Erscheinungsbild betrifft. Man vergesse allerdings nicht, daß auch dem Inhalt eine gewisse ästhetische Wirkung innewohnen kann, etwa einem „elegant" geführten und so niedergeschriebenen Beweis.

Kontrollaufgaben zum Stoffgebiet „4. Planimetrie"

1. Zeichne in ein Koordinatensystem (Einheit 1 cm) das Vieleck $ABCDEFGH$ mit $A(2; 1)$, $B(5; 1)$, $C(5; 3)$, $D(6; 4)$, $E(6; 6)$, $F(3; 6)$, $G(3; 3)$, $H(2; 3)$ und die Bildpunkte $A'(7; 7)$, $B'(7; 10)$, $C'(9; 10)$ von A, B, C bei einer Bewegung!
  a) Zeichne das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ des Vielecks bei dieser Bewegung ein, und gib auch seine restlichen Eckpunkte durch Zahlenpaare an!
  b) Ermittle den Umfang, die (Größen der) Innenwinkel und den Flächeninhalt dieses Vielecks!

2. Es gibt zwei verschiedene Bewegungen, die einen Rhombus $ABCD$ so auf sich selbst abbilden, daß A als Bildpunkt C hat.
Vervollständige für diese Bewegungen die Tabellen!

Punkt	A	B	C	D
Bildp.	C			

Punkt	A	B	C	D
Bildp.	C			

Um welche Bewegungen handelt es sich?

3. Zeichne ein rechtwinkliges, nicht gleichschenkliges Dreieck! Ergänze die Figur durch ihr Bild, bei der angegebenen Bewegung!
  a) Spiegelung an der längsten Seite
  b) Spiegelung an einer der kürzeren Seiten
  c) Drehung um den Mittelpunkt der längsten Seite, Drehwinkel 180°
  d) Drehung um den Mittelpunkt einer der kürzeren Seiten, Drehwinkel 180°
Was für eine Gesamtfigur entsteht jeweils? Was würde man bei einem gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreieck erhalten?

4. Ermittle die Größe des Winkels α im Bild 21 (S. 158)! Begründe!

5. Von den Innenwinkeln α, β, γ eines Dreiecks ABC ist bekannt, daß $\alpha = 2\beta$ und $\gamma = 30°$ gilt. Wie groß sind α und β?

6. Zu welchen der folgenden Angaben kann es kein Dreieck ABC geben?

a) $a = 7{,}3$ cm, $b = 6{,}9$ cm, $c = 0{,}5$ cm
b) $c = 4{,}6$ cm, $\alpha = 123°$, $\beta = 68°$
c) $a = 2{,}4$ cm, $b = 4{,}5$ cm, $\alpha = 90°$
d) $a = 6{,}5$ cm, $c = 1{,}9$ cm, $\beta = 165°$
e) $a = 7{,}6$ cm, $b = 6{,}5$ cm, $c = 15{,}3$ cm
f) $a = 2{,}5$ cm, $b = 4{,}6$ cm, $h_c = 3{,}1$ cm

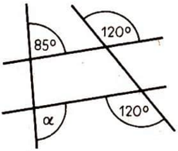


Bild 21

7. Von dem Dreieck ABC (Bild 22) ist bekannt:
$\overline{AD} \cong \overline{EB}$ und $\sphericalangle\, CDE \cong \sphericalangle\, DEC$.
Was für ein Dreieck ist ABC? Begründe!

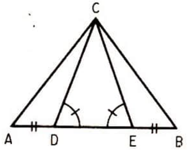


Bild 22

8. Von den Dreiecken ABC und CDE (Bild 23) ist bekannt, daß $AB \parallel DE$ und $\overline{BC} \cong \overline{CE}$ gilt.
Begründe, daß die beiden Dreiecke zueinander kongruent sind!

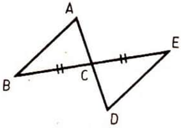


Bild 23

9. **a)** Konstruiere ein Dreieck ABC mit $a = 6{,}0$ cm, $b = 8{,}0$ cm, $c = 10{,}0$ cm!
b) Konstruiere die Mittelsenkrechten in diesem Dreieck! Was stellst du fest?

10. Zeichne mit Hilfe der Lochschablone die Punkte $A(1)$, $B(10)$, $C(13)$ und $D(9)$ sowie die Geraden AB und AC!
Konstruiere die Winkelhalbierende w von $\sphericalangle\, BAC$!
Liegt D auf w? Ist D von AB oder von AC weiter entfernt?

11. Konstruiere ein Dreieck ABC mit $b = 7{,}2$ cm, $c = 4{,}8$ cm und $h_b = 3{,}5$ cm!
Ist die Aufgabe eindeutig lösbar?

12. Konstruiere ein Viereck $ABCD$ mit $a = 36$ mm, $d = 52$ mm, $\beta = 122°$, $\gamma = 97°$, $\delta = 84°$!
Begründe die eindeutige Ausführbarkeit der Konstruktion! Gib die Längen der Diagonalen an!

13. Zeichne – sofern möglich – ein Viereck mit den angegebenen Eigenschaften! Andernfalls begründe, daß es ein solches Viereck nicht gibt!
a) Es soll ein Trapez, aber kein Parallelogramm sein.
b) Es soll ein Trapez und auch ein Drachenviereck sein.
c) Es soll ein Trapez sein, aber keine einander parallelen Seiten haben.
d) Es soll ein Trapez sein und gleich lange Diagonalen haben.
e) Es soll kein Trapez, aber ein Parallelogramm sein.
f) Es soll kein Trapez sein, aber zwei rechte Winkel als Innenwinkel haben.
g) Es soll kein Trapez sein, aber drei rechte Innenwinkel haben.

14. In einem Viereck $ABCD$ gilt
a) $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$, **b)** $a = b = c$, **c)** $a = 2c$, **d)** $\alpha = \beta = \gamma$.
In welchem Falle handelt es sich mit Sicherheit (möglicherweise, keinesfalls) um ein Parallelogramm?

15. Im 4. Geschoß des „Palastes der Republik" in Berlin stehen Tischchen mit jeweils einer Platte in Form eines gleichschenkligen Trapezes. Bei der Tischplatte ist die längere der beiden parallelen Seiten 1,40 m lang, die kürzere mit 0,68 m genauso lang wie die Schenkel.
a) Fertige eine Zeichnung der Tischplatte im Maßstab 1 : 20 an!
b) Zwei dieser Tischchen kann man zu einem sechseckigen Tisch zusammenstellen. Wie groß ist die Fläche eines solchen sechseckigen Tisches?
c) Kann man auch vier solcher Tischchen zu einem quadratischen Tisch mit quadratischem Loch in der Mitte zusammenstellen? Begründe!

Stoffverteilung

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Stoffabschnitt 4.1.		Zur Wiederholung	6 Std.
Ebene Figuren (LE 1)	2	– Ebene und räumliche Figuren – Strecken und Winkel (Zeichnen und Messen) – Arbeiten mit Koordinatensystemen – Spiegelung und Axialsymmetrie	– Unterscheiden von ebenen und nichtebenen Figuren – Planimetrie als Geometrie einer Ebene – Mittelpunkt und Mittelsenkrechte einer Strecke
Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen (LE 2)	2	– Begriffe wie Verschiebungspfeil, Spiegelgerade, Drehwinkel, Drehzentrum – Bild (von), Original (von) – Konstruktion von Bildfiguren bei Elementarbewegungen	– Einführen von „Abbildung" – Hinweis auf Eindeutigkeit und Eineindeutigkeit von Abbildungen
Eigenschaften von Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen (LE 3)	2	– Eigenschaften der Elementarbewegungen	– Eigenschaften, die allen Elementarbewegungen gemeinsam sind
Stoffabschnitt 4.2.		Bewegung und Kongruenz	7 Std.
Nacheinanderausführung von Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen (LE 4)	2	– Konstruieren der Bilder von Figuren, die selbst als Bildfiguren bei Elementarbewegungen konstruiert worden sind	– Nacheinanderausführung von endlich vielen Elementarbewegungen (unter Beachtung der Reihenfolge)

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Bewegung und Kongruenz von Figuren (LE 5)	3	– Verschiebungen, Spiegelungen, Drehungen – Konstruktionsvorschriften und Eigenschaften dieser elementaren Bewegungen	– Definition von (ebener) Bewegung und Kongruenz, Kurzzeichen „$\cong$“ – Bezug zu praktischen Fragestellungen – Begründen von Kongruenz und Inkongruenz – Hinweise zur Kongruenz räumlicher Figuren
Eigenschaften von Bewegungen (LE 6)	2	– Eigenschaften der Elementarbewegungen	– Bilder von Geraden, Strecken, Winkeln, n-Ecken und Kreisen bei Bewegungen – Hinreichende Bedingungen für die Kongruenz von Strecken und Winkeln
Stoffabschnitt 4.3.		Beziehungen zwischen Winkeln	7 Std.
Scheitelwinkel und Nebenwinkel (LE 7)	2	– Winkel und Messung von Winkelgrößen, Scheitel und Schenkel eines Winkels – Voraussetzung und Behauptung eines Satzes	– Nebenwinkel, Scheitelwinkel – Nebenwinkel- und Scheitelwinkelsatz – Bezeichnung „$\sphericalangle\ ABC$“ – Umkehrung eines (in Wenn-so-Form formulierten) Satzes
Sätze über Winkel an geschnittenen Parallelen (LE 8)	3	– Parallelität von Original- und Bildgeraden bei Verschiebungen	– Stufenwinkel, Wechselwinkel – Stufen- und Wechselwinkelsatz (mit Beweis) und Umkehrungen dieser Sätze
Leistungskontrolle und Auswertung	2		
Stoffabschnitt 4.4.		Dreiecke	8 Std.[1]
Einteilung der Dreiecke (LE 9)	1	– Winkelarten – Standardbezeichnung für Eckpunkte und (Innen-) Winkel bei Dreiecken – Einteilung der Dreiecke nach den Seiten – Menge, Teilmenge und ihre Veranschaulichung durch Diagramme	– Standardbezeichnungen für Dreieckseiten – Außenwinkel eines Dreiecks – Einteilung der Dreiecke nach den (Innen-) Winkeln
Sätze über die Winkel eines Dreiecks (LE 10)	2	– Stufen- und Wechselwinkelsatz	– Satz von der Summe der Innenwinkel in Dreiecken (mit Beweis) – Außenwinkelsatz (mit Beweis)

[1] Eine Stunde wird für die Klassenarbeit nach Stoffabschnitt 4.7. verwendet.

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Gleichschenklige Dreiecke (LE 11)	1	– Axialsymmetrie – Mittelpunkt und Mittelsenkrechte einer Strecke	– Basis, Schenkel, ... bei gleichschenkligen Dreiecken – Begriff „Winkelhalbierende“ – Basiswinkelsatz (mit Begründung) – Innenwinkel in gleichseitigen Dreiecken
Seiten-Winkel-Beziehungen (LE 12)	2	– Schreiben (und Lesen) von Ungleichungen	– Seiten-Winkel-Beziehungen in Dreiecken (ohne Beweis) – Lot und Abstand eines Punktes von einer Geraden
Dreiecksungleichung (LE 13)	1	– Addition von Längen	– Dreiecksungleichung (ohne Beweis)
Stoffabschnitt 4.5.		Kongruenz von Dreiecken	18 Std.
Ausführbarkeit von Konstruktionen (LE 14)	1	– Umgang mit Zeichengeräten – Antragen (bzw. Abtragen) von Strecken – Antragen von Winkeln – Beschreiben von (elementaren) Konstruktionen	– (eindeutige) Ausführbarkeit einer Konstruktion – Nichteindeutige Konstruierbarkeit eines Dreiecks mit zwei vorgegebenen Stücken
Eigenschaften zueinander kongruenter Dreiecke (LE 15)	2	– Bewegung und Kongruenz – Kongruenz von Strecken und gleiche Länge; Kongruenz von Winkeln und gleiche Größe – Seiten-Winkel-Beziehung in Dreiecken	– „einander entsprechend“ bei kongruenten Dreiecken (Figuren) – Satz von der Übereinstimmung aller Stücke bei kongruenten Dreiecken (mit Begründung)
Der Kongruenzsatz (sws) (LE 16)	2	– An- und Abtragen von Strecken – Antragen und Messen von Winkeln – Beschreiben einfacher Konstruktionen – Nichteindeutige Konstruierbarkeit eines Dreiecks mit zwei vorgegebenen Stücken	– Lagemöglichkeiten für drei vorgegebene Stücke bei Dreiecken – Konstruktion eines Dreiecks, von dem zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind – Kongruenzsatz (sws) mit Beweis
Weitere Kongruenzsätze (LE 17)	4	– Winkelsummensatz – Dreiecksungleichung – Kreis um Z mit Radius r als Menge aller Punkte P mit $\overline{ZP} = r$ – Seiten-Winkel-Beziehung in Dreiecken	– Kongruenzsätze (wsw), (sss), (sSW) ohne Beweis – Kongruenz zweier Dreiecke auch im Falle (sww) – Dreieckskonstruktionen gemäß diesen Kongruenzsätzen

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Erste Anwendungen der Kongruenzsätze (LE 18)	2	– Begriffe „Menge“, „Mittelsenkrechte“ und „Winkelhalbierende“ – Abstand eines Punktes von einer Geraden, Abstand zweier paralleler Geraden	– Abstandseigenschaften von Mittelsenkrechten, Parallelen, Winkelhalbierenden und (umgekehrt) Charakterisierung derartiger Punktmengen durch Abstandseigenschaften
Geometrische Grundkonstruktionen (LE 19)	2	– Konstruktion der Symmetrieachse zu zwei Punkten; Symmetrieeigenschaften gleichschenkliger Dreiecke – Parallelen- und Senkrechtenkonstruktion mit (Lineal und) Zeichendreiecken	– Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal (mit Begründung)
Besondere Linien in Dreiecken (LE 20)	2	– Symmetrieeigenschaften gleichschenkliger Dreiecke – Einteilung der Dreiecke nach Seiten und Winkeln	– Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Seitenhalbierende und Höhe bei Dreiecken – Sätze über die Schnittpunkte der Dreieckstransversalen (z. T. mit Beweis)
Konstruktionen von Dreiecken, bei denen eine Höhe gegeben ist (LE 21)	1	– (eindeutige) Ausführbarkeit von Konstruktionen	– Konstruktionen mit der Methode der Teildreiecke – Konstruktionen unter Ausnutzung der Abstandseigenschaft von Parallelen
Leistungskontrolle und Auswertung	2		
Stoffabschnitt 4.6.		Vierecke und Vielecke	13 Std.
Vielecke (LE 22)	2	– Koordinatensysteme – Einteilung der Winkel	– Vielecke (konvexe und nicht konvexe), n-Ecke – Eckpunkte (Ecken), Seiten, Innenwinkel und Diagonalen eines Vielecks – Vielecklinie und Vieleckfläche
Vierecke – ihre Diagonalen und Innenwinkel (LE 23)	3	– Standardbezeichnungen bei Dreiecken – Kongruenzsätze für Dreiecke – (eindeutige) Ausführbarkeit von Kontruktionen – Maßstab – Satz von der Innenwinkelsumme in Dreiecken	– Standardbezeichnungen für Eckpunkte, (Innen-) Winkel, Seiten und Diagonalen in Vierecken – „Instabilität“ eines Vierecks mit vier vorgegebenen Seiten (-längen) – Konstruieren von Vierecken – Satz von der Innenwinkelsumme in Vierecken (mit Beweis)

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Parallelogramme (LE 24)	2	– Begriff des Parallelogramms – Gleiche Länge der Gegenseiten in Parallelogrammen – Sätze über Winkel an geschnittenen Parallelen – Kongruenzsätze für Dreiecke – „Wenn-so-Form“ eines Satzes, die Umkehrung und ihre Gültigkeit	– Definition von „Parallelogramm“ – Sätze über Winkel und Diagonalen in Parallelogrammen (mit Begründung) – Umkehrung des Satzes von der gleichen Länge der Gegenseiten in Parallelogrammen (mit Beweis) – Konstruieren von Parallelogrammen
Besondere Parallelogramme (LE 25)	2	– Rechtecke (einschließlich Quadrate) als spezielle Parallelogramme – Kongruenzsätze für Dreiecke – Umkehrung eines in „Wenn-so-Form“ formulierten Satzes – Menge, Teilmenge und Veranschaulichung von Teilmengenbeziehungen – Axialsymmetrie und Spiegelung (ggf.)	– Definition von „Rechteck“ und „Quadrat“ – Satz über die gleiche Länge der Diagonalen in Rechtecken (mit Begründung) – Begriff „Rhombus“ mit Definition – Beziehungen zwischen Parallelogrammen, Rechtecken, Rhomben und Quadraten; Mengendiagramm dazu – Satz über die Orthogonalität der Diagonalen in Rhomben (mit Beweis)
Trapeze (LE 26)	2	– Trapeze als spezielle Vierecke, von denen die Parallelogramme Spezialfälle sind – Menge, Teilmenge und Veranschaulichung von Teilmengenbeziehungen – gleichschenklige Dreiecke – Maßstab – Axialsymmetrie	– Definition von „Trapez“, Einführen von „Schenkel“ und „Höhe eines Trapezes“ – Konstruieren von Trapezen – Beweisübungen an Aussagen über die Mittellinie von Trapezen – Gleichschenklige Trapeze
Drachenvierecke (LE 27)	1	– Axialsymmetrie (und Spiegelung)	– Begriff „Drachenviereck“ mit Definition – Beziehungen zwischen Drachenviereck und Rhombus – Konstruieren von Drachenvierecken – Symmetrieeigenschaften – Satz über die Diagonalen in Drachenvierecken (mit Begründung)
Axialsymmetrie bei Vierecken (LE 28)	1	– Axialsymmetrie – Beziehungen zwischen Mengen und ihren Teilmengen bzw. (Ober-) Begriff und Unterbegriffen	– Möglichkeit der Veranschaulichung von Zusammenhängen zwischen verschiedenen Vierecksarten – Systematisierung von Vierecken

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
		und ihre Veranschaulichung	nach Anzahl und Lage der Symmetrieachsen
Stoffabschnitt 4.7.		Flächeninhalt und Umfang von Vielecken	11 Std.
Flächeninhalt und Umfang von Rechtecken (LE 29)	1	– Flächeninhaltsberechnung von Rechtecken – „Zahlenwert" und „Einheit" bei Größen – Einheiten des Flächeninhalts – sinnvolle Genauigkeit beim Rechnen mit Näherungswerten	– Gültigkeit der Formel $A = a \cdot b$ für den Flächeninhalt von Rechtecken auch für beliebige gebrochene Zahlen als Zahlenwerte der Seitenlängen
Flächeninhalt und Umfang von Vielecken (LE 30)	2	– Berechnung des Flächeninhalts solcher Vielecke, die sich in eine gewisse Anzahl von Rechtecken zerlegen lassen – Eigenschaften von Rechtecken	– Eigenschaften des Flächeninhalts von Vielecken: Gleichheit des Flächeninhalts einander kongruenter Vielecke; Additivität des Flächeninhalts
Der Flächeninhalt von Dreiecken (LE 31)	3	– Begriff „rechtwinkliges Dreieck" – Einteilung der Dreiecke nach den Innenwinkeln – Kongruenzsatz (sss) – Distributivgesetz	– Formeln für den Flächeninhalt von rechtwinkligen und von beliebigen Dreiecken (mit Beweis bzw. Herleitung) – Berechnung des Flächeninhalts von Vielecken
Der Flächeninhalt von Trapezen und Parallelogrammen (LE 32)	4	– Begriffe „Trapez", „Parallelogramm" und „Höhe eines Trapezes"	– Formeln für den Flächeninhalt von Trapezen und Parallelogrammen (mit Herleitung bzw. Beweis) – Berechnung des Flächeninhalts von Vielecken
Leistungskontrolle und Auswertung	2[1]		

[1] Vgl. Fußnote zum Stoffabschnitt 4.4.!

Stoffabschnitt 4.1.

Zur Wiederholung (6 Std.)

In diesem Stoffabschnitt sind die Schüler zunächst auf das Stoffgebiet „Planimetrie“ einzustimmen. Bei der Wiederholung, Vertiefung und Reaktivierung bereits erworbenen Wissens und Könnens geht es um
- das Vertrautsein mit einfachen geometrischen Figuren (Dreieck, Rechteck, Würfel, Quader, Zylinder, Pyramide, Kegel, Strecke, Strahl, Gerade, Winkel) sowie mit elementaren Bewegungen (Verschiebungen, Spiegelungen, Drehungen);
- das Arbeiten mit Koordinatensystemen und einfache Zeichenfertigkeiten (Zeichnen von Strecken und Winkeln vorgegebener Größe, von zueinander senkrechten bzw. parallelen Geraden, Strecken ...);
- die Fertigkeit im Messen von Strecken(längen) und Winkel(größe)n;
- das Konstruieren von Bildfiguren bei Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen.

Durch das Konstruieren von Bildfiguren zu solchen Figuren, die bereits als Bilder bei einer Elementarbewegung konstruiert worden sind, wird die Behandlung der folgenden Themen vorbereitet. Dies geschieht auch durch die Einführung von „Mittelpunkt und Mittelsenkrechte einer Strecke“.

Ebene Figuren (2 Std.)

LE 1 (LB 128 bis 131)

Ziele

Die Schüler
- können entscheiden, ob (ihnen bekannte) geometrische Figuren ebene oder nicht ebene Figuren sind,
- haben erste Vorstellungen davon erworben, was unter „Planimetrie“ zu verstehen ist,
- sind in der Überzeugung bestärkt worden, daß Kenntnisse der Planimetrie zur Beschreibung unserer Umwelt und zur Lösung praktischer Aufgaben unentbehrlich sind und daß für rationelles Arbeiten im Geometrieunterricht die Hilfsmittel vollständig vorhanden und funktionstüchtig sein müssen,
- haben ihr Wissen über Streckenlängen und Winkelgrößen sowie das Arbeiten mit Koordinaten reaktiviert,
- wissen, was Mittelpunkt und Mittelsenkrechte einer Strecke sind, und können (mittels Lineal mit Maßeinteilung und Zeichendreiecken) Mittelpunkt bzw. Mittelsenkrechte zu vorgegebenen Strecken ermitteln.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Einstimmung und Motivierung für das gesamte Stoffgebiet, dabei Klassifizieren geometrischer Figuren (eben/nicht eben) und Gewinnen der Einsicht in

die praktische Bedeutsamkeit von Kenntnissen aus der ebenen Geometrie
- Reaktivieren der Kenntnisse über Koordinatensysteme und Streckenlängen
- Hinweise zur Vollständigkeit und Funktionstüchtigkeit der Arbeitsmittel für den Geometrieunterricht und Kontrolle

2. Stunde
- Reaktivieren des Wissens und Könnens hinsichtlich des Messens von Winkelgrößen, des Zeichnens von Winkeln gegebener Größe und der Einteilung der Winkel
- Reaktivieren von Kenntnissen über Spiegelung und Axialsymmetrie von Figuren, dabei Einführen von „Mittelpunkt einer Strecke“ und „Mittelsenkrechte einer Strecke“

Methodische Hinweise

Bei der **Einstimmung und Motivierung für das gesamte Stoffgebiet . . .** sollte man an die Erfahrungen der Schüler anknüpfen: Bericht, was bisher im Geometrieunterricht gemacht bzw. gelernt worden ist; dabei Nennen bekannter geometrischer Figuren, ggf. unterstützt durch Modelle (z. B. aus dem Stereometriebaukasten) oder gezeichnete Figuren (Projektionsfolie). Derartige Vorgaben ermöglichen selbständige Schülerarbeit (Aufschreiben der betreffenden Namen; Angabe, welche Figuren Dreiecke ... sind, u. dgl. m.). Einzubeziehen sind Objekte aus unserer Umwelt (Mitbringen einiger „handlicher“ Gegenstände in den Unterricht).

Diese Erörterungen münden in eine Unterscheidung von ebenen und nicht ebenen Figuren, gemäß der bereits betrachtete und einige weitere Figuren einzuordnen sind. Bei der Erläuterung des Begriffs „Planimetrie“ sollte auch Bezug auf Wörter wie „planieren“, „Planierraupe“ genommen werden. Die Herkunft des Wortes gibt Anlaß zu einigen Bemerkungen über die Rolle der Mathematik und insbesondere der Geometrie im antiken Griechenland. „-metrie“ („Messen“) ist den Schülern gut bekannt (Hinweis auf „Thermometer“ u. dgl.) und macht die praktische Bedeutsamkeit dieser Disziplin bewußt.

In diesem Zusammenhang sollte Auftrag D 1 bearbeitet werden (SSA). In der Auswertung ist zu erörtern, daß es sich um eine Aufgabe der ebenen Geometrie handelt, obwohl die Fliesen selbst Körper sind. Beispiele aus dem Erlebnisbereich der Schüler können zur Ergänzung dienen.

Im Auftrag D 2 klingt der das ganze Stoffgebiet durchziehende Themenkreis der Kongruenz an. Seine Bearbeitung (UG) kann zur längerfristigen Zielorientierung genutzt werden.

Dem **Reaktivieren der Kenntnisse über Koordinatensysteme und Streckenlängen** dient Aufgabe 2. Anzustreben ist eine möglichst selbständige Arbeit der Schüler (währenddessen Überprüfung der Arbeitsmittel auf Vollständigkeit und Funktionstüchtigkeit).

Hinweise zur Vollständigkeit . . . Als Mindestausstattung ist zu fordern:
- zwei unterschiedliche Zeichendreiecke (45° bzw. 30°, 60°),
- ein Lineal mit Millimeterteilung,
- ein Winkelmesser (für die Klasse möglichst einheitlich),
- ein Zirkel,
- zwei (stets gut gespitzte) Bleistifte unterschiedlicher Härte (etwa 2H und HB), der härtere zum Vorzeichnen und für das Zeichnen von Hilfslinien, der weichere zum Nachzeichnen des Wesentlichen.

Beim Zirkel ist darauf zu achten, daß es sich nicht um ein Aufsteckgerät zum Bleistift handelt, die Schenkel nicht zu leicht beweglich sind und die Mine stets gut angeschliffen ist (etwa mit feinem Sandpapier).

Das Wichtigste ist jedoch das ständige und konsequente Kontrollieren dieser Forderungen durch den Lehrer in der weiteren Arbeit.

Das **Reaktivieren des Wissens und Könnens hinsichtlich des Messens . . .** kann durch eine Übung eingeleitet werden. Bei Vorgabe von Winkeln mit der Lochschablone ist zu beachten, daß eine Winkelbezeichnung wie $\sphericalangle\, ABC$ (noch) nicht zur Verfügung steht; deshalb sind (mit Tafelgerät oder Projektion einer Schablone auf die Wandtafel) Erläuterungen erforderlich. Das Messen und Zeichnen eines Winkels vorgegebener Größe sollte man am Polylux mittels eines durchsichtigen Winkelmessers demonstrieren lassen.

Zur **Reaktivierung von Kenntnissen über Spiegelungen und Axialsymmetrie . . .** können unterschiedliche Figuren mittels Projektionsfolie (evtl. auf Raster gezeichnet, um die Entscheidung zu erleichtern bzw. zweifelsfrei zu machen) vorgegeben werden. Dabei sollten nicht nur bekannte Dreiecks- und Vierecksarten, Kreise sowie Strecken, Strahlen, Geraden, Winkel vorkommen. Auftreten sollten die Fälle
- keinerlei Symmetrie,
- keine Achsensymmetrie, aber Drehsymmetrie (mit Sonderfall der Zentralsymmetrie),
- genau eine Symmetrieachse (zwei, drei, ... Symmetrieachsen),
- unendlich viele Symmetrieachsen.

Das Auswertungsgespräch kann auf die Begriffe „Mittelpunkt einer Strecke“ und „Mittelsenkrechte einer Strecke“ führen.

Zur Erstfestigung können die Aufgaben 6 und 7 bzw. analoge Aufgaben (Vorgabe mittels Polylux) gelöst werden. Ferner ist zu verschiedenen (auch mit der Lochschablone vorgegebenen) Strecken die Mittelsenkrechte zu zeichnen. Hier ist nicht die Reaktivierung der Symmetrieachsenkonstruktion aus Klasse 5 anzustreben, sondern die Verwendung der Einteilung des Lineals und die Arbeit mit Zeichendreiecken. Die umgekehrte Aufgabenstellung (Vorgabe einer Geraden, Zeichnen einer Strecke $\overline{AB}$, so daß diese Gerade Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ ist) sollte nicht vergessen werden.

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 1 **2.** Aufg. 4 **3.** Aufg. 8

Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen (2 Std.)

LE 2 (LB 131 bis 136)

Bei der Wiederholung der Elementarbewegungen sollten – anders als bei ihrer Einführung in den Klassen 4 und 5 – frühzeitig bzw. von vornherein Bilder von Figuren einbezogen werden, obwohl damit bereits von Eigenschaften Gebrauch gemacht wird, die erst in der nächsten Unterrichtseinheit explizit wiederholt werden. Man sollte allerdings vorzugsweise hier noch das Bild eines Vielecks über die Bilder aller Eckpunkte konstruieren, statt Eigenschaften wie Erhalt der Streckenlänge, der Parallelität oder der Orthogonalität zu nutzen.

Ziele

Die Schüler
- haben ihr Wissen und Können betreffs der Konstruktionsvorschriften bei Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen reaktiviert,
- verwenden „Abbildung“ als Oberbegriff für diese Elementarbewegungen und sind sich der Tatsache wieder bewußt geworden, daß jeder Punkt (der betrachteten Ebene) bei derartigen Abbildungen genau einen Bild- und genau einen Originalpunkt besitzt.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erkennen der Zweckmäßigkeit von Kenntnissen über Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen bei der Beschreibung realer Sachverhalte
- Wiederholung der Konstruktionsvorschrift derartiger Abbildungen und Einführen von „Abbildung“

2. Stunde
- Übungen zur Ermittlung von Bildfiguren bei Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen
- Formulieren von Satz D 1 (Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen als umkehrbar eindeutige punktweise Abbildungen der gesamten Ebene auf sich)

Methodische Hinweise

Das **Erkennen der Zweckmäßigkeit von Kenntnissen über . . .** kann über das Bearbeiten von Auftrag D 5 erfolgen; die Fragestellung des Auftrags ist ggf. zu variieren.

Die **Wiederholung der Konstruktionsvorschriften derartiger Abbildungen und Einführung von „Abbildung“** ist dadurch motiviert und kann sich direkt anschließen. Günstig ist die Vorgabe mehrerer Punkte und einer Geraden *g* im Koordinatensystem (Projektionsfolie). Die Schüler sollen nun die Koordinaten der Bildpunkte dieser Punkte bei der Spiegelung an der Geraden *g* angeben. Entsprechend wird bei Verschiebung und Drehung (Beschränkung auf wenige ausgezeichnete Drehwinkel wie 45°, 90°, 135°, ...) verfahren. Bei der Diskussion der Lösungen sind die Konstruktionsvorschriften für die jeweiligen Abbildungen deutlich herauszustellen. Zusätzlich kann man in den Klassen 4 und 5 eingesetzte Projektionsfolien nutzen.

Die anschließende Bearbeitung des Auftrags D 6 (UG) kann zur Zusammenfassung führen. Die Mitteilung, daß Spiegelungen, Drehungen und Verschiebungen als Abbildungen bezeichnet werden, dient für den Schüler vor allem zur Erleichterung der Sprechweise. Ausführlichkeit ist hier nicht am Platze, doch ist mit einem Beispiel für eine (geometrische) Abbildung, die keine Verschiebung, Spiegelung oder Drehung ist, einer zu engen Begriffsbildung vorzubeugen (im Lehrbuch dient dazu die Projektion).

Übungen zur Ermittlung von Bildfiguren bei Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen können mit Auftrag D 7 (SSA) beginnen. Aufgaben, bei denen die Bildpunkte regelrecht konstruiert werden müssen, sind jedoch nicht zu vergessen (Aufg. 3 und 4 bzw. analoge Aufgabenstellung mittels Lochschablone).

Die **Formulierung von Satz D 1 . . .** (Wiederholung aus den Klassen 4 und 5) kann sich an die Bearbeitung des Auftrags D 7 anschließen. Zusätzliche Fragen nach Bildpunkten bzw. Originalpunkten von Punkten, die nicht zu den betrachteten Vielecken gehören, veranlassen dazu. Besonders instruktiv ist es, wenn die Schüler für zu ermittelnde Punkte keine Koordinaten angeben können (etwa wenn man bei a nach dem Originalpunkt von A fragt oder statt der Verschiebung $\overrightarrow{PQ}$ die Verschiebung $\overrightarrow{QP}$ betrachtet).

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 1 **2.** Aufg. 2

Eigenschaften von Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen (2 Std.)

LE 3 (LB 134 bis 136)

In dieser LE wird das Thema „Eigenschaften von Bewegungen" (LE 6) vorbereitet. Die mit Satz D 2 (wiederholend) herausgestellte gemeinsame Eigenschaft der „Abstandserhaltung" ist besonders wichtig; sie allein charakterisiert bereits die Bewegungen, und sie wird ständig bei der zeichnerischen Ermittlung der Bilder von Figuren genutzt.

Ziele

Die Schüler
- haben die Kenntnisse über Eigenschaften von Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen reaktiviert,
- haben erkannt, daß diese speziellen Abbildungen verschiedene Eigenschaften gemeinsam haben, und eingesehen, daß dies nicht selbstverständlich ist; sie können daneben auch solche Eigenschaften nennen, die beispielsweise nur den Verschiebungen zukommen,
- haben wiederum erfahren, daß man bei der Konstruktion von Bildfiguren diese Eigenschaften ausnutzen kann und daß allgemein das Lösen mancher Aufgaben durch bewußtes Nutzen aller Kenntnisse rationeller gestaltet werden kann.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Wiederholen der grundlegenden Eigenschaft aller Elementarbewegungen (Satz D 2)

2. Stunde
- Wiederholen weiterer Eigenschaften der Elementarbewegungen, und das Hervorheben gemeinsamer Eigenschaften

Methodische Hinweise

Das **Wiederholen der grundlegenden Eigenschaft aller Elementarbewegungen** kann von der Bearbeitung des Auftrags D 8 oder von der Konstruktion des Bildes eines Vielecks (Hausaufgabenbesprechung oder selbständige Schülerarbeit in der Stunde – Vorgabe mittels Lochschablone) ausgehen. Im Auswertungsgespräch ist außer dem Konstruktionsverfahren für die betreffende(n) Abbildung(en) zu erörtern, daß das Verbinden der Bilder der Eckpunkte zu einem „Bildvieleck" nur auf Grund der Eigenschaft gerechtfertigt ist, daß das Bild einer Strecke $\overline{AB}$ wieder eine Strecke, und zwar die Strecke $\overline{A'B'}$, ist. Daß beide Strecken gleich lang sind, läßt sich ohne Schwierigkeiten anfügen, auch wenn diese Tatsache für das Verbinden nicht benötigt wird. Wichtig ist die Erkenntnis, daß diese Eigenschaft allen Elementarbewegungen zukommt. Zur Festigung empfiehlt sich Aufgabe 1, z. T. als Hausaufgabe.

Auf das **Wiederholen weiterer Eigenschaften der Elementarbewegungen und das Hervorheben gemeinsamer Eigenschaften** kann die Frage nach unterschiedlichen Konstruktionsmöglichkeiten führen. Überzeugender als die Bearbeitung von Auftrag D 9 ist es, wenn die Schüler von sich aus Vorschläge machen, wie man Bildfiguren anders (einfacher) als durch Verbinden der Bilder der Eckpunkte erhalten kann, bzw. wenn einzelne ein derartiges Vorgehen bereits praktiziert haben. Die Begründung muß dann über die jeweiligen Eigenschaften geschehen.

Das Zusammentragen solcher (gemeinsamer und nicht gemeinsamer) Eigenschaften sollte seinen Niederschlag auch an der Tafel finden. Für erstere kann dem Lehrer die Zusammenfassung am Ende des Stoffabschnitts 4.2. (LB 143) zur Orientierung dienen. Es darf auf keinen Fall die Parallelität von Original- und Bildgeraden bei Verschiebungen vergessen werden, weil diese Eigenschaft später beim Beweis des Stufenwinkelsatzes benötigt wird.

Als vorbereitende Hausaufgabe für den nächsten Stoffabschnitt kann Aufgabe 5 gestellt werden.

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 2 **2.** Aufg. 4

Stoffabschnitt 4.2.

Bewegung und Kongruenz (7 Std.)

In diesem Stoffabschnitt wird den Schülern die Kongruenz beliebiger Figuren (einer Ebene) mittels des Begriffs der (ebenen) Bewegung nahegebracht. Der inhaltliche Zusammenhang zwischen den betrachteten Abbildungen und dem intuitiv bekannten und auch schon in früheren Klassenstufen genutzten Begriff der Deckungsgleichheit bzw. dem „Zur Deckung bringen" von Figuren soll an Hand von Beispielen aus der Praxis hergestellt werden. Weiterhin lernen die Schüler, aufbauend auf den in Lerneinheit 3 gewonnenen Erkenntnissen, Eigenschaften von (ebenen) Bewegungen kennen.

Obwohl fast nur die Kongruenz von ebenen Figuren betrachtet wird, ist durch die Art des Vorgehens auch zu erreichen, daß sich beim Schüler, gestützt auf Kenntnisse über die Kongruenz von Figuren einer Ebene, intuitive Vorstellungen über die Kongruenz von nicht ebenen Figuren bilden.

Nacheinanderausführung von Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen (2 Std.)

LE 4 (LB 136 bis 138)

In Klasse 5 – und in noch geringerem Maße in Klasse 4 allein für Verschiebungen – ist der Gedanke der Nacheinanderausführung von Elementarbewegungen lediglich vorbereitet worden. Dort wurde – den Lehrplanforderungen gemäß (LP 4/5, S. 38) – das Bild F'' einer Figur F' ermittelt, die ihrerseits als Bild einer Figur F zustande gekommen ist. Dies ist hauptsächlich im Rahmen der komplexen Übungen geschehen, und in einigen Fällen sind dabei auch zusätzlich F und F'' verglichen worden. Auch jetzt sind keine Fertigkeiten bei der Nacheinanderausführung von Elementarbewegungen auszubilden. Vielmehr soll das Konstruieren vor allem zu klaren inhaltlichen Vorstellungen verhelfen.

Ziele

Die Schüler
- wissen, was unter der Nacheinanderausführung von elementaren Bewegungen zu verstehen ist, und können die Bilder von Figuren bei derartigen Nacheinanderausführungen (in einfachen Fällen) ermitteln, auch durch Konstruktion,
- haben eingesehen, daß die Reihenfolge der Nacheinanderausführung für das Ergebnis von Bedeutung sein kann,
- haben erkannt, daß Nacheinanderausführungen bei gewissen realen Sachverhalten und technischen Problemen (Musterentwurf) eine Rolle spielen.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Einführung der Nacheinanderausführung von elementaren Bewegungen

2. Stunde
- Festigung zur Nacheinanderausführung elementarer Bewegungen, dabei Erfassen der Bedeutung der Reihenfolge

Methodische Hinweise

Einführung der Nacheinanderausführung von elementaren Bewegungen Zur Einstimmung und Motivierung kann Auftrag D 11 oder die (evtl. als vorbereitende Hausaufgabe gestellte) Aufgabe 5 aus LE 3 dienen. Bei ihr führt das Auswertungsgespräch zu der Erkenntnis: Es gibt offenbar weder eine Verschiebung noch eine Spiegelung oder Drehung, bei der Dreieck $A''B''C''$ das Bild des Dreiecks ABC ist. [Wegen des „Umlaufsinns" könnte es höchstens eine Spiegelung sein, aber $\overline{AA''}$ und $\overline{BB''}$ (und $\overline{CC''}$) haben verschiedene Mittelsenkrechten.] Andererseits „gleicht" auch das Dreieck $A''B''C''$ völlig dem Dreieck ABC. Es liegt deshalb nahe, nicht bei Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen stehenzubleiben, sondern sie „zusammenzusetzen".

Hinweis: Wählt man das Dreieck ABC gleichschenklig, also etwa $B(1; 2)$ statt $B(1; 3)$, so gibt es eine Drehung, bei der Dreieck $A''B''C''$ Bild des Dreiecks ABC ist (Drehzentrum ist $(8; 1)$). Allerdings ist bei dieser Drehung B'' das Bild von A und A'' das Bild von B.

Tabellen, wie im Lehrbuch unter Auftrag D 11, sollten für weitere Beispiele von den Schülern selbst ausgefüllt werden. Für die Diskussion ist eine dem Bild D 21 entsprechende Folie günstig; dabei kann ein Dreieck aus farbiger Folie, an verschiedenen Stellen aufgelegt, zur Hervorhebung von Teilfiguren dienen.

Bei der Betrachtung z. B. der Teilfiguren 1 und 6 wird die Feststellung, daß keine Verschiebung, Spiegelung oder Drehung allein die Teilfigur 1 auf die Teilfigur 6 abbildet, weitergeführt zu der Erkenntnis, daß die „Nacheinanderausführung" der genannten Verschiebung und Spiegelung dies tut. Dieser Terminus ist hier einzuführen.

Bereits die Betrachtung von Bild D 21 kann zu der Einsicht führen, daß derartige „Muster" in der Praxis vorkommen. Besser sind jedoch Erörterungen an Hand mitgebrachter Gegenstände (Stücke von Tapeten, Stoffen usw.). Sie machen deutlich, was beim Musterentwurf zu beachten ist. Betrachtungen zur ästhetischen Wirkung unterschiedlicher Symmetrieverhältnisse und unterschiedlich großer „Elementarfiguren", die sich wiederholen, sollten nicht fehlen.

Für die erste Festigung bietet sich die Bearbeitung von Aufgabe 1 an.

Eine weitere **Festigung der Nacheinanderausführung elementarer Bewegungen ...** kann vor allem mit Auftrag D 12 und Aufgabe 3 erfolgen. Nachdem bei Auftrag D 12 die Schüler selbständig Tabellen angelegt haben, ist im Unterrichtsgespräch hervorzuheben, daß die Reihenfolge der Elementarbewegungen bei der Nacheinanderausführung von Bedeutung sein kann. Nochmaliges Betrachten der Abbildung der Teilfigur 1 auf die Teilfigur 6 im Auftrag D 11 kann verhindern, daß die Schüler zu der Meinung gelangen, ein Vertauschen der Reihenfolge führe in jedem Fall zu einem anderen Ergebnis.

Kontrollaufgabe
Aufg. 2

Bewegung und Kongruenz von Figuren (3 Std.)

LE 5 (LB 138 bis 140)

Der Lehrplan fordert, die Bewegungen als umkehrbar eindeutige Abbildungen der Ebene auf sich zu definieren, die das Ergebnis der Nacheinanderausführung von endlich vielen Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen sind (LP 5 bis 10, S. 50f.). Es widerspricht dieser Forderung nicht, wenn im Lehrbuch die Definition nicht nur als solche nicht besonders hervorgehoben wird, sondern vor allem als „Aufzählung" erfolgt: Bewegungen sind (1) Verschiebungen, (2) Spiegelungen, (3) Drehungen, (4) Abbildungen, die durch Nacheinanderausführung von (1), (2), (3) erhalten werden. Man sollte auch im Unterricht so verfahren. Das Weglassen von (1), (2), (3) würde nämlich sehr hohe Anforderungen an das Abstraktionsvermögen der Schüler stellen, denn die bisher behandelten Abbildungen wären selbst nicht mehr sofort als Bewegungen einzustufen. Für sie würden besondere Überlegungen zur identischen Abbildung nötig – sei es über die Nacheinanderausführung einer Elementarbewegung und der zu ihr entgegengesetzten oder über die Verschiebung mit der Verschiebungsweite 0 bzw. die Drehung mit dem Drehwinkel 0°.

Ziele

Die Schüler
- haben die Definition für „(ebene) Bewegung" und „Kongruenz von Figuren (einer Ebene)" verstanden und können sie (mit eigenen Worten) formulieren; sie können Beispiele für einander kongruente bzw. einander nicht kongruente Figuren angeben und ihre Behauptungen begründen,
- wissen sinngemäß, daß die Kongruenzrelation symmetrisch und transitiv ist,
- haben erkannt, daß die Kongruenz von Figuren bei manchen praktischen Fragestellungen von Bedeutung ist.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeiten der Definition von „Bewegung" und „Kongruenz", dabei exemplarisches Aufzeigen der Symmetrie der Kongruenzrelation und Erkennen der Bedeutsamkeit dieser Begriffe für praktische Fragestellungen.

2. Stunde
- Festigung der Begriffe „Kongruenz" und „Bewegung", dabei Verdeutlichen der Transitivität der Kongruenzrelation

3. Stunde
- Weitere Übungen zu den Bewegungen und zur Kongruenz, dabei Hinweise auf die Kongruenz räumlicher Figuren

Methodische Hinweise

Erarbeiten der Definition von „Bewegung" und „Kongruenz" . . . Es kann an die (konstruktive) Ermittlung des Bildes einer Figur bei der Nacheinanderausführung gewisser Elementarbewegungen (ggf. Hausaufgabe) angeknüpft werden. Zur Unterstützung der Lösungsdiskussion und der folgenden Betrachtungen ist eine Projektionsfolie zweckmäßig, evtl. mit den Teilergebnissen auf Einklappfolien. (Die Projektionsfolie „Hintereinanderausführung von Spiegelungen" kann hier als Muster dienen; sie sollte jedoch an dieser Stelle selbst nicht eingesetzt werden, weil sie in mehrfacher Hinsicht einen Sonderfall erfaßt.) Man kann aber auch durch eine aus farbiger Folie ausgeschnittene Figur die jeweils interessierenden Teile hervorheben (die Original- und die Bildfigur ebenso wie die „Zwischenergebnisse", bei denen die Verbindung der (Eck-) Punkte zu einer zusammenhängenden Figur von der Aufgabenstellung her gar nicht gefordert sein mußte). Der Vergleich der Originalfigur mit den anderen und besonders mit der Bildfigur führt zu den Begriffen „Bewegung“ und „Kongruenz“ und deren Definition.

Sofort nach dem Wiederholen und Erläutern dieser Definitionen durch die Schüler wird man ihnen die praktische Bedeutsamkeit dieser Begriffe nahebringen. Mit der ausgeschnittenen Figur aus Folie läßt sich das „Zur Deckung bringen“ gut erläutern, kann auch vom Schüler nachvollzogen werden, falls er sich für seine Aufgabe eine entsprechende Figur ausschneidet. Außer den im Lehrbuch angedeuteten Beispielen (LB 138) sollten in der Diskussion mit den Schülern weitere, möglichst aus dem unmittelbaren Erlebnisbereich (z. B. Ausschmücken der Schule), zur Sprache kommen; auch ein Rückgriff auf das Beispiel der Kekse (LE 1 Auftrag D 2) ist möglich.

Da in der Definition D 3 des Lehrbuchs für die Kongruenzrelation nicht sofort die Symmetrie eingeschlossen ist, ist bereits bei der Erstfestigung auf diese wichtige Eigenschaft einzugehen (ohne von „Symmetrie“ zu sprechen). Beispiel D 1 kann ebenso dazu dienen wie das gemeinsame Lösen einer diesem Beispiel entsprechenden Aufgabe anhand einer entsprechenden Zeichnung (am besten auf Folie).

Hinweis: Eine derartige Erörterung hat nur exemplarischen Charakter; für eine allgemeine Betrachtung benötigt man beispielsweise die Aussage, daß zu jeder Bewegung eine entgegengesetzte existiert.

Zur Festigung kann Auftrag D 13a bearbeitet werden. Auch Aufgabe 1 ist geeignet, ggf. als Hausaufgabe.

Die weitere **Festigung der Begriffe „Kongruenz“ und „Bewegung“ . . .** kann mit der Bearbeitung des Auftrags D 13b beginnen (SSA). Hier können mit dem Blick auf die Anwendung des Kongruenzbegriffs bei vorliegender Kongruenz auch Tabellen einbezogen werden, in denen die Bildpunkte ausgezeichneter Punkte betrachteter Figuren bei Bewegungen angegeben werden. Man kann auch – nach erkannter Kongruenz – richtig und falsch ausgefüllte Tabellen den Schülern vorgeben, sie darüber befinden und ihre Entscheidungen begründen lassen.

Einbeziehen sollte man in die Lösungsdiskussion ein zumindest exemplarisches Aufzeigen der Transitivität der Kongruenzrelation bei der Betrachtung der Dreiecke 2, 3 und 7. Für eine allgemeine Betrachtung wird hier benötigt, daß die Nacheinanderausführung zweier Bewegungen wieder eine Bewegung ist. Das ist aufgrund der Definition der Bewegungen selbstverständlich. Daß aber die Transitivität für eine Relation nicht selbstverständlich ist, zeigt die Relation „steht senkrecht auf“ zwischen Geraden. Zweckmäßig ist auch ein Hinweis auf die Kleiner-Relation oder die Teilbarkeitsrelation, die wiederum transitiv sind.

Für die weitere Festigung können die Bilder D 23 bis D 26 betrachtet werden. Geeignet ist ferner Aufgabe 2. Dabei kann 2a im Unterricht erledigt werden, um die Vorgaben für die Bearbeitung von 2b und 2c als Hausaufgabe zu schaffen.

Weitere Übungen zu den Bewegungen und zur Kongruenz . . . Ob hier ein weiteres Einbeziehen von Aufgaben nötig ist, die regelrechtes Konstruieren verlangen (wie Aufg. 2), muß von der Klassensituation her entschieden werden. Werden insbesondere Mängel in Sauberkeit und Genauigkeit sichtbar, so muß darauf besonders geachtet werden. Bei Vorgaben mittels Lochschablone sind auch einmal die Bildfiguren mit diesem Arbeitsmittel zu überprüfen (Selbstkontrolle und Kontrolle durch den jeweiligen Nachbarn). Die Arbeit im Koordinatensystem (Millimeterpapier, Angabe der Koordinaten mit einer Dezimalstelle) erfordert insbesondere bei Spiegelungen an weder horizontal noch vertikal verlaufenden Geraden oder Drehungen um Winkel wie 50° große Sorgfalt; die Genauigkeit kann durch Angabe der Koordinaten für die Eckpunkte der Bildfiguren überprüft werden. Man bedenke jedoch, daß gerade hier nur längerfristige und vor allem konsequente Arbeit Erfolg verspricht.

In manchen Klassen wird auch das Lösen von z. B. Aufgabe 3 für die weitere Festigung genügen. Bei den Begründungen sollte man hier aber nicht bei einer bloßen Angabe der jeweiligen Bewegung stehenbleiben, sondern auch Paare Originalpunkt – Bildpunkt angeben lassen. So kann z. B. für 3a die Lösung folgendermaßen niedergeschrieben werden (Tafel oder Heft):
Drehung um B mit Drehwinkel 180°

Original	B	A	C
Bild	B	D	E

Außerdem sollte die Aufgabe durch solche Figuren ergänzt werden, bei denen die gesuchte Kongruenzabbildung keine Elementarbewegung ist.

Für die Erörterungen zur Kongruenz räumlicher Figuren empfiehlt sich die Einstimmung durch einen kurzen Lehrervortrag. Dann sollten auch hier von den Schülern Beispiele für kongruente Körper sowie für entsprechende praktische Sachverhalte genannt werden.

Kontrollaufgabe
Aufg. 4

Eigenschaften von Bewegungen (2 Std.)

LE 6 (LB 141 bis 143)

Die Eigenschaften von Bewegungen, deren Herausarbeiten aufgrund der erkannten, allen Elementarbewegungen gemeinsamen Eigenschaften wenig Mühe macht, sind für das Folgende, insbesondere für die Gewinnung der Kongruenzsätze für Dreiecke, von Bedeutung. Hier werden ferner die ersten Kongruenzkriterien, und zwar für Strecken und Winkel, behandelt. Damit eröffnet sich erstmalig die Möglichkeit, den Nachweis der Kongruenz gewisser Punktmengen anders als über die Existenz von Bewegungen zu führen.

Mit dem Satzpaar „Wenn Strecken gleich lang, so kongruent" und „Wenn Strecken kongruent, so gleich lang" (und entsprechend bei Winkeln) stößt man auch auf die Frage der Umkehrung. Diese Stelle eignet sich aber nicht zu ausgiebigen Erörterungen über das Umkehren von Sätzen, weil beide Sätze wahr sind und dies den Schülern offensichtlich erscheint.

Ziele

Die Schüler
- haben wichtige Eigenschaften der Bewegungen erkannt und begründet,
- haben erkannt, daß sie beim Zeichnen von Bildfiguren bei Bewegungen Gebrauch von verschiedenen Eigenschaften der Bewegungen machen können, und nutzen dies bewußt,
- sind in der Lage, mit Eigenschaften der Bewegungen die Kongruenz gewisser vorgelegter Figuren auszuschließen,
- wissen, daß Kongruenz bei Strecken gleiche Länge bedeutet, bei Winkeln gleiche Größe; sie verstehen Aufforderungen zur Untersuchung auf Kongruenz bei diesen Punktmengen als Aufforderungen zum Messen und können solche Messungen ausführen.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeiten und Begründen von Eigenschaften der Bewegungen
- Festigen des Wissens durch bewußtes Nutzen der Eigenschaften von Bewegungen bei Konstruktionen

2. Stunde
- Weitere Festigung, vor allem durch Ausschließen der Kongruenz von Figuren mittels Eigenschaften der Bewegungen
- Anwenden der Kongruenz auf Strecken und Winkel
- Zusammenfassung

Methodische Hinweise

Das **Erarbeiten und Begründen von Eigenschaften der Bewegungen** ist eigentlich nur eine wiederholende Zusammenstellung bereits erkannter gemeinsamer Eigenschaften von Elementarbewegungen. Es kann mit einer Konstruktionsaufgabe begonnen werden, z. B.:

Zeichne mit der Lochschablone die Punkte $A(13)$, $B(14)$, $C(9)$, $D(7)$, $E(10)$, $F(11)$ und $G(3)$! Die Strecken $\overline{EF}$ und $\overline{FG}$ sollen Teil des Bildes vom Viereck $ABCD$ bei einer Bewegung sein. Vervollständige die Bildfigur, und begründe dein Vorgehen!

Es gibt zwei Lösungen. Beim Auswertungsgespräch (unterstützt durch Projektionsfolie oder Tafelzeichnung) sind die beim Konstruieren verwendeten Eigenschaften herauszustellen, und es ist zu begründen, daß es sich um Eigenschaften der Bewegungen handelt.

Eine Zusammenstellung dieser Eigenschaften sollte an der Tafel erfolgen (in Kurzform, vgl. LB 143), und diese Zusammenstellung ist dann zu ergänzen. In diesem Zusammenhang sind auch Fragen wie die des Auftrags D 14 zu beantworten.

Festigen des Wissens durch bewußtes Nutzen der Eigenschaften ... Auch wenn man bereits den Einstieg in die Thematik vom Konstruieren her gewählt hat, bietet sich hier vor allem Beispiel D 2 an. Die Aufgabe sollte zunächst, etwa unter Zuhilfenahme der Folie „Quadratzentimeterraster“ oder mittels Koordinatenangaben, den Schülern mit der Aufforderung gestellt werden, nach einem möglichst rationellen Lösungsweg zu suchen. Die Auswertung kann im gemeinsamen Gespräch erfolgen oder durch selbständige Arbeit der Schüler mit dem Lehrbuch. Anschließend kann Auftrag D 15 bearbeitet werden.

Für die **weitere Festigung ...** ist das Bearbeiten der Aufgabe 1 zu empfehlen. Vor allem aber sollte das Ausschließen der Kongruenz von Figuren (Beispiel D 3) und das Begründen der Kongruenz von Figuren (Auftrag D 16) der weiteren Festigung dienen (UG). Begründungen wie im Beispiel D 3 erscheinen vielen Schülern sicher überflüssig, weil „man es doch sieht“. Hier sollte erörtert werden, daß derartige Begründungen geübt werden müssen, weil oftmals nur anhand von Skizzen und allgemeinen Voraussetzungen, die einem Text zu entnehmen sind, überlegt werden kann. Für manche Schüler wirken hier optische Täuschungen überzeugend.

Beim **Anwenden der Kongruenz auf Strecken und Winkel** und dem Herausstellen von deren Gleichwertigkeit mit gleicher Länge bzw. Größe kann von der Frage ausgegangen werden, ob man bei Strecken und Winkeln gleich erkennen kann, ob Kongruenz besteht oder nicht. Aufgabe 3 kann sowohl am Anfang der Erörterungen stehen als auch nach der Formulierung von Satz D 4 bearbeitet werden. Diese Aufgabe sollte durch eine Aufgabe zu Winkeln ergänzt werden, bei der die Vorgaben mittels Lochschablone erfolgen können (vgl. Hinweis von S. 167). So kann gleichzeitig das Messen von Winkeln geübt werden.

Die **Zusammenfassung** der Erkenntnisse dieses Stoffabschnitts, bei der sich die Arbeit mit dem Lehrbuch (LB 143) empfiehlt, kann auch die erste Stunde des nächsten Stoffabschnitts einleiten. Spätestens hier sollte man nämlich den Schülern bewußtmachen, daß sich die behandelten „Kongruenzsätze" für Strecken und Winkel nicht ohne weiteres auf andere Figuren übertragen lassen (vgl. LB 142, Bild D 37). So wird das Suchen nach weiteren Kriterien für die Kongruenz beispielsweise von Winkeln (im Stoffabschnitt 4.3.) oder von Dreiecken (im Stoffabschnitt 4.5.) motiviert.

Am Ende des Stoffabschnitts kann eine Kurzkontrolle erfolgen.

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 2 **2.** Aufg. 5

Stoffabschnitt 4.3.

Beziehungen zwischen Winkeln (7 Std.)

Hier lernen die Schüler häufig genutzte Kriterien für die Kongruenz von Winkeln kennen. Diese Aussagen werden in Wenn-so-Form formuliert, um das Bilden der Umkehrung zu erleichtern. Da bei der Umkehrung des Neben- und des Scheitelwinkelsatzes die erhaltenen Aussagen falsch sind, wird offensichtlich, daß die Umkehrung eines Satzes selbst keine wahre Aussage, also kein Satz sein muß.

Es werden nur Umkehrungen solcher Aussagen betrachtet, die bereits in Wenn-so-Form vorliegen. Auf Probleme bei der Bildung von Umkehrungen, die durch die Überführung einer umgangssprachlich formulierten Aussage in eine solche normierte Form bedingt sind, ist – in beschränktem Umfang – erst im Stoffabschnitt 4.6. einzugehen. Nicht zu erörtern ist in dieser Klassenstufe das Problem der zusammengesetzten Prämisse, das auf die Möglichkeit mehrerer „Umkehrungen" führt.

Scheitelwinkel und Nebenwinkel (2 Std.)

LE 7 (LB 144 bis 146)

Ziele

Die Schüler
- haben sich die Begriffe „Nebenwinkel" und „Scheitelwinkel" angeeignet,
- sind relativ selbständig zur Erkenntnis des Scheitelwinkel- und Nebenwinkel-

satzes gelangt, können diese Sätze einwandfrei formulieren und sicher anwenden,
- können für einfache Aussagen in Wenn-so-Form die Umkehrung bilden,
- wissen, daß Umkehrungen von wahren Aussagen nicht wahr sein müssen,
- kennen die Symbolik $\sphericalangle\, ABC$ für Winkel, die kleiner als 180° sind, und wenden sie richtig an.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeiten der Begriffe „Nebenwinkel" und „Scheitelwinkel" sowie des Neben- und des Scheitelwinkelsatzes

2. Stunde
- Erarbeiten von Kenntnissen über das Umkehren von Sätzen und der Einsicht, daß die Umkehrungen des Neben- und des Scheitelwinkelsatzes falsch sind

Methodische Hinweise

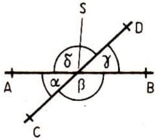
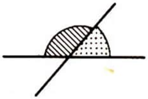
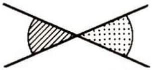
Das **Erarbeiten der Begriffe „Nebenwinkel" und „Scheitelwinkel" sowie des Neben- und des Scheitelwinkelsatzes** Anknüpfend an eine tägliche Übung (Untersuchung von Winkeln auf Kongruenz durch Messen) kann eine zu Auftrag D 17 analoge Aufgabe (mit Lochschablone, z. B. die Geraden AB und CD mit $A(14)$, $B(15)$, $C(17)$, $D(10)$; SSA) gestellt werden. Zunächst sollte nur die Kennzeichnung von Winkeln mit dem Schnittpunkt S als Scheitelpunkt gefordert werden. Anhand einer entsprechenden Tafelzeichnung ist für einen dieser Winkel die übliche Symbolik einzuführen und zu erläutern (z. B. $\alpha = \sphericalangle\, ASC = \sphericalangle\, CSA$), und für die übrigen können es dann die Schüler selbst ergänzen. Dabei ist deutlichzumachen, daß diese Symbolik nur Winkel unter 180° eindeutig festlegt.

Nur von derartigen Winkeln sollten anschließend die Größen ermittelt werden. Dies muß dann sowohl zur Einführung der Termini als auch zu den Sätzen führen. Zur ersten Festigung der Begriffe sollten alle Scheitelwinkel- und alle Nebenwinkelpaare aufgeschrieben werden (Auftrag D 18), und die Schüler sollten auch Merkmale für Nebenwinkel und Scheitelwinkel nennen (LB 144). An Redeweisen sollten im Laufe der Zeit benutzt werden:
(1) ... ist Scheitelwinkel (Nebenwinkel) zu ...,
(2) ... und ... bilden ein Scheitelwinkelpaar (Nebenwinkelpaar),
(3) ... und ... sind Scheitelwinkel (Nebenwinkel).
Die ersten beiden sind zu bevorzugen, weil bei der dritten nicht deutlich wird, daß es sich um zweistellige Relationen handelt.

Die Schüler formulieren die Sätze sicher zunächst etwa in der Form „Scheitelwinkel sind (stets) gleich groß" oder „Scheitelwinkel sind (stets einander) kongruent" und entsprechend für Nebenwinkel. Will man schon jetzt die Wenn-so-Form anstreben, so bieten sich zwei Möglichkeiten an:
- Die Aufforderung, den Sachverhalt auf unterschiedliche Weise zu beschreiben, veranlaßt evtl. zu Vorschlägen in der gewünschten Richtung. Andernfalls bzw. abschließend wird mit den Lehrbuchformulierungen (Sätze D 6 und D 7) verglichen.

– Der Lehrer formuliert die Prämisse für einen dieser Sätze, die Schüler müssen ergänzen und für den anderen Satz selbst die entsprechende Fassung angeben.
Bild 24 zeigt ein *Tafelbild*, wie es im Laufe der Stunde entstehen kann.

Bild 24

Nebenwinkelpaare: $(\alpha;\beta)$, $(\beta;\gamma)$, (γ,δ), $(\alpha;\delta)$  	**Nebenwinkelsatz** Wenn α Nebenwinkel zu β ist, so ist $\alpha + \beta = 180°$.	*Nebenwinkel* 
Scheitelwinkelpaare: $(\alpha;\gamma)$, $(\beta;\delta)$	**Scheitelwinkelsatz** Wenn α Scheitelwinkel zu γ ist, so ist $\alpha \cong \gamma$.	*Scheitelwinkel* 

Hinweis: Bei der Kurzformulierung des Nebenwinkelsatzes wirkt sich das Fehlen einer besonderen Symbolik für Winkelgrößen unschön aus, weil α und β in demselben Satz sowohl für Winkel als auch für deren Größen stehen. Auf diese Doppelbedeutung sollten die Schüler ausdrücklich aufmerksam gemacht werden.

Die Gültigkeit des Nebenwinkelsatzes ergibt sich sofort aus der Erklärung von „Nebenwinkel" und der bekannten Größe eines gestreckten Winkels. Für den Scheitelwinkelsatz sollte man zur Festigung und gleichzeitig im Interesse kontinuierlicher Durchführung von Kongruenzbetrachtungen den Auftrag D 19 bearbeiten lassen (SSA), ohne hier aber von einem „Beweis" zu sprechen. Die Schüler können auch bereits an dieser Stelle mit „Pictogrammen" für die beiden Sätze bekannt gemacht werden. Solche Pictogramme können aus der Projektionsfolie „Sätze zur Planimetrie" ausgeschnitten und später zur Zusammenstellung und zum Projizieren von „Satzbäumen" zur Verdeutlichung logischer Zusammenhänge mit dem Polylux genutzt werden (vgl. [3], H. 9 und [33]).

Entsprechende Applikationen für die Hafttafel (Selbstanfertigung) sind auch für die Ausgestaltung des Mathematikkabinetts empfehlenswert.

Zur Festigung dienen vor allem die Aufgaben 1 bis 3, 5 und 6.

Beim **Erarbeiten von Kenntnissen über das Umkehren von Sätzen . . .** kann eine Frage wie im Auftrag D 20b den Auftakt bilden, die sich ihrerseits aus einer Wiederholung von (Scheitelwinkel- und) Nebenwinkelsatz ergeben hat. Im weiteren sind zu berücksichtigen:
- Beispiele aus unterschiedlichen mathematischen Gebieten (Anregungen bietet Auftrag D 21).
- Sachverhalte des täglichen Lebens wie:
  Der Lehrer lobt: „Wenn Sabrina Tafeldienst hat, ist die Tafel immer vorbildlich gewischt." Da protestiert Michael: „Das können Sie aber nicht sagen! Als ich Tafeldienst hatte, war die Tafel auch sauber und ordentlich!"
  Was würdest du Michael antworten? (Vgl. [27], H. 9.)

Die Betrachtungen sind anschaulich zu unterstützen, indem der Lehrer für einfache Sätze Prämisse und Konklusion auf Applikationen schreibt, die hinter die an die Hafttafel geschriebenen Wörter „Wenn" und „so" („dann") geheftet und dann

vertauscht werden. Mit Folienausschnitten läßt sich auf dem Polylux entsprechend arbeiten.
Zweckmäßig sind Arbeitsblätter (ggf. auch Projektionsfolien), die einfache Aussagen in Wenn-so-Form enthalten. Die Schüler müssen selbst Umkehrungen bilden oder für vorgeschlagene Aussagen entscheiden, ob es sich um Umkehrungen zu anderen handelt. Dabei kann auch die Wahrheit der Aussagen erörtert werden.

Kontrollaufgaben

1. Aufg. 5 **2.** Aufg. 6

3. Entscheide für a) bis c), ob (2) die Umkehrung von (1) ist! (a und b sollen natürliche Zahlen sein.) Bei der Antwort „nein“ bilde selbst die Umkehrung von (1)! Überlege auch jedesmal, ob die Aussagen wahr sind!

a) (1) Wenn a gerade ist, so ist die Zahl $2 \cdot a$ auch gerade.
(2) Die Zahl $2 \cdot a$ ist gerade, wenn a gerade ist.

b) (1) Wenn $a > b$ ist, so ist $\frac{a}{b}$ ein unechter Bruch.
(2) Wenn $\frac{a}{b}$ ein unechter Bruch ist, so ist $a > b$.

c) (1) Wenn $a + b = 5$ ist, dann ist $5 - b = a$.
(2) Wenn $5 + b = a$ ist, dann ist $a - b = 5$.

Sätze über Winkel an geschnittenen Parallelen (3 Std.)

LE 8 (LB 146 bis 150)

Bei den Winkeln an geschnittenen Geraden sollte – wie bei Neben- und Scheitelwinkeln – auf ausdrückliche Definitionen oder definitionsähnliche Erklärungen verzichtet werden. Im Hinblick auf die für spätere Anwendungen wichtigen Umkehrungen ist es jedoch erforderlich, sie an beliebigen Geraden einzuführen.

Um bei den Umkehrungen das Problem der zusammengesetzten Prämisse zu umgehen, ist im Lehrbuch denjenigen Aussagen, die als Stufenwinkelsatz und Wechselwinkelsatz gekennzeichnet sind, jeweils eine „generelle Prämisse“ vorangestellt worden: „Gegeben sind zwei Geraden g und h, die von einer dritten Geraden s geschnitten werden, und Stufenwinkel (Wechselwinkel) α und β (γ).“ Erst dann folgt das, was bei der Bildung der Umkehrung nun allein noch „umzukehren“ ist. Als „Merksätze“ (Satz D 8 und D 9) hervorgehoben werden im Lehrbuch allerdings Kurzformen, die sich besser einprägen lassen.

Ziele

Die Schüler
- kennen die Begriffe „Stufenwinkel“ und „Wechselwinkel“, können bei geschnittenen Geraden derartige Winkelpaare angeben und auch deren Merkmale nennen,
- haben relativ selbständig den Stufen- und den Wechselwinkelsatz gefunden, können Aussagen formulieren und anwenden,
- haben den Beweis für den Stufenwinkelsatz verstanden,

- haben sowohl durch Berechnung als auch durch eine allgemeine Begründung erkannt, daß der Wechselwinkelsatz aus Stufenwinkelsatz und Scheitelwinkelsatz folgt, und haben so Einsichten in den Zusammenhang mathematischer Sätze gewonnen.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeiten des Begriffs „Stufenwinkel“ und Erarbeiten des Stufenwinkelsatzes
- Erarbeiten des Beweises zum Stufenwinkelsatz

2. Stunde
- Erarbeiten des Begriffs „Wechselwinkel“ und des Wechselwinkelsatzes, Begründen des Wechselwinkelsatzes

3. Stunde
- Weitere Festigung zum Stufen- und Wechselwinkelsatz, dabei vor allem Betrachten der Umkehrungen dieser Sätze

Methodische Hinweise

Das **Erarbeiten des Begriffs „Stufenwinkel“ und das Erarbeiten des Stufenwinkelsatzes** können, ähnlich wie bei Neben- und Scheitelwinkeln, miteinander verknüpft werden. Durch den motivierenden Beginn mit der Bearbeitung des Auftrags D 22 (SSA), der in eine entsprechende Zielstellung mündet, wird dies erreicht. Beim Erstfestigen des Begriffs „Stufenwinkel“ beachte man besonders die Begriffe „schneidende Gerade“ und „geschnittene Geraden“ und ihre Relativität (Aufg. 1). Hierher gehört auch im Zusammenhang mit Auftrag D 23 und ungeachtet des Verzichts auf eine Definition – oder gerade deswegen – das Hervorheben von Merkmalen für diese Winkelpaare:
- Die Schenkel auf den geschnittenen Geraden liegen auf derselben Seite der schneidenden Geraden.
- Von den auf der schneidenden Geraden liegenden Schenkeln ist einer ein Teil des anderen.

Für den Stufenwinkelsatz ist von den Schülern als Wenn-so-Form zunächst etwa „Wenn zwei Winkel Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen sind, so sind sie gleich groß (einander kongruent)“ zu erwarten. Auf eine für das spätere Umkehren besonders geeignete Fassung kann das Nachlesen im Lehrbuch führen (ohne Abwertung der Schülerformulierungen). Die Kurzform im Lehrbuch ist als zum Einprägen besonders geeignet herauszustellen.

Erarbeiten des Beweises zum Stufenwinkelsatz Zuerst ist die Notwendigkeit eines solchen Beweises deutlich zu machen (wiederum anknüpfend an Auftrag D 22, Bild D 48 und Bezug nehmend auf das, was im Stoffgebiet „Teilbarkeit“ über Beweise und Beweisen erörtert worden ist): Messen kommt als Begründung nicht in Betracht, schon wegen der Meßungenauigkeiten, vor allem aber, weil es um *alle* möglichen Fälle geht. (Auch das Rationelle eines solchen Vorgehens sollte dabei betont werden.)

Nach dem Formulieren von Voraussetzung und Behauptung und dem Anfertigen einer Skizze an der Tafel sollte das Unterrichtsgespräch zum Motivieren des Arbeitens mit der Verschiebung $\overrightarrow{AB}$ folgende Etappen durchlaufen:

- Nachweis der Kongruenz von α und β heißt: Es ist zu zeigen, daß es eine Bewegung gibt, bei der ...
- Was für eine Bewegung kommt dafür in Frage? Die Verschiebung $\overrightarrow{AB}$ scheint das Verlangte zu leisten.
- Das ist auch der Fall, denn: g hat als Bild h, weil ...

Bei der Beweisfindung ist das Arbeiten mit einer Applikation, die (mechanisch!) bewegt wird, durchaus zulässig. Es handelt sich um ein heuristisches Hilfsmittel. Erst nachdem der Gedankengang von den Schülern verstanden worden ist, sollte die Beweisdarstellung an der Tafel erfolgen, gegenüber dem Lehrbuch ggf. ergänzt durch Spaltenüberschriften „Beweisschritte" und „Begründungen".

Bei der abschließenden Wiederholung des Satzes können die Schüler mit dem Kurzsymbol (Pictogramm) bekanntgemacht werden. Zur Festigung (auch Hausaufgaben) sind Berechnungen (Auftrag D 24b, Aufgabe 3) möglich. Sie zeigen dem Schüler, daß ein Winkel alle anderen festlegt, und führen damit zur nächsten Thematik.

Für das Erarbeiten des Begriffs „Wechselwinkel" und des Wechselwinkelsatzes . . . kann eine Besprechung von Hausaufgaben (s. o.) oder eine entsprechende tägliche Übung den Auftakt bilden. Bei der Begründung der errechneten Ergebnisse müssen die Schüler im Einzelfall die gleichen Überlegungen anstellen wie bei einer allgemeinen Begründung des Wechselwinkelsatzes. Im übrigen kann jetzt entsprechend verfahren werden wie bei Stufenwinkel und Stufenwinkelsatz – mit Ausnahme des Beweises. Identifizierungen fordern die Aufgaben 1b und 2b, und Auftrag D 24a veranlaßt zum Nennen der Merkmale:
- Die Schenkel auf den geschnittenen Geraden liegen auf verschiedenen Seiten der schneidenden Geraden.
- Von den auf der schneidenden Geraden liegenden Schenkeln ist keiner ein Teil des anderen.

Wenn für eine allgemeine Begründung einige Schüler ein abbildungsgeometrisches Vorgehen vorschlagen, so sollte man solche Überlegungen vorbehaltslos anerkennen. Dennoch wird man auf die Nutzung von Stufen- und Scheitelwinkelsatz orientieren, weil diese Sätze präzise formuliert zur Verfügung stehen. Für einen bewegungsgeometrischen Beweis fehlen dagegen präzise Formulierungen der benötigten Sätze. (Vgl. dazu [28] und [29].) Für eine einwandfreie Beweisdarstellung wäre z. B. folgendes *Tafelbild* zu entwickeln.

s schneidet *g*, *h*
α, γ Wechselwinkel

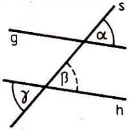


Bild 25

Wenn $g \parallel h$, so $\alpha \cong \gamma$.
Vorauss.: $g \parallel h$
Beh.: $\alpha \cong \gamma$
Beweis:

Beweisschritte	Begründungen
(1) $\alpha \cong \beta$	Stufenwinkelsatz
(2) $\beta \cong \gamma$	Scheitelwinkelsatz
$\alpha \cong \gamma$ w. z. b. w.	

Abschließend können die Zusammenhänge durch einen „Satzbaum" verdeutlicht werden (Bild 26), nachdem auch für den Wechselwinkelsatz ein Pictogramm vereinbart worden ist.

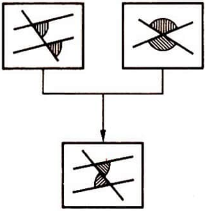


Bild 26

Der **weiteren Festigung des Stufen- und des Wechselwinkelsatzes** dienen das Bilden der Umkehrungen und Erörterungen zu deren Gültigkeit (ohne Beweis). Danach wird mit diesen Umkehrungen gearbeitet (Auftrag D 26), und es werden etwas komplexere Anforderungen (Aufg. 8) gestellt.

Zur Bildung der Umkehrungen kann eine Erinnerung an das Vorgehen bei Neben- und Scheitelwinkelsatz veranlassen. Außerdem sollte den Schülern nahegebracht werden, daß man mit den Umkehrungen – Gültigkeit vorausgesetzt – Kriterien für die Parallelität zweier Geraden erhält. Die selbständige Formulierung der Umkehrungen durch die Schüler ist anzustreben (Auftrag D 25).

Hinweis: Die im Lehrbuch formulierte Aussage über die Gültigkeit dieser Umkehrungen ist selbst kein Satz der Planimetrie. Hier handelt es sich vielmehr um eine Aussage über gewisse Sätze der Planimetrie, also um einen „Metasatz".

Wichtiger als ein Beweis der Umkehrungen ist das Lösen von Aufgaben, bei denen die beim Schließen benutzten Aussagen erkannt werden müssen (Auftrag D 26, Aufg. 8).

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 3 **2.** Aufg. 7

Stoffabschnitt 4.4.

Dreiecke (8 Std.)

Hier sollen – bevor im Stoffabschnitt 4.5. der abbildungsgeometrische Aufbau (Etappen (4) und (5)) fortgesetzt wird – einige wichtige Fakten über Dreiecke bereitgestellt werden, zum (geringen) Teil wiederholend. Besonders wichtig ist der Satz von der Innenwinkelsumme in Dreiecken, nicht nur weil er später oft Anwendung findet. Vor allem ist seine Behandlung für die allgemeine Fähigkeitsentwicklung zu nutzen, insbesondere für die Realisierung der Leitlinie „Beweisen". An dieser Leitlinie ist auch bei allen anderen Themen zu arbeiten, auch wenn beispielsweise für Seiten-Winkel-Beziehungen und Dreiecksungleichung keine Beweise geführt werden.

Einteilung der Dreiecke (1 Std.)

LE 9 (LB 151 bis 153)

Ziele

Die Schüler
- können den Begriff „Außenwinkel eines Dreiecks" sowie „anliegend" und „gegenüberliegend" für Innenwinkel und Seiten richtig verwenden,
- haben ihr Wissen über die Einteilung der Dreiecke nach den Seiten reaktiviert, wissen, wie man Dreiecke auch nach den Innenwinkeln einteilen kann und daß diese Einteilung (als „Klasseneinteilung") von anderer Art ist als die nach den Seiten,
- können die Einteilungen der Dreiecke nach Seiten und Winkeln unter Zuhilfenahme von Mengendiagrammen erläutern und vorgegebene Dreiecke in dieser Hinsicht richtig einordnen.

Schwerpunkte

- Einführen von „anliegend" und „gegenüberliegend" und Erarbeiten des Begriffs „Außenwinkel" (eines Dreiecks)
- Wiederholen der Dreieckseinteilung nach den Seiten, Erarbeiten einer Einteilung nach den Winkeln und Veranschaulichung durch Mengendiagramme

Methodische Hinweise

Dem **Einführen von „anliegend" und „gegenüberliegend"** . . . sollte eine kurze Motivierung für nähere Beschäftigung mit Dreiecken vorangehen (häufiges Auftreten, Möglichkeit der Zusammensetzung von Vierecken, Fünfecken ... aus Dreiecken). Danach kann etwa so vorgegangen werden:
- Anzeichnen eines Dreiecks, Benennen seiner Eckpunkte und Innenwinkel durch Schüler,
- Bezeichnung der Seiten führt zu „gegenüberliegend",
- Erörterung von „anliegend".

Das Erarbeiten von „Außenwinkel" kann von der Frage ausgehen, warum oft ausdrücklich von „*Innen*winkeln" gesprochen wird. Eine kurze Festigung, bei der die Schüler für vorgegebene Figuren (Bilder 27 und 28, Projektionsfolie) angeben, welche der gekennzeichneten Winkel Innenwinkel bzw. Außenwinkel für welche Dreiecke sind, ist anzuschließen.

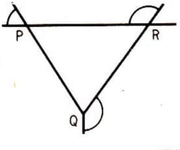


Bild 27

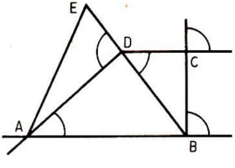


Bild 28

Wiederholen der Dreieckseinteilung nach den Seiten ... Diese Einteilung ergibt sich unmittelbar aus den Namen für spezielle Dreiecksarten, die die Schüler schon kennen. Deshalb können sie aufgefordert werden, vorgegebene Dreiecke durch Bezeichnungen wie „unregelmäßig" näher zu charakterisieren (Arbeit mit Bild D 71 oder mit Applikationen für die Hafttafel). Beim Auswertungsgespräch kann die Frage „Wieviel gleichschenklige, wieviel gleichseitige Dreiecke?" auf die Beziehung zwischen diesen beiden Dreiecksarten führen. Die Veranschaulichung durch ein Mengendiagramm (LB-Bild D 69) läßt sich durch Applikationen für verschiedene Dreiecke an der Hafttafel unterstützen.

Daß ein und dieselbe Menge nach unterschiedlichen Gesichtspunkten eingeteilt werden kann, ist den Schülern bekannt, auch aus anderen Unterrichtsfächern; darauf sollte man verweisen und Beispiele nennen lassen (z. B. die Einteilung der Fische in Raub- und Friedfische oder in Süßwasser- und Meeresfische[1]). Die Applikationen können nun auch für die Einteilung der Dreiecke nach den Winkeln benutzt werden. Dabei erklären die Schüler, wann ein Dreieck spitzwinklig (rechtwinklig, stumpfwinklig) heißt.

Für die Festigung der Einteilung sollten die im Lehrbuch geforderten Identifizierungstätigkeiten (Aufg. 1 und 2) und Realisierungstätigkeiten (Aufg. 3) passend variiert und ergänzt werden. Dabei sind vorgelegte Dreiecke, auch solche an Körpermodellen und aus der Umgebung, einzeln möglichst genau – also nach Seiten *und* Winkeln – zu charakterisieren. Auch an den Diagrammen sollte man abschließend die Einteilungen zu einer einzigen zusammenführen (vgl. [32]).

Kontrollaufgabe

a) Charakterisiere die Dreiecke ABC und PQR nach Seiten und Winkeln!

b) Zeichne ein unregelmäßiges spitzwinkliges Dreieck!

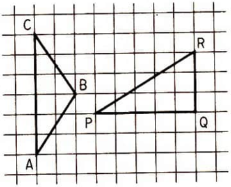


Bild 29

Sätze über die Winkel eines Dreiecks (2 Std.)

LE 10 (LB 153 bis 154)

Beim Satz von der Summe der Innenwinkel in Dreiecken ist die Einsicht in die Beweisnotwendigkeit leichter zu erreichen als bei anderen Sätzen, weil er den Schülern gewiß nicht selbstverständlich erscheint.

Bedeutsam für die Realisierung der Leitlinie „Beweisen" ist ferner, daß der Beweis relativ kurz und überschaubar ist und dennoch hinsichtlich der Beweisfindung „typische" Anforderungen stellt (Auswahl benutzter Sätze, Hilfslinie). Auch der Weg zur Vermutung des Satzes ist wichtig für die Ausbildung allgemein-geistiger Fähigkeiten. Der Satz über die Außenwinkel tritt demgegenüber an Bedeutung klar zurück.

[1] Daß es sich hier nicht um Klasseneinteilungen handelt – man denke etwa nur an Aale oder Lachse, die je nach Lebensalter im Süßwasser oder im Meer anzutreffen sind –, braucht dabei nicht zu stören.

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß die Summe der Innenwinkel(-größen) jedes Dreiecks 180° beträgt, können diesen Satz mit eigenen Worten formulieren und mit seiner Hilfe Innenwinkel berechnen,
- haben den Beweis für den Satz von der Innenwinkelsumme verstanden und können das Wesentliche an ihm wiedergeben,
- kennen den Außenwinkelsatz und können auch diesen Sachverhalt einwandfrei ausdrücken,
- haben ihre Überzeugung von der Notwendigkeit allgemeiner Beweisführungen für All-Aussagen gefestigt.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeiten des Satzes von der Innenwinkelsumme (Vermutung)
- Beweis des Winkelsummensatzes

2. Stunde
- Wiederholen des Beweises für den Winkelsummensatz, dabei Erarbeiten des Außenwinkelsatzes mit Beweis
- Festigen der Sätze

Methodische Hinweise

Das **Erarbeiten des Satzes von der Innenwinkelsumme (Vermutung)** kann vom Auftrag D 29 (SSA) ausgehen. Er bringt die Schüler verhältnismäßig zwanglos zur Vermutung eines Zusammenhangs zwischen den Dreieckswinkeln. Eine solche Vermutung kann auch mit funktionalen Betrachtungen (Herabgleiten eines Stabes an der Wand, Bewegen einer Leiste an der Hafttafel oder eines Stäbchens auf der Projektionsfläche des Polylux gewonnen werden (Bild 30). Ausgangspunkt ist die Beobachtung, daß der eine Winkel offensichtlich größer wird, wenn der andere kleiner wird (und umgekehrt).

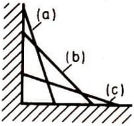


Bild 30

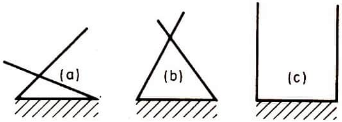


Bild 31

Dabei können auch zwei Leisten bewegt werden (Bild 31) und die Vermutung kann über „Winkelsumme konstant" hinausgeführt werden. Besonders die extremen Lagen (a) und (c) in beiden Fällen legen die Vermutung einer Summe von 180° nahe.

Erst nach funktionalen Betrachtungen und nach Vermutung (zumindest) einer konstanten Innenwinkelsumme sollten Dreiecke gezeichnet, ihre Innenwinkel gemessen und die Summe ermittelt werden (SSA, evtl. arbeitsteilig).

Die Ergebnisse führen zur Formulierung des Satzes als Vermutung. Abweichungen in den Meßwerten stützen die Erörterungen zur Beweisnotwendigkeit; sie sollten aber nach erfolgtem Beweis, sofern sie größer als „normal" sind, im Interesse einer Erziehung zu sorgfältigem und genauem Arbeiten kritisch aufgegriffen werden. Besonders ist aber herauszustellen, daß es nicht nur gilt, sich durch einen Beweis von Meßungenauigkeiten unabhängig zu machen, sondern eine Aussage für ausnahmslos *alle* Dreiecke zu erhalten.

Für den **Beweis des Winkelsummensatzes** werden zunächst Voraussetzung, Behauptung und Beweisfigur an der Tafel fixiert. Die Beweisidee wird gemeinsam durch Orientieren an der Behauptung gefunden: Der einzige den Schülern bekannte Satz, der etwas über eine Winkelsumme von 180° aussagt, ist der Nebenwinkelsatz. Es liegt deshalb nahe, die Figur durch einen Nebenwinkel zu einem Innenwinkel (also einen Außenwinkel!) zu ergänzen. Von diesem müßte gezeigt werden, daß er so groß wie die anderen beiden Innenwinkel zusammen ist. Trägt man „versuchsweise" einen dieser Winkel passend an, so erhält man (nach der Umkehrung des Wechselwinkelsatzes oder der des Stufenwinkelsatzes, je nachdem, welcher Winkel wo angetragen wird) eine Parallele zur gegenüberliegenden Dreiecksseite als (zweite) „Hilfslinie". Die Behauptung des Winkelsummensatzes ergibt sich dann nach Anwendung des Stufenwinkelsatzes (oder des Wechselwinkelsatzes) und Ersetzen der entstandenen Winkel durch die gleich großen Innenwinkel des Dreiecks. Erst nach einer solchen Überlegung kann die Beweisdarstellung erfolgen.

Bei der Beweisfindung sollte den Schülern größtmögliche Freiheit gelassen werden, etwa hinsichtlich des Eckpunktes, an dem das Antragen des Nebenwinkels erfolgen soll usw. Schon die Entscheidung, ob der Beweis – wie hier angenommen – mit dem Verlängern einer Seite über einen Eckpunkt hinaus oder mit der Parallelen zu einer Seite durch den gegenüberliegenden Eckpunkt zu führen ist, sollte der Lehrer nicht von vornherein treffen. Darum ist keinesfalls mit einer vorbereiteten Projektionsfolie zu arbeiten.

Bei der **Wiederholung des Beweises . . .** ist jedoch der Einsatz einer solchen Folie sinnvoll. Hat die Beweisführung mit den Schülern zu einer anderen Figur als im Lehrbuch geführt, so ist ein Vergleich anzuraten. Auch das selbständige Aufschreiben des Beweises durch die Schüler als sinngemäße Übertragung der Lehrbuchdarstellung auf eine andere, vom Lehrer vorgegebene Figur ist eine wertvolle Übung. Bei der Wiederholung ist zu überprüfen, ob alle Schlüsse unabhängig von der Beweisfigur sind. Ferner sollten die als Beweismittel benutzten Sätze noch einmal herausgestellt werden. Dabei können die logischen Zusammenhänge wiederum durch einen „Satzbaum" dargestellt werden (Bild 32).

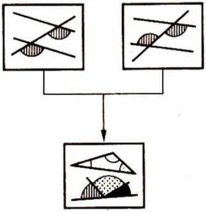


Bild 32

Der *Außenwinkelsatz* kann sich bei einer derartigen Wiederholung mit ergeben. Auf seine Formulierung durch die Schüler ist jedoch etwas mehr Mühe zu verwenden; er ist wegen der zwei Generalisierungen („In *jedem* Dreieck ist *jeder* Außenwinkel ...") sprachlich schwieriger als der Satz von der Innenwinkelsumme. Man sollte aber der Einfachheit zuliebe eine Fassung wie im Lehrbuch (Satz D 12) anstreben.

Festigung der Sätze Einfachste Übungen zum Winkelsummensatz (wie Aufg. 1 und 2) sollten schon im unmittelbaren Anschluß an dessen Behandlung (evtl. tägliche

Übungen vor der Wiederholung) erfolgen. Jetzt kann zunächst Aufgabe 3 gelöst werden (SSA) und dann (teilweise) die Aufgaben 4 und 7, bei denen beide Sätze benötigt werden. Besonders wichtig für die Entwicklung der Beweisfähigkeit ist Aufgabe 5, ebenso – jedoch schwieriger – Aufgabe 6*.

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 5 **2.** Aufg. 7b

Gleichschenklige Dreiecke (1 Std.)

LE 11 (LB 155 bis 156)

Ziele

Die Schüler
- verwenden die Begriffe „Basis", „Schenkel", „Spitze", „Basiswinkel" und „Winkel an der Spitze" bei gleichschenkligen Dreiecken sowie „Winkelhalbierende" richtig,
- kennen den Basiswinkelsatz und können ihn bei Berechnungen anwenden,
- wissen, daß jeder Innenwinkel eines gleichseitigen Dreiecks 60° groß ist und können das begründen.

Schwerpunkte

- Einführen der Bezeichnungen für Stücke von gleichschenkligen Dreiecken und des Begriffs „Winkelhalbierende"
- Formulierung und Anwendung des Basiswinkelsatzes, u. a. auf gleichseitige Dreiecke

Methodische Hinweise

Einführen der Bezeichnungen für Stücke von . . . Dem Einführen der Begriffe „Basis", „Schenkel" usw. sollte eine kurze motivierende Erörterung vorausgehen (relativ häufiges Auftreten gleichschenkliger Dreiecke in der Praxis; Giebelfelder, Turmdächer, Betrachten von Modellen für Pyramiden und für Prismen mit gleichschenkligen Dreiecken als Grundflächen). Dem Zeichnen eines gleichschenkligen Dreiecks an der Tafel und in den Heften schließt sich das Mitteilen der üblichen Bezeichnungen an. Identifizierungsübungen an vorgelegten Dreiecken in unterschiedlicher Lage (Projektionsfolie oder auch Applikationen) sind zweckmäßig.

Die Aufforderung, bereits bekannte Fakten über gleichschenklige Dreiecke zu nennen, führt im Regelfall zur Axialsymmetrie. In diesem Zusammenhang ist dann „Winkelhalbierende" einzuführen, ggf. unterstützt von der Projektionsfolie „Abbildung durch Spiegelung II". Auch hier empfiehlt sich eine kurze Phase der Festigung (Auftrag D 33).

Formulierung und Anwendung des Basiswinkelsatzes . . . Beim Basiswinkelsatz ist eigentlich nur ein von der Axialsymmetrie her bekannter Sachverhalt in neuer Form auszusprechen. Dabei sollten die Schüler nicht nur zu einer der Lehrbuchfassung (Satz D 13) ähnlichen Formulierung veranlaßt werden, sondern auch zum Gebrauch von „einander kongruent", vor allem wegen der Frage nach der Bewegung, die einen Basiswinkel auf den anderen abbildet.

Für die Festigung des Satzes ist neben der Bearbeitung einiger Aufgaben vor allem Auftrag D 34 wichtig. Hier ist auch das Entwerfen eines „Satzbaums" möglich.

Kontrollaufgabe
Aufg. 3a und c

Seiten-Winkel-Beziehungen (2 Std.)

LE 12 (LB 156 bis 157)

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß in jedem Dreieck der größeren von zwei Seiten der größere Winkel gegenüberliegt und umgekehrt; sie können demgemäß vorgegebene Winkel und Seiten einander zuordnen,
- kennen den Begriff „Lot", wissen, was der Abstand eines Punktes von einer Geraden ist und können solche Abstände ermitteln,
- haben ihre Fähigkeiten im Begründen (Beweisen) und Finden von Zusammenhängen weiterentwickelt.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeiten der Seiten-Winkel-Beziehung und Erstfestigen

2. Stunde
- Einführen der Begriffe „Lot" und „Abstand eines Punktes von einer Geraden" einschließlich Erstfestigen
- Anwenden der Seiten-Winkel-Beziehung beim Gewinnen oder Begründen weiterer Aussagen

Methodische Hinweise

Erarbeiten der Seiten-Winkel-Beziehung . . . Am Anfang können tägliche Übungen zum Winkelsummensatz durchgeführt werden. In Anbetracht der Bedeutung dieses Satzes und der hier verfügbaren Zeit sollten sie etwas umfangreicher sein (vgl. Aufgaben für tägl. Übungen, S. 18, Aufg. 4a). Hierbei sind gleichschenklige Dreiecke mit einzubeziehen; die Wiederholung ihrer Eigenschaften ist dann organisch anzuschließen. Schreibt man dabei für den Basiswinkelsatz an der Tafel kurz „Wenn $a = b$, so $\alpha = \beta$“, so gelangt man unschwer zu „Wenn $a > b$, so $\alpha > \beta$“.

Ähnlich wie beim Winkelsummensatz sollten die Schüler keinesfalls ohne derartige Überlegungen zum Messen und Vergleichen an konkreten Dreiecken aufgefordert werden. Danach ist dies aber sinnvoll. Zeichnen eines unregelmäßigen Dreiecks, Messen der Winkel und anschließendes Vergleichen führt auf Satz D 14; Satz D 15 ergibt sich als Umkehrung. Läßt man an Dreiecken nach der Lochschablone die Untersuchung vornehmen, gelangt man zu der Vermutung von Satz D 14 und D 15 „im Komplex“.

Der bewußte Verzicht auf einen Beweis sollte kurz begründet werden (mit der relativen Kompliziertheit des Beweises, nicht mit der „Selbstverständlichkeit“ des Sachverhalts). Zur Erstfestigung eignen sich vor allem die Aufgaben 1 bis 3 (vorzugsweise SSA).

Zum **Einführen der Begriffe „Lot“ und „Abstand eines Punktes von einer Geraden“ . . .** ist Auftrag D 35 geeignet. Jedoch ist es zweckmäßig, wenn man bei Teil a nicht sofort die Aussage vorgibt, sondern zum Formulieren und Begründen möglichst präziser Aussagen über gleichschenklig rechtwinklige Dreiecke auffordert.

Gelangt man über Auftragsteil b zu den beiden Begriffen, so kann eine Frage wie „Wie groß ist der Abstand des Hydranten vor unserem Schulgebäude von der Bordsteinkante?“ zur Erstfestigung führen. Sie ist aber auch – ggf. am Ende der vorangehenden Stunde gestellt – als Einstieg geeignet. Dann muß die Diskussion zu der Einsicht führen, daß es zunächst festzulegen gilt, was unter „Abstand ...“ zu verstehen ist. Die abschließend gewonnene Erkenntnis, daß die mathematische Festlegung dem „gesunden Menschenverstand“ entspricht, ist erzieherisch wertvoll. In anderem Sinne sind dies Erörterungen zum ordnungsgemäßen Überqueren von Fahrbahnen, die sich hier anbieten. Zur Festigung kann ferner (mittels Lochschablone oder Koordinatenangaben) eine Gerade g vorgegeben werden sowie Punkte, deren Abstände von g zu ermitteln sind.

Für weiteres **Anwenden der Seiten-Winkel-Beziehung . . .** ist vor allem Aufgabe 4 (SSA) geeignet. Hier werden viele Schüler übersehen, daß der gegebene Winkel nicht näher charakterisiert ist. Beim Auswertungsgespräch ist dies auch in erzieherischem Sinne zu nutzen (sorgfältig die Bedingungen beachten, nicht oberflächlich arbeiten, nichts „hineinlesen“); eine vollständige Lösung unter Beachtung aller drei Fälle ist nachzuholen.

Bei Aufgabe 6 geht es um die Umkehrung des Basiswinkelsatzes. Hier wird – verständlicherweise – kein Beweis gefordert. Man sollte aber eine (indirekter Beweisführung entsprechende) Argumentation herausfordern durch Fragen wie: „Warum kann bei $\alpha = \beta$ nicht $a > b$ ($a < b$) gelten? Was würde nämlich $a > b$ ($a < b$) zur Folge haben?“

Kontrollaufgabe

1. In einem Dreieck ABC sei $a > b > c$ und $\beta = 50°$. Welche Größen sind für die Winkel α und γ möglich? Begründe!
a) $\alpha = 100°$, $\gamma = 40°$ **b)** $\alpha = 40°$, $\gamma = 90°$ **c)** $\alpha = 110°$, $\gamma = 20°$
d) $\alpha = 65°$, $\gamma = 35°$ **e)** $\alpha = 85°$, $\gamma = 45°$

2. Zeichne mit Hilfe der Lochschablone die Punkte $A(3)$, $B(8)$, $C(17)$! Ermittle den Abstand des Punktes C von der Geraden AB!

Dreiecksungleichung (1 Std.)

LE 13 (LB 158 bis 159)

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß in jedem Dreieck jede Seitenlänge kleiner als die Summe der Längen der anderen Seiten ist, und können daraufhin entscheiden, ob drei Längen als Seitenlängen ein und desselben Dreiecks in Betracht kommen oder nicht,
- haben den Zusammenhang dieses Sachverhalts mit ihnen vertrauten Vorgängen im täglichen Leben erkannt.

Schwerpunkte

- Erarbeiten der Dreiecksungleichung und Festigen
- Abschließende Zusammenfassung für den Stoffabschnitt 4.4.

Methodische Hinweise

Das **Erarbeiten der Dreiecksungleichung . . .** kann sich direkt an die Bearbeitung des Auftrags D 36 (SSA) anschließen. Man kann aber auch eine Wiederholung und die Besprechung der Hausaufgabe (z. B. Aufg. 9 aus LE 12) zum Anlaß motivierender Erörterungen über die Seitenlängen nehmen: Gilt vielleicht sogar bei $\alpha = 2\beta$ auch $a = 2b$ oder umgekehrt? Ein Gegenbeispiel zeigt leicht, daß das nicht zutrifft. Beim gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck müßte dann die Basis doppelt so lang wie die Schenkel sein, und damit ist man bei der Dreiecksungleichung. Auch bei einem solchen Zugang sollte jedoch der praktische Sachverhalt „kürzeste Verbindung zweier Punkte" nicht vergessen und vor allem erzieherisch genutzt werden („Rasenlatschen" oder schräges Überqueren der Fahrbahn, vgl. S. 190).

Nach der Formulierung der Dreiecksungleichung in Worten und mittels dreier Ungleichungen erfolgt die Erstfestigung an Aufgaben 1 und 2 (SSA). Bereits bei der Auswertung zu Aufgabe 1 ist zu erörtern, daß es genügt, zu überprüfen, ob die längste Seite kürzer als die anderen beiden zusammen ist. Anschließend kann erörtert werden, daß die Differenz der Längen zweier Seiten stets kleiner sein muß als die Länge der dritten.

In die **abschließende Zusammenfassung** ist die Darstellung im Lehrbuch mit einzubeziehen (LB 159), besonders im Hinblick darauf, daß der Basiswinkelsatz und dessen Umkehrung hier als Spezialfälle der Seiten-Winkel-Beziehungen erscheinen.

Kontrollaufgabe
In einem Dreieck ABC ist $a = 7$ cm und $b = 2$ cm. Ferner ist bekannt, daß der Zahlenwert für c (bei der Einheit cm) auch eine natürliche Zahl ist. Gib (alle) Zahlenwerte für c an, die in Betracht kommen!

Stoffabschnitt 4.5.

Kongruenz von Dreiecken (18 Std.)

Dieser Stoffabschnitt ist Kernstück des gesamten Stoffgebietes. In ihm geht es um die Etappen (4) und (5) des abbildungsgeometrischen Vorgehens (siehe S. 153) und die fachspezifischen Fähigkeiten des Beweisens und des Konstruierens. Abbildungsgeometrische Überlegungen führen vom Begriff „einander entsprechende Stücke" über „Übereinstimmen in allen (so und soviel) Stücken" schließlich zur Formulierung von Satz D 17. Mit diesem Satz ist aber nur die Kongruenz von Dreiecken auszuschließen; es kann nicht auf Kongruenz geschlossen werden. Dazu ist die Umkehrung dieses Satzes nötig bzw. die Kongruenzsätze (die sämtlich als Verschärfungen dieser Umkehrung anzusehen sind).

Die Behandlung dieser Kongruenzsätze wird im Lehrbuch von der Fragestellung aus motiviert, in welchen Fällen bei drei gegebenen Stücken Dreiecke eindeutig konstruiert werden können. Dabei muß eingangs der Begriff der „(eindeutigen) Konstruierbarkeit" präzisiert werden.

Es ist auch möglich, über Erörterungen zur Umkehrung von Satz D 17 zu den Kongruenzsätzen zu gelangen: Der Nachweis der Kongruenz zweier Dreiecke auf diesem Wege würde die Untersuchung von 6 Stücken in jedem Dreieck bedeuten. Der Satz von der Innenwinkelsumme führt sofort zu einer Reduzierung auf 5 Stücke, und das Anliegen besteht nun darin, die Untersuchung auf Kongruenz noch weiter – so weit wie möglich – zu vereinfachen.

Am günstigsten ist es, wenn der Lehrer sich zwar insgesamt dem Weg des Lehrbuches anschließt, jedoch den anderen Motivierungsgedanken im Unterricht möglichst weitgehend mit anklingen läßt.

Wie beim Beweisen stehen auch beim Konstruieren Fragen der sprachlich-logischen Erziehung im Mittelpunkt der Aufmerksamkeit, in erster Linie im Zusammenhang mit dem Entwickeln des Lösungsplans und dem Beschreiben der Konstruktion. Hier ist außerdem ein wesentlicher Beitrag zur Ausbildung wertvoller Arbeitsweisen (Sauberkeit, Genauigkeit) zu leisten.

Ausführbarkeit von Konstruktionen (1 Std.)

LE 14 (LB 159 bis 161)

Wählt der Lehrer – evtl. zusätzlich – die Motivierung der Kongruenzsätze von dem Streben nach Untersuchung möglichst weniger Stücke her, so kann diese Unterrichtseinheit auch nach der nächsten oder zwischen deren erster und zweiter Stunde eingefügt werden.

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß für das Konstruieren unterschiedliche Hilfsmittel benutzt werden,
- wissen, wann man eine Konstruktion (eindeutig) ausführbar nennt,
- können in einfachen Fällen richtige Entscheidungen über die (eindeutige) Konstruierbarkeit treffen und selbst einfache Konstruktionen ausführen,

– wissen, daß Konstruktionen von Dreiecken mit zwei (oder weniger) gegebenen Stücken nicht eindeutig ausführbar sind,
– haben eingesehen, daß die Frage nach der eindeutigen Ausführbarkeit einer Konstruktion für praktische Belange wichtig und auch innermathematisch von Interesse ist.

Schwerpunkte

– Motivierung: Bedeutsamkeit der Kongruenz von Figuren, die aufgrund gegebener Stücke konstruiert werden
– Einführen des Begriffs der eindeutigen Ausführbarkeit einer Konstruktion und Festigen
– Gewinnen der Einsicht in die nicht eindeutige Konstruierbarkeit von Dreiecken bei zwei gegebenen Stücken

Methodische Hinweise

Zur **Motivierung** können bereits hier Betrachtungen angestellt werden, wie sie zu Beginn von LE 15 angedeutet sind. Dabei sollte nach Möglichkeit von einem den Schülern aus unmittelbarer Anschauung vertrauten Sachverhalt ausgegangen werden (Bauvorhaben in Schulnähe, konkrete Aufgabe aus dem Werkunterricht).

Bei der Vereinbarung über die Hilfsmittel, die beim Konstruieren benutzt werden dürfen, ist eine historische Bemerkung über die auf die antike griechische Mathematik zurückgehende Beschränkung auf Lineal (ohne Maßteilung!) und Zirkel zu empfehlen. Erörterungen darüber, wann von „Zeichnen" und wann von „Konstruieren" zu sprechen ist, sollten unterbleiben; meist wird man beides sagen können (vgl. [22]).

Für das **Einführen des Begriffs der eindeutigen Ausführbarkeit einer Konstruktion ...** bietet sich Auftrag D 37 an.

Hinweis: Für den Schüler ist Konstruieren immer ein praktischer Vorgang mit einer von der Qualität der Instrumente und dem mehr oder minder sachkundigen Umgang mit diesen abhängigen Genauigkeit. Für „ideales" Konstruieren mit theoretisch unbegrenzter Genauigkeit und eingeschränkten Hilfsmitteln und damit zusammenhängenden Anliegen eines axiomatisch-deduktiven Aufbaus in konstruktivem Gewande wie in der antiken Mathematik ist kein Verständnis zu erwarten. Deshalb ist auch für Schüler die Nichtausführbarkeit einer Konstruktion in erster Linie eine Frage widersprüchlicher Bedingungen und wird nicht in Abhängigkeit von den zugelassenen Konstruktionsmitteln gesehen. Dieser – wenn auch etwas zu engen – Vorstellung muß der Lehrer Rechnung tragen und sie erst später allmählich ergänzen.

Bei der anschließenden Behandlung des Beispiels D 4 sollte der Lehrer zunächst jeden Schüler selbständig ein solches Dreieck zeichnen lassen, Hilfen dafür so gering wie möglich halten und nur im Notfall im Unterrichtsgespräch an der Tafel unter Zuhilfenahme einer Skizze den einzuschlagenden Weg erläutern. Besonderer Wert ist bereits hier auf eine ordnungsgemäße Konstruktionsbeschreibung zu legen. Erst nachdem die konstruierten Dreiecke miteinander verglichen worden sind (z. B. zwischen nebeneinandersitzenden Schülern), erfolgt ein „Ineinanderlegen" mehrerer Dreiecke (LB-Bild D 81), das zur Indizierung veranlaßt.

Zur *Festigung* sollten für die Teilaufgaben von Aufgabe 1 zumindest Überlegungen zur (eindeutigen) Konstruierbarkeit angestellt werden, auch wenn auf die Ausführung der Konstruktionen (soweit sie überhaupt ausführbar sind) schon aus Zeitgründen verzichtet werden muß.

Das Gewinnen der Einsicht in die nicht eindeutige Konstruierbarkeit von Dreiecken bei zwei gegebenen Stücken kann durch das Bearbeiten von (wenigstens zwei) Teilaufgaben der Aufgabe 2 (SSA, ggf. differenziert) vorbereitet werden. Erörterungen anhand des LB-Bildes D 82 (Auftrag D 38) bzw. einer entsprechenden Tafelzeichnung oder Folie sind anzuschließen. Zu empfehlen ist,
- bereits hier Sprechweisen wie „eine Seite und ein ihr anliegender Winkel" zu benutzen;
- die Erkenntnis auch in der Form „Zwei Dreiecke, die in zwei Stücken übereinstimmen, brauchen nicht kongruent zu sein" aussprechen zu lassen;
- den Fall „Dreieck, von dem ein Stück gegeben ist" nicht völlig zu ignorieren.

Damit wird auch das Anknüpfen an diese Erörterungen zu Beginn der übernächsten Unterrichtseinheit erleichtert.

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 1b, d, e **2.** Aufg. 3

Eigenschaften zueinander kongruenter Dreiecke (2 Std.)

LE 15 (LB 161 bis 163)

Ziele

Die Schüler
- wissen, welche (Eck-) Punkte, Seiten und Winkel von einander kongruenten Dreiecken (und auch anderen einander kongruenten Figuren) man als einander zugeordnete oder einander entsprechende Punkte, Seiten und Winkel bezeichnet,
- wissen, daß bei einander kongruenten Figuren jede der beiden als Original bzw. als Bild bei einer Bewegung aufgefaßt werden kann,
- kennen die Bedeutung der Sprechweise „in (allen bzw. gewissen) Stücken übereinstimmen" und wissen, daß die Kongruenz zweier Dreiecke die Übereinstimmung in allen Stücken zur Folge hat,
- können mit dieser Tatsache begründen, daß zwei Dreiecke nicht einander kongruent sind.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeiten und Festigen von „einander entsprechen" bei Punkten, Seiten, Winkeln einander kongruenter Dreiecke
- Erarbeiten des Satzes D 17 von der Übereinstimmung kongruenter Dreiecke in allen Stücken

2. Stunde
- Festigen des Satzes D 17

Methodische Hinweise

Zum **Erarbeiten und Festigen von „einander entsprechen" . . .** sollte auf der Grundlage der ausdrücklich vorausgesetzten Kongruenz zweier Dreiecke (auf der Tafel oder auf Projektionsfolie gezeichnet) im Unterrichtsgespräch das Aufstellen einer Zuordnungstabelle für die Eckpunkte (LB 161) dienen. Damit dies zweifelsfrei möglich ist, sind die Dreiecke „stark unregelmäßig" zu wählen. Als Begründungen (Auftrag D 39, erster Teil) kommen Aussagen in Betracht wie „Im Dreieck ABC ist der Winkel bei A stumpf, im Dreieck DEF der Winkel bei F. Da bei jeder Bewegung Winkel als Bilder Winkel gleicher Größe haben, muß der Punkt A den Punkt F als Bild haben". (Man beachte, daß bei derartigen Untersuchungen keinesfalls durch die Benennung der Eckpunkte, etwa mit A, B, C und A', B', C' die Zuordnung impliziert werden darf!)

Der Rest des Auftrags D 39 (SSA) führt zum Begriff „einander zugeordnet" bzw. „einander entsprechend". Durch Auftrag D 40 (ebenfalls möglichst in SSA) soll den Schülern die auch in der Sprechweise zum Ausdruck kommende Symmetrie bewußt werden.

Zur Erstfestigung (auch als Hausaufgabe) ist Aufgabe 1 geeignet.

Hinweis: Beim Aufgabenteil b beachte man – ebenso wie bei der letzten Frage im Auftrag D 39 –, daß es stets unendlich viele Möglichkeiten gibt, eine – als Menge geordneter Paare von Punkten eindeutig bestimmte – Bewegung aus Elementarbewegungen durch Nacheinanderausführen zu erzeugen, auch wenn dafür meist ein oder zwei besonders einfache Zusammensetzungen am nächsten liegen. Bei Aufgabe 1 b läßt sich sogar sagen, daß eine der beiden Bewegungen, nach denen hier gefragt ist, eine Verschiebung ist, die andere eine Spiegelung.

Erarbeiten und Festigen von „einander entsprechen„ . . . Bei der *Erarbeitung des Satzes D 17* sollte auch den Schülern deutlich werden, daß die in diesem Zusammenhang einzuführende Redeweise des „Übereinstimmens in (allen) Stücken" vor allem einer einfachen und dennoch exakten Formulierung dient.

Hinweis: Dieses „Übereinstimmen" darf nicht etwa sofort aus den vorher aufgestellten Tabellen „gefolgert" werden – die Betrachtung zur Kongruenz dieser Stücke muß zwischengeschaltet werden!

Zur Erstfestigung ist Aufgabe 2 geeignet (SSA); dabei sind die Stücke im Buch zu messen.

Die weitere *Festigung des Satzes D 17* kann vor allem beim Nachweis, daß zwei Dreiecke *nicht* einander kongruent sind, erfolgen. Dabei wird eigentlich mit der logisch äquivalenten „Kontraposition" gearbeitet. Geeignet ist Beispiel D 5 (UG).

Wegen der erheblichen Anforderungen an die Schüler sollte man die zweite Stunde der Unterrichtseinheit mit Aufgaben wie Aufgabe 5 und 6 (SSA) beginnen und die Auswertung mit einer Wiederholung des Satzes D 17 verbinden. Hier kann auch die Umkehrung von Satz D 17 formuliert werden. Auf ihre Wahrheit muß der Lehrer ebenso hinweisen wie auf den vorläufigen Verzicht auf einen Beweis. Später nach der Behandlung des ersten Kongruenzsatzes sollte aber den Schülern verdeutlicht werden, daß damit auch die Umkehrung von Satz D 17 bewiesen ist.

Die Bearbeitung von Aufgabe 3 sollte mündlich erfolgen. Bei den Begründungen ist die Seiten-Winkel-Beziehung nicht zu vergessen.

Kontrollaufgaben

1. Aufg. 5

2. Zeichne mit Hilfe der Lochschablone ein Dreieck ABC mit $A(6)$, $B(17)$, $C(18)$. Von einem Dreieck PQR ist bekannt, daß es zum Dreieck ABC kongruent ist, $\overline{PQ}$ seine längste und $\overline{PR}$ seine kürzeste Seite sind. Gib die Längen aller Seiten und die Größen aller Winkel von $\triangle\ PQR$ an!

Der Kongruenzsatz (sws) (2 Std.)

LE 16 (LB 163 bis 165)

In dieser Unterrichtseinheit lernen die Schüler den ersten der vier Kongruenzsätze kennen. Die abbildungsgeometrische Beweisführung verlangt Sorgfalt und Behutsamkeit, weil nicht alle benötigten Fakten ausformuliert zur Verfügung stehen und die Gedankengänge den Schülern recht ungewohnt sind.

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß Dreieckskonstruktionen bei drei gegebenen Stücken nur eindeutig ausführbar sein können, wenn unter diesen Stücken mindestens eine Seite ist,
- wissen, daß aus der Übereinstimmung zweier Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die Kongruenz dieser Dreiecke folgt, können den Kongruenzsatz (sws) formulieren und haben seinen Beweis verstanden,
- können Dreiecke, von denen zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, konstruieren und ihre Konstruktion beschreiben; sie kennen den Zusammenhang zwischen der eindeutigen Ausführbarkeit dieser Konstruktion und dem Kongruenzsatz (sws),
- haben (wiederum) eingesehen, daß Genauigkeit und Sorgfalt beim Konstruieren nötig sind und bemühen sich dementsprechend.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Zusammenstellen der verschiedenen Möglichkeiten, drei Stücke eines Dreiecks vorzugeben
- Konstruktion eines Dreiecks mit zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel

2. Stunde
- Erarbeiten des Kongruenzsatzes (sws) mit Beweis
- Festigen des Kongruenzsatzes (sws) durch weitere Dreieckskonstruktionen

Methodische Hinweise

Das **Zusammenstellen der verschiedenen Möglichkeiten, drei Stücke eines Dreiecks vorzugeben**, dient der (längerfristigen) Zielorientierung. Bei ihrer Erarbeitung ist an das Ergebnis von Auftrag D 38 (vgl. S. 194) anzuknüpfen. Nach Erörterung zweier Möglichkeiten können die Schüler aufgefordert werden, nun selbständig alle Möglichkeiten zusammenzustellen, drei Stücke eines Dreiecks vorzugeben. Die Auswertung sollte sowohl zur Verabredung der einheitlichen Symbole (www) usw. führen als auch in einer Veranschaulichung der Fälle durch Skizzen (LB 163) münden. Günstig ist hierbei eine vorbereitete Projektionsfolie, auf der nur noch die gegebenen Stücke besonders hervorzuheben sind.

Abschließend ist zu erörtern, daß der Fall (www) eigentlich mit der zuvor angestellten Überlegung zu zwei Stücken bereits erledigt ist (Auftrag D 41). Von der Systematik her läge nun die Untersuchung des Falles (wsw) nahe. Daß stattdessen (sws) betrachtet wird, ist mit größerer Einfachheit zu begründen.

Die **Konstruktion eines Dreiecks mit zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel**[1]) soll der Hinführung zur Vermutung des Kongruenzsatzes (sws) dienen. Nebensächlich ist, ob man so wie im Beispiel D 6 die Stücke geometrisch vorgibt (etwa mittels Lochschablone) oder durch Größenangaben mit Zahlenwert und Einheit. Selbstverständlich sind im letzteren Fall die Stücke nicht etwa erst „hinzulegen" und dann mit Zirkel und Lineal zu „übertragen". Obwohl die Lösungsüberlegungen bei derartigen Konstruktionen sehr einfach sind und der Lehrtext im Beispiel D 6 als Muster eine Beschreibung der Konstruktion und nicht eine Planung des Konstruktionsweges enthält, ist im Unterricht zunächst das konstruktive Vorgehen sorgfältig zu planen und die Konstruktion nicht etwa als Befolgen einer algorithmischen Vorschrift zu gestalten. Hier müssen die Schüler auch auf die Bedeutung einer Planfigur hingewiesen werden. Auf die generelle Anfertigung einer solchen Figur, an der die Lösungsüberlegungen erfolgen, ist zu achten. Die Schüler sollten möglichst von vornherein dazu angehalten werden, die Planfigur frei, also ohne Benutzung eines Lineals, zu skizzieren. Jedoch ist auf saubere Ausführung zu achten und darauf, daß vorgegebene Größenverhältnisse nach Augenmaß eingehalten werden. Verschiedene Möglichkeiten, die Konstruktion zu beginnen, wird man i. allg. erst bei Konstruktionen erörtern, die zur Festigung am Ende der Unterrichtseinheit ausgeführt werden.

Das Ausführen der Konstruktion von jedem Schüler im Heft wird man zumindest bei dieser ersten Dreieckskonstruktion durch ein kommentiertes Konstruieren an der Tafel begleiten (lassen), auch um an passenden Stellen Hinweise zum genauen Arbeiten geben zu können. Eine weitere Konstruktionsaufgabe dieses Typs kann, um zum Kongruenzsatz (sws) zu gelangen, als Hausaufgabe (einschließlich Beschreibung) oder zu Beginn der zweiten Stunde dieser Unterrichtseinheit bearbeitet werden.

Erarbeiten des Kongruenzsatzes (sws) mit Beweis Der Kongruenzsatz (sws) bzw. die eindeutige Ausführbarkeit der Konstruktion wird von den meisten Schülern bereits aufgrund ihrer Überlegungen bei der Konstruktion vermutet. Dennoch ist es zweckmäßig, diese Vermutungen noch zu erhärten, um tiefere Einsichten zu erreichen. Dafür gibt es verschiedene (z. T. miteinander kombinierbare) Möglichkeiten:
- Der Lehrer fertigt für die Auswertung eine Schablone oder Überdeckfolie (Transparentpapier) an.
- Bei der Auswertung wird nach der Größe eines nicht gegebenen Stückes gefragt. Etwaige Abweichungen machen die Frage nach der Kongruenz „echter", motivieren einen allgemeinen Beweis und veranlassen zu Bemerkungen über Sorgfalt und Genauigkeit.
- Es sind von jedem Schüler zwei Dreiecke mit den gleichen Stücken zu konstruieren, von denen eins auszuschneiden ist. Diese Dreiecke können dem Schüler nicht nur beim Aufstellen einer Vermutung helfen, sondern später auch die Beweisüberlegungen veranschaulichen.

Nach der exakten Formulierung von Voraussetzung und Behauptung sollte der Anfangsgedanke für die Beweisfindung „Wenn die Dreiecke einander kongruent sind, dann muß es eine Bewegung geben, die das eine auf das andere abbildet" möglichst von den Schülern kommen. Die weiteren Überlegungen sind deshalb schwierig, weil es sich um einen Existenzbeweis handelt – einen Existenzbeweis unter so allgemeinen Voraussetzungen, daß er, anders als beim Stufenwinkelsatz, strenggenommen

[1] Hier sind – wie auch in den Kongruenzsätzen – mit „Seite" und „Winkel" natürlich Größen („Stücke") gemeint. Präziser, aber wesentlich umständlicher, könnte man sagen „... aufgrund der Längen zweier Seiten und der Größe des (von diesen Seiten) eingeschlossenen Winkels".

nicht durch die Angabe einer speziellen Bewegungsart geführt werden kann. Dennoch sollte man ihn den Schülern durch Bezugnahme auf eine Konstellation wie im Bild 33 (Projektionsfolie) etwas erleichtern oder, indem mit Applikationen oder Folien durch den Lehrer und mit ausgeschnittenen Dreiecken durch die Schüler gearbeitet wird (vgl. [30], H. 9).

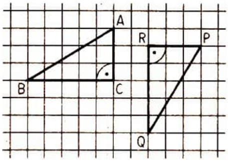


Bild 33

Bei der Beweisdarstellung, die keinesfalls zu früh erfolgen darf, muß auf eine solche spezielle Bewegung verzichtet werden. Anstelle des platzaufwendigen „wird abgebildet auf" kann an der Tafel ein Pfeil benutzt werden: $C \rightarrow R$, Strahl CA → Strahl RP usw.

Zur **Festigung des Kongruenzsatzes (sws) durch weitere Dreieckskonstruktionen** ist aus Aufgabe 1 eine Auswahl zu treffen. Aufgabe 2 sollte wegen der geometrischen Vorgabe der Stücke und Aufgabe 3 wegen des Praxisbezuges nicht fehlen. Ferner sollten verschiedene Konstruktionsmöglichkeiten zur Sprache kommen, auf die Aufgabe 4 ausdrücklich hinweist.

Kontrollaufgabe
Aufg. 1b (mit Konstruktionsbeschreibung und Begründung der eindeutigen Ausführbarkeit)

Weitere Kongruenzsätze (4 Std.)

LE 17 (LB 166 bis 169)

In dieser Unterrichtseinheit werden drei Kongruenzsätze einschließlich der „zugehörigen" Konstruktionen behandelt, i. allg. ohne Beweis. Allenfalls ist ein Beweis für (wsw) möglich (als Festigung für den Beweis zu (sws)). Um Eintönigkeit zu vermeiden, sollte man nicht an alle Kongruenzsätze gleichartig herangehen, sondern auch einmal mit dem Satz und nicht mit der Konstruktion beginnen.

Ziele

Die Schüler
- können die Kongruenzsätze (wsw), (sss), (sSW) formulieren und mit ihnen die Kongruenz von Dreiecken begründen,
- wissen, daß Dreiecke aufgrund vorgegebener Stücke, deren Auswahl den Kongruenzsätzen entspricht, eindeutig konstruierbar sind, daß diese Konstruktionen jedoch unterschiedlich ausgeführt werden können,
- wissen, daß bei zwei Seiten und dem der kleineren Seite gegenüberliegenden Winkel i. allg. keine eindeutige Konstruierbarkeit vorliegt und daß bei zwei Winkeln und der einem Winkel gegenüberliegenden Seite der Satz von der Innenwinkelsumme die Rückführung auf den Kongruenzsatz (wsw) ermöglicht,

- können Entscheidungen über die eindeutige Konstruierbarkeit von Dreiecken fällen, ohne die Konstruktion auszuführen,
- können Dreieckskonstruktionen sauber und genau ausführen, einwandfrei beschreiben und ihre eindeutige oder nicht eindeutige Ausführbarkeit begründen.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Konstruktion eines Dreiecks, von dem eine Seite und zwei Winkel gegeben sind und Erarbeiten des Kongruenzsatzes (wsw)
- Behandlung des Falles (sww)

2. Stunde
- Mitteilen des Kongruenzsatzes (sss) und Konstruktion eines Dreiecks, von dem drei Seiten gegeben sind, als Festigung dieses Satzes

3. Stunde
- Konstruktion eines Dreiecks, von dem zwei Seiten und der einer dieser Seiten gegenüberliegende Winkel gegeben sind, und Erarbeiten des Kongruenzsatzes (sSW)

4. Stunde
- Komplexe Festigung der (vier) Kongruenzsätze

Methodische Hinweise

Konstruktion eines Dreiecks, von dem ... Vor der Konstruktion eines Dreiecks aufgrund einer gegebenen Seite und der dieser Seite anliegenden Winkel (wsw) sollte eine motivierende und zielorientierende Überlegung an der in der Unterrichtseinheit 16 erarbeiteten Übersicht (LB 163, LB-Bild D 91) erfolgen. Wie im Fall (sws) ist die Konstruktion zunächst anhand einer Planfigur zu durchdenken. Wegen der relativen Selbstverständlichkeit des Konstruktionsweges kann man aber die Schüler mit guter Aussicht auf Erfolg auffordern, dies selbständig zu tun. Ihre Überlegungen sollten in den Heften ihren Niederschlag finden, um Kontrolle und Hilfe zu ermöglichen; geschehen kann dies z. B. wie im Bild 34.

(1) $c = \overline{AB}$
(2) α antragen
(3) β antragen
(4) C als Schnittpunkt

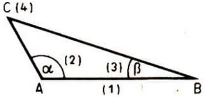


Bild 34

Nach der Auswertung ist die Konstruktion von jedem Schüler im Heft auszuführen. Die Konstruktionsbeschreibung wird man gemeinsam im Unterrichtsgespräch zusammentragen, das Ergebnis dann mit den Formulierungen im Beispiel D 7 vergleichen. Aus Gründen der Zeitersparnis liegt beim schriftlichen Fixieren der Konstruktionsbeschreibung das Weglassen der Bemerkungen nahe, daß α und β nach derselben Seite an $\overline{AB}$ angetragen werden müssen. Den Schülern muß aber klar sein, daß damit die Beschreibung nicht mehr ihrer Rolle als algorithmische Vorschrift, deren Befolgen mit Sicherheit zum geforderten Ergebnis führt, gerecht wird.

Abschließende Überlegungen zur eindeutigen Ausführbarkeit der Konstruktion führen auf den Kongruenzsatz (wsw). Einzubeziehen ist die Frage, wann denn überhaupt ein Dreieck mit derartigen Stücken konstruiert werden kann. Beim Kongruenzsatz (sws) lag eine solche Frage sehr fern. Auch bei (wsw) kann sie auf Unverständnis stoßen, wenn sie unvorbereitet gestellt wird. Deshalb sollte man evtl. zunächst so wie im Auftrag D 43b vorgehen oder (besser) die Schüler einfach zur Konstruktion eines solchen Dreiecks auffordern.

Die Behandlung des Falles (sww) kann mit dem Bearbeiten des Auftrags D 44a oder – etwas anspruchsvoller – dem Lösen einer entsprechenden Konstruktionsaufgabe (Aufg. 1b) beginnen.

Empfehlenswert ist selbständige Schülerarbeit, bei der Konstruktionsaufgabe zunächst vornehmlich das Entwerfen einer Planfigur. Deren Betrachten, ggf. verbunden mit dem Hinweis, mit Hilfe bekannter Sätze die Rückführung auf den bereits behandelten Fall zu versuchen, führt zu dem Vorschlag, den dritten Winkel nach dem Winkelsummensatz zu berechnen und dann wie bei (wsw) zu konstruieren. Weil dieser Vorschlag zu einer vernünftigen, rationellen Lösung führt, ist er uneingeschränkt anzuerkennen und keinesfalls durch die Bemerkung, eine „rein konstruktive Lösung" sei besser, abzuwerten.

Strebt man jedoch eine rein geometrische Lösung an, so wird man auf das Ausführen der Konstruktion an dieser Stelle verzichten und stattdessen die Frage aufwerfen, wie bei geometrischer Vorgabe der Stücke zu verfahren ist, wenn nicht gemessen werden soll. Dazu zeichnet man eine Strecke für die Seite a und zwei Winkel für α und β an die Tafel oder erteilt den Schülern die Aufgabe mit der Lochschablone.

Von den Schülern ist wohl nur der eine Vorschlag zu erwarten, den dritten Winkel (γ) als Nebenwinkel zu der durch Antragen eines Winkels an den anderen gebildeten „Summe" von α und β zu ermitteln. Er ist zwar zu akzeptieren, doch wird man deutlich machen, daß das Vorgehen umständlich ist und die vielen Lösungsschritte in der Praxis Ungenauigkeiten zur Folge haben. Zu einem besseren Weg (Antragen von α an einer beliebigen Stelle des Schenkels BA von β und nachfolgende Konstruktion einer Parallelen durch C) wird man dann wieder gemeinsam gelangen müssen. Haben alle Schüler den Konstruktionsweg verstanden, kann die Ausführung der Konstruktion als Hausaufgabe erteilt werden, dazu die Beschreibung als Entwurf, der bei der Hausaufgabenbesprechung korrigiert und in einwandfreier Form in die Hefte übernommen werden kann. Scheint dieses Vorgehen für die Klasse insgesamt als zu schwierig, so ist an differenzierte Aufgabenstellung zu denken (teilweise stattdessen Aufgabe 1a als Hausaufgabe). Abschließend wird zwar ein Kongruenzsatz (sww) formuliert werden (Auftrag D 44b), doch mit der Bemerkung, daß (und warum) er nicht eingeprägt zu werden braucht.

Mitteilen des Kongruenzsatzes (sss) ... Die Behandlung des Kongruenzsatzes (sss) kann mit seiner Formulierung beginnen, die sich direkt an die zielorientierende Überlegung zu den noch ausstehenden Fällen dreier gegebener Dreiecksstücke (LB 163 LB-Bild D 91) anschließt. Bei der darauffolgenden entsprechenden Dreieckskonstruktion tritt die Bestimmung eines Punktes als Schnitt zweier „Bestimmungslinien" besonders deutlich in Erscheinung. Diese im Hinblick auf mengentheoretische Durchdringung wichtigen Lösungsüberlegungen sind ausführlich im Unterrichtsgespräch zu entwickeln. Letztlich geht es hierbei um den Durchschnitt zweier Mengen, der in Klasse 9 (im Zusammenhang mit Gleichungssystemen) expliziter Unterrichtsgegenstand ist (vgl. [31]).

Konstruktion und Beschreibung sollten durch jeden Schüler selbständig erfolgen (ggf. als HA); sicher werden in der Auswertung noch erhebliche Korrekturen notwendig sein. Zur Beantwortung der im Auftrag D 45c gestellten Frage (Beachtung der Dreiecksungleichung) sollten die Schüler möglichst selbständig gelangen, ohne daß dafür – wie bei (wsw) – erst eine nicht ausführbare Konstruktion hinleitet. Ist dies jedoch nicht der Fall, so ist an dieser Stelle eine derartige Aufgabe zu stellen.

Konstruktion eines Dreiecks, von dem zwei Seiten ... Beim Kongruenzsatz (sSW) ist – unter Voranstellen einer Überlegung, die nun die Erledigung des allein noch verbleibenden Falles als Ziel klar ausweist – wieder der Beginn mit einer Konstruktionsaufgabe (Beispiel D 9, Auftrag D 46) zweckmäßig. Dabei ist deutlich zu machen, warum im Kongruenzsatz (sSW) ausdrücklich von dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel gesprochen werden muß (daher auch zwei Großbuchstaben im Kurzsymbol). Das kann durch die Betrachtung von LB-Bild D 101 (Auftrag D 47) geschehen, an die sich die Formulierung des Kongruenzsatzes (sSW) anschließt.

Zur Festigung bieten sich besonders Aufgabe 5a, b oder c, d an (ggf. in differenzierter Arbeit).

Für die **komplexe Festigung der (vier) Kongruenzsätze** muß genügend Zeit bleiben. Sie sollte nur zum kleineren Teil durch weitere Konstruktionen erfolgen, vielmehr vorwiegend durch Überlegungen zur eindeutigen Konstruierbarkeit ohne Ausführen einer Konstruktion bzw. den Versuch (Aufg. 4) und durch Begründungen zur Kongruenz bzw. Nicht-Kongruenz (Aufg. 5). Bei Aufgabe 4 wird man eine Auswahl treffen müssen, bei der möglichst verschiedene Fälle zu berücksichtigen sind:

	(wsw) bzw. (sww)	(sss)	(sSW)
ja	Aufg. b	Aufg. c	
nein	Aufg. a, d, h	Aufg. e, f	Auf. g

Teil g kann schon bearbeitet werden, bevor der Kongruenzsatz (sSW) bzw. die ihm entsprechende Konstruktion mit den anschließenden Erörterungen zum Gegenwinkel der kleineren Seite behandelt worden ist. Zur Entscheidung benötigt man nämlich nur die Seiten-Winkel-Beziehung und den Winkelsummensatz.

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 1d **2.** Aufg. 2b **3.** Aufg. 5d

Erste Anwendungen der Kongruenzsätze (2 Std.)

LE 18 (LB 170 bis 171)

Diese Unterrichtseinheit hat ausgeprägten Festigungscharakter, obwohl vier Sätze (Satz D 22 bis D 25) formuliert werden und es im Auftrag D 50 um einen weiteren Satz (Abstandseigenschaft der Parallelen) geht. Die Tatbestände sind jedoch durchweg den Schülern recht vertraut. Man sollte deshalb – schon aus erzieherischen Gründen – nicht so tun, als würden sie etwas ganz Neues kennenlernen. Sie sollten zu weitgehend selbständigen Begründungen mittels der Kongruenzsätze veranlaßt werden, aber ohne Bindung an eine aufwendige und strenge äußere Form. Auf diese Weise kann ein bedeutender Beitrag zur Realisierung der Leitlinie „Beweisen“ geleistet werden.

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß mit Hilfe der Kongruenzsätze geometrische Sätze begründet werden können; sie können anhand geeigneter Figuren derartige Begründungen geben,
- kennen charakterisierende Eigenschaften von Mittelsenkrechten, Parallelen und Winkelhalbierenden.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erste Anwendungen der Kongruenzsätze bei Begründungen, dabei Reaktivieren der Kenntnisse über Mittelsenkrechte

2. Stunde
- Bewußtmachen der Abstandseigenschaften von Parallelen mit Begründung
- Erarbeiten der Abstandseigenschaften von Winkelhalbierenden

Methodische Hinweise

Erste Anwendungen der Kongruenzsätze bei Begründungen ... Vor den ersten Anwendungen der Kongruenzsätze empfiehlt sich eine gezielte Sicherung des Ausgangsniveaus durch tägliche Übungen (z. B. S. 18, Aufg. 7). Ob dabei die Frage berührt wird, was man allgemein unter dem „Abstand zweier Punktmengen voneinander" verstehen könnte, muß von der Klassensituation her entschieden werden. Zumindest dürfte man zu der Feststellung gelangen, daß man bei zueinander nicht parallelen Geraden eigentlich nur vom „Abstand 0" reden kann (in der Ebene). Möglich ist hier auch die Erörterung unterschiedlicher „Abstände" in der Realität („Straßenentfernungen" oder „Entfernungen nach dem Eisenbahnnetz"; dabei braucht nicht einmal die Symmetrie erfüllt zu sein).

Danach empfiehlt sich die Bearbeitung des Auftrags D 48. Er ermöglicht einen organischen Übergang zur Betrachtung der Mittelsenkrechten (Satz D 22). Das Winkelantragen läßt sich mit dem Konstruieren von Bildpunkten bei Drehungen in Verbindung bringen, und die Axialsymmetrie bei Mittelsenkrechten gehört zur Spiegelung. Eine andere Möglichkeit der Anknüpfung bietet Aufgabe 2 oder ein ähnlicher realer Sachverhalt. Für das Zeichnen einer Mittelsenkrechten liegt die Nutzung der Maßeinteilung des Lineals und des rechten Winkels des Zeichendreiecks nahe. Man kann aber auch das bereits in Klasse 5 benutzte Verfahren, die Symmetrieachse (Spiegelgerade) für zwei Punkte zu konstruieren, anwenden, dieses Verfahren als „Grundkonstruktion" kennzeichnen und auch die übrigen Grundkonstruktionen erwähnen, auf die später zurückzukommen ist.

Die Begründung für Satz D 22 sollte möglichst jeder Schüler geben können (Auftrag D 49). Deshalb sollte der Lehrer zunächst auffordern, in einer Skizze im Übungsheft die Stücke der beiden Dreiecke zu kennzeichnen, deren Übereinstimmung von der Voraussetzung des Satzes her gesichert ist.

Die Schüler sollten auch erfassen, daß Satz D 23 den Satz D 22 umfaßt. Anstatt auf die Umkehrung von Satz D 22 wird im Lehrbuchtext allerdings auf deren Kontraposition verwiesen, weil die Einsicht, daß daraus Satz D 23 folgt, den meisten Schülern leichter fällt. Man beziehe hier noch ein oder zwei instruktive Beispiele in die Erörterungen mit ein (als mathematisches etwa: „P ist die Menge der Primzahlen" bedeutet nicht nur, daß jede Primzahl Element von P ist, sondern auch, daß jede Nicht-Primzahl nicht zu P gehört). Weiter sollte man aber auf diesen nicht einfachen Sachverhalt nicht eingehen, auch auf den Beweis für die Umkehrung von Satz D 22, der erst den Satz D 23 rechtfertigen würde, verzichten. Sollten aber Schüler fragen, so darf diese „Lücke" nicht geleugnet werden. Man kann auf eine Skizze (Bild 35) verweisen und einige Schüler anregen, dies zu einer ordnungsgemäßen Begründung „auszubauen", dabei evtl. noch auf die Dreiecksungleichung hinweisen.

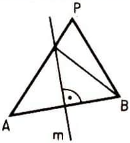


Bild 35

$\overline{PA} \neq \overline{PB}, \qquad (\overline{PA} > \overline{PB})$

Beim **Bewußtmachen der Abstandseigenschaften von Parallelen** ist eine ausführliche Beweisführung nicht erforderlich (Auftrag D 50a), weil der Sachverhalt den Schülern noch selbstverständlicher ist als bei der Mittelsenkrechten. Die Frage von Auftrag D 50b sollte nicht voreilig von einigen Schülern beantwortet werden. Vielmehr sollte man jeden Schüler eine Gerade zeichnen und dann – mit dem Abstand $d = 2$ cm – selbständig die zwei Geraden skizzieren lassen. Auch zur Formulierung der entsprechenden Aussagen sollten alle Schüler einen möglichst großen Beitrag leisten. Dabei ist die Aussage „Haben zwei Punkte einer Geraden h den gleichen Abstand von einer Geraden g und liegen sie auf derselben Seite von g, so haben auch alle anderen Punkte von h diesen Abstand von g, und g und h sind zueinander parallel" wichtig, die als Umkehrung des im Auftrag D 50a genannten Satzes aufzufassen ist. Diese Aussage kann man auch für den Nachweis der Parallelität von Geraden benutzen.

Für das **Erarbeiten der Abstandseigenschaft von Winkelhalbierenden** ist ein analoges Vorgehen wie bei der Mittelsenkrechten günstig. Die Eingangsmotivierung zu dieser Frage kann von einer Wiederholung der die Mittelsenkrechte betreffenden Aussagen her gestaltet werden (Bild eines Strahls bei Spiegelung an einer Geraden durch den Anfangspunkt des Strahls oder Axialsymmetrie des gleichschenkligen Dreiecks.

Beim Satz D 25 ist die Hinzufügung „des Winkels ABC" zu beachten, ohne die der Satz nicht richtig wäre.

Hinweis: Nicht nur der Punkt A hat von den Schenkeln s und t des Winkels α den Abstand 1 cm, sondern – gemäß der üblichen Definition des Abstandes eines Punktes von einer Punktmenge – auch alle Punkte des Kreisbogens k (Bild 36). Die Menge aller Punkte (der Ebene), die zu s und t den gleichen Abstand haben, ist nicht nur die Winkelhalbierende w_α, sondern darüber hinaus auch noch ein (berandeter) Teil der Ebene, der im Bild 37 durch Schraffur angedeutet ist. Deshalb muß man sich ausdrücklich auf Punkte des Winkels und außerdem auf nicht überstumpfe Winkel beschränken; letzteres geschieht „automatisch" durch die Symbolik $\sphericalangle ABC$. Jedoch sollte der Lehrer nur auf ausdrückliche Fragen der Schüler hin die Hinzufügung im Satz D 25 kommentieren. Aus diesen Gründen sollte aber auch mit der Lehrbuchformulierung begonnen und nicht erst versucht werden, von den Schülern eine zum Satz D 23 analoge selbständige Formulierung zu erhalten.

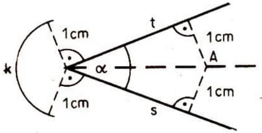


Bild 36

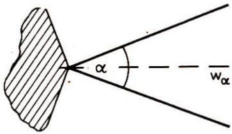


Bild 37

Im Interesse der Entwicklung räumlichen Vorstellungsvermögens sollte man bei der Behandlung der Mittelsenkrechten und Parallelen analoge Fragen für den Raum stellen. Auch eine – abschließende – Frage, welches die Menge aller Punkte ist, die von einem Punkt den gleichen Abstand d haben (in der Ebene und im Raum), ist durchaus nicht „verboten", weil die Definition des Kreises erst in Klasse 7 behandelt wird.

Aufgabe 3 sollte zur Vorbereitung für LE 20 als Hausaufgabe gestellt werden.

Kontrollaufgabe
Zeichne ein Dreieck ABC! Ermittle alle Punkte des Winkels ABC, die von seinen Schenkeln den gleichen Abstand und von der Geraden AC den Abstand 1 cm haben!

Geometrische Grundkonstruktionen (2 Std.)

LE 19 (LB 171 bis 174)

Bei der Ausführung der Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal geht es vorrangig um ein Anwenden der Kongruenzsätze, also um einen Beitrag zur Realisierung der Leitlinie „Beweisen". Es ist nicht etwa eine Grundlage zu schaffen für die Entwicklung von Konstruktionsfertigkeiten. Es wäre völlig falsch und würde dem Grundsatz der Praxis- und Lebensverbundenheit unserer Schule widersprechen, würde man jetzt bisher mit Parallelenlineal oder Zeichendreiecken praktizierte Zeichenverfahren diskriminieren und den Schülern einzureden versuchen, die Ausführung der Grundkonstruktion allein mit Zirkel und Lineal zeichne sich durch größere Genauigkeit aus. Selbst das Verwenden der Maßteilung auf Lineal oder Winkelmesser beim Halbieren von Strecken bzw. Winkeln steht ihm an Genauigkeit praktisch ja nicht nach.

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß die vier sogenannten Grundkonstruktionen allein mit Zirkel und Lineal ausgeführt werden können und daß das Vorgehen dabei sich mittels der Kongruenzsätze begründen läßt,
- können selbst solche Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal ausführen und sie einwandfrei beschreiben.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeiten und Festigen der Ausführung der Grundkonstruktionen „Halbieren einer Strecke" bzw. „Konstruktion der Mittelsenkrechten einer Strecke" mit Zirkel und Lineal

2. Stunde
- Erarbeiten und Festigen der weiteren Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal

Methodische Hinweise

Erarbeiten und Festigen der Ausführungen der Grundkonstruktionen ... Für die Grundkonstruktion „Halbieren einer Strecke" kann an die behandelte Mittelsenkrechte angeknüpft werden. In die Zielstellung sollten die anderen Grundkonstruktionen gleich mit einbezogen werden. Die Beschränkung auf Zirkel und Lineal (ohne Maßeinteilung) ist dabei besonders wichtig – nicht wegen damit angeblich zu erreichender Genauigkeit, sondern unter historischem Aspekt. Hier sind Bemerkungen zur Mathematik im antiken Griechenland am Platz, insbesondere zu EUKLID und seinen „Elementen", die weit über tausend Jahre lang als Muster mathematischer Strenge galten und die Auffassung von der Mathematik und besonders der Geometrie nachhaltig geprägt haben.

Gemeinsames Erarbeiten der Konstruktionsvorschrift ist nur anzustreben, wenn es in kürzester Zeit Erfolg verspricht – etwa aufgrund rechtzeitiger Reaktivierung der in Klasse 5 behandelten Symmetriekonstruktion (evtl. Nutzung der Projektionsfolie „Abbildung durch Spiegelung II"). Sonst sollte man hier den Schwerpunkt auf das Befolgen einer algorithmischen Vorschrift legen: Die Schüler haben also selbständig eine – z. B. mittels Lochschablone vorgegebene – Strecke mit Zirkel und Lineal zu halbieren, indem sie das Verfahren Schritt für Schritt anwenden. Im allgemeinen wird man es dafür zunächst einmal insgesamt erfassen lassen (anhand des Beispiels D 10 oder einer Projektionsfolie). Anschließend kann ein Schüler dann beim „Arbeiten in gleicher Front" das Vorgehen kommentieren. Danach ist zu begründen, daß das Verfahren wirklich den Mittelpunkt der Strecke liefert (UG).

Die Aufforderung, nach einer Möglichkeit zu suchen, wie man eine dicht am Rande des Zeichenblattes liegende Strecke ohne zu große Einbuße an Genauigkeit halbieren kann, leitet zur Bearbeitung des Auftrags D 52 über. Wichtig ist das Erkennen der typischen Figur (zwei gleichschenklige Dreiecke mit gemeinsamer Basis) als Orientierungsgrundlage für die weiteren Grundkonstruktionen. Zur Festigung ist eine Auswahl aus Aufgaben 1 bis 3 zu treffen.

Erarbeiten und Festigen der weiteren Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal Bei den weiteren Grundkonstruktionen kann man sich nun an den zwei gleichschenkligen Dreiecken orientieren. Dennoch wäre das Erarbeiten eines Konstruktionsweges für jeden Fall zu zeitaufwendig. Die Schüler müssen jedoch sehen, inwiefern allen Konstruktionen ein gemeinsamer Gedanke zugrundeliegt, und auch die Beziehungen zur Axialsymmetrie erfassen.

Zur Festigung ist eine Auswahl aus den Aufgaben 4 bis 7 zu behandeln. Da Fertigkeiten im Sinne ständig verfügbaren Grundkönnens bei der Ausführung der Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal nicht anzustreben sind, sollte man den Schülern stets die Orientierung an den Lehrbuchdarstellungen gestatten; zu kontrollieren ist aber sauberes und genaues Arbeiten. Spätere tägliche Übungen zu dieser Thematik sollten sich eher auf die hier auftretenden (Relations-) Begriffe (Mittelsenkrechte zu, Winkelhalbierende zu, ...) als auf Konstruktionsverfahren konzentrieren.

Kontrollaufgabe
Zeichne mit Hilfe der Lochschablone die Punkte $A(20)$, $B(21)$, $C(9)$, und verbinde sie durch Geraden!
Konstruiere die Winkelhalbierende w des Winkels BAC und die Mittelsenkrechte m der Strecke $\overline{BC}$! Bezeichne den Schnittpunkt von m und w mit S!
Hat S von AB oder von AC einen größeren Abstand? Begründe!

Besondere Linien in Dreiecken (2 Std.)

LE 20 (LB 174 bis 176)

Die Mittelsenkrechten von Dreiecken werden üblicherweise als Geraden verstanden; hingegen wird bei den Dreieckstransversalen, die durch einen Eckpunkt gehen, die betreffende Bezeichnung häufig für gewisse Strecken verwandt. Insbesondere wird bei den Höhen meist so verfahren, schon im Hinblick auf die Flächeninhaltsberechnung. Dies geschieht auch im Lehrbuch. Den Schülern sollte deutlich werden, daß es sich hier um eine Vereinbarung handelt.

Für das Finden der Schnittpunktsätze wird ein experimenteller Weg beschritten. Das sollte den Schülern ebenso bewußt werden wie die Notwendigkeit der Erkenntnissicherung.

Da die Zeit für diese Unterrichtseinheit etwas reichlich, die für die nächste etwas knapp bemessen scheint, ist mit den Dreieckskonstruktionen möglichst noch in der zweiten Stunde zu beginnen (LE 21, Beispiel D 11).

Ziele

Die Schüler
- kennen die Begriffe „Mittelsenkrechte", „Winkelhalbierende", „Seitenhalbierende" und „Höhe" eines Dreiecks und können diese Transversalen für beliebige Dreiecke konstruieren,
- wissen, daß in jedem Dreieck diese Transversalen (bzw. die durch sie bestimmten Geraden) einander jeweils in ein und demselben Punkt schneiden und daß bei Mittelsenkrechten und Höhen dieser Schnittpunkt auch auf einer Dreiecksseite oder außerhalb des Dreiecks liegen kann,
- haben die Beweise für das Schnittpunktverhalten bei Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden verstanden und können den wesentlichen Gedankengang erläutern.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeiten des Satzes vom Schnittpunkt der Mittelsenkrechten eines Dreiecks mit Beweis
- Erarbeiten des Satzes vom Schnittpunkt der Winkelhalbierenden eines Dreiecks mit Beweis
- Festigen der Sätze D 26 und D 27

2. Stunde
- Erarbeiten des Satzes über den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden eines Dreiecks
- Einführen des Begriffs „Höhe eines Dreiecks" und Erarbeiten des Satzes über den Höhen(geraden)schnittpunkt
- Festigen der Sätze

Methodische Hinweise

Erarbeiten des Satzes vom Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ... Die Betrachtung der Mittelsenkrechten von Dreiecken kann sich aus der Besprechung der als Hausaufgabe gelösten Aufgabe 3 von LE 18 ergeben, die gleichzeitig zum entsprechenden Satz führt. Wählt man wie im Lehrbuch zur Motivierung das gleichschenklige Dreieck als Ausgangspunkt, so kommt man durch Verallgemeinerung nicht nur zu den Begriffen „Mittelsenkrechte" und „Winkelhalbierende" für beliebige Dreiecke, sondern auch zu den Schnittpunktsätzen, weil dieser Sachverhalt bei gleichschenkligen Dreiecken unmittelbar einsichtig ist. In diesem Fall sollte die Erledigung des Auftrags D 54 gleich mit dem Ziel der Schnittpunktuntersuchung in Angriff genommen werden (SSA, ggf. differenziert).

Ob das **Erarbeiten des Satzes vom Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ...** auch mit einer Konstruktionsaufgabe analog Auftrag D 54 eingeleitet wird, hängt von der verfügbaren Zeit ab (hier wird man – anders als bei den anderen Transversalen – auf das Zeichenverfahren mit Zirkel und Lineal orientieren). Die Behandlung des Beweises für Satz D 26 sollte die Mehrzahl der Schüler befähigt haben, in analoger Weise bei den Winkelhalbierenden zu argumentieren. Dabei sollte der Lehrer nicht wie im Auftrag D 55 von vornherein auf dic Benutzung der Sätze D 24 und D 25 (letzterer allein würde genügen) hinweisen.

Für **das Festigen der Sätze D 26 und D 27** sind Aufgaben 1 und 2 geeignet; differenzierte Arbeit ist günstig. Im Zusammenhang mit Aufgabe 1 kann das Wort „Umkreis" genannt werden, und die Schüler können solche Kreise auch in ihr Heft zeichnen. Hingegen wird man bei Aufgabe 2 den Inkreis besser unerwähnt lassen. Deshalb ist auch bei der Folie „Dreieckstransversalen", die sich gut für eine vergleichende und systematisierende Zusammenfassung eignet, auf die Überdeckfolie 2 zu verzichten.

Auch das **Erarbeiten des Satzes über den Schnittpunkt der Seitenhalbieren eines Dreiecks** kann analog geschehen. Die Schüler werden zur Vermutung gewiß aufgrund eines simplen Analogieschlusses kommen. Der Verzicht auf einen Beweis ist ausdrücklich zu betonen und mit noch nicht verfügbaren Beweismitteln zu begründen. Wertvoll ist die Erledigung von Aufgabe 6 (HA), um die Bedeutung der Bezeichnung „Schwerpunkt" zu erfassen, auf deren Erwähnung man nicht verzichten sollte.

Einführen des Begriffs „Höhe eines Dreiecks" ... Zunächst ist der Begriff „Höhen eines Dreiecks" etwas ausführlicher zu klären. Da Schüler immer wieder versagen, wenn sie Höhen zu nicht horizontalen Seiten konstruieren sollen, ist es wichtig, unterschiedliche Lagen zu wählen. Bei der Einführung sollte man jedoch von der vertikalen Lage der Höhe ausgehen und damit die Namensgebung motivieren. Geeignet dafür ist ein Sachverhalt wie in Aufgabe 3 (Benutzung eines entsprechenden Körpermodells, nicht mit regelmäßiger Grundfläche). Danach kann Aufgabe 4 bearbeitet werden (SSA, ggf. differenziert). Auf einen Beweis wird verzichtet. Die Bearbeitung von Aufgabe 5* kann vermuten lassen, wie er geführt werden könnte.

Kontrollaufgabe
Zeichne mit der Lochschablone ein Dreieck ABC mit $A(2)$, $B(8)$ und $C(23)$! Konstruiere die Winkelhalbierende w_α, die Seitenhalbierende s_b und die Höhe h_c dieses Dreiecks!
Bezeichne den Schnittpunkt von s_b und w_α mit P!
Kann P Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC sein? Begründe!

Konstruktion von Dreiecken, bei denen eine Höhe gegeben ist (1 Std.)

LE 21 (LB 177)

In Frage kommen – bei Berücksichtigung der verfügbaren Hilfsmittel und Vermeidung von Überbestimmungen – fünf Typen von Aufgaben mit genau einer gegebenen Höhe(nlänge) und zwei weiteren Stücken:
(1) s_1, w_2, h_1 (2) s_1, s_2, h_1 (3) s_1, s_2, h_3 (4) s_1, w_2, h_2 (5) w_1, w_2, h_3
(w_i bedeute den der Seite s_i gegenüberliegenden Winkel, h_i die zugehörige Höhe, $i = 1, 2, 3$.) Nur bei (1) gibt es stets genau eine Lösung, bei (2) bis (4) sind beispielsweise auch (genau) zwei Lösungen möglich.

Hier sind jedoch keinesfalls algorithmische Vorschriften für derartige Klassen von Aufgaben zu entwickeln. Vielmehr sind immer Einzelaufgaben zu lösen, und das Hauptaugenmerk muß der Erarbeitung eines Konstruktionsweges gelten.

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß es verschiedene Möglichkeiten gibt, Dreiecke mit einer vorgegebenen Höhe zu konstruieren,
- können für derartige Aufgaben einen Konstruktionsweg finden, einwandfrei ausführen sowie ihr Vorgehen beschreiben; sie beachten die Frage der eindeutigen Konstruierbarkeit.

Schwerpunkte

- Konstruktion nach der Methode der Teildreiecke
- Konstruktion unter Verwendung von Parallelen

Methodische Hinweise

Für eine **Konstruktion nach der Methode der Teildreiecke** sollte man zuerst eine Aufgabe wie im Beispiel D 11 wählen, bei der dieses Verfahren wegen der eindeutigen Konstruierbarkeit unproblematisch ist. Eine Planfigur sollte jeder Schüler selbständig zeichnen (evtl. ein Schüler gleichzeitig an verdeckter Tafel). Wird nach Kennzeichnen eines rechten Winkels am Höhenfußpunkt in der Planfigur kein brauchbarer Konstruktionsvorschlag gemacht, ist nach einem Teildreieck zu fragen, das man bequem konstruieren kann. Der Konstruktionsplan wird gemeinsam besprochen, anschließend die Konstruktion von jedem Schüler im Heft ausgeführt (gleichzeitige Arbeit an der Tafel, unterschiedliche Schüler für einzelne Schritte).

Jeder Schritt sollte gleich sprachlich einwandfrei kommentiert werden (ohne schriftliches Fixieren). In einer abschließenden Zusammenfassung wird das grundsätzliche Vorgehen („Teildreieck“) noch einmal hervorgehoben. Die eindeutige Konstruierbarkeit diskutiert man zweckmäßiger erst nach der Behandlung der nächsten Aufgabe.

Zur **Konstruktion unter Verwendung von Parallelen** kann eine Aufgabe führen, bei der es zwei Lösungen gibt (wie Beispiel D 12, evtl. mit Vorgaben nach Lochschablone). Planfigur und Lösungsplan sollten die Schüler selbständig entwerfen. Dabei werden die meisten die zweite Lösung übersehen und die Frage nach der eindeutigen Konstruierbarkeit bejahen. Dies veranlaßt zur Suche nach einem anderen Vorgehen, bei dem Lösungen nicht so leicht übersehen werden können. Ausführung und Beschreibung der Konstruktion können sich anschließen. Verwendet man die Projektionsfolienreihe „Dreieckskonstruktionen", die – so wie die Beispiele D 11 und D 12 – die Typen (1) und (2) berücksichtigt, so ist zu beachten:

- Die Aufgabenstellung erfolgt allgemein, ohne konkrete Größenvorgaben.
- Auch beim Typ (1) wird nicht mit Teildreiecken gearbeitet.
- Beim Fall (2) enthält die Folie nur eine der beiden Lösungen (nach der Aufgabenstellung „Konstruiere *ein* Dreieck ..." gerechtfertigt).

Für die Festigung (HA) ist eine Auswahl aus Aufgabe 1 zu treffen. Dabei ist eine differenzierte Aufgabenstellung sinnvoll (a und b, c und d, e und f sind jeweils „Parallelaufgaben"; c und d erfassen den bisher noch nicht behandelten Typ (3)).

Kontrollaufgabe
Konstruiere ein Dreieck ABC mit $a = 7{,}3$ cm, $\beta = 37°$ und $h_b = 4{,}2$ cm! Ist die Konstruktion eindeutig ausführbar?

Stoffabschnitt 4.6.

Vierecke und Vielecke **(13 Std.)**

Dieser Stoffabschnitt hat vor allem drei Aufgaben:
(1) Es gilt das bereits in der Unterstufe über einige Vierecksarten (Rechteck, Quadrat, Parallelogramm, Trapez) erworbene Wissen und Können zu reaktivieren und zu vertiefen. Dabei sollen die Schüler Zusammenhänge zwischen Eigenschaften von Vierecken erkennen und erfahren, daß das bisher im Stoffgebiet *Planimetrie* Behandelte (insbesondere die Kongruenzsätze für Dreiecke) Mittel für das Erfassen und den Nachweis derartiger Zusammenhänge bietet.
(2) Die Schüler sollen neue Erkenntnisse über Vierecke gewinnen, dabei neue Vierecksarten (Drachenviereck, Rhombus) und „Vieleck" als Oberbegriff für die bereits bekannten Dreiecke, Vierecke usw. kennenlernen.
(3) Vorrangig geht es ferner um die Entwicklung fachspezifischer Fähigkeiten wie der des Definierens, des Beweisens, des Konstruierens sowie um die Ausbildung allgemein-geistiger Fähigkeiten. Eine besondere Rolle spielt dabei das Systematisieren.

Vielecke **(2 Std.)**

LE 22 (LB 178 bis 181)

Mit der Einführung von „Vieleck" (im Sinne von „einfaches Vieleck") lernt der Schüler einen Oberbegriff für eine ganze Reihe ihm längst vertrauter Figuren kennen. Hierdurch wird insbesondere die Erörterung des Themas „Flächeninhalte" von Vielecken" erleichtert.

Es wird keine explizite Definition des Begriffs „Vieleck" angestrebt, weil der Begriff einerseits anschaulich leicht erfaßbar ist, andererseits eine präzise Definition recht kompliziert ist.

Ziele

Die Schüler
- können Vielecke sicher identifizieren sowie Vielecke mit vorgegebenen Eckenanzahlen realisieren,
- wissen, was Ecken, Seiten, Diagonalen und Innenwinkel eines Vielecks sind,
- unterscheiden konvexe und nichtkonvexe Vielecke,
- haben erfaßt, daß „Vieleck" in unterschiedlicher Bedeutung (für „Vielecklinie" bzw. „Vieleckfläche") verwandt wird, falls die Bedeutung aus dem Zusammenhang hervorgeht.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Einführung der Begriffe „Vieleck", „Eckpunkt" und „Seite" eines Vielecks, dabei Erläuterung der unterschiedlichen Verwendung von „Vieleck"

2. Stunde
- Erarbeitung der Begriffe „Diagonale" und „Innenwinkel" eines Vielecks und der Einteilung der Vielecke in konvexe und nichtkonvexe

Methodische Hinweise

Für die **Einführung des Begriffs „Vieleck" ...** und damit zusammenhängender Begriffe kann als Einstieg die Betrachtung von bereits bekannten Dreiecken, Vierecken und anderen Vielecken dienen (Vorgaben mittels Folie, Heranziehen von Polyedermodellen). Bei anschließenden einfachen Identifizierungsübungen (genügend Gegenbeispiele einbeziehen!) sollten ebenfalls Körpermodelle verwendet werden.

Für Realisierungsübungen (SSA) sind an zu zeichnende Vielecke einfache zusätzliche Bedingungen zu stellen (Sechseck, bei dem zwei benachbarte Seiten gleich lang sind, aufeinander senkrecht stehen). Dabei gleichzeitig an der (verdeckten) Tafel von Schülern angefertigte Zeichnungen können anschließend auch für die Erläuterung der unterschiedlichen Verwendung von „Vieleck" (Vielecklinie, Vieleckfläche) genutzt werden.[1])

Die **Erarbeitung der Begriffe „Diagonale" und „Innenwinkel" eines Vielecks ...** kann anhand eines (evtl. von einem Schüler bei täglichen Übungen) an die Tafel gezeichneten Vielecks geschehen. Vorgaben mittels Lochschablone machen Messungen von Diagonalen(längen) und Innenwinkel(größen) vergleichbar und gestatten das Eingehen auf erzieherisch wichtige Fragen der Sorgfalt und Genauigkeit. An derartigen Zeichnungen und an Figuren, die mittels des Polylux projiziert werden, können dann auch die Begriffe „konvex" und „nichtkonvex" geklärt werden. Die Festigung kann mit Auftrag D 59 beginnen.

---

[1] „Vieleckfläche" wird hierbei rein anschaulich erläutert; ein anderes Vorgehen ist für den Schulunterricht auch schwer vorstellbar. Bemerkungen dazu bzw. mögliche Festlegungen sind z. B. in [B2], S. 34 zu finden.

Kontrollaufgabe
Aufg. 4

Vierecke – ihre Diagonalen und Innenwinkel (3 Std.)

LE 23 (LB 181 bis 183)

In dieser Unterrichtseinheit steht die Fähigkeitsentwicklung und allgemeine Denkschulung im Vordergrund. Vieruckskonstruktionen sind als Problembearbeitungsprozeß zu gestalten. Keinesfalls sind Konstruktionsaufgaben nach einer mehr oder weniger deutlich herausgestellten algorithmischen Vorschrift oder in enger Anlehnung an genauso strukturierte Muster zu erledigen – auch wenn anders verhältnismäßig wenige Aufgaben bewältigt werden. Beim Herleiten bzw. Finden und Beweisen des Satzes von der Innenwinkelsumme muß ebenfalls ein größerer eigenständiger Beitrag der Schüler angestrebt werden.

Ziele

Die Schüler
- kennen die übliche Bezeichnungsweise für Vierecke und ihre Stücke sowie die Relationen „einander benachbart" und „einander gegenüberliegend" für Seiten bzw. Winkel,
- wissen, daß ein „Viereck aus vier Seiten" (im Gegensatz zum „Dreieck aus drei Seiten") eine instabile Figur ist und haben die technische Bedeutsamkeit dieses Umstandes erfaßt,
- haben ihr Können im Konstruieren vervollkommnet, ihr konstruktives Denken weiterentwickelt und sind daran gewöhnt, sauber und genau zu arbeiten,
- wissen, daß die Summe der Innenwinkel(größen) jedes Vierecks 360° beträgt; haben bei der Behandlung dieses Satzes ihre Beweisfähigkeiten und allgemein-geistige Fähigkeiten (Ziehen von Analogieschlüssen, Verallgemeinern) weiterentwickelt.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeiten der üblichen Symbolik für die Stücke eines Vierecks und der Lagerelationen für Seiten und Winkel
- Erkennen der Instabilität von Vierecken mit vier vorgegebenen Seiten
- Konstruktion eines Vierecks

2. Stunde
- Lösen weiterer Konstruktionsaufgaben

3. Stunde
- Erarbeitung (und Festigung) des Satzes über die Summe der Innenwinkelgrößen von Vierecken

Methodische Hinweise

Für das **Erarbeiten der üblichen Symbolik für die Stücke eines Vierecks . . .** können die Schüler einleitend aufgefordert werden, vier mittels Lochschablone festgelegte Punkte in geeigneter Weise mit A, B, C, D zu bezeichnen und zu einem Viereck $ABCD$ zu verbinden (SSA). Geeignet sind dafür etwa die Punkte
a) (5), (10), (14), (15); b) (10), (15), (17), (19).

Die Auswertung bietet Gelegenheit, die für Vielecke getroffenen Vereinbarungen zu wiederholen. Dabei sollte für a) an einer Bezeichnung wie $A(5)$, $B(10)$, $C(14)$, $D(15)$ erörtert werden, weshalb ein derartiger Streckenzug nicht als Viereck bezeichnet wird. Im Zusammenhang mit b) empfiehlt sich die Wiederholung von konvex – nicht konvex (Aufgabe a) führt auf genau ein (konvexes) Viereck, bei b) sind jedoch drei verschiedene – nicht konvexe – Vierecke möglich). Mit c) (3), (11), (15), (16) können auch noch vier Punkte vorgegeben werden, die nicht Eckpunkte eines Vierecks sein können, weil drei von ihnen auf ein und derselben Geraden liegen. Seiten, Winkel und (noch einzuzeichnende) Diagonalen können gleich an den mit der Lochschablone gezeichneten Vierecken von den Schülern mit bezeichnet werden. Dabei muß deutlich werden, daß eine solche Vereinbarung zwar zweckmäßig ist, man aber sehr wohl die Stücke eines Vierecks auch anders bezeichnen darf (dies sollte der Lehrer später an geeigneten Stellen auch tun).

Die Frage, warum man eigentlich nicht so wie bei den Dreiecken verfährt, also etwa die dem Eckpunkt A „gegenüberliegende" Seite mit a bezeichnet, kann zu den Lagerelationen von Seiten und Winkeln führen. Entsprechende (nicht geordnete) Paare sollten von den Schülern auch aufgeschrieben werden. Es wird dann bemerkt, daß es nur zwei Paare einander gegenüberliegender Seiten gibt, jedoch vier Paare benachbarter Seiten.

Die Termini „einander benachbart" und „einander gegenüberliegend" sind unmittelbar klar (für Seiten auch schon in der Unterstufe benutzt worden). Dennoch sollten der sprachlich-logischen Schulung wegen die Schüler zu Beschreibungen veranlaßt werden, beispielsweise: „Einander gegenüberliegende Seiten eines Vierecks sind solche Seiten, die keinen Punkt gemeinsam haben".

Das **Erkennen der Instabilität von Vierecken mit vier vorgegebenen Seiten** (der möglichen Inkongruenz zweier derartiger Vierecke) sollte unbedingt durch ein Modell unterstützt werden (hergestellt aus Stäben eines Holz- oder Metallbaukastens bzw. des Geometriebaukastens, aus mit Magneten versehenen Pappstreifen für die Hafttafel oder dgl., auch durch die Schüler). Für die Arbeit vor der Klasse sollten derartige Modelle mit dem „Polylux" projiziert werden, wenn sie zu klein sind. Auch die Vierecke im Bild D 130 (LB 181) wird man hier betrachten und erläutern lassen, daß aus der Übereinstimmung in den Seiten bei Vierecken nicht deren Kongruenz folgen muß. Inhaltlich sollte den Schülern dabei auch klar werden, daß Übereinstimmung zweier Vierecke in den Seiten heißt: Jeder Seite eines der Vierecke kann eine gleich lange Seite des zweiten Vierecks zugeordnet werden. Dabei werden alle Seiten des zweiten Vierecks erfaßt, und benachbarten Seiten entsprechen benachbarte Seiten.

Erst im Zusammenhang mit der „Instabilität" des Vierecks wird die technisch bedeutsame Stabilität des Dreiecks für die Schüler voll verständlich. Dabei ist Bezug zu nehmen auf LB 150, und es ist Gelegenheit zur Wiederholung der Dreieckskongruenzsätze (Auftrag D 60, (sws), (sss)). Bei der Diskussion technischer Anwendungen (LB-Bild D 131) sollten Beispiele aus der unmittelbaren Umgebung der Schüler (z. B. Tür aus Brettern mit Schrägversteifung) mit einbezogen werden.

Konstruktion eines Vierecks Die Einsicht, daß zur eindeutigen Konstruierbarkeit eines Vierecks wenigstens fünf geeignete Stücke bekannt sein müssen, wird sowohl durch die Diskussion von LB-Bild D 130 als auch Auftrag D 60 (Zerlegung des Vierecks durch eine Diagonale, Betrachtung der Teildreiecke) vorbereitet.

Eine praktische Motivierung für das Konstruieren von Vierecken kann man erreichen, indem man Aufgabe 1a oder b der Behandlung des Beispiels D 13 oder einer anderen formalen Konstruktionsaufgabe voranstellt. Auch wenn derartige Verfahren heutzutage in der Praxis bedeutungslos sind (was man den Schülern nicht verschweigen sollte), dient ein solches Herangehen an Konstruktionen dazu, in den Schülern die Überzeugung von der praktischen Bedeutung der Mathematik zu entwickeln. Der praktische Sachverhalt ist hinreichend ausführlich zu erörtern (Unzugänglichkeit gewisser Punkte bzw. Strecken; Bedingungen für das Anpeilen, Fragen der praktischen Ausführung und der Hilfsmittel), evtl. unter Verwendung eines geeigneten Modells, etwa einer Schaumplastplatte von einer Geräteverpackung mit entsprechender Zeichnung, in die sogar kleine Peilstäbe gesteckt werden können; auch Arbeiten an der Hafttafel ist möglich. Besonders instruktiv ist es, wenn später anläßlich einer Wanderung die Schüler eine derartige indirekte Entfernungsmessung einmal selbst vornehmen.

Die eigentliche Konstruktion wird in der ersten Stunde dieser Unterrichtseinheit gewiß nicht mehr ausgeführt werden können. Man sollte jedoch die vorbereitenden Lösungsüberlegungen so sorgfältig anstellen, daß den Schülern die Konstruktion selbst als Hausaufgabe überlassen werden kann, zumal die im Lehrbuch enthaltene Skizze das Anfertigen einer Planfigur erleichtert bzw. sogar überflüssig macht.

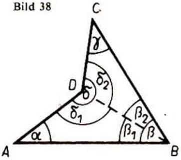
Bei allen Konstruktionsaufgaben gebührt der Lösungsüberlegung im Interesse der allgemeinen Fähigkeitsentwicklung ohnehin die größte Aufmerksamkeit. Da aber auch die Konstruktionsbeschreibungen für die sprachlich-logische Schulung von Bedeutung sind, sollten sie im Regelfall von den Schülern gefordert werden (Auftrag D 61). Dabei ist – nicht zuletzt unter dem Aspekt der Erziehung zum Arbeiten mit Algorithmen – anzustreben, daß diese Beschreibungen den Konstruktionsgang eindeutig festlegen. Bei vielen Aufgaben bestehen mehrere Möglichkeiten, die Konstruktion auszuführen. Der Lehrer sollte keinerlei Zwang in Richtung auf ein bestimmtes Vorgehen ausüben. Er sollte immer wieder verschiedene Möglichkeiten bewußtmachen und bei Konstruktionsbeschreibungen der Schüler (SSA oder HA) anstreben, daß möglichst einige unterschiedliche Wege vorgetragen werden.

Bei der Auswahl von Konstruktionsaufgaben, die von der Klassensituation bestimmt wird, sollten auf jeden Fall Berücksichtigung finden:

- ein Viereck, das aufgrund von weniger als fünf vorgegebenen Stücken nicht eindeutig konstruierbar ist (Aufg. 3);
- ein Viereck, bei dem außer Seiten und Winkeln auch Diagonalen gegeben sind (Aufg. 5);
- eine Aufgabe, bei der sich zwei nicht kongruente Lösungen ergeben (Aufg. 4b, e, 5b, d; Aufg. 4e ist besonders wichtig, weil eine Lösung ein nicht konvexes Viereck ist);
- eine Aufgabe, bei der es keine Lösung gibt (Aufg. 4d).

Erarbeitung (und Festigung) des Satzes über die Summe ... Die Behandlung des Satzes von der Innenwinkelsumme kann man an die Erledigung einer Aufgabe (Auftrag D 62), evtl. als tägliche Übung, anschließen. Im Unterricht sollte man nicht von vornherein nach der Konstruierbarkeit fragen, sondern die Schüler einfach auffordern, diese Vierecke zu konstruieren. Das Auswertungsgespräch liefert dann die Grundlage für die weiteren Überlegungen. Anstelle des im Lehrbuch angedeuteten Weges mit reduktiver Satzfindung (Analogie zum Dreieck, dann Vermutung als Verallgemeinerung vom Rechteck aus) und anschließender deduktiver Erkenntnissicherung (Beweis) bietet sich auch eine Herleitung an, bei der dann die Formulierung des Satzes D 30 (LB 182) erst am Ende steht. Die gesamte Beweisüberlegung ist so einfach, daß man sie von vielen Schülern relativ selbständig erwarten kann. Eine einwandfreie Darstellung des Beweises sollte der Lehrer aber unter Heranziehen aller Schüler an der Tafel entwickeln, etwa in folgender Form[1]):

Bild 38



Vorauss.: $ABCD$ Viereck,
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ seine Innenwinkel

Behauptung: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

Beweis: Diagonale $\overline{BD}$ zerlegt
$ABCD$ in $\triangle\, ABD$ und $\triangle\, BCD$

(*) $\beta = \beta_1 + \beta_2, \quad \delta = \delta_1 + \delta_2$

$\alpha + \beta_1 + \delta_1 = 180°$ (Innenwinkelsumme im Dreieck)

$\gamma + \beta_2 + \delta_2 = 180°$

$\alpha + \beta_1 + \delta_1 + \gamma + \beta_2 + \delta_2 = 180° + 180°$ (Addition)

$\alpha + (\beta_1 + \beta_2) + \gamma + (\delta_1 + \delta_2) = 360°$ (Umordnen der Summanden)

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$ (Einsetzen von (*))

w. z. b. w.

Abschließend – besonders dann, wenn man für die Zeichnung ein konvexes Viereck wählt – ist zu erörtern, daß man bei allen Vierecken eine im Innern liegende Diagonale findet.

Die Zeichnung sollte schon in der Phase der Beweisfindung angefertigt und dabei anstelle der Bezeichnungen $\beta_1, \beta_2, \delta_1, \delta_2$ in den Teildreiecken zunächst farbige Kreide zur Kennzeichnung verwendet werden. Ferner sollten die Beziehungen $\beta = \beta_1 + \beta_2$ und $\delta = \delta_1 + \delta_2$ durch ein Zeichen wie (*) erst dann markiert werden, wenn die Begründung der letzten Zeile zu fixieren ist. (Auch die eplizite Formulierung der Beziehungen (*) braucht nicht gleich am Anfang zu erfolgen.)

Für die Festigung im unmittelbaren Anschluß an die Behandlung des Satzes – ggf. auch in Form täglicher Übungen zu Beginn der nächsten Stunde – ist Aufgabe 6a geeignet.

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 1a oder b
2. Aufg. 4 (eine Teilaufgabe)

Parallelogramme (2 Std.)

LE 24 (LB 184 bis 186)

Auch in dieser Unterrichtseinheit geht es vornehmlich um Denkschulung und Fähigkeitsentwicklung, eingeordnet in die Leitlinie „Definieren“ und „Beweisen“. Eine besondere Rolle spielt dabei das Umkehren von Sätzen.

[1] Hier ohne Berücksichtigung der Verteilung an der Tafel

Ziele

Die Schüler
- können eine Definition für „Parallelogramm" formulieren,
- haben ihr Wissen über Gegenseiten von Parallelogrammen reaktiviert, kennen die Beziehungen zwischen Gegenwinkeln und Nachbarwinkeln und haben erfaßt, woraus diese Tatsachen zu folgern sind,
- wissen, daß auch die Umkehrung des Satzes über die gleiche Länge der Gegenseiten gilt und haben den Beweis dafür verstanden,
- können weitere Sätze über Parallelogramme in Wenn-so-Form formulieren, Umkehrungen dazu bilden und richtige Überlegungen zur Gültigkeit solcher Umkehrungen anstellen,
- können Parallelogramme aufgrund vorgegebener Stücke konstruieren,
- haben sich wiederum von der Bedeutung mathematischer Fakten für technische Belange überzeugt.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeiten einer Definition für „Parallelogramm"
- Reaktivieren bzw. Erarbeiten der Beziehungen zwischen Gegenseiten, Gegenwinkeln und Nachbarwinkeln von Parallelogrammen (Satz D 32) mit Erstfestigung
- Erarbeiten der Umkehrungen für diese Sachverhalte, dabei Beweis für eine dieser Umkehrungen

2. Stunde
- Erarbeiten der Diagonaleneigenschaft von Parallelogrammen und Festigung
- Festigen von Parallelogrammeigenschaften durch Lösen von Konstruktionsaufgaben

Methodische Hinweise

Das **Erarbeiten einer Definition für Parallelogramm** sollte damit motiviert werden, daß mathematische Objekte durch eine Definition unmißverständlich charakterisiert werden müssen. Ein konkreter Ausgangspunkt für diese Überlegung kann z. B. geschaffen werden durch:
- die Aufforderung an die Schüler, über die Wahrheit der Aussage „Jedes Parallelogramm hat zwei spitze und zwei stumpfe Innenwinkel" begründet zu entscheiden, oder
- die Forderung nach einer begründeten Entscheidung, ob (z. B. auf Projektionsfolie) vorgegebene Figuren(darunter etwa ein Sechseck mit zueinander parallelen Gegenseiten) Parallelogramme sind.

Die Betonung muß hierbei auf dem – für jeden überzeugenden – Begründen liegen. Die Formulierung einer Definition sollte möglichst selbständig durch alle Schüler erfolgen (jeder notiert einen Vorschlag). Nach der gemeinsamen Absprache einer bestimmten Fassung ist diese mit der Lehrbuchformulierung zu vergleichen. Auch danach sind aber eigenständige andere und dennoch exakte Formulierungen der

Schüler anzuerkennen. Die Schüler müssen auch erfassen, daß Termini wie „heißen", „nennt man" auf den Vereinbarungscharakter der Definition hinweisen und deshalb gegenüber „ist", „sind" oder dgl. zu bevorzugen sind.

An dieser Stelle kann auch „Höhe des Parallelogramms" eingeführt werden. Der Lehrer sollte diese Begriffsbildung durch eine ähnliche Überlegung wie beim Dreieck (vgl. LE 20, Aufg. 3, S. 207) motivieren.

Reaktivieren bzw. Erarbeiten der Beziehungen ... (Satz D 32) Hier sind vorhandene Kenntnisse und Fähigkeiten der Schüler konsequent zu nutzen, indem die Eigenschaften der Parallelogramme weitgehend selbsttätig von den Schülern hergeleitet bzw. begründet werden (Auftrag D 64).

Für die Erstfestigung ist Aufgabe 1 geeignet. Diese Aufgabe sollte mündlich bearbeitet werden, evtl. auch in täglichen Übungen der nächsten Stunde und ggf. ergänzt durch Aufgaben, bei denen aus Angaben wie $\alpha = \beta$ oder $\beta = 2\gamma$ alle Winkel eines Parallelogramms zu ermitteln sind.

Erarbeiten der Umkehrungen ... Im Stoffabschnitt 4.3. erfolgte das Bilden von Umkehrungen lediglich durch Vertauschen von Prämisse und Konklusion (bei bereits vorliegender implikativer Form). Jetzt sind die Anforderungen insofern höher, als die Wenn-so-Form erst hergestellt werden muß; damit wird gleichzeitig Satz D 32 weiter gefestigt. Genau wie im Lehrbuch ist eine Form zu bevorzugen, bei der – gewissermaßen als *generelle* Prämisse – vorangestellt wird „V ist ein Viereck". Ist für Satz D 32a die Umformulierung im Unterrichtsgespräch erarbeitet worden, so kann von den Schülern Entsprechendes für Satz D 32b und c selbständig erwartet werden. Danach sollte man die Umkehrungen nun wiederum von den Schülern anders als in Wenn-so-Form formulieren lassen. Für Satz D 33 könnte es etwa heißen: „Jedes Viereck mit zwei Paaren gleich langer Gegenseiten ist ein Parallelogramm."

Beim Beweis von Satz D 33 ist – nachdem Voraussetzung und Behauptung formuliert und schriftlich fixiert wurden – die Beweisfindung unter größtmöglicher Beteiligung der Schüler am wichtigsten. Zu dem entscheidenden Ansatz führt folgende – der Strategie des Rückwärtsarbeiten entsprechende – Frage: „Es gilt, die Parallelität von AB und CD (bzw. AD und BC) nachzuweisen. Welche Möglichkeiten bestehen hierfür?"

Es liegt nahe, die Umkehrung des Stufenwinkelsatzes oder Wechselwinkelsatzes zu nutzen. Da bei der Begründung von Satz D 32 schon mit den durch eine Diagonale erzeugten kongruenten Dreiecken gearbeitet worden ist, wird man versuchen, auch hier unter veränderten Voraussetzungen die Kongruenz dieser Dreiecke nachzuweisen (Kongruenzsatz (sss)).

Der Lehrer sollte jedoch nicht zu einseitig von vornherein diesen Weg anstreben und anderslautende Vorschläge der Schüler nicht verhindern oder vorschnell zurückweisen. Haben die Schüler weitestgehend den wesentlichen Gedankengang eines Beweises erfaßt, so kann man im Unterricht auf eine vollständige Beweisdarstellung verzichten und sie nur anhand des Lehrbuchs besprechen (Aufschreiben des vollständigen Beweises (Auftrag D 66a dann als HA). Auftrag D 66b wird man sicherlich nur mündlich erledigen lassen und die Überlegungen zur Gültigkeit der Umkehrungen nicht in Richtung auf eine Beweisführung ausdehnen.

Eine Festigung des Satzes D 33 sollte auch die Einsicht in seine praktische Anwendbarkeit berücksichtigen. Besonders wirkungsvoll ist es, wenn der Lehrer einen geeigneten Gegenstand, etwa eine alte Briefwaage oder eine Balkenwaage, mit in den Unterricht bringt.

Beim **Erarbeiten der Diagonaleneigenschaft von Parallelogrammen** (Satz D 34) sollte man sich wiederum auf eine Herleitung, wie sie im Lehrbuch (Auftrag D 67a) angedeutet ist, beschränken, auch aus Zeitgründen. Bei ausführlicher Beweisdarstellung muß zunächst eine Formulierung des Satzes als Vermutung vorangehen. Man kann zu ihr durch die Frage nach einer Bewegung, die das Parallelogramm auf sich abbildet, gelangen. Die Aufgabe 2, in der die Frage nach dieser Bewegung aufgeworfen wird, sollte aber auch bearbeitet werden, wenn man Satz D 34 analog dem Lehrbuchtext behandelt hat. In diesem Fall liefert der Satz die Begründung für die Antwort.

Beim **Festigen von Parallelogrammeigenschaften durch Lösen von Konstruktionsaufgaben** ist jedem Schüler Gelegenheit zu geben, sich selbständig einen Konstruktionsweg zu überlegen, und er sollte ihn möglichst – zusätzlich zur Planfigur – in seinem Heft fixieren. Bei Bearbeitung einer Aufgabe wie im Beispiel D 14 kann dies durch einen Schüler, der den im Auftrag D 68c angedeuteten Lösungsweg anstrebt, etwa so geschehen:
(1) $\overline{AB} = a$, (2) $\beta = 180° - \alpha$ in B, (3) $\overline{BC} = b$.
Läßt der Lehrer nach der abschließenden gemeinsamen Erörterung möglicher Vorgehensweisen alle Schüler den gleichen Konstruktionsweg beschreiten, so muß klar sein, daß dies nur im Interesse einer einheitlichen Konstruktionsbeschreibung geschieht. Scheint in Anbetracht der Klassensituation das Beispiel D 14 als erste Konstruktionsaufgabe zu schwer, weil die gegebenen Stücke nicht „unmittelbar" verwendet werden können, so sollte mit Aufgabe 5a begonnen werden. Konstruktionsaufgaben, bei deren Lösung Satz D 32 angewandt werden muß, dürfen aber nicht fehlen. Als Hausaufgabe eignen sich ein oder zwei Teilaufgaben von Aufgabe 5.

Kontrollaufgaben
1. In einem Parallelogramm $ABCD$ ist $a = 7{,}3$ cm, $d = 5{,}8$ cm und $\delta = 82°$. Gib die Längen der übrigen Seiten und die Größen der Innenwinkel an!
2. Aufg. 5 (eine Teilaufgabe)

Besondere Parallelogramme (2 Std.)

LE 25 (LB 186 bis 189)

In dieser Unterrichtseinheit soll das Wissen und Können der Schüler hinsichtlich des Rechtecks reaktiviert und erweitert werden. Als eine neue Vierecksart wird der Rhombus behandelt. Vor allem aber ist das Anliegen dieser Unterrichtseinheit im Rahmen der sprachlich-logischen Schulung (Leitlinien „Definieren" und „Beweisen") und der Weiterentwicklung allgemein-geistiger Fähigkeiten (wie Vergleichen, Verallgemeinern und Spezialisieren) zu sehen.

Ziele

Die Schüler
- können Definitionen für „Rechteck", „Quadrat" und „Rhombus" formulieren; sie haben erkannt, daß derartige Definitionen unterschiedlich erfolgen können,
- kennen die Beziehungen zwischen den Begriffen „Parallelogramm", „Rechteck", „Rhombus" und „Quadrat" und können sie in einem (VENN-) Diagramm darstellen,

- wissen, daß Rechtecke gleich lange Diagonalen haben und können das begründen,
- wissen, daß Rhombusdiagonalen aufeinander senkrecht stehen und können den Beweis dafür wiedergeben,
- können die Sätze über die Diagonalen von Rechtecken und Rhomben in Wenn-so-Form formulieren, Umkehrungen dazu bilden und über deren Gültigkeit begründet entscheiden.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeiten von Definitionen für Rechteck und Quadrat
- Behandlung des Satzes von den Rechtecksdiagonalen und seiner Umkehrung

2. Stunde
- Einführen des Begriffs „Rhombus", Erarbeiten einer Definition und Erfassen der Beziehungen von Rhomben zu anderen speziellen Parallelogrammen
- Behandlung des Satzes von den Rhombusdiagonalen und seiner Umkehrung

Methodische Hinweise

Erarbeiten von Definitionen für Rechteck und Quadrat Zunächst sollte das Wissen der Schüler über Beziehungen zwischen den Begriffen „Parallelogramm", „Rechteck" und „Quadrat" reaktiviert werden, indem z. B. aus einigen vorgegebenen Figuren (Projektionsfolie) alle Parallelogramme, Rechtecke und Quadrate herauszusuchen oder auch nur deren jeweilige Anzahl anzugeben ist (SSA). (Eindeutige Entscheidungen werden durch ein Quadratgitter ermöglicht.) Anschließend sind die Beziehungen durch ein Mengendiagramm (farbige Kreide) zu veranschaulichen. Für die folgenden Erörterungen zur Definition ist es günstig, wenn bei der Diskussion dieses Mengendiagramms auch von „Oberbegriff" und „Unterbegriff" gesprochen wird.

Wegen der Vertrautheit der Schüler mit diesen Vierecksarten sind geeignete Definitionsvorschläge (z. B. wie in der Einleitung von LE 25 aufgeführt, durch Überbestimmung gekennzeichnet) von ihnen zu erwarten. Weitere Überlegungen (Auftrag D 69) führen zu der Einsicht, daß es möglich ist (mit dem Streben nach „Minimalität"), die Definitionen wie im Lehrtext unter Definition D 35 auszusprechen.

Die **Behandlung des Satzes der Rechtecksdiagonalen und seiner Umkehrung** kann mit der Frage beginnen, welche Eigenschaften außer der in der Definition verwandten Orthogonalität von Nachbarseiten die Rechtecke gegenüber anderen Parallelogrammen auszeichnen (Anhalten jedes Schülers zur selbständigen Vermutungsbildung, ohne zum Messen der Diagonalen eines Rechtecks aufzufordern). Der Beweis von Satz D 36 wird im Auftrag D 70a gefordert, allerdings mit Vorgabe einer grundlegenden Beweisidee. Diese sollte man im Unterrichtsgespräch erarbeiten (gemäß der Strategie des Rückwärtsarbeitens). Bei den anschließenden Überlegungen zur Kongruenz der Teildreiecke werden die meisten Schüler noch unterstützt werden müssen, ebenso bei der Darstellung des Beweises. Bei einigen Teilschritten sollten die Schüler jedoch Gelegenheit zur selbständigen Arbeit erhalten (z. B. eigenständige Fixierung von Voraussetzung und Behauptung).

Die sorgfältige Formulierung von Voraussetzung und Behauptung ermöglicht auch eine Umformulierung von Satz D 36 in Wenn-so-Form, die lauten könnte:

(*) P sei ein Parallelogramm.
Wenn P ein Rechteck ist, so sind in P die Diagonalen gleich lang.

Hinweis: Hier wird übrigens deutlich, daß man strenggenommen nicht von *der* Umkehrung eines Satzes sprechen kann, der nicht bereits in implikativer Form vorliegt, weil sich nicht in jedem Fall *die* Wenn-so-Form bilden läßt. So kann man beispielsweise für Satz D 36 auch die folgende Form wählen: „V sei ein Viereck. Wenn V ...". Während man bei (*) zu einer wahren Umkehrung gelangt, liefert diese Form eine falsche Aussage, nämlich (umformuliert): „Jedes Viereck mit Diagonalen gleicher Länge ist ein Rechteck". Dieser Umstand sollte auch den Schülern bis zu einem gewissen Grade nahegebracht werden.

Auf einen Beweis der Umkehrung zu (*) wird allein aus Zeitgründen verzichtet werden müssen (evtl. zusätzliche Anregung für einige Schüler).

Das **Einführen des Begriffs „Rhombus" . . .** wird durch eine Überlegung, wie sie im Lehrbuch, beginnend mit Auftrag D 70b, angedeutet ist, motiviert. Andere, etwas weniger anspruchsvolle Zugangsmöglichkeiten zum Rhombus (man sollte die Schüler ausdrücklich darauf aufmerksam machen, daß es „*der* Rhombus" heißt) bieten
(a) Betrachtungen am Polylux mit zwei Folienstreifen (vgl. Aufg. 2)
(b) das Betrachten eines rhombenförmigen Gegenstandes
(c) die Konstruktion eines Rhombus (tägliche Übung, ohne spezifische Vorüberlegungen).
Eine Rhombuskonstruktion (in SSA) sollte auf jeden Fall erfolgen, bevor eine Definition erarbeitet wird. Bei der Diskussion zur Definition ist es günstig, wenn die Schüler einen ersten Eindruck von einer gewissen „Relativität" von *Definition* und *Satz* erhalten.

Das deutliche Hervorheben der Quadrate als Vierecke, die sowohl Rechtecke als auch Rhomben sind, veranschaulicht durch ein VENN-Diagramm, dient auch der Begriffsbefestigung. Sie kann mit einfachen Identifizierungsübungen an vorgegebenen geeigneten Figuren (evtl. im Quadratnetz) beginnen.

Die **Behandlung des Satzes von den Rhombusdiagonalen und seiner Umkehrung** erfolgt ebenfalls im Interesse der Begriffsaneignung. Hier ist Vermutungsbildung durch Verallgemeinern anzustreben, z. B. mit der Frage: „Gibt es Eigenschaften der Quadrate, die alle Rhomben haben?"

Die Beweisfindung könnte gemäß der Strategie des Rückwärtsarbeitens so verlaufen:
– Für das Senkrechtstehen der Diagonalen reicht es zu zeigen, daß $\measuredangle AMB \cong \measuredangle BMC$ gilt.
– Diese Tatsache könnte aus der Kongruenz der Teildreiecke AMB und BMC gefolgert werden.

Zur Festigung des Satzes kann zunächst die Umformulierung in Wenn-so-Form, die Bildung der Umkehrung und die Entscheidung über deren Gültigkeit dienen. Auch die Aufgaben 4* und 6d kommen zur Festigung des Satzes D 38 in Betracht. Die Aufgaben 1 bis 4, bei denen Falten, Schneiden oder Aneinanderlegen verlangt werden, machen den Schülern viel Spaß und regen viele zum Knobeln an. Man sollte dem nicht dadurch entgegenwirken, daß übertriebene Forderungen nach exakter Begründung gestellt werden. Andererseits müssen natürlich die Eigenschaften, auf die man sich bei dem jeweiligen Vorgehen stützt, bewußtgemacht werden. Die Aufgabe 2b, bei der die erfragte maximale Länge der Parallelogrammseiten gar nicht existiert, ist nicht nur als „unlösbare Aufgabe" wichtig, sondern auch, weil sie einen Beitrag zur Entwicklung klarer, anschaulicher Vorstellungen leistet.

Kontrollaufgaben

1. Ermittle für die folgenden Parallelogramme $ABCD$ möglichst viele weitere Stücke! Gib an, ob es sich jeweils um spezielle Parallelogramme handelt! Begründe!

a) $a = 8{,}3$ cm, $b = 4{,}1$ cm, $\beta = 60°$
b) $c = 4{,}0$ cm, $e = 7{,}3$ cm, $\alpha = 90°$
c) $a = 5{,}2$ cm, $d = 5{,}2$ cm, $\gamma = 90°$
d) $a = 6{,}5$ cm, $e = 8{,}6$ cm, $f = 8{,}6$ cm

2. Aufg. 6d

Trapeze (2 Std.)

LE 26 (LB 189 bis 191)

Ziele

Die Schüler
- können „Trapez" definieren und Trapeze sicher identifizieren,
- kennen die Beziehungen zwischen „Viereck", „Trapez" und „Parallelogramm" und können sie darstellen,
- wissen, welche Strecken bzw. Streckenlängen in Trapezen man als „Schenkel" bzw. „Höhe" bezeichnet,
- wissen, welche Vierecke man „gleichschenklige Trapeze" nennt und welche Symmetrieeigenschaften sie haben,
- können Trapeze mit vorgegebenen Stücken konstruieren; dabei ist ihnen wiederum die Bedeutung sauberen und genauen Arbeitens bewußt geworden,

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeiten einer Definition für „Trapez"; Einführen von „Schenkel" und „Höhe" eines Trapezes
- Lösen von Konstruktions- und Beweisaufgaben zum Trapez

2. Stunde
- Erarbeiten des Begriffs „gleichschenkliges Trapez" und der Axialsymmetrie gleichschenkliger Trapeze
- Festigen, vor allem durch Lösen von Konstruktionsaufgaben für gleichschenklige Trapeze

Methodische Hinweise

Erarbeiten einer Definition für „Trapez" . . . Für die Erarbeitung der Definition gilt Ähnliches wie beim Parallelogramm (vgl. S. 215). Auch hier sind unterschiedliche Formulierungen mit den Schülern zu erörtern; so sollte von (mindestens) einem

Paar paralleler (Gegen-) Seiten gesprochen werden. An der Darstellung der Beziehungen zwischen Viereck, Trapez und Parallelogramm (und speziellen Parallelogrammformen) (Auftrag D 73) sollten sich zunächst alle Schüler selbständig versuchen. Eine derartige Darstellung kann aber auch einleitend zur Behandlung des Trapezes hinführen (Vorgabe einer Zeichnung wie im Bild 39). Zur Menge T (Tr) der Trapeze kann man sehr schnell kommen, da diese Viereckart den Schülern bereits bekannt ist.

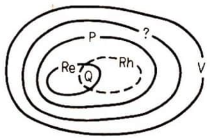


Bild 39

Bei der Einführung der Bezeichnung „Schenkel" ist zu beachten, daß man keinesfalls, ohne vorher das Parallelogramm ausgenommen zu haben (wie im Lehrbuch), von den Schenkeln als den „nicht parallelen Gegenseiten" des Trapezes sprechen darf. Es sollte deutlich werden, daß es sich bei derartigen Festlegungen (Definitionen) um Vereinbarungen handelt, die nicht in jedem Fall einheitlich getroffen werden. Das trifft auch für den Begriff „Höhe" zu, bei dem unterschiedliche Auffassungen (Strecke bzw. Streckenlänge) angetroffen werden. Seine Einführung erfolgt vor allem in Hinblick auf die Flächeninhaltsberechnung von Vielecken. Dabei ist Bezug zu nehmen auf gewisse praktische Sachverhalte, bei denen Trapeze, vor allem gleichschenklige, eine Rolle spielen (Aufg. 3 und 4).

Konstruktions- und Beweisaufgaben zum Trapez Zur Festigung der Begriffe bietet sich Auftrag D 74 an. Darüber hinaus sollte man für einfache kombinierte Identifizierungs- und Realisierungstätigkeiten sorgen (z. B. Vorgabe von Vielecken mittels Lochschablone; Trapeze heraussuchen, Schenkel markieren sowie Höhen einzeichnen und messen lassen). Auch die (mündliche) Erledigung von Aufgabe 1 dient der Festigung.

An Konstruktionen sind (zunächst) von den in Aufgabe 2 geforderten wenigstens zwei auszuführen, neben den einfachsten (2a oder 2b, Parallelaufgaben) 2c oder 2d (HA).

Auf die Beweisaufgaben 5 und 6 sollte nicht gänzlich verzichtet werden, evtl. aber auf eine ausführliche Beweisdarstellung. Bei beiden Aufgaben kommt es nicht darauf an, daß sich die Schüler den betreffenden Satz einprägen, es geht vielmehr um einen weiteren Schritt in der allmählichen Befähigung zum selbständigen Beweisen.

Das **Erarbeiten des Begriffs „gleichschenkliges Trapez" . . .** kann sich an die Erledigung des Auftrags D 75 anschließen, der sich wiederum an die Besprechung von Trapezkonstruktionen (HA-Kontrolle) nahtlos anfügt. Dabei sollte der Lehrer alle Schüler eine Definition selbständig im Übungsheft fixieren lassen, zumindest in Stichpunkten.

Festigen vor allem durch Lösen von . . . Der Festigung dient zunächst das (mündliche) Bearbeiten des Auftrags D 76. Vor allem aber sind einige der Konstruktionen aus Aufgaben 3 und 4 auszuführen. Zur besseren Reaktivierung von „Maßstab" und im Interesse bewußterer Erziehung zu sorgfältigem und genauem Arbeiten sollte dabei die (Original-) Größe von nicht gegebenen Stücken ermittelt werden. Ein Einprägen hier auftretender Fachtermini ist nicht zu fordern. Wenn es die Klassensituation gestattet, sollte man Aufgabe 7* berücksichtigen. Mit einer eingehenderen Besprechung dieser Aufgabe, bei der durchaus auch das Wort „Sehnenviereck" fallen darf, kann sogar wertvolle Vorarbeit für die Behandlung des Satzes von den Gegenwinkeln im Sehnenviereck in Klasse 7 geleistet werden.

Kontrollaufgabe

a) Konstruiere ein Trapez $ABCD$ ($AD \parallel BC$) mit $b = 63$ mm, $e = 48$ mm, $f = 48$ mm, $\beta = 47°$!

b) Um was für ein Trapez handelt es sich?

c) Gib die (Größen der) Winkel α, γ und δ an, ohne zu messen!

d) Wie lang sind Schenkel und Höhe des Trapezes, wenn es sich um eine maßstäbliche Zeichnung (1 : 100) handelt?

Drachenvierecke (1 Std.)

LE 27 (LB 191 bis 192)

In dieser Unterrichtseinheit ist vor allem ein wesentlicher Beitrag zur Realisierung der Leitlinie „Definieren" zu leisten.

Ziele

Die Schüler
- können den Begriff „Drachenviereck" definieren,
- wissen, daß Rhomben spezielle Drachenvierecke sind,
- können Drachenvierecke mit vorgegebenen Stücken konstruieren,
- wissen, daß Drachenvierecke axialsymmetrisch sind und daß daraus folgt, daß die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen und die eine von der anderen halbiert wird.

Schwerpunkte

- Erarbeiten des Begriffs „Drachenviereck" und einer Definition
- Begriffsaneignung durch Konstruieren und Erarbeiten eines Satzes über die Diagonalen in Drachenvierecken

Methodische Hinweise

Für die **Erarbeitung des Begriffs „Drachenviereck" ...** kann man vom Namen dieser Vierecksart ausgehen (LB 191). Es ist aber auch möglich, einen konstruktiven Weg der Begriffsbildung zu beschreiten, und zwar über das Spiegeln eines unregelmäßigen Dreiecks an irgendeiner seiner Seiten. Wählt man ein stumpfwinkliges Dreieck und läßt an jeder seiner Seiten eine Spiegelung ausführen, so kommt sowohl der Fall nichtkonvexer Vierecke (sogenannter Deltoide) zur Sprache, der für die Definition erörtert werden muß, als auch ein Vieleck, das an einen Spitzdrachen erinnert und zur Namensgebung überleitet.

Die Erledigung des Auftrags D 77 bzw. besser eine entsprechende Diskussion von Schülervorschlägen, in der „Gegenbeispiele" zu suchen sind, führt vielleicht dazu, Drachenvierecke als Vierecke mit zwei Paaren gleich langer Nachbarseiten zu definieren, wobei diese Paare „elementfremd“ sein müssen, keine Seite zweimal auftreten darf oder ähnliches. Man sollte dann nicht versuchen, eine Definition wie im Lehrbuch (Definition D 40, LB 192), die sich durch Kürze und größere sprachliche Exaktheit auszeichnet, unbedingt im Unterrichtsgespräch zu erarbeiten. Die Schüler sollten sie im Lehrbuch lesen und überlegen, ob damit das Gemeinte erfaßt wird.

Begriffsaneignung durch Konstruieren und Erarbeiten ... Zur Festigung des Begriffs „Drachenviereck“ ist Auftrag D 78 geeignet (Auftrag 78a im UG; b, c in SSA). Auftrag D 78c ist auf das Vermuten von Satz D 41 gerichtet. Hat man für die Bildung des Begriffs „Dachenviereck“ den Weg über das Spiegeln eines Dreiecks beschritten, so muß mit den Schülern besonders überlegt werden, warum nun der Satz eigentlich noch bewiesen werden müßte. Ob der Lehrer die im Lehrbuch angedeutete Beweisidee eingehender entwickeln, einen regelrechten Beweis führen und sogar ausführlich darstellen läßt, wird von der Klassensituation und der verfügbaren Zeit abhängen.

Bei den Aufgaben sollten die schnell zu bewältigenden, aber für das Verständnis wichtigen Aufgaben 2 und 3 nicht ausgelassen werden. Von Aufgabe 1 sind wenigstens zwei Teilaufgaben zu lösen (HA).

Kontrollaufgabe
Konstruiere ein Drachenviereck $ABCD$ mit $e = 7{,}2$ cm, $f = 4{,}8$ cm, $\alpha = 64°$!
Miß die Seitenlängen und Winkelgrößen!

Axialsymmetrie bei Vierecken (1 Std.)

LE 28 (LB 193 bis 194)

Das Anliegen dieser Unterrichtseinheit besteht im Systematisieren des bisher über Vielecke erworbenen Wissens.

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß auch die Anzahl und Lage der Symmetrieachsen ein Mittel zur Klassifizierung von Vierecken sind,
- haben einen tieferen Einblick in die Zusammenhänge zwischen den Vierecksarten erhalten und können derartige Zusammenhänge anhand geeigneter Übersichten erläutern,
- haben erkannt, daß es wichtig ist, das Wissen zu ordnen, um das Einprägen und Behalten von Fakten zu erleichtern.

Schwerpunkte

- Gewinnen der Einsicht in die Axialsymmetrie als Klassifizierungsprinzip für Vierecksarten
- Festigen der Kenntnisse über Vierecksarten mit Hilfe der Übersicht in der Zusammenfassung des Lehrbuchs (3. Umschlagseite)

Methodische Hinweise

Gewinnen der Einsicht in die Axialsymmetrie als Klassifizierungsprinzip für Vierecksarten Ausgangspunkt können VENN-Diagramme für Vierecksarten bilden; insbesondere, wenn einige Schüler versuchen sollten, auch die Menge der Drachenvierecke in einer solchen Darstellung mit zu erfassen (HA). Motiv ist in jedem Fall, daß das Wesentliche von dem (bisher) über Vierecke Behandelten in knapper Form dargestellt und eingeprägt werden soll, und in dieser Richtung sollte auch die Zielstellung erfolgen.

Eine Übersicht über die Vierecke mit der Achsensymmetrie als Klassifizierungsprinzip ist möglichst gemeinsam mit den Schülern zu erarbeiten. Zweckmäßig ist jedoch das Bereitstellen von Applikationen für die Wandtafel, die den Figuren im Bild D 158 des Lehrbuchs entsprechen.

Bei der Übersicht, wie sie das Lehrbuch als Zusammenfassung enthält (3. Umschlagseite), wird man sich hingegen mit der Erläuterung durch die Schüler begnügen. Dabei sollten nicht nur Teilmengenbeziehungen kommentiert werden. Es kommt vielmehr vor allem auf das Erläutern der Eigenschaften an. Dies wird dadurch erleichtert, daß die zur Definition benutzten Eigenschaften der einzelnen Vierecksarten anders als die „abgeleiteten" dargestellt sind und daß jede (abgeleitete) Eigenschaft nur bei derjenigen Vierecksart vermerkt ist, bei der sie „erstmalig" auftritt.

Beide Übersichten können beim Bearbeiten der Lehrbuchaufgaben 1, 2 und 3 benutzt werden, die nicht etwa nur im Unterrichtsgespräch zu lösen sind. Bei Aufgabe 1 z. B. ist dadurch für angemessene selbständige Tätigkeit eines jeden Schülers zu gewährleisten, daß nicht nur die Antworten in den Übungsheften zu notieren sind, sondern bei der Entscheidung „falsch" auch ein Gegenbeispiel gezeichnet werden muß.

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 2 **2.** Aufg. 3

Stoffabschnitt 4.7.

Flächeninhalt und Umfang von Vielecken (11 Std.)

Der Schwerpunkt dieses Stoffabschnitts ist die Behandlung des Flächeninhalts von Vielecken. Da jeder Schüler „naiverweise" der Überzeugung ist, daß jedes Vieleck einen wohlbestimmten Flächeninhalt hat, sind keine Existenzfragen zu erörtern, und es wird auch nicht darüber reflektiert, was der Flächeninhalt (eines Vielecks) eigentlich ist[1]. Ferner ist bewußt das Wissen und Können zu nutzen und zu vertiefen, das die Schüler hinsichtlich der Flächeninhaltsberechnung bereits besitzen. Dies betrifft die

[1] Eine ausführliche Darlegung dieser Problematik findet man beispielsweise in [B1], Bd. V.

Kenntnis der Einheiten des Flächeninhalts und Umrechnungen von Flächeninhaltsangaben sowie die Flächeninhaltsberechnung von Rechtecken.

Neben dem Flächeninhalt von Rechtecken haben die Schüler bereits den von anderen einfachen, in Rechtecke zerlegbaren Vielecken berechnet. Die wiederholende Betrachtung derartiger Figuren führt zu den in den Sätzen D 42, D 43 und D 44 ausgesprochenen Eigenschaften der Funktion „Flächeninhalt von Vielecken", die die Grundlage der gesamten Behandlung bilden. Ähnlich „selbstverständlich" wie an diese Sätze ist an die Relation „flächengleich" heranzugehen, deren Einführung der Lehrplan fordert. Sie ist einfach als „flächeninhaltsgleich" zu verstehen und nicht etwa über Zerlegungs- oder Ergänzungsgleichheit den Schülern nahezubringen. Ein solcher Aufwand ist selbst dann unnötig, wenn man bei Herleitungen bzw. Beweisen von Flächeninhaltsformeln in höherem Maße von der Zerlegung in kongruente Vielecke bzw. Ergänzung zu solchen Gebrauch macht. Im Bild 40 sind außer dem Weg des Lehrbuchs aus der Fülle verschiedener Möglichkeiten mit (1) und (2) zwei derartige Vorgehensweisen angedeutet. Der im Lehrbuch verfolgte Weg ist besonders rationell, ermöglicht umfangreiche selbständige Schülertätigkeit und orientiert von vornherein auf die bei der Berechnung des Flächeninhalts von Vielecken übliche Vorgehensweise.

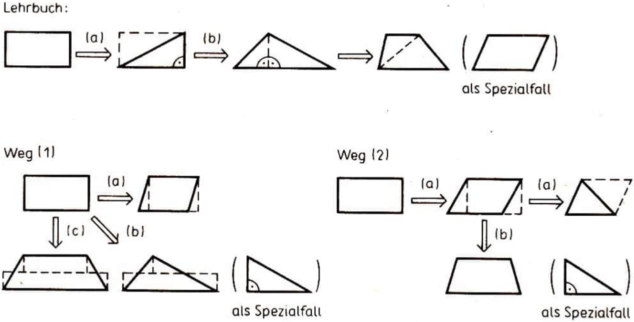


Bild 40

Die Umfangsberechnung von Vielecken ist so selbstverständlich – anders als beim Kreis in Klasse 7 –, daß besondere „Umfangsformeln" eigentlich überflüssig sind. Selbst bei Parallelogrammen (einschließlich Rechtecken) verdient die Formel $u = 2 \cdot (a + b)$ kaum eine besondere Hervorhebung, und das Gleiche gilt für den Sonderfall Rhombus (Quadrat) mit der Formel $u = 4a$. Für Umfangsberechnungen braucht man eigentlich nur zu wissen, was der Umfang eines Vielecks ist, und die die Seitenlängen betreffenden Eigenschaften der jeweiligen Vierecksarten zu kennen; das gehört aber zum Grundwissen. In welchem Maße man bei der Berechnung vom Distributivgesetz Gebrauch macht, ist eine Frage des rationellen Arbeitens und damit zwar nicht nebensächlich, veranlaßt aber nicht zum Hervorheben oder gar Einprägen besonderer Formeln. Allerdings ist in konkreten Fällen eine genügende Anzahl derartiger Berechnungen auszuführen.

Bei allen Sach- und Anwendungsaufgaben ist die Frage sinnvoller Genauigkeit gebührend zu beachten.

Flächeninhalt und Umfang von Rechtecken (1 Std.)

LE 29 (LB 194 bis 195)

Ziele

Die Schüler
- haben ihr Wissen über die Berechnung des Flächeninhalts von Rechtecken und Einheiten des Flächeninhalts reaktiviert und können solche Berechnungen sowie Umfangsberechnungen unter Beachtung sinnvoller Genauigkeit ausführen,
- wissen, daß die Formel $A = a \cdot b$ zur Bestimmung des Flächeninhalts eines Rechtecks auch gilt, wenn a und b als Zahlenwerte beliebige gebrochene Zahlen haben,
- sind in der Überzeugung von der praktischen Bedeutsamkeit von Flächeninhaltsberechnungen (und der Mathematik überhaupt) bestärkt und damit auch für den gesamten Stoffabschnitt motiviert worden.

Schwerpunkte

- Wiederholung der Berechnung des Flächeninhalts von Rechtecken und Motivierung des Stoffabschnitts
- Gültigkeit der Formel $A = a \cdot b$ für den Flächeninhalt von Rechtecken bei beliebigen gebrochenen Zahlenwerten von a und b

Methodische Hinweise

Zur **Wiederholung der Berechnung des Flächeninhalts von Rechtecken ...** sollte von praktischen Fragestellungen ausgegangen werden; hierzu kann beispielsweise der Auftrag D 81, die Bestimmung des Oberflächeninhalts eines Quaders (Stereometriebaukasten) oder Aufgabe 1 dienen. Auf diese Weise ist es gleichzeitig möglich, an der Vervollkommnung der Fähigkeiten der Schüler zum Lösen von Sachaufgaben zu arbeiten. Beim Lösen von Auftrag D 81 müssen nicht unbedingt Flächeninhalte berechnet werden. Beabsichtigt man dies jedoch, so sind die Maße so abzuändern, daß Zimmerlänge und -breite keine Vielfachen von 2 m sind. Aber auch ohne die Flächeninhaltsberechnung auszuführen, kann in Zusammenhang mit diesem Auftrag diskutiert werden, wo Flächeninhaltsbestimmungen erforderlich sind, und das Anliegen des letzten Stoffabschnitts erläutert werden. Hier kann auch das prinzipielle Vorgehen zur Lösung von Aufgabe 1 diskutiert und die Beendigung der Lösung als Hausaufgabe gestellt werden.

Bei Aufgabe 1 und 2 ist – wie auch später stets bei derartigen Aufgaben – auf sinnvolle Genauigkeit zu achten. So ist beispielsweise bei Aufgabe 2 der formal errechnete Flächeninhalt 34,125 m², doch kommt als Ergebnis nur „(etwa) 34 m²“ in Betracht. Dabei ist aber zu erörtern, daß die Berechtigung des Abrundens fraglich wird, wenn es um Verbrauchsplanung, Materialbereitstellung, Bestellung o. dgl. geht, daß sogar 35 m² im konkreten Fall noch zu wenig sein können, weil etwa unvermeidlicher Verschnitt noch nicht berücksichtigt wurde. Erzieherisch wichtig ist eine – möglichst auf aktuelle Ereignisse (Zeitungsmeldungen) oder örtliche Probleme Bezug nehmende –

knappe, aber unmißverständliche Stellungnahme zu Fragen des verantwortungsvollen, auf Sparsamkeit bedachten Umgangs mit jeglichem Material.

Bei der Diskussion der Lösung(en) soll den Schülern die Zweckmäßigkeit einer Zeichnung für die Lösung von Aufgaben deutlich werden. Eine Skizze – etwa auf Karopapier angefertigt – genügt dabei vollständig.

Daß unter „Rechteck“ bei der Flächeninhaltsbestimmung stets „Rechteckfläche“ zu verstehen ist, muß im Laufe des Unterrichts auch den Schülern klar werden.

Gültigkeit der Formel $A = a \cdot b$ für den Flächeninhalt von . . . Im Zusammenhang mit dem (den) betrachteten Beispiel(en) ist außer der Frage sinnvoller Genauigkeit bei Längenmessungen und Flächeninhaltsangaben wiederholend zu diskutieren:
- die Verwendung von „Zahlenwert“ und „Einheit“ bei Größenangaben,
- die mögliche Deutung des Flächeninhalts eines Rechtecks bei ganzzahligen Zahlenwerten der Seitenlängen,
- die Umrechnung von Flächeninhaltsangaben.

Im Auftrag D 81 kann der Flächeninhalt des dort betrachteten Rechtecks beispielsweise als Anzahl der Einheitsquadrate mit einer Seitenlänge von 1 m gedeutet werden, die das betrachtete Rechteck „ausfüllen“. Diese Deutung erweist sich mit dem Blick auf Teil b von Auftrag D 81 und Aufgaben zur Umrechnung von Flächeninhaltsangaben als nützlich. (Bei der Wiederholung dieser Deutung des Flächeninhalts kann LB-Bild D 159 verwendet werden.) Betrachtet man dagegen das Rechteck von Beispiel D 15, so muß man hier Einheitsquadrate mit einer Seitenlänge von 1 dm wählen, um eine entsprechende Deutung geben zu können.

Im Zusammenhang mit weiteren Beispielen, eventuell unterstützt durch entsprechende Zeichnungen auf Projektionsfolie (untergelegtes transparentes Millimeterpapier) gilt es, sinngemäß herauszuarbeiten:

Sind die Zahlenwerte der Seitenlängen endliche Dezimalbrüche, so kann bei Wahl einer geeigneten Längeneinheit (z. B. Millimeter) der Flächeninhalt auch wieder als Anzahl der Einheitsquadrate entsprechender Seitenlänge gedeutet werden, die das betrachtete Rechteck vollständig ausfüllen.

Hier ist auch das Umrechnen von Flächeninhalten zu üben. Empfehlenswert ist arbeitsteiliges Vorgehen, bei dem ein Teil der Schüler den Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen 56 cm und 0,20 m (Aufg. 3a) in cm^2 berechnet, ein anderer in m^2.

Auch gemeine Brüche sollten nicht fehlen (Bild 41).
Derartige Betrachtungen sollen einerseits die Schüler von der Gültigkeit der Formel $A = a \cdot b$ für beliebige a und b überzeugen[1], müssen aber andererseits auch deutlich werden lassen, daß das nicht selbstverständlich ist. Die ursprünglich – in Klasse 5 – angestellten Überlegungen, die zu der Formel geführt haben, setzen ja ganzzahlige Zahlenwerte für a und b voraus.

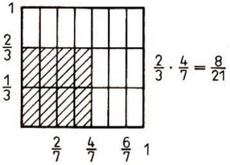


Bild 41

Kontrollaufgabe
Aufg. 2

1 Siehe auch Multiplikation von Dezimalbrüchen, S. 79!

Flächeninhalt und Umfang von Vielecken (2 Std.)

LE 30 (LB 195 bis 198)

Ziele

Die Schüler
- können Flächeninhalte und Umfänge von Vielecken, die sich in eine gewisse Anzahl von Rechtecken zerlegen lassen, berechnen und sind insbesondere in der Lage, die für Berechnungen erforderlichen Längenangaben Zeichnungen zu entnehmen,
- haben ihre Fähigkeiten im Lösen von Sachaufgaben vervollkommnet, Berücksichtigung räumlicher Fragestellungen hat zur Weiterentwicklung des Raumvorstellungsvermögens beigetragen,
- haben sich weitere für den Flächeninhalt von Vielecken wesentliche Eigenschaften (Satz D 43, D 44) bewußtgemacht, die vorher von ihnen bereits selbständig bei der Ermittlung gewisser Flächeninhalte genutzt wurden.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Berechnen des Flächeninhalts von speziellen Vielecken, die sich in eine gewisse Anzahl von Rechtecken zerlegen lassen

2. Stunde
- Gewinnen der Einsicht in die Additivität des Flächeninhalts und Flächengleichheit kongruenter Vielecke (Satz D 43, D 44)

Methodische Hinweise

Berechnen des Flächeninhalts von speziellen Vielecken ... Aufgaben, die etwa dem Auftrag D 84 entsprechen, haben die Schüler bereits in der 5. Klasse gelöst; das sollte ihnen aus erzieherischen Gründen auch deutlich werden. Eine solche Aufgabe ist deshalb als Einstieg geeignet (in SSA). Falls bei der Lösung Schwierigkeiten auftreten, kann man auf entsprechende Figuren zurückgreifen, die auf Millimeterpapier oder Karopapier gezeichnet sind, so daß der Flächeninhalt durch Auszählen der Einheitsquadrate ermittelt werden kann. An Lösungen von Schülern anknüpfend, die u. U. ergänzt werden müssen, sind dann die verschiedenen Möglichkeiten, Beispiel D 16 entsprechend, zu diskutieren. Dabei müssen die Schüler deutlich erkennen, daß bei geeigneter Zerlegung die auftretenden Teilfiguren bzw. die für eine Ergänzung erforderlichen Teilfiguren Rechtecke sind. Zur Festigung der verschiedenen Lösungsmöglichkeiten kann eine der Teilaufgaben von Aufgabe 1 bearbeitet, eine weitere als Hausaufgabe gestellt werden. Mit der Behandlung von Aufgabe 3 kann den Schülern bewußtgemacht werden, wo derartige Berechnungen auftreten können. Auch im Zusammenhang mit Auftrag D 84 sollte erörtert werden, wofür derartige Berechnungen erforderlich sind (Berechnung von Saatgut- oder Düngemittelbedarf, Farbverbrauch beim Anstreichen, Materialverbrauch beim Auslegen mit Fußbodenbelag, Bestimmung des Mietpreises oder dgl.).

Gewinnen der Einsicht in die Additivität des Flächeninhalts ... Aufgabe 4 kann einleitend einerseits zur weiteren Festigung und zur Kontrolle des Könnens der Schüler genutzt werden. Andererseits kann an ihr, bei der Diskussion der von den Schülern eingeschlagenen Lösungswege, jeweils eine dem Satz D 44 entsprechende spezielle Aussage herausgestellt werden. Anschließend wird dann verallgemeinernd Satz 44 formuliert. Dabei erscheint dieser Sachverhalt den Schülern relativ „selbstverständlich", und noch mehr trifft dies eigentlich auf Satz D 43 zu. Bei beiden Sätzen ist den Schülern deutlich zu machen, daß sie deshalb besonders herausgestellt werden, weil sie grundlegend für die Berechnung des Flächeninhalts von Vielecken sind und man sich bei den weiteren Überlegungen auf sie und den Satz D 42 stützt.

Der Satz D 43 ist auch in der Form „Kongruente Vielecke sind stets flächengleich" auszusprechen, und dabei ist auf „flächengleich" im Sinne von „haben den gleichen Flächeninhalt" einzugehen. Im Zusammenhang mit Satz D 43 sollte auch Aufgabe 5 bearbeitet werden.

Falls genügend Zeit vorhanden ist, kann man noch auf die näherungsweise Bestimmung des Flächeninhalts von Vielecken unter Benutzung von Millimeterpapier eingehen, um die sonst etwas formal bleibende Mitteilung, daß jedem Vieleck eindeutig ein Flächeninhalt zugeordnet ist, auf diese Weise abzustützen. Die Bearbeitung des Auftrags D 85 bietet sich zur Überleitung auf das nächste Thema an. Dadurch kann die Beschäftigung mit der Flächeninhaltsbestimmung von Dreiecken motiviert werden. Dabei sollten die Schüler erkennen, daß bei Kenntnis eines Verfahrens zur Flächeninhaltsermittlung von Dreiecken auch der Flächeninhalt von beliebigen Vielecken ermittelt werden kann.

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 1c **2.** Aufg. 4

Der Flächeninhalt von Dreiecken (3 Std.)

LE 31 (LB 198 bis 201)

Ziele

Die Schüler
- können den Flächeninhalt von Dreiecken sicher berechnen und dieses Können auch beim Berechnen des Flächeninhalts anderer Vielecke anwenden,
- haben ihre Fähigkeiten im Problemlösen sowie im Herleiten bzw. Beweisen unter Begründung aller erforderlichen Teilschritte weiterentwickelt.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Gewinnen der Flächeninhaltsformel für rechtwinklige Dreiecke (Herleitung bzw. Vermutungsbildung und Beweis)
- Übungen zur Berechnung des Flächeninhalts von rechtwinkligen Dreiecken

2. Stunde
- Gewinnen der Flächeninhaltsformel für (beliebige) Dreiecke (Herleitung bzw. Vermutungsbildung und Beweis)
- Übungen zur Flächeninhaltsberechnung von Dreiecken als Erstfestigung

3. Stunde
- Übungen zur Flächeninhaltsermittlung von Dreiecken und anderen Vielecken

Methodische Hinweise

Gewinnen der Flächeninhaltsformel für rechtwinklige Dreiecke Nach einer Wiederholung der bei der Bearbeitung von Auftrag D 85 entwickelten Gedanken sollten die Schüler (in SSA) Auftrag 86 bzw. eine entsprechende Aufgabe bearbeiten (Vorgabe mittels Polylux unter Nutzung der Quadratrasterfolie). Hierbei sollten die Schüler erfassen, daß es zur Lösung von Aufgaben oft zweckmäßig ist, zunächst Spezialfälle zu betrachten. Bei geeigneter Klassensituation kann sogar motivierend und zielorientierend verdeutlicht werden, daß mit der Berechnung des Flächeninhalts rechtwinkliger Dreiecke infolge der Zerlegbarkeit jedes beliebigen Dreiecks in rechtwinklige Teildreiecke eigentlich das Wesentliche bereits erledigt ist. Im Regelfall sollte der Lehrer dies aber nur tun, wenn von Schülern entsprechende Fragen oder Anstöße kommen.
Für das weitere Vorgehen gibt es zwei Möglichkeiten:
- Folgt man dem Lehrbuch, so ist im Zuge der Auswertung zu Auftrag D 86 durch Verallgemeinerung Satz D 45 als Vermutung zu formulieren und anschließend zu beweisen. Dabei genügt es, nach der Erörterung der wesentlichen Gedankengänge im Unterrichtsgespräch die Beweisdarstellung im Lehrbuch zu besprechen.
- Stellt man nach der Auswertung zu Auftrag D 86 die allgemeine Aufgabe, den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ABC (mit rechtem Winkel bei C) zu ermitteln, so muß statt der Beweisdarstellung im Lehrbuch eine entsprechende Herleitung an der Tafel erfolgen. In diesem Fall wird der Satz D 45 erst anschließend, als Ergebnis dieser Herleitung, formuliert.

Für **Übungen zur Berechnung des Flächeninhalts von rechtwinkligen Dreiecken** sind die Aufgaben 1a und 2a geeignet (SSA). Es sollten aber auch schon Aufgaben zur Berechnung des Flächeninhalts von Vielecken (wie Aufg. 3) bearbeitet werden; dadurch wird auch die Bestimmung des Flächeninhalts beliebiger Dreiecke vorbereitet.

Das **Gewinnen der Flächeninhaltsformel für (beliebige) Dreiecke** ist ebenfalls mit der Bearbeitung einer Aufgabe wie Auftrag D 87 (in SSA) einzuleiten. Die Vorgabe der Dreiecke im Quadratnetz provoziert die Zerlegung der Dreiecke in rechtwinklige Teildreiecke oder die Ergänzung der Dreiecke zu Rechtecken. Bei einer Diskussion des 2. Lösungsweges ist es ratsam, sich auf die Erörterung des vorliegenden Spezialfalls zu beschränken.

Nur der 1. Lösungsweg sollte allgemein weiter verfolgt werden. Um die Schüler auf ihn zu führen, kann man in den vorgegebenen Bildern Höhen hervorheben. Jedoch sollte man zunächst versuchen, ob die Schüler nicht selbst einen Weg sehen, dabei an ihnen bekannte Aussagen anknüpfend.

Die Betrachtung der im Auftrag D 87 vorgegebenen speziellen Dreiecke bereitet die für den Beweis bzw. die Herleitung von Satz D 46 zu treffende Fallunterscheidung vor. (Für das Vorgehen bei Satz D 46 gibt es – analog wie beim rechtwinkligen Dreieck – zwei Möglichkeiten.) Dabei muß den Schülern deutlich werden, daß eine Aussage erst dann gesichert ist, wenn alle in Betracht kommenden Spezialfälle erfaßt worden sind.

Auftrag D 88 darf deshalb keinesfalls ignoriert werden, auch wenn man auf eine ausführliche Darstellung des Beweises (bzw. der Herleitung) sicher verzichten wird. Beim rechtwinkligen Dreieck (Auftragsteil a) ist zu bedenken, daß manche Schüler gerade deshalb, weil es so einfach erscheint, nicht recht wissen, was überhaupt noch zu machen ist. Eine Umformulierung, etwa zu „Erläutere, warum die Formel $A = \frac{g \cdot h}{2}$ auch die Flächenberechnung rechtwinkliger Dreiecke mit erfaßt (Fall 2)!", kann evtl. helfen. Beim stumpfwinkligen Dreieck (Auftragsteil b) müssen die Schüler erfassen, daß diese Überlegung (erst und nur) sichert, daß auch jede der kürzeren Seiten als Grundseite für die Flächeninhaltsberechnung gewählt werden kann; denn eine Zerlegung in zwei rechtwinklige Teildreiecke wie im Fall 1 ist auch bei einem stumpfwinkligen Dreieck stets möglich, aber eben nur durch die zur längsten Seite gehörige Höhe.

Hinweis: Für die beim Beweis von Satz D 46 anzustellenden Überlegungen wird stillschweigend vorausgesetzt, daß die den Schülern für das Rechnen mit gebrochenen Zahlen bekannte Distributivität auf das Rechnen mit Längen übertragen wird. Für den 3. Fall wird hier freilich nicht die Distributivität der Multiplikation bezüglich der Addition genutzt, sondern die bezüglich der Subtraktion (deren Ausführbarkeit vorausgesetzt). Von ihr wird zwar sonst auch des öfteren Gebrauch gemacht (z. B. bei Kopfrechenaufgaben wie $7 \cdot 59$), doch wird sie explizite meist nicht ausgesprochen – abgesehen von Erörterungen zu Additions- und Subtraktionsaufgaben mit mehr als zwei Operanden in Klasse 4.

Auftrag D 89 ist geeignet, um zu überprüfen, ob die Schüler die Erörterung des im Lehrbuch dargelegten Falls verstanden haben. Seine Bearbeitung kann in der Formulierung einer Aussage gipfeln wie: „Haben zwei Dreiecke eine Seite gemeinsam und liegen die gegenüberliegenden Eckpunkte auf einer Parallelen zu dieser Seite, so sind die Dreiecke flächen(inhalts)gleich."

Übung zur Flächeninhaltsberechnung von Dreiecken Zur Erstfestigung sollten einige Aufgaben analog zum Auftrag D 87 gelöst werden, die jedoch Dreiecke in unterschiedlicher Lage enthalten. Hierbei kommt es darauf an, daß die Schüler erforderliche Längen selbst möglichst schnell und unkompliziert den Zeichnungen entnehmen können. Dabei soll ihnen klar werden, daß für die Flächeninhaltsbestimmung eines Dreiecks für g und h eine beliebige Seite und die dazugehörige Höhe gewählt werden können. Bei geeigneten Aufgaben sind auch verschiedene Möglichkeiten zur Berechnung zu betrachten. Räumliche geometrische Betrachtungen können einbezogen werden, indem man den Oberflächeninhalt eines dreiseitigen Prismas (Stereometriebaukasten) berechnen läßt. Auch Oberflächeninhalte von Pyramiden mit rechteckiger (insbesondere quadratischer) Grundfläche können hier – oder später – ermittelt werden.

Übungen zur Flächeninhaltsermittlung von Dreiecken und anderen Vielecken Bei der Entwicklung von Fertigkeiten auf diesem Gebiet ist es wesentlich, daß die Schüler von Zeichnungen oder Skizzen ausgehen oder diese anfertigen und aus ihnen benötigte Längen selbständig entnehmen können.

In den Übungen sind Fragestellungen mit Maßstab, wie Aufgabe 7 oder 11, zu berücksichtigen.

Beim Auftreten von rechtwinkligen Dreiecken sollten die Schüler den für Flächeninhaltsberechnungen möglichen einfacheren Ansatz verwenden. Aufgaben wie 3 und 4 bereiten schon die nächste Lerneinheit vor. Dabei sollte in der Diskussion, anknüpfend an die in der Lerneinheit 30 vermittelten Kenntnisse, den Schülern klar werden, daß mit der Möglichkeit der Flächeninhaltsberechnung für beliebige Dreiecke nunmehr auch der Flächeninhalt beliebiger Vielecke durch Zerlegung in Dreiecke ermittelt werden kann.

Kontrollaufgaben
1. Aufg. 1b **2.** Aufg. 6d **3.** Aufg. 11

Der Flächeninhalt von Trapezen und Parallelogrammen (4 Std.)

LE 32 (LB 201 bis 204)

Ziele

Die Schüler
- haben ihre Erkenntnis gefestigt, daß der Flächeninhalt beliebiger Vielecke ermittelt werden kann, indem die betrachteten Vielecke in Dreiecke zerlegt werden,
- haben die Herleitung der Flächeninhaltsformeln für Trapeze und Parallelogramme verstanden und können Flächeninhalte unter Benutzung dieser Formeln sicher berechnen,
- können Flächeninhalte und Umfänge beliebiger Vielecke berechnen und verwenden bei den Zerlegungen für die Flächeninhaltsberechnung auch Trapeze,
- haben ihr Können im Lösen von Sachaufgaben weiterentwickelt.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeiten und Festigen einer Formel für den Flächeninhalt von Trapezen

2. Stunde
- Erarbeiten und Festigen einer Formel für den Flächeninhalt von Parallelogrammen
- Verwendung von Trapezen bei der Flächeninhaltsberechnung von Vielecken

3. Stunde
- Zusammenfassung zur Flächeninhaltsermittlung und Umfangsberechnung von Vielecken

4. Stunde
- Lösen von Sachaufgaben, bei denen Flächeninhalte und Umfänge von Vielecken zu berechnen sind

Methodische Hinweise

Erarbeiten und Festigen einer Formel für den Flächeninhalt von Trapezen Die Bearbeitung des Auftrags D 90 (in SSA) kann zum Satz D 47 führen. Hierbei sollte den Schülern deutlich werden, daß sie bereits alle Kenntnisse zur Verfügung haben, um derartige Aufgaben lösen zu können. Ein Hervorheben und gesondertes Betrachten von Trapezen (bzw. später noch Parallelogrammen) mit dem Gewinnen einer spezifischen Formel ist aber zweckmäßig, weil solche Vierecke recht häufig in Aufgaben vorkommen.

Zur Festigung der gewonnenen Erkenntnisse ist Aufgabe 1 geeignet (a, b im Unterricht und c, d als HA). Um auch räumliche geometrische Fragestellungen zu berücksichtigen, ist die Berechnung des Oberflächeninhalts eines Prismas mit trapezförmigem Querschnitt (Stereometriebaukasten) empfehlenswert.

Erarbeiten und Festigen einer Formel für den Flächeninhalt von Parallelogrammen Einleitend sollten die Schüler (in SSA) die Aufgabe 2a und c (LB 203) bearbeiten. Bei der Auswertung kann dann anknüpfend an Aufgabe 2c und die als Hausaufgabe bearbeitete Aufgabe 1d, bei denen Parallelogramme vorliegen, die Spezialisierung von Satz D 47 zu Satz D 48 erfolgen. Die Erstfestigung sollte durch einige einfache Beispiele (Verwendung der Lochschablone, etwa $A(17)$ $B(18)$ $C(22)$ $D(23)$) erfolgen. Wichtig ist hierbei wieder, daß die Schüler benötigte Längen den Zeichnungen entnehmen müssen und nicht durch Vorgabe von Größen wie a, h_a lediglich Übungen zur Multiplikation von Längen mit Dezimalbrüchen als Zahlenwerte entstehen.

Mit der Aufgabe 6, die auf das Umschlagbild des Lehrbuchs Bezug nimmt, sollte sich auch möglichst jeder Schüler selbständig befassen. Am ehesten ist hier wohl die Folgerung der Flächen(inhalts)gleichheit von Parallelogramm und Rechteck aus dem Umstand zu erwarten, daß Grundlinie und Höhe des Parallelogramms ebenso lang wie die beiden Rechteckseiten sind. Falls alle Schüler diese Begründung wählen (bis auf die, die keine oder keine einwandfreie zu geben vermögen), muß der Lehrer entscheiden, ob er dennoch auf die andere Möglichkeit über den Nachweis der Kongruenz der beiden Dreiecke eingeht. Kommt dies zur Sprache, so sollte aber auch deutlich werden, daß sich damit ein anderer als der im Unterricht beschrittene Weg andeutet, um zur Flächeninhaltsformel für Parallelogramme zu gelangen.

Verwendung von Trapezen bei der Flächeninhaltsberechnung von Vielecken Ausgangspunkt der Erörterungen kann die Bearbeitung von Aufgabe 3 bilden. (Zeichnungen des Buches können dabei zweckmäßigerweise durchgepaust werden, auch vorsichtiges Durchstechen mit einer Stecknadel oder Zirkelspitze ist möglich.) Zur Festigung (ggf. HA) eignet sich Aufgabe 8. Bei derartigen Aufgaben sollte man nicht die (möglichst längerfristig vorausschauend erfolgende) Reaktivierung des Wissens und Könnens hinsichtlich der Umrechnung von Flächeninhaltsangaben, insbesondere solcher Beziehungen wie $1\ \text{ha} = 10000\ \text{m}^2$ vergessen.

Die **Zusammenfassung zur Flächeninhaltsermittlung und Umfangsberechnung von Vielecken** kann folgendermaßen gestaltet werden: Vorgegeben werden mittels Lochschablone oder Arbeitsblatt verschiedene Vielecke (darunter Dreiecke, Trapeze, Parallelogramme, Rechtecke, Quadrate). Die Schüler sollen nun (in SSA) die Flächeninhalte und Umfänge schätzen, anschließend berechnen. Dabei müssen sie benötigte Längen selbständig den Zeichnungen entnehmen. Geschätzte und berechnete Längen bzw. Flächeninhalte sind zu vergleichen. Bei der anschließenden Diskussion der Ergebnisse erfolgt eine Systematisierung der Kenntnisse der Schüler. Im Zusammenhang damit kann auch die Beziehung zwischen den betrachteten Aussagen (siehe Bild, S. 225) diskutiert werden.

Als Abschluß kann Aufgabe 12 bearbeitet werden, bei differenzierter Arbeit evtl. ergänzt durch die Forderung nach Angabe einer Formel für den Flächeninhalt von Drachenvierecken und auch speziell für Rhomben. Auch der Oberflächeninhalt einer geraden quadratischen Pyramide (Stereometriebaukasten) kann abschließend ermittelt werden, sofern dies nicht schon in der vorangegangenen Unterrichtseinheit erfolgt ist (vgl. S. 231).

Für das **Lösen von Sachaufgaben . . .** ist in erster Linie an die Aufgaben 9, 10 oder 11 zu denken.

Im Interesse der Entwicklung anwendungsbereiten Wissens und Könnens sollte allerdings nach Möglichkeit auch eine komplexere Aufgabe einbezogen werden wie etwa Aufgabe 7 aus den „Aufgaben zur Übung und Wiederholung“ (LB 205).

Kontrollaufgaben

1. Aufg. 1c **2.** Aufg. 2c **3.** Aufg. 7 **4.** Aufg. 9

Unterrichtsmittel

	Bestellnummer
Filme	
K–F7 Abbildung durch Spiegelung I, Begriff	24 61 53
K–F8 Abbildung durch Spiegelung II, Eigenschaften	24 61 61
K–F9 Abbildung durch Spiegelung III, Achsensymmetrie	24 61 78
K–F97 Abbildung durch Drehung	24 62 17
Lichtbildreihe	
R 1008 Drehung, Spiegelung, Kongruenz	24 50 15
Projektionsfolien	
Koordinatensystem I. Quadrant	01 77 03
Zahlenbereichserweiterung	24 73 55
Abbildung durch Verschiebung I	25 74 37
Abbildung durch Verschiebung II	25 74 45
Abbildung durch Verschiebung III	25 74 53
Abbildung durch Spiegelung I	25 74 61
Abbildung durch Spiegelung II	25 74 78
Hintereinanderausführung von Spiegelungen	25 74 86
Abbildung durch Drehung I	25 74 94
Abbildung durch Drehung II	25 75 00
Grundkonstruktionen	25 75 17
Dreieckskonstruktionen I	25 75 25
Dreieckskonstruktionen II	25 75 33
Dreieckstransversalen	25 75 41
Sätze zur Planimetrie	24 76 44
Herleitung der Flächenformel für Dreiecke	24 76 11
Geräte	
Lochschablone (Schülergerät)	04 02 12
Zeichenschablone	04 02 20
Halbdurchlässiger Spiegel	24 03 73
Quader mit Einheitswürfel	04 02 53
Stereometriebaukasten I	04 02 61
Stereometriebaukasten II	04 02 78
Stereometriebaukasten III	04 02 86

Satz Kantenmodelle	24 04 86
Dezimeterwürfel	24 02 36

Sonstige Mittel
Hafttafel, Filmprojektor, Diaprojektor, Lichtschreiber, Wandtafellineal, Wandtafeldreiecke, Wandtafelwinkelmesser, Wandtafelzirkel

Literatur

Abkürzung VWV: Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

Grundsatzdokumente

[G 1] X. Parteitag der SED, 11. bis 16. April 1981 in Berlin. Bericht des Zentralkomitees der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands an den X. Parteitag der SED. Berichterstatter: Genosse Erich Honecker, Dietz Verlag, Berlin 1981.

[G 2] IX. Parteitag der SED, Berlin, 18. bis 22. Mai 1976. Programm der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands. Dietz Verlag, Berlin 1976.

[G 3] VIII. Pädagogischer Kongreß der Deutschen Demokratischen Republik vom 18. bis 20. Oktober 1978. Protokoll. VWV, Berlin 1979.

[G 4] Gesetz über das einheitliche sozialistische Bildungssystem. Vom 25. Februar 1965. Gesetzblatt der DDR, I, 1965, Nr. 6.

[G 5] Offener Brief an alle Pädagogen der Deutschen Demokratischen Republik. Deutsche Lehrerzeitung, VWV, Berlin 28 (1981), Nr. 21.

[G 6] Referat des Ministers für Volksbildung, HONECKER, M.: Auch wir Pädagogen stellen uns der Herausforderung dieses Jahrzehnts. Für jeden Schüler den besten Start ins Leben sichern. In: Protokoll der zentralen Direktorenkonferenz des Ministeriums für Volksbildung vom 10. bis 12. Mai 1982. VWV, Berlin 1982.

[G 7] Lehrplan Mathematik, Klassen 4 und 5. VWV, Berlin 1982 (Titel-Nr. 00 30 20).

[G 8] Lehrplan Mathematik, Klassen 5 bis 10. VWV, Berlin 1980 (Titel-Nr. 00 30 18).

Bücher und Broschüren

[B 1] Autorenkollektiv: Enzyklopädie der Elementarmathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1954 (Bd. I), 1956 (Bd. II), 1958 (Bd. III), 1969 (Bd. IV), 1971 (Bd. V).

[B 2] HAJOS, G.: Einführung in die Geometrie. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1970.

[B 3] WALSCH, W./WEBER, K. (Herausg.): Methodik – Mathematikunterricht. VWV, Berlin 1975.

[B 4] Autorenkollektiv: Zum logischen Denken im Mathematikunterricht. VWV, Berlin 1975.

[B 5] Autorenkollektiv: Mathematische Aufgaben für die Klassen 6 bis 10 (Beiträge zum Mathematikunterricht). VWV, Berlin 1983.

[B 6] ADELT, L., BRUCHHOLD, H., FLADE, L.: Projektionsfolien im Mathematikunterricht (Beiträge zum Mathematikunterricht). VWV, Berlin 1977.

[B 7] WUSSING, H./ARNOLD, W. (Herausg.): Biographien bedeutender Mathematiker. VWV, Berlin 1975.

[B 8] WUSSING, H.: Mathematik in der Antike. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1965.

Beiträge aus „Mathematik in der Schule", Volk und Wissen Volkseigener Verlag

Allgemeines

[1] FEIN, B.: Zu einigen Aspekten der Weiterentwicklung der Qualität des Mathematikunterrichts und seiner Ergebnisse nach dem X. Parteitag der SED. Berlin 19 (1981), H. 11, S. 801.

[2] LEHMANN, K.: Ein Weg zur Verbesserung der Schülerleistungen im Definieren, dargestellt am Beispiel des Mathematikunterrichts der Klasse 6. Berlin 10 (1972), H. 11, S. 636ff.; Berlin 11 (1973), H. 2, S. 91ff.; H. 3, S. 157ff.

[3] LEHMANN, K.: Ein Weg zur Befähigung der Schüler zum Beweisen in Klasse 6. Berlin 15 (1977), H. 7/8, S. 366ff.; H. 9, S. 497ff.; H. 11, S. 599ff.

[4] WEBER, K.: Ziele, Aufgaben und methodische Grundkonzeption des Mathematikunterrichts nach dem weiterentwickelten Lehrplan Klasse 5 und seine Einordnung in den Gesamtlehrgang Mathematik. Berlin 20 (1982), H. 10, S. 721ff.

[5] Tägliche Übungen in den Klassen 5 und 6 – Aus der Praxis erfahrener Pädagogen. Berlin 19 (1981), H. 4, S. 252ff.; H. 5, S. 326ff.; H. 6, S. 409ff.; H. 7/8, S. 499ff.; H. 9, S. 648ff.

Kapitel 1

[6] LORENZ, G.: Das kleinste gemeinsame Vielfache natürlicher Zahlen, Klasse 6. Berlin 16 (1978) H. 6, S. 317ff.

[7] PIETZSCH, G.: Einführung des Begriffs „Primzahl". Berlin 15 (1977), H. 7/8, S. 397ff.

Kapitel 2

[8] ELFERS, H.: Zielgerichtete Gestaltung der Schülertätigkeit. Berlin 18 (1980), H. 7/8, S. 375ff.

[9] LEHMANN, K.: Motivierung – Zum Stoffgebiet „2. Gebrochene Zahlen", Klasse 6. Berlin 17 (1979), H. 9, S. 489ff.

[10] FANGHÄNEL, G./HAUCK, H.: Zum Arbeiten mit Näherungswerten. Berlin 18 (1980), H. 11, S. 589ff.

[11] GRASSMANN, M.: Näherungsrechnung in Klasse 6 – Schlußfolgerungen aus der Diskussion. Berlin 21 (1983), H. 7/8, S. 513ff.

[12] FANGHÄNEL, G./WEBER, K.: Wie wichtig ist das Rechnenkönnen? – Zum Abschluß einer aktuellen Diskussion. Berlin 21 (1983), H. 6, S. 422ff.

Kapitel 3

[13] BREUER, W.: Zum inhaltlichen Lösen von Gleichungen und Ungleichungen in den Klassen 4, 5 und 6. Berlin 16 (1978), H. 2/3, S. 82ff.; H. 4, S. 178ff.

[14] BREUER, W.: Zum Lösen von Gleichungen und Ungleichungen in den Klassen 6, 7 und 8. Berlin 17 (1979), H. 2/3, S. 102ff.

[15] ILSE, D.: Über funktionale Charakterisierungen der direkten Proportionalität $f(x) = c \cdot x$. Berlin 9 (1971), H. 1, S. 16ff.

[16] ILSE, D.: Zur Proportionalität von Größen. Berlin 15 (1977), H. 7/8, S. 358f.

[17] LORENZ, G.: Anregungen und Beispiele einer problemhaften Unterrichtsgestaltung – Die Einführung des Verhältnisbegriffs. Berlin 16 (1978), H. 4, S. 185ff.

[18] PIETZSCH, G.: Anregungen und Beispiele einer problemhaften Unterrichtsgestaltung – Umgekehrte Proportionalität, Klasse 6. Berlin 16 (1978), H. 5, S. 253ff.

[19] REICHOLD, K.: Zur Behandlung von Sachaufgaben in Klasse 6 unter Beachtung des auszuprägenden Könnensniveaus beim Finden des mathematischen Ansatzes. Berlin 20 (1982), H. 2/3, S. 148ff.

[20] WALSCH, W.: Zur Einführung der Begriffe „Gleichung", „Ungleichung", „Term". Berlin 10 (1972), H. 7, S. 387ff.; H. 11, S. 669 (Berichtigung).

Kapitel 4

[21] BOCK, H./WUSSING, G.: Zur zielgerichteten Gestaltung der Schülertätigkeit – Förderung der geistigen Beweglichkeit bei der Behandlung von Dreiecks- und Viereckskonstruktionen in Klasse 6. Berlin 18 (1980), H. 5, S. 263ff.

[22] DENNERT, M./ILGNER, K.: Zum Zeichnen und Konstruieren im Mathematikunterricht unserer Oberschule. Berlin 20 (1982), H. 7/8, S. 537.

[23] DENNERT, M./LORENZ, G.: Zu einigen Fragen der Terminologie und Symbolik im Geometrieunterricht unserer Schule. Berlin 20 (1982), H. 7/8, S. 606ff.

[24] FRANK, B.: Bewegungen in der euklidischen Geometrie und im Geometrielehrgang der Oberschule – ein Beitrag zum Problem der Systematik und Kontinuität des Geometrieunterrichts an unseren Schulen. Berlin 11 (1973), H. 11, S. 628ff.; H. 12, S. 681ff.; Berlin 12 (1974) H. 1, S. 8ff.

[25] FRANK, E./WEBER, K.: Grundlegendes geometrisches Wissen und Können – ein entscheidender Bestandteil mathematischer Allgemeinbildung. Berlin 20 (1982), H. 7/8, S. 481ff.

[26] GIMPEL, M.: Fragen der methodischen Behandlung von geometrischen Konstruktionen am Beispiel des Konstruierens von Dreiecken. Berlin 16 (1978), H. 2/3, S. 108ff.

[27] LEHMANN, K.: Motivierung – Zum Stoffgebiet „4. Planimetrie", Klasse 6. Berlin 16 (1978), H. 9, S. 478ff.; H. 11, S. 603ff.

[28] LORENZ, G.: Der am Abbildungsbegriff orientierte Aufbau des Geometrielehrgangs in unserer Schule. Berlin 12 (1974), H. 1, S. 13ff.; H. 2, S. 104ff.

[29] LORENZ, G.: Zur Entwicklung von sicheren Fähigkeiten im Beweisen im Geometrieunterricht der Klassen 6 bis 8. Berlin 16 (1978), H. 10, S. 534ff.; H. 11, S. 600ff.

[30] LORENZ, G.: Zur Behandlung der Elementarbewegungen „Verschiebung", „Spiegelung" und „Drehung" in den Klassen 4 und 5. Berlin 20 (1982), H. 9, S. 662.

[31] PIETZSCH, G.: Überlegungen zur Behandlung von Konstruktionsaufgaben. Berlin 20 (1982) H. 7/8, S. 520.

[32] REICHENBACH, H.: Systematisierung – Zum Stoffgebiet „4. Planimetrie" (Stoffabschnitt „4.4. Dreiecke"), Klasse 6. Berlin 17 (1979), H. 10, S. 542ff.

[33] WALSCH, W.: Zur Veranschaulichung logischer Zusammenhänge zwischen Sätzen – dargestellt am Stoffgebiet „Der Kreis". Berlin 13 (1975), H. 5/6, S. 305ff.