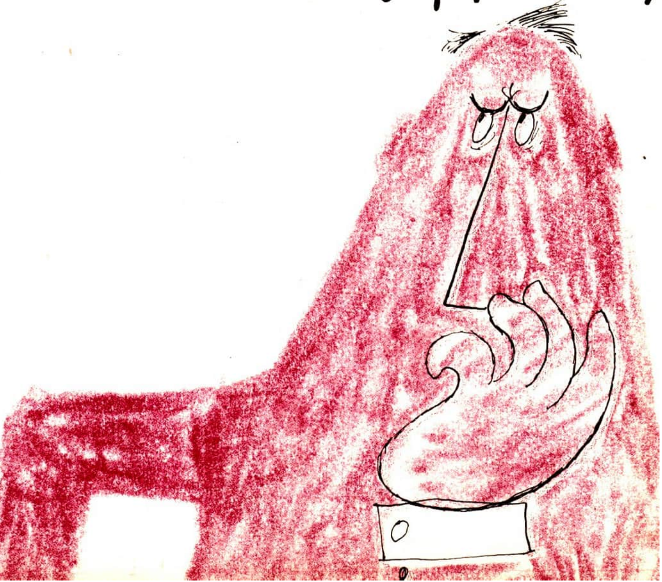
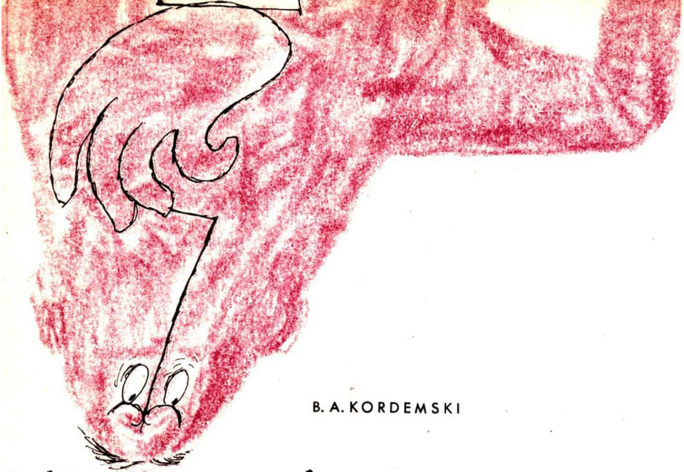

Mathematischer Denksport
Kordemski
Köpfchen, Köpfchen!
Mathematik für jung und alt
URANIA

Kordemski · Köpfchen, Köpfchen!

Mathematik zum Zeitvertreib
Mathematik ganz neu
Mathematik zum Knobeln
Mathematik mit Kunststückchen
Mathematik zum Vergnügen
Mathematik mit und ohne Rechnen
Mathematik als Spiel
Mathematik für jung und alt

Köpfchen,





B. A. KORDEMSKI

Köpfchen!

Mathematik zur Unterhaltung

URANIA-VERLAG LEIPZIG/JENA/BERLIN

ORIGINALAUSGABE

Б. А. Кордемский
Математическая смекалка
Государственное издательство физико-математической литературы
Москва 1959

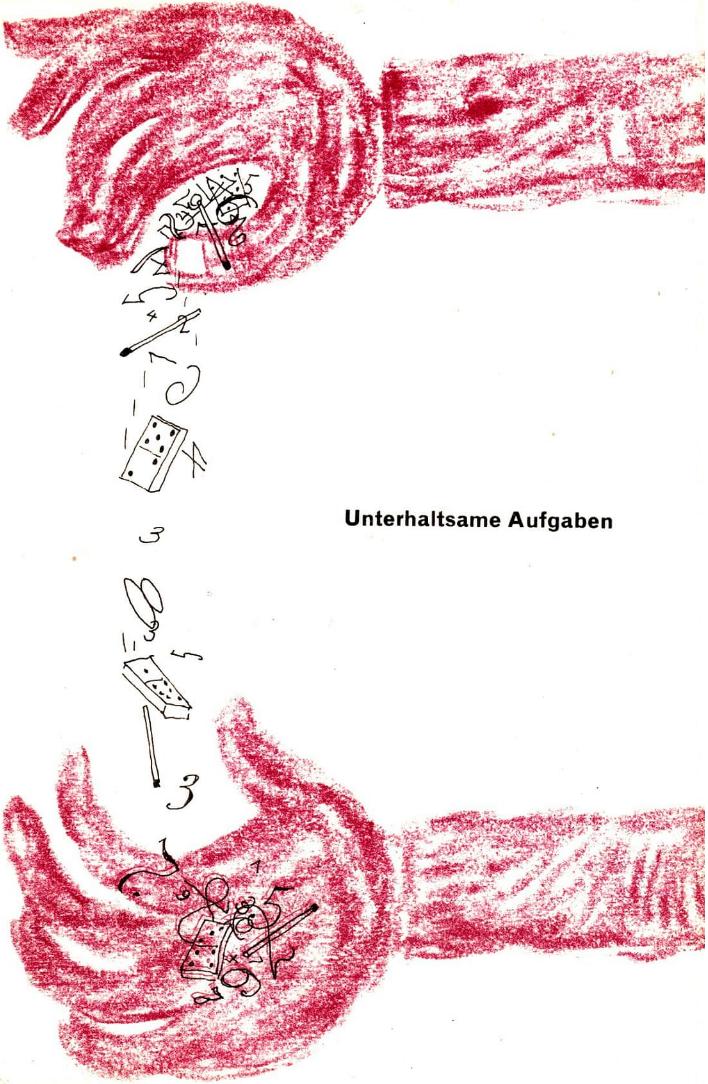
ÜBERSETZUNG VON DR. KLEMENS JUNGE

Vorwort

Mit der Übersetzung des Werkes von Boris Anastasewitsch Kordemski wurde ein Buch geschaffen, das auf dem Büchermarkt der Deutschen Demokratischen Republik das einzige seiner Art sein dürfte. In ansprechender Weise sind hier Mathematik und Unterhaltung miteinander verknüpft.
,,Köpfchen, Köpfchen!" ist eine Sammlung fesselnder und lehrreicher Aufgaben, mathematischer Spiele, Rätsel und kleiner ,,Zaubereien". Je nach der Vorbildung kann sich der Leser den schwierigen oder den leichteren Aufgaben zuwenden. Jedes Kapitel enthält Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades. Wer mit der Begriffswelt der Mathematik noch wenig vertraut ist, findet ebenso unterhaltsamen Ansporn zum scharfsinnigen Denken wie der Absolvent der zehn- oder zwölfklassigen Oberschule. Der Autor bietet eine Fülle von Problemen, die der Praxis des täglichen Lebens oder der Freude an der Lösung ,,kniffliger" Denksportaufgaben entsprungen sind. Er gibt uns ein Werk in die Hand, das den Verstand und die Logik unseres Denkens schult, das zu Findigkeit und Spürsinn erzieht und darüber hinaus tausenderlei Anregungen zu geistvollen Spielen und Wettstreiten im Freundes- und Familienkreis bietet. Mit Hilfe des Lösungsteiles vermag der Leser zu überprüfen, ob er bei der Lösung einer Aufgabe auf der richtigen ,,Spur" war.
In der Sowjetunion erlebte dieses Werk bereits die siebente Auflage. Für die Herausgabe in der Deutschen Demokratischen Republik wurde es von Autor und Verlag neu bearbeitet.
Jede Auflage bereitete der Autor in engem Kontakt mit seinem Leserpublikum vor, das ihm in zahlreichen Zuschriften selbstgefundene, originelle Lösungen oder neue Aufgaben mitteilte. Auch vom deutschen Leser erwartet der Autor eine solche Regsamkeit. Der Verlag übernimmt für alle Anregungen aus den Kreisen unserer Leserschaft gern die Vermittlung zwischen Leser und Autor.
Wir wünschen dem Buch eine gute Verbreitung und unseren Lesern — ,,Köpfchen, Köpfchen"!

Der Verlag

Unterhaltsame Aufgaben



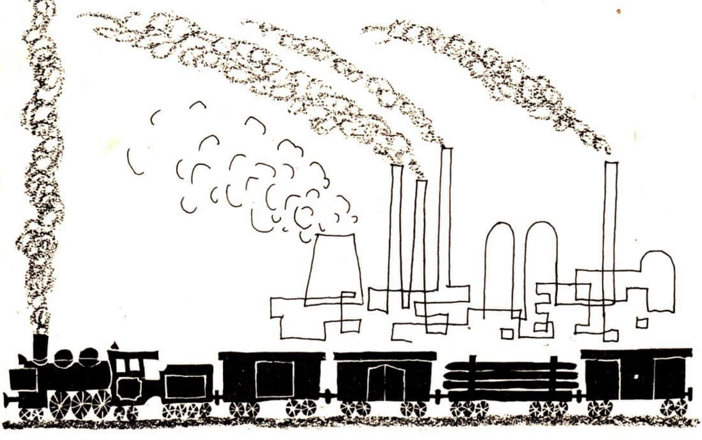
1. Abschnitt

Prüft und übt euern Verstand zunächst an solchen Aufgaben, zu deren Lösung nur zielbewußte Ausdauer, Geduld, Auffassungsgabe und die Kenntnis des Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens und Dividierens g a n z e r Zahlen verlangt wird.

1. Die aufmerksamen Jungen Pioniere

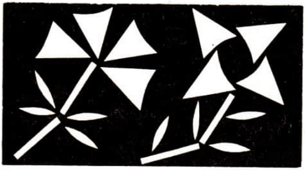
Zwei Schüler – ein Junge und ein Mädchen – haben gerade wetterkundliche Beobachtungen angestellt. Jetzt ruhen sie sich an einem Abhang aus und beobachten einen vorüberfahrenden Güterzug.
Die Lokomotive keucht schwer unter starker Rauchentwicklung eine Steigung hinan. Der Wind weht gleichmäßig, ohne Böen, genau den Eisenbahndamm entlang.
„Welche Windgeschwindigkeit haben unsere Beobachtungen ergeben?" fragte der Junge.
„7 Meter in der Sekunde," antwortete ihm das Mädchen.
„Das genügt mir jetzt, um festzustellen, mit welcher Geschwindigkeit der Zug fährt."
„Ja wirklich?" bezweifelte das Mädchen.
„Sieh doch genauer auf die Bewegung des Zuges!"
Das Mädchen überlegte ein bißchen, und da begriff sie auch, worum es hier ging. Sie erfaßte vollkommen richtig, was unser Zeichner dargestellt hat (Abb. 1). Mit welcher Geschwindigkeit fuhr der Zug?

1



2. „Die steinerne Blume“

In dem Märchen von P. Bashow „Die steinerne Blume“ tritt ein begabter und geschickter Meister Danila auf.
Man erzählt im Ural, daß Danila, als er noch ein Lehrling war, zwei Blumen, wie in Abb. 2 dargestellt, anfertigte, deren Blätter, Stengel und Blüten sich auseinandernehmen ließen. Aus diesen Teilen konnte man eine kreisrunde Platte zusammensetzen.
Probiert es! Zeichnet die Blumen des Danila auf Papier oder Karton, schneidet die Blütenblätter, Stengel und Blätter aus und legt sie zu einem Kreis zusammen.



2

3. Damesteine sollen verschoben werden

Legt auf den Tisch in eine Reihe 6 Damesteine, und zwar abwechselnd einen weißen und einen schwarzen (Abb. 3).
Rechts oder links davon laßt einen freien Platz, der für 4 Steine ausreicht.
Die Steine sollen so verschoben werden, daß alle weißen rechts und alle schwarzen links daneben liegen. Dabei soll man auf einen freien Platz immer gleichzeitig 2 nebeneinanderliegende Steine verschieben, ohne ihre Reihenfolge zu ändern. Zur Lösung genügen 3 Züge.
Wenn ihr keine Damesteine habt, dann verwendet Geldstücke oder schneidet euch Papier- oder Kartonstücke zurecht.

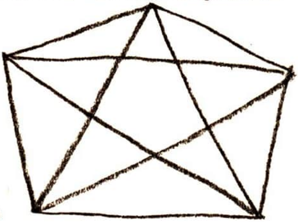
3

4. In 3 Zügen

Legt auf den Tisch 3 Häufchen Streichhölzer, eines mit 11, das andere mit 7 und das dritte mit 6 Streichhölzern. Ihr sollt alle 3 Häufchen dadurch, daß ihr Streichhölzer von einem Häufchen auf ein anderes umlegt, so ausgleichen, daß auf jedem 8 Streichhölzer liegen. Das ist möglich, weil die Gesamtzahl – 24 – ohne Rest durch 3 teilbar ist. Dabei sollt ihr folgende Regel einhalten: Auf ein Häufchen müßt ihr soviel Streichhölzer legen, wie bereits daliegen. Wenn zum Beispiel 6 Streichhölzer daliegen, dann müßt ihr 6 hinzulegen, wenn 4 daliegen, 4.
Die Aufgabe ist in 3 Zügen zu lösen.

5. Zählt aus!

Prüft eure geometrische Auffassungsgabe: Zählt aus, wieviel Dreiecke in der Figur enthalten sind, die in Abb. 4 dargestellt ist.



4

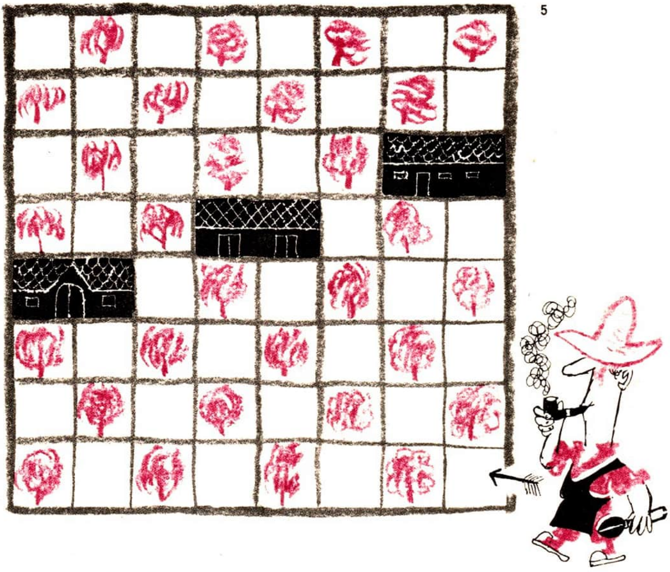
6. Man muß eben dahinterkommen

In einem Korb liegen 5 Äpfel. Wie verteilt man diese Äpfel so unter 5 Mädchen, daß jedes einen Apfel erhält und einer im Korb bleibt?

7. Ohne lange zu überlegen

Sagt, wieviel Katzen sind im Zimmer, wenn in jeder der 4 Ecken eine Katze sitzt, jeder Katze gegenüber 3 Katzen sitzen und auf dem Schwanz jeder Katze eine Katze sitzt?

5



8. Der Weg des Gärtners

Abb. 5 stellt den Plan eines kleinen Obstgartens dar.
Ein Gärtner bearbeitete alle Apfelbäume der Reihe nach. Er begann seinen Weg in dem mit einem Pfeil bezeichneten Feld und lief nacheinander alle Felder ab, sowohl die mit Bäumen bestandenen wie auch die freien, ohne dabei einmal in ein bereits betretenes Feld zurückzukehren. Er ging aber weder in den Diagonalen, noch konnte er die Felder betreten, in denen verschiedene Gebäude standen.
Nachdem der Gärtner seinen Rundgang beendet hatte, befand er sich in demselben Feld, von dem aus er seinen Weg begonnen hatte.
Zeichnet den Weg des Gärtners ein!

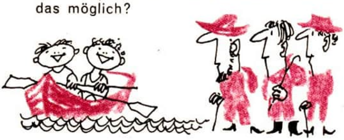
9. Abwärts und aufwärts

Ein Junge drückt eine Fläche eines kantigen blauen Bleistifts fest gegen eine Fläche eines kantigen gelben Bleistifts. Einen Zentimeter der angedrückten Fläche des blauen Bleistifts hat er, vom unteren Ende gerechnet, mit Farbe bestrichen. Während er den gelben Bleistift unbeweglich festhält, schiebt er den blauen um 1 cm nach unten, wobei er ihn immer an den gelben andrückt. Dann schiebt er ihn in die alte Stellung zurück, schiebt ihn wieder um 1 cm nach unten und wieder in die alte Stellung zurück. So schiebt er den blauen Bleistift 10mal nach unten und 10mal wieder zurück (das sind 20 Bewegungen).
Wieviel Zentimeter sind von der Länge des gelben Bleistifts nach der 20. Bewegung mit

Farbe bestrichen, wenn man annimmt, daß während dieser Zeit die Farbe weder eingetrocknet ist noch sich erschöpft hat?
A n m e r k u n g. Diese Aufgabe hatte sich der Mathematiker Leonid Michailowitsch Rybakow auf dem Heimweg von einer erfolgreichen Entenjagd ausgedacht. Was der Anlaß zur Abfassung dieser Aufgabe war, lest ihr auf Seite 219, nachdem ihr die Aufgabe gelöst habt.

10. Die Überfahrt über den Fluß (eine Aufgabe aus alter Zeit)

Mehrere Wanderer kamen an einen Fluß, den sie überqueren wollten. Jedoch die Brücke war eingestürzt, und der Fluß war tief. Was sollten sie tun? Da bemerkte einer von ihnen seitab am Ufer zwei Jungen, die sich mit einem Boot vergnügten. Das Boot war aber so klein, daß damit nur ein Erwachsener oder zwei Jungen übergesetzt werden konnten.
Dennoch wurden alle Erwachsenen mit diesem Boot über den Fluß gebracht. Wie war das möglich?



Löst die Aufgabe „im Kopf" oder praktisch, indem ihr Steine, Streichhölzer oder irgendwelche derartige Gegenstände verwendet und sie auf dem Tisch über einen angenommenen Fluß hinweg verschiebt!

11. Der Wolf, die Ziege und der Krautkopf

Dies ist auch eine Aufgabe aus alter Zeit. Sie kommt in Schriften des 8. Jahrhunderts vor und hat ein Märchen zum Inhalt.
Es war einmal ein Mann, der mußte einen Wolf, eine Ziege und einen Krautkopf in einem Kahn über einen Fluß setzen. In dem Kahn konnten aber nur der Mann und mit

6

ihm entweder der Wolf oder die Ziege oder der Krautkopf untergebracht werden. Wenn man aber den Wolf mit der Ziege ohne den Menschen zurückläßt, frißt der Wolf die Ziege, und wenn man die Ziege mit dem Krautkopf allein zurückläßt, dann frißt die Ziege den Krautkopf; nur in Anwesenheit des Menschen frißt keiner den anderen. Dennoch brachte der Mann seine Ladung über den Fluß.
Wie machte er das?

12. Wie rollt man die schwarzen Kugeln heraus?

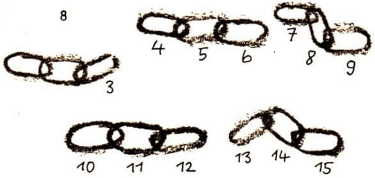
In einer engen und sehr langen Rinne befinden sich 8 Kugeln: 4 schwarze links und 4 weiße von nur ganz wenig größerem Durchmesser rechts (Abb. 7). In der Mitte der Rinne ist in der Wand eine kleine Ausbuchtung, in der nur eine Kugel, gleich welcher Art, Platz hat. Zwei Kugeln können nebeneinander quer zur Rinne nur an der Stelle liegen, wo sich die Ausbuchtung befindet. Das linke Ende der Rinne ist geschlossen, aber am rechten Ende ist eine Öffnung, durch die wohl die schwarzen, aber nicht die weißen Kugeln hindurchrollen können. Wie kann man alle schwarzen Kugeln aus der Rinne herausrollen? Das Herausnehmen der Kugeln aus der Rinne ist nicht gestattet.

7

13. Die Kettenreparatur

Ein junger Meister hat folgende Aufgabe: Vor ihm liegen 5 Teile einer Kette (Abb. 8), die ohne Verwendung zusätzlicher Glieder zu einer einzigen Kette vereinigt werden sollen. Wenn er zum Beispiel das Glied 3

8



öffnet (ein Arbeitsgang) und es an das Glied 4 anschließt (ein weiterer Arbeitsgang), dann das Glied 6 öffnet und es an das Glied 7 anschließt usw., dann ergeben sich insgesamt 8 Arbeitsgänge. Der Meister möchte die Kette aber gern in nur 6 Arbeitsgängen zusammenschmieden. Es glückt ihm auch. Wie hat er es bewerkstelligt?

14. Aus 3 macht 4!

Auf dem Tisch liegen 3 Streichhölzer. Aus 3 macht 4, ohne daß ein Streichholz hinzugefügt wird. Es darf aber auch kein Streichholz zerbrochen werden.

15. 3 Quadrate

Aus 8 Stäbchen (zum Beispiel Streichhölzern), von denen 4 halb so lang sind wie die übrigen 4, soll man 3 gleiche Quadrate bilden.

16. Korrigiert den Fehler!

Nehmt 12 Streichhölzer und legt damit eine „Gleichung", wie man sie in Abb. 9 sehen kann.
Die Gleichung ist, wie ihr seht, falsch, weil $6 - 4 = 9$ sein soll.
Legt ein Streichholz so um, daß sich eine richtige Gleichung ergibt!

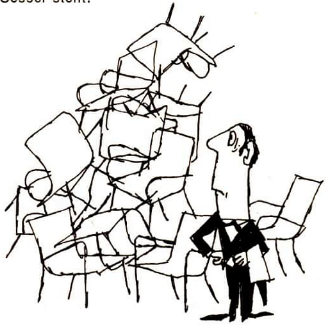
9

17. Wieviel Einzelteile ergeben sich?

In der Dreherei eines Betriebes werden Einzelteile aus Bleirohlingen gedreht. Jeder Rohling ergibt ein Einzelteil. Die Abfallspäne, die man bei der Anfertigung von 6 Einzelteilen erhält, kann man einschmelzen und daraus noch einen Rohling herstellen. Wieviel Einzelteile kann man auf diese Weise aus 36 Rohlingen anfertigen?

18. Probiert es aus!

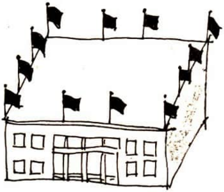
In einem quadratischen Tanzsaal sollen 10 Sessel so an den Wänden aufgestellt werden, daß an jeder Wand dieselbe Anzahl Sessel steht.



19. Die Anordnung der Fähnchen

Ein kleines Betriebsgebäude ist von einer Jugendbrigade fertiggestellt worden. Zum Tage der Einweihung schmückten es die Angehörigen der Brigade außen auf allen vier Seiten mit Girlanden, Lämpchen und Fähnchen. Es standen aber nur 12 Fähnchen zur Verfügung.
Zuerst brachte man sie so an, daß auf jeder Seite 4 zu sehen waren, wie der Grundriß (Abb. 10) zeigt. Dann überlegte man, daß man die 12 Fähnchen auch so anbringen könnte, daß auf jeder Seite 5 und sogar 6

zu sehen wären. Der zweite Plan gefiel den Brigademitgliedern mehr, und sie beschlossen, die Fähnchen so anzubringen, daß auf jeder Seite 5 zu sehen waren.
Zeichnet in den Grundriß ein, wie die Brigademitglieder die 12 Fähnchen anordneten, damit auf jeder Seite 5 zu sehen waren, und wie sie sie hätten anordnen müssen, damit 6 hätten gesehen werden können.

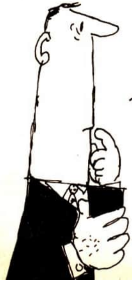


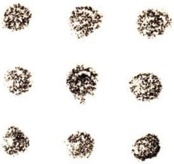
10

20. Das „magische" Zahlendreieck

An die Ecken eines Dreiecks sind die Zahlen 1, 2 und 3 geschrieben. Verteilt nun die Zahlen 4, 5, 6, 7, 8 und 9 so auf die Seiten des Dreiecks, daß die Summe der Zahlen an jeder Seite 17 ergibt. Das ist nicht schwer, weil die Zahlen an den Ecken des Dreiecks bereits angegeben sind.
Bedeutend länger müßt ihr euch aber abmühen, wenn die Zahlen an den Ecken nicht angegeben sind. Verteilt zum Beispiel die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 so auf die Seiten und die Ecken des Dreiecks, daß die Summe der Zahlen an jeder Seite 20 beträgt.
Wenn euch das gelungen ist, dann sucht noch andere Verteilungen. Es gibt viele Lösungen.

11





12

21. Mit 4 Geraden

Zeichnet 9 Punkte so auf, daß sie ein Quadrat wie in Abb. 12 ergeben.
Jetzt verbindet alle Punkte mit 4 Geraden, ohne den Bleistift abzusetzen.

22. 12 Mädchen spielten Ball

12 Mädchen standen im Kreis und begannen, Ball zu spielen. Jedes Mädchen warf den Ball seiner linken Nachbarin zu. Als der Ball um den ganzen Kreis herumgegangen war, warfen sie ihn in entgegengesetzter Rich-

tung. Nach einiger Zeit sagte ein Mädchen: „Wir wollen lieber den Ball immer jedem zweiten zuwerfen."
„Nein, weil wir zwölf sind, würde dann die Hälfte nicht am Spiel beteiligt sein", entgegnete rasch das älteste von ihnen.
„Dann werden wir den Ball jedesmal über zwei werfen!" (Jedes dritte fängt den Ball.)
„Noch schlechter, dann spielen nur vier. Wenn ihr wollt, daß alle mitspielen, muß der Ball über vier geworfen werden. (Jedes fünfte fängt.) Eine andere Kombination gibt es nicht."
„Und wenn der Ball über sechs Mädchen geworfen wird?"
„Das ist dieselbe Kombination, nur erhalten

die Mädchen den Ball in umgekehrter Reihenfolge."

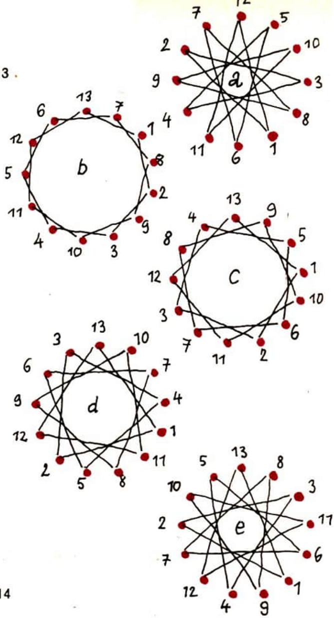
„Und wenn man über zehn wirft?" (jedes elfte fängt den Ball) fragten die Mädchen.

„So haben wir schon gespielt."

Die Mädchen begannen, alle Möglichkeiten des Spiels aufzuzeichnen, und überzeugten sich sehr rasch davon, daß das älteste recht hatte. Nur bei einer Spielweise (außer der anfänglichen) waren alle Mitspielerinnen beteiligt (Abb. 13a).

Wenn nun 13 Mädchen spielen würden, könnte der Ball auch jedem zweiten zugeworfen werden (Abb. 13b) und über zwei (Abb. 13c), über drei (Abb. 13d) und über vier (Abb. 13e), und jedesmal wären alle Mitspielerinnen beteiligt. Stellt fest, ob bei 13 Mitspielerinnen der Ball über fünf und über sechs Mädchen geworfen werden könnte.

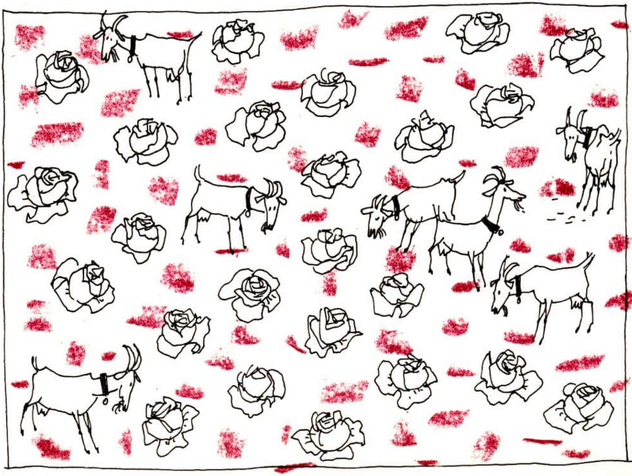
13



23. Die Ziegen sollen von den Krautköpfen getrennt werden

Löst jetzt eine Aufgabe, die in gewissem Sinne der Aufgabe 21 entgegengesetzt ist. Dort haben wir Punkte mit Geraden verbunden, und hier wird verlangt, 3 Gerade so zu ziehen, daß die Ziegen von den Krautköpfen getrennt werden (Abb. 14).

14



24. Die beiden Eisenbahnzüge

Ein Schnellzug fuhr ohne Unterbrechung von A nach B mit einer Geschwindigkeit von 60 km/h. Ein anderer Zug fuhr ebenfalls ohne Unterbrechung von B nach A mit einer Geschwindigkeit von 40 km/h.
Welchen Abstand voneinander haben die Züge eine Stunde vor ihrer Begegnung?

25. Bei Flut

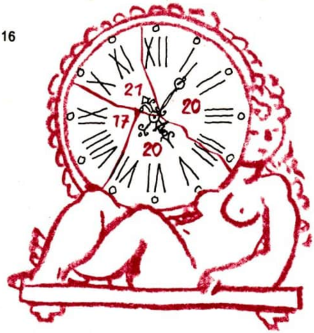
Nicht weit von der Küste liegt ein Schiff vor Anker. An seiner Bordwand hängt eine Strickleiter bis zum Wasser hinab. Sie hat zehn Sprossen. Der Abstand zwischen den Sprossen beträgt 30 cm. Die unterste Sprosse berührt die Wasserfläche. Das Meer ist sehr ruhig. Da beginnt die Flut, die das Wasser in jeder Stunde um 15 cm steigen läßt. Innerhalb welcher Zeit wird die dritte Sprosse vom Wasser erreicht?

15

26. Das Zifferblatt

a) Es soll das Zifferblatt einer Uhr durch zwei Geraden so in drei Teile zerlegt werden, daß sich beim Addieren der Zahlen in jedem Teil die gleichen Summen ergeben.
b) Kann man das Zifferblatt so in sechs Teile zerlegen, daß sich in jedem Teil zwei Zahlen befinden und die Summe der beiden Zahlen in allen sechs Teilen gleich groß ist?

16



27. Das zerbrochene Zifferblatt

Ich sah in einem Museum eine altertümliche Uhr mit römischen Ziffern, bei der an Stelle der uns bekannten Schreibweise der Zahl IV vier Striche (IIII) standen. Risse, die sich auf dem Zifferblatt gebildet hatten, zerlegten es in vier Teile, wie in Abb. 16 dargestellt ist. Die Summen der Zahlen betrugen in dem einen Teil 21, in dem anderen 20, im dritten 20 und im vierten 17.
Ich bemerkte, daß bei geringer Änderung des Verlaufs der Risse die Summe in jedem der vier Teile 20 sein könnte. Bei dieser Anordnung brauchen die Risse nicht durch den Mittelpunkt des Zifferblatts zu gehen. Sucht diesen anderen Verlauf der Risse!

28. Die merkwürdige Uhr

Einmal wurde ein Uhrmacher dringend in ein Haus gerufen.
„Ich bin krank", antwortete der Uhrmacher, „und kann nicht kommen, aber wenn die Reparatur einfach ist, schicke ich meinen Lehrling."
Es stellte sich heraus, daß abgebrochene Zeiger ersetzt werden mußten.
„Damit wird mein Lehrling fertig", sagte der Meister. „Er prüft das Werk und bringt neue Zeiger an."
Der Lehrling ging sehr aufmerksam an die Arbeit und regulierte sorgfältig das Uhr-

werk, aber es waren keine passenden Zeiger zu finden. Da entschloß sich der junge Mann, die abgebrochenen Stücke der Zeiger mit Zustimmung des Eigentümers der Uhr anzulöten, und er tat dies gewissenhaft. Als er die Arbeit beendet hatte, steckte er die gelöteten Zeiger auf die Achse und stellte sie nach seiner Uhr: den großen Zeiger auf die 12 und den kleinen auf die 6; es war gerade 6 Uhr abends.

Aber bald nachdem der Lehrling in die Werkstatt zurückgekehrt war, um dem Meister zu berichten, daß der Auftrag ausgeführt sei, klingelte das Telefon. Der Lehrling nahm den Hörer ab und vernahm die ärgerliche Stimme des Kunden:

„Sie haben die Uhr schlecht repariert, sie geht falsch!"

Verwundert darüber eilte der Lehrling zum Kunden. Als er hinkam, zeigte die reparierte Uhr kurz nach 8 Uhr. Der Lehrling nahm seine Uhr heraus und zeigte sie dem erzürnten Kunden:

„Vergleichen Sie, bitte. Ihre Uhr geht auf die Sekunde genau."

Der verblüffte Kunde mußte zugeben, daß seine Uhr in diesem Augenblick wirklich die richtige Zeit angab.

Am anderen Morgen rief der Kunde wieder an und meinte, daß die Uhrzeiger offenbar verrückt geworden seien und auf dem Zifferblatt umherspazierten, wie es ihnen gerade einfiele. Der Lehrling eilte zum Kunden. Die Uhr zeigte kurz nach 7 Uhr. Er verglich die Zeit mit seiner Uhr und erklärte ärgerlich:

„Was unterstehen Sie sich! Die Uhr geht genau!"

Die Uhr zeigte wirklich die genaue Zeit. Erzürnt wollte der Lehrling sofort weggehen, aber der Kunde hielt ihn zurück, und binnen weniger Minuten entdeckten sie die Ursache des unwahrscheinlichen Vorfalles.

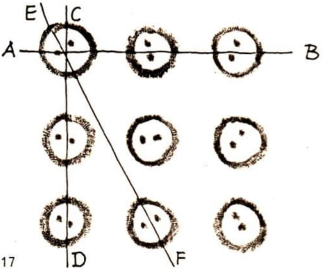
Kommt ihr auch darauf, was hier los war?

29. 3 in der Reihe

Legt auf den Tisch 9 Knöpfe in Gestalt eines Quadrats mit 3 Knöpfen auf jeder Seite und einem in der Mitte (Abb. 17). Wir wollen, wenn an einer Geraden 2 oder mehr Knöpfe liegen, eine solche Anordnung als „Reihe" bezeichnen. Dann sind AB und CD „Reihen" mit 3 Knöpfen und EF ist eine „Reihe" mit 2 Knöpfen.

Stellt fest, wieviel Reihen mit 3 Knöpfen und wieviel mit 2 Knöpfen es in der Zeichnung gibt.

Nehmt jetzt 3 beliebige Knöpfe weg und ordnet die übrigen 6 so in 3 Reihen an, daß in jeder Reihe 3 Knöpfe liegen.



17

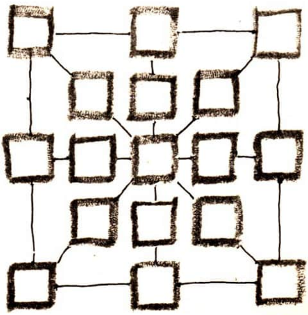
30. Einordnung von Briefmarken

Legt euch 17 Briefmarken zu folgenden Werten zurecht:

5 Briefmarken zu je 20 DPf,
3 „ „ „ 15 „ ,
3 „ „ „ 10 „ ,
6 „ „ „ 5 „ .

Ordnet die Briefmarken so in die Quadrate der Figur Abb. 18 ein, daß die Summe der Briefmarkenwerte in jeder Geraden, die in der Abbildung eingezeichnet ist, 55 DPf beträgt.

18



31. Das Bild des Krebses

Das Bild des Krebses, das in Abb. 19 dargestellt ist, besteht aus 17 Teilen.
Bildet aus den Teilen dieses Krebses schnell zwei Figuren: einen Kreis und daneben ein Quadrat.

32. Schnell, aber mit Überlegung

Löst die folgenden drei Aufgaben ,,auf die Schnelle''. Wer gibt am schnellsten die richtige Antwort?
Aufgabe 1. Zu Mittag fährt ein Autobus von A nach B ab. Eine Stunde später fährt ein Radfahrer von B nach A ab. Er fährt auf derselben Straße, aber natürlich bedeutend langsamer als der Autobus.
Wer wird, wenn sich Autobus und Radfahrer treffen, weiter von A entfernt sein?
Aufgabe 2. Um 6 Uhr schlug eine Wanduhr sechsmal. An der Taschenuhr stellte ich fest, daß die Zeit, die vom ersten bis zum sechsten Schlag verstrich, 30 Sekunden betrug.
Wenn die Uhr für 6 Schläge 30 Sekunden brauchte, wie lange wird sie dann zu Mittag oder zu Mitternacht für 12 Schläge benötigen?
Aufgabe 3. Drei Schwalben fliegen von einem gemeinsamen Platz weg. Wann werden sie in einer Ebene sein?

Und jetzt überprüft mit ruhiger Überlegung eure Lösungen und schlagt im Lösungsteil nach!
Nun? Seid ihr in die kleinen Fallen geraten, die in diesen einfachen Aufgaben enthalten sind?
Solche Aufgaben haben ihren Reiz, weil sie die Aufmerksamkeit schärfen und zur Vorsicht im gewohnten Gedankengang anhalten.

33. Der Preis des Buches

Für ein Buch zahlte man 1 DM und dazu noch die Hälfte des Preises. Wieviel zahlte man nun für das Buch, das heißt, wieviel kostete es?

19

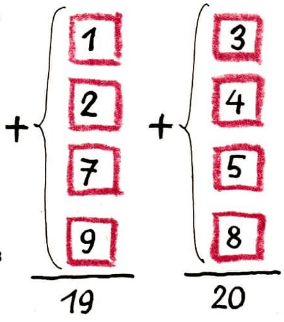
34. Die rastlose Fliege

Auf einer Fernverkehrsstraße begannen zwei Radrennfahrer gleichzeitig ihr Training in entgegengesetzter Richtung aufeinander zu. Als zwischen den Rennfahrern noch 120 km lagen, begann eine Fliege sich lebhaft für das Rennen zu interessieren. Sie flog von der Schulter des einen Rennfahrers weg und eilte ihm voraus dem anderen entgegen. Als sie dem zweiten Rennfahrer begegnete und sich überzeugt hatte, daß er wohlauf war, kehrte sie unverzüglich um. Sie flog bis zum ersten Rennfahrer und kehrte wieder um und flog zum zweiten.
So flog sie zwischen den sich nähernden Radfahrern hin und her, bis diese sich trafen. Da beruhigte sie sich und setzte sich auf einen von ihnen.
Die Fliege flog zwischen den Radfahrern mit einer Geschwindigkeit von 60 km/h hin und her, und die Radfahrer fuhren die ganze Zeit mit einer Geschwindigkeit von 30 km/h. Wieviel km flog die Fliege?

35. Zwei Scherzaufgaben

1. Ein Vater rief seine Tochter an und beauftragte sie, aus einem Laden eine bestimmte Ware abzuholen. Das Geld, sagte er, läge in einem Briefumschlag auf dem Schreibtisch. Das Mädchen blickte flüchtig auf den Umschlag, sah, daß darauf die Zahl 98 stand, nahm das Geld heraus und steckte es, ohne es nachzuzählen, in seine Tasche, den Umschlag aber zerknüllte es und warf ihn weg.

20



Im Laden sollte sie 90 DM bezahlen. Als sie aber zahlen wollte, zeigte sich, daß sie nicht nur keine 8 DM zurückbehielt, wie sie angenommen hatte, sondern daß sogar 4 DM fehlten.
Als sie dies ihrem Vater berichtete, fragte sie, ob er sich nicht geirrt habe, als er das Geld abgezählt hätte. Der Vater antwortete, daß er es richtig abgezählt hätte, sie aber habe sich geirrt, und lachend wies er auf den Irrtum hin.
Worin bestand der Irrtum des Mädchens?
2. Fertigt acht Zettel mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 und 9 an und legt sie in zwei Spalten auf wie in Abb. 20.
Ihr sollt die Summen der beiden senkrechten Reihen dadurch auf den gleichen Betrag bringen, daß ihr nur zwei Zettel umlegt.

36. Wie alt bin ich?

Als mein Vater 31 Jahre alt war, war ich 8 Jahre. Jetzt ist mein Vater doppelt so alt wie ich. Wie alt bin ich jetzt?

37. Bestimmt „nach dem Anschein"

Ihr habt vor euch zwei Spalten mit den Zahlen:

123456789	1
12345678	21
1234567	321
123456	4321
12345	54321
1234	654321
123	7654321
12	87654321
1	987654321

Die Zahlen der zweiten Spalte sind aus genau den gleichen Ziffern gebildet wie die der ersten Spalte, nur in umgekehrter Anordnung. Welche Spalte ergibt bei der Addition das größere Resultat? Vergleicht zuerst die Summen „nach dem Anschein", das heißt, führt noch nicht die Addition aus, sondern schätzt, ob die Summen gleich groß sein müssen oder ob eine größer als die andere sein muß. Dann erst prüft mit der Addition nach.

38. Eine schnelle Addition

Die acht sechsstelligen Zahlen

328 645
491 221
816 304
117 586
671 355
508 779
183 696
882 414

sind so ausgewählt, daß man bei kluger Gruppierung die Summe in 8 Sekunden „im Kopf" finden kann. Kommt ihr da mit? Im Lösungsteil sind Hinweise, aber ihr braucht allein schon zum Suchen mehr als 8 Sekunden.

Ihr könnt euren Freunden zwei Kunststücke vorführen, die ihr zum Spaß „die schnelle Addition" nennen könnt:

1. Ihr sagt: „Schreibt, ohne es mir zu zeigen, untereinander soviel mehrstellige Zahlen, wie ihr wollt. Dann komme ich und werde ganz schnell noch ebensoviel Zahlen hinzuschreiben und im Nu alle addieren."

Nehmen wir an, die Freunde haben geschrieben:

7621
3057
2794
4518

Ihr schreibt zu jeder Zahl diejenige Zahl dazu, die sie zu 9999 ergänzt. Diese Zahlen sind:

5481
7205
6942
2378

Tatsächlich ergibt sich:

$$\begin{array}{r} 4518 \\ +\,5481 \\ \hline 9999 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2794 \\ +\,7205 \\ \hline 9999 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3057 \\ +\,6942 \\ \hline 9999 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7621 \\ +\,2378 \\ \hline 9999 \end{array}$$

Jetzt ist es nicht schwer, dahinterzukommen, wie man schnell die ganze Summe errechnet:

$$\begin{array}{r} 7621 \\ 3057 \\ 2794 \\ 4518 \\ 5481 \\ 7205 \\ 6942 \\ +\,2378 \\ \hline \end{array}$$

Man muß 9999 mit 4 multiplizieren, und eine solche Multiplikation läßt sich schnell im Kopf ausführen: Wir multiplizieren 10000 mit 4 und subtrahieren die 4 überschüssigen Einer. Es ergibt sich:

$$10\,000 \cdot 4 - 4 = 40\,000 - 4 = 39\,996$$

Das ist das ganze Geheimnis des Kunststücks.

2. Schreibt untereinander zwei beliebige Zahlen von beliebiger Länge. Ich werde eine dritte hinzuschreiben und augenblicklich von links nach rechts die Summe aller drei Zahlen darunterschreiben.

Wir nehmen an, ihr habt geschrieben.

72 603 294
51 273 081

Ich werde zum Beispiel die Zahl 48726918 hinzuschreiben und euch sofort die Summe nennen.
Welche Zahl man hinzuschreiben muß und wie man in diesem Falle schnell die Summe findet, das überlegt selbst!

39. In welcher Hand?

Gebt eurem Kameraden zwei Geldstücke, eins mit einer geraden Zahl und eins mit einer ungeraden (zum Beispiel ein 10-DPf- und ein 5-DPf-Stück). Er soll, ohne es euch sehen zu lassen, das eine Geldstück, ganz gleich welches, in die rechte Hand nehmen und das andere in die linke. Ihr könnt leicht erraten, in welcher Hand er welches Geldstück hat.
Gebt ihm auf, daß er die Zahl auf dem Geldstück in der r e c h t e n Hand v e r d r e i f a c h t und die auf dem Geldstück in der l i n k e n Hand v e r d o p p e l t. Die Resultate soll er addieren und euch nur die Endsumme nennen.
Wenn die Summe geradzahlig ist, dann ist das 10-DPf-Stück, in der rechten Hand, wenn nicht, dann ist es in der linken.
Erklärt, warum das immer so ist, und denkt euch aus, wie man dieses Kunststück variieren kann!

40. Wieviel sind es?

Ein Junge hat ebenso viele Schwestern wie Brüder, und seine Schwestern haben halb so viele Schwestern wie Brüder.
Wieviel Brüder und wieviel Schwestern gibt es in dieser Familie?

41. Mit gleichen Ziffern

Stellt in Form einer Addition die Zahl 28 durch 5 Zweien und die Zahl 1000 durch 8 Achten dar.

42. Hundert

Stellt mit Hilfe beliebiger Grundrechnungsarten die Zahl 100 entweder durch 5 Einsen oder durch 5 Fünfen dar. Dabei kann die 100 aus 5 Fünfen in dreierlei Weise gebildet werden.

43. Der Mathematik-Zweikampf

In einem Schülerzirkel für Mathematik herrschte eine Zeitlang folgender Brauch. Jedem, der in den Zirkel eintreten wollte, stellte der Leiter eine Aufgabe – so ein richtiges mathematisches „Nüßchen". Löste der Bewerber die Aufgabe, dann wurde er sofort Mitglied; konnte er aber die Nuß nicht knacken, dann durfte er den Zirkel nur als Hörer besuchen.
Einmal stellte der Leiter einem Bewerber folgende Aufgabe: „Es sind gegeben die Zahlen:

111
333
555
777
999

Es sollen zwölf Ziffern so durch Nullen ersetzt werden, daß man bei der Addition der fünf Zahlen 20 erhält." Der Bewerber überlegte kurz und schrieb schnell hin:

$$
\begin{array}{r}
011 \\ 000 \\ 000 \\ 000 \\ +009 \\ \hline 20
\end{array}
\quad \text{oder} \quad
\begin{array}{r}
010 \\ 003 \\ 000 \\ 007 \\ +000 \\ \hline 20
\end{array}
$$

Dann lächelte er und sagte:
„Wenn man in den 5 dreistelligen Zahlen nur neun Ziffern durch Nullen ersetzt, dann kann man bei der Addition 1111 erhalten. Versucht es!"
Der Zirkelleiter war nicht lange verlegen, sondern fing mutig mit der Rechnung an. Er blieb dem Bewerber die Antwort nicht schuldig. Er löste nicht nur die Aufgabe, sondern fand sogar noch eine Variante:
„Man braucht bei diesen 5 dreistelligen Zahlen", sagte er, „nicht neun, sondern nur acht Ziffern durch Nullen zu ersetzen, und die Summe bleibt dieselbe, nämlich 1111."
Die Reihe war jetzt an dem Bewerber. Die Zirkelmitglieder beobachteten mit Interesse den plötzlich ausgebrochenen mathematischen „Zweikampf". Der Bewerber knackte auch diese Nuß, und zum Vergnügen aller Anwesenden fand er noch eine Fortsetzung der Aufgabe:
„Man braucht in den 5 dreistelligen Zahlen nicht neun und nicht acht, sondern nur sechs Ziffern durch Nullen zu ersetzen und erhält immer noch die Summe 1111."
Der Mathematiklehrer lobte die beiden Zweikampfteilnehmer und sagte, daß man die Summe 1111 erhalten kann, wenn man nicht neun, nicht acht und auch nicht sechs Ziffern, sondern nur fünf Ziffern durch Nullen ersetzt.
Sucht die Lösung aller vier Varianten. Denkt euch analoge Aufgaben für Zahlen aus, die nicht aus drei Einsen, Dreien, Fünfen, Siebenen und Neunen bestehen, sondern aus fünf!

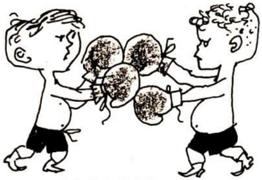
44. Zwanzig

Es ist leicht, vier ungerade Zahlen anzugeben, deren Summe 10 ist, nämlich:

$$1 + 1 + 3 + 5 = 10,$$

oder: $$1 + 1 + 1 + 7 = 10.$$

Möglich ist auch eine dritte Lösung:



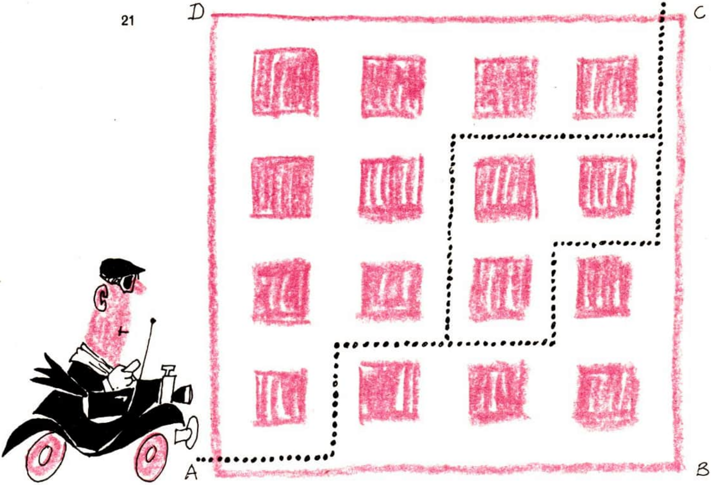
$$1 + 3 + 3 + 3 = 10.$$

Andere Lösungen gibt es nicht. Änderungen in der Reihenfolge der Summanden stellen natürlich keine neuen Lösungen dar.
Bedeutend mehr Lösungen hat folgende Aufgabe:
Man soll acht ungerade Zahlen angeben, deren Summe 20 ist. Es dürfen auch gleiche Summanden dabei sein.
Sucht alle Lösungen dieser Aufgabe und stellt fest, wieviel Summen darunter sind, die die größte Anzahl verschiedener Summanden enthalten.
Ein kleiner Rat: Wenn ihr die Zahlen aufs Geratewohl auswählt, bringt ihr es auf einige Lösungen, aber das unsystematische Probieren gibt euch nicht die Gewähr, daß ihr alle Lösungen gefunden habt. Wenn ihr systematisch vorgeht, entgeht euch keine der möglichen Lösungen.

45. Verschiedene Grundrechnungsarten, aber ein Resultat

Wenn zwischen zwei Zweien das Additionszeichen durch das Multiplikationszeichen ersetzt wird, verändert sich das Resultat nicht: $2 + 2 = 2 \cdot 2$. Es ist nicht schwer, auch drei Zahlen zu finden, die dieselbe Eigenschaft besitzen, nämlich $1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$. Es gibt auch vier einstellige Zahlen, die, addiert und multipliziert, ein und dasselbe Resultat ergeben.
Setzt diese Zusammenstellungen fort. Sucht fünf, dann sechs, sieben usw. natürliche Zahlen, die dieselbe Eigenschaft besitzen. Behaltet dabei im Auge, daß von fünf Zahlen an die Antworten verschiedenartig sein können. (Alle verwendeten natürlichen Zahlen sollen kleiner als 10 sein.)

21



46. Wieviel Wege?

In einem Schülerbrief stand: „In unserer Arbeitsgemeinschaft für Mathematik zeichneten wir einen Plan mit 16 Häuservierteln unserer Stadt auf. Auf der beigefügten schematischen Wiedergabe des Planes (Abb. 21) sind alle Häuserviertel durch gleiche Quadrate dargestellt.
Uns interessierte folgende Frage:
Wieviel verschiedene Wege kann man von Punkt A nach Punkt C einschlagen, wenn man auf den Straßen unserer Stadt von A aus nur geradeaus und nach rechts fahren darf, das heißt, auf der Karte nach oben und nach rechts? Streckenweise dürfen die Wege zusammenfallen (vgl. die punktierten Linien auf der schematischen Darstellung).
Wir hatten den Eindruck, daß das keine leichte Aufgabe ist. Lösten wir sie richtig, wenn wir 70 Möglichkeiten erhielten?"
Was muß man auf diesen Brief antworten?

47. Man soll die Anordnung der Zahlen ändern

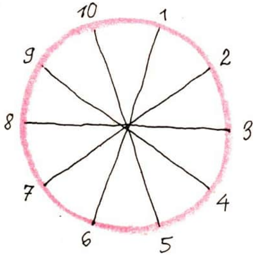
An den Endpunkten von fünf Durchmessern eines Kreises sind die natürlichen Zahlen 1 bis 10 so angeordnet, wie aus Abb. 22 ersichtlich ist. Bei dieser Anordnung ist nur in einem Falle die Summe zweier benachbarter Zahlen gleich der Summe der gegenüberliegenden Zahlen, und zwar: $10 + 1 = 5 + 6$, aber es ist zum Beispiel:

$$1 + 2 \neq 6 + 7$$

oder $$2 + 3 \neq 7 + 8.$$

Stellt die Zahlen so um, daß die Summe

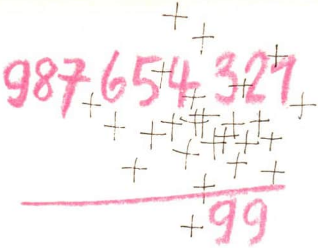
22



zweier beliebiger benachbarter Zahlen gleich der Summe der gegenüberliegenden Zahlen ist.
Man kann erwarten, daß diese Aufgabe nicht nur eine Lösung hat, das heißt, daß verschiedene Anordnungen der Zahlen die Bedingung der Aufgabe erfüllen.
Versucht, den Lösungsweg zu finden, der es gestattet, auch die Anzahl aller möglichen Lösungen festzustellen!

48. Das zerlegte Schachbrett

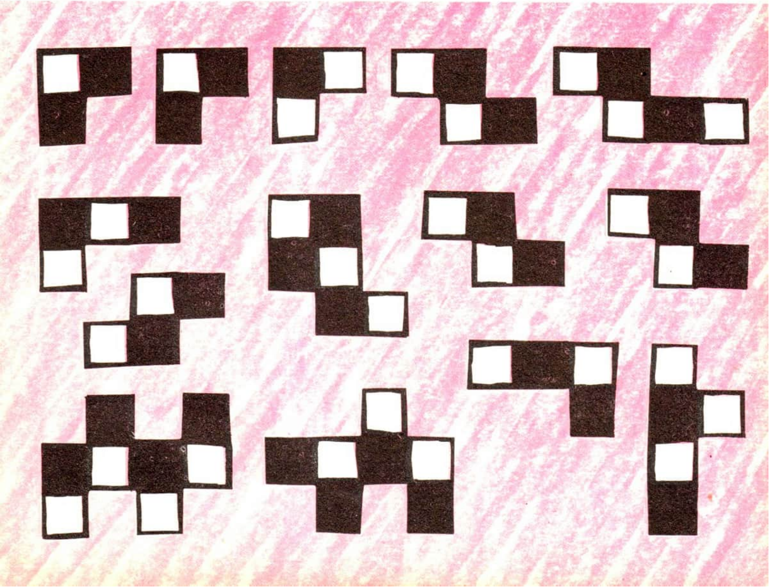
Ein witziger Schachspieler zerschnitt sein Schachbrett aus Karton in 14 Teile, wie aus Abb. 23 zu ersehen ist. Er stellte seinen Kameraden, die zu ihm zum Schachspielen kamen, die Aufgabe, das Schachbrett aus den 14 Teilen zusammenzusetzen.
Schneidet die Teile aus kariertem Papier aus und überzeugt euch selbst, ob es schwer oder leicht ist, daraus das Schachbrett zusammenzusetzen!



49. Neunundneunzig und Hundert

Wieviel Plus-Zeichen (+) muß man zwischen die Ziffern der Zahl 987654321 setzen, damit man als Summe 99 erhält?
Es sind zwei Lösungen möglich. Wenn es auch nicht gerade leicht ist, eine zu finden, so gewinnt ihr doch dabei die Erfahrung, die euch dazu verhilft, Plus-Zeichen so zwischen die sieben Ziffern 1 2 3 4 5 6 7 zu setzen, daß sich als Summe 100 ergibt. (Eine Änderung der Reihenfolge der Ziffern ist nicht gestattet.) Auch hier gibt es zwei Lösungen.

23



50. Ein Gelände soll abgesucht werden

Einer Einheit der GST wurde die Aufgabe gestellt, ein Gelände abzusuchen. Der Leiter legte dazu eine Karte vor, die in Quadrate aufgeteilt war (Abb. 24) und sagte: „Zwei Mann suchen dieses Gelände ab. Dabei müssen alle Quadratfelder abgegangen werden, mit Ausnahme des mittelsten, in dem sich ein kleiner Teich befindet. Ein Feld, das schon einer der beiden betreten hat, darf der andere nicht mehr betreten. Man darf sich (auf der Karte) nur horizontal oder vertikal bewegen, nicht in den Diagonalen. Einer beginnt bei Feld A und kommt bei Feld B heraus, und der andere beginnt bei Feld B und kommt bei Feld A heraus. Zeichnet die Marschwege der beiden Leute ein, so daß jeder von ihnen die gleiche Anzahl Felder durchschreitet. Die etwas ungewöhnlichen Bedingungen stelle ich nur zur Prüfung eurer Findigkeit."

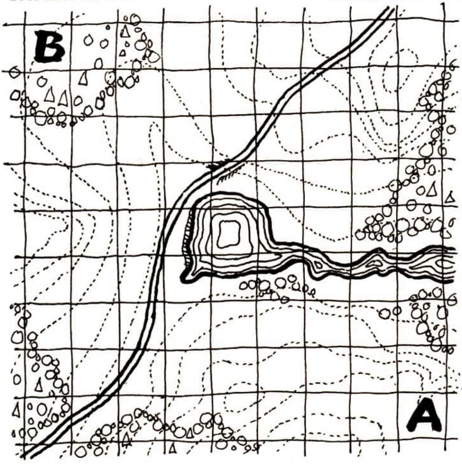
Die Mitglieder der GST-Einheit zeichneten den Plan ab und waren nach kurzer Zeit mit der Aufgabe fertig.

Löst auch ihr sie!

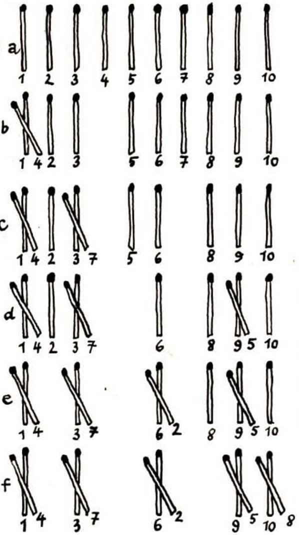
51. Streichhölzer sollen in Gruppen zu je 2 zusammengelegt werden

Es liegen zehn Streichhölzer nebeneinander. Ich kann sie zu fünf Paaren zusammenlegen, indem ich jedesmal mit einem Streichholz zwei andere überspringe und es auf das dritte lege, wobei mit jedem Streichholz nur ein Sprung gemacht werden darf, zum Beispiel so, wie in Abb. 25 dargestellt ist. Ihr findet sicherlich auch eine andere Reihenfolge, in der man die Streichhölzer zu fünf Paaren zusammenlegen kann und wobei auch die Bedingung eingehalten wird, jedesmal zwei Streichhölzer zu überspringen. Interessant ist folgende Frage: Wie kann man nach derselben Regel aus 100 nebeneinanderliegenden Streichhölzern 50 Paare bilden?

Seht auf die Abb. 25! Als erstes „sprang" das Streichholz Nr. 4 und bildete das Paar (1, 4) an einem der Enden der Reihe. Über das Paar (1, 4) können keine Streichhölzer „springen"; folglich ist dieses äußerste Paar Streichhölzer am weiteren Gang der Lösung nicht mehr beteiligt. Die Aufgabe



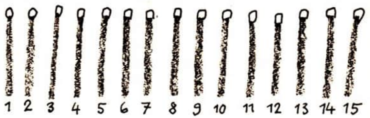
24

25


läuft darauf hinaus, daß vier Paare aus der Reihe der übrigen acht Streichhölzer 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10 zu bilden sind.
Wenn 100 Streichhölzer nebeneinandergelegt sind, dann führt der ,,Sprung'' des Streichholzes Nr. 4 zum Streichholz Nr. 1 und die Bildung des Paares (1, 4) am Ende der Reihe die Aufgabe dahin, daß 49 Paare aus den 98 übrigen Streichhölzern zu bilden sind. Weiter läßt der ,,Sprung'' des Streichholzes Nr. 6 (das jetzt das vierte vom Ende der Reihe aus ist) zum Streichholz Nr. 2 (das das erste in der Reihe der 98 Streichhölzer ist) und die Bildung des Paares (2, 6) die Aufgabe darauf hinauslaufen, daß 48 Paare aus den 96 übriggebliebenen Hölzern zu bilden sind usw.
Das beschriebene Verfahren der Verminderung der Reihe um je zwei Streichhölzer kann nicht mehr angewandt werden, sobald nur noch acht Streichhölzer nebeneinanderliegen, weil man sechs nebeneinanderliegende Streichhölzer unter den gestellten Bedingungen nicht zu drei Paaren zusammenlegen kann. Überzeugt euch davon! Wie sich die Aufgabe für acht Streichhölzer lösen läßt, ist nach Abb. 25 (b, c, d, e, f) klar, wenn ihr dabei das erste Paar Streichhölzer (1, 4) unberücksichtigt laßt.
Beachtet, daß im Falle von acht Streichhölzern die ersten beiden Paare symmetrisch gebildet werden, und zwar mit den zweiten Streichhölzern von jedem Ende der Reihe aus [Abb. 25, Stellung d, die Paare (3, 7) und (9, 5)].

52. Streichhölzer sollen in Gruppen zu je 3 zusammengelegt werden

Es liegen 15 Streichhölzer nebeneinander (Abb. 26). Es wird verlangt, sie in Gruppen zu je 3 zusammenzulegen. Man darf dabei

26


die Streichhölzer nur einzeln umlegen, muß jedesmal drei andere überspringen und das Streichholz auf das vierte Streichholz oder ein Streichholzpaar legen. Mit jedem Streichholz darf nur ein ,,Sprung'' ausgeführt werden. Diese Aufgabe ist etwas schwieriger als die vorhergehende. Löst sie in zehn Zügen! Damit ihr den Gang eurer Lösung mit der Antwort vergleichen könnt, schreibt die Reihenfolge auf, in der ihr die Streichhölzer umlegt.
Zusatz. Es sollen jetzt nicht 15, sondern 18, 21, 24 . . . Streichhölzer nebeneinander aufgelegt werden. Wenn wir das Verfahren verallgemeinern, das bei der Lösung der vorhergehenden Aufgabe angewandt wurde, verringern wir in jedem dieser Fälle nacheinander die Zahl der nebeneinanderliegenden Streichhölzer um 3 Stück, indem wir sie zu dreien nach irgendeinem Ende der Reihe sammeln. Aber auch hier muß man zunächst klären, für welche kleinste Anzahl von Streichhölzern die Aufgabe lösbar ist.

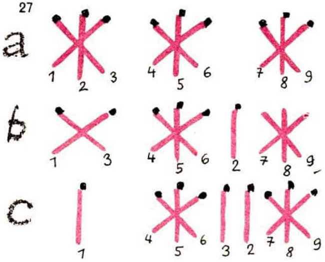
Um diese Zahl schneller festzustellen, laßt die Streichhölzer nicht so „springen", daß sie Gruppen zu je 3 bilden, sondern laßt sie umgekehrt aus Dreiergruppen springen, so daß sie einzeln liegen. Dabei beachtet folgende Regeln:

1. Ein Streichholz muß aus irgendeiner Dreiergruppe genommen und über drei andere Streichhölzer hinweg auf einen neuen Platz gelegt werden.
2. Ein nochmaliges Umlegen des Streichholzes ist nicht gestattet.
3. Eins der Streichhölzer aus jeder Dreiergruppe muß an seinem Platz bleiben.

Wenn sich das vollständige Auseinanderlegen der Dreiergruppen als undurchführbar erweist, dann folgt daraus auch die Unlösbarkeit der Aufgabe, Gruppen zu je 3 aus der gleichen Anzahl nebeneinanderliegender Streichhölzer zu bilden.

Auf diese Weise läßt sich leicht feststellen, daß diese Aufgabe zum Beispiel weder eine Lösung für sechs noch für neun Streichhölzer hat. Nehmen wir einmal drei Dreiergruppen (Abb. 27a). Verlegen wir das

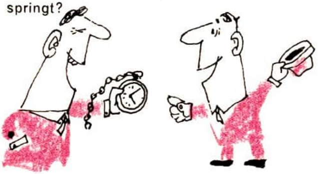
27



Streichholz Nr. 2 über die Dreiergruppe (4, 5, 6) hinweg (Abb. 27b) und dann über dieselbe Dreiergruppe das Streichholz Nr. 3 (Abb. 27c), dann ist es unmöglich, die Dreiergruppe (4, 5, 6) aufzulösen. Für einen Sprung der Streichhölzer aus dieser Dreiergruppe nach links ist nur ein Streichholz vorhanden und nach rechts eins, zwei oder dann sogleich fünf, aber nicht drei, wie die Bedingung fordert. Die analoge Lage ergibt sich auch dann, wenn man mit dem Auseinanderlegen nicht bei der ersten Dreiergruppe, sondern bei der zweiten oder dritten beginnt.

Untersucht selbständig den Fall mit vier Dreiergruppen!

Zusammenfassende Frage. Welche Anzahl von Streichhölzern ist mindestens nötig, um aus ihr Gruppen von n Streichhölzern zu bilden, wenn jedesmal ein Streichholz über n andere Streichhölzer springt?



53. Die Uhr war stehengeblieben

Ich habe keine Taschenuhr, sondern nur eine Wanduhr. Als sie stehenblieb, ging ich zu meinem Bekannten, dessen Uhr genau ging. Ich ließ mir die Zeit sagen und kehrte,

ohne mich lange aufzuhalten, nach Hause zurück. Dort stellte ich schnell eine einfache Berechnung an und brachte die Zeiger der Wanduhr in die Stellung, die der genauen Zeit entsprach.

Wie verfuhr ich, und welche Schlußfolgerungen zog ich, wenn mir vorher nicht bekannt war, wieviel Zeit der Weg erforderte?

54. Die vier Grundrechnungsarten der Arithmetik

Ihr habt vor euch sieben Zeilen mit Ziffern in natürlicher Folge:

1 2 3 = 1
1 2 3 4 = 1
1 2 3 4 5 = 1
1 2 3 4 5 6 = 1
1 2 3 4 5 6 7 = 1
1 2 3 4 5 6 7 8 = 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 1

Ohne die Ziffernfolge zu ändern, sollt ihr zwischen sie Zeichen der arithmetischen Grundrechnungsarten setzen, so daß sich als Resultat dieser Rechenoperationen in jeder Zeile 1 ergibt. Die Rechenoperationen müssen in der Aufstellung von links nach rechts ausgeführt werden, dabei kann zum Beispiel eine Addition vor einer Multiplikation stehen. Wie ihr wißt, muß man in solchem Falle Klammern setzen. Wenn es nötig ist, könnt ihr zwei nebeneinanderstehende Ziffern als zweistellige Zahl betrachten.
Sucht zwei Lösungen, die eine ohne Verwendung der Subtraktion, die andere unter Anwendung aller vier Grundrechnungsarten!

55. Der verdutzte Kraftwagenfahrer

Worüber dachte der Kraftfahrer nach, als er auf den Kilometerzähler seines Wagens sah (Abb. 28)? Der Zähler zeigte die Zahl 15951, und der Fahrer bemerkte, daß die vom Wagen zurückgelegte Kilometerzahl eine symmetrische Zahl darstellte, das heißt eine solche, die man von links nach rechts wie von rechts nach links gleich lesen kann. „Das ist interessant!" murmelte der Kraftwagenfahrer. „Jetzt wird wahrscheinlich nicht sobald eine derartige Zahl auf dem Zähler erscheinen."
Jedoch nach genau zwei Stunden zügiger Fahrt zeigte der Zähler eine neue Zahl, die sich ebenfalls nach beiden Seiten gleich lesen ließ.
Stellt fest, mit welcher Geschwindigkeit der Kraftfahrer in diesen zwei Stunden gefahren ist!

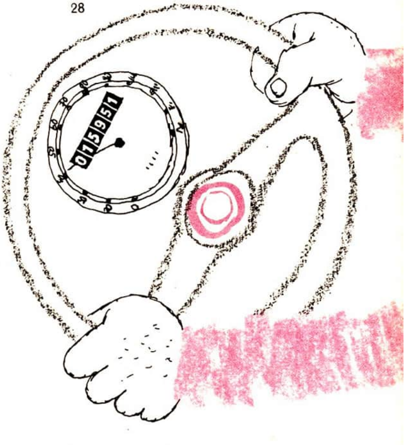
56. Die Tagesleistung einer Brigade der ausgezeichneten Qualität

Einer Brigade der ausgezeichneten Qualität war der Auftrag erteilt worden, in möglichst kurzer Zeit eine gewisse Anzahl Meßgeräte fertigzustellen. Die Brigade bestand aus einem alten erfahrenen Arbeiter als Brigadier und neun jungen Arbeitern, die eben erst ihre Ausbildung beendet hatten.
Im Laufe eines Tages baute jeder von den jungen Arbeitern 15 Geräte zusammen und der Brigadier 9 Geräte mehr als jedes der zehn Brigademitglieder im Durchschnitt.
Wieviel Meßgeräte wurden insgesamt von der Brigade an einem Arbeitstag zusammengebaut?

57. Die pünktliche Getreideablieferung

Eine LPG beginnt mit der Ablieferung des Getreides und beschließt, die Lieferung Punkt 11 Uhr zur Erfassungsstelle zu bringen. Wenn die Zugmaschinen mit einer Geschwindigkeit von 15 km/h fahren, würden sie 10.30 Uhr in der Erfassungsstelle eintreffen, und wenn sie mit einer Geschwindigkeit von 10 km/h fahren, 11.30 Uhr. Wie weit ist es von der LPG bis zur Erfassungsstelle, und mit welcher Geschwindigkeit muß man fahren, um pünktlich einzutreffen?

28



58. In der S-Bahn

Zwei Schulfreundinnen fuhren mit der S-Bahn vom Hauptbahnhof nach Hause.
„Ich stelle fest", sagte die eine, „daß uns aller fünf Minuten ein S-Bahnzug begegnet. Wieviel S-Bahnzüge, meinst du, kommen im Laufe einer Stunde aus der Gegenrichtung im Hauptbahnhof an, wenn die Geschwindigkeit der Züge in beiden Richtungen gleich groß ist?"
„Natürlich zwölf, weil $60:5=12$ ist", sagte die andere.
Aber die Fragestellerin war damit nicht einverstanden und erläuterte der anderen ihre Überlegungen.
Und was denkt ihr darüber?

59. Von 1 bis 1000000000

Es wird erzählt, daß der neunjährige Gauß[1] von seinem Lehrer die Aufgabe erhielt, die Summe aller ganzen Zahlen von 1 bis 100, also $1+2+3+\ldots 98+99+100$, zu suchen. Der junge Gauß überlegte, wie man die Addition recht schnell ausführen könnte.
Man muß die erste mit der letzten Zahl, die zweite mit der vorletzten usw. addieren. Die Summe eines jeden Zahlenpaares ist 101, und das wiederholt sich 50mal.
Folglich ist die Summe aller ganzen Zahlen von 1 bis 100:

$$101 \cdot 50 = 5050.$$

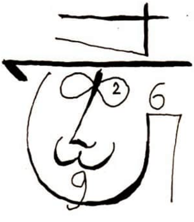
Wendet dieses Verfahren zur Lösung einer schwierigeren Aufgabe an: Es soll die Summe der Ziffern aller ganzen Zahlen von 1 bis 1000000000 gesucht werden.

60. Schrecklicher Traum eines Fußballfans

Ein Fußballfan, bekümmert über die Niederlage seiner Mannschaft, schlief unruhig. Er träumte von einem großen quadratischen Zimmer ohne Möbel. Darin trainierte ein Torwart. Er spielte den Fußball gegen die Wand und fing ihn wieder auf.

[1] Karl Friedrich Gauß (1777–1855), bedeutender deutscher Mathematiker

Plötzlich wurde der Torwart kleiner und immer kleiner und verwandelte sich schließlich in ein kleines Zelluloidbällchen aus einem Tischtennisspiel, und der Fußball wurde zu einer großen gußeisernen Kugel. Die Kugel rollte wie besessen über den Fußboden und wollte das kleine Zelluloidbällchen zerdrücken. Das unglückliche Bällchen warf sich in seiner Verzweiflung hin und her, bis sich seine Kräfte erschöpften und es nicht mehr springen konnte. Konnte es sich, da es vom Boden nicht mehr loskam, dennoch irgendwo vor den Verfolgungen durch die gußeiserne Kugel in Sicherheit bringen?

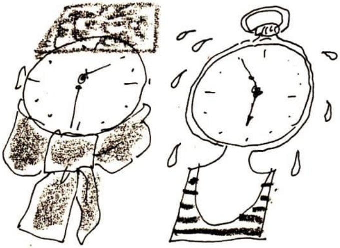


2. Abschnitt

Zur Lösung der Aufgaben des zweiten Abschnitts ist die Kenntnis der Grundrechnungsarten mit gemeinen und Dezimalbrüchen erforderlich.
Der Leser, der noch nicht mit Brüchen rechnen kann, mag vorläufig die Aufgaben dieses Abschnitts überspringen und zum folgenden Kapitel übergehen.

61. Die Uhr

Auf meinen Reisen durch die große Sowjetunion kam ich an Orte, wo der Temperaturunterschied der Luft am Tage und in der Nacht so groß ist, daß er sich beim Aufenthalt im Freien am Gang der Uhr bemerkbar macht. Ich stellte fest, daß durch die Temperaturschwankungen die Uhr am Tage eine halbe Minute vor- und nachts eine drittel Minute nachging.
Am Morgen des 1. Mai zeigte die Uhr die richtige Zeit. An welchem Tage ging sie bereits 5 Minuten vor?



62. Die Treppe

In einem Haus sind sechs Stockwerke (einschließlich des Erdgeschosses). Sagt, wievielmal der Weg bis zum sechsten Stock länger ist als der bis zum dritten, wenn die Treppen zwischen den Stockwerken die gleiche Anzahl Stufen haben.

63. Rätselaufgabe

Welches Zeichen muß man zwischen die Ziffern 2 und 3 setzen, damit man eine Zahl erhält, die größer als 2, aber kleiner als 3 ist?

64. Interessante Brüche

Wenn man zum Zähler und Nenner des Bruches $\frac{1}{3}$ den Nenner addiert, dann verdoppelt sich der Wert des Bruches

$$\left(\frac{1+3}{3+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}\right)$$

Sucht den Bruch, dessen Wert sich bei der Addition des Nenners zum Zähler und Nenner a) verdreifacht, b) vervierfacht.
(Wer in der Algebra Bescheid weiß, kann die Aufgabe verallgemeinern und sie mit Hilfe einer Gleichung lösen.)

65. Welche Zahl ist das?

$\frac{1}{2}$ ist ihr Drittel. Welche Zahl ist das?

66. Der Schulweg

A hat jeden Morgen einen sehr weiten Schulweg.
Am Ende des ersten Viertels des Weges von der Wohnung bis zur Schule liegt das Gemeindeamt, das an der Vorderfront eine elektrische Uhr hat, und am Ende des ersten Drittels des gesamten Weges liegt der Bahnhof. Als A am Gemeindeamt vorbeiging, war es 7.30 Uhr, und als er den Bahnhof erreichte, zeigte die Uhr 25 Minuten vor 8 Uhr.
Wann ging A zu Hause weg, und wann kam er in die Schule?

67. Im Stadion

Entlang einer Aschenbahn sind 12 Fähnchen in gleichen Abständen aufgestellt. Der Start ist am ersten Fähnchen. Am achten Fähnchen befand sich ein Läufer 8 Sekunden nach dem Start. In wieviel Sekunden befand er sich bei unveränderter Geschwindigkeit am zwölften Fähnchen?
Blamiert euch nicht!

68. Hatte er Zeit gewonnen?

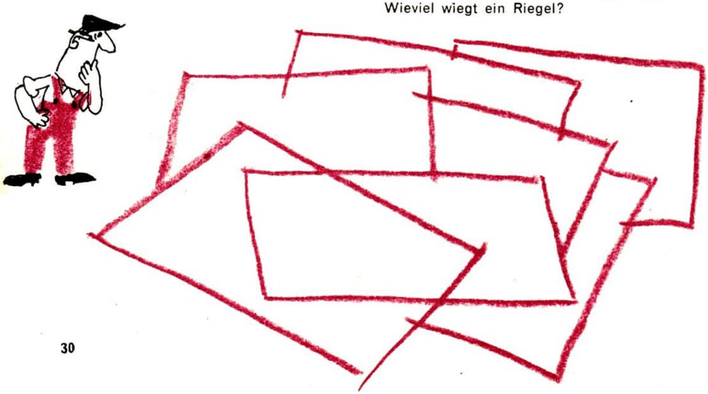
A kehrte von der Stadt nach Hause zurück. Die erste Hälfte des Weges fuhr er mit der Eisenbahn 15mal schneller, als wenn er zu Fuß gegangen wäre. Die zweite Hälfte des Weges war er jedoch gezwungen, mit einem Ochsenkarren zu fahren, und das ging halb so schnell, als wenn er zu Fuß gegangen wäre.
Brauchte A weniger Zeit, als wenn er den ganzen Weg zu Fuß gegangen wäre?

69. Große Teile anstelle kleiner

In Maschinenbaubetrieben gibt es einen sehr interessanten Beruf; er nennt sich „Anreißer". Ein Anreißer zeichnet auf dem Material die Linien an, nach denen es bearbeitet werden muß. Er muß interessante und mitunter nicht ganz leichte geometrische Aufgaben lösen, arithmetische Berechnungen anstellen usw.
Einmal mußten sieben gleiche rechtwinklige Platten in gleiche Teile für zwölf Werkstücke zerschnitten werden. Man brachte diese sieben Platten dem Anreißer und fragte ihn, ob es möglich wäre, sie so anzuzeichnen, daß keine von ihnen in sehr kleine Teile zerlegt werden müßte. Die einfachste Lösung also, jede Platte in zwölf gleiche Teile zu zerschneiden, ging nicht an, weil man dabei viele kleine Stücke erhielt. Was war zu tun?
Ist es möglich, die Platten in größere Teile zu zerschneiden? Der Anreißer überlegte, stellte einige arithmetische Berechnungen mit Brüchen an und fand schließlich das sparsamste Verfahren zur Teilung der Platten.
Später zerkleinerte er fünf Platten in gleiche Teile für sechs Werkstücke, 13 Platten in Teile für 12 Werkstücke, 13 Platten in Teile für 36 Werkstücke, 26 in Teile für 21.
Wie verfuhr der Anreißer?

70. 1 Riegel Kernseife

Auf der einen Waagschale einer Waage liegt ein Riegel Seife, auf der anderen liegen drei Viertel eines solchen Riegels und noch $^1/_8$ kp. Die Waage ist im Gleichgewicht.
Wieviel wiegt ein Riegel?



71. Arithmetische Nüsse

Aufgabe 1. Man soll mit zwei Ziffern die kleinste natürliche Zahl ausdrücken.

Aufgabe 2. Die Zahl 37 kann man mit Hilfe von fünf Dreien schreiben: $37 = 33 + 3 + \frac{3}{3}$.
Versucht, die Zahl 37 auf andere Weise mit Hilfe von fünf Dreien auszudrücken!

Aufgabe 3. Man soll 100 durch sechs gleiche Ziffern ausdrücken. Es sind mehrere Lösungen möglich. Versucht, eine allgemeine Lösung in Form einer algebraischen identischen Gleichung zu finden.

Aufgabe 4. Man soll 55 unter Verwendung von nur fünf Vieren ausdrücken.

Aufgabe 5. Man soll 20 mit Hilfe von vier Neunen ausdrücken.

Aufgabe 6. Die Zahl $\frac{1}{7}$ (Abb. 30) ist aus sieben Streichhölzern gelegt.
Man soll diesen Bruch in den Wert $\frac{1}{3}$ verwandeln, ohne die Streichhölzer zu vermehren oder zu verringern.

Aufgabe 7. Man soll die Zahl 20 unter je dreimaliger Verwendung der Ziffern 1, 3, 5 und 7 schreiben.

Aufgabe 8. Die Summe zweier Zahlen, die aus den Ziffern 1, 3, 5 und 7 gebildet sind, soll gleich der Summe zweier Zahlen sein, die aus den Ziffern 2, 4, 6 und 8 gebildet sind. Sucht diese Zahlen, wobei ihr jede Ziffer nur einmal verwenden dürft.

Anmerkung. Es dürfen dabei keine unechten Brüche verwendet werden.

Aufgabe 9. Welche zwei Zahlen ergeben bei der Multiplikation der einen mit der anderen und bei der Subtraktion der einen von der anderen dasselbe Resultat?

30

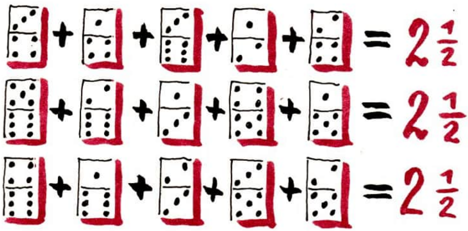

Solche Zahlenpaare gibt es unendlich viele. Wie bildet man sie?

Aufgabe 10. Man soll aus den Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 zwei gleiche Brüche bilden, deren Summe 1 ist. Es müssen alle Ziffern verwendet werden, aber jede von ihnen nur einmal (es sind mehrere Lösungen möglich).

Aufgabe 11. Aus den Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9, jede nur einmal verwendet, soll man gemischte Brüche bilden, deren Summe 100 ergibt (es sind mehrere Lösungen möglich).

72. Domino-Brüche

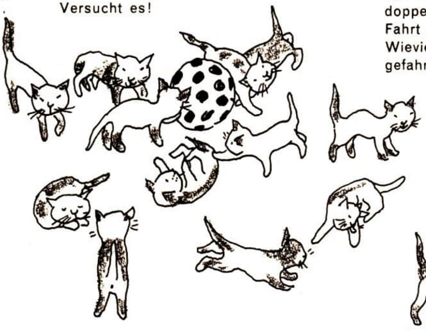
Nehmt aus einem Dominospiel alle Steine heraus, deren beide Hälften die gleiche Anzahl Augen enthalten (Pasche), und die Steine, die nur auf einer Hälfte Augen haben (Blanke). Die übrigen 15 Steine kann man als Brüche betrachten und sie so in drei Reihen aufstellen, daß die Summe der Brüche in jeder Reihe $2\frac{1}{2}$ ist (Abb. 31).
Es ist interessant, daß man, wenn man diese 15 Dominosteine anders verteilt, Reihen von Brüchen bilden kann, deren Summe eine ganze Zahl ist (im allgemeinen sind es jedoch in verschiedenen Reihen verschiedene Zahlen).

31


Verwendet einige der Dominosteine als unechte Brüche, zum Beispiel $\frac{4}{3}, \frac{6}{1}, \frac{3}{2}$ usw., und versucht, alle 15 Steine in drei Reihen zu je fünf Steinen so anzuordnen, daß die Summe der Brüche in jeder Reihe die Zahl 10 ergibt.
Beim ersten Mal gelingt das freilich nicht. Man muß überlegen und es praktisch ausprobieren.
Welche Zahlen könntet ihr noch erhalten, wenn ihr die Dominosteine in drei Reihen aufstellt und die entsprechenden Brüche addiert (die Summe muß in allen drei Reihen ein und dieselbe sein)?

73. Die jungen Katzen

Ein Junge fand irgendwo ein verlassenes Kätzchen, er nahm es hoch und brachte es nach Hause. Er zog schon immer ein paar junge Katzen auf; aber wieviel er hatte, sagte er nicht gern, damit man ihn nicht auslachte.
Einmal wurde er gefragt:
„Wieviel Kätzchen hast du jetzt?"
„Nicht viele", antwortete er, „drei Viertel ihrer Zahl und noch drei Viertel eines Kätzchens."
Seine Kameraden dachten, daß er Spaß machte. Er hatte ihnen jedoch eine Aufgabe gestellt, die gar nicht schwer zu lösen ist. Versucht es!

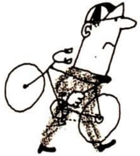


74. Die mittlere Geschwindigkeit

Die Hälfte eines Weges ging ein Pferd ohne Last mit einer Geschwindigkeit von 12 km/h. Den Rest des Weges zog es einen Wagen und schaffte 4 km/h.
Welches ist die mittlere Geschwindigkeit, das heißt, welche gleichbleibende Geschwindigkeit müßte das Pferd einhalten, um den ganzen Weg in der gleichen Zeitspanne zurückzulegen?

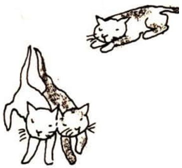
75. Der schlafende Fahrgast

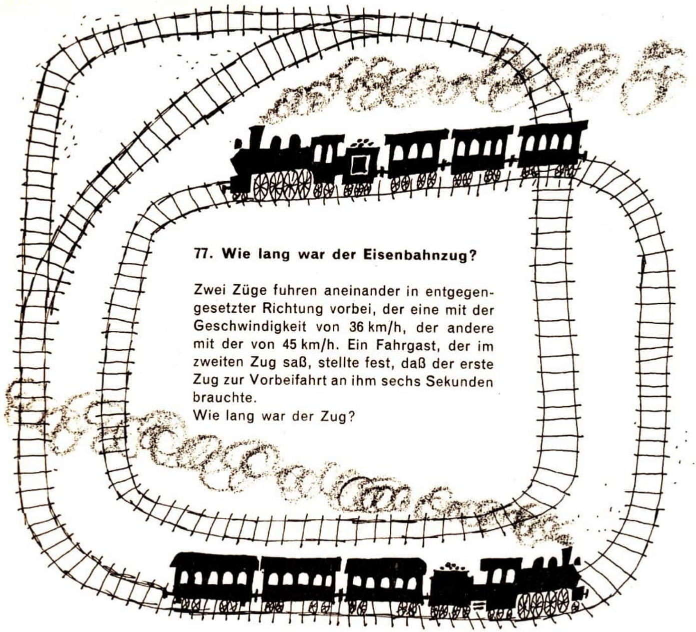
Als ein Fahrgast die Hälfte seiner Reise zurückgelegt hatte, begann er zu schlafen und schlief so lange, bis von der Reise noch die Hälfte der Strecke zurückzulegen war, die er schlafend verbracht hatte.
Welchen Teil der ganzen Strecke war er schlafend gefahren?



76. Der Radfahrer

Als ein Radfahrer zwei Drittel seines Weges zurückgelegt hatte, platzte ein Reifen. Für den Rest des Weges brauchte er zu Fuß doppelt soviel Zeit wie für die bisherige Fahrt mit dem Rade.
Wievielmal schneller war er mit dem Rade gefahren, als er lief?





77. Wie lang war der Eisenbahnzug?

Zwei Züge fuhren aneinander in entgegengesetzter Richtung vorbei, der eine mit der Geschwindigkeit von 36 km/h, der andere mit der von 45 km/h. Ein Fahrgast, der im zweiten Zug saß, stellte fest, daß der erste Zug zur Vorbeifahrt an ihm sechs Sekunden brauchte.
Wie lang war der Zug?

78. Der Wettbewerb

Die Dreher A und B sind Lehrlinge in einer Metallarbeiterfachschule. Als sie von ihrem Ausbilder den Auftrag erhielten, je einen gleich großen Posten Werkstücke anzufertigen, wollten sie ihren Auftrag gleichzeitig und früher als in der gesetzten Frist zu Ende bringen.
Nach einiger Zeit zeigte sich jedoch, daß B nur die Hälfte der Menge geschafft hatte, die dem A noch zu tun übrig blieb, und daß A die Hälfte dessen zu tun übrig blieb, was er bereits geschafft hatte.
Um wieviel mußte B jetzt seine tägliche Produktion im Verhältnis zu A steigern, damit er gleichzeitig mit diesem fertig wurde?

79. Wer hat recht?

Die Schülerin A löste eine Rechenaufgabe. Dabei war u. a. auszurechnen, wieviel Kubikmeter Erde bei der Ausführung eines bestimmten Bauprojektes transportiert werden mußten. Das Ergebnis ließ sich als Produkt von drei Zahlen darstellen. A hatte glücklich die ersten beiden Zahlen multipliziert und wollte das Resultat mit der dritten Zahl multiplizieren, als sie auf einmal bemerkte, daß der zweite Multiplikator von ihr falsch niedergeschrieben worden war, und zwar war er um $\frac{1}{3}$ größer, als er hätte sein müssen.

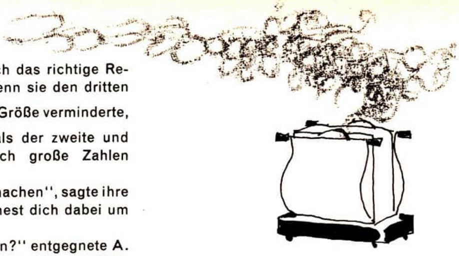
Um die bereits durchgeführte Rechnung nicht noch einmal schreiben zu müssen, meinte A, daß sie ja doch das richtige Resultat erhalten würde, wenn sie den dritten Multiplikator um $\frac{1}{3}$ seiner Größe verminderte, und das um so mehr, als der zweite und dritte Multiplikator gleich große Zahlen waren.

,,So darfst du das nicht machen'', sagte ihre Freundin B, ,,du verrechnest dich dabei um 20 Kubikmeter.''

,,Wie kann das falsch sein?'' entgegnete A. ,,Wenn ich die eine Zahl vergrößere und die andere, die gleich groß ist, um ebensoviel verringere, dann, denke ich, bleibt das Resultat unverändert.''

Wer hat recht?

Könnt ihr mit diesen Angaben die Aufgabe lösen?



80. Röstbrote

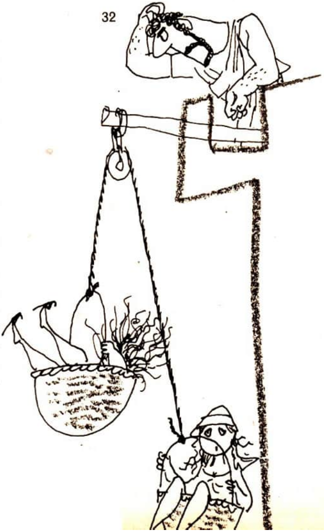
In einem Brotröster können gleichzeitig zwei Scheiben Brot einseitig geröstet werden. Das Rösten jeder Seite dauert 30 Sekunden. Drei Scheiben beiderseitig zu rösten dauert danach 2 Minuten. Überlegt, wie man diese Menge in nur $1^1/_2$ Minuten rösten kann!

Schwierige Lagen

81. Der Scharfsinn des Schmieds Chetscho

Auf einer Reise im vergangenen Sommer durch Grusinien unterhielten wir uns manchmal damit, daß wir uns alle möglichen sonderbaren Geschichten ausdachten, zu denen wir durch irgendwelche Denkmäler aus längst vergangener Zeit angeregt wurden.
Einmal kamen wir an einen einsamen alten Turm. Wir besichtigten ihn und setzten uns ein bißchen zum Ausruhen nieder. Unter uns war ein Student der Mathematik. Er dachte sich sogleich eine interessante Aufgabe aus:
„Vor 300 Jahren lebte hier ein böser und hochmütiger Fürst. Er hatte eine heiratsfähige Tochter, Daridshan mit Namen. Der Fürst hatte sie einem reichen Nachbarn zur Frau versprochen, sie aber hatte einen einfachen Burschen lieb gewonnen, den Schmied Chetscho. Daridshan und Chetscho versuchten aus ihrer bedrängten Lage in die Berge zu entfliehen, aber sie wurden von den Knechten des Fürsten ergriffen.
Der Fürst wurde wütend und beschloß, am folgenden Tage beide hinrichten zu lassen; für die Nacht ließ er sie jedoch hier in diesen hohen, finsteren, verfallenen Turm einsperren, und zusammen mit ihnen die Dienerin Daridshans, ein halbwüchsiges Mädchen, das ihr bei der Flucht geholfen hatte.
Chetscho verlor im Turm den Mut nicht; er sah sich um, stieg die Stufen empor zum oberen Teil des Turmes, schaute zu einem Fenster hinaus, aber es war unmöglich, hinabzuspringen, man wäre zerschmettert worden.
Da bemerkte Chetscho neben einem Fenster einen von den Bauleuten vergessenen Strick, der über eine Krampe geworfen war. An den Enden des Strickes war je ein leerer Korb angebunden. Chetscho erinnerte sich, daß die Maurer mit diesen Körben die Ziegel nach oben beförderten und nach unten den Schutt hinabließen, wobei, wenn die Last in dem einen Korb die in dem anderen um 5–6 kp (übertragen in moderne Maßeinheiten) überschritt, der Korb ziemlich sanft zur Erde hinuntersank; der andere stieg währenddessen zum Fenster empor.
Chetscho schätzte, daß Daridshan etwa 50 kp wog, die Dienerin nicht mehr als 40 kp. Sein eigenes Gewicht kannte er, es waren etwa 90 kp. Chetscho fand im Turm noch 13 gleiche, 5 kp schwere Glieder einer Kette. Da in jedem Korb ein Mensch und sämtliche Kettenglieder oder sogar zwei Menschen Platz hatten, glückte es den dreien, auf den Erdboden zu gelangen, wobei sie sich so hinabließen, daß in keinem Falle das Gewicht des niedergehenden Korbs das des aufsteigenden um mehr als 5 kp überschritt. Wie befreiten sie sich aus dem Turm?"

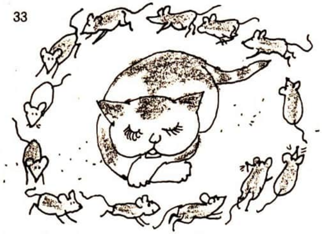
32



82. Der Kater und die Mäuse

Der Kater hatte soeben seiner jungen Herrin bei den Rechenaufgaben „geholfen". Nun schläft er süß und träumt von 13 Mäusen, die im Kreis um ihn herumtanzen. Zwölf Mäuse sind grau, und eine ist weiß. Da hört der Kater, wie eine ihm vertraute Stimme spricht: „Lieber Kater, du sollst jede 13. Maus fressen, wobei du sie in einer Richtung im Kreis herum abzählen mußt, aber so, daß als letzte Maus die weiße zum Fressen bleibt."
Mit welcher Maus muß er anfangen, um die Aufgabe richtig zu lösen? Helft dem Kater!

33

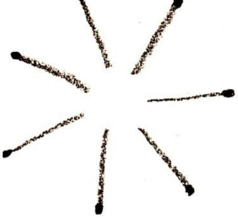


83. Das Los fiel auf den Zeisig und das Rotkehlchen

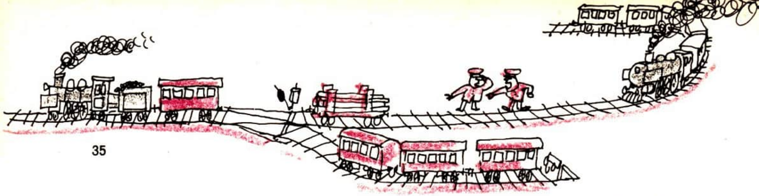
Am Ende ihres Aufenthaltes im Ferienlager beschlossen die Jungen Pioniere, die von den jungen Vogelstellern eingefangenen gefiederten Bewohner aus Wald und Feld wieder in Freiheit zu lassen. Insgesamt waren es 20 Vögel, jeder in einem besonderen Bauer. Der Lagerleiter schlug folgende Reihenfolge vor:
„Stellt alle Bauer mit den Vögeln in eine Reihe und öffnet von links nach rechts jeden fünften Käfig. Wenn ihr mit der Zählung an das Ende der Reihe kommt, dann fangt wieder an ihrem Anfang an; aber die geöffneten Käfige dürft ihr nicht mehr mitzählen. Das macht so lange, bis alle Käfige bis auf zwei geöffnet sind. Die Vögel, die sich in diesen Käfigen befinden, dürft ihr mit in die Stadt nehmen."
Sie nahmen den Vorschlag an.
Den meisten Kindern war es gleich, welche beiden Vögel sie mitnahmen (wenn sie schon nicht alle mitnehmen durften); aber zwei Junge Pioniere wünschten, daß das Los unbedingt auf den Zeisig und das Rotkehlchen fiel. Als sie die Käfige in einer Reihe aufstellen halfen, erinnerten sie sich der Aufgabe mit dem Kater und den Mäusen (Aufgabe 82). Sie berechneten schnell, an welchen Platz man die Käfige mit dem Zeisig und dem Rotkehlchen stellen muß, damit gerade diese ungeöffnet bleiben. So stellten sie die beiden Käfige an . . .
Eigentlich könnt ihr selbst feststellen, an welchen Platz die beiden die Käfige stellten.

84. Geldstücke sollen verteilt werden

Legt euch sieben Streichhölzer und sechs Geldstücke zurecht. Die Streichhölzer legt strahlenförmig auf den Tisch, wie in Abb. 34 gezeigt ist. Ihr beginnt bei einem beliebigen Streichholz und zählt im Uhrzeigersinn das dritte ab und legt an seinen Kopf ein Geldstück. Dann zählt wiederum in derselben Richtung das dritte ab, wobei ihr bei einem beliebigen Streichholz beginnt, an dem noch kein Geldstück liegt, und legt ebenfalls an den Kopf ein Geldstück. Bemüht euch, auf diese Weise alle sechs Geldstücke an den Kopf von sechs Streichhölzern zu legen. Beim Abzählen darf man diejenigen nicht auslassen, an denen bereits ein Geldstück liegt. Man muß unbedingt mit der Zählung bei einem Streichholz beginnen, an dem noch kein Geldstück liegt. Zwei Geldstücke dürfen nicht auf einen Platz zu liegen kommen.
Nach welchem Prinzip muß man verfahren, um die Aufgabe richtig zu lösen?



34



35

85. Der Personenzug muß vorbeigelassen werden

An einem Haltepunkt einer eingleisigen Bahnstrecke hielt ein Zug, bestehend aus der Lokomotive und fünf Waggons. Er brachte eine Brigade zum Bau einer neuen Abzweigstrecke. Vorläufig gab es an dem Haltepunkt nur ein kleines, vom Bauzug aus in rückwärtiger Richtung gelegenes Abstellgleis, auf dem notfalls gerade eine Lokomotive und zwei Waggons Platz hatten. Kurz hinter dem Zug mit der Baubrigade näherte sich dem Haltepunkt ein Personenzug.
Wie konnte der Personenzug vorbeigelassen werden?

86. Weiß und schwarz

Nehmt vier weiße und vier schwarze Damesteine und legt sie in einer Reihe auf den Tisch: abwechselnd weiß, schwarz, weiß, schwarz usw. Links oder rechts davon laßt einen freien Platz in der Breite von zwei Steinen. Man soll die Steine in vier Zügen so verlegen, daß alle schwarzen Steine nebeneinander und alle weißen Steine nebeneinander liegen. Dabei müssen bei jedem Zug gleichzeitig zwei nebeneinanderliegende Steine verlegt werden, ohne daß dabei der linke und der rechte vertauscht wird. Außer den Plätzen der Steine darf nur der freie Platz benutzt werden.

87. Eine Erschwerung der Aufgabe 86

Durch Vermehrung der Anzahl der Steine läßt sich die Aufgabe erschweren.
Wenn ihr fünf weiße und fünf schwarze Steine abwechselnd nebeneinanderlegt, sind fünf Züge nötig, um alle schwarzen Steine nebeneinander und alle weißen nebeneinander einzuordnen.
Bei **sechs** Steinpaaren sind sechs Züge erforderlich, bei **sieben** Steinpaaren sieben usw. Sucht die Lösungen für fünf, sechs und sieben Steinpaare!
Beachtet dabei, daß man bei der ersten Aufstellung links oder rechts der Steine einen freien Platz von der Breite zweier Steine lassen muß und daß jedesmal zwei Steine verlegt werden müssen, ohne den einen mit dem anderen zu vertauschen.

88. Verallgemeinerung der Aufgabe

Je mehr Steine genommen werden, um so mehr Schwierigkeiten gibt es bei der Suche nach der Lösung. Dennoch versuchen wir, eine allgemeine Regel für n Steinpaare aufzustellen.
Wir haben Grund anzunehmen (vgl. die beiden vorigen Aufgaben), daß bei n weißen und n schwarzen Steinen (n Paare) die Lösung in n Zügen möglich ist. Aber das müssen wir noch beweisen. Da wir praktisch festgestellt haben, daß bei vier Steinpaaren die Aufgabe in vier Zügen lösbar ist, bei fünf Steinpaaren in fünf Zügen, bei sechs in sechs und bei sieben in sieben Zügen, können wir den Beweis für n Züge bei n Steinpaaren folgendermaßen führen:
1. Wir nehmen an, daß für $n - 4$ Steinpaare die Aufgabe in $n - 4$ Zügen lösbar ist.
2. Wir beweisen, daß für n Steinpaare vier Züge mehr erforderlich sind als für $n - 4$ Paare.
3. Da die Behauptung für $n = 4, 5, 6$ und 7 Steinpaare richtig ist, gilt sie auch für

$$\begin{aligned} n &= 8,\ 12,\ 16\ \ldots \\ n &= 9,\ 13,\ 17\ \ldots \\ n &= 10,\ 14,\ 18\ \ldots \\ n &= 11,\ 15,\ 19\ \ldots, \end{aligned}$$

das heißt für jedes $n \geqq 4$.

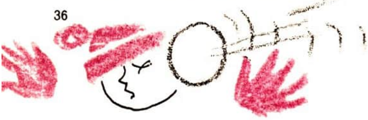
Denkt dieses Beweisverfahren gut durch; es heißt **vollständige Induktion**. Sucht einen anderen Beweis!

89. Karten sollen in der Reihenfolge ihrer Nummern aufgelegt werden

Schneidet aus Karton zehn Karten in der Größe 4 cm mal 6 cm und numeriert sie mit den natürlichen Zahlen von 1 bis 10. Dann legt sie in der Reihenfolge von 1 bis 10 auf einen Stoß und nehmt sie in die Hand. Legt die oberste Karte auf den Tisch, die zweite unter den Stoß, die dritte neben die oberste auf den Tisch, die vierte unter den Stoß. Setzt das fort, bis alle Karten auf dem Tisch liegen. Mit Sicherheit läßt sich voraussagen, daß die Karten nicht mehr in der Reihenfolge von 1 bis 10 liegen.
Überlegt, in welcher Reihenfolge man am Anfang die Karten in dem Stoß ordnen muß, damit sie bei dem geschilderten Verfahren in der Reihenfolge der Nummern von 1 bis 10 auf den Tisch zu liegen kommen.

90. Die tapfere „Besatzung"

Eine tapfere „Besatzung" verteidigte eine Schneeburg. Die Jungen schlugen fünf Sturmangriffe ab, sie ergaben sich nicht.



Am Anfang des Spieles bestand die „Besatzung" aus 40 Mann. Der „Kommandant" hatte seine Streitkräfte nach einem Plan aufgestellt, wie er aus dem nebenstehenden quadratischen Rahmen zu ersehen ist.

1	9	1
9	40	9
1	9	1

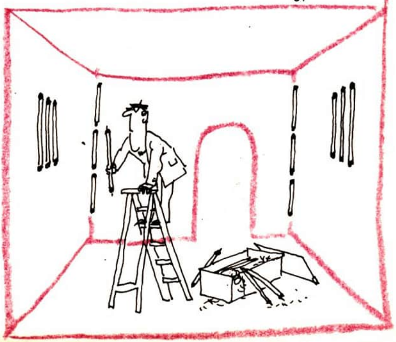
Der „Gegner" sah, daß jede der vier Seiten der Burg elf Mann verteidigten. Nach der Spielregel „verlor" die „Besatzung" beim ersten, zweiten, dritten und vierten Sturmangriff jedesmal vier Mann. Beim letzten, dem fünften Sturmangriff, setzte der „Feind" mit seinen Schneebällen noch zwei Mann außer Gefecht. Trotz der Verluste war nach jedem Sturmangriff jede Seite der Burg mit elf Mann zur Verteidigung besetzt.
Wie stellte der „Kommandant" der Burg die Streitkräfte seiner Besatzung nach jedem Sturmangriff auf?

91. Tageslichtlampen in einem Raum für Fernsehübertragungen

Ein Lichttechniker, der einen Raum für eine Fernsehübertragung vorbereitete, probierte verschiedene Möglichkeiten aus, ihn mit Tageslicht-Leuchtröhren zu beleuchten. Zuerst brachte er je 3 Lampen in jeder Ecke und an jeder der 4 Wände des Raumes an, insgesamt 24 Lampen (Abb. 37). Dann fügte er noch 4 Lampen und schließlich noch einmal 4 Lampen hinzu. Er versuchte auch, die Zahl der Lampen auf 20 und sogar auf 18 zu verringern.

3	3	3
3		3
3	3	3

In allen Fällen teilte er die Lampen so auf die Ecken und die Wände auf, daß an jeder Wand 9 Lampen waren. Sucht das Schema für die Anordnung der Lampen bei 28 und 32 und auch bei 20 und 18 Stück.
Stellt fest, bis zu welchen Grenzen der Lichttechniker die Anzahl der Lampen vermehren und verringern könnte, ohne vom Prinzip der Anordnung von 9 Lampen an jeder Wand abgehen zu müssen. Wie könnte der Techniker die Anzahl der Lampen statt um je 4 um 1, 2 oder 3 vermehren oder verringern, wenn trotzdem an jeder Wand 9 Lampen angebracht werden sollen?

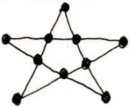


92. Vorbereitung auf den Festtag

Die geometrische Bedeutung der vorhergehenden beiden Aufgaben bestand darin, Gegenstände auf vier sich paarweise schneidenden Geraden (den Seiten eines Rechtecks oder Quadrates) so anzuordnen, daß die Anzahl der Gegenstände auf jeder Geraden auch bei Änderung ihrer Gesamtzahl ein und dieselbe blieb.

Dieses Ziel wurde dadurch erreicht, daß alle Gegenstände, die sich in den Ecken befanden, so gezählt wurden, als ob sie zu jeder der Seiten, die die Ecke bildeten, gehörten, so wie ein Punkt, in dem sich zwei Gerade schneiden, zu beiden Geraden gehört. Wir wollen jetzt eine gewisse Anzahl von Gegenständen (Steinchen, Lämpchen, Bäume usw.) in einer Ebene anordnen und wollen uns dabei nicht auf die Forderung beschränken, diese Gegenstände nur auf vier Geraden anzuordnen. Wenn wir dazu fordern, daß die Lösung in irgendeinem Sinne symmetrisch sein soll, dann führt sie meist zur Konstruktion irgendeiner geometrischen Figur.

Wie könnte man zum Beispiel für eine Festtagsillumination 10 Lämpchen in 5 Zeilen zu je 4 formschön aufstellen?

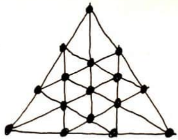


38

Die Antwort auf diese Frage gibt der fünfeckige Stern, wie er in Abb. 38 dargestellt ist. Übt euch in der Lösung analoger Aufgaben. Bemüht euch dabei, die geforderten Anordnungen möglichst symmetrisch zu gestalten.

Aufgabe 1. Wie kann man 12 Lämpchen in 6 Zeilen zu je 4 aufstellen? Diese Aufgabe hat nicht weniger als 5 Lösungen.

Aufgabe 2. Verteilt 13 Dekorationspflanzen in 12 Zeilen zu je 3 Stück!



39

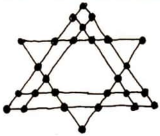
Aufgabe 3. Auf einer dreieckigen Fläche (Abb. 39) hatte ein Gärtner 16 Rosen angebaut, die in 12 geraden Zeilen zu je 4 Rosen angeordnet waren. Später bereitete er ein neues Beet vor und verpflanzte alle 16 Rosen dorthin in 10 Zeilen zu je 4 Rosen. Wie machte er das?

Aufgabe 4. Ordnet 25 Bäume in 12 Zeilen zu je 5 Stück an!

93. Kleine Eichen sollen anders verteilt werden

27 kleine Eichen waren formschön nach einem Schema verpflanzt worden, wie es in Abb. 40 dargestellt ist, und zwar in 9 Zeilen zu je 6 Bäumchen. Aber der Förster würde sicherlich diese Anordnung beanstanden. Die Eiche darf die Sonne nur von oben haben, an ihren Flanken muß Grün sein.

Wie man sagt, wächst sie gern im Pelz, aber ohne Mütze. Hier aber stehen drei Eichen losgelöst von der Gruppe abseits und einsam. Versucht, diese 27 Eichen anders anzuordnen, zwar auch in 9 Zeilen zu je 6 Stück, aber so, daß sich alle Bäume auf drei Gruppen verteilen und keiner von ihnen losgelöst von der Gruppe steht. Achtet auch dabei auf Symmetrie.

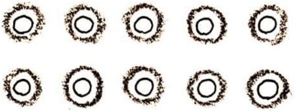


40

94. Geometrisches Spiel

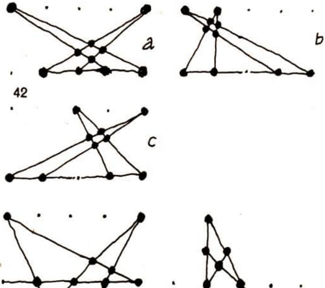
Legt auf den Tisch 10 Damespielsteine (Geldstücke, Knöpfe o. ä.) in 2 Zeilen zu je 5 Stück, wie man in Abb. 41 sehen kann.

Man soll drei beliebige Steine aus der einen Zeile und einen Stein aus der anderen –

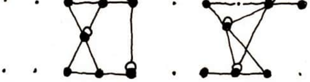


41

ohne die übrigen Steine von den Plätzen zu rücken und ohne einen Stein auf den anderen zu legen – so umordnen, daß fünf Geraden zu je vier Steinen gebildet werden. Die Anordnung der Steine muß nicht symmetrisch sein. In Abb. 42 sind als Beispiel fünf verschiedene Lösungen dargestellt. Ihr denkt vielleicht, daß sich mit diesen fünf Lösungen bereits alle Möglichkeiten erschöpft haben. Das trifft nicht zu! Man kann ja für die Lösung verschiedene Gruppen von Steinen wählen, die man umordnen will (vgl. in Abb. 42 die Beispiele a, b, c und e), und eine und dieselbe Gruppe von Steinen verschiedenartig einbauen (vgl. in Abb. 42 die Beispiele a und d). Angenommen, ihr nehmt



42



43

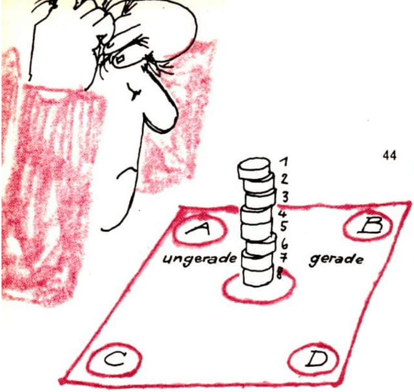
zur Umordnung drei Steine aus der oberen und einen Stein aus der unteren Zeile. Die Zusammenstellung einer Gruppe von drei Steinen aus fünf Steinen ergibt bereits zehn verschiedene Kombinationsmöglichkeiten. Überzeugt euch davon! Der Anschluß eines Steins aus der unteren Zeile an jede dieser Kombinationen ergibt jeweils noch fünf weitere Möglichkeiten. So erhält man für die Gruppierung der Steine, die umgeordnet werden sollen, $10 \cdot 5 = 50$ verschiedene Möglichkeiten.

Organisiert einen Spielwettbewerb. Legt vor jeden Mitspieler 10 Steine (man kann auch Kartonstücke schneiden) in 2 Zeilen, und nun soll jeder – ohne es die anderen sehen zu lassen – vier Steine (drei aus der einen und einen aus der anderen Zeile) so umstellen, daß fünf Zeilen zu je vier Steinen gebildet werden. Vergleicht dann die Lösungen! Diejenigen Spieler, die gleiche Gruppierungen haben, erhalten je einen Pluspunkt; die Gruppierungen, die sich von den übrigen unterscheiden, werden mit zwei Punkten bewertet. Wer die Aufgabe in einer bestimmten Zeit nicht gelöst hat, erhält keinen Punkt. Wenn ihr das Spiel einige Male wiederholt habt, zählt ihr die Summe der Punkte bei jedem Mitspieler zusammen und ermittelt den Sieger.

Man kann das Spiel auch ohne Steine durchführen. Verteilt an jeden Mitspieler ein Blatt Papier und ein Lineal. Die Steine werden durch Punkte auf dem Papier ersetzt, die bei Spielbeginn in zwei Zeilen zu je fünf aufgezeichnet werden. Das Spiel besteht darin, daß man drei beliebige Punkte aus der einen Zeile und einen beliebigen aus der anderen ausstreicht und vier neue Punkte so einsetzt, daß sie zusammen mit den übrigen (selbstverständlich mit Ausnahme der ausgestrichenen) fünf Zeilen zu je vier Punkten bilden.

Man kann auch zulassen, daß für die vier Steine je zwei aus den beiden Zeilen genommen und daß ein Stein auf den anderen gelegt werden darf. Dann sind zum Beispiel auch solche Lösungen möglich, wie in Abb. 43 gezeigt ist. Durch diesen Zusatz wird die Anzahl der Lösungsmöglichkeiten bedeutend erhöht.

44



95. Gerade und ungerade Zahlen

Baut acht durchnumerierte Damespielsteine in dem mittleren Kreis (Abb. 44) zu einer Säule in natürlicher Zahlenfolge so auf, daß der Stein mit der 1 zuoberst und der mit der 8 zuunterst liegt. Die Aufgabe besteht darin, mit der geringsten Anzahl von Zügen die Steine mit den Zahlen 1, 3, 5 und 7 aus der Säule in den Kreis mit der Bezeichnung „ungerade" und die Steine mit den Zahlen 2, 4, 6 und 8 in den Kreis mit der Bezeichnung „gerade" umzubauen. Als Zug wird jede Bewegung eines Steines von einem Platz zu einem anderen gewertet. Notfalls dürfen die Steine vorübergehend in die Kreise C und D gelegt werden. Mit einem Zug kann von Kreis zu Kreis nur ein Stein (jedesmal der obere) verlegt werden. Dabei darf man aber keinen Stein mit einer höheren Zahl auf einen solchen mit einer niedrigeren legen. Ebenso darf man keinen Stein mit einer geraden Zahl auf einen mit einer ungeraden und keinen mit einer ungeraden Zahl auf einen mit einer geraden legen.
Man darf, sagen wir, den Stein 1 auf den Stein 3, den Stein 3 auf den Stein 7 oder den Stein 2 auf den Stein 6 legen, aber nicht umgekehrt, und man darf nicht den Stein 1 auf den Stein 2 oder den Stein 4 auf den Stein 7 legen, weil dann „gerade" und „ungerade" zusammenkommen würden.
Wieviel Züge braucht ihr für die Lösung?

96. Die Aufstellung der Damespielsteine soll in Ordnung gebracht werden

Stellt 25 numerierte Damespielsteine in 25 quadratischen Feldern auf, wie in Abb. 45 gezeigt ist. Durch Platztausch der Steine sollt ihr sie in die richtige Reihenfolge bringen, das heißt, ihr sollt die Nummern 1, 2, 3, 4 und 5 von links nach rechts in die erste Zeile, die Nummern 6, 7, 8, 9 und 10 von links nach rechts in die zweite Zeile usw. bis zum Schluß unterbringen. Ihr könnt zum Beispiel die Plätze der Nummern 7 und 1, 24 und 2 tauschen usw.
Stellt fest, wieviel Züge wenigstens erforderlich sind! Damit man nicht unnötige Züge macht, muß man irgendein System ausarbeiten. Denkt darüber nach!

7	24	10	19	3
12	20	8	22	23
2	15	25	18	13
11	21	5	9	16
17	4	14	1	6

45

97. Ein Rätselgeschenk

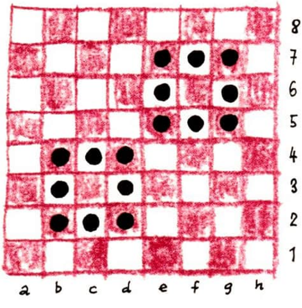
Fertigt euch ein Spielzeug aus vier Kästchen an, wie es in Abb. 46 gezeigt ist. In das kleinste innere Kästchen und in die beiden folgenden legt ihr je vier Pralinen und in das größte neun. So enthalten die vier Kästchen 21 Pralinen.
Schenkt dieses Kästchen mit Pralinen eurem Freund zum Geburtstag mit der Bitte, daß der „Jubilar" die Pralinen nicht eher ißt, als bis er die 21 Pralinen so verteilt hat, daß in jedem Kästchen eine gerade Zahl von Paaren und noch eine Praline liegen.
Selbstverständlich müßt ihr, bevor ihr das Geschenk macht, das Rätsel selbst gelöst haben. Beachtet, daß hier keinerlei arithmetische Regeln helfen; man muß nur Scharfsinn besitzen und ein bißchen Witz.

46

98. Im Rösselsprung

Zur Lösung dieser spaßigen Schachaufgabe braucht man nicht Schach spielen zu können. Es genügt, wenn man weiß, wie sich das Rössel auf dem Schachbrett bewegt. Auf einem Schachbrett sind schwarze Bauern aufgestellt (vgl. die schematische Zeichnung in Abb. 47). Stellt ein weißes Rössel auf irgendein von euch ausgewähltes freies Feld so auf, daß mit diesem Rössel alle Bauern in einer möglichst geringen Anzahl von Zügen geschlagen werden können.

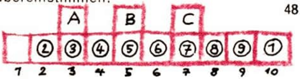
47



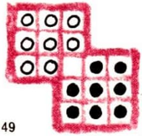
99. Damespielsteine sollen verschoben werden

1. Numeriert neun Damespielsteine mit den Ziffern 1 bis 9. Setzt diese Steine so auf ein besonderes Spielfeld (vgl. Abb. 48), daß die Nummern der Felder und der Steine übereinstimmen; nur den Stein Nr. 1 setzt in das Feld Nr. 10 und das Feld Nr. 1 laßt frei. Ihr sollt den Stein Nr. 1 nur durch Verschieben, ohne die Steine von den Feldern wegzunehmen, in das Feld Nr. 1 bringen. Vorübergehend darf man einen Stein in das Feld A, B oder C bringen. Es ist nicht erlaubt, mit einem Stein einen anderen zu überspringen. Wenn der Stein Nr. 1 auf seinem Platz, dem Feld Nr. 1, anlangt, dann müssen auch alle übrigen Steine auf ihren früheren Plätzen sein, das heißt, es müssen die Nummern der Steine und der Felder übereinstimmen.

48



2. Für die zweite Aufgabe nehmt acht schwarze und acht weiße Steine und stellt sie so auf, wie in Abb. 49 gezeigt wird. Es wird verlangt, in 46 Zügen alle schwarzen Steine auf die Plätze der weißen und alle weißen auf die Plätze der schwarzen zu bringen, ohne Steine von einem Feld wegzunehmen. Die Steine dürfen vorwärts und rückwärts, nach rechts und nach links, aber nicht diagonal verschoben werden. Es ist gestattet, über einen Stein auf ein freies Feld zu springen. Zwei Steine dürfen nicht auf ein Feld gesetzt werden. Es wird nicht verlangt, bei der Verschiebung einen Wechsel zwischen weißen und schwarzen Steinen einzuhalten; wenn es nötig ist, darf man mehrere Male hintereinander Steine einer Farbe bewegen.



49

100. Eine originelle Gruppierung der natürlichen Zahlen von 1 bis 15

Seht, wie schön man alle natürlichen Zahlen von 1 bis 15 in fünf Gruppen zu je drei Zahlen anordnen kann:

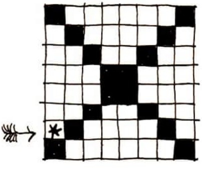
$$\left.\begin{matrix}1\\8\\15\end{matrix}\right\}d = 7;\quad \left.\begin{matrix}4\\9\\14\end{matrix}\right\}d = 5;\quad \left.\begin{matrix}2\\6\\10\end{matrix}\right\}d = 4;\quad \left.\begin{matrix}3\\5\\7\end{matrix}\right\}d = 2;$$

$$\left.\begin{matrix}11\\12\\13\end{matrix}\right\}d = 1.$$

Die Zahlen sind so auf die Gruppen verteilt, daß in jeder Gruppe die Differenz d zwischen der zweiten und der ersten Zahl gleich der zwischen der dritten und der zweiten ist; zum Beispiel: $8 - 1 = 7$ und $15 - 8 = 7$ oder $9 - 4 = 5$ und $14 - 9 = 5$. (Jede Zahlengruppe mit konstanter Differenz zwischen benachbarten Zahlen bildet eine Folge, die man „arithmetische Folge" nennt.) Diese spaßige Aufteilung der ersten 15 natürlichen Zahlen auf fünf Gruppen mit den angegebenen Differenzen ist nicht die einzig mögliche. Wenn man die erste Zahlengruppe (1, 8, 15) unverändert läßt, kann man die übrigen 12 Zahlen (2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13 und 14) in neue Dreiergruppen mit den gegebenen Differenzen $d = 5$, $d = 4$, $d = 2$, $d = 1$ ordnen.
Sucht diese neue Gruppierung der Zahlen! Interessierte können ihr Glück versuchen und die Zahlen von 1 bis 15 in Gruppen arithmetischer Folgen mit anderen Werten für d ordnen.

101. Acht Sternchen

In eins der weißen Felder in Abb. 50 habe ich ein Sternchen gesetzt. Setzt noch sieben weitere Sternchen in die weißen Felder, aber



50

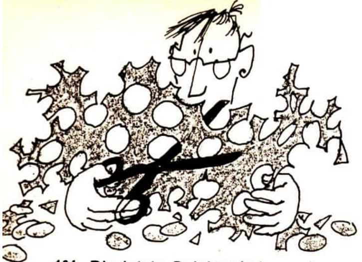
so, daß sich auf keiner Horizontalen, keiner Vertikalen und auf keiner Diagonalen mehr als ein Sternchen befindet. Diese Aufgabe kann man freilich nur durch Probieren lösen; man sollte aber ein gewisses System hineinbringen.

102. Zwei Aufgaben über die Anordnung von Buchstaben

1. Setzt in ein Quadrat, das in 16 gleich große Quadrate unterteilt ist, vier Buchstaben so ein, daß in jeder Zeile und jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen des großen Quadrats nur ein Buchstabe vorkommt. Wie groß ist die Zahl der Lösungen, wenn die einzuordnenden Buchstaben gleich sind, und wie groß, wenn sie verschieden sind?
2. Setzt in ein Quadrat, das in 16 gleich große Quadrate unterteilt ist, jeden der vier Buchstaben a, b, c und d viermal so ein, daß in keiner Zeile, keiner Spalte und in keiner der beiden Diagonalen des großen Quadrats ein Buchstabe mehrmals steht. Wie groß ist die Zahl der Lösungen?

103. Die Anordnung verschiedenfarbiger Quadrate

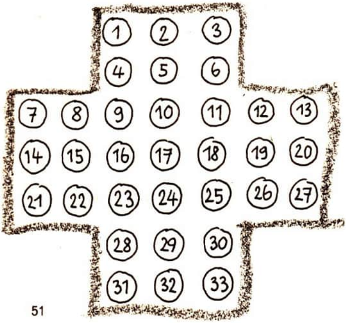
Fertigt euch 16 Quadrate gleicher Größe aus vier verschiedenen Farben an, nehmen wir an, weiße, schwarze, rote und grüne, und zwar von jeder Farbe vier Quadrate. Bildet vier Sätze verschiedenfarbiger Quadrate. Auf jedes Quadrat des ersten Satzes schreibt 1, auf jedes des zweiten 2, auf die Quadrate des dritten Satzes 3 und auf die des vierten 4.
Es wird verlangt, diese 16 verschiedenfarbigen Quadrate wiederum in Gestalt eines Quadrates zusammenzustellen. Dabei sollen in jeder Zeile, jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen in beliebiger Reihenfolge die Zahlen 1, 2, 3 und 4 und außerdem jede der vier Farben vorkommen.
Die Aufgabe läßt sehr viele Lösungen zu. Überlegt ein System, nach dem man die geforderten Aufstellungen erhält!



104. Die letzte Spielmarke[1]

Schneidet 32 gleiche Spielmarken aus und legt eine in jeden Kreis (Abb. 51). Da es 33 Kreise sind, bleibt einer, gleichgültig welcher, frei.

Die Aufgabe besteht darin, alle Spielmarken mit Ausnahme einer zu schlagen. Diese letzte Spielmarke muß in demjenigen Kreis übrig bleiben, der am Anfang frei war. Man schlägt eine Spielmarke, indem man über sie auf einen freien Kreis springt, wobei die Züge vorwärts, rückwärts und nach den Seiten gemacht werden können. Bei jedem Zug muß eine Spielmarke geschlagen werden. Folglich muß man die Aufgabe in 31 Zügen lösen.

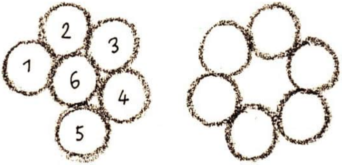


51

[1] Dieses altbekannte Spiel heißt der „Bandwurm" oder der „Einsiedler"; es ist schon seit Anfang des 18. Jahrhunderts bekannt.

105. Ein Ring aus Scheiben

Nehmt sechs gleichgroße Scheiben und legt sie dicht aneinander, wie in Abb. 52a gezeigt wird. Es wird verlangt, sie in vier Zügen als Ring anzuordnen (Abb. 52b). Ein „Zug" besteht in folgender Tätigkeit: Während man fünf beliebige Scheiben fest auf den Tisch drückt, muß man die sechste Scheibe, ohne daß sie die Berührung mit den übrigen Scheiben verliert, in eine neue Lage rollen, wobei sie in der neuen Lage mindestens



52 a b

zwei Scheiben berühren muß. Diese Aufgabe genau in vier Zügen zu lösen, ist nicht so einfach, wie es auf den ersten Blick erscheinen mag.

Als Scheiben nehmt zum Beispiel sechs gleich große Geldstücke, oder schneidet aus Pappe sechs gleich große Kreisscheiben.

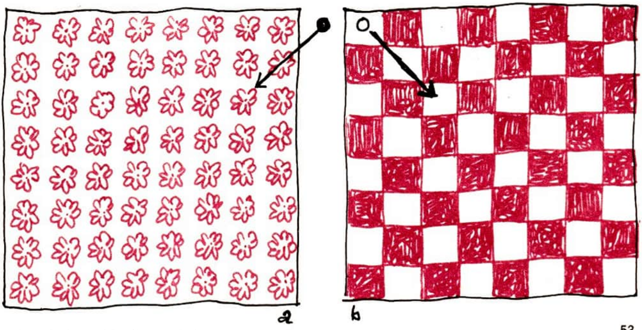
Die Lösung hängt von der Reihenfolge ab, in der man die Scheiben umrollt. Wenn man diese Reihenfolge ändert, kann man verschiedene Lösungen erhalten. Es wird verlangt, alle Lösungsmöglichkeiten zu finden. Um nicht irre zu werden, numeriert die Scheiben und schreibt jeden Zug nach folgendem System auf:

1 → 2, 3 bedeutet, daß die Scheibe Nr. 1 bis zur Berührung mit den Scheiben 2 und 3 gerollt wird;

2 → 6, 5 bedeutet, daß die Scheibe Nr. 2 bis zur Berührung mit den Scheiben 6 und 5 gerollt wird usw.

Hier ist ein Muster für eine Lösung: 1 → 2, 3; 2 → 6, 5; 6 → 1, 3; 1 → 6, 2.

Sucht noch 23 Lösungen!



53

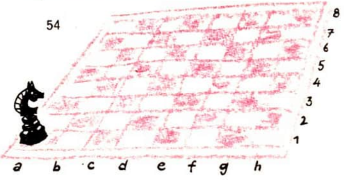
106. Eiskunstläufer auf der Kunsteisbahn

Auf einer Kunsteisbahn proben die Mitglieder eines Eisballetts für eine Aufführung. Ein Künstler, der die Ausstattung der Vorstellung besorgte, zeichnete auf eine Hälfte der Eisbahn in der Art eines gemusterten Teppichs 64 Blumenornamente (Abb. 53a) und auf die andere 64 weiße und schwarze Felder (wie ein Schachbrett, Abb. 53b).
Es war gerade eine Übungspause. Ein Mädchen und ein Junge – zwei unermüdliche Eiskunstläufer – fuhren während der Pause fort, ihre „Kurven" auf der spiegelglatten Eisfläche zu „ziehen".
Das Mädchen interessierten die Blumenornamente des Eisteppichs, und sie bekam Lust, in einem Zug, natürlich mit Wendungen an einigen Punkten, über alle 64 Blumen zu laufen. Sie wollte sich nur in Geraden bewegen, und zwar so, daß die letzte Gerade sie an den Punkt zurückführte, von dem aus sie den Lauf begonnen hatte (er ist in der Abbildung durch einen Punkt vermerkt).
Es gelang ihr, mit nur 14 geradlinigen Abschnitten auszukommen, wobei sie allerdings über einige Blumen mehrmals hinweglief.
Zeichnet die Bahn des Mädchens auf!
Der Junge übte auf dem anderen Teil der Eisbahn. Als er die „geometrischen" Leistungen seiner Freundin im Figurenlaufen bemerkte, wollte er nicht zurückstehen und stellte sich eine noch kompliziertere geometrische Aufgabe: Er wollte nur auf den weißen Feldern des Parketts laufen und die Ecken der Felder nicht mehr als einmal kreuzen, dabei von der linken äußeren Ecke der Eisbahn bis zur diagonal gegenüberliegenden rechten Ecke gelangen und jedes weiße Feld berühren.
Es gelang ihm mit 17 geradlinigen Abschnitten. Zeichnet die Bahn des Eiskunstläufers auf!

107. Scherzaufgabe

Jemand bemühte sich unverdrossen, den Springer auf einem Schachbrett von der linken unteren Ecke (Feld a1) nach der rechten oberen (Feld h8) zu bringen, wobei der Springer jedes Feld einmal berühren sollte. Es gelang ihm aber nicht. Beweist, daß die Aufgabe tatsächlich unlösbar ist!

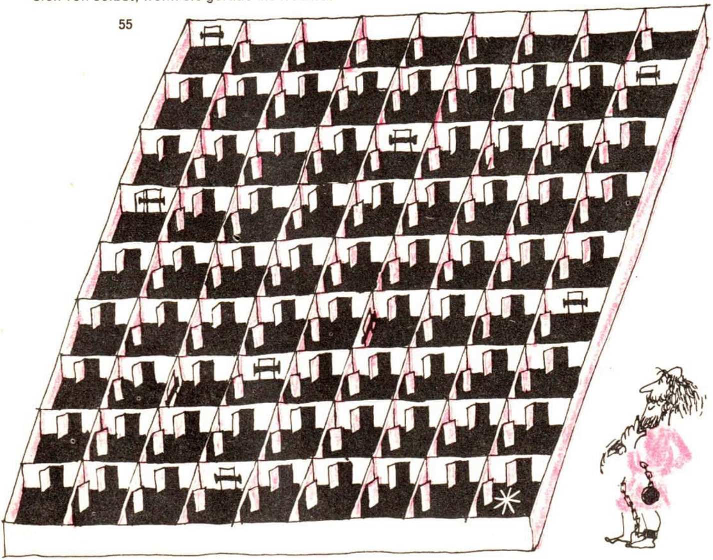
54



108. 145 Türen

Mittelalterliche Feudalherren bauten manchmal die Keller ihrer Schlösser zu Kerkern aus, zu Labyrinthen mit sonderbaren Eigenschaften und Geheimnissen: mit Zellenwänden, die sich auseinanderschoben, geheimen Gängen und mancherlei Fallen.
Wenn man sich so ein altertümliches Schloß ansieht, entsteht unwillkürlich die Lust zum Phantasieren.
Stellen wir uns vor, daß in einen solchen Keller, dessen Plan in Abb. 55 dargestellt ist, einer von den Gegnern des Feudalherren gesperrt wurde. Wir denken uns ein Geheimnis in der Anlage dieses Kellers aus. Von 145 Türen sind nur neun verschlossen (in der Abb. 55 durch starke Striche gekennzeichnet), alle übrigen stehen sperrangelweit offen. Es scheint leicht zu sein, zu der Tür zu gelangen, die nach außen führt, und sein Glück zu versuchen, sie zu öffnen. Da hat man sich aber verrechnet! Es ist auf keinerlei Weise möglich, eine verschlossene Tür zu öffnen. Aber sie öffnet sich von selbst, wenn sie gerade die neunte in der Zählung ist, das heißt, wenn vor ihr acht offene Türen durchschritten wurden. Dabei müssen alle geschlossenen Türen des Kellers geöffnet und durchschritten werden; jede öffnet sich von selbst, wenn vor ihr acht offene Türen durchschritten worden sind. Man kann auch nicht, um einen Fehler zu berichtigen, zwei bis drei Türen in der Nachbarschaft noch einmal durchschreiten, um die Anzahl der benutzten Türen auf acht zu bringen; denn sobald man durch eine Zelle gegangen ist, schließen sich alle vorher offenen Türen und bleiben verschlossen. Ein zweites Mal kann man nicht durch eine Zelle gehen. So hatten es die Feudalherren mit Bedacht eingerichtet. Der Gefangene kannte dieses Geheimnis des Kellers, und er fand den genauen Plan des Kellers mit einem Nagel in die Wand seiner Zelle (auf dem Plan mit einem Sternchen gekennzeichnet) eingeritzt. Lange zerbrach er sich den Kopf, wie er den richtigen Weg einschlägt. Schließlich löste er die Aufgabe und gelangte in die Freiheit.
Welche Lösung fand der Gefangene?

55



109. Wie gelangte der Gefangene hinaus in die Freiheit?

Wer Lust hat, kann über folgende Variante der vorhergehenden Aufgabe nachdenken. Stellt euch vor, daß die Kasematte, in der ein Gefangener schmachtet, aus 49 Zellen besteht.

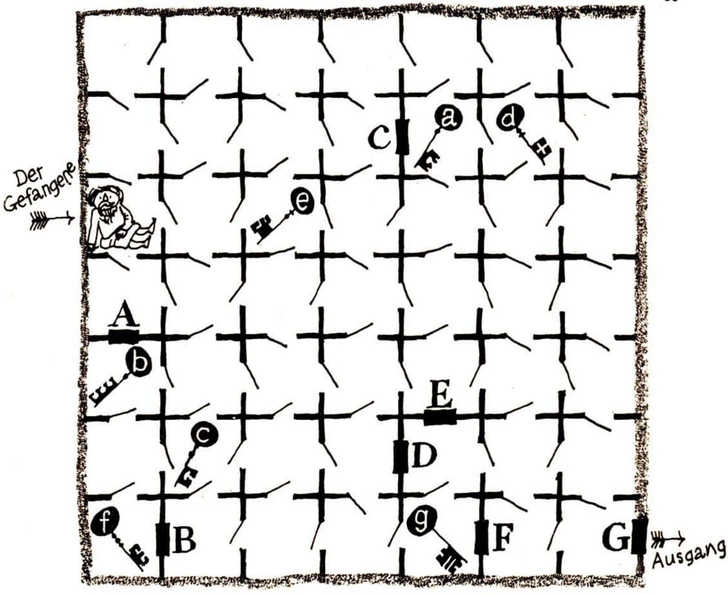
In sieben Zellen, die in dem Grundriß des Kellers (Abb. 56) mit den Buchstaben A, B, C, D, E, F und G bezeichnet sind, befindet sich je eine Tür, die nur mit einem Schlüssel geöffnet werden kann. Der Schlüssel zur Tür der Zelle A befindet sich in der Zelle a, der zur Tür der Zelle B in der Zelle b, die Schlüssel zu den Türen der Zellen C, D, E, F und G befinden sich entsprechend in den Zellen c, d, e, f und g.

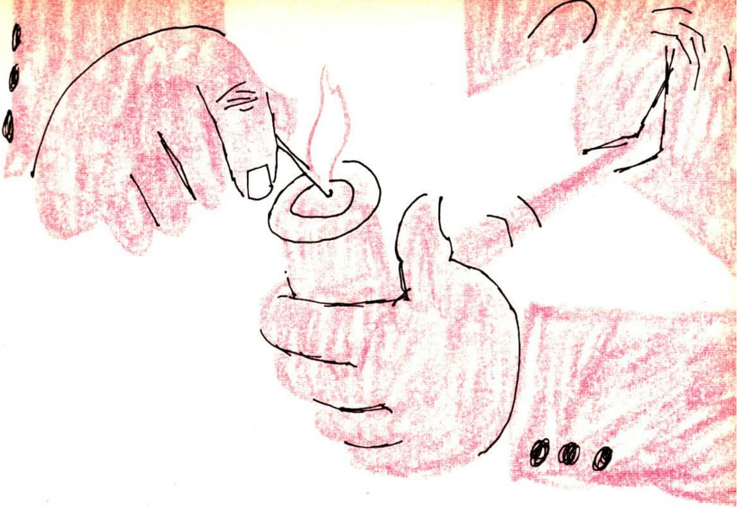
Die übrigen Türen werden durch einfachen Druck auf die Klinke geöffnet, aber die Klinke befindet sich nur auf einer Seite jeder Tür. Wenn man eine Tür durchschritten hat, klappt sie automatisch zu.

Aus dem Grundriß des Kellers ist zu ersehen, nach welcher Seite man durch jede Tür gehen kann, die sich ohne Schlüssel öffnen läßt. Aber in welcher Reihenfolge man die verschlossenen Türen öffnen muß, ist unbekannt. Es ist gestattet, durch eine und dieselbe Tür beliebig oft zu gehen, selbstverständlich unter Beachtung der Bedingung, unter der sie sich öffnen läßt.

Der Gefangene befindet sich in der Zelle, die in der Zeichnung kenntlich gemacht ist. Zeigt ihm den Weg, der zum Ausgang in die Freiheit führt!

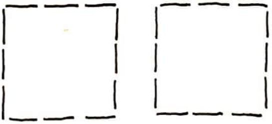
56





Geometrie mit Streichhölzern

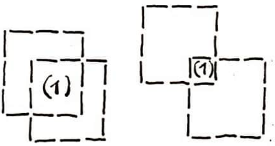
Eine Schachtel Streichhölzer oder ein Bündel Stäbchen von gleicher Länge ist ein ausgezeichnetes Hilfsmittel für geometrische Unterhaltungsspiele, die Findigkeit verlangen und die Auffassungsgabe fördern.
Mit Streichhölzern kann man alle möglichen geradlinigen Figuren bilden; man kann eine Figur durch Umlegen von Streichhölzern in eine andere verwandeln; sogar Lehrsätze kann man mit Streichhölzern beweisen. Betrachten wir als Beispiel folgende *Aufgabe*.
Wieviel gleich große Quadrate kann man aus 24 Streichhölzern bilden, wobei man keins zerbrechen darf, aber auch alle verwenden muß?
Wenn für jede Seite des Quadrats sechs Streichhölzer verwendet werden (es dürfen nicht mehr sein), dann erhält man *ein* Quadrat. Bei fünf oder vier Streichhölzern auf jeder Quadratseite erhält man aus den 24 Streichhölzern keine gleich großen Quadrate. Bei drei Streichhölzern auf jeder Quadratseite kann man *zwei* Quadrate auflegen (Abb. 57).
Bei zwei Streichhölzern auf jeder Quadratseite erhält man *drei* Quadrate (Abb. 58).
Beachtet, daß man aus Quadraten mit drei und zwei Streichhölzern auf jeder Seite noch



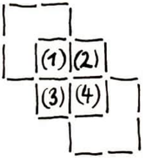
57

58

zusätzlich Quadrate *anderen* Umfangs bilden kann, wie in Abb. 59 und 60 gezeigt wird: ein zusätzliches Quadrat (1) aus Quadraten mit drei Streichhölzern je Seite (Abb. 59), vier zusätzliche Quadrate (1–4) aus Quadraten mit zwei Streichhölzern je Seite (Abb. 60).

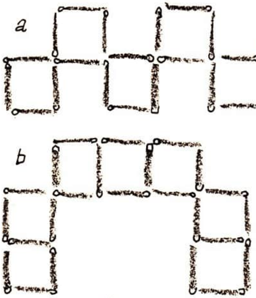


59

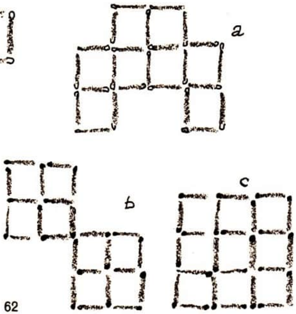


60

Wenn man je vier Streichhölzer für ein Quadrat verwendet, kann man aus 24 Streichhölzern sechs gleich große Quadrate bilden (Abb. 61a).
Wenn man aber einige Streichhölzer als gemeinsame Seite zweier Quadrate benutzt, kann man aus 24 Streichhölzern sieben gleich große Quadrate bilden (Abb. 61 b) oder acht (Abb. 62a und b) oder sogar neun (Abb. 62c).



61

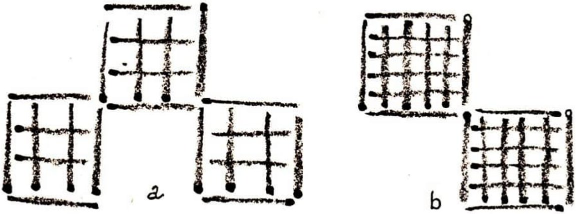


62

Bei der Bildung der letzten drei Figuren sind noch zusätzliche Quadrate anderen Umfanges entstanden: eins in Abb. 62a, zwei in Abb. 62b und fünf in Abb. 62c; sucht sie! Bei einem halben Streichholz auf jeder Quadratseite (wir lassen zu, ein Streichholz quer über ein anderes zu legen) kann man 16 Quadrate gleich großen Umfangs und vier zusätzliche Quadrate bilden, insgesamt 20 Quadrate (Abb. 63).

63

Bei einem drittel Streichholz auf jeder Quadratseite können aus 24 Streichhölzern 27 gleich große Quadrate gebildet werden, und mit den zusätzlichen Quadraten anderen Umfangs sind es 42 (Abb. 64a). Und schließlich sind es bei einem fünftel Streichholz je Quadratseite 50 Quadrate gleichen Umfangs (Abb. 64b). Wenn man noch die zusätzlichen Quadrate (60) hinzurechnet, erhält man insgesamt 110 Quadrate.
Überlegt, wie die folgenden Rätselaufgaben zu lösen sind.[1]



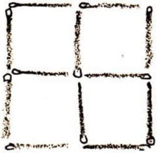
64

[1] Unter einer Nummer sind jeweils solche Aufgaben vereinigt, bei deren Lösung man von ein und derselben Anfangsstellung der Streichhölzer ausgehen muß. Jede Aufgabe ist unabhängig von der vorhergehenden lösbar

110. Fünf Rätselaufgaben

Aus zwölf Streichhölzern sind vier gleich große Quadrate gelegt (Abb. 65); dabei hat sich noch ein zusätzliches (großes) Quadrat gebildet. Man soll:

a) zwei Streichhölzer wegnehmen, ohne die übrigen anzurühren, so daß man zwei ungleich große Quadrate erhält;



65

b) drei Streichhölzer so umlegen, daß sich drei gleich große Quadrate bilden;

c) vier Streichhölzer umlegen, so daß drei gleich große Quadrate entstehen;

d) zwei Streichhölzer umlegen, daß sich sieben Quadrate bilden (bei dieser und der folgenden Aufgabe wird gestattet, Streichhölzer quer übereinander zu legen);

e) vier Streichhölzer umlegen, daß man zehn Quadrate erhält.

111. Weitere acht Rätselaufgaben

Aus 24 Streichhölzern ist die Figur eines Quadrates mit neun quadratischen Zellen gelegt (Abb. 66). Man soll:

a) zwölf Streichhölzer umlegen, daß zwei gleich große Quadrate entstehen;

b) vier Streichhölzer wegnehmen, daß die übrigen ein großes und vier kleine Quadrate bilden;

c) fünf gleich große Quadrate bilden, nachdem man vier oder sechs oder acht Streichhölzer weggenommen hat;

d) acht Streichhölzer so herausnehmen, daß die übrigen vier gleich große Quadrate bilden (zwei Lösungen);

e) sechs Streichhölzer so herausnehmen, daß die übrigen drei Quadrate bilden;

f) acht Streichhölzer so herausnehmen, daß zwei Quadrate übrig bleiben (zwei Lösungen);

66

g) andere acht Streichhölzer so herausnehmen, daß drei Quadrate übrig bleiben;

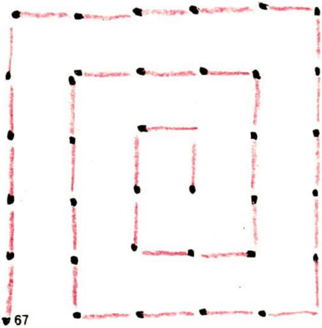
h) sechs Streichhölzer so herausnehmen, daß man zwei Quadrate und zwei gleich große unregelmäßige Sechsecke erhält.

112. Aus neun Streichhölzern

Aus neun Streichhölzern soll man sechs Quadrate bilden; dabei ist gestattet, ein Streichholz quer über ein anderes zu legen.

113. Die Spirale

Aus 35 Streichhölzern ist eine Figur gelegt, die an eine Spirale erinnert (Abb. 67). Legt vier Streichhölzer so um, daß drei Quadrate entstehen.



67

114. Scherz

Legt sechs Streichhölzer so hin, daß ein Quadrat entsteht!

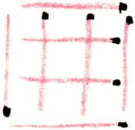
115. Wie kommt man über den Graben?

Aus 16 Streichhölzern ist der „Grundriß" einer Burg gelegt, die von einem tiefen Graben umgeben ist (Abb. 68). Wie kann man mit Hilfe von zwei Balken (Streichhölzern), deren Länge gerade gleich der Breite des Grabens ist, in die Burg gelangen?

68

116. Zwei Streichhölzer sollen weggenommen werden

Die Figur, die in Abb. 69 dargestellt ist, besteht aus acht Streichhölzern, die teilweise übereinandergelegt sind. Man soll zwei Streichhölzer so wegnehmen, daß drei Quadrate übrig bleiben.



69

117. Die „Hausfassade"

Die „Hausfassade" (Abb. 70) besteht aus elf Streichhölzern. Wenn man zwei Streichhölzer umlegt, kann man elf Quadrate erhalten, und wenn man vier Streichhölzer umlegt, kann man das „Haus" in eine Figur verwandeln, die 15 Quadrate enthält. Versucht das!

70

118. Dreiecke

Zur Bildung eines gleichseitigen Dreiecks braucht man drei Streichhölzer (wenn man sie nicht zerbricht); zur Bildung von sechs gleichseitigen Dreiecken, die einander gleich (deckungsgleich, kongruent) sind, genügen aber zwölf Streichhölzer. (Figuren werden deckungsgleich oder kongruent genannt, wenn sie beim Übereinanderlegen in allen ihren Teilen übereinstimmen.)
Führt das durch!
Danach legt vier Streichhölzer so um, daß drei gleichseitige Dreiecke gebildet werden, von denen zwei kongruent sind.

119. Wieviel Streichhölzer muß man wegnehmen?

71

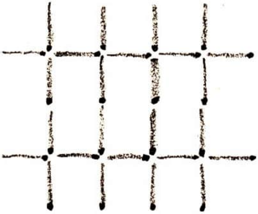
Es sind 16 kongruente Quadrate aufgelegt (Abb. 71). Wenn man alle Quadrate zusammenzählt, die in dieser Figur enthalten sind, dann ergeben sich insgesamt ... zählt sie selbst! Wieviel Streichhölzer muß man (mindestens) wegnehmen, damit die übrigbleibende Figur weder ein großes noch ein kleines Quadrat enthält?

120. Schwierig!

Unsere Streichhölzer haben eine Durchschnittslänge von 4,6 cm.
Wie kann man aus 18 oder sogar aus 5 Streichhölzern, ohne sie zu zerbrechen, einen Meter legen?

121. Der „Zaun"

Bei einem „Zaun", dargestellt in Abb. 72, soll man 14 Streichhölzer so umlegen, daß sich drei Quadrate ergeben.



72

122. Der „Pfeil"

In Abb. 73 ist aus 16 Streichhölzern ein Pfeil gelegt.
a) Legt acht Streichhölzer so um, daß man acht kongruente Dreiecke erhält.
b) Legt sieben Streichhölzer so um, daß man fünf kongruente Vierecke erhält.

73

123. Quadrate und Rhomben

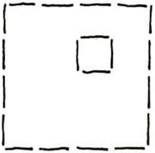
Aus zehn Streichhölzern soll man drei Quadrate legen, dann ein Streichholz wegnehmen und aus den übrigen ein Quadrat und zwei Rhomben bilden.

124. In einer Figur verschiedene Vielecke

Legt acht Streichhölzer so hin, daß ein Achteck, zwei Quadrate und acht Dreiecke, alles in einer Figur, entstehen.

125. Der Plan für den Garten

16 Streichhölzer, die in Gestalt eines Quadrats aufgelegt sind, stellen den Zaun eines Gartens dar (Abb. 74). Ein Teil der Gartenfläche wird von einem Haus eingenommen, das aus vier Streichhölzern als Quadrat dargestellt ist. Der übrige Teil des Gartens soll mit Hilfe von 10 Streichhölzern in fünf kongruente Parzellen geteilt werden.



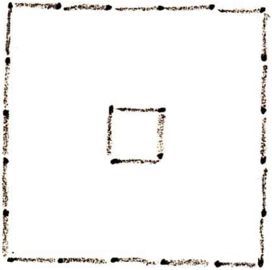
74

126. In flächengleiche Teile zerlegen

1. Zerlegt mit elf Streichhölzern ein Quadrat, das aus 16 Streichhölzern gebildet ist (Abb. 75), in vier flächengleiche Teile, und zwar so, daß jedes Teil die drei anderen, mit seinen Seiten oder Teilen seiner Seiten, berührt.

75

2. Ein Garten, dessen Umrisse mit 20 Streichhölzern dargestellt sind und in dessen Mitte sich ein Brunnen von quadratischer Gestalt befindet (Abb. 76), soll
a) mit 18 Streichhölzern in sechs kongruente,
b) mit 20 Streichhölzern in acht kongruente Teile zerlegt werden.



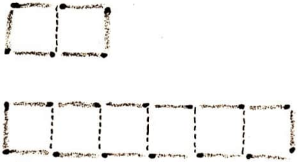
76

127. Das Parkett

Wieviel Streichhölzer werden gebraucht, um einen Quadratmeter mit gleich großen Quadraten auszulegen, deren Seitenlänge die Länge eines Streichholzes beträgt? Die Länge eines Streichholzes soll 5 cm betragen.

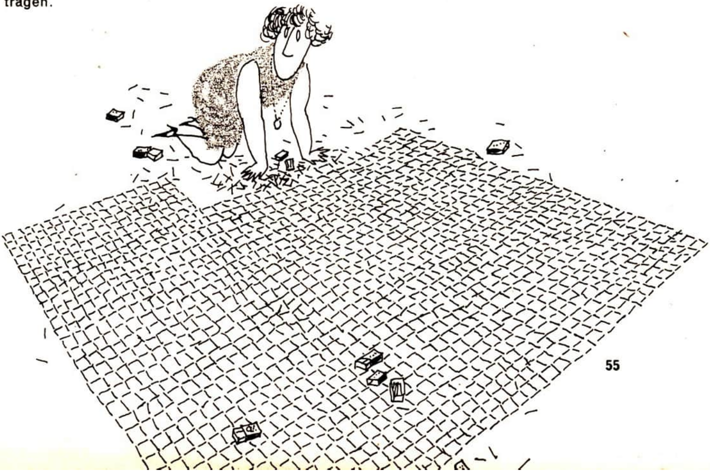
128. Das Verhältnis der Flächen wird gewahrt

Aus 20 Streichhölzern sind zwei Rechtecke gebildet worden: das eine aus sechs und das andere aus 14 Streichhölzern (Abb. 77). Durch punktierte Linien ist das erste Rechteck in zwei und das zweite in sechs gleich große Quadrate geteilt. Daraus folgt, daß die Fläche des zweiten Rechtecks dreimal so groß ist wie die des ersten.



77

Teilt jetzt diese 20 Streichhölzer in zwei andere Gruppen auf: in sieben und 13 Streichhölzer. Setzt aus jeder Gruppe eine Figur so zusammen, daß die Fläche der zweiten Figur dreimal so groß ist wie die der ersten (die Figuren brauchen nicht von gleicher Gestalt zu sein).



129. Es sollen die Umrisse einer Figur gesucht werden

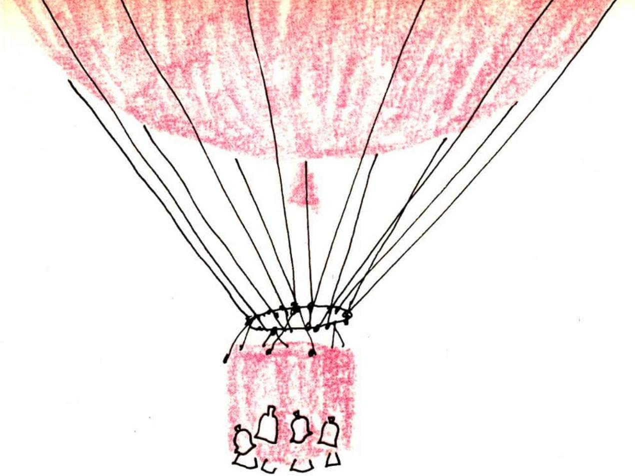
Gegeben sind zwölf Streichhölzer. Wir setzen jedes für eine Längeneinheit. Es wird verlangt, aus den zwölf Streichhölzern eine Figur zusammenzusetzen, deren Flächeninhalt gleich drei Quadraten mit Seiten von je einer Längeneinheit ist.
Das ist eine schwierige Aufgabe, wenn man den einfachsten Fall, daß die Figur aus drei Quadraten besteht, die mit je einer Ecke zusammenstoßen, ausschließt.

130. Ihr sollt den Beweis finden

Legt zwei Streichhölzer so genau nebeneinander, daß sie eine Gerade bilden, und beweist durch Überlegungen die Richtigkeit eurer Konstruktion.
Zur Beweisführung macht sich eine zusätzliche Konstruktion aus Streichhölzern erforderlich, wozu eine beliebige Menge von Streichhölzern benutzt werden darf.

131. Konstruieren und beweisen

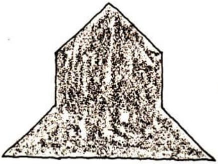
Konstruiert aus Streichhölzern ein regelmäßiges Sechseck und beweist die Richtigkeit der Konstruktion!



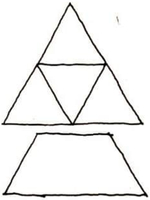
Erst wäg's, dann wag's!

132. In gleiche Teile schneiden

Aufgabe 1. Schneidet die Figur, die in Abb. 78 dargestellt ist, in vier kongruente Vierecke.



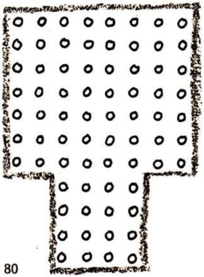
78



79

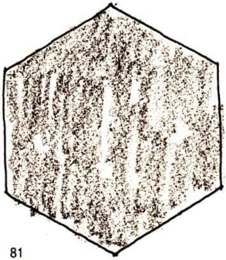
Aufgabe 2. Wie man ein gleichseitiges Dreieck in vier kongruente Teile schneidet, ist aus Abb. 79 ersichtlich. Nehmt das obere Dreieck weg; die übrigen drei Dreiecke bilden eine Figur, die man in der Geometrie ein Trapez nennt. Versucht, es ebenfalls in vier kongruente Teile zu zerschneiden.

Aufgabe 3. Die Platte, die in Abb. 80 dargestellt ist, sollt ihr in sechs kongruente Platten zerschneiden.



80

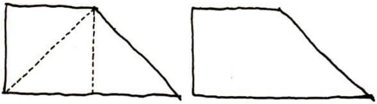
Aufgabe 4. Wenn ein Vieleck gleiche innere Winkel und gleiche Seiten hat, dann nennt man es ein **regelmäßiges Vieleck**.



81

Zerschneidet das in Abb. 81 dargestellte regelmäßige Sechseck in zwölf kongruente Vierecke! Werden diese Vierecke regelmäßige sein?

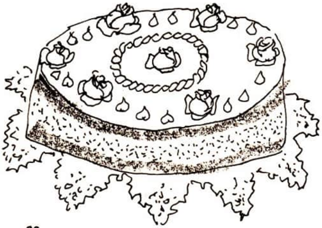
Aufgabe 5. Nicht jedes Trapez kann man in drei oder vier kongruente kleinere Trapeze zerschneiden. Aber ein Trapez, das aus drei kongruenten gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecken gebildet ist (Abb. 82), ähnlich einem Hammer ohne Stiel im Längsschnitt, zerschneidet ihr leicht in vier vollkommen gleiche rechtwinklige Trapeze.



82

133. Sieben Marzipanrosen auf der Torte

Zum Nachmittagskaffee gab es eine Torte. Mit drei geraden Schnitten wurde sie in sieben Stücke aufgeteilt. Dabei ergab sich auf jedem Stück eine Marzipanrose.
Wie wurde die Torte geschnitten?



83

134. Figuren, die ihren Umriß verloren haben

Ein Quadrat, in dessen Feldern ihr einige Ziffern seht (Abb. 84), sollte in vier kongruente Figuren geteilt werden. Diese Figuren waren symmetrisch zur Mitte des Quadrats angeordnet. Mehr noch, um eine der kongruenten Figuren mit einer anderen zur Deckung zu bringen, genügte es, eine beliebige Figur um 90° um die Mitte des Quadrats zu drehen. Das schlimme ist aber, daß jemand die Schnittlinien wegradiert hat.

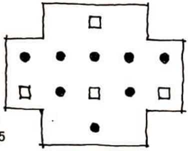
84

			3		1	1	
			3	4			
				2			
	1		4	2			
	1						
		3	3				
					4	2	2
					4		

Nur die Ziffern blieben erhalten, und ich entsinne mich, daß sie so angebracht waren, daß jede Ziffer einmal in jeder Figur vorkam. Ich denke, das genügt euch, um den Figuren ihre verlorenen Umrisse zurückzugeben, wenn dazu noch bekannt ist, daß die Schnitte nur an den Seiten der Felder des Quadrats entlangliefen.

135. Gebt einen Rat!

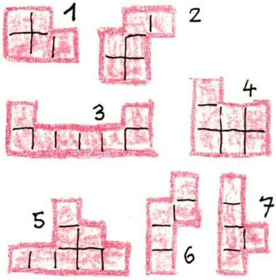
In Abb. 85 ist der Grundriß des unteren Teils einer Vorrichtung dargestellt. Gebt einen Rat, wie man die Vorrichtung in vier kongruente Teile zerlegen kann, wobei auf jedes Teil zwei Stifte (dargestellt durch Punkte) und eine Öffnung (dargestellt durch kleine Quadrate) kommen sollen.



85

136. Ohne Verluste!

Ihr wißt schon, daß in den Betrieben gewisse Werkstücke nicht sofort auf die Bearbeitungsmaschinen, sagen wir, die Hobel- oder Bohrmaschinen gegeben werden, sondern zuerst dem Anreißer vorgelegt werden, der auf ihnen die nötigen Linien und Punkte anbringt. Findigkeit und Fertigkeit des Anreißers können viel zur Materialeinsparung beitragen.



86

Eines Tages wurde in einem Betrieb eine große Menge vieleckiger Messingplatten von sieben verschiedenen Formen gebraucht, wie sie in Abb. 86 dargestellt sind. Der Anreißer überlegte, daß eine der sieben Platten (stellt fest, welche!) genau sechsmal in ein kleines rechteckiges Messingblech hineinpaßt. Für die Anfertigung der übrigen Platten suchte der Anreißer in den Abfällen so geschickt Reste von Messingblechen aus (Abb. 87), daß sich jedes Stück zu kongruenten Platten zerschneiden ließ, ohne daß ein Quadratzentimeter Messing verlorenging.

So erhält man zum Beispiel aus dem Abfallblech I (Abb. 87) drei Platten Nr. 4 (Abb. 86), aus dem Abfallstück II fünf Platten Nr. 7 usw. Welche Platten der in Abb. 86 dargestellten sich aus den übrigen Abfallblechen, die in Abb. 87 dargestellt sind, schneiden lassen, stellt selbst fest!

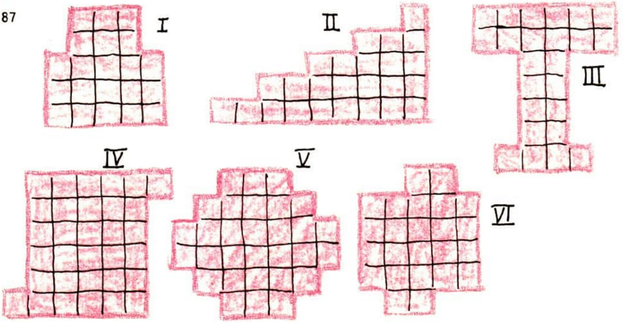
Ich will noch verraten, daß sich das Abfallblech III in drei kongruente Platten, das Blech IV in vier, das Blech V in sechs und das Blech VI in vier kongruente Platten zerschneiden läßt. Vergeßt nicht, daß sich eine Platte der sieben angegebenen Formen aus einem rechteckigen Messingblech sechsmal ausschneiden läßt.

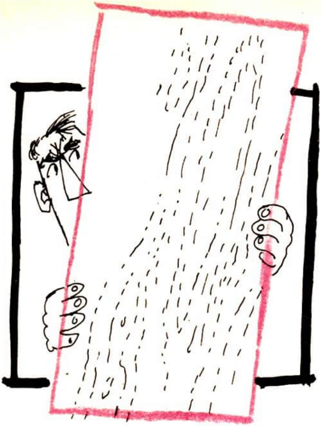
Zur Erleichterung für die Lösung sind die Figuren in Abb. 86 und Abb. 87 in Felder eingeteilt.

137. Die Fensterblende

A entwickelte und kopierte seine Fotoaufnahmen selbst. Dazu mußte er in einem kleinen Raum seiner Wohnung das Fenster verdunkeln. Dieses hatte das Format 120 cm mal 120 cm. Es war ihm nichts anderes zur Hand als eine rechteckige Sperrholzplatte, deren Flächeninhalt zwar dem des Fensters gleich war, die aber nicht dessen Maße hatte, sie war 90 cm mal 160 cm groß.

87



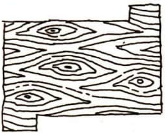


Zuerst wußte sich A keinen Rat. Dann aber begann er, mit einem Lineal die Sperrholzplatte auszumessen.
Er zog Linien und zerschnitt die Platte lediglich in zwei Teile, aus denen er ein quadratisches Brett in der benötigten Größe für die Verdunklung des Fensters zusammensetzte.
Sucht die Lösung!

138. Alles geht zu machen!

„Kann man aus diesem Abfallbrett ein Schachbrett mit 64 Feldern machen?" überlegte ich mir, als ich ein rechteckiges Brett aus Nußbaumholz mit zwei rechteckigen Vorsprüngen (Abb. 88) genau betrachtete. Als ich das Brett ausmaß, errechnete ich, daß ich es ohne jeden Abfall ganz ausnutzen könnte.

88



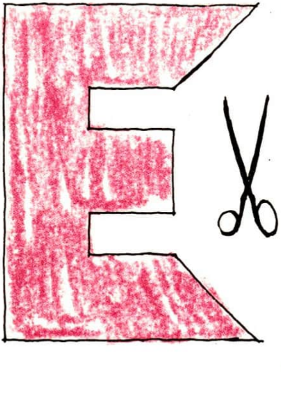
Dann zog ich Linien für 64 gleich große Felder, wobei auf jeden Vorsprung zwei Felder entfielen, und zersägte das Brett in nur zwei Teile, die in Form wie Größe gleich waren. Daraus leimte ich das Schachbrett zusammen.
Sucht die Schnittlinie!

139. Ein Hufeisen in Stücke schlagen

Wie muß man zwei Gerade legen, daß ein Hufeisen durch sie in sechs Teile zerschnitten werden kann, ohne beim Schneiden den Platz der Teile zu verändern?

140. Ein Quadrat aus dem Buchstaben „E" bilden

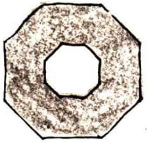
Die Figur in Abb. 89 hat die Umrisse des Buchstabens „E". Es wird verlangt, die Figur mit nur vier geradlinigen Schnitten in sieben Teile zu zerlegen und aus den gewonnenen Teilen ein Quadrat zusammenzusetzen.
Anmerkung. Jeder spitze Winkel in dieser Figur ist die Hälfte eines rechten Winkels, und jeder stumpfe Winkel ist dreimal so groß wie ein spitzer. Das Verhältnis der Längen der Seiten läßt sich nach der Abbildung leicht feststellen.



89

141. Eine schöne Verwandlung

In Abb. 90 ist ein regelmäßiges Achteck dargestellt. Die innere Öffnung ist ebenfalls ein regelmäßiges Achteck. Es wird verlangt, die Figur in acht kongruente Teile zu zerschneiden und sie zu einem achtzackigen Stern zusammenzulegen, der eine achteckige Öffnung hat.

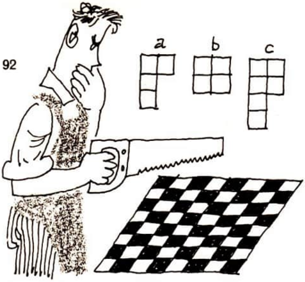


90

142. Die Reparatur des Teppichs

An einem alten, aber wertvollen Teppich mußte man zwei kleine verdorbene dreieckige Stücke (in Abb. 91 sind es die schraffierten Dreiecke) entfernen.
Eine Kunststopferei sollte die rechteckige Gestalt des Teppichs wieder herstellen, dabei sollte das Muster erhalten bleiben und kein Stückchen verlorengehen. Man schnitt den Teppich in nur zwei Teile und setzte sie zu einem neuen Rechteck (das ein Quadrat ergab) zusammen. Dabei brauchte man am Teppich nichts umzuarbeiten.
Wie war das möglich?

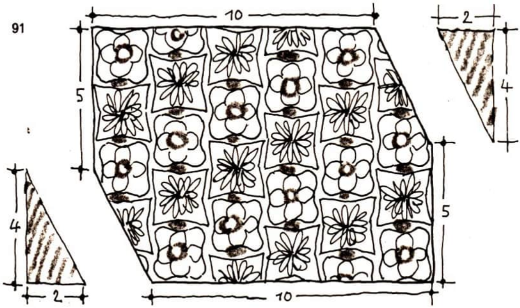
92



143. Helft dem armen Kerl!

Erinnert ihr euch der Rätselaufgabe Nr. 48 mit dem zerlegten Schachbrett? Die Kameraden des Erfinders der Aufgabe lernten schließlich bald, das Schachbrett aus den 14 Teilen zusammenzusetzen. Darum beschloß der witzige Schachspieler, Zahl und Gestalt der Teile zu ändern. Zu seinem Unglück kam ihm der Gedanke, es zu versuchen, das Schachbrett in 15 kongruente Figuren, ähnlich dem kopfstehenden Buchstaben L (Γ) (Abb. 92a), und ein Quadrat (Abb. 92b) zu zerschneiden. Seitdem hat unser junger Konstrukteur die Ruhe verloren. Es gelingt ihm nicht, das Schachbrett auf diese Weise zu zerschneiden. Er neigt nun zu der Auffassung, daß es unmöglich ist, das Brett so zu zerlegen, und versucht, dies zu beweisen. Aber auch das ist vor der Hand erfolglos. Man muß dem armen Teufel helfen.

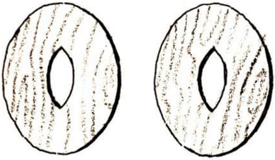
91



Wir wollen ihm beweisen helfen, daß die Lösung unmöglich ist, und ihm zum Ersatz vorschlagen, das Schachbrett in zehn kongruente Figuren, ähnlich dem Buchstaben P (Abb. 92c), und eine Figur, ähnlich dem kopfstehenden Buchstaben L (Γ) (Abb. 92a) zu zerschneiden. Unsere Aufgabe ist auch nicht gerade leicht, aber sie ist lösbar.

144. Eine Aufgabe für einen Tischler

Zu einem Tischler brachte man zwei kongruente ovale Platten mit einer länglichen Öffnung in der Mitte (Abb. 93) und trug ihm auf, daraus eine kreisrunde geschlossene Tischplatte anzufertigen.



93

Die Platten waren aus einem kostbaren Holz, und der Meister wollte sie vollständig, ohne irgendwelchen Abfall, für die Arbeit verwenden.
Um keine unnützen und unüberlegten Schnitte zu machen, fertigte sich der Tischler aus festem Papier ein Schnittmuster einer Tafel an. Er betrachtete sich genau die Form und maß mit dem Zirkel nach. Da zeigte sich, daß sich die Absicht des Meisters vollständig durchführen ließ und er dabei mit einer geringen Anzahl von Schnitten bei jeder Tafel auskam.
Wie zersägte der Tischler die Tafeln?

145. Geometrie auch beim Kürschner

Ein Kürschner mußte auf einen Pelz einen Flicken von der Gestalt eines ungleichseitigen Dreiecks aufnähen. Er schnitt den Flicken aus gleichem Pelzwerk zu, versah sich aber dabei. Der Flicken paßte auf das Loch im Pelz nur von der linken Seite. Das war sehr ärgerlich. Man konnte doch nicht das zugeschnittene Stück des wertvollen Pelzes wegwerfen. Aber wie soll man es auf die rechte Seite wenden und dabei die nötige Dreiecksform einhalten? Lange überlegte der Kürschner, und endlich kam ihm ein Gedanke. Er kam dahinter, daß das Stück irgendwie so in Teile geschnitten werden mußte, daß jedes beim Wenden an seinen alten Platz gelegt werden konnte.
Wie mußte er schneiden?

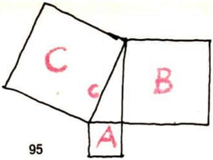
146. Noch mehr!

Versucht, einen Kreis durch sechs Gerade in die größtmögliche Anzahl von Teilen zu zerlegen.
In Abb. 94 ist der Kreis zum Beispiel in 16 Teile zerlegt. Aber das ist noch nicht die größte Anzahl von Teilen; man kann beweisen, daß sie sich nach der Formel $\frac{n^2+n+2}{2}$ berechnen läßt, wobei n die Anzahl der schneidenden Geraden ist.
Bemüht euch, bei der Lösung eine symmetrische Anordnung der Geraden zu erreichen!

94

147. Verwandlung eines Vielecks in ein Quadrat

Könnt ihr zwei beliebige Quadrate so in Teile zerlegen, daß man daraus ein einziges Quadrat zusammensetzen könnte?
Die erste grundlegende Lösung dieser Aufgabe wird dem altgriechischen Gelehrten Pythagoras (6. Jahrhundert v. u. Z.) zugeschrieben; aber mit Aufgaben der Verwandlung einer Figur in eine andere beschäftigten sich die indischen Mathematiker (im Zusammenhang mit der Entwicklung der Baukunst im alten Indien) schon ein- oder anderthalbtausend Jahre vor Pythagoras.

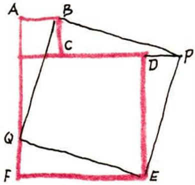


95

Ordnet die gegebenen beiden Quadrate A und B so an, daß die Seiten des einen als Verlängerung der Seiten des anderen dienen (Abb. 95) und verbindet mit einer Geraden c zwei Ecken, wie in Abb. 95 angegeben ist. Es entsteht ein rechtwinkliges Dreieck. Wenn man jetzt noch ein Quadrat C über der Seite c (der Hypotenuse) des gebildeten rechtwinkligen Dreiecks konstruiert, dann ist es dasjenige Quadrat, das man aus den Teilen der beiden ersten Quadrate zusammensetzen kann.

Wie kann man aber die gegebenen Quadrate zerlegen? In den zwei- bis anderthalbtausend Jahren, die uns von Pythagoras trennen, sind sehr viele praktische Verfahren zur Lösung dieser Aufgabe ersonnen worden. Hier ist eine davon, sie ist sparsam und schön.

Wir ordnen die gegebenen Quadrate in Gestalt der Figur ABCDEF (Abb. 96) an. Auf der Seite AF tragen wir den Abschnitt FQ = AB ab und zerschneiden die Figur durch die Geraden EQ und BQ. Wir übertragen das Dreieck BAQ in die Lage BCP und das Dreieck EFQ in die Lage EDP. Es entsteht das Quadrat EQBP, das alle Teile der beiden gegebenen Quadrate enthält. Seine Seiten



96

97

sind gleich der Hypotenuse EQ des rechtwinkligen Dreiecks EFQ und die Seiten der beiden gegebenen Quadrate sind gleich den Katheten EF und FQ.

(Der Leser, der in Geometrie Bescheid weiß, beweist leicht die Kongruenz der Dreiecke BAQ, BCP, EFQ und EDP und ferner, daß EQBP ein Quadrat ist. Das ist ein anderer Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes als der in der Schule gelehrte.)

Und jetzt zerschneidet die in Abb. 97 gezeigte Figur aus einem Quadrat und einem rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieck in nur drei Teile und bildet daraus ein Quadrat!

148. Verwandlung eines regelmäßigen Sechsecks in ein gleichseitiges Dreieck

Geometrische Aufgaben über die Bildung einer Figur aus Teilen einer anderen begeistern die Mathematiker, die Architekten wie überhaupt Mathematikinteressenten schon einige tausend Jahre.

Die gewöhnlichen Verfahren für die Verwandlung einer Figur in eine andere sind so, daß man die Figur zerschneidet und die Teile neu zusammensetzt, aber ihre praktische Verwendung ist meist sehr umständlich.

Interessant ist bei solchen Aufgaben, das Verfahren zu finden, nach dem man eine gegebene Figur nur in eine möglichst kleine Anzahl von Teilen zu zerschneiden braucht. Das ist nicht leicht und erfordert viel Geduld und Findigkeit.

Wie zerschneidet man zum Beispiel am besten ein regelmäßiges Sechseck (Abb. 98), um daraus ein regelmäßiges Dreieck zu bilden?

Es gibt einige Lösungen, bei denen das Sechseck nur in sechs Teile zerlegt zu werden braucht.

Versucht, eine solche Lösung zu finden!

Überdies hat bisher noch keiner gefunden, wie man ein solches Sechseck in fünf Teile zerlegen muß, um daraus ein regelmäßiges Dreieck zu bilden. Aber es hat auch noch keiner bewiesen, daß eine solche Teilung unmöglich wäre.

98

Können ist immer von Nutzen

149. Wo befindet sich das Ziel?

In Abb. 99 sind in den Kreisen die Bildschirme von Radarstationen dargestellt. Auf den Bildschirmen zeichnet sich eine Zickzacklinie ab. Darunter befindet sich ein Entfernungsmesser.
Von der Station werden Radarwellen ausgesendet. Auf dem Schirm entspricht dieser Augenblick dem Nullpunkt der Skala. Binnen einer gewissen Zeit gelangen die Radarwellen, reflektiert von einem Ziel (zum Beispiel einem Schiff auf See), zur Station zurück. In diesem Augenblick erscheint auf dem Schirm ein Ausschlag nach oben. In der Zwischenzeit durchmaß die Radarwelle die doppelte Entfernung zwischen Station und Ziel, aber der Entfernungsmesser ist so eingerichtet, daß die Zahl, die unter dem Ausschlag steht, nur die Entfernung von der Station zum Ziel anzeigt. Der linke Schirm zeigt die Angaben der Küstenradarstation A, der rechte die der Station B.

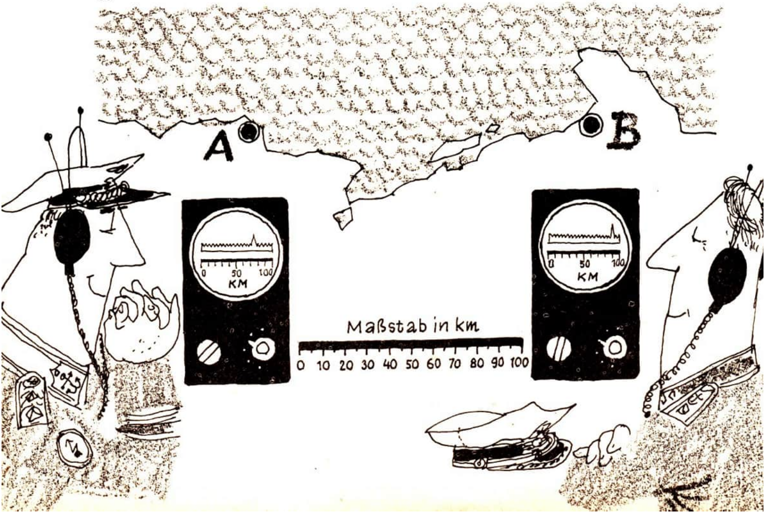
Wir nehmen an, daß die Angaben der beiden Küstenstationen gleichzeitig auf beiden Schirmen erschienen, nachdem sie das Ziel auf See entdeckt hatten.
Erklärt die Angaben der Anzeiger auf den Schirmen (Abb. 99) und bestimmt danach, in welchem Punkte sich das Ziel befindet.

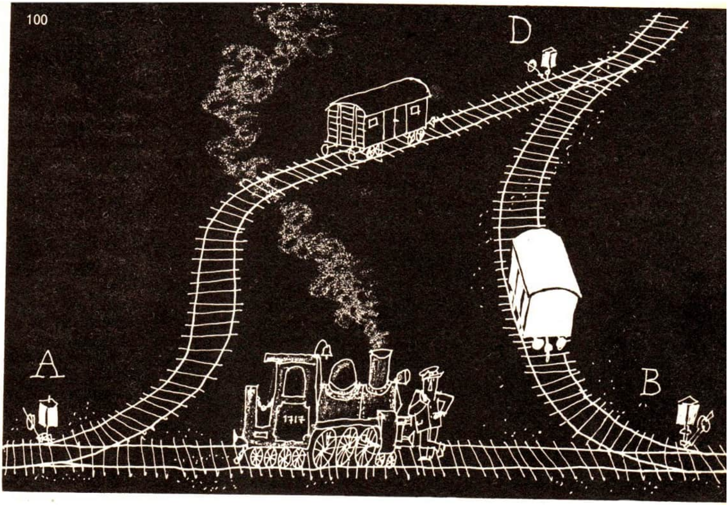
150. Fünf Minuten zur Überlegung

Stellt euch einen hölzernen Würfel mit 30 cm Kantenlänge vor, dessen gesamte Oberfläche mit schwarzer Farbe angestrichen ist.

1. Wieviel Schnitte sind nötig, um den Würfel in Würfel mit 10 cm Kantenlänge zu zerlegen?
2. Wieviel solcher Würfel erhält man?
3. Wieviel Würfel haben 4 schwarze Flächen?
4. Wieviel Würfel haben 3 schwarze Flächen?
5. Wieviel Würfel haben 2 schwarze Flächen?
6. Wieviel Würfel haben 1 schwarze Fläche?
7. Wieviel Würfel haben keinen Anstrich?

99



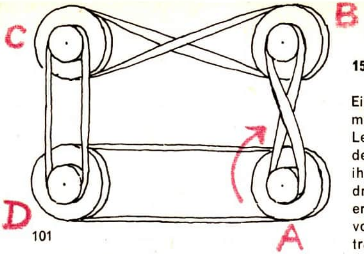


151. Das Gleisdreieck

Ein Hauptgleis AB (Abb. 100) und zwei kleine Abzweiggleise AD und BD bilden ein Gleisdreieck. Wenn eine Lokomotive, die auf dem Hauptgleis AB mit dem Schornstein nach rechts steht, das Gleisdreieck abfährt, gelangt sie auf den alten Platz mit dem Schornstein nach links.
Wenn man die Abb. 100 betrachtet, kann man sich leicht vorstellen, wie die Lok fahren muß, damit sie sich mit dem Schornstein nach der anderen Seite ,,dreht'' (nehmt dazu an, daß keine Waggons auf den Abzweigungen stehen). Jetzt aber steht vor dem Lokführer eine andere Aufgabe. Er soll die Waggons umrangieren, die auf den Abzweigungen AD und BD stehen: den weißen Waggon von der Abzweigung BD nach der Abzweigung AD und den roten von AD nach BD. Er selbst soll mit der Lok auf den alten Platz zurückkehren. An dem Ende D der Abzweigungen haben hinter der Weiche nur ein Waggon oder die Lok Platz. Wie löste der Lokführer diese Aufgabe?
Wenn ihr jedes Ankuppeln und jedes Abkuppeln als einen einzelnen ,,Zug'' rechnet, dann kann ich euch sagen, daß der Lokführer die Aufgabe in zehn Zügen löste; ihr könntet sie aber sogar in sechs Zügen lösen. Das ,,Stoßen'' eines Waggons zählt als zwei Züge, weil es gleichbedeutend mit einem An- und Abkuppeln ist.

152. Eine Aufgabe zum Auswiegen

In einem Paket befinden sich 9 kp Graupen. Versucht, mit Hilfe einer Waage mit Waagschalen und zweier Gewichte zu 50 p und 200 p die Graupen auf zwei Pakete zu verteilen, das eine zu 2 kp und das andere zu 7 kp. Dabei dürfen nur drei Wiegevorgänge ausgeführt werden.



101

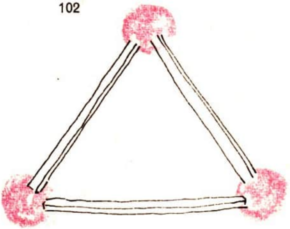
153. Die Transmission

Die Riemenscheiben A, B, C und D sind durch Treibriemen verbunden, wie in Abb. 101 gezeigt wird. Ist bei dieser Anordnung eine Drehung aller vier Scheiben möglich? In welcher Richtung dreht sich dann jede Scheibe, wenn sich die Scheibe A im Uhrzeigersinn dreht? Ist eine Drehung der Scheiben möglich, wenn alle vier Treibriemen so gekreuzt sind wie zum Beispiel bei den Scheiben A und B, und ist sie möglich, wenn nur ein oder drei Riemen gekreuzt sind?

154. Sieben Dreiecke

Wenn man die Enden von drei Streichhölzern durch Kügelchen aus Plastilina miteinander verbindet, läßt sich leicht ein gleichseitiges Dreieck bilden (Abb. 102).

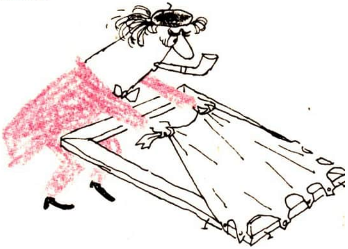
102



Nehmt jetzt neun Streichhölzer und bildet, indem ihr ihre Enden in gleicher Weise verbindet, sieben gleichseitige Dreiecke!

155. Die Leinwand des Malers

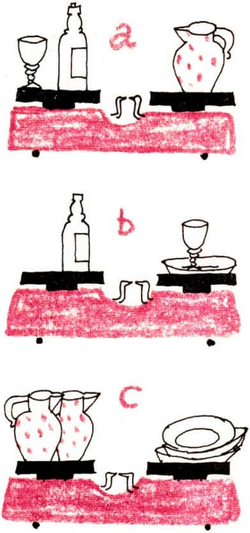
Ein Kunstschüler bildete sich ein, die zweckmäßigsten Ausmaße einer rechteckigen Leinwand für seine Werke seien die, bei denen sich die Fläche der Leinwand und ihr Umfang durch ein und dieselbe Zahl ausdrücken ließen. Wir werden nicht die Frage erörtern, ob solche Maße für die Leinwand von Gemälden zur besseren Wirkung beitragen; wir werden vielmehr festzustellen versuchen, welche Maße (wir nehmen an, nur in ganzen Zahlen ausgedrückt) ein Rechteck haben muß, damit sein Umfang, ausgedrückt durch eine gewisse Maßeinheit, dieselbe Zahl beträgt wie seine Fläche. Das ist keine leichte Aufgabe, und dennoch hat man eine elegante Lösung ersonnen. Dabei wurde sogar bewiesen, daß überhaupt nur zwei Rechtecke möglich sind, die die Bedingung der Aufgabe erfüllen. Nun mal los! Wer von euch „entdeckt" die Lösung oder ersinnt eine nicht weniger geistreiche?



156. Wieviel wiegt die Flasche?

Auf der linken Waagschale einer Waage (Abb. 103a) stehen eine Flasche und ein Glas, auf der rechten ein Krug; die Waage ist im Gleichgewicht.
Wir stellen das Glas von der linken Waagschale auf die rechte, und den Krug ersetzen wir durch einen Teller (Abb. 103b). Die Waage ist wiederum im Gleichgewicht.
Jetzt nehmen wir die Flasche von der linken Waagschale herunter und stellen auf diese

zwei gleiche Krüge, und auf der rechten Waagschale ersetzen wir das Glas durch zwei gleiche Teller (Abb. 103c). Dabei zeigt sich, daß die beiden Krüge ebensoviel wiegen wie die drei Teller.
Um wieviel ist die Flasche schwerer als das Glas?



103

157. Die Würfel

Einem Meister, der Spielzeug anfertigte, brachte man eine Anzahl hölzerner Würfel gleicher Größe; er sollte auf die Würfel Buchstaben und Zahlen für ein Spiel kleben. Der gesamte Inhalt der Oberflächen aller Würfel reichte aber nicht aus. Er brauchte eine doppelt so große Fläche.
Wie verdoppelte er die Summe des Oberflächeninhalts aller Würfel, ohne neue Würfel hinzuzunehmen?

158. Die Büchse mit Schrot

Bei Arbeiten an einer Wasserleitung machte es sich einmal erforderlich, eine Bleilasche von bestimmtem Volumen anzufertigen. In der Werkstatt war kein Blei vorhanden. Aber der Meister besaß etwas Jagdschrot und wollte ihn schmelzen. Zum Abmessen hatte er eine Halbliterbüchse mit Teilstrichen wie bei einem Meßzylinder. Diese füllte er mit Schrot.
Erhält man aber nun aus dieser Menge Schrot die Lasche in dem geforderten Volumen? Bleikugeln sind doch kein Wasser. Ihr Volumen kann man wegen der Zwischenräume nicht mit einem Meßzylinder messen. Wie könnte man das Volumen des zusammengeschütteten Schrots bestimmen? Zunächst dachte er, das Volumen eines Schrotkörnchens nach der Formel für den Kugelinhalt zu bestimmen und die Anzahl der Schrotkörner auszuzählen. Aber das war kompliziert und langwierig, um so mehr, als sich die Schrotkörner von verschiedener Größe erwiesen. Wenn ein Gegenstand aus ein und demselben Stoff besteht, dann kann man sein Volumen durch Teilung seines Gewichts durch die Wichte des Stoffes bestimmen. Aber, wie zum Trotz, konnte er sich nicht an die Wichte für Blei erinnern, und ein Nachschlagebuch war nicht zur Hand.
Und dennoch bestimmte er schließlich schnell und genau genug das Volumen des Bleis, wobei alle Berechnungen in einer einzigen Grundrechnungsart, einer Subtraktion, bestanden. Wie machte er das?

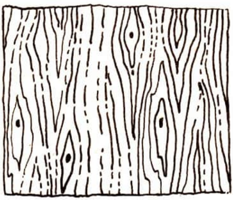
159. Wohin kam der Unteroffizier?

In Ausführung eines Befehls seines Kommandeurs ging ein Unteroffizier von der Ortschaft M mit dem Azimut (= Winkel der Abweichung in Bogengraden von der Nordsüd-Richtung über Ost hinweg) 330° weg. Als er zu einem Hügel gelangte, ging er mit dem Azimut 30° weiter und kam zu einem einzeln stehenden Baum. Von dort wandte er sich 60° nach rechts. Als der Unteroffizier in dieser Richtung an eine Brücke gelangt war, ging er auf dem Ufer des Flusses mit dem Azimut 150° weiter. Als er nach einer halben Stunde bei einer Mühle herauskam, wechselte er wieder die Richtung. Jetzt ging er mit dem Azimut 210° weiter. Am Hause des Müllers angelangt, bog er noch einmal nach rechts, er ging mit dem Azimut 270° und kam genau an dem befohlenen Punkt heraus.
Konstruiert mit Hilfe eines Winkelmessers die Marschroute des Unteroffiziers und stellt fest, wohin er gelangte, wenn bekannt ist, daß er in jeder Marschrichtung 2,5 km zurücklegte.

160. Der Durchmesser eines Stammes soll bestimmt werden

Wie groß ist ungefähr der Durchmesser des Stammes, aus dem die in Abb. 104 dargestellte Furnierplatte verfertigt ist? Die Größe der Platte ist 150 cm mal 150 cm.
Ich erinnere daran, daß der Kreisdurchmesser d annähernd nach der Formel $d = \frac{c}{3{,}14}$ errechnet wird, wobei c der Kreisumfang ist. Verseht euch aber nicht bei der Lösung! $d \doteq \frac{150}{3{,}14}$ cm.

104

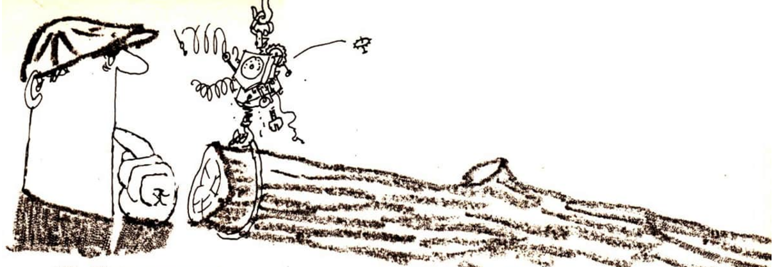


161. Die Erzählung des Schülers einer Fachschule

In der Fachschule lernen wir die Einrichtung von Werkbänken und Maschinen kennen; wir lernen die Werkzeuge richtig zu gebrauchen und uns in schwierigen Lagen zu behelfen. Natürlich kommen uns dabei sehr die Kenntnisse zustatten, die wir uns in der Schule angeeignet haben. Da gibt mir eines Tages der Meister einen Draht und fragt: „Womit mißt man den Durchmesser des Drahtes?"
„Mit dem Mikrometer", antwortete ich.
„Wenn nun aber kein Mikrometer zur Hand ist, was machst du dann?"
Nach längerem Nachdenken kam ich darauf. Erratet ihr, wie ich den Durchmesser des Drahtes gemessen habe? Ein anderer Fall war noch erstaunlicher. Ich erhielt den Auftrag, eine kreisrunde Öffnung in ein Stück Dachblech von $2^1/_2$ mm Stärke zu machen.
„Ich hole Bohrer und Meißel!" sage ich zum Meister.
„Ist nicht nötig", antwortet der Meister und kneift dabei listig die Augen zu. „Du hast, wie ich sehe, Hammer und Flachfeile da. Mit diesen Werkzeugen sollst du auskommen."
Dahinter, gestehe ich, bin ich nicht selbst gekommen.
Was hätte ich in diesem Falle tun müssen?

162. Kann man eine hundertprozentige Einsparung erreichen?

Jemand hörte von drei Erfindungen: eine ersparte 30% Brennstoff, die andere 45% und die dritte 25%. Er gedachte alle drei Erfindungen sofort anzuwenden, in der Absicht, damit 30% + 45% + 25% = 100% Brennstoff einzusparen. Ist das aber richtig? Wieviel Prozent Einsparung erhält man in Wirklichkeit?



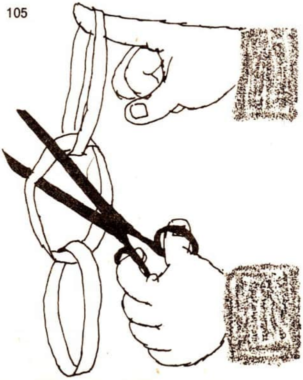
163. Mit Federwaagen

Es liegen einige Federwaagen bereit. Die äußerste Belastung für eine Federwaage ist 5 kp. Wie kann man unter ausschließlicher Verwendung dieser Federwaagen einen Balken wiegen, dessen Gewicht schätzungsweise 15 bis 20 kp beträgt?

164. Wer hat Geschick zum Konstruieren?

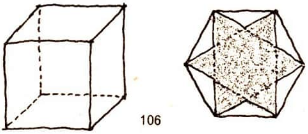
1. Wie muß man eine Kette zu drei Gliedern aus drei Streifen bilden, damit beim Durchschneiden eines einzigen beliebigen Gliedes die ganze Kette in die drei Teile zerfällt? Die übliche Verkettung, die in Abb. 105 dargestellt ist, eignet sich offensichtlich nicht dazu, weil die Kette in diesem Falle nur dann in drei Teile zerfällt, wenn das mittlere Glied durchschnitten wird und nicht, wenn ein beliebiges durchschnitten wird, wie die Bedingung fordert.
2. Wie muß man eine Kette zu fünf Gliedern aus fünf Streifen bilden, damit sie in fünf Teile zerfällt, wenn man ein bestimmtes Glied durchschneidet?
3. Wie muß man eine Kette zu fünf Gliedern aus fünf Streifen bilden, damit beim Durchschneiden eines beliebigen Gliedes die ganze Kette in die fünf Teile zerfällt?

105



165. Der Mißerfolg

A beobachtete folgendes: Sein älterer Bruder B nahm einen hölzernen Spielwürfel und sägte ihn so geschickt durch, daß die Schnittfläche ein regelmäßiges Sechseck ergab (Abb. 106). Dann zog er mit dem



106

Bleistift Linien, die die Ecken des Sechsecks, eine um die andere, miteinander verbanden, und er erhielt einen sechszackigen Stern. Von den dreieckigen Zwischenräumen zwischen den Zacken des Sterns (in Abb. 106 die weißen Dreiecke) hob er mit dem Messer eine dünne Schicht Holz ab, klebte auf den Stern eine Gummiplatte und beschnitt sie ringsherum genau nach den Konturen des Sterns und sagte: „Der Stempel ist fertig."
Dem A gefiel das. Als Mitgestalter der Wandzeitung seiner Klasse meinte er, daß es ihm sehr von Nutzen sein könnte, wenn er einen solchen Stempel mit einem fünfzackigen Stern hätte (Abb. 107). Er nahm

107

einen Würfel aus seinem Baukasten und machte sich an den Versuch, ihn so zu zersägen, daß die Schnittfläche ein regelmäßiges Fünfeck ergab. Er hatte aber bei seinen Bemühungen keinen Erfolg.

Wie sehr er auch versuchte, mit einem Schnitt durch den Würfel ein regelmäßiges Fünfeck zu erhalten, es gelang ihm in keiner Weise. Es ergaben sich regelmäßige Dreiecke verschiedener Größen, es ergaben sich Quadrate und regelmäßige Sechsecke, und die nur von einer Größe, aber kein Fünfeck.

Lange mühte sich A ab, er zersägte alle Würfel seines Baukastens, aber es klappte nicht – entweder kam er einfach nicht dahinter, wie man den Würfel durchschneiden muß, oder es ist überhaupt unmöglich, mit einem ebenen Schnitt durch einen Würfel ein regelmäßiges Fünfeck zu bilden.

Und das alles geschah nur deshalb, weil A noch nicht viel von Geometrie verstand. Man muß ihm helfen, sich über folgende Fragen klar zu werden:

1. Kann man mit einem ebenen Schnitt durch einen Würfel ein regelmäßiges Fünfeck bilden?
2. Wie muß man einen Würfel durchsägen, damit man mit einem ebenen Schnitt ein regelmäßiges Dreieck oder ein regelmäßiges Sechseck erhält?
3. Kann man mit einem ebenen Schnitt durch einen Würfel ein regelmäßiges Vieleck mit mehr als sechs Seiten bilden?

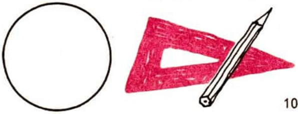
166. Welcher Kasten ist schwerer?

Gegeben sind zwei gleiche Kästen von Würfelgestalt, gefüllt mit Kugeln von gleicher Wichte. In dem ersten Kasten befinden sich 27 gleich große Kugeln und in dem zweiten 64 kleinere, aber untereinander gleich große Kugeln. Welcher Kasten ist schwerer?

Es wird vorausgesetzt, daß in beiden Kästen die Kugeln dicht bis obenan liegen, daß sich in jeder Schicht die gleiche Anzahl befindet und daß die äußeren Kugeln jeder Schicht die Kastenwände berühren. Wenn man den Kasten schließt, dann wird auch der Deckel von den Kugeln der obersten Schicht berührt.

167. Man soll den Mittelpunkt eines Kreises suchen

Wie sucht man den Mittelpunkt eines Kreises (Abb. 108) mit Hilfe eines Zeichendreiecks ohne Maßeinteilung und eines Bleistifts (wobei der Bleistift nur zum Zeichnen von Hilfslinien verwendet werden darf)?



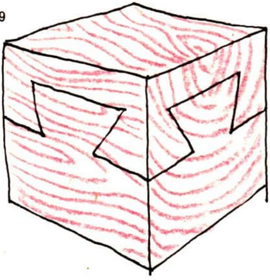
108

168. Die Kunst des Tischlers

In einer Ausstellung von Arbeiten junger Tischler – Schülern einer Betriebsberufsschule – zeigte man uns einen merkwürdigen hölzernen Würfel. Er bestand aus zwei Teilen, die fest miteinander durch Zapfen verbunden waren, deren Umrisse man aber von jeder der vier Seitenflächen des Würfels sehen konnte (Abb. 109). Die Teile des Würfels waren nicht aufeinandergeklebt und mußten sich offensichtlich trennen lassen. Aber wie?

Wir versuchten, die Teile nach oben und nach unten, nach links und nach rechts,

109

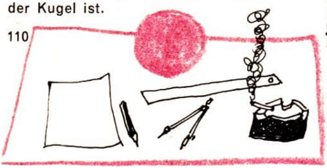


nach vorn und nach hinten auseinanderzuziehen; es war erfolglos.
Kommt ihr vielleicht darauf, wie sich die Teile trennen ließen und welches Aussehen jedes von ihnen hatte?

169. Geometrie auf einer Kugel

Im Geometrieunterricht mußtet ihr gewiß Konstruktionsaufgaben mit Hilfe von Zirkel und Lineal lösen. Dabei wurden alle Konstruktionen auf dem Papier oder an der Schulwandtafel ausgeführt.
Ihr mußtet aber wohl kaum bei der Lösung geometrischer Aufgaben Konstruktionen auf einer beliebigen gekrümmten Fläche, nehmen wir an, auf der Oberfläche einer Kugel, ausführen?
Auf diese Weise kann man zum Beispiel den Durchmesser einer Kugel nur unter Zuhilfenahme von Zirkel und Lineal bestimmen. Legt auf den Tisch eine beliebige Kugel, zum Beispiel aus dem Krocketspiel (Abb. 110), nehmt ein Blatt Papier, Zirkel, Lineal ohne Maßeinteilung und Bleistift und überlegt, wie man auf dem Papier eine Strecke konstruiert, die gleich dem Durchmesser der Kugel ist.

110



170. Jetzt ist viel Scharfsinn nötig

Einen Holzblock (ein rechtwinkliges Parallelepiped) mit Kanten von der Länge 8 cm, 8 cm und 27 cm (Abb. 111) soll man so in vier Teile zersägen, daß man daraus einen Würfel bilden kann.

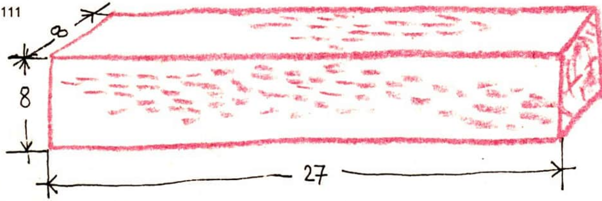
Es ist natürlich wünschenswert, den Block nicht aufs Geratewohl zu zersägen, sondern erst zu überlegen, zu rechnen und einen Aufriß zu entwerfen.
Beachtet, daß diese Aufgabe von euch gute räumliche Vorstellungen und Auffassungsgabe verlangt.

112

171. Schwierige Bedingungen

Um euren Scharfsinn zu üben, stellt euch folgende schwierige Lage vor: Ihr sollt nur unter Verwendung eines Lineals mit Maßeinteilung das Volumen einer Flasche (mit kreisrundem, quadratischem oder rechteckigem Boden) bestimmen, die zum Teil mit einer Flüssigkeit gefüllt ist. Es wird angenommen, daß der Flaschenboden flach ist. Es ist weder erlaubt, die Flüssigkeit auszugießen noch sie aufzufüllen.

111



172. Zusammengesetzte Vielecke

Bauleute können ein ganzes Haus aus Fertigteilen montieren, die in der Fabrik vorgefertigt sind. Warum sollten nicht auch wir unser Glück versuchen, eine analoge ,,Bauweise'' in der Geometrie anzuwenden, freilich mit dem Unterschied, daß unsere ,,Fertigteile'' kongruente Vielecke sind. Stellt euch vor, es steht euch eine ungeordnete Menge kongruenter Vielecke zur Verfügung. Es wird verlangt, die Vielecke so aneinanderzulegen, daß aus ihnen ein Vieleck der gleichen Gestalt entsteht, wie sie die gegebenen Vielecke haben, nur größer, genauer: ein Vieleck ähnlich (im Sinne der Geometrie) den gegebenen zu bilden.

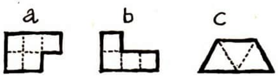
Beim Zusammenlegen darf man die Vielecke beliebig drehen und wenden, aber nicht falten oder in Teile schneiden.

Nicht jedes Vieleck eignet sich hierzu. So lassen sich zum Beispiel gleiche regelmäßige Sechsecke schön in einer Ebene auflegen (denkt an einen Fußboden, der mit sechseckigen Fliesen ausgelegt ist), aber aus ihnen ein regelmäßiges Sechseck zu bilden ist unmöglich.

Aus kongruenten Quadraten oder kongruenten gleichseitigen Dreiecken lassen sich leicht ähnliche Figuren bilden (Abb. 113). Als höchst taugliche ,,Fertigteile'' für ähnliche Figuren erweisen sich Vielecke, wie sie in Abb. 114 dargestellt sind, und andere, die man aus kongruenten Quadraten (zum Beispiel aus den Kästchen von kariertem Papier) oder aus kongruenten gleichseitigen Dreiecken bilden kann.

Vielecke, die den in Abb. 114 dargestellten ähnlich sind, kann man nicht nur aus vier,

114



sondern auch aus neun oder 16 oder einer noch größeren Anzahl der in Abb. 114 gegebenen Vielecke bilden.

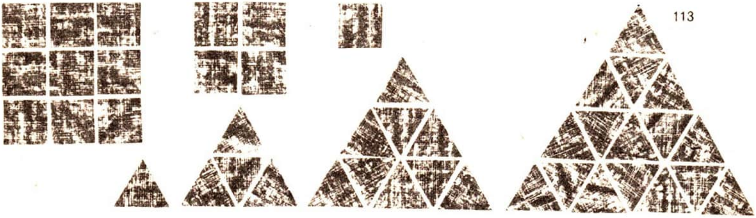
In Abb. 115 wird als Beispiel gezeigt, wie man aus vier Vielecken a oder b oder aus 16 Vielecken c (vgl. Abb. 114) diesen ähnliche Figuren bildet.

Zu einem ,,Bau'' von Figuren, die einer gegebenen ähnlich sind, muß man, wie ihr seht, wenigstens vier kongruente Anfangsfiguren haben, und dann entweder neun oder 16, überhaupt n^2 Figuren, wobei n eine ganze Zahl ist.

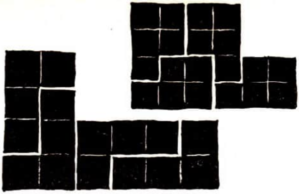
Und das folgt aus dem bekannten Lehrsatz der Geometrie, wonach sich die Flächen ähnlicher Vielecke verhalten wie die Quadrate ihrer Seitenlängen.

Bei der Bildung eines Vielecks aus einer Anzahl einzelner, ihm ähnlicher Vielecke können wir erwarten, daß die Längen seiner Seiten 2- oder 3- oder 4- oder ... n-mal so groß sind wie die Längen der entsprechenden Seiten des anfänglich gegebenen Vielecks. Dann wird seine Fläche 2^2- oder 3^2- oder 4^2- oder ... n^2-mal so groß sein wie die Fläche des anfangs gegebenen Vielecks. Folglich werden zum ,,Bau'' der geforderten Figuren entsprechend 4 oder 9 oder 16 oder ... n^2 Anfangsfiguren benötigt.

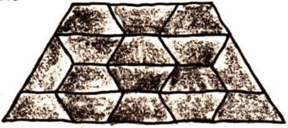
A u f g a b e. Bildet Vielecke, die denen aus Abb. 114 ähnlich sind 1. aus 9 Figuren a; 2. aus 9 Figuren b; 3. aus 4 Figuren c; 4. aus 16 Figuren b; 5. aus 9 Figuren c.



113



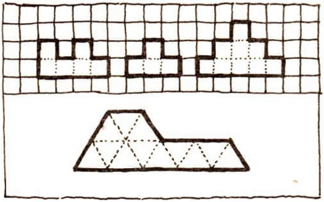
115



Fertigt aus Papier (mit quadratischen oder dreieckigen Kästchen) andere ,,Fertigteile'', analog den in Abb.114 dargestellten, schneidet sie in größerer Menge aus und veranstaltet einen Wettbewerb darüber, wer am schnellsten und aus der geringsten Anzahl von Vielecken einer gegebenen Gestalt ähnliche Figuren baut.

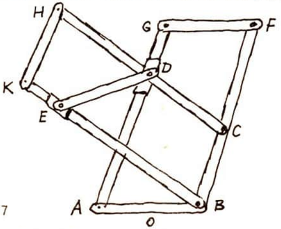
Behaltet im Auge, daß man aus vier oder neun kongruenten Figuren nicht immer ein ähnliches Vieleck bilden kann. Es können auch mindestens 16, 25, 36 und überhaupt n^2 Figuren erforderlich sein, wobei n eine beliebige ganze Zahl ist, die im voraus nicht bekannt ist. Daher ist es interessant, festzustellen, welche Anzahl gegebener Figuren mindestens zur Bildung eines ähnlichen Vielecks erforderlich ist. ,,Musterfertigteile'' sind in Abb. 116 dargestellt. Ihr könnt auch andere entwerfen, nur bedenkt dabei, daß es ,,Fertigteile'' gibt, aus denen keine ähnlichen Figuren gebildet werden können.

116



173. Ein Mechanismus mit Scharnieren zur Konstruktion regelmäßiger Vielecke

Bastlern sind die Schwierigkeiten bekannt, die mit der Konstruktion regelmäßiger Fünf-, Sieben- oder Neunecke verbunden sind. Zirkel und Lineal reichen hier zur genauen Konstruktion nicht aus. Ihr könnt euch aber selbst einen einfachen Mechanismus anfertigen, der sich zur Konstruktion eines beliebigen n-Ecks von $n = 5$ bis $n = 10$ eignet. Der Mechanismus besteht aus beweglichen Stäben oder Leisten, die zwei kongruente Parallelogramme ABFG und BCHK bilden (Abb. 117). Die Leiste DE ist mit den Gleitern D und E versehen, die frei beweglich sind, und zwar D auf AG und E auf BK. Die Größe der Leisten ist so, daß $AB = BC = CD = DE$ ist. Trotz Veränderung der Lage von D auf AG und von E auf BK bleiben die Parallelogramme ABFG und BCHK kongruent. Es bleiben auch die Trapeze ABCD und BCDE kongruent, wodurch die Gleichheit der Winkel des n-Ecks gewährleistet ist, von dem vier aufeinanderfolgende Seiten jedesmal die Strecken AB, BC, CD und DE und die zugehörigen inneren Winkel $\sphericalangle$ ABC, $\sphericalangle$ BCD und $\sphericalangle$ CDE sind.

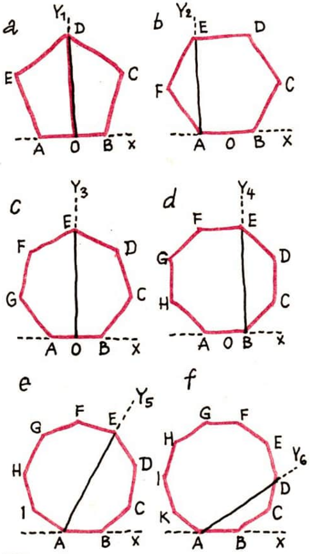


117

Eine solche Verbindung zweier Parallelogramme durch Gelenke gewährt bei genügender Länge die Möglichkeit, in einem einheitlichen Verfahren mechanisch ein beliebiges regelmäßiges n-Eck von $n = 5$ bis $n = 10$ zu bilden.

Zur Konstruktion eines Quadrats mit Hilfe dieses Mechanismus besteht zwar kein Bedürfnis, aber man würde auch ein Quadrat erhalten, wenn man praktisch E mit A zur Deckung bringen könnte. Das praktische Verfahren zur Konstruktion regelmäßiger n-Ecke für n = 5, 6, 7, 8, 9 und 10 mit Hilfe des Scharniermechanismus ist in folgenden Eigenschaften der entsprechenden Vielecke begründet:

a) $\sphericalangle$ DOB = 90° bei dem Fünfeck (Abb. 118a);
b) $\sphericalangle$ EAB = 90° ,, ,, Sechseck (Abb. 118b);
c) $\sphericalangle$ EOB = 90° ,, ,, Siebeneck (Abb. 118c);
d) $\sphericalangle$ EBA = 90° ,, ,, Achteck (Abb. 118d);
e) $\sphericalangle$ EAB = 60° ,, ,, Neuneck (Abb. 118e);
f) $\sphericalangle$ DAB = 36° ,, ,, Zehneck (Abb. 118f).



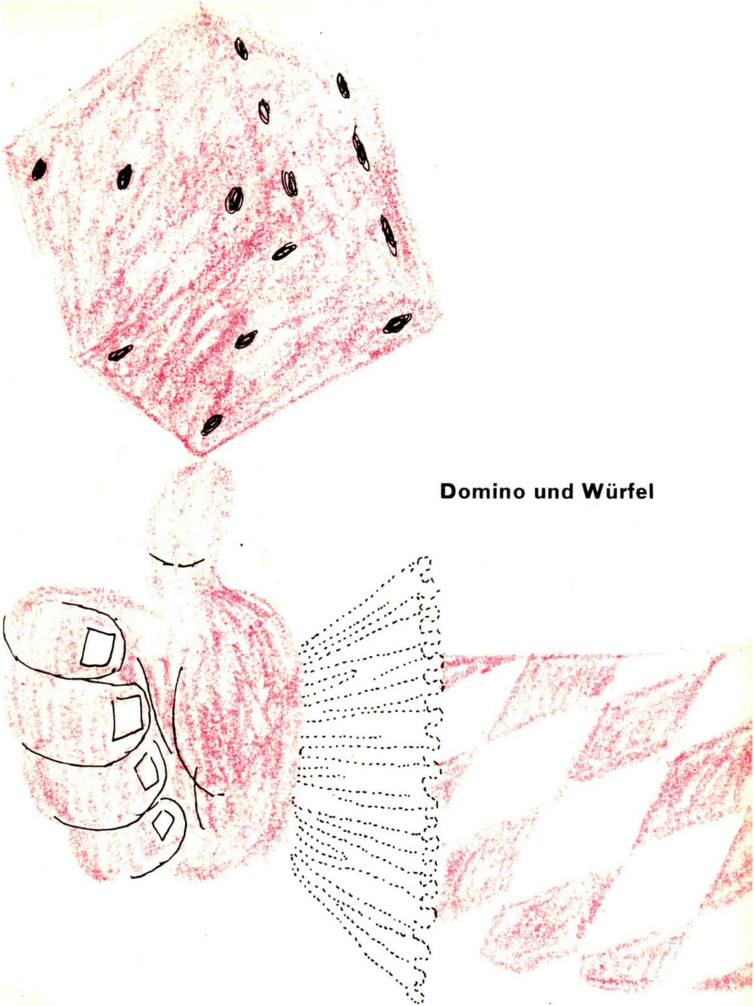
118

Um mit dem Scharniermechanismus regelmäßige n-Ecke mit n = 5, 6, 7 oder 8 zu zeichnen, muß man hilfsweise die rechten Winkel Y_1OX, Y_2AX, Y_3OX oder Y_4BX konstruieren. Dann legt man den Mechanismus mit der Leiste AB an die Gerade durch A und B, so daß sich entweder die Punkte O (bei den Zeichnungen a und c) oder die Punkte B decken. Während man die Leiste AB fest auf das Papier drückt, dreht man die übrigen Leisten, bis sich D mit der Geraden OY_1 (für das Fünfeck) deckt oder E mit der Geraden AY_2 (für das Sechseck) oder E mit OY_3 (für das Siebeneck) und schließlich E mit BY_4 (für das Achteck). Um regelmäßige n-Ecke mit n = 9 oder 10 zu zeichnen, muß man hilfsweise die Strahlen AY_5 und AY_6 so ziehen, daß $\sphericalangle Y_5AX = 60°$ und $\sphericalangle Y_6AX = 36°$ sind. Dann legt man den Mechanismus mit der Leiste AB so an die Gerade durch A und B, daß sich die Punkte A decken. Während man die Leiste AB fest auf das Papier drückt, dreht man die übrigen Leisten, bis sich E mit AY_5 (für das Neuneck) oder D mit AY_6 (für das Zehneck) deckt. Wenn der Mechanismus starr in der erlangten Stellung belassen wird, erhalten wir vier aufeinanderfolgende Seiten (und fünf Ecken) des gesuchten n-Ecks. Wenn wir vier Seiten des n-Ecks haben, ist es nicht schwer, durch mehrfaches Anlegen der ,,Schablone'', die durch die festgehaltenen Leisten gebildet wird, das ganze n-Eck zu konstruieren.

Es ist klar, daß die Seitenlänge eines jeden konstruierten n-Ecks gleich der Länge der Leisten AB ist. Wenn ein Vieleck anderer Größe gebraucht wird, kann man es durch Konstruktion eines geometrisch ähnlichen Vielecks erhalten.

Theoretisch ist die Konstruktion genau; die praktische Genauigkeit hängt jedoch von der Präzision des Geräts ab. Der beschriebene Mechanismus kann aus Holz oder Leichtmetall angefertigt werden.

A u f g a b e. Ihr könnt gewiß einen Winkel mit Zirkel und Lineal halbieren. Überlegt, wie man einen Winkel von 1° konstruieren kann, wobei ihr zunächst den beschriebenen Mechanismus mit Scharnieren und dann Zirkel und Lineal verwenden sollt.



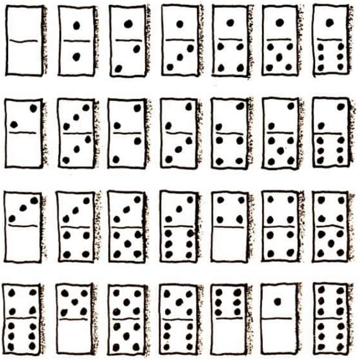
Domino und Würfel

A. Domino

Das Dominospiel besteht aus 28 rechteckigen Täfelchen, den Steinen (Abb. 119). Jeder Stein ist in zwei Quadrate geteilt, auf denen Punkte angebracht sind. Die Punkte sind auf den Quadraten so verteilt, daß auf jedem Stein eine der möglichen Kombinationen zu je 2 aus den 7 Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 dargestellt ist. Damit ist jeder Dominostein durch zwei Zahlen charakterisiert: die Zahl der Punkte auf dem einen Quadrat und die der Punkte auf dem anderen. Die Summe aller Punkte eines Steins bestimmt die Zahl seiner „Augen". Wenn beide Hälften eines Steins die gleiche Anzahl Augen haben oder beide „leer" sind, dann wird ein solcher Stein „Pasch" genannt. Anstelle einer vollständigen Darstellung eines Steins wollen wir einfach zwei Ziffern (mit einem Bindestrich dazwischen) nebeneinander schreiben, die die Anzahl der Augen auf jeder Hälfte des Steins anzeigen. So bezeichnet die Angabe 0—5 den Stein, bei dem auf einem Quadrat kein Punkt (0) und auf dem anderen fünf Punkte (5) sind. Der Ausdruck 4—6 bezeichnet den Stein mit vier und sechs Punkten usw.
Die Spielweise ist so bekannt, daß es nicht nötig ist, sie zu beschreiben. Ich erinnere nur an die Hauptregel: An ein Quadrat eines auf dem Tische ausgelegten Steins darf nur ein Quadrat mit gleicher Augenzahl gelegt werden.
Die Bezeichnung aller 28 Dominosteine kann man in folgender Weise ordnen:

0—6	1—6	2—6	3—6	4—6	5—6	6—6
0—5	1—5	2—5	3—5	4—5	5—5	
0—4	1—4	2—4	3—4	4—4		
0—3	1—3	2—3	3—3			
0—2	1—2	2—2				
0—1	1—1					
0—0						

Das Dominospiel an und für sich bietet keine mathematischen Probleme. Wenn ihr aber einen vollständigen Satz Dominosteine habt, dann übt euch in der Lösung folgender interessanter Rechen- und Rätselaufgaben.



119

174. Wieviel Augen?

Löst unter Beachtung der Hauptregel des Dominospiels (siehe oben) folgende Aufgabe: Alle 28 Dominosteine sind nach der Spielregel in einer Kette so auf den Tisch ausgelegt, daß sich an dem einen Ende 5 Augen befinden. Wieviel Augen müssen an dem anderen Ende der Kette sein?
Überlegt zuerst und probiert es dann praktisch aus!

175. Zwei Kunststücke

1. Ihr versteckt unauffällig einen der Dominosteine (aber keinen „Pasch") und verheimlicht vor euren Freunden, daß vor ihnen 27 Steine und nicht 28 liegen. Dann gebt ihr ihnen auf, alle Steine nach der Spielregel in einer Kette aufzulegen, beginnend mit einem beliebigen Stein (man kann dabei die „Pasche" auslassen), und ihr sagt im voraus die Zahlen der Augen an, die an den Enden der Kette liegen werden.
Es sind die Zahlen der Augen, die auf den Quadraten des versteckten Steins stehen. Warum?
2. Nehmt 25 Dominosteine, dreht sie „mit dem Gesicht" nach unten und legt sie mit den Längsseiten nebeneinander. Dann erklärt ihr, daß ihr euch umdrehen oder sogar in ein anderes Zimmer gehen werdet, während jemand eine beliebige Anzahl von Steinen (aber nicht mehr als zwölf) vom rechten Ende an das linke legen soll. Ihr versprecht, die Anzahl der umgelegten Steine zu erraten.
Wenn ihr die Steine zum „Raten" vorbereitet und sie „mit dem Gesicht" nach unten dreht, legt ihr 13 von ihnen mit fallender Augenzahl von 12 bis 0 hin (Abb. 120) und rechts davon die übrigen 12 in willkürlicher Folge.
Wenn ihr in das Zimmer zurückkehrt, deckt ihr den mittelsten Stein auf (das ist beim Abzählen von einem Ende der 13.). Seine Augenzahl gibt mit Sicherheit die Anzahl der in eurer Abwesenheit umgelegten Dominosteine an.
Warum ist das so?

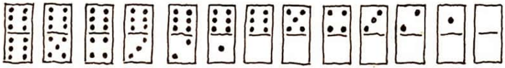
176. Der Gewinn der Partie ist gesichert

Angenommen, es spielen vier Personen Domino: A und C gegen B und D. Die Steine werden bei Spielbeginn zu gleichen Teilen verteilt, jeder erhält sieben Steine.
Versuchen wir zu erklären, wovon der Gewinn einer Partie abhängt.
Er hängt natürlich in gewissem Maße von der Fertigkeit des Spielers ab; aber es sind auch Fälle der Verteilung der Steine unter die Mitspieler möglich, daß das erste Paar unbedingt gewinnt, nämlich daß einer von diesen beiden Spielern eher als alle anderen sämtliche Steine auslegt.
Es habe zum Beispiel A folgende Steine: 1—0, 1—1, 1—2, 1—3, 0—4, 0—5, 0—6 und D habe die übrigen Steine mit Nullen und Einsen, das heißt:

0—0, 0—2, 0—3, 1—4, 1—5, 1—6

und noch irgendeinen Stein.
Die übrigen Steine gehören den Spielern B und C, gleichgültig, wem welche.
In diesem Falle führt das ganze Spiel zu einem Zweikampf zwischen dem Spieler A vom ersten und dem Spieler D vom zweiten Paar, und die anderen beiden Spieler B und C können nicht einen einzigen Stein auslegen.
Der Spieler A beginnt und legt 1—1 aus. B und C ärgern sich, denn sie haben keinen passenden Stein. D kann einen von den drei Steinen 1—4, 1—5 und 1—6 anlegen. Danach muß A 0—4, 0—5 oder 0—6 anlegen. B und C „passen" wiederum, weil sie weder

120



Einsen noch Nullen haben. D kann einen von den übrigen Steinen anlegen. A hat immer einen Anschluß, der an den Enden der Kette 0 oder 1 ergibt. Schließlich legt A alle Steine aus, B und C legen nicht einen Stein aus, und D behält einen Stein übrig. Die Partie hat das Paar A und C gewonnen. (Führt diese Partie von Anfang bis Ende durch!)

Bei der Verteilung der Steine auf die Spieler können die Kombinationen aus Nullen und Einsen durch entsprechende Kombinationen der Zahlen 2, 3, 4, 5 und 6 ersetzt werden.

Es läßt sich leicht feststellen, daß die Anzahl aller Serien, die analog der untersuchten sind, gleich der Anzahl aller einfachen Kombinationen von sieben Elementen zu je zwei ist, das heißt, die Anzahl ist 21. Die Wahrscheinlichkeit, zufällig eine von diesen Serien zu erwischen, ist höchst gering.

Im vorhergehenden Spiel dauerte die Partie so lange, bis die Steine bei einem der Mitspieler zu Ende waren; aber es kommt auch vor, daß nach einigen Zügen das Spiel zu Ende ist, weil keiner der Mitspieler einen passenden Stein hat. In diesem Falle ist dasjenige Paar Gewinner, bei dem die Summe der Augen auf den zurückbehaltenen Steinen die kleinere ist.

Versucht, nach indirekten Angaben über eine solche Kurzpartie darauf zu kommen, welche Steine auf den Tisch aufgelegt worden waren. Es spielen dieselben Personen: A und C gegen B und D. Jeder hat sechs Steine, vier Steine bleiben verdeckt, und die Spieler machen aus, keine Steine zu „kaufen".

Die Steine des Spielers A sind bekannt:

2—4, 1—4, 0—4, 2—3, 1—3, 1—5.

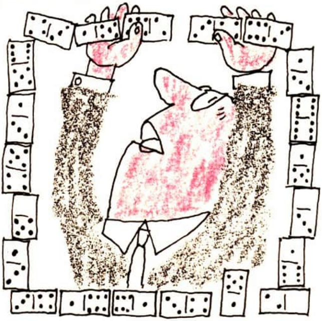
Sein Partner C hat fünf Pasche. D hat zwei Pasche; die Summe seiner sämtlichen Steine ist 59.

Der Spieler A beginnt das Spiel mit dem Stein 2—4. B paßt, C legt an, D paßt, A legt an, B paßt wieder, C legt an und beendet das Spiel. Das Paar B und D verliert die Partie, bei der es nicht einen einzigen Zug getan hat. Die Partner A und C behalten 35 Augen und die Partner B und D 91 Augen zurück. Die Summe der Augen auf den vier ausgelegten Steinen ist 22.

Bestimmt nach diesen Angaben, welche vier Steine verdeckt blieben und welche vier Steine ausgelegt wurden!

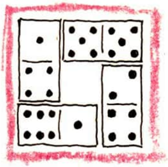
177. Der Rahmen

Legt die Dominosteine nach der üblichen Spielregel aneinander, so daß ein quadratischer Rahmen entsteht. Verwendet dabei alle 28 Steine und ordnet sie so, daß in jeder Seite des Quadrats die Summe der Augen 44 ist!



178. Das „Fensterchen"

Aus Dominosteinen kann man „Fensterchen" mit gleicher Augenzahl auf jeder Seite des „Fensterchens" legen (Abb. 121). Bildet unter Verwendung aller 28 Dominosteine weitere sieben gleichartige „Fensterchen", die besagte Eigenschaft besitzen.


121

Anmerkung.

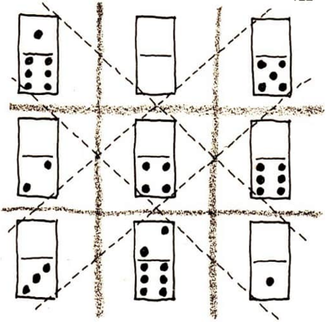
1. Die Zahlen der Augen in den Ecken der Quadrate gehen zweimal in die Berechnung ein, einmal in der horizontalen und einmal in der vertikalen Seite.
2. Die Augenzahl braucht nur in den Seiten jedes einzelnen „Fensterchens" gleich zu sein.

179. Magische Quadrate aus Dominosteinen

Aus Dominosteinen kann man nicht nur „Fensterchen" und „Rahmen" bilden, sondern auch volle Quadrate, ja sogar „magische". Wenn verschiedene Zahlen, jede nur einmal, so in Form eines Quadrats angeordnet werden, daß die Summen der Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen gleich sind, dann nennt man ein solches Quadrat ein „magisches"[1].

So ist es zum Beispiel sehr leicht, aus allen sieben Blanken (so heißen die Dominosteine, bei denen auf einer oder beiden Hälften keine Augen sind) und zwei weiteren Steinen (1—6 und 2—6) ein magisches Quadrat (Abb. 122) mit der konstanten Summe 12 zu bilden.

122



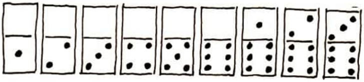
[1] Ausführlicheres über die magischen Zahlenquadrate vgl. im Kapitel „Kreuzsummen und magische Quadrate", S. 153

[Bei diesem und anderen magischen Quadraten aus Dominosteinen wird als ein Feld des Quadrats jeweils der ganze Stein, nicht nur eine seiner Hälften, gerechnet (vgl. Abb. 122).]

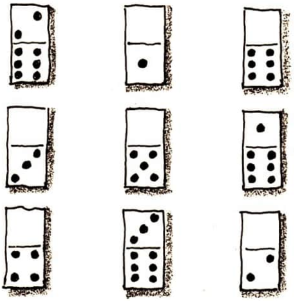
Für die Darstellung des magischen Quadrats ist folgende Schreibweise bequemer:

1—6	0—0	0—5		7	0	5
0—2	0—4	0—6	oder in Zahlen	2	4	6
0—3	2—6	0—1		3	8	1

Interessant ist die Feststellung, daß die Zahlen der Augen der verwendeten neun Steine sich als die acht ersten Zahlen der natürlichen Zahlenfolge 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 darstellen, und dazu kommt noch die Null. Wenn man jedoch die neun Steine nimmt, deren Augenzahlen den neun ersten Gliedern der natürlichen Zahlenfolge entsprechen, wie zum Beispiel in Abb. 123, dann kann man aus ihnen ein magisches Quadrat mit der konstanten Summe 15 bilden (Abb. 124).



123



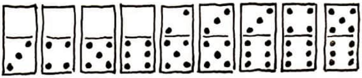
124

Analoge Quadrate kann man aus Steinen konstruieren, die alle Zweier oder Dreier oder Vierer enthalten, und aus noch zwei entsprechend ausgewählten Steinen. Die konstante Summe dieser Quadrate ist 18, 20 und 24. Man kann magische Quadrate auch aus einer größeren Anzahl von Steinen, aus 16, 25 usw. bilden; dabei ist gestattet, daß sich Zahlen wiederholen.

Als Beispiel führen wir das Schema eines magischen Quadrats mit der konstanten Summe 18 an, das aus 16 Dominosteinen besteht:

2—6	1—2	1—3	0—3
1—4	0—2	3—6	1—1
0—5	1—5	0—1	0—6
0—0	2—5	0—4	1—6

Es besteht aus den Steinen, die alle Nullen und alle Einsen enthalten und dazu aus den drei Steinen 2—5, 2—6, 3—6. Die Summe der



125

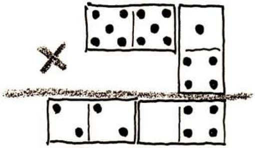
Augen in jeder Spalte, jeder Zeile und den beiden Diagonalen dieses Quadrats ist 18. Einige der Steine enthalten eine gleiche Anzahl von Augen, zum Beispiel 1 + 4 = 0 + 5 (1. Spalte), 2 + 5 = 1 + 6 (letzte Zeile) usw. Das erhaltene Quadrat besitzt außerdem die interessanten Eigenschaften, daß man die erste Spalte hinter die vierte oder die oberste Zeile unter die unterste setzen kann und dabei wiederum ein magisches Quadrat erhält. Wenn in diesem Quadrat alle Steine, die Nullen und Einsen enthalten, durch Steine ersetzt werden, deren Augenzahlen um 1, 2 oder 3 größer sind, dann erhalten wir wieder ein magisches Quadrat. (Der Stein 0—6 darf jedoch nicht ausgewechselt bzw. nur um 1 statt um 2 und nur um 2 statt um 3 erhöht werden!) Wenn wir schließlich in einem beliebigen solchen Quadrat jeden Stein durch einen Ergänzungsstein[1] ersetzen, dann erhalten wir wiederum ein magisches Quadrat.

Wie ihr seht, gibt das Domino reichlich Material zur Übung an magischen Quadraten. Löst jetzt folgende Aufgaben:

1. Bildet ein magisches Quadrat mit der konstanten Summe 21 aus den neun Steinen, die in Abb. 125 gegeben sind!
2. Sucht neun Dominosteine heraus, deren Augenzahlen die Folge 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 und 12 bilden, und setzt daraus ein magisches Quadrat zusammen. Welche konstante Summe hat dieses Quadrat?
3. Sucht 16 Dominosteine mit den Zahlen 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9 und 10 heraus und bildet aus ihnen ein magisches Quadrat.
4. Bildet ein magisches Quadrat mit der konstanten Summe 27 aus folgenden 25 Steinen: 0—0, 0—1, 0—2, 1—1, 0—3, 1—2, 0—4, 2—2, 3—1, 3—2, 4—1, 5—0, 1—5, 6—0, 4—2, 3—3, 1—6, 3—4, 2—5, 2—6, 3—5, 4—4, 4—5, 6—3, 6—4.

180. Multiplikation im Domino

Seht euch Abb. 126 an! Mit Hilfe von vier Steinen haben wir die Multiplikation einer dreistelligen Zahl (der Zahl 551) mit einer einstelligen (der Zahl 4) dargestellt. Versucht, alle 28 Dominosteine so zu ordnen, daß sich sieben „Multiplikationen" ähnlich der in Abb. 126 gezeigten ergeben. Sechs „Multiplikationen" konstruiert ihr ohne besondere Mühe. Aber bei der siebenten muß man mehr überlegen.



126

[1] Als Ergänzungssteine werden die Dominosteine bezeichnet, bei denen die Augenzahlen in den Quadraten diejenigen eines anderen Steines zu 6 ergänzen. Solche Steine sind zum Beispiel 2-3 und 4-3 oder 1-2 und 5-4. In einem Satz von 28 Steinen gibt es vier Steine (0-6, 1-5, 4-2 und 3-3), die sich selbst ergänzen

181. Ein „gemerkter" Dominostein soll erraten werden

Gebt euren Freunden auf, daß sie sich gemeinsam, aber geheim vor euch, einen beliebigen Dominostein merken.

Jetzt sollen sie nacheinander folgende Berechnungen anstellen:

1. die Anzahl der Augen einer beliebigen Hälfte des gemerkten Steins mit 2 multiplizieren,
2. zum Produkt eine beliebige euch genannte Zahl m hinzufügen,
3. die erhaltene Summe mit 5 multiplizieren,
4. zum Produkt die Zahl der Augen der anderen Hälfte des gemerkten Steins hinzuzählen.

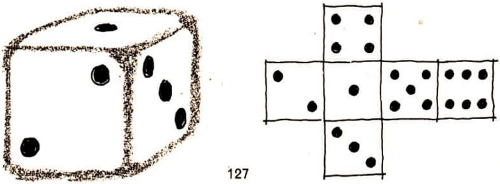
Fragt sie nach dem Endresultat und zieht davon 5m ab. Dann geben euch die zwei Ziffern der erhaltenen zweistelligen Zahl die Zahl der Augen auf den Hälften des gemerkten Dominosteins an.

Nehmen wir zum Beispiel an, daß sie sich den Stein 6—2 gemerkt haben. Sie haben 6 mit 2 multipliziert und nach eurer Forderung $m = 3$ hinzugefügt. Das ergibt 15. Sie multiplizieren 15 mit 5 und fügen die zwei Augen der anderen Hälfte des gemerkten Steins hinzu. Das ergibt 77. Wir ziehen $5m = 15$ ab und erhalten $77 - 15 = 62$. Der gemerkte Dominostein ist 6—2.

Wie kommt das zustande?

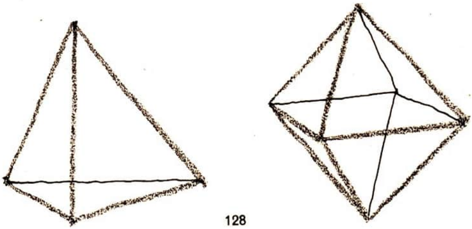
B. Würfel

Der Spielwürfel ist ein Würfel, auf dessen Seitenflächen Punkte angebracht sind. Auf einer Seite ist ein Punkt, auf einer anderen sind zwei, auf der dritten drei, auf den übrigen vier, fünf und sechs Punkte. In Abb. 127 wird ein solcher Spielwürfel und sein Schnittmuster gezeigt.
Die Anzahl der Punkte auf den Seitenflächen des Würfels bestimmt die Zahl der Augen. Die Punkte sind auf den Seitenflächen so angebracht, daß die Summe der Augen auf gegenüberliegenden Flächen 7 ist.
Warum erwies sich gerade der Würfel als derjenige Vielflächner (Polyeder), der sich am besten zum Spiel eignet?



127

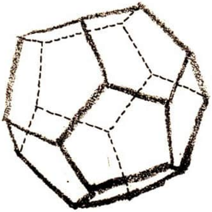
Vor allem ist klar, daß ein Spielkörper ein regelmäßiger Vielflächner sein muß, da nur in diesem Falle beim Wurf für jede seiner Seitenflächen die gleiche Chance besteht, oben zu sein. Von den fünf Arten regelmäßiger Polyeder hat sich schließlich der Würfel als der geeignetste erwiesen: ihn herzustellen bereitet keine große Schwierigkeit, und beim Wurf rollt er sich leicht genug. Wenn man alle fünf regelmäßigen Polyeder mit gleichem Kraftaufwand wirft, dann rollen Tetraeder und Oktaeder (Abb. 128) kaum, der Würfel (Abb. 127) rollt besser, und Dodekaeder (Abb. 129) und Ikosaeder (Abb. 130) sind so „rund“, daß sie fast wie eine Kugel rollen.



128

Die sechs Seitenflächen ließen den Gedanken aufkommen, die sechs ersten natürlichen Zahlen zu verwenden, und die paarweise parallele Anordnung der einander gegenüberliegenden Seitenflächen gestattete es, diese Zahlen einfach, gesetzmäßig und in einem gewissen Sinne symmetrisch anzuordnen.
Das hier angewendete Prinzip der Sieben ist auch der Schlüssel zur Lösung verschiedener Kunststücke mit einem oder einigen Spielwürfeln. Wer diese Eigentümlichkeit der Anordnung der Punkte auf den Würfelflächen nicht kennt, dem wird es nicht leicht fallen, die Geheimnisse des ,,Erratens'' bei den Kunststücken zu entschleiern.

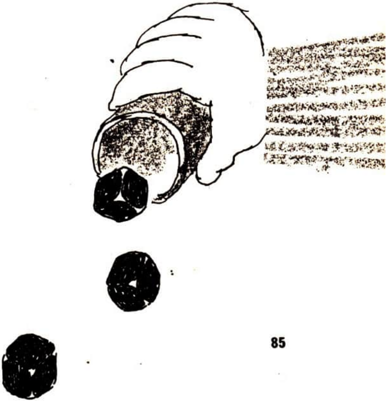
129



130

182. Ein arithmetisches Kunststück mit Spielwürfeln

Für das Kunststück braucht man drei Spielwürfel. Wenn ihr sie nicht habt oder auf euren Würfeln das ,,Prinzip der Sieben'' nicht gewahrt ist, dann zeichnet das Schnittmuster des Würfels, das in Abb. 127 dargestellt ist, auf festes Papier oder dünnen Karton, schneidet es aus und klebt es zusammen.
Der ,,Zauberer'' dreht sich um. Jemand aus dem ,,Publikum'' wirft drei Würfel auf den Tisch. Der Zauberer fordert das Publikum auf, die Zahl der Augen auf den oberen Seitenflächen aller drei Würfel zu addieren, irgendeinen beliebigen Würfel hochzuheben und die Zahl der Augen auf der Unterfläche des Würfels zur vorigen Summe zu addieren. Weiter fordert der Zauberer auf, denjenigen Würfel, der hochgehoben wurde, noch einmal zu werfen und die Zahl der Augen auf seiner oberen Fläche zur erhaltenen Summe zu addieren. Danach dreht sich der Zauberer um, erinnert das Publikum daran, daß er nicht weiß, welcher Würfel noch einmal geworfen wurde, nimmt alle drei Würfel in die Hand, schüttelt sie (zur Steigerung der Spannung) und ,,errät'' zur Verwunderung des Publikums das Endresultat der Rechenoperation.
Wie macht man das? Bevor man die Würfel in die Hand nimmt, muß man die Augen auf ihren oberen Seitenflächen addieren und 7 hinzufügen. Die erhaltene Summe ist diejenige, die ,,erraten'' werden muß.



183. Die Summe der Augen auf den verdeckten Flächen soll erraten werden

Drei Spielwürfel sollen zu einer Säule übereinander gestapelt sein (Abb. 131). Wenn ihr nur die obere Fläche der Säule oder nur

131

zwei seitliche Flächen seht, könnt ihr sofort die Summe der Augen auf den Flächen, mit denen die Würfel aufeinander liegen, und auf der Unterfläche der Säule ermitteln. So ist zum Beispiel in der Anordnung der Würfel, die in Abb. 131 dargestellt ist, die gesuchte Summe 17. Überlegt, nach welchen Regeln man sich richten muß, um die Summe der verdeckten Augen zu erraten.

184. In welcher Reihenfolge lagen die Würfel?

Gebt euren Freunden drei Würfel, ein Stück Papier und einen Bleistift und sagt ihnen, sie sollen die Würfel beliebig nebeneinanderlegen und die dreistellige Zahl bilden, deren Ziffern den Augen auf den

132

oberen Seiten der Würfel entsprechen. Das ist zum Beispiel bei den in Abb. 132 dargestellten Würfeln die Zahl 254. An diese Zahl sollen sie die drei Ziffern anhängen, die den Augen auf den Unterseiten der Würfel entsprechen. Damit erhält man eine sechsstellige Zahl, in unserem Beispiel 254523. Dann sollen sie diese Zahl durch 111 teilen und euch das Resultat sagen.
Ohne eine Multiplikation durchzuführen, könnt ihr sehr schnell die drei ersten Ziffern der sechsstelligen Zahl angeben und damit also sagen, in welcher Reihenfolge die Würfel lagen.
Wie wird das gemacht? Man zieht von der angesagten Zahl 7 ab und teilt die Differenz durch 9. Die Ziffern des Quotienten geben die Lage der Würfel an.
Wenn wir unser Beispiel fortsetzen, erhalten wir also:

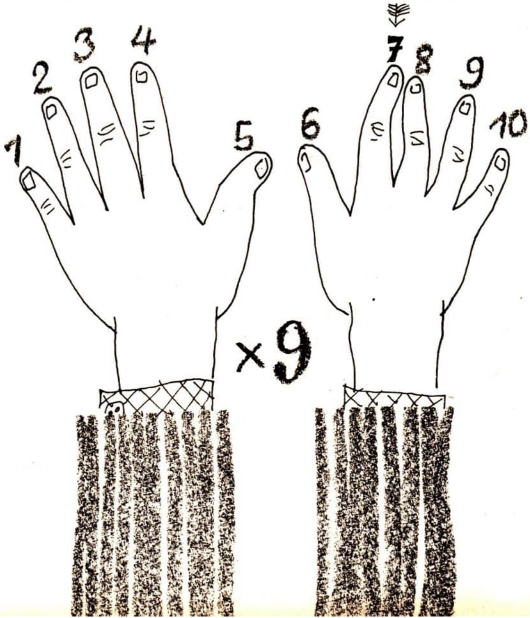
$$254523 : 111 = 2293; \quad 2293 - 7 = 2286;$$
$$2286 : 9 = 254.$$

Was ist die mathematische Grundlage dieses Kunststücks?

Eigentümlichkeiten der Neun

Einige Eigentümlichkeiten bei Rechenoperationen mit ganzen Zahlen sind mit der Zahl 9 verknüpft. Jede Eigenheit der Zahl 9 kann dazu dienen, sich verschiedene mathematische Aufgaben zur Unterhaltung auszudenken. Bekannt ist zum Beispiel das Merkmal der Teilbarkeit durch 9: Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn die Summe ihrer Ziffern (= Quersumme) durch 9 teilbar ist. Ein Beispiel: $354 \cdot 9 = 3186$; $3 + 1 + 8 + 6 = 18$ (18 ist durch 9 teilbar). Als sich ein kleiner Junge darüber beklagte, daß es ihm so schwer falle, sich das kleine Einmaleins mit der Neun einzuprägen, schlug ihm sein Vater ein einfaches Verfahren vor, mit den Fingern dem Gedächtnis nachzuhelfen.
Wir wollen es ausprobieren!
Legt beide Hände nebeneinander auf den Tisch und streckt die Finger aus. Jeder Finger von links nach rechts soll einer Zahl der natürlichen Zahlenfolge entsprechen: der erste der 1, der zweite der 2, der dritte der 3, der vierte der 4 usw. bis zum zehnten, der die Zahl 10 bedeuten soll. Jetzt soll eine beliebige Zahl der ersten Dekade mit 9 multipliziert werden. Dazu braucht ihr nur, ohne die Hände vom Tisch zu nehmen, denjenigen Finger hochzuheben, der den Multiplikanden darstellt. Dann stellt die Zahl der übrigen Finger, die links vom erhobenen Finger liegen, den Zehner des Produkts, und die Zahl der Finger rechts davon den Einer dar.
B e i s p i e l. Multipliziert 7 mit 9. Legt die Hände auf den Tisch und hebt den siebenten

133



Finger (Abb. 133). Links vom erhobenen Finger liegen 6 Finger und rechts 3. Das Resultat der Multiplikation von 7 mal 9 ist 63. Diese auf den ersten Blick erstaunlich mechanische Multiplikation wird sofort klar, wenn man sich erinnert, daß die Quersumme eines jeden Produkts mit der 9 als Faktor bis 90 gleich 9 ist und der Zehner des Produktes immer um 1 kleiner ist als diejenige Zahl, die wir mit 9 multipliziert haben. Durch das Hochheben des entsprechenden Fingers zeigen wir das an und . . . multiplizieren folglich.
Die menschliche Hand ist eine der ersten Rechenmaschinen!

Noch einige Besonderheiten der Zahl 9:

1. Durch 9 ist stets teilbar
   a) die Differenz zwischen einer beliebigen Zahl und ihrer Quersumme;
   b) die Differenz zwischen zwei Zahlen mit gleichen, aber verschieden angeordneten Ziffern;
   c) die Differenz zwischen zwei Zahlen mit gleichen Quersummen.

2. Wenn man aus beliebigen Ziffern Zahlen bildet, die sich nur durch die Folge dieser Ziffern unterscheiden, dann erhält man bei der Division einer jeden dieser Zahlen durch 9 ein und denselben Rest. Dieser Rest ist gleich dem aus der Division der Quersumme der genannten Zahlen durch 9.

3. Wenn wir den Rest aus der Division der Quersumme einer Zahl durch 9 mit Neunerrest bezeichnen, dann ist
   a) der Neunerrest aus einer $\frac{\text{Summe}}{\text{Differenz}}$ von Zahlen gleich dem Neunerrest aus der $\frac{\text{Summe}}{\text{Differenz}}$ der Neunerreste $\frac{\text{der Summanden}}{\text{von Minuend und Subtrahend}}$;
   b) der Neunerrest aus dem Produkt zweier Zahlen gleich dem Neunerrest aus dem Produkt der Neunerreste der gegebenen Zahlen.

Ihr prüft diese Eigentümlichkeiten leicht an Zahlenbeispielen nach und, wenn ihr mit der Algebra vertraut seid, dann könnt ihr sie beweisen[1].
Sucht als selbständige Übung eine analoge Gesetzmäßigkeit für den Neunerrest eines Quotienten.
Wenn ihr mit den Lösungen der Aufgaben dieses Kapitels klargekommen seid, könnt ihr viele von ihnen als mathematische Kunststücke verwerten.

[1] Beispiele:
Zu 1a) 953 − 17 = 936; 936 : 9 = 104
zu 1b) 8573 − 3785 = 4788; 4788 : 9 = 532
zu 1c) 8573 (Quersumme 23)
− 6962 (Quersumme 23) = 1611;
1611 : 9 = 179
zu 2) 817 : 9 = 90 Rest 7
178 : 9 = 19 Rest 7
187 : 9 = 20 Rest 7
Quersumme 16 : 9 = 1 Rest 7

zu 3a) 27805
+ 219
28024; Quersumme 16 : 9 = 1 Rest 7
27805; Quersumme 22 : 9 = 2 Rest 4
219; Quersumme 12 : 9 = 1 Rest 3
Rest 4 + Rest 3 = 7; 7 : 9 = 0 Rest 7
27805
− 219
27586; Quersumme 28 : 9 = 3 Rest 1
27805; Quersumme 22 : 9 = 2 Rest 4
219; Quersumme 12 : 9 = 1 Rest 3
Rest 4 − Rest 3 = 1; 1 : 9 = 0 Rest 1
zu 3b) 2073 · 56 = 116088;
Quersumme 24 : 9 = 2 Rest 6
2073; Quersumme 12 : 9 = 1 Rest 3
56; Quersumme 11 : 9 = 1 Rest 2
Rest 3 · Rest 2 = 6;
6 : 9 = 0 Rest 6

185. Welche Ziffer wurde weggestrichen?

Aufgabe 1. Euer Freund soll, ohne es euch sehen zu lassen, eine Zahl aus drei oder mehr Ziffern, aber ohne Verwendung der Null, aufschreiben, sie durch 9 teilen und euch den Rest aus dieser Division ansagen. Jetzt fordert ihr ihn auf, eine beliebige Ziffer in der von ihm verwendeten Zahl wegzustreichen. Die Zahl, die danach entsteht, soll er durch 9 teilen und euch wieder den Rest dieser Division nennen. Ihr könnt sofort sagen, welche Ziffer weggestrichen wurde, wenn ihr folgende Regeln beachtet:

a) Wenn der zweite Rest kleiner ist als der erste, dann erhaltet ihr die weggestrichene Ziffer, wenn ihr den zweiten Rest vom ersten abzieht.

b) Wenn der zweite Rest größer ist als der erste, erhaltet ihr die weggestrichene Ziffer, wenn ihr den zweiten Rest von dem um 9 vermehrten ersten abzieht.

c) Wenn die Reste gleich sind, dann ist die ausgestrichene Ziffer 9.

Warum ist das so?

Anmerkung. In denjenigen Fällen, in denen die Division keinen Rest ergibt, muß der Rest gleich 0 gesetzt werden.

Aufgabe 2. Jetzt gebt eurem Freunde auf, sich zwei Zahlen mit gleichen, aber in verschiedener Reihenfolge angeordneten Ziffern auszudenken und die kleinere von der größeren abzuziehen. Er darf euch natürlich weder die ausgedachten Zahlen noch die Differenz sagen, vielmehr soll er aus der Differenz eine Ziffer (nur keine 0) wegstreichen und euch die Quersumme der übrigen Ziffern ansagen. Um die gestrichene Ziffer festzustellen, genügt es, wenn ihr die angesagte Zahl bis zum nächsten Vielfachen von 9 ergänzt.

Zum Beispiel: $72105 - 25071 = 47034$.

Wir streichen die Ziffer 3 aus. Die Quersumme ist $4 + 7 + 4 = 15$. Die Ergänzung von 15 bis zur nächsten durch 9 teilbaren Zahl, das heißt bis 18, ist 3. Das ist die gestrichene Ziffer.

Warum ist das so?

Anmerkung. Die Aufgabe kann man durch Verwertung der obengenannten Eigenschaften der 9 verschiedenartig umgestalten:

Man kann zum Beispiel die Aufgabe stellen, von einer Zahl ihre Quersumme abzuziehen und eine Ziffer der Differenz (außer 0) wegzustreichen, und an Hand der Quersumme der übrigen Ziffern der Differenz die weggestrichene Ziffer auf die gleiche Weise erraten.

Aufgabe 3. Wir schreiben eine beliebige Zahl auf, zum Beispiel 7146. Eine Ziffer streichen wir weg, zum Beispiel die 4. Von der übriggebliebenen Zahl ziehen wir die Quersumme der anfangs niedergeschriebenen Zahl (18) ab. In unserem Beispiel erhalten wir: $716 - 18 = 698$. Das Resultat wird angesagt.

Wie kann man, wenn man das Resultat der Subtraktion weiß, die gestrichene Ziffer ermitteln?

Aufgabe 4. Schreibt zwei oder mehr Zahlen mit der gleichen Anzahl von Ziffern auf. Ich schreibe noch ebenso viele Zahlen hinzu, drehe mich um und bitte euch, irgendeine Ziffer, außer einer 0, auszustreichen und die Summe der Zahlen zu errechnen, wobei für die weggestrichene Ziffer 0 zu setzen ist. Wenn ihr mir jetzt die Summe oder gar nur ihre Quersumme ansagt, dann gebe ich euch sofort an, welche Ziffer gestrichen wurde.

Zum Beispiel:

605
218 — Diese Zahlen habt ihr niedergeschrieben

~~7~~81
394 — Diese Zahlen habe ich dazugeschrieben

1298

Die Quersumme der Summe ist

$$1 + 2 + 9 + 8 = 20.$$

Gestrichen wurde eine 7. Welche Zahlen muß ich hinzuschreiben, und wie stelle ich die gestrichene Ziffer fest?

Aufgabe 5. In der vorhergehenden Aufgabe wurden ebenso viele Zahlen hinzugeschrieben, wie bereits dastanden. Aber es braucht unter denselben Bedingungen auch nur eine Zahl hinzugeschrieben zu werden. Zum Beispiel:

$$\left.\begin{array}{r}3521\\4086\\7219\end{array}\right\}$$ Diese Zahlen habt ihr niedergeschrieben

4272 Diese Zahl habe ich dazugeschrieben

19018

Die Quersumme der Summe ist

$$1 + 9 + 1 + 8 = 19.$$

Gestrichen wurde die 8. Welche Zahl muß ich hinzuschreiben, und wie stelle ich die gestrichene Ziffer fest?

Aufgabe 6. Denselben, Gedanken kann man in anderer Formulierung ausdrücken. Gebt eurem Freunde auf, nebeneinander einige Spalten einstellige Zahlen niederzuschreiben. Dann schreibt ihr rechts oder links davon – nach Wunsch des Mitspielers – noch eine Spalte Zahlen dazu, so daß jede eurer Zahlen die Quersumme der Zeile zu einem Vielfachen von 9 ergänzt. Jetzt könnt ihr getrost eurem Mitspieler aufgeben, eine beliebige Ziffer zu streichen und durch die 0 zu ersetzen und die Zahlen nach der Regel für die Addition mehrstelliger Zahlen zu addieren. Nach der euch angegebenen Quersumme bestimmt ihr unter Verwendung der euch nunmehr bekannten Regel mit Leichtigkeit, welche Ziffer gestrichen wurde. Zum Beispiel:

Diese Zahlen schrieb ich dazu	Vom Mitspieler niedergeschriebene Zahlen

63216
44802
47~~4~~21
51921
95238
302198

Die Quersumme der Summe ohne 9 ist:

$$3 + 2 + 1 + 8 = 14; \; 18 - 14 = 4.$$

Gestrichen wurde eine 4.

Es ist interessant, daß man alle hinzugeschriebenen Zahlen durch eine einstellige Zahl ersetzen kann, die an beliebiger Stelle hinzugeschrieben wird. Erratet, wie!

186. Eine geheimnisvolle Eigenschaft

Die Zahl 1313 läßt sich leicht merken. Gebt euren Kameraden auf, die Zahl 1313 niederzuschreiben und von ihr eine von euch genannte Zahl zu subtrahieren. Für die Subtraktion könnt ihr beliebige Zahlen vorschlagen: dem einen Teilnehmer die eine, dem anderen eine andere. Dann soll jeder Teilnehmer zu der von ihm bei der Subtraktion erhaltenen Zahl rechts oder links die Zahl hinzuschreiben (wohlgemerkt: hinzuschreiben, nicht addieren), die er subtrahiert hat, aber vermehrt um 100. In der neu gebildeten Zahl soll er eine beliebige Ziffer streichen, nur keine 0, und euch die übrigen Ziffern ansagen. An Hand dieser Ziffern ermittelt ihr mit Leichtigkeit die Ziffer, die von den Teilnehmern weggestrichen worden ist.

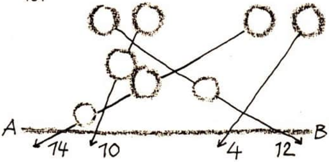
Welche Eigentümlichkeit der Zahl 1313, die mit der Eigenschaft der 9 zusammenhängt, verhilft zur Feststellung der weggestrichenen Ziffer, und wie kann man das berechnen?

187. Noch einige unterhaltsame Verfahren zur Ermittlung einer fehlenden Zahl

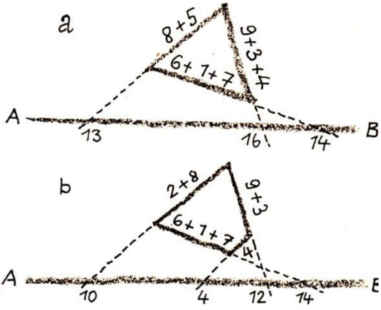
Aufgabe 1. Aus den neun Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 suche ich acht beliebige heraus und verteile sie willkürlich auf einem Blatt Papier. Um euch nicht zu zeigen, welche Zahlen ich ausgewählt habe, sind sie in Abb. 134 durch Kreise ersetzt. An einer beliebigen Stelle ziehe ich darunter die Gerade AB und nenne sie „Additionsstrich". Die Zahlen verbinde ich willkürlich durch einige Linien, gerade oder krumme, das ist gleichgültig; aber jede Zahl berühre ich nur einmal. Jede Linie verlängere ich bis zum

Additionsstrich. Unter den Additionsstrich schreibe ich die Summen der Zahlen, die entlang der Linien liegen. Euch zeige ich nur die Zahlen, die unter dem Additionsstrich stehen, oder ich nenne euch ihre Quersumme.
Die Zahlen, die in Abb. 134 unter dem Additionsstrich stehen, ergeben folgende Quer-

134



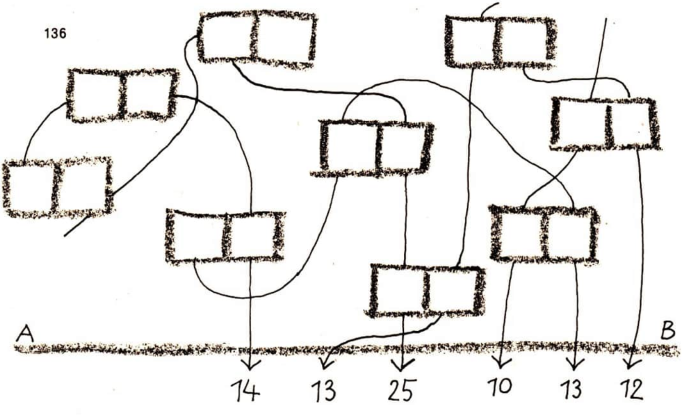
summe: $1 + 4 + 1 + 4 + 1 + 2 = 13$. Stellt fest, obwohl ihr nur diese Summe kennt, welche Zahl in der Anzahl der ausgesuchten nicht enthalten ist!
Anmerkung. Anstatt die ausgewählten Zahlen auf dem Papier zu verteilen, kann man sie auch beliebig auf die Seiten eines Dreiecks (Abb. 135a) oder Vierecks (Abb. 135b) oder eines anderen Vielecks verteilen



135

und unter den Additionsstrich nur die Summen der Zahlen schreiben, die an jede Seite der Figur gesetzt sind.
Aufgabe 2. Jetzt verteile ich auf einem Blatt Papier die Zahlen 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 und 99. Wiederum ziehe ich den Additionsstrich und verbinde alle Ziffern außer einer so durch einige Linien, daß jede Ziffer nur zu einer Linie gehört. Damit ich

136



euch nicht zeige, welche Ziffer ich ausgelassen habe, ist in Abb. 136 jede Zahl durch ein Rechteck mit zwei Kästchen ersetzt, die den Ziffern dieser Zahl entsprechen. Unter den Additionsstrich schreibe ich die Quersumme der Zahlen, die durch die Ziffern ausgedrückt werden, die an jeder Linie stehen. Ich bitte euch wiederum, nach diesen Summen die Ziffer zu ermitteln, die von keiner Linie berührt wird. Wer aus der vorhergehenden Aufgabe klug geworden ist, für den ist das nicht schwer.

Aufgabe 3. Schreibt alle Zahlen von 1 bis 8 auf und nehmt eine beliebige Zahl heraus. Die übrigen sieben Zahlen ordnet willkürlich in zwei oder mehr Spalten ein. Addiert alle Zahlen, indem ihr sie wie mehrstellige behandelt, und sagt mir die Summe oder die Quersumme der Summe an. Ich stelle sofort die herausgenommene Zahl fest. Wie mache ich das?

188. Nach einer Ziffer des Resultats sollen die übrigen drei ermittelt werden

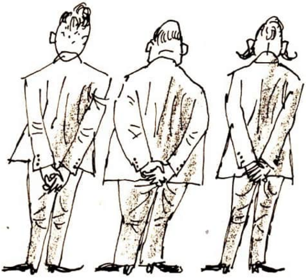
Irgendeine zweistellige Zahl mit gleichen Ziffern war mit 99 multipliziert worden. Es läßt sich leicht feststellen, daß das Produkt eine vierstellige Zahl sein muß. Wie kann man, wenn man nur die dritte Ziffer des Resultats kennt, das Resultat rekonstruieren? Angenommen, die erhalten gebliebene Ziffer sei eine 5. Wie lautet das ganze Resultat?

189. Die Differenz soll erraten werden

Schreibt eine beliebige dreistellige Zahl mit ungleichen Ziffern, ohne sie mir zu sagen, nieder (angenommen 621). Bildet aus denselben Ziffern eine neue Zahl, wobei die Ziffern in umgekehrter Reihenfolge angeordnet sind (für das gegebene Beispiel ist das 126). Berechnet die Differenz zwischen beiden Zahlen, indem ihr die kleinere von der größeren abzieht ($621 - 126 = 495$). Sagt mir die letzte Ziffer der Differenz (5), und ich nenne euch das gesamte Resultat. Wie macht man das?

190. Das Lebensalter soll bestimmt werden

Wenn ihr die Ziffern des Lebensalters von A vertauscht, erhaltet ihr das Alter von B. Die Differenz der Lebensalter von A und B ergibt das doppelte Lebensalter von C. B sei zehnmal so alt wie C. Bestimmt das Alter eines jeden!



191. Worin liegt das Geheimnis?

Einer aus unserem Freundeskreis erklärte, er könne, ohne lange zu überlegen, eine beliebige Anzahl von Zahlen mit einer ungeraden Anzahl von Ziffern niederschreiben, von denen jede folgende merkwürdige Eigenschaft besäße:
Wenn man die Quersumme der Zahl bilde und von der Quersumme wieder die Quersumme und so fort, bis die Quersumme nur noch durch eine Ziffer ausgedrückt wird, dann sei diese Ziffer unausbleiblich dieselbe wie die mittelste Ziffer der Ausgangszahl.
Sofort überhäufte er uns mit solchen Zahlen. Darunter waren dreistellige, wie zum

Beispiel 435, fünfstellige, wie 46853, und selbst 13stellige, wie zum Beispiel 1207941800554. Er schrieb Zahlen nieder mit Ziffern, wie wir sie verlangten. Und jedes Mal bewahrheitete sich die von ihm angekündigte Eigenschaft der Ziffern.

Prüfen wir das einmal an den Zahlen nach, die als Beispiele angeführt sind. Wir haben:

$4 + 3 + 5 = 12$; $1 + 2 = 3$;

$4 + 6 + 8 + 5 + 3 = 26$; $2 + 6 = 8$;

$1 + 2 + 7 + 9 + 4 + 1 + 8 + 5 + 5 + 4 = 46$

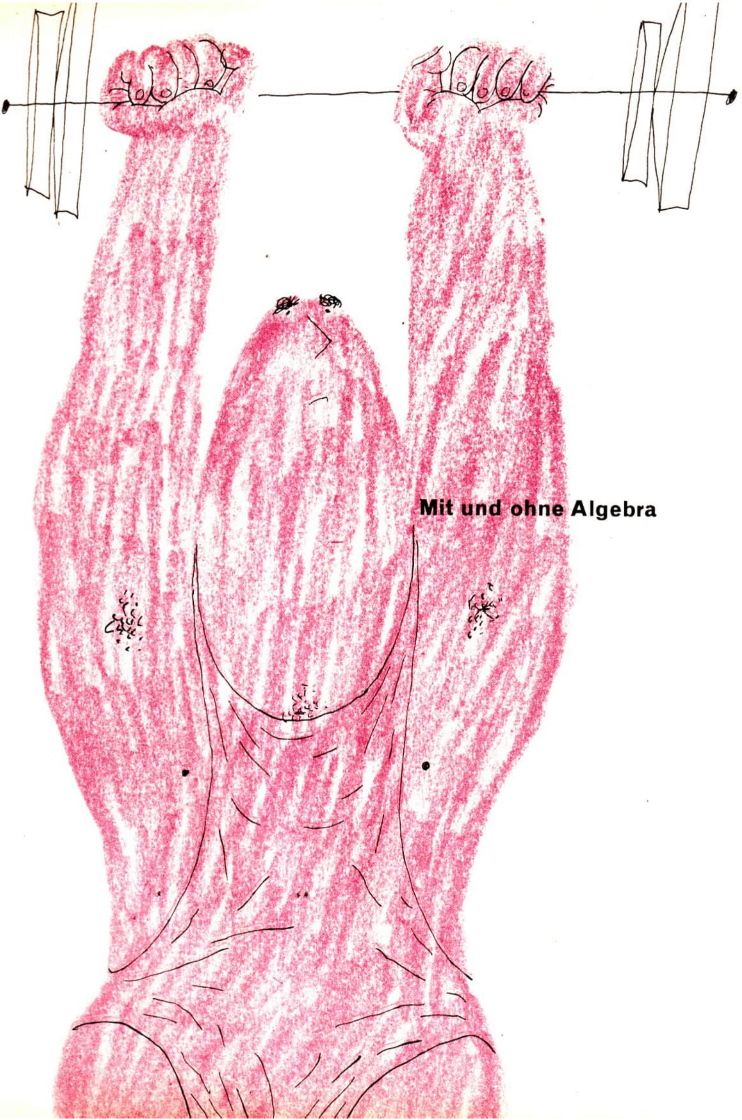
$4 + 6 = 10$; $1 + 0 = 1$.

Tatsächlich ergibt die letzte Quersumme jedesmal die mittelste Ziffer der Zahl.

Die originelle „Begabung" unseres Freundes machte auf uns großen Eindruck. Er konnte doch wirklich nicht eine solche Masse von Zahlen auswendig gelernt haben! Wir versuchten selbst aufs Geratewohl, analoge Zahlen aufzuschreiben, aber unsere Zahlen besaßen aus irgendeinem Grunde fast nie die genannte Eigenschaft.

Worin lag das Geheimnis der Zahlen unseres Freundes?

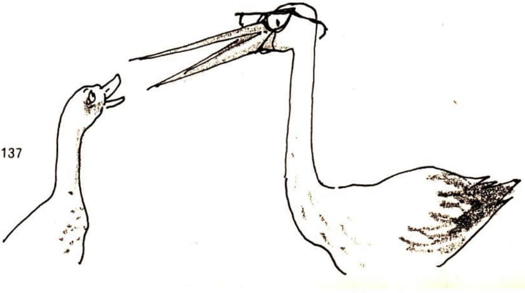
Mit und ohne Algebra



Mit der Entwicklung der Mathematik als Wissenschaft vervollkommnete sich auch die Fertigkeit, Aufgaben zu lösen. Rein arithmetische Lösungsverfahren traten mit der Entwicklung der Buchstabensymbole allmählich die Palme der Meisterschaft an die Algebra mit ihrem Apparat von Gleichungen ab. Die Bezeichnung unbekannter Zahlen mit Buchstaben und die nachfolgende Aufstellung von Beziehungen zwischen unbekannten und bekannten Zahlen, das heißt die Aufstellung einer Gleichung, wurde eine großartige, allgemeinverständliche und einheitliche Methode zur Lösung verschiedenartiger Aufgaben.
Wenn wir eine Aufgabe lösen, ziehen wir immer Schlußfolgerungen; aber wir sind dabei auch bestrebt, den kürzesten Gedankengang zu wählen. In einem Falle ist es günstiger und einfacher, die Überlegungen „von der unbekannten zur bekannten Größe" zu führen und sie mit der Aufstellung einer oder einiger Gleichungen abzuschließen (der algebraische Weg). Bei diesem Wege muß man zur zweckmäßigsten Wahl der Unbekannten, für die man die Gleichung aufstellt, die Eigenheiten der Aufgabe berücksichtigen. Um später erfolgreich schwierige Aufgaben lösen zu können, ist die Beherrschung des algebraischen Weges unerläßlich. In anderen Fällen ist es besser, eine Aufgabe in einzelnen Etappen „von der bekannten zur unbekannten Größe" zu lösen, indem man jede Etappe konkret festlegt (der arithmetische Weg). Beide Wege der Gedankenführung ergänzen sich gewissermaßen; auf jedem kann man geistreiche und elegante Lösungen entwickeln.
Bekannt ist im Familienkreis bereits seit mehr als einem halben Jahrhundert folgende Aufgabe, die bisweilen auch in den Schulen gestellt wird:

Wie die Gans und der Storch eine Aufgabe lösten

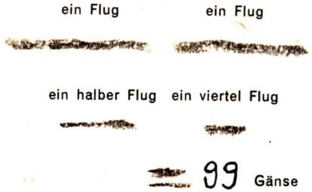
Eine einzelne Wildgans begegnete einem Flug Wildgänse. Sie rief: „Guten Tag, ihr hundert Gänse!" Die alte Leitgans antwortete ihr: „Nein, wir sind nicht hundert Gänse! Schau an, wenn wir soviel wären, wie wir sind, und dann noch einmal soviel und dann noch einhalbmal soviel und noch ein viertelmal soviel und dann du dazu, dann wären wir hundert Gänse, aber so sind wir ... na, rechne einmal selbst, wieviel wir sind."
Die Wildgans flog weiter und dachte nach. Wieviel Artgenossen war sie denn nun begegnet? Sie überlegte und überlegte und konnte auf keine Weise die Aufgabe lösen, von welcher Seite sie auch immer anfing. Da sah sie am Rande eines Teiches einen Storch, der umherstelzte und Frösche suchte. Der Storch ist ein würdiger Vogel und genießt unter den Vögeln den Ruf eines Mathematikers. Stundenlang steht er manchmal regungslos auf einem Bein, und jeder denkt: Jetzt löst er eine Aufgabe. Die Wildgans freute sich, flog hinab auf den Teich, schwamm zum Storch heran und er-



137

zählte ihm, wie sie einem Flug Artgenossen begegnet sei und welches Rätsel ihr die Leitgans aufgegeben habe. Sie könne es aber nicht lösen.
„Hm! . . .“, räusperte sich der Storch. „Wir wollen versuchen, es zu lösen. Sei aufmerksam und gib dir Mühe, daß du alles verstehst! Hörst du?“
„Ich höre und werde mir Mühe geben!“ antwortete die Wildgans.
„Also! Wie sagte sie zu dir? Wenn man zu dem Flug Wildgänse noch ebensoviel hinzufügt, dann noch ein halbmal soviel, dann ein viertelmal soviel und dann noch dich, dann wären es hundert? Nicht wahr?“
„Ja!“ antwortete die Gans.
„Jetzt schau her“, sagte der Storch, „was ich dir hier auf den Ufersand zeichne.“
Der Storch krümmte seinen Hals und zog mit dem Schnabel einen Strich, daneben noch einen gleich großen Strich, dann einen halb so großen, danach einen viertel so großen Strich und noch ein kleines Strichelchen, fast einen Punkt. Das ergab folgendes Bild:

Die Wildgans schwamm zum Ufer heran, stieg aus dem Wasser, watschelte auf den Sand, schaute auf die Zeichnung, verstand aber nichts.
„Verstehst du das?“ fragte der Storch.
„Nein, noch nicht!“ antwortete die Gans.
„Schau einmal her: Wie sagte sie zu dir, ein Flug und noch ein Flug und ein halber Flug und ein viertel Flug und du? So habe ich es auch gezeichnet: ein Strich und noch ein Strich, dann ein halber Strich und ein viertel Strich und noch ein kleines Strichelchen, und das bist du. Hast du verstanden?“
„Das habe ich verstanden!“ sagte die Gans erfreut.
„Wenn zu dem Flug, der dir begegnete, noch ein gleich großer hinzukommt, und dann ein halber und dann ein viertel und dann du, wieviel erhältst du dann?“
„Hundert Gänse!“
„Und wieviel sind es also ohne dich?“
„99.“
„Gut! Lassen wir in unserer Zeichnung den Punkt, der dich darstellt, weg, und merken wir uns, daß 99 Gänse übrigbleiben.“
Der Storch schrieb mit seinem Schnabel in den Sand:



„Jetzt überlege einmal“, fuhr der Storch fort, „wieviel Viertel hat ein halber Flug?“
Die Gans überlegte, blickte auf die Striche und sagte:
„Die Linie, die den halben Flug bedeutet, ist doppelt so lang wie die Linie für ein Viertel des Flugs, das heißt, die Hälfte besteht aus zwei Vierteln.“

„Prachtkerl!" lobte der Storch die Gans.
„Nun, und wieviel Viertel hat der ganze Flug?"
„Natürlich vier!" antwortete die Gans.
„So ist es! Wenn du jetzt einen Flug und noch einen Flug und einen halben Flug und einen viertel Flug in Viertel umrechnest, wieviel Viertel sind das dann im ganzen?"
Die Gans überlegte und antwortete:
„Ein Flug, das sind soviel wie vier Viertel, und noch ein Flug sind noch einmal vier Viertel, zusammen also acht Viertel; und ein halber Flug enthält zwei Viertel, sind zusammen zehn Viertel; und noch ein Viertel, sind zusammen elf Viertel, und das macht zusammen 99 Gänse."
„So ist es!" bestätigte wiederum der Storch. „Jetzt sage an, was du am Ende herausbekommen hast."
„Ich habe herausbekommen", antwortete die Gans, „daß in elf Vierteln des Fluges 99 Gänse sein müßten."
„Und wieviel Gänse gehören folglich zu einem Viertel des Fluges?"
Die Gans teilte 99 durch 11 und antwortete: „In einem Viertel des Fluges sind 9 Gänse."
„Nun, und wieviel sind in dem ganzen Flug?"
„Im ganzen sind vier Viertel . . . ich begegnete 36 Gänsen!" rief freudig die Gans aus.
„Ja, so ist es!" sprach feierlich der Storch.
„Selbst kommst du wohl nicht darauf? Du Gans, du!"
Diese Aufgabe läßt sich in der Sprache der Algebra sehr kurz aufschreiben und lösen. Nehmen wir ein Viertel des Flugs mit x an. Dann beträgt der ganze Flug $4x$ und der halbe Flug $2x$. Danach haben wir: $4x + 4x + 2x + x = 99$ oder $11x = 99$, woraus folgt: $x = 99 : 11 = 9$, und $4x = 4 \cdot 9 = 36$. Der Flug bestand aus 36 Gänsen.
Bei der Lösung der folgenden Aufgaben verwendet nach Belieben die euch bekannten Verfahren: arithmetische, algebraische, grafische usw. Die Antworten am Ende des Buches ergänzt mit euren Überlegungen und Lösungen!

192. Gegenseitige Hilfe

Als noch nicht alle LPGs ausreichend mit landwirtschaftlichen Maschinen ausgestattet waren, mußten sie sich untereinander in Zeiten großen Arbeitsanfalls aushelfen. So übergab einmal eine von drei benachbarten LPGs der zweiten und dritten so viele verschiedene landwirtschaftliche Maschinen, wie in jeder von ihnen vorhanden waren.
Nach einiger Zeit stellte ihrerseits die zweite LPG der ersten und dritten so viele Maschinen zur Verfügung, wie in diesem Augenblick in jeder von ihnen vorhanden waren.
Zum Abschluß der Bestellungsarbeiten übergab auch die dritte LPG der ersten und zweiten so viele Maschinen, wie in diesem Zeitpunkt sich in jeder von ihnen befanden.
Danach befanden sich in jeder der drei LPGs 24 Maschinen.
Wieviel landwirtschaftliche Maschinen waren anfangs in jeder LPG vorhanden?

193. Der Faulenzer und der Teufel

Unter den Menschen, die bewußt und freudig ihre Arbeit tun, tauchte einmal der Faulenzer auf. Er liebt die Faulheit und geht der Arbeit aus dem Wege, er hat das Geld gern und ist sehr gierig danach. Er will aber gar nicht begreifen, daß man nur Geld hat, wenn man es durch redliche Arbeit verdient. So läuft der Faulenzer ohne Beschäftigung umher und seufzt:
„Ach, mein unglückliches Los! Niemand will sich mit mir abgeben. Da sagen die Leute: ‚Einen Faulenzer brauchen wir nicht. Selbst tust du nichts, und uns störst du nur! Scher dich zum Teufel!' Ja, welcher Teufel gibt mir denn einen guten Rat, wie man reich wird?"
Kaum hatte das der Faulenzer gesagt, da stand der Teufel vor ihm.
„Was denn?" sprach er. „Wenn du es wünschst, helfe ich dir. Die Arbeit ist leicht,

und du wirst reich dabei. Siehst du dort die Brücke über den Fluß?"
„Ich sehe sie", antwortete der Faulenzer ein bißchen verschüchtert.
„Nun, so geh über die Brücke zum anderen Ufer, und du wirst doppelt soviel Geld haben, wie du jetzt besitzt. Wenn du noch einmal die Brücke überschreitest, wirst du wieder doppelt soviel haben, wie du hattest. Und so ist es bei jedem Mal: Wie du nur über die Brücke gehst, wirst du genau doppelt soviel Geld haben wie vorher."
„Stimmt das wirklich?" fragte der Faulenzer erfreut.
„Ehrenwort!" beteuerte der Teufel. „Nur halt, noch eine Abmachung! Dafür, daß ich dir soviel Glück bringe, gibst du mir jedesmal, wenn du über die Brücke gegangen bist, 24 Pfennig für den guten Rat."
„Nun, es sei", willigte der Faulenzer ein. „Wenn sich erst einmal das Geld verdoppelt, warum soll ich dir dann nicht jedesmal 24 Pfennig geben? Los gehts, meinetwegen!"
Der Faulenzer ging einmal über die Brücke, zählte das Geld und . . . was für ein Wunder! Tatsächlich hatte es sich verdoppelt. Er warf dem Teufel 24 Pfennig zu und ging zum zweiten Mal über die Brücke. Wieder war das Geld doppelt soviel geworden, als er vorher hatte. Er zählte 24 Pfennig ab, gab sie dem Teufel und ging zum dritten Mal über die Brücke. Das Geld hatte sich wieder verdoppelt, aber es waren gerade nur noch 24 Pfennig, die nach der Abmachung voll und ganz der Teufel bekommen mußte. Der Teufel lachte laut und verschwand.
Der Faulenzer blieb ohne einen Pfennig zurück. Da sieht man, zu einem fremden Rat gehört auch eigener Verstand!
Wieviel Geld hatte der Faulenzer am Anfang in der Tasche?

194. Ein kluges Kerlchen

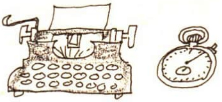
Drei Brüder hatten 24 Äpfel bekommen, wobei jedem soviel Äpfel zugeteilt worden waren, als er vor drei Jahren Lebensjahre gezählt hatte. Der Jüngste, ein kluges Kerlchen, schlug den Brüdern folgenden Tausch vor:
„Ich", sagte er, „behalte nur die Hälfte der Äpfel, die ich bekommen habe, die übrigen verteile ich an euch zu gleichen Teilen. Danach soll unser mittelster Bruder auch die Hälfte behalten und die übrigen Äpfel mir und dem ältesten Bruder je zur Hälfte geben. Dann soll auch der älteste Bruder die Hälfte aller Äpfel, die er hat, behalten und die übrigen zwischen mir und dem mittelsten Bruder je zur Hälfte verteilen." Ohne daß die Brüder bei diesem Vorschlag eine Hinterlist vermuteten, willigten sie darein, dem Wunsche des jüngsten nachzukommen. Am Ende . . . hatte jeder die gleiche Menge Äpfel.
Wie alt waren das Kerlchen und seine beiden Brüder?

195. Die Jäger

Drei Jäger gingen auf die Jagd. Da passierte ihnen ein Mißgeschick. Als sie einen Bach durchwateten, ließen sie ihre Patronentaschen naß werden. Ein Teil der Patronen wurde dadurch unbrauchbar. Sie verteilten daher die noch brauchbaren Patronen unter sich zu gleichen Teilen. Nachdem jeder Jäger vier Schuß abgegeben hatte, besaßen sie zusammen noch soviel Patronen, wie nach der Verteilung jeder einzelne gehabt hatte.
Wieviel brauchbare Patronen verteilten sie untereinander?

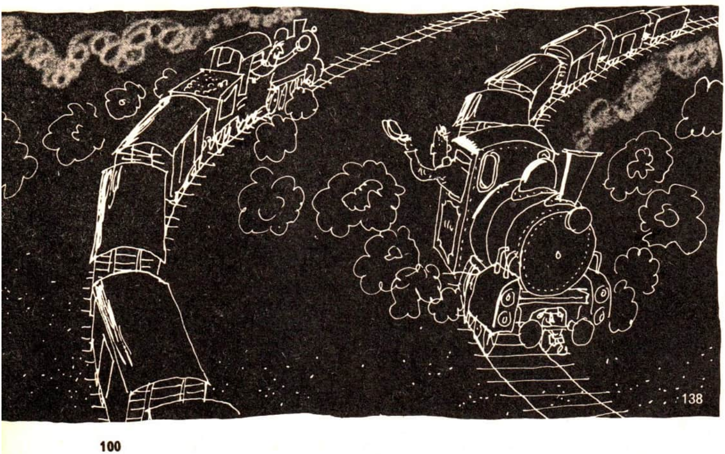
196. Die Begegnung der beiden Eisenbahnzüge

Zwei Güterzüge, jeder 250 m lang, begegnen einander mit der gleichen Geschwindigkeit von 45 km/h. Wieviel Sekunden verstreichen von dem Augenblick, in dem die Lokführer einander begegnen, bis zu dem Augenblick, in dem die Zugführer in den letzten Waggons einander begegnen?

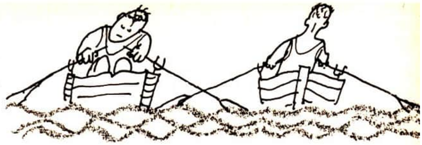


197. Frau A schreibt ein Manuskript

Frau A hatte ein Manuskript mit der Schreibmaschine abzuschreiben.
„Ich werde im Durchschnitt 20 Seiten am Tag schreiben", meinte Frau A.
Aber die erste Hälfte des Manuskripts schrieb sie langsam, sie schaffte nur 10 Seiten täglich. Von der zweiten Hälfte jedoch schrieb sie 30 Seiten am Tag.
„Das ergibt auch einen Durchschnitt von 20 Seiten am Tag", folgerte Frau A.
„Du rechnest falsch", meinte ihre Kollegin B.
„Wieso falsch? $10 + 30 = 40$; $40 : 2 = 20$. In der ersten Hälfte schrieb ich 10 Seiten am Tage weniger; aber in der zweiten schrieb ich diese 10 Seiten über die Norm."
„Trotzdem", beharrte Frau B, „hast du im Durchschnitt weniger als 20 Seiten am Tag



geschrieben. Du mußt dir das noch einmal überlegen."
Ist der Gedankengang der Frau A richtig? Was ergibt eure Berechnung?



198. Die Geschichte mit den Pilzen

Fünf Junge Pioniere, das Mädchen A und die Jungen B, C, D und E, die in einem Pionierlager ihre Ferien verbrachten, gingen in die Pilze. Ernstlich mit dem Pilzesuchen befaßte sich nur das Mädchen A. Die Jungen jedoch tollten die meiste Zeit im Grase herum und erzählten einander erfundene Geschichten. Als sie sich auf den Heimweg machten, waren die Körbe der Jungen leer, während das Mädchen A in seinem Korb 45 Pilze zählte.
„Es wird euch unangenehm sein, ihr Jungens, wenn ihr mit leeren Körben in das Lager zurückkommt", meinte das Mädchen A und verteilte hilfsbereit alle seine Pilze auf die Körbe der Jungen. In seinem Korb blieb nicht ein einziger Pilz. Auf dem Heimweg stießen B und D auf einen Pilzfleck, B fand zwei Pilze und D verdoppelte die Anzahl seiner Pilze. C und E trieben auf dem ganzen Heimweg Unfug und verloren nach und nach einen Teil ihrer Pilze. C verlor zwei Stück, und E verlor die Hälfte seiner Pilze, die er von A erhalten hatte.
Höchst erstaunlich war es, daß sich, als sie sich daran machten, die mitgebrachten Pilze zu zählen, bei allen Jungen die gleiche Anzahl Pilze vorfand. Als die Pilzsammler ihren Freunden die ganze Geschichte erzählt hatten, interessierten sich die Mathematiker unter ihnen für folgende Frage: Kann man wohl an Hand der Erzählung berechnen, wieviel Pilze jeder Junge von A erhalten hatte? Was meint ihr?

139

199. Wer kam eher zurück?

Zwei Sportler begannen beim Training gleichzeitig ein Wettrudern, der eine auf einem Fluß, die Strömung hinab und hinauf, der andere über dieselbe Entfernung auf einem See mit stehendem Wasser, der sich neben dem Fluß erstreckte. Wir nehmen an, daß der Kraftaufwand beider Ruderer die ganze Zeit hindurch vollkommen gleich blieb. Wer von ihnen kam eher zurück? Die Zeit, die für die Wendung gebraucht wurde, soll bei der Berechnung nicht berücksichtigt werden.
Anmerkung. Vor ungefähr 40 Jahren erhob sich erstmalig in der Luftfahrt eine analoge Frage. Es wurde ein Fliegerwettkampf ausgetragen, nach dessen Bedingungen die Flieger ein großes rechteckiges Feld umfliegen mußten; an den Ecken standen 4 Masten, die man bei den Wendungen umfliegen mußte. Es erhob sich die Frage, ob die Flugbedingungen bei Wind wie bei Windstille gleich wären.

200. Der Schwimmer und der Hut

Es wird angenommen, daß jemand aus einem Boot springt, das mit der Strömung treibt, einige Zeit gegen den Strom schwimmt, dann wendet und das Boot wieder einholt.
Wozu braucht er mehr Zeit: für die Strecke gegen die Strömung bis zum Wendepunkt oder für das Einholen des Bootes von der Wende an? Oder sind vielleicht beide Zeitspannen gleich groß?
Es wird dabei angenommen, daß der Schwimmer während der ganzen Zeit die gleiche Muskelkraft aufwendet.
Welche Antwort erhaltet ihr auf den ersten Anschein; wird sie durch die folgende Überlegung bestätigt?
Der Schwimmer braucht, um das Boot mit der Strömung einzuholen, ebenso lange Zeit, wie er anfangs gegen den Strom geschwommen ist.
Die Strömung trägt mit gleicher Geschwindigkeit das Boot wie den Schwimmer flußab,

das heißt, die Strömung beeinflußt an und für sich nicht den Abstand zwischen Boot und Schwimmer, es ist vielmehr, als ob gar keine Strömung da wäre. Hieraus folgt, daß der Schwimmer selbst beim Vorhandensein einer Strömung an das Boot in ebenso langer Zeit wieder herankommt, wie er sich von ihm entfernt hat.

Jetzt stellt euch vor, daß ein Sportler von einer Brücke in einen Fluß hinabspringt und gegen die Strömung zu schwimmen beginnt. Gleichzeitig fällt vom Kopf eines Zuschauers, der auf der Brücke steht, der Hut ins Wasser und schwimmt mit der Strömung weg. Nach 10 Minuten wendet der Schwimmer und, wie er wieder zur Brücke zurückkommt, bittet man ihn, weiterzuschwimmen und den Hut zu holen. Der Schwimmer holt den Hut gerade unter einer zweiten Brücke ein, die sich in 1000 m Entfernung von der ersten Brücke befindet. Die Geschwindigkeit des Schwimmers ist nicht bekannt. Es wird aber vorausgesetzt, daß er, solange er schwimmt, seinen Kraftaufwand nicht ändert. Obwohl ihr nur über diese Angaben verfügt, könnt ihr die Geschwindigkeit der Strömung ermitteln.
Wenn ihr eure Lösung mit der im Lösungsteil dieses Buches vergleicht, dann beachtet besonders das dort angeführte zweite Lösungsverfahren.

201. Prüft euern Scharfsinn!

Zwei Gleitboote fahren einen großen See entlang, hin und her, ohne am Ufer anzuhalten. Die Geschwindigkeit eines jeden Bootes ist während der ganzen Fahrt gleichbleibend. Die Boote verlassen gleichzeitig die gegenüberliegenden Ufer: Das Boot M fährt vom Ufer A aus und das Boot N vom Ufer B. Das erste Mal begegnen sie sich 500 m vom Ufer A entfernt. Nachdem sie am gegenüberliegenden Ufer gewendet haben, begegnen sie sich das zweite Mal 300 m vom Ufer B entfernt.
Stellt nach diesen Angaben die Länge des Sees fest und das Verhältnis der Geschwindigkeiten der Gleitboote. Scharfsinn hilft euch, diese Aufgabe „im Kopf" ohne komplizierte Berechnungen zu lösen.

202. Die Verlegenheit konnte rechtzeitig behoben werden

Junge Pioniere halfen beim Bepflanzen einer Obstplantage. Die Gruppe veranstaltete dabei einen Wettbewerb.
Alle waren fleißig bei der Arbeit. Da wären sie beinahe in Verlegenheit geraten. A erklärte, daß seine Brigade die Hälfte aller Obstbäume pflanzen werde, die von sämtlichen übrigen Pionieren gepflanzt würden. B versprach im Namen seiner, der größten Brigade, soviel Bäume zu pflanzen, wie alle übrigen Pioniere einschließlich der Brigade A pflanzen würden.
Die Pioniere begannen ihre Arbeit nicht alle gleichzeitig, sondern in einer gewissen Reihenfolge. Die Brigaden A und B wurden bestimmt, gemeinschaftlich an letzter Stelle zu arbeiten. Alle übrigen Brigaden erfüllten erfolgreich ihre Verpflichtungen. Sie pflanzten insgesamt 40 Bäume. Als die Arbeitszeit für die Brigaden A und B herangekommen war, entstand eine Schwierigkeit, an die vorher niemand gedacht hatte, die man aber hätte voraussehen können: Um nämlich sein Versprechen erfüllen zu können,

mußte A wissen, wieviel Bäume die Brigade B pflanzen würde. Und B mußte seinerseits wissen, wieviel Bäume die Brigade A pflanzen würde. Beide Brigaden warteten aufeinander, und die Lage erschien ausweglos. Da zeigte der älteste Pionierleiter einen einfachen und logischen Ausweg.
Welchen?

203. Um wieviel größer?

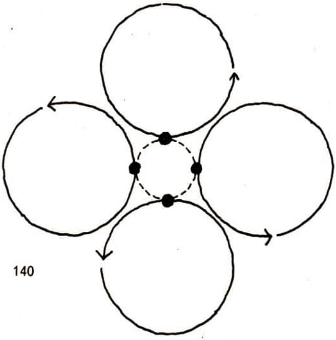
Wenn man von jeder von zwei verschiedenen Zahlen die Hälfte der kleineren abzieht, dann ist die Differenz aus der größeren und der Hälfte der kleineren dreimal so groß wie die aus der kleineren und ihrer Hälfte.
Um wieviel ist die größere Zahl größer als die kleinere?

204. Das Seeschiff und das Wasserflugzeug

Ein Seeschiff ging auf große Fahrt. Als es 180 Seemeilen von der Küste entfernt war, flog ihm ein Wasserflugzeug mit Post nach. Die Geschwindigkeit des Flugzeuges war zehnmal so groß wie die des Seeschiffs. In welcher Entfernung von der Küste holte das Wasserflugzeug das Seeschiff ein?

205. Die Kunstradfahrer in der Arena

Als Arena dient ein großer ebener Platz mit vier kreisrunden Bahnen. Vier Kunstradfahrer arbeiten hier ihre gemeinsame Zirkusnummer aus. Jeder Fahrer fährt auf einem Kreis (Abb. 140). Sie beginnen ihre Fahrt gleichzeitig, jeder an dem Punkt seiner Bahn, der dem Zentrum der Arena am nächsten liegt. Die Geschwindigkeit eines jeden ist mathematisch genau und nach vereinbarten Streckeneinheiten berechnet und kann durch folgende Zahlen ausgedrückt werden:



140

$V_1 = 6$ Streckeneinheiten/Stunde,
$V_2 = 9$ ″ ,
$V_3 = 12$ ″ ,
$V_4 = 15$ ″ .

Der Umfang eines jeden Kreises beträgt ein Drittel einer Streckeneinheit. Die Dauer des Auftretens der Kunstradfahrer beträgt 20 Minuten.
Werden die Fahrer im Verlauf dieser 20 Minuten noch ein- oder ein paarmal gleichzeitig an den Punkten sein, von denen aus sie die Fahrt begannen?

206. Das Arbeitstempo des Drehers Bykow

Als der bekannte sowjetische Schnelldreher P. Bykow die Geschwindigkeit für das Schneiden von Gußeisen um 1690 m/min erhöhte, verringerte sich die Zeit für die Bearbeitung eines Werkstücks von 35 Minuten auf $2^1/_2$ Minuten.
Mit welcher Schneidegeschwindigkeit erreichte er diese Zeit?

207. Die Fahrt Jack Londons

Jack London beschreibt in einer Erzählung, wie er auf einem Schlitten, der mit fünf Hunden bespannt war, von Skagway (Alas-

ka) zu seinem Lager eilte, wo sich seine sterbenden Kameraden befanden.
Die Erzählung enthält einige höchst interessante Einzelheiten, die es gestatten, daraus eine interessante Aufgabe zu konstruieren.
Die ersten 24 Stunden der Fahrt fuhr der Hundeschlitten mit der vollen von Jack London vorausberechneten Geschwindigkeit. Am Ende dieser 24 Stunden zerrissen zwei Hunde das Geschirr und liefen mit einem Rudel Wölfe weg. London mußte die Fahrt mit drei Hunden fortsetzen, die den Schlitten mit einer Geschwindigkeit zogen, die nur $^3/_5$ der Anfangsgeschwindigkeit betrug. Durch diese Verzögerung kam London zweimal 24 Stunden später an den Bestimmungsort, als er berechnet hatte. Dazu bemerkt der Autor: ,,Wenn die beiden Hunde, die ausrissen, noch 50 Meilen im Geschirr mitgelaufen wären, hätte ich mich nur um einen Tag gegenüber dem berechneten Termin verspätet.''
Es erhebt sich die Frage: Wie groß war die Entfernung von Skagway bis zum Lager? In der Erzählung ist darüber nichts gesagt, aber die Angaben genügen, um diese Entfernung zu ermitteln.

208. Fehler, die durch falschen Analogieschluß möglich sind

Manche Schlußfolgerungen und sogar ganze Entdeckungen gelingen mit Hilfe des sogenannten Analogieschlusses. Ihm liegt die Annahme zugrunde, daß die Übereinstimmung zweier Dinge in einzelnen Merkmalen oder Eigenschaften den Schluß rechtfertigt, daß diese Dinge auch in anderen Merkmalen übereinstimmen.
Aber die Analogie beweist nichts. Sie kann uns nur zu einem Gedanken verhelfen, dessen Richtigkeit noch der Prüfung, der Bestätigung bedarf.
Ungeeignete Analogien führen zu unrichtigen Vorstellungen.
Ein Fall: Du fragst jemand:
,,Um wieviel Einer ist 40 größer als 32?''
,,Um 8'', antwortet er.
,,Um wieviel Einer ist 32 kleiner als 40?''
,,Natürlich auch um 8.''
,,Richtig. Jetzt berechnen Sie, um wieviel Prozent die Zahl 40 größer ist als die Zahl 32. Übrigens, geben Sie sich keine Mühe! Ich sage es, um wieviel. Genau um 25%. Aber nun, um wieviel Prozent die Zahl 32 kleiner als die Zahl 40 ist, das muß man berechnen . . .''
,,Was gibt es da zu berechnen'', fällt der andere ins Wort. ,,Sie haben doch gerade selbst erst gesagt, daß 40 um 25% größer ist als 32, folglich ist auch 32 um 25% kleiner als 40 . . .''
Da muß man dem anderen in sehr ausführlicher Weise seinen Fehler erklären.
Die Differenz ist zwar in beiden Fällen ein und dieselbe, nämlich 8. Aber im ersten Fall beziehen wir sie auf die Zahl 32, die wir mit 100% ansetzen, und im zweiten Fall auf die Zahl 40, die wir mit 100% ansetzen. 8 von 40 ist $^1/_5$ oder 20%. Also ist 40 um 25% größer als 32, während 32 um 20% kleiner ist als 40.
Die Ursache für den Fehler des Gesprächspartners liegt in dem falschen Analogieschluß.
Stellt doch einmal euren Bekannten folgende Aufgaben:
1. Wir nehmen an, euer Monatsgehalt würde sich um 30% erhöhen. Um wieviel Prozent nimmt eure Kaufkraft zu?
2. Es soll euer Monatsgehalt unverändert bleiben, aber die Warenpreise werden um 30% gesenkt. Um wieviel Prozent steigt in diesem Falle eure Kaufkraft?
3. Ein Antiquariat gab beim Verkauf einen Rabatt von 10% auf den Ladenpreis (Ordinärpreis) eines Buches und erzielte dabei noch 8% Gewinn vom Selbstkostenpreis. Wieviel Prozent Gewinn wollte das Geschäft ursprünglich erzielen?
4. Wenn ein Arbeiter die Zeit zur Anfertigung eines Werkstücks um P% verringerte, um wieviel Prozent nahm die Produktivität zu?
Ihr begegnet gar nicht so selten falschen Antworten auf diese einfachen Fragen, aber . . . versucht es zunächst einmal selbst, sie zu beantworten.

209. Ein Rechtsfall

Die alten Römer haben sich in der Mathematik wenig hervorgetan. Auf dem Gebiet der Rechtswissenschaften haben sie größeren Ruhm erlangt. Altrömische mathematische Schriften, die uns überliefert sind, tragen überwiegend rein praktischen, zweckbestimmten Charakter.

Ein Anlaß zur Entwicklung arithmetischer Aufgaben war das römische Erbrecht. Hier ist eine solche Aufgabe aus dem Altertum.

Jemand hinterließ bei seinem Tode seine Ehefrau, die gerade ein Kind erwartete. Er hatte folgendes Testament gemacht: Wenn ein Sohn geboren wird, fällt ihm $^2/_3$ des Nachlasses und der Mutter $^1/_3$ zu. Wenn eine Tochter geboren wird, soll sie $^1/_3$ und die Mutter $^2/_3$ erhalten.

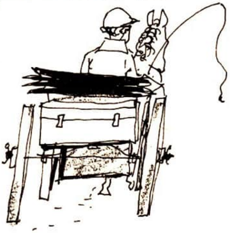
Die Witwe des Erblassers gebar Zwillinge, einen Jungen und ein Mädchen. An ein solches Ereignis hatte der Erblasser nicht gedacht. Wie soll man den Nachlaß unter die drei Erben teilen, damit man sich möglichst nahe an die Bestimmungen des Testaments hält?

Die mathematische Lösung der Aufgabe hängt von der juristischen Auslegung des Willens des Erblassers ab. Eine der möglichen juristischen Begründungen gab der römische Jurist Salvian Julian. Seine Antwort und einige ergänzende Überlegungen sind im Lösungsteil des Buches angeführt. Habt aber keine Eile, dort nachzusehen.

Überlegt, streitet euch ein wenig untereinander und legt dann erst einmal eure eigene Lösung vor!

210. Mit Doppel- und mit dreifachen Schritten

Ich wollte die Entfernung von meinem Haus bis zu dem meines Freundes feststellen. Ich ging daher mit gleichmäßigen Schritten und zählte auf der ersten Hälfte des Weges die Doppelschritte und auf der zweiten Hälfte jeden dritten Schritt. Dabei ergaben sich 250 Doppelschritte mehr als dreifache. Wieviel Schritte waren es bis zum Haus meines Freundes?



211. Wer fuhr mit dem Pferdewagen?

Zwei Männer fuhren, der eine mit dem Pferdewagen, der andere mit dem Auto, gleichzeitig vom Dorf weg nach der Stadt. Der eine von ihnen war jung, der andere bejahrt. Nach einiger Zeit stellte sich folgendes heraus: Wenn der bejahrte das Dreifache der bisherigen Strecke zurückgelegt haben würde, dann blieb ihm noch die Hälfte der jetzt vor ihm liegenden Strecke zu fahren. Wenn der junge nur die Hälfte der bisherigen Strecke zurückgelegt hätte, blieb ihm noch das Dreifache der jetzt vor ihm liegenden Strecke zu fahren.

Kommt ihr darauf, wer mit dem Pferdewagen fuhr, der bejahrte oder der junge Mann?

212. Die beiden Motorradfahrer

Zwei Motorradfahrer unternahmen eine Spazierfahrt und fuhren gleichzeitig von ein und demselben Ort weg. Beide legten die gleiche Entfernung zurück und kehrten zum selben Zeitpunkt heim.
Unterwegs ruhten die Motorradfahrer aus. Dabei ist bekannt, daß der erste von ihnen doppelt so viel Zeit zum Fahren benötigte wie der zweite zum Ausruhen, und der zweite dreimal so viel Zeit zum Fahren wie der erste zum Ausruhen.
Welcher von den beiden Motorradfahrern fuhr schneller?

213. In welchem Flugzeug war Wolodjas Vater?

,,Sag mal, Papa'', wandte sich Wolodja an seinen Vater, einen Flugzeugführer, ,,in welchem Flugzeug warst du bei der Luftparade?''
,,Das kannst du leicht selbst ausrechnen'', antwortete sein Vater, während er eine Gruppe von neun Flugzeugen aufzeichnete (Abb. 141). ,,Ich entsinne mich, daß die Anzahl der Flugzeuge rechts von mir multipliziert mit der Anzahl derer links von mir eine Zahl ergab, die um 3 kleiner war, als sie gewesen wäre, wenn sich mein Flugzeug 3 Plätze weiter rechts befunden hätte.''
Wolodja überlegte und zeigte auf der Zeichnung das Flugzeug, in dem sich sein Vater befunden hatte.
Wie fand Wolodja das Flugzeug seines Vaters heraus?

214. Eine Zahl soll zerlegt werden

Zerlegt die Zahl 45 so in vier Summanden, daß alle Resultate gleich sind, wenn ihr zum ersten Summanden 2 addiert, vom zweiten 2 subtrahiert, den dritten mit 2 multipliziert und den vierten durch 2 dividiert.
Bringt ihr das fertig?

215. Die beiden Kerzen

Es brennen zwei Kerzen von ungleicher Länge und verschiedener Stärke. Die längere brennt in $3^1/_2$ Stunden herunter, die kürzere in 5 Stunden.
Nach 2 Stunden Brenndauer haben die Kerzen gleiche Länge.
Wieviel war die eine anfangs kürzer als die andere?

216. Erstaunlicher Scharfblick

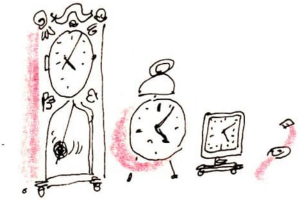
Wenn die Kinder ihren alten Freund, den Buchhalter N, besuchen, gibt er ihnen immer etwas zu rechnen auf.
Und das ist das Erstaunliche: Manchmal weiß er nicht einmal, welche Zahlen die Kinder addieren oder subtrahieren, er blickt nur auf das Resultat und sagt sofort, bei wem die Lösung richtig ist und bei wem sie falsch ist.
,,Nun mal los'', sagt er, ,,denkt euch irgendeine beliebige vierstellige Zahl aus, jeder eine für sich. Habt ihr sie? So, jetzt setzt die erste Ziffer ans Ende der Zahl. Da er-

141

haltet ihr noch eine vierstellige Zahl. Addiert die beiden Zahlen. Zum Beispiel 1234 + 2341 = 3575. Nun sagt mir eure Resultate!"
A: 8612, B: 4322, C: 9867, D:13859.
„Alle haben sich verrechnet außer C."
Die Kinder kontrollierten. Es war wirklich so. Wie hat das N festgestellt?

217. Die richtige Zeit

In eine Uhrmacherwerkstatt brachte man vier Uhren: Eine Wanduhr, eine Tischuhr, einen Wecker und eine Armbanduhr. Die Wanduhr geht im Vergleich zum Zeitzeichen 2 Minuten in der Stunde nach. Die Tischuhr geht verglichen mit der Wanduhr 2 Minuten in der Stunde vor. Der Wecker geht im Verhältnis zur Tischuhr stündlich 2 Minuten



nach. Die Armbanduhr geht im Vergleich zum Wecker stündlich 2 Minuten vor. Um 12 Uhr wurden alle Uhren nach dem Ton des Zeitzeichens gestellt.
Welche Zeit zeigt die Armbanduhr um 19 Uhr beim Ton des Zeitzeichens?

218. Die Uhren

Es ist eine Not mit diesen Uhren. Am Mittag des 2. Januar stellten mein Freund und ich unsere Uhren genau. Nach einigen Tagen verglichen wir sie miteinander und mit der genauen Zeit. Da zeigte sich, daß meine Uhr etwas vor- und meines Freundes Uhr nachging. Bei der Umrechnung auf 1 Stunde ergab sich, daß meine Uhr um 1 Sekunde vorging und meines Freundes Uhr um $1^1/_2$ Sekunde nachging. Wir interessierten uns für folgende Fragen: Angenommen, wir stellen die Zeiger unserer Uhren nicht wieder auf die genaue Zeit; wann würden meine und meines Freundes Uhr das nächste Mal
1. ein und dieselbe Zeit zeigen,
2. gleichzeitig die richtige Zeit angeben?

219. Um wieviel Uhr?

1. Kurz nach 12 Uhr mittags ging der Meister zum Essen. Beim Weggehen merkte er sich die Stellung der Zeiger an der Uhr. Als er zurückkehrte, fand er, daß Minuten- und Stundenzeiger ihre Plätze gewechselt hatten.
Um wieviel Uhr kam der Meister zurück?
Wenn ihr euch über die Lösung dieser ersten Aufgabe klar geworden seid, dann wird es euch auch nicht mehr schwerfallen, die zweite und die dritte Aufgabe zu lösen.
2. Ich war länger als 2 Stunden, aber weniger als 3 Stunden von zu Hause abwesend. Als ich heimkam, stellte ich fest, daß in der Zeit meiner Abwesenheit der Minuten- und der Stundenzeiger unserer Wanduhr die Plätze gewechselt hatten.
Um wieviel war ich länger als 2 Stunden abwesend?
3. Ein Schüler begann mit der Lösung einer Aufgabe zwischen 4 und 5 Uhr nachmittags, als die Uhrzeiger sich überdeckten, und war mit ihr fertig, als der Minutenzeiger dem Stundenzeiger (in einer Geraden mit diesem) gegenüberstand.
In wieviel Minuten löste der Schüler die Aufgabe, und um wieviel Uhr war er mit der Lösung fertig?

220. Ausbildung im Gelände

Der Leiter einer GST-Einheit benutzte jede Gelegenheit, die Angehörigen seiner Einheit im Beobachten, Überlegen und schlagfertigen Handeln zu üben. Da fragte er sie zum Beispiel einmal überraschend: „Wieviel Pfeiler hat die Brücke, über die wir heute gegangen sind?"
So legte er ihnen auch einmal folgende Aufgabe vor:

„Stellt euch vor, zwei Angehörige unserer Einheit sind nach ein und demselben Punkt geschickt worden. Beide gingen sie denselben Weg„ aber beide brauchten für den ganzen Weg verschiedene Zeiten. Der erste ging während der Hälfte der gesamten von ihm benötigten Zeit mit irgendeiner bestimmten Geschwindigkeit. Der zweite ging mit derselben Geschwindigkeit die Hälfte des Wegs. Während der zweiten Hälfte seiner Zeit ging der erste mit einer anderen Geschwindigkeit. Mit derselben anderen Geschwindigkeit ging der zweite die zweite Hälfte seines Wegs.
Welcher von beiden kam schneller zum Bestimmungsort?"
Die Befragten setzten verschiedenartige Zahlen für den Weg und die beiden Geschwindigkeiten ein, stellten die entsprechenden Berechnungen an und kamen jedesmal zu ein und demselben Resultat: Der erste Mann brauchte weniger Zeit für den ganzen Weg als der zweite.
Diejenigen von den Befragten, die die Aufgabe algebraisch rechneten, bewiesen, daß der erste immer schneller als der zweite ans Ziel kommt.
Könnt ihr auch die Lösung „in Buchstaben" ausdrücken?

221. Wieviel neue Bahnhöfe baute man?

„Das stürmische Wachstum von Industrie und Landwirtschaft in unserem Lande wird vom Bau neuer Siedlungen und Städte begleitet und folglich auch von einer ständigen Erweiterung des Eisenbahnnetzes", erklärte der Leiter der Eisenbahn von N auf einer Versammlung der Arbeiter und Angestellten. „Auf einer Zweiglinie unserer Bahn", fuhr er fort, „wird in nächster Zeit der Bau neuer Personenbahnhöfe abgeschlossen. Wir müssen uns auf die Inbetriebnahme mustergültig vorbereiten, und es darf keine Stockung im Transportwesen zugelassen werden."
„Werden auch neue Fahrkartensätze für den Personenverkehr gedruckt?" interessierte sich ein alter Eisenbahner.
„Ja, alle nötigen Fahrkarten werden vorbereitet. Damit auf jeder Station unserer Zweiglinie für jede ihrer Stationen Fahrkarten vorhanden sind, muß man in Verbindung mit der Eröffnung der neuen Bahnhöfe 46 Fahrkartensätze zusätzlich drucken."
Stellt nach diesen Angaben fest, wieviel Bahnhöfe an der Zweiglinie der Eisenbahn von N lagen und wieviel neu gebaut wurden!

222. Es sollen vier Wörter ausgesucht werden

PI
LOT
PLUS
MINUS
ZIFFER
QUADRAT
DIVISION
GLEICHUNG
MATHEMATIK
LOGARITHMUS
STEREOMETRIE
TRIGONOMETRIE
VEKTORRECHNUNG
KUGELAUSSCHNITT

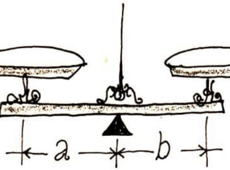
Wir haben 14 Wörter zusammengestellt. In jedem Wort, beginnend mit dem zweiten, ist ein Buchstabe mehr als im vorhergehenden. Das letzte Wort (Kugelausschnitt) hat 15 Buchstaben. Aus allen diesen Wörtern sucht vier Wörter so aus, daß sich folgende Gleichungen ergeben:

$$a^2 = b\,d, \quad a\,d = b^2 c.$$

Mit a, b, c und d wird die Anzahl der Buchstaben in dem ausgesuchten ersten, zweiten, dritten und vierten Wort bezeichnet. Welche Wörter sind das?

223. Darf man so abwiegen?

Die Arme des Waagebalkens einer Balkenwaage müssen gleich lang sein ($a = b$, Abb. 142). Auf einem Markt wurde ein neuer Verkaufsstand eröffnet. Die angelieferte Waage war aber etwas ungleicharmig, und sie durfte deshalb nicht benutzt werden. Eine neue Waage konnte erst am nächsten Tage geliefert werden. Deshalb wurde nur ab-



142

gepackte Ware verkauft. Kurz vor Geschäftsschluß am Abend wurde das letzte Paket Zucker verkauft. Da kam noch ein Käufer, der 2 kp Zucker haben wollte. Der Verkäufer wollte den Kunden nicht ohne Ware weggehen lassen; er entschloß sich, die ungenaue Waage zu benutzen, und schlug dem Käufer folgendes Verfahren für das Abwiegen vor:

„Ich lege ein Einkilogewicht auf die linke Waagschale und wiege damit den Zucker auf der rechten aus, dann lege ich umgekehrt das Gewicht auf die rechte Schale und wiege den Zucker auf der linken aus. Ich denke, das wird richtig sein; wenn Sie in der ersten Tüte etwas weniger als 1 kp Zucker haben, dann ist in der zweiten entsprechend mehr."

Kann man sich mit diesem Verfahren einverstanden erklären?

Zusätzliche Fragen. 1. Wißt ihr, daß es mehrere Verfahren für ein genaues Abwiegen auf einer ungleicharmigen und nicht im Gleichgewicht befindlichen Balkenwaage gibt?

2. Wie kann man das Gewicht einer Last auf einer ungleicharmigen, aber ins Gleichgewicht gebrachten Waage feststellen?

224. Zwei Angaben

Die 1. Angabe: Der Zug N fuhr an mir in der Zeit von t_1 Sekunden vorbei.

Die 2. Angabe: Derselbe Zug N fuhr über eine Brücke von der Länge m in der Zeit von t_2 Sekunden.

Wie kann man nach diesen beiden Angaben die Länge und die Geschwindigkeit des Zuges N unter der Voraussetzung ermitteln, daß die Geschwindigkeit gleichbleibend war?

225. Der Elefant und die Mücke

Ein Liebhaber mathematischer Spielereien beschäftigte sich einmal mit Umwandlungen algebraischer Ausdrücke und kam zu der sonderbaren Schlußfolgerung, daß das Gewicht eines Elefanten gleich dem einer Mücke sei! Er verfuhr auf folgende Weise: Es sei x das Gewicht des Elefanten und y das Gewicht der Mücke. Wir bezeichnen die Summe dieser Gewichte mit 2 v. Dann gilt: $x + y = 2v$. Aus dieser Gleichung kann man zwei andere ableiten: $x - 2v = -y$, $x = -y + 2v$.

Wir multiplizieren die linken und die rechten Seiten der beiden Gleichungen miteinander: $x^2 - 2vx = y^2 - 2vy$. Wenn wir auf beiden Seiten v^2 addieren, erhalten wir: $x^2 - 2vx + v^2 = y^2 - 2vy + v^2$ oder $(x - v)^2 = (y - v)^2$. Wenn wir die Quadratwurzel aus beiden Seiten ziehen, erhalten wir: $x - v = y - v$ oder $x = y$, das heißt, das Gewicht des Elefanten (x) ist gleich dem Gewicht der Mücke (y).

Untersucht einmal, was hier los ist!


143

226. Die fünfstellige Zahl

Mir begegnete einmal eine interessante fünfstellige Zahl A. Wenn ich eine Eins vor diese Zahl setzte, erhielt ich natürlich eine sechsstellige Zahl: [1] [A]; wenn ich die Eins an ihr Ende setzte, erhielt ich auch eine sechsstellige Zahl: [A] [1], und die zweite Zahl war dreimal so groß wie die erste: $\frac{[A]\,[1]}{[1]\,[A]} = 3$. Sucht diese Zahl A!

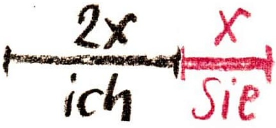
227. Wie alt?

Wollen Sie bitte anhand der folgenden Angaben das Verhältnis meines Alters zu dem Ihrigen klarstellen!

Sie und ich sind zusammen 86 Jahre alt. Mein Lebensalter beträgt 15/16 von dem Lebensalter, das Sie dann haben werden, wenn mein Lebensalter 9/16 von der Zahl Jahre beträgt, die Sie zählen, wenn Sie das Alter erreichten, das doppelt so groß wie die Zahl meines Alters in dem Zeitpunkt ist, in dem ich doppelt so alt wie Sie sein könnte. Wie alt bin ich, und wie alt sind Sie?

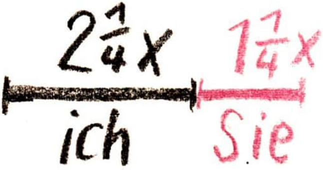
Diese Aufgabe kann man auf folgende recht geistreiche Weise lösen:

1. In irgendeinem Zeitpunkt kann ich doppelt so alt wie Sie sein. Wenn in diesem Zeitpunkt Ihr Alter x ist, dann ist das meinige 2 x. Zur besseren Anschaulichkeit stellen wir dieses Verhältnis der Lebensalter durch zwei Strecken dar, von denen eine doppelt so lang ist wie die andere:

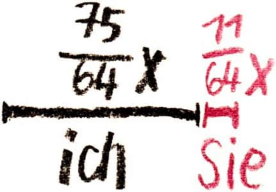


Hieraus folgt, daß ich x Jahre älter bin als Sie, und diese Differenz bleibt zwischen unseren Lebensaltern.

2. In irgendeinem anderen Zeitpunkt beträgt mein Alter 9/4 des Ihrigen, wie dieses im Zeitpunkt 1 war; die Strecke, die mein Lebensalter darstellt, muß jetzt von der Länge $2\frac{1}{4}$ x sein und Ihr Alter, wie immer, um x weniger, das heißt: $1\frac{1}{4}$ x:



3. Jetzt beträgt die Zahl meines Alters 15/16 Ihres Alters, wie es im Zeitpunkt 2 war, das heißt $\frac{15}{16} \cdot \frac{5}{4}\,x = \frac{75}{64}\,x$, und Sie sind nach wie vor x Jahre jünger: $\frac{75}{64}\,x - x = \frac{11}{64}\,x$:



Da wir jetzt zusammen 86 Jahre sind, sind $\frac{75}{64}\,x + \frac{11}{64}\,x = 86$. Hieraus folgt $x = 64$. Demnach bin ich jetzt $\frac{75}{64} \cdot 64 = 75$ Jahre und Sie sind $\frac{11}{64} \cdot 64 = 11$ Jahre alt.

Das ergibt sich nach der Aufgabe. In Wirklichkeit bin ich noch lange nicht 75 Jahre alt; dafür sind Sie wahrscheinlich älter als 11 Jahre. Jetzt lösen Sie eine ähnliche Aufgabe.

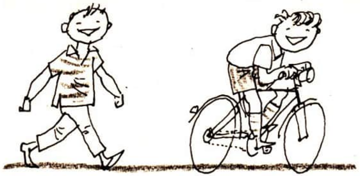
Ich bin jetzt doppelt so alt wie Sie damals waren, als ich so alt war, wie Sie jetzt sind. Wenn Sie so alt sind, wie ich jetzt bin, werden wir zusammen 63 Jahre alt sein. Wie alt ist jeder von uns?

228. Die Aufgabe des E. Lucas

Diese Aufgabe dachte sich der französische Mathematiker Edouard Lucas aus.
Bei einem Kongreß erklärte L. am Ende eines Frühstücks, bei dem viele bekannte Mathematiker aus verschiedenen Ländern zugegen waren, er möchte den Anwesenden eine der schwierigsten Aufgaben vorlegen.
„Ich nehme an", sagte L., „daß jeden Tag mittags von Le Havre nach New York ein Dampfer abfährt und zur gleichen Zeit ein Dampfer derselben Schiffahrtslinie von New York nach Le Havre. Die Überfahrt dauert in der einen wie in der anderen Richtung genau sieben Tage. Wieviel Schiffen seiner Linie, die in entgegengesetzter Richtung fahren, begegnet ein Dampfer, der heute mittag in Le Havre abfährt?"
Wie würdet ihr auf die Frage L.s antworten? Überlegt euch eine grafische Darstellung für die Lösung dieser Aufgabe.

229. Ungewöhnliche Spazierfahrt

Zwei Jungen wollten eine kleine Reise mit dem Fahrrad unternehmen. Unterwegs ging einem das Rad entzwei, und er mußte es zur Reparatur zurücklassen. Trotzdem wollten sie ihre Reise nicht abbrechen, sondern sie teils zu Fuß, teils mit dem einen Fahrrad auf folgende Weise fortsetzen:
Sie brechen gleichzeitig wieder auf, der eine mit dem Rad, der andere zu Fuß. An einem vereinbarten Ort läßt der Radfahrer das Fahrrad stehen und setzt seinen Weg zu Fuß fort. Wenn sein Begleiter zu dem verabredeten Ort gelangt, setzt er sich auf das Rad und, wenn er seinen Kameraden einholt, überläßt er es wieder ihm, selbst geht er jedoch zu Fuß weiter.
In welcher Entfernung vom Endpunkt der Reise mußte das Fahrrad zum letzten Mal von einem der beiden für den anderen zurückgelassen werden, damit beide gleich-



zeitig am Ziel ankamen? Dabei seien es vom Ort der Panne bis zum Ziel 60 km. Die beiden sollen zu Fuß 5 km, mit dem Rad aber 15 km in der Stunde zurückgelegt haben.
War diese Art der Fortbewegung für die Jungen von Vorteil?

230. Eine Eigenschaft einfacher Brüche

Schreibt, soviel ihr wollt, verschiedene einfache Brüche nieder, deren Zähler und Nenner positiv sind.
Bildet einen neuen Bruch, dessen Zähler gleich der Summe aller Zähler der niedergeschriebenen Brüche und dessen Nenner gleich der Summe aller ihrer Nenner ist. Dieser neue Bruch ist unbedingt größer als der kleinste, aber kleiner als der größte der niedergeschriebenen Brüche.
Probiert diese Eigenschaft an Beispielen aus und beweist ihre Richtigkeit für eine beliebige Anzahl positiver Brüche.

Mathematik

fast ohne Rechnen

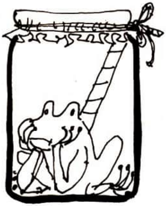
Die Lösung jeder Aufgabe stützt sich mehr oder weniger auf „Überlegungen"; besonderen Reiz haben solche Aufgaben, in denen es im wesentlichen darauf ankommt, die richtige Kette präziser, geistreicher Gedankengänge zu finden.
Einige derartige Aufgaben sind mit einfachen logischen Überlegungen zu lösen, aber auch sie entwickeln „mathematische Denkweise", erziehen zum „Analysieren" und zur Beweglichkeit im Denken.

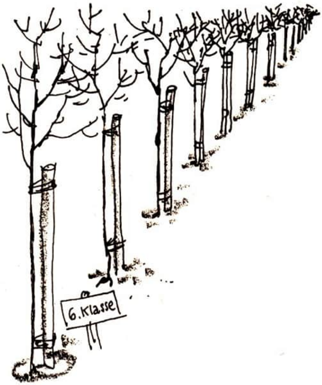
231. Im dunklen Zimmer

Ich ging in das Zimmer, um aus dem Schrank meine Schuhe und Socken zu holen. Im Zimmer schlief meine Schwester, und es war dunkel. Ich wußte genau, in welchem Teil des Schranks sich meine drei Paar Schuhe – alle von verschiedener Fasson – und 12 Paar Socken befanden, schwarze und braune. Licht wollte ich nicht machen, um meine Schwester nicht zu wecken.
Ich fand tatsächlich Schuhe wie Strümpfe an ihrem Platz, aber, ich muß gestehen, in Unordnung – nämlich ein Durcheinander von sechs Schuhen und einen Berg von 24 Socken.
Wieviel Schuhe und wieviel Socken mußte ich wenigstens aus dem dunklen Zimmer ins Helle hinaustragen, damit ich ein Paar Schuhe gleicher Fasson und ein Paar Socken gleicher Farbe erhielt, wobei mir die Fasson des Schuhwerks und die Farbe der Socken gleichgültig waren?

232. Die Wettervorhersage (Scherz)

Kann man, wenn es um Mitternacht regnet, erwarten, daß nach 72 Stunden sonniges Wetter ist?

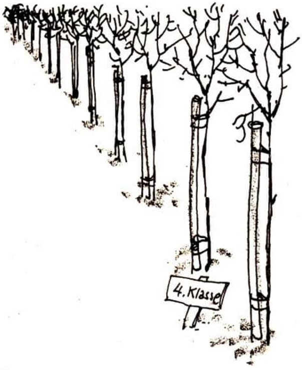




233. Der „Waldtag" der Pioniere

Am „Waldtag" wurden zwei Pioniergruppen – Schüler der 4. und 6. Klasse – beauftragt, auf beiden Seiten einer Straße Bäume zu pflanzen, auf jeder Seite die gleiche Anzahl.
Um nicht vor der 6. Klasse ins Hintertreffen zu geraten, gingen die Pioniere der 4. Klasse früher an die Arbeit und schafften es, fünf Bäume zu pflanzen, bevor die 6. Klasse ankam. Da aber stellte sich heraus, daß sie die Bäume auf der falschen Seite gepflanzt hatten. Nun mußten die Pioniere der 4. Klasse auf ihre Straßenseite gehen und

von neuem mit der Arbeit beginnen. Die Pioniere der 6. Klasse wurden natürlich mit ihrer Arbeit früher fertig. Da schlug der Gruppenratsvorsitzende vor: ,,Los, helfen wir der 4. Klasse!''
Alle waren einverstanden. Sie gingen hinüber auf die andere Straßenseite, pflanzten fünf Bäume, erstatteten so gewissermaßen ihre Schuld zurück und fanden noch Zeit, fünf weitere Bäume zu pflanzen. Damit war die ganze Arbeit getan.



,,Obwohl ihr früher als wir gekommen seid, haben wir euch doch übertroffen'', lachte einer von denen aus der 6. Klasse, zur 4. Klasse gewandt.
,,Du sagst, ihr habt uns übertroffen! Aber nur um fünf Bäume'', entgegnete jemand.
,,Nicht um fünf, um zehn'', lärmte die 6. Klasse los. Der Streit entbrannte. Die einen beharrten darauf, daß sie nur fünf Bäume weniger, die anderen versuchten irgendwie zu beweisen, daß sie zehn Bäume mehr gepflanzt hätten. Sie kamen zwar schließlich zur Klärung, aber sie stritten lange.
Wer hatte recht?

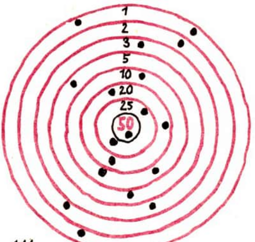
234. Wer hat welchen Vornamen?

,,Kinder, in unser Ferienlager kommen morgen früh noch drei Jungen, Müller, Schulze und Lehmann'', sagte der Leiter, zu einer Gruppe älterer Kinder gewandt. ,,Ihre Vornamen sind: Klaus, Rainer und Dieter.''
,,Aber wer ist denn nun davon Müller und wer Schulze und wer Lehmann?''
,,Das wollen wir mal raten'', sagte eins der Kinder.
,,Ich denke, daß Müller der Familienname von Klaus ist'', ertönte schon eine Stimme.
,,Nein, du hast es nicht erraten'', antwortete der Leiter. ,,Aber es ist überhaupt nicht nötig, daß ihr ratet. Ihr könnt nicht nur die Vornamen von Müller, Schulze und Lehmann, sondern auch ihr Alter selbst ermitteln, und zwar nach einigen Andeutungen, die ich euch sofort machen werde.''
Der Vorschlag verlockte und wurde mit Zustimmung aufgenommen.
,,Zu dem, was ihr nun schon über die drei Jungen wißt, füge ich noch folgende Einzelheiten hinzu:
1. Der Vater von Petra Meier, die ihr alle kennt, ist der Bruder von Müllers Mutter.
2. Rainers fünf Jahre älterer Bruder ist erst mit sieben Jahren zur Schule gekommen. In einem Brief, den ich kürzlich erhielt, erzählt Rainer, daß sein Bruder dieses Jahr die Zehnklassenschule beendet. Ich möchte noch hinzufügen, daß unser Nachbar, der Förster Naumann, der Großvater von Rainer ist und seinen Enkel mit Ungeduld erwartet.
3. Schulze ist ein Jahr älter als Rainer.
4. Dieter ist ein Jahr älter als Rainer.''

„Ist das alles?"
„Ja."
„Aber wissen wir da nicht etwas zu wenig?" bezweifelte jemand.
„Das genügt vollkommen, um die gestellte Aufgabe zu lösen."
Nach einigem Wortwechsel, nach Überlegungen und Vergleichen fanden die Kinder die einzig mögliche Lösung und bestimmten genau Vornamen und Alter ihrer neuen Kameraden Müller, Schulze und Lehmann.

235. Wettbewerb im Kleinkaliberschießen

Drei Jungen – A, B und C – schossen mit Kleinkalibergewehren auf eine Spezialscheibe, die in Abb. 144 dargestellt ist. Jeder von ihnen gab sechs Schuß ab. Die Treffer sind auf der Scheibe in der Zeichnung durch Punkte gekennzeichnet. Als die Jungen die Resultate zusammenzählten, ergab sich, daß jeder von ihnen 71 Ringe geschossen hatte. Dabei saß von allen 18 Schüssen nur einer im mittelsten Ring der Scheibe (50 Ringe).
Von welchem der Jungen dieser erfolgreichste Schuß stammte, habe ich vergessen. Aber ihr könnt das nach folgenden Angaben feststellen: Die ersten beiden Schüsse ergaben für A 22 Ringe; der erste Schuß von C ergab nur 3 Ringe.
Welcher von den drei Jungen traf in den mittelsten Ring?



144

236. Der Einkauf

Ein Mädchen kaufte im Laden 42 Schreib- und Zeichenstifte: 15 Bleistifte zu je 16 DPf, 7 Buntstifte zu je 28 DPf, 12 Zeichen- und 8 Kopierstifte. Es wurde ein Kassenzettel über 8,90 DM ausgeschrieben. An die Preise für die Kopier- und die Zeichenstifte konnte sich das Mädchen nicht mehr erinnern. Aber da es die Anzahl dieser Stifte wußte, fand es sofort auf dem Kassenzettel einen Fehler. Das Mädchen meldete das dem Verkäufer. Dieser überrechnete noch einmal die Summe, entschuldigte sich und korrigierte den Kassenzettel.
Wie fand das Mädchen den Fehler?

237. Die Fahrgäste in einem Eisenbahnabteil

In einem Abteil des Zuges Moskau–Odessa reisten Fahrgäste aus Moskau, Leningrad, Tula, Kiew, Charkow und Odessa. Ihre Familiennamen fingen mit den Buchstaben A, B, C, D, E und F an.
Unterwegs ergab sich in der Unterhaltung, daß A und der Moskauer Ärzte waren, E und der Leningrader Lehrer, der Fahrgast aus Tula und C Ingenieure. B und F waren Teilnehmer am Großen Vaterländischen Krieg der SU, und der Fahrgast aus Tula hatte überhaupt nicht in der Armee gedient. Der aus Charkow war älter als A und der aus Odessa älter als C. B und der Moskauer stiegen in Kiew aus und C und der aus Charkow in Winniza. Stellt nach diesen Angaben den Beruf eines jeden Fahrgastes und seinen Wohnort fest!
Anmerkung. Nicht ohne Interesse ist die Frage, ob alle hier gemachten Angaben zur Lösung dieser Aufgabe notwendig sind. Vielleicht stellt ihr auch diese kleine Untersuchung an?

238. Das Finale des Schachturniers der Sowjetarmee

Im Finale des Schachturniers der Sowjetarmee trafen Vertreter von acht militärischen Dienstgraden aufeinander: ein Oberst, ein Major, ein Hauptmann, ein Leutnant, ein Oberfeldwebel, ein Unteroffizier, ein Gefreiter und ein Soldat. Alle gehörten verschiedenen Waffengattungen an: einer war Infanterist, ein anderer Flieger, einer war von der Panzertruppe, einer war Artillerist, einer Kavallerist, einer war von der Granatwerfertruppe, einer war Pionier und einer von der Nachrichtentruppe.

Wenn ihr richtig überlegt, könnt ihr die Waffengattung eines jeden der acht Schachspieler nach folgenden Angaben feststellen:

In der ersten Runde spielte der Oberst mit dem Kavallerist. Der Flieger kam erst zur zweiten Runde.

In der zweiten Runde spielte der Infanterist mit dem Gefreiten und der Major mit dem Oberfeldwebel. Nach der zweiten Runde schied der Hauptmann krankheitshalber aus dem Turnier aus. Deshalb blieben spielfrei: in der dritten Runde der Unteroffizier, in der vierten Runde der Angehörige der Panzertruppe, in der fünften der Major.

In der dritten Runde gewann der Leutnant gegen den Infanteristen, und die Partie des Oberst mit dem Artilleristen endete unentschieden.

In der vierten Runde gewann der Pionier gegen den Leutnant und der Oberfeldwebel gegen den Oberst. In der vorletzten, der sechsten Runde, blieb die Partie des Kavalleristen mit dem Angehörigen der Granatwerfertruppe unentschieden.

Anmerkung. 1. Zur Lösung ist die Kenntnis des Schachspiels nicht erforderlich. Man muß nur wissen, daß im Turnier ein und derselbe Teilnehmer nicht zweimal spielfrei ist und er mit jedem Partner eine Partie spielt.

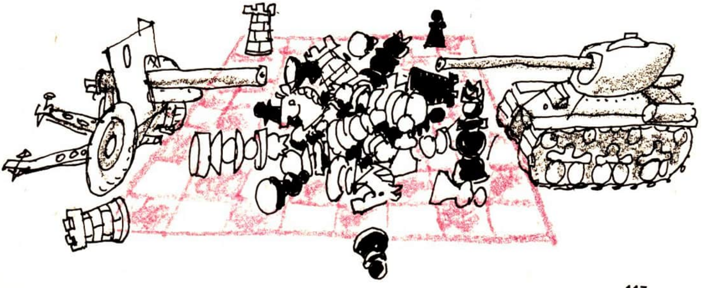
2. Wer Lust hat, kann an Hand der Lösung eine vollständige Tabelle der einzelnen Begegnungen nach Runden aufstellen.

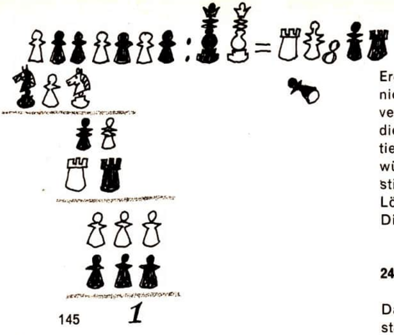
239. Der Sondereinsatz

Vor Beginn des Winterhalbjahres gingen sechs Schüler einen Wettbewerb im Sägen von Brennholz ein. Sie übernahmen es, Rundstämme in $^1/_2$-m-Abschnitte zu zersägen. Dazu teilten sie sich in drei Paare: A und A_1, B und B_1 und C und C_1. A und A_1 zersägten 2 m lange Rundstämme mittlerer Stärke, B und B_1 $1^1/_2$ m lange Rundstämme von größerer Stärke als die 2 m langen, C und C_1 1 m lange sehr dicke Stämme.

Am anderen Tage wurde an der Schulwandzeitung die gute Arbeit der drei Sägebrigaden R, S und T hervorgehoben. Es wurde mitgeteilt, daß R und R_1 26 Abschnitte, S und S_1 27 Abschnitte und T und T_1 28 Abschnitte gesägt hatten.

Wer von den oben mit A usw. bezeichneten Schülern entsprach dem S_1?





145

240. Die versteckte Division

An einem Tischchen im Spielzimmer des Jugendklubhauses wird eine stille „Schlacht" zwischen zwei jungen Schachspielern geschlagen.
Neben sie hat sich ein Mädchen gesetzt, das „Redakteurin" einer Mathematik-Wandzeitung ist und gerade eine Aufgabe für die nächste Nummer der Zeitung entwirft.
Nachdem es die Division einer siebenstelligen Zahl durch eine zweistellige beendet hat, legt es das Blatt mit den Berechnungen zur Seite und beginnt mit der Zeichnung. Da beginnen die Schachspieler, ohne das Spiel zu unterbrechen, mit der Spielerei, jede Schachfigur, die vom Brett genommen wird, auf eine der Ziffern auf dem Blatt Papier zu setzen, ohne sich dabei an irgendein System zu halten. Bei Schluß der Schachpartie sind alle Ziffern des Dividenden, des Divisors, des Quotienten und aller Zwischenprodukte und Reste mit Ausnahme eines allerletzten Einers von Schachfiguren bedeckt.
„Das ist auch eine Aufgabe für deine Zeitung", sagt einer der Schachspieler, „zeichne oder fotografiere hier diese in Figuren dargestellte Division und gib den Lesern auf, alle Ziffern zu bestimmen, die von den Figuren verdeckt sind."
„Das ergibt tatsächlich eine interessante Aufgabe", meint das Mädchen erfreut, „aber wartet; wir wollen erst überlegen, ob die Lösung auch eindeutig ist."
Nach kurzer Überlegung kamen sie zu dem Ergebnis, daß die Aufgabe in der Form noch nicht interessant genug sei, weil sie viele verschiedene Lösungen zuläßt; aber wenn die Figur auf der mittelsten Ziffer des Quotienten (diese Ziffer ist 8) weggenommen würde, dann würde die Aufgabe völlig bestimmbar sein und hätte nur eine einzige Lösung. Sucht nach Abb. 145 Dividend, Divisor und Quotient!

241. Arithmetisches Mosaik

Das hier dargestellte Mosaik von Buchstaben und mathematischen Zeichen bildet zwei sehr interessante arithmetische Rebusse, deren Lösung man nicht durch planloses Zusammensuchen, sondern nur durch logisches Denken erhalten kann.

1. Rebus

$$\begin{array}{ccccc} ATU & + & IAS & = & IITE \\ - & & - & & : \\ \underline{NEG} & : & \underline{IOG} & = & \underline{E} \\ PAU & - & NS & = & PPA \end{array}$$

2. Rebus

$$\begin{array}{ccccc} HEB & + & EUS & = & LFS \\ - & & + & & : \\ \underline{WUB} & : & \underline{EH} & = & \underline{US} \\ EHB & - & ESU & = & RA \end{array}$$

Die Ziffern sind durch Buchstaben verschlüsselt, wobei verschiedene Buchstaben auch verschiedenen Ziffern entsprechen. Zwischen die verschlüsselten Zahlen sind mathematische Zeichen gesetzt, die auf die Rechnungsarten, in den Vertikalen von oben nach unten, in den Horizontalen von links nach rechts, hinweisen. Das Resultat der Berechnungen in den Vertikalen ist unter dem Strich, das Resultat der Berechnungen in den Horizontalen hinter dem Gleichheitszeichen vermerkt.
Setzt an Stelle der Buchstaben Ziffern ein, so daß das mit den mathematischen Zeichen angedeutete Rechenwerk stimmt.
Wenn ihr den Zahlenwert eines jeden Buchstaben entschlüsselt habt, dann stellt die Buchstaben nach ihrem Zahlenwert von 0

bis 9 zusammen. Sie bilden ein Wort, in dem ersten Rebus in russischer Sprache, im zweiten in deutscher. Das erste Wort ist ein mathematischer Ausdruck, und das zweite bezeichnet einen wichtigen Schritt im Leben eines jeden Menschen.

242. Der Motorradfahrer und der Radfahrer

Ein Motorradfahrer war von einem Postamt nach dem Flugplatz zur Ankunft eines Flugzeugs geschickt worden. Das Flugzeug kam aber vor der fahrplanmäßigen Zeit an, und die Post war mit einem Radfahrer zum Postamt geschickt worden. Als der Radfahrer eine halbe Stunde des Wegs zurückgelegt hatte, begegnete er dem Motorradfahrer, der die Post übernahm und unverzüglich umkehrte.
Im Postamt traf der Motorradfahrer 20 Minuten früher ein, als er hätte da sein müssen.
Wieviel Minuten vor der fahrplanmäßigen Zeit war das Flugzeug angekommen?

243. Schlußfolgerungen ,,aus dem Gegenteil''

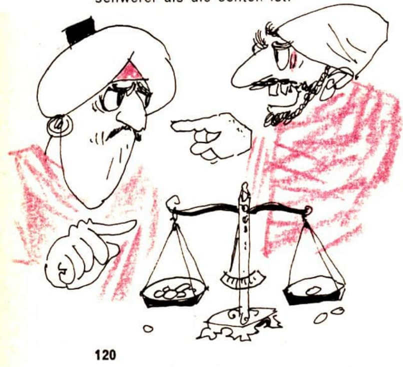
Stellt euch zwei Behauptungen A und B vor, die einander ausschließen und von denen eine richtig ist. Wir nehmen an, es soll die Richtigkeit der Behauptung A bewiesen werden.
Anstatt den unmittelbaren, direkten Beweis der Richtigkeit der Behauptung A zu führen, kann man auch zum indirekten Beweis greifen, das heißt, man beweist, daß die entgegengesetzte Behauptung B nicht richtig ist, da sie zum Widerspruch mit bekannten Tatsachen führt. Diese Methode der Schlußfolgerungen, auch ,,Beweis aus dem Gegenteil'' genannt, wird häufig in der Geometrie, in der Algebra, bisweilen auch in der Arithmetik angewandt. Darüber hinaus kann man sie mit Erfolg nicht nur zum Beweis von Lehrsätzen, sondern auch zur Lösung von Aufgaben verwenden.
Die Summe von zwei Zahlen ist 75. Die erste von ihnen ist um 15 größer als die zweite. Durch indirekten Beweis soll gezeigt werden, daß die zweite Zahl gleich 30 ist.

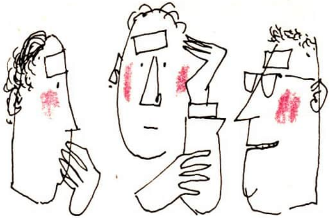
Lösung. Wir nehmen an, daß die zweite Zahl nicht gleich 30 ist. Dann ist sie entweder größer oder kleiner als 30. Wenn die zweite Zahl größer als 30 ist, dann ist die erste größer als 45 und beider Summe ist größer als 75, was der Bedingung widerspricht. Wenn jedoch die zweite Zahl kleiner als 30 ist, dann ist die erste kleiner als 45 und die Summe kleiner als 75, was wiederum der Bedingung widerspricht.
Folglich ist die zweite Zahl gleich 30.
Löst folgende beide Aufgaben mit dieser Methode:
1. Das Produkt zweier ganzer Zahlen ist größer als 75. Ihr sollt beweisen, daß wenigstens einer der Faktoren größer als 8 sein muß.
2. Das Produkt aus einer zweistelligen Zahl mit 5 ist auch eine zweistellige Zahl. Ihr sollt beweisen, daß die erste Ziffer des Multiplikanden 1 ist.

244. Es ist eine falsche Münze ausfindig zu machen

In der Praxis kommt es wohl kaum vor, unter gleichartigen Münzen eine falsche dadurch ausfindig machen zu müssen, daß man sie auf einer Waagschale ohne Gewichte auswiegt. Um aber unser Denken zu schulen, nehmen wir diesen Fall als Ausgang für die Lösung folgender vier ,,Denkaufgaben''

1. Es ist bekannt, daß von 9 Münzen mit gleichem Nennwert 8 ein und dasselbe Gewicht haben und eine – die gefälschte – etwas leichter ist. Es wird verlangt, mit Hilfe von zwei Wägungen auf Waagschalen ohne Gewichte die falsche Münze ausfindig zu machen.
2. Unter denselben Bedingungen soll die falsche (leichtere) Münze aus 8 Münzen gleichen Nennwertes, und zwar auch durch zwei Wägungen, herausgefunden werden.
3. Unter 12 Münzen ist eine falsche. Es ist bekannt, daß sie sich im Gewicht von den echten unterscheidet, es ist aber nicht bekannt, ob sie leichter oder schwerer ist als die echten. Die echten Münzen haben alle gleiches Gewicht. Mit nur drei Wägungen auf Waagschalen ohne Gewichte soll die falsche Münze ermittelt und gleichzeitig festgestellt werden, ob sie leichter oder schwerer als die echten ist.





245. Logisches Unentschieden

Bei einem Wettbewerb in mathematischen Aufgaben und Rätseln zeichneten sich besonders drei Teilnehmer aus. Um von diesen einen Sieger zu ermitteln, beschloß man, noch eine Prüfung durchzuführen. Man zeigte ihnen fünf Zettel, drei weiße und zwei schwarze. Dann verband man allen dreien die Augen und klebte jedem einen weißen Zettel auf die Stirn, die schwarzen Zettel vernichtete man. Danach nahm man die Binden ab und erklärte, daß derjenige Sieger sein werde, der als erster die Farbe seines Zettels feststellt. Niemand von den Wettbewerbsteilnehmern konnte die Farbe seines Zettels sehen; aber jeder sah die weißen Zettel bei seinen Konkurrenten. Nach einiger Zeit kamen alle drei gleichzeitig zu dem Schluß, daß jeder von ihnen einen weißen Zettel hatte. Welche Überlegungen stellten sie an?

246. Fünf Fragen für Schüler

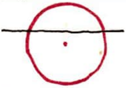
Eine rein mathematische Formulierung muß hinlänglich vollständig sein, darf aber keine unnützen Worte enthalten. Die Sprache der Mathematik ist kurz und genau.

1. Sucht die überflüssigen Worte in folgenden euch bekannten mathematischen Sätzen heraus:

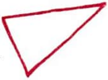
a) Die Summe der zwei spitzen Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck ist gleich 90°.

b) Wenn eine Kathete in einem rechtwinkligen Dreieck gleich der Hälfte der Hypotenuse ist, dann beträgt ihr gegenüberliegender spitzer Winkel 30°.

2. Unter Verwendung der entsprechenden mathematischen Ausdrücke sollt ihr folgende Bezeichnungen vereinfachen:

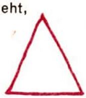


a) Der Teil der Sekante, der innerhalb eines Kreises eingeschlossen ist,



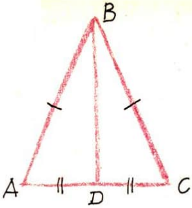
b) das Vieleck mit der geringsten Anzahl Seiten,

c) die Sehne, die durch den Mittelpunkt eines Kreises geht,



d) das gleichschenklige Dreieck, dessen Basis gleich einer Seite ist,

e) zwei Kreise ungleicher Radien, die einen gemeinsamen Mittelpunkt haben.



146

3. In dem Dreieck ABC (Abb. 146) ist AB = BC, AD = DC. Sucht mindestens fünf Ausdrücke, die den Abschnitt BD bezeichnen!

4. Die sieben verwandten Ausdrücke: Parallelogramm, geometrische Figur, Quadrat, Vieleck, ebene Figur, Rhombus, konvexes Vieleck ordnet nacheinander so, daß der Begriff, der durch das vorhergehende Wort gekennzeichnet ist, den Begriff in sich einschließt, der durch das folgende Wort gekennzeichnet ist.

5. Da ihr wißt, daß die Summe aller Außenwinkel eines beliebigen konvexen Vielecks gleich vier Rechte ist, überlegt, welche größte Zahl innerer spitzer Winkel in einem konvexen Vieleck vorkommen kann.

247. Die drei Weisen

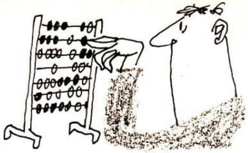
Ermüdet von den Streitgesprächen und der sommerlichen Hitze legten sich drei alte griechische Philosophen zum Ausruhen ein wenig unter einen Baum des Gartens der Akademie und schliefen ein. Während sie schliefen, beschmierten ihnen Spaßvögel mit Kohle die Stirnen. Als sie erwachten und

sich gegenseitig ansahen, gerieten sie in heitere Laune und begannen zu lachen. Keinen beunruhigte das, weil es jedem natürlich vorkam, daß die beiden anderen sich gegenseitig auslachten.
Plötzlich hörte einer der Weisen auf zu lachen, weil er begriff, daß auch seine Stirn beschmiert war.
Welche Überlegung hatte er angestellt?

248. Schlußfolgerungen als Ersatz für Gleichungen

Manche Aufgabe aus der Algebra kann auch der lösen, dem Gleichungen unbekannt sind. Oft hilft schon gesunder Menschenverstand, Aufmerksamkeit und ruhiges Überlegen. Das sind auch berechtigte Lösungswege. Löst einmal folgende beiden Aufgaben „mit Schlußfolgerungen":

1. Wenn man eine zweistellige Zahl anstatt wie üblich von rechts nach links von links nach rechts liest, dann ist die von links gelesene Zahl $4^1/_2$mal so groß wie die gegebene. Was für eine Zahl ist das?
Wenn man die Angaben in der Bedingung geschickt verwertet, kann man diese Aufgabe allein „mit Schlußfolgerungen" musterhaft auf folgende Weise lösen:



a) Die gesuchte Zahl ist größer als 10, weil sie zweistellig ist.
b) Aber sie ist kleiner als 25, weil $25 \cdot 4^1/_2$ eine dreistellige Zahl ist.
c) Die gesuchte Zahl ist durch 2 teilbar, weil sich bei ihrer Multiplikation mit $4^1/_2$ eine ganze Zahl ergibt.
d) Die von links gelesene Zahl ist nach der Bedingung 9mal so groß wie die Hälfte der gesuchten Zahl; folglich ist sie durch 9 teilbar.
e) Da die von links gelesene Zahl durch 9 teilbar ist, läßt sich ihre Quersumme durch 9 teilen, und da die gesuchte Zahl aus denselben Ziffern besteht, ist sie folglich auch durch 9 teilbar.
Sucht die Fortsetzung dieser Schlußfolgerungen und führt die Lösung zu Ende!

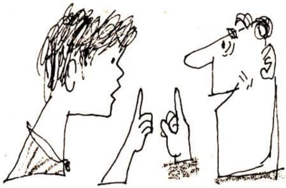
2. Das Produkt vier aufeinanderfolgender ganzer Zahlen ist gleich 3024. Diese Zahlen sollen gesucht werden.
Zur „logischen" Lösung kann man folgenden Gedankengang vorschlagen:
a) Man stellt fest, daß unter den gesuchten Zahlen nicht die Zahl 10 ist.
b) Unter den gesuchten Zahlen müssen Zahlen sein, die kleiner als 10 sind.
c) Aus a) und b) und aus der Bedingung der Aufgabe gelangt man zu dem Schluß, daß alle gesuchten Zahlen kleiner als 10, das heißt einstellig sind.
d) Man stellt fest, daß unter den gesuchten Zahlen nicht die Zahl 5 ist.
e) Man bildet aus allen übrigen einstelligen Zahlen zwei Gruppen und klärt, welche Gruppe die Bedingung der Aufgabe erfüllt.

249. Mit gesundem Menschenverstand

Eine Studentin bereitete sich auf ihren ,,Probeunterricht'' in Mathematik in der 8. Klasse vor.
,,Sag mir doch, welche Aufgaben du deinen Schülern stellen willst?'' fragte interessiert ihr Vater, ein ausgezeichneter Maschinist.
,,Das Alter eines Kindes, vermehrt um 3 Jahre, ergibt eine Zahl, aus der sich genau die Quadratwurzel ziehen läßt, diese Wurzel ergibt das um 3 Jahre verminderte Alter des Kindes. Wie alt ist das Kind?''

,,Nun, eine ganz gute Aufgabe für mündliche Übungen. Aufgeweckte Kinder lösen sie in einer Minute.''
,,Wie, für mündliche Übungen? In einer Minute? Bei dieser Aufgabe beabsichtige ich, den Schülern noch einmal den Vorzug des algebraischen Verfahrens – mit Aufstellung einer Gleichung – vor dem arithmetischen zu zeigen.''

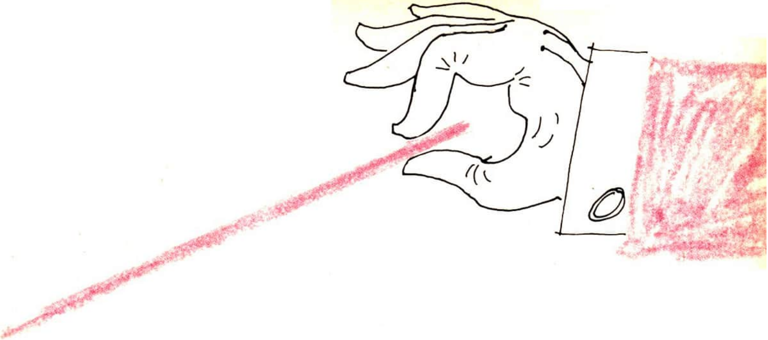
,,Dazu ist die Aufgabe wenig brauchbar. Jeder, der in ihren Sinn eindringt, löst sie ,im Kopf' fast ohne jegliche Rechenarbeit.''
Wie löste der Vater der Studentin die Aufgabe?



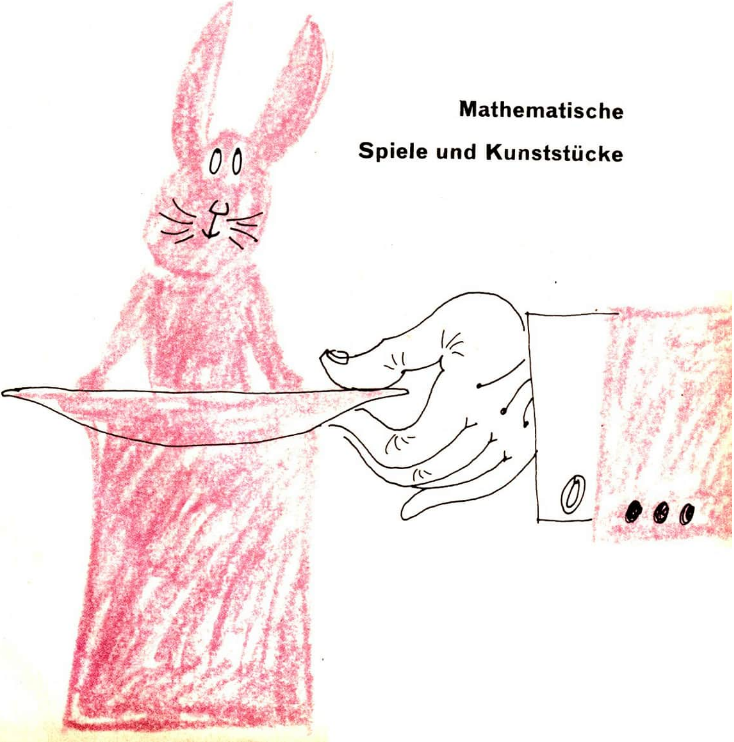
Zusätzliche Fragen für diejenigen, die quadratische Gleichungen aufstellen und lösen können:
1. Wie wollte die Studentin diese Aufgabe arithmetisch und algebraisch lösen?
2. Welche natürlichen Zahlen muß man für n wählen, damit die Zahl, die dem um n Jahre vermehrten höheren Lebensalter entspricht, wieder eine Zahl ergibt, die eine Quadratzahl darstellt, deren Quadratwurzel das um n Jahre verminderte Alter ergibt?
3. Sucht das kürzeste Verfahren zur Ermittlung des Alters bei einer gegebenen Zahl n!

250. Ja oder nein?

Stellt euch vor, daß euer Freund sich irgendeine ganze Zahl zwischen 1 und 1000 ausgedacht hat. Um die gedachte Zahl zu erraten, stellt ihr Fragen. Ihr verabredet, daß euer Freund auf alle Fragen nur ,,ja'' oder ,,nein'' antworten soll.
Es mag unglaublich erscheinen, daß insgesamt nur zehn Fragen genügen sollen, um jede beliebige gedachte ganze Zahl zwischen 1 und 1000 sicher zu ermitteln.
Überlegt, welche Fragen man stellen muß!



Mathematische Spiele und Kunststücke



A. Spiele

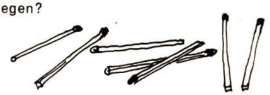
Es gibt Spiele, deren erfolgreicher Verlauf nicht vom zufälligen Zusammentreffen günstiger Umstände abhängt, sondern vom eigenen Nachdenken und von Vorausberechnungen. Wer die Berechnung anstellen kann, die dem Spiel zugrunde liegt, wird zum Besitzer des Spiel„geheimnisses", das ihm den Sieg über die anderen Teilnehmer sichert, die sich die mathematischen Grundlagen noch nicht angeeignet haben. Solche Spiele nehmen den Charakter von Aufgaben an.

251. Elf Gegenstände

Auf dem Tisch liegen elf gleiche Gegenstände, zum Beispiel Streichhölzer. Der erste Mitspieler nimmt sich von dieser Menge nach seinem Belieben 1, 2 oder 3 Gegenstände; dann nimmt sich der zweite Mitspieler von den übriggebliebenen Gegenständen auch nach seinem Belieben 1, 2 oder 3. Dann nimmt wieder der erste usw. So nehmen nacheinander beide Spieler jedesmal nicht mehr als 3 Gegenstände. Es verspielt derjenige, dem es zufällt, daß er den letzten Gegenstand nehmen muß. Kann wohl derjenige, der das Spiel beginnt, seinen Partner in die Zwangslage versetzen, das letzte Stück zu nehmen?
Wie muß man das Spiel führen, um zu gewinnen, wenn die Anfangszahl der Gegenstände 30 ist?
Eine Verallgemeinerung des Spiels: Zwei Mitspieler nehmen nacheinander Streichhölzer vom Tisch. Wie muß man das Spiel führen, um den Partner zu zwingen, das letzte Streichholz zu nehmen, wenn am Anfang auf dem Tisch n Streichhölzer liegen und es erlaubt ist, auf einmal 1 bis p Streichhölzer wegzunehmen (p ist bedeutend kleiner als n)?

252. Wer das letzte Streichholz nimmt, gewinnt

Wir ändern die Hauptbedingung des vorigen Spiels. Es soll jetzt der Spieler, der als letzter Streichhölzer wegnimmt, nicht verlieren, sondern das Spiel gewinnen.
Es sind zwei Spieler beteiligt. Sie nehmen nacheinander, jeder nach seinem Belieben, eine beliebige Menge Streichhölzer von 1 bis 6 Stück weg.
Wie muß man das Spiel führen, damit man als letzter Streichhölzer nimmt, wenn am Anfang auf dem Tisch 30 Streichhölzer liegen?



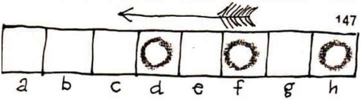
253. Die gerade Zahl siegt

Von 27 Streichhölzern, die auf dem Tisch liegen, nehmen zwei Mitspieler nacheinander wenigstens eins, aber nicht mehr als 4 Streichhölzer weg. Als Sieger gilt derjenige, der am Ende des Spiels eine gerade Anzahl Streichhölzer hat.
Wie gewinnt man das Spiel?

254. Wie gewinnt man?

Es sind zwei Spieler beteiligt. Das Spielfeld ist ein schmales Stück Papier, das in 8 Felder eingeteilt ist. Auf die Felder d, f und h werden Damespielsteine gesetzt (Abb. 147). Die Spieler verschieben nach-

147

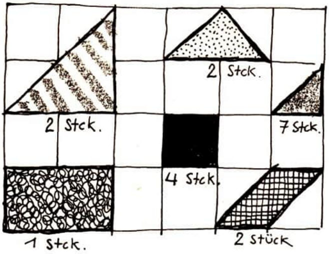


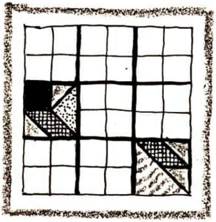
einander irgendeinen von den drei Steinen nach einem beliebigen Feld in Richtung des Pfeils. Ein Stein kann auch einen anderen Stein überspringen und auf ein Feld gesetzt werden, das von einem anderen Stein besetzt ist.
Es gewinnt derjenige, der als letzter einen Stein auf das Feld a setzt. Derjenige, der bei diesem Spiel den ersten Zug macht, kann i m m e r gewinnen, wenn er das System ausgearbeitet hat. Dies und den Beweis überlasse ich euren selbständigen Überlegungen.

255. Ein Quadrat soll ausgelegt werden

Dieses Spiel ist eine kleine Konstruktionsaufgabe. Zwei Spieler müssen je 18 ebene Figuren aus Karton (Abb. 148) haben. Die beiden Figurensätze müssen verschiedene Farben haben.

148





149

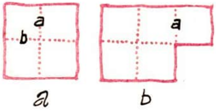
Das Spielfeld ist ein Quadrat aus 36 Feldern, die in 9 quadratische Abschnitte zu je 4 Feldern zusammengefaßt sind (Abb. 149). Die Größe der Figuren ist der Größe der Felder des Spielfelds angepaßt. Durch Kombination der Figuren kann man einige Quadrate von der Größe der Abschnitte (das heißt der Quadrate zu je 4 Feldern) auslegen. Selbstverständlich kann jeder Spieler nicht mehr als 4 Quadrate auslegen, weil er nur über 18 Figuren verfügt, deren Gesamtfläche $17^1/_2$ Felder beträgt.
Es werden die Quadrate auf dem Spielfeld abwechselnd belegt. Ein Zug besteht darin, daß der Spieler eine seiner Figuren in ein beliebiges freies Feld eines Abschnitts, der noch nicht vom Partner besetzt ist, legt; dabei darf er aber mit seinen Figuren nicht mehr als 4 Abschnitte besetzen.
Es ist nicht erlaubt, eine Figur von einem Feld des Spielfelds in ein anderes umzusetzen, die Lage einer Figur zu ändern oder eine Figur aus einem Abschnitt in einen anderen umzulegen.
Der Sinn des Spiels besteht darin, daß man überlegt, wie man seine Figuren zum Auslegen der größten Anzahl von Quadraten verwenden kann.
Das Spiel endet, wenn keiner der Partner ein Quadrat mit den übriggebliebenen Figuren seines Satzes mehr auslegen kann.
Es gewinnt derjenige, der die meisten Quadrate ausgelegt hat.
Mögliche Anordnungen der Figuren werden als Beispiel in Abb. 149 gezeigt.

256. Wer sagt als erster „100"?

Es sind zwei Spieler beteiligt. Der erste Teilnehmer nennt eine beliebige natürliche Zahl, nicht größer als 10, das heißt, er kann 10 und jede natürliche Zahl kleiner als 10 nennen. Der zweite Spieler addiert zur genannten Zahl eine natürliche Zahl, die auch nicht größer als 10 ist, und sagt die Summe an. Zu dieser Summe addiert der erste Spieler eine beliebige natürliche Zahl, die wiederum 10 nicht übersteigt, und sagt die neue Summe an. Zur neuen Summe fügt der zweite eine natürliche Zahl hinzu, nicht größer als 10 usw. bis die Summe 100 erreicht wird.
Der erste kann zum Beispiel 7 ansagen, der zweite 12, der erste 22 usw.
Es gewinnt derjenige, der als erster 100 erreicht.
Wie erlangt man den Sieg?
Wenn ihr den Schlüssel zum Sieg gefunden habt, dann überlegt, wie man das Spiel unter anderen Bedingungen führen kann, zum Beispiel mit einer anderen Zahl als höchstem Summanden und mit einer anderen Grenzsumme als 100.

257. Spiel mit Quadraten

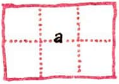
Als Spielfeld dient eine auf kariertes Papier gezeichnete rechtwinklige Figur, die aus einer gewissen (am besten ungeraden) Anzahl quadratischer Felder besteht. Größe und Umrisse der Figur sind gleichgültig.
Zwei Spieler zeichnen nacheinander mit Bleistift oder Feder die Seiten der Innenfelder nach (bei jedem Zug wird eine Seite nachgezeichnet). Diejenigen Seiten der Felder, die mit den Grenzen des Spielfelds zusammenfallen, werden nicht nachgezeichnet – sie gelten als schon fertig. Wer die letzte Seite eines Felds nachzeichnet, rechnet es als seiniges, kennzeichnet es mit irgendeinem Zeichen und macht noch einen zusätzlichen Zug, das heißt, er zieht einen weiteren Strich. Infolgedessen kann er nacheinander mehrere Felder „nehmen". Das Spiel gewinnt, wer am häufigsten die Umrandung quadratischer Felder beendet, das heißt, mehr Felder „nimmt" als der Partner. Die „Qualität" des Gewinns richtet sich nach der Differenz zwischen der Zahl der genommenen und der der übrigen Felder.
Die Vorausberechnung des Spielverlaufes ist bei weitem komplizierter, als sie auf den ersten Blick scheinen mag. Wenn das Spielfeld aus einer großen Anzahl von Feldern besteht, dann erhält man so viele mögliche Kombinationen, daß es fast unmöglich ist, sie im voraus festzulegen, geschweige denn, sie sich zu merken.
Wir betrachten nur einige einfachste Fälle, für die der Ausgang des Spiels verhältnismäßig leicht berechnet werden kann. Die Kenntnis dieser Fälle gibt euch eine Vorrangstellung vor dem „Gegner".
1. Bei einem Quadrat aus 4 Feldern (Abb. 150a) verliert, wer anfängt. Wenn der Spieler, der den ersten Zug macht, eine beliebige Seite eines beliebigen inneren Quadrats, zum Beispiel die Seite a nachzieht, dann nimmt sein „Gegner", wenn er b nachzieht, ein Feld, und dann nimmt er, da er das Recht auf einen weiteren Zug hat, auch die übrigen 3 Felder weg.
2. Wenn eine Figur 5 Felder enthält (Abb. 150b), dann braucht man beim richtigen



150

Anfangszug höchstens 3 Felder zu verlieren (1 nehmen, 4 abgeben); bei einem falschen Zug verliert man alle 5 Felder. Um ein Feld zu nehmen und dem „Gegner" nur die übrigen 4 Felder abzugeben, muß man als ersten Zug die Seite a nachziehen.
Bei jedem anderen Anfangszug nimmt der „Gegner" nacheinander alle 5 Felder weg.
3. Bei einem Rechteck aus 6 Feldern gewinnt derjenige, der als ersten Zug die Seite a nachzieht (Abb. 151).

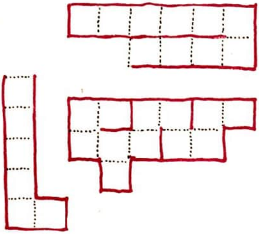
151



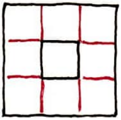
4. Einen ,,Kanal'' in der Breite von einem Feld, geradlinig, gebrochen, an einer Seite offen oder geschlossen, aber ohne innere Öffnungen (Abb. 152), gewinnt vollständig derjenige, der als erster in diese Figur ,,hineingeht''.

Wenn jedoch der geschlossene Kanal um eine Öffnung herumläuft (zum Beispiel um ein schon eingenommenes Quadrat), dann ist es ungünstig, als erster ,,hineinzugehen''. Jeder beliebige Zug führt dann zum Verlust aller Felder (Abb. 153).

152

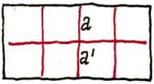


153



5. Bei einem Rechteck, das aus 8 Feldern besteht (Abb. 154), kann es ein unentschiedenes Spiel (remis) geben, wenn beim

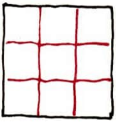
154



ersten Zug die Seite a oder a′ nachgezogen wird. Jeder andere Anfang führt zum Verlieren dessen, der anfängt.

Nach den angeführten Beispielen kann man sagen, daß die Kunst des Spiels darin besteht, daß man geschickt die ursprüngliche Figur in einfache Figuren der betrachteten Art zerlegt und den ,,Gegner'' zwingt, diejenigen Züge anzubringen, die zu seiner Niederlage führen, selbst aber zur rechten Zeit diejenigen anbringt, die den Sieg gewährleisten. Dabei muß man freilich beständig auf die Zahl der eingenommenen Felder achtgeben.

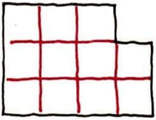
Aufgabe. Bei einem Quadrat, das aus 9 Feldern besteht (Abb. 155), kann man



155

wenigstens 7 Felder gewinnen (8 Felder nehmen, 1 abgeben). Bestimmt, mit welcher Seite man beginnen muß, und untersucht die möglichen Varianten für die Fortsetzung!

Konstruiert selbständig den Spielplan für ein Feld in Gestalt eines Vielecks aus 11 Feldern, wie es in Abb. 156 dargestellt ist. Muß



156

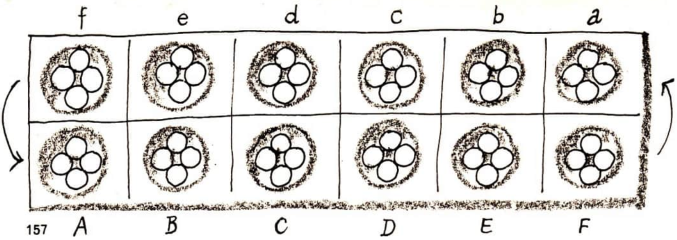
der Anfangende unbedingt siegen oder verlieren, und wieviel Felder gewinnt oder verliert er wenigstens?

258. Oua

Oua ist ein Nationalspiel der Bewohner von Westafrika. Das Spiel wird auf einem Brett ausgeführt, das in 12 Fächer eingeteilt ist. In jedem Fach ist eine kleine Grube ausgehöhlt, und in jeder Grube liegen bei Spielbeginn 4 gleiche Kügelchen (Abb. 157). Die afrikanischen Kinder begnügen sich oft damit, daß sie 12 Vertiefungen in den Erdboden graben und mit 48 Steinchen spielen.

Es sind zwei Spieler beteiligt. Der eine Spieler (nennen wir ihn P) setzt sich an die Seite AF, der andere (nennen wir ihn p) an die Seite af.

Ein ,,Zug'' besteht darin, daß der Spieler aus einer beliebigen Grube auf seiner



157

Seite alle Kügelchen herausnimmt und zu je eins auf jede der nachfolgenden Gruben verteilt. Die Reihenfolge der Gruben ist entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn (ABCDEFabcdef). Wenn zum Beispiel der Spieler P bei seinem ersten Zug die Kügelchen aus der Grube D nimmt, dann muß er je eins in die Gruben E, F, a, b legen. Der Spieler p kann antworten, indem er zum Beispiel die Grube a ausleert (die nach dem Zug des P 5 Kügelchen enthält) und die Kügelchen auf die Gruben b, c, d, e, f verteilt. Als Resultat erhält man folgende Position:

f	e	d	c	b	a
5	5	5	5	6	0
4	4	4	0	5	5
A	B	C	D	E	F

Wenn im Verlauf des Spiels aus einer Grube 12 und mehr Kügelchen herausgenommen werden, dann muß man, wenn man bei der Austeilung bis zu dieser Grube kommt, sie auslassen, das heißt, sie bleibt leer.

Wenn bei der Verteilung auf die Gruben das letzte Kügelchen in die letzte Grube der Seite des „Gegners" (f auf der einen Seite und F auf der anderen) gelangt und danach in dieser Grube 2 oder 3 Kügelchen enthalten sind, dann nimmt der Spieler, der den Zug getan hat, die Kügelchen aus dieser Grube in seine „Beute". Er nimmt sich nacheinander auch die Kügelchen aus den vorangehenden Gruben auf der Seite des „Gegners", wenn in ihnen 2 oder 3 sind, aber nicht weiter als bis zu derjenigen Grube, in der die Zahl der Kügelchen nicht 2 oder 3 beträgt.

Ich erläutere die letzte Regel an Beispielen.

Beispiel 1. In der Position

f	e	d	c	b	a
2	1	2	3	1	2
0	0	0	0	0	6
A	B	C	D	E	F

(1)

geht der Spieler P bei seinem nächsten Zug von der Grube F aus (einen anderen Zug hat er nicht). Die Position wird darauf folgende:

f	e	d	c	b	a
3	2	3	4	2	3
0	0	0	0	0	0
A	B	C	D	E	F

(2)

Das letzte Kügelchen des Spielers P ist nach f gekommen. Die Grube f auf der Grube des „Gegners" enthält jetzt 3 Kügelchen. Dem Spieler P gibt dies das Recht auf „Beute". Er nimmt sich die 3 Kügelchen aus Grube f plus die 2 und 3 aus den Gruben e und d. In den Gruben b und a sind auch 2 und 3 Kügelchen; diese darf der Spieler P aber nicht nehmen, weil die Reihe der Gruben mit 2 oder 3 Kügelchen durch die Grube c unterbrochen wird, in der weder 2 noch 3 Kügelchen sind. Folglich brachte der Zug für P einen Gewinn von 8 Kügelchen.

Wenn übrigens der Spieler p in der Position (2) wünscht, daß das Spiel weitergeht, dann darf er nicht von der Grube a oder b aus spielen, weil dann der Spieler P keine Kügelchen auf seiner Seite hat und das Spiel zu Ende ist.

Beispiel 2. In der Position

f	e	d	c	b	a
0	1	2	0	1	2
1	0	0	0	7	7
A	B	C	D	E	F

gewinnt der Spieler P, wenn er mit seinem nächsten Zug von der Grube F ausgeht, nichts, weil sein letztes Kügelchen auf die eigene Seite des Bretts gelangt. Wenn er seinen Zug von E aus unternimmt, gewinnt er auch nichts, weil sein letztes Kügelchen zwar in die Grube f kommt, aber sich nach diesem Zug darin nicht 2 oder 3 Kügelchen befinden.

Beispiel 3. Eine leere Grube ist nicht immer ungefährlich. In der Position

f	e	d	c	b	a
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	17
A	B	C	D	E	F

sind alle Gruben auf der Seite des Spielers p leer, und dennoch gewinnt der Spieler P 12 Kügelchen. Er beginnt von der Grube F her; das führt zu folgender Position:

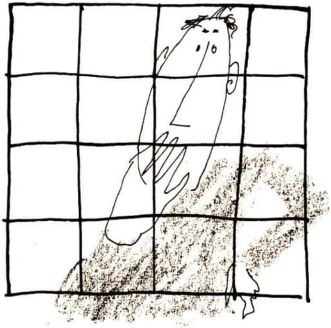
f	e	d	c	b	a
2	2	2	2	2	2
2	1	1	1	1	0
A	B	C	D	E	F

Das letzte Kügelchen fällt in f, und der Spieler P nimmt alle 12 Kügelchen aus den Gruben auf der Seite des Spielers p.
Das Spiel nimmt nur in zwei Fällen ein Ende: 1. wenn die Spieler feststellen, daß die auf dem Brett verbliebenen Kügelchen nicht ausreichen, um eine Position zu bilden, die „Beute" bringt; 2. wenn ein Spieler keine Kügelchen auf seiner Seite hat und daher keinen Zug tun kann.
Als Sieger gilt derjenige, der am Ende der Partie die meisten Kügelchen hat[1].
Dieses Spiel verlangt, ähnlich dem Schach, Berechnungen auf einige Züge voraus. Seine Theorie hat noch niemand erarbeitet.

[1] Wenn das Spiel aus dem ersten Grunde aufgehört hat, dann werden die auf dem Brett verbliebenen Kügelchen bei der Schlußabrechnung der Gewinnpunkte nicht berücksichtigt. Wenn jedoch das Spiel aus dem zweiten Grunde zu Ende ging, dann werden nach Vereinbarung die auf dem Brett verbliebenen Kügelchen entweder auch nicht berücksichtigt oder dem Spieler überlassen, auf dessen Seite sich noch Kügelchen befinden, oder umgekehrt als Kompensation demjenigen Spieler überlassen, der der Möglichkeit beraubt ist, den nächsten Zug zu tun

259. Spiel mit magischen Quadraten

Mit diesem Spiel kann man sich allein unterhalten, aber es können auch mehrere Spieler teilnehmen und miteinander in Wettbewerb treten.
Jeder Spieler zeichnet auf ein Blatt Papier ein Quadrat, das aus 16 oder 25 oder 36 usw. gleichen Feldern besteht (die Anzahl der Felder wird vorher unter den Teilnehmern festgelegt). Für jede Runde wird



eine bestimmte Menge ganzer Zahlen festgelegt, von denen jede Zahl wenigstens einmal verwendet werden muß. Man setzt die Zahlen so in die Felder des Quadrats, daß die Summen der Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte des Quadrats gleich sind. Man hat dann ein sogenanntes magisches Quadrat aufgestellt. Streng genommen müßten bei einem magischen Quadrat auch die Summen der Zahlen in jeder Diagonale gleich denen jeder Zeile und Spalte sein (vgl. S. 157 ff). Für dieses Spiel ist, wie ihr seht, die Aufgabe etwas erleichtert, und sie läßt sich in dieser Art allein mit Additionen und Subtraktionen lösen.
Man kann die Zahlen von Feld zu Feld verschieben und austauschen. Die Zahlen kann man entweder mit Bleistift in die Felder des Quadrats eintragen oder auf zugeschnittene

Spielmarken schreiben und dann diese Spielmarken in die Felder einordnen. Es ist zweckmäßig, nicht zu viele verschiedene Zahlen festzulegen. Es können zum Beispiel alle einstelligen Zahlen oder ein Teil davon sein.

Beim Wettbewerb unter mehreren Teilnehmern sind zwei Sieger möglich: Der eine Sieger ist, wer zuerst die Lösung hat, der andere, wer von den Teilnehmern die größte Summe in jeder Zeile und Spalte seines Quadrats erreicht hat.

Beispiel 1. Das Quadrat hat 25 Felder. Gegeben sind die Zahlen: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9. Mit diesen Zahlen sollen alle Felder nach der Spielregel ausgefüllt werden; dabei soll jede Zahl mindestens einmal verwendet werden. Eine der möglichen Lösungen wird in Abb. 158 gezeigt. Die Summen der Zahlen sind in jeder Zeile und Spalte gleich, und zwar 30.

6	8	7	0	9
6	5	8	9	2
9	2	7	9	3
5	7	7	4	7
4	8	1	8	9

158

Beispiel 2. Das Quadrat hat 16 Felder. Gegeben sind die Zahlen: 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7. Ordnet sie nach der Spielregel ein! Zusätzlich wird jetzt gefordert, daß die Summe der Zahlen in den vier mittleren Feldern des Quadrats dieselbe sein soll wie in jeder Zeile oder Spalte. Eine der möglichen Lösungen wird in Abb. 159 gezeigt.

7	3	4	2
3	4	4	5
5	4	4	3
1	5	4	6

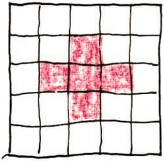
159

Ein Spielvorschlag: Das Quadrat hat 25 Felder. Gegeben sind die Zahlen: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 und 8.

Die Felder des Quadrats sollen mit diesen Zahlen nach der Spielregel ausgefüllt werden. Zusätzlich wird folgendes verlangt:

a) In den farbigen Feldern (Abb. 160) soll die Summe der Zahlen dieselbe sein wie in jeder Zeile oder Spalte.

b) Die Zahlen 0 und 6 dürfen nur einmal verwendet werden.



160

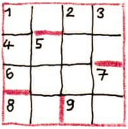
260. „Kreuzzahlenrätsel"

Anstatt irgendeine beliebige Figur mit Wörtern auszufüllen, wie das bei Kreuzworträtseln verlangt wird, kann man die freien Felder einer solchen Figur mit Zahlen ausfüllen, die man nach bestimmten Bedingungen aussucht.

Die Anfangsziffer der gesuchten Zahl muß in das numerierte Feld gesetzt werden und ihre letzte Ziffer in das letzte Feld der Spalte oder Zeile oder vor eine Begrenzung, die in den Zeichnungen durch einen starken Strich oder ein schraffiertes Feld dargestellt wird. Die Zahlen werden hier, wie die Wörter bei Kreuzworträtseln, in der Waagerechten von links nach rechts und in der Senkrechten von oben nach unten gelesen. In jedes Feld kann nur eine Ziffer gesetzt werden.

Hier sind einige Beispiele für Kreuzzahlenrätsel:

Aufgabe 1. Es sollen alle Felder eines Quadrats (Abb. 161) mit Zahlen ausgefüllt wer-



161

den, die folgende Bedingungen erfüllen:
waagerecht:

1. Die positive Differenz (a — b) zwischen einer Zahl a, die aus vier Ziffern in natürlicher Folge besteht, und der Zahl b, die mit denselben Ziffern, aber in umgekehrter Reihenfolge geschrieben ist („umgekehrte" Zahl).
4. Eine Zahl mit Ziffern in natürlicher Folge.
6. Das Produkt aus den beiden Zahlen Nr. 3 senkrecht und Nr. 8 waagerecht.
8. Eine Primzahl, das heißt eine solche natürliche Zahl, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist.
9. Ein Vielfaches der Zahl 13.

senkrecht:

1. Der Kubus einer Zahl, die durch eine Ziffer der Zahl Nr. 1 waagerecht ausgedrückt wird.
2. Die letzten drei Ziffern stimmen überein mit den letzten Ziffern des Produkts aus den beiden Zahlen Nr. 1 waagerecht und Nr. 7 senkrecht.
3. Das Resultat aus der Division von Nr. 6 durch Nr. 8, beide waagerecht.
5. Die Zahl besteht aus drei Ziffern in natürlicher Folge.
7. Das Produkt eines Teilers der Zahl Nr. 3 senkrecht mit einem Teiler der Zahl Nr. 1 waagerecht.

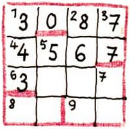
Wie auch in Kreuzworträtseln muß man die Lösung mit der klarsten Bedingung beginnen. So ergibt zum Beispiel eine kleine Berechnung die Antwort auf die Frage Nr. 1 waagerecht. Da die „umgekehrte" Zahl nach dem Sinn der Bedingung kleiner als die ursprüngliche ist, stellen die Ziffern der ursprünglichen Zahl offensichtlich eine fallende Folge dar: a, a — 1, a — 2, a — 3. Wir lesen diese Buchstaben als Ziffern und schreiben nach der arithmetischen Methode eine vierstellige Zahl: [a] [a — 1] [a — 2] [a — 3]. Wir suchen die Differenz zwischen dieser Zahl und der „umgekehrten":

$$\begin{array}{r} [a]\,[a-1]\,[a-2]\,[a-3] \\ -\ \underline{[a-3]\,[a-2]\,[a-1]\,[a]} \end{array}$$

a — 3 Einer sind weniger als a Einer; borgen wir einen Zehner, wandeln ihn in Einer um; dann haben wir (10 + a — 3) — a = 7. Die Zehner sind a — 2; einen haben wir geborgt, bleiben a — 3; das ist weniger als a — 1. Wir borgen einen Hunderter, wandeln ihn in Zehner um; dann haben wir (10 + a — 3) — (a — 1) = 8. An Hundertern bleiben ebensoviel, wie wir subtrahieren müssen. Folglich steht an der Stelle der Hunderter eine Null und an der Stelle der Tausender a — (a — 3) = 3. Als endgültige Zahl ergibt sich:

$$\begin{array}{r} [a]\,[a-1]\,[a-2]\,[a-3] \\ -\ \underline{[a-3]\,[a-2]\,[a-1]\,[a]} \\ 3 \qquad 0 \qquad 8 \qquad 7 \end{array}$$

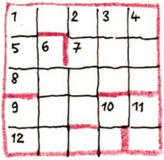
Wir schreiben diese Zahl in die erste Zeile des Quadrats ein (Abb. 162).



162

Jetzt läßt sich leicht auch die Frage Nr. 1 senkrecht beantworten. Nach der Bedingung muß in dieser Senkrechten der Kubus einer der drei Zahlen 3, 7 oder 8 stehen. Es paßt 343 (Kubikzahl von 7). Die Bedingung der Frage Nr. 4 waagerecht erfüllt die Zahl 4567. Jetzt hat sich auch die Zahl für Nr. 3 senkrecht ergeben. Die übrigen Zahlen sucht selbständig.

Aufgabe 2. Es sollen alle Felder des Quadrats (Abb. 163) mit Zahlen ausgefüllt werden, die folgende Bedingungen erfüllen:



163

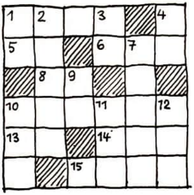
waagerecht:

1. Eine Zahl, bei der alle Ziffern verschieden sind und die keine Ziffer mit der Zahl Nr. 8 waagerecht gemeinsam hat,

bei der ihrerseits auch alle Ziffern verschieden sind.
5. Der größte Teiler der Zahl Nr. 3 senkrecht.
7. Die „umgekehrte" Zahl Nr. 3 senkrecht.
8. Vgl. Nr. 1 waagerecht.
9. Ein Neuntel der Summe der Zahlen Nr. 1 und Nr. 8 waagerecht.
12. Das Produkt aus drei zweistelligen Primzahlen, von denen zwei Teiler der „umgekehrten" Zahl Nr. 6 senkrecht sind.

senkrecht:
1. Die erste Ziffer ist gleich der Summe der beiden anderen.
2. Eine Jahreszahl aus der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts.
3. Die Differenz zwischen den Zahlen Nr. 1 und Nr. 8 waagerecht.
4. Die letzte Ziffer der Zahl ist das Produkt der durch die ersten beiden Ziffern ausgedrückten Zahlen.
6. Die „umgekehrte" Zahl ist ein Vielfaches der Zahl Nr. 3 senkrecht und besteht aus drei zweistelligen Primfaktoren.
9. Die Zahl ist einer der Teiler der „umgekehrten" Zahl Nr. 6.
10. Dieselbe Zahl wie Nr. 5 waagerecht.
11. Der kleinste Teiler der Zahl Nr. 3 senkrecht.

Aufgabe 3. Es sollen alle Felder des Quadrats, das in Abb. 164 dargestellt ist, mit Zahlen ausgefüllt werden, die folgende Bedingungen erfüllen:



164

waagerecht:
1. Das Quadrat einer Primzahl.
5. Die Hälfte der Zahl, die der größte gemeinsame Teiler der Zahlen Nr. 10 und Nr. 11 senkrecht ist.
6. Der Kubus einer Quadratzahl.
8. Die positive Quadratwurzel aus der Zahl Nr. 1 waagerecht.
10. Das Quadrat einer Zahl. Es ist eine symmetrische Zahl, das heißt eine solche, die in gleicher Weise von links nach rechts wie von rechts nach links gelesen werden kann.
13. Um 1 mehr als die Zahl Nr. 9 senkrecht.
14. Das Fünffache der Zahl Nr. 8 waagerecht.
15. Das Quadrat der Zahl, die um 1 größer als Nr. 13 waagerecht ist.

senkrecht:
1. Die Zahl, die um 8 Einer kleiner ist als die kleinste positive ganze Zahl, die bei der Division durch 2, 3, 4, 5 und 6 entsprechende Reste von 1, 2, 3, 4 und 5 ergibt.
2. Eine Zahl mit der Quersumme 29.
3. Eine Primzahl.
4. Eine Primzahl, die ein Teiler der Zahl Nr. 11 senkrecht ist.
7. Das vierfache Produkt der Zahl der Zehner von Nr. 15 waagerecht mit der Zahl Nr. 13 waagerecht.
9. Die verdoppelte Zahl Nr. 4 senkrecht.
10. Die „umgekehrte" Zahl Nr. 11 senkrecht.
11. Die positive Quadratwurzel aus der Zahl Nr. 10 waagerecht.
12. Ein Vielfaches des größten Teilers der Zahl Nr. 13 waagerecht.

B. Kunststücke

Hauptinhalt von Rechenkunststücken ist das Erraten gedachter Zahlen oder der Ergebnisse damit angestellter Rechenoperationen. Das ganze „Geheimnis" dieser Kunststücke besteht darin, daß der „Ratende" besondere Eigenschaften der Zahlen kennt und auszunutzen versteht.
Das mathematische Interesse an jedem Kunststück besteht in der „Entlarvung" seiner theoretischen Grundlagen, die in der Mehrzahl der Fälle ziemlich einfach sind, aber manchmal geschickt getarnt werden.
Ob ein Kunststück durchführbar ist, kann man an jedem beliebigen Beispiel prüfen, aber für den Beweis muß man sich der Algebra bedienen. Im Anfang könnt ihr die „Beweise" der Kunststücke weglassen und braucht euch nur darauf zu beschränken, daß ihr ihren Inhalt für die Vorführung vor euren Freunden einstudiert. Aber auch die „Beweise" bereiten dem keine Schwierigkeiten, der gern nachdenkt und mit den Anfangsgründen der Algebra vertraut ist.
Hier wird nur das wesentliche Gerüst der Kunststücke gegeben, während ihre Ausgestaltung je nach Gelegenheit und Ort und je nach eurem Geschmack, eurem Scharfsinn und euren Einfällen verschiedenartig sein kann.

261. Es sollen „gedachte" Zahlen erraten werden (7 Kunststücke)

1. Denkt euch eine Zahl aus. Zieht 1 ab. Verdoppelt den Rest und fügt die gedachte Zahl hinzu. Nennt das Resultat. Ich errate die gedachte Zahl.
Das Verfahren. Fügt zum Resultat 2 hinzu und teilt die Summe durch 3. Der Quotient ist die gedachte Zahl.
Beispiel. Ich denke mir 18; $18 - 1 = 17$; $17 \cdot 2 = 34$; $34 + 18 = 52$. Wir erraten: $52 + 2 = 54$; $54 : 3 = 18$.
Beweis. Die gedachte Zahl bezeichnen wir mit x. Wir führen die verlangten Rechenoperationen durch: $x - 1$; $2(x - 1)$; $2(x - 1) + x$. Das Ergebnis: $2x - 2 + x = 3x - 2$. Wenn wir 2 addieren, erhalten wir $3x$, und bei der Division durch 3 erhalten wir die gedachte Zahl x.
2. Gebt eurem Freund auf, sich irgendeine Zahl auszudenken und mit dieser und einiger beliebiger von euch genannter Zahlen mehrere Male abwechselnd Multiplikationen und Divisionen anzustellen, das Resultat euch aber nicht zu nennen.
Nach einigen Multiplikationen und Divisionen haltet ihr an und gebt ihm auf, das Resultat durch die Zahl zu teilen, die er sich ausgedacht hat, dann zu dem Quotienten die gedachte Zahl zu addieren und euch das Resultat zu sagen. Nach diesem Resultat erratet ihr sofort die Zahl, die sich euer Freund ausgedacht hatte. Das Geheimnis ist sehr einfach. Der Ratende muß sich selbst auch eine beliebige Zahl ausdenken (zum Beispiel 1) und mit ihr alle Multiplikationen und Divisionen bis zur Division durch die anfangs gedachte Zahl durchführen. Dann erhält er als Quotienten dieselbe Zahl wie der Freund, selbst wenn die beiden ursprünglich ausgedachten Zahlen verschieden waren. Danach muß der Ratende von dem angesagten Resultat sein Resultat abziehen. Die Differenz ist die gesuchte Zahl.
Beispiel. Die gedachte Zahl soll 7 sein. Sie wird mit 12 multipliziert, das Resultat (84) durch 2 geteilt, die erhaltene Zahl (42) mit 5 multipliziert, das Resultat (210) durch 3 geteilt. Es ergibt sich 70 und nach der Division durch die gedachte Zahl und der Addition der gedachten Zahl 17.
Gleichzeitig habt ihr „für euch" die Zahl 1 gemerkt. Ihr multipliziert mit 12, das ergibt 12. Ihr teilt durch 2, das ergibt 6. Ihr multipliziert mit 5, das ergibt 30. Ihr teilt durch 3, das ergibt 10, und zieht 10 von 17 ab und erhaltet die gesuchte Zahl 7.

Anmerkung 1. Zur Verstärkung der Wirkung könnt ihr dem Freund selbst die Gelegenheit einräumen, die Zahlen zu nennen, mit denen er die Multiplikationen und Divisionen durchführen möchte. Er muß euch nur jedesmal diese Zahlen ansagen.

Anmerkung 2. Man braucht nicht unbedingt mit den Multiplikationen und Divisionen abzuwechseln. Man kann erst einige Multiplikationen ansagen und dann einige Divisionen oder umgekehrt.

Beweist dieses Kunststück, das heißt, erklärt „in Buchstaben", daß das Kunststück mit jeder beliebigen Zahl angestellt werden kann.

3. Wir vereinbaren, als größeren Teil einer ungeraden Zahl die Zahl zu bezeichnen, die um $^1/_2$ größer ist als die Hälfte der ungeraden Zahl. So ist bei der Zahl 13 der größere Teil gleich 7, bei der Zahl 21 ist er gleich 11.

Denkt euch eine natürliche Zahl aus. Addiert ihre Hälfte oder, wenn sie ungerade ist, ihren größeren Teil. Zu dieser Summe fügt deren Hälfte und, wenn sie ungerade ist, deren größeren Teil hinzu. Teilt die erhaltene Zahl durch 9, gebt den Quotienten bekannt, und, wenn ein Rest geblieben ist, sagt an, ob er größer, kleiner oder gleich 5 ist. Je nach der Antwort ist die gedachte Zahl gleich

dem vierfachen Quotienten, wenn kein Rest geblieben ist;

dem vierfachen Quotienten + 1, wenn der Rest kleiner als 5 ist;

dem vierfachen Quotienten + 2, wenn der Rest gleich 5 ist;

dem vierfachen Quotienten + 3, wenn der Rest größer als 5 ist.

Beispiel. Ausgedacht wurde 15. Wenn wir die geforderten Berechnungen durchführen, haben wir: $15 + 8 = 23$; $23 + 12 = 35$; $35 : 9 = 3$ Rest 8. Es wird angesagt: „Quotient 3, Rest größer als 5."

Wir „erraten": $3 \cdot 4 + 3 = 15$; es war 15 ausgedacht worden.

Beweist auch dieses Kunststück. Beim Beweis beachtet, daß jede nicht negative ganze Zahl (folglich auch die gedachte) durch eine der folgenden Formen ausgedrückt werden kann: $4n + 1$, $4n + 2$, $4n + 3$, wobei der Buchstabe n eine beliebige nicht negative ganze Zahl bedeutet.

4. Zuerst geht vor wie in dem vorangehenden Kunststück, das heißt, gebt auf, sich eine positive ganze Zahl auszudenken und zu ihr die Hälfte oder ihren größeren Teil zu addieren und dann wiederum die Hälfte der erhaltenen Summe oder deren größeren Teil zu addieren. Aber an Stelle der Forderung, das Resultat durch 9 zu teilen, gebt jetzt auf, alle Ziffern des erhaltenen Resultats bis auf eine zu nennen. Nur darf diese verschwiegene Zahl keine Null sein. Zu jeder Ziffer einschließlich der verschwiegenen muß angegeben werden, an welcher Stelle sie im Resultat steht. Schließlich muß der Befragte angeben, in welchen Fällen (im ersten, im zweiten, oder im ersten und zweiten oder in keinem Falle) er den größeren Teil einer Zahl addieren mußte. Um danach die gedachte Zahl zu ermitteln, muß man alle Ziffern, die genannt werden, addieren und hinzufügen:

0, wenn überhaupt kein größerer Teil einer Zahl addiert wurde;

6, wenn nur im ersten Falle ein größerer Teil einer Zahl addiert wurde;

4, wenn nur im zweiten Falle ein größerer Teil einer Zahl addiert wurde;

1, wenn in beiden Fällen ein größerer Teil einer Zahl addiert wurde.

Weiterhin muß man in allen Fällen die erhaltene Summe bis zur nächsten durch 9 teilbaren Zahl ergänzen. Diese Ergänzung stellt die unbekannte Ziffer dar. Da man jetzt alle Ziffern des Resultats kennt und folglich auch das gesamte Resultat, ist es nicht schwer, auch die gesuchte Zahl zu finden. Dazu muß man das Resultat durch 9 teilen, den Quotienten mit 4 multiplizieren und je nachdem, ob der Rest kleiner als 5, gleich 5 oder größer als 5 ist, zu dem Produkt 1, 2 oder 3 addieren. Ist der Rest = 0, wird nichts addiert.

Beispiel 1. Ausgedacht wurde 28. Wenn man alle Berechnungen durchgeführt hat, ergibt sich 63. Die Ziffer 3 hält man geheim. Dann ergänzt der Ratende die genannte Ziffer 6 auf 9 und erhält 3. Als Resultat findet man 63. Die gesuchte Zahl ist $(63 : 9) \cdot 4 = 28$.

Beispiel 2. Ausgedacht wurde 125. Nach

Ausführung der Berechnungen ergibt sich 282. Verschwiegen wird, nehmen wir an, die erste Ziffer; 2. Angesagt wird: Die zweite Ziffer ist 8 und die dritte 2, und der größere Teil einer Zahl wurde nur im ersten Falle hinzugefügt.

Wir „erraten": $8 + 2 + 6 = 16$. Die nächste durch 9 teilbare Zahl ist 18. Folglich ist die geheim gehaltene Ziffer eine 2; denn $18 - 16 = 2$. Wir stellen die gedachte Zahl fest; $282 : 9 = 31$ Rest 3; $31 \cdot 4 + 1 = 125$.

Beispiel 3. Es soll der, der sich die Zahl ausgedacht hat, angesagt haben, daß das zuletzt erhaltene Resultat aus 3 Ziffern besteht, wobei die erste Ziffer 1 und die letzte 7 ist und der größere Teil einer Zahl in beiden Fällen hinzugefügt wurde.

Wir „raten" die gedachte Zahl: $1 + 7 + 1 = 9$ Die Ergänzung bis zu der nächsten durch 9 teilbaren Zahl ist Null oder Neun; aber Null darf nach der Bedingung nicht geheim gehalten werden. Folglich ist die geheim gehaltene Ziffer 9 und das ganze Resultat 197. Wir teilen 197 durch 9. $197 : 9 = 21$ Rest 8. Die gedachte Zahl ist $21 \cdot 4 + 3 = 87$.

Beweist das Kunststück! Es ist nicht schwer, besonders nicht für diejenigen, die sich über die Beweisführung bei dem vorangehenden Kunststück klar geworden sind.

5. Denkt euch irgendeine Zahl (die kleiner als 100 ist, um die Berechnung nicht zu erschweren) und erhebt sie ins Quadrat. Zur gedachten Zahl fügt eine beliebige Zahl (außer Null) hinzu (sagt an, welche) und erhebt die erhaltene Summe auch ins Quadrat. Sucht die Differenz zwischen den erhaltenen Quadratzahlen und sagt das Resultat an. Um die gedachte Zahl zu erraten, genügt es, die Hälfte dieses Resultats durch die Zahl zu teilen, die zur gedachten hinzugefügt worden ist, und vom Quotienten die Hälfte der hinzugefügten Zahl abzuziehen.

Beispiel. Ausgedacht wurde 53; $53^2 = 2809$. Zur gedachten Zahl wird 6 hinzugefügt: $53 + 6 = 59$; $59^2 = 3481$; $3481 - 2809 = 672$. Dieses Resultat wird angesagt.

Wir raten:

$672 : 12 = 56$ $(= 336 : 6 = 56)$; $6 : 2 = 3$; $56 - 3 = 53$. Die gedachte Zahl ist 53.

Sucht den Beweis!

6. Gebt eurem Freund auf, sich eine beliebige ganze Zahl zwischen 6 und 60 auszudenken. Jetzt soll er zunächst diese Zahl durch 3 teilen, dann durch 4 und dann durch 5 und die Reste der Divisionen ansagen. Nach diesen Resten findet ihr mit Hilfe einer Formel die gedachte Zahl.

Es sollen die Reste r_1, r_2 und r_3 sein. Merkt euch jetzt folgende Formel: $S = 40\,r_1 + 45\,r_2 + 36\,r_3$.

Wenn sich $S = 0$ ergibt, dann ist die gedachte Zahl 60; wenn $S \neq 0$ ist, dann gibt der Rest aus der Division von S durch 60 die gedachte Zahl an. Eurem Freunde, der sich die Zahl ausgedacht hat, wird es nicht so leichtfallen, von selbst hinter euer Geheimnis zu kommen.

Beispiel. Gedacht wurde 14. Angesagt werden die Reste: $r_1 = 2$, $r_2 = 2$, $r_3 = 4$.

Wir rechnen: $S = 40 \cdot 2 + 45 \cdot 2 + 36 \cdot 4 = 314$; $314 : 60 = 5$ Rest 14. Die gedachte Zahl ist 14.

Ihr braucht der Formel, die euch ohne Ableitung vorgesetzt wurde, nicht blindlings zu trauen. Überzeugt euch zunächst davon, daß sie in allen Fällen, die nach der Bedingung des Kunststücks zulässig sind, unweigerlich zutrifft, und dann führt das Kunststück vor.

7. Wenn ihr euch die mathematische Grundlage der hier dargelegten Kunststücke klarmacht, könnt ihr sie variieren. Ein Beispiel: Im vorangehenden Kunststück, in dem eine gedachte Zahl nach ihren Resten bei einer Division erraten wurde, waren Divisoren die Zahlen 3, 4 und 5. Wir ersetzen sie durch andere Divisoren, zum Beispiel 3, 5 und 7, und stecken den Bereich für die auszudenkende Zahl von 7 bis 105 ab. Die Multiplikatoren in der Formel ändern sich natürlich auch. Sucht die neue Formel!

Antwort. $S = 70\,r_1 + 21\,r_2 + 15\,r_3$, wobei r_1, r_2 und r_3 entsprechende Reste aus der Division der gedachten Zahl durch 3, 5 und 7 sind. Ist $S \geqq 105$, dann ist die gedachte Zahl gleich dem Rest aus der Division von S durch 105; ist $0 < S < 105$, dann ist S die gedachte Zahl; ist $S = 0$, dann ist 105 die gedachte Zahl.

262. Es werden die Resultate von Rechenoperationen erraten, ohne nach etwas zu fragen

Die folgenden Kunststücke beruhen darauf, daß man Berechnungen anstellen lassen kann, die zu einem im voraus festgelegten Resultat führen, ohne daß man sich die Zahl sagen läßt, mit der die Berechnungen begonnen wurden.

Kunststück 1. Gebt auf, eine gedachte Zahl mit einer willkürlich von euch ausgewählten Zahl zu multiplizieren und zu dem Produkt eine Zahl zu addieren, die auch willkürlich von euch ausgewählt wird. Die Summe gebt auf durch eine dritte ebenfalls von euch willkürlich gegebene Zahl (außer Null) zu dividieren. Ihr dividiert in dieser Zeit im Kopfe die erste der von euch genannten Zahlen durch die dritte und, welche Zahl sich dabei ergibt, sovielmal laßt ihr von dem Quotienten die gedachte Zahl subtrahieren. Dieses letzte Resultat „erratet" ihr. Es ist gleich dem Quotienten aus der Division der zweiten der von euch aufgegebenen Zahlen durch die dritte.

Beispiel. Angenommen, gemerkt wurde 6. Ihr gebt auf, diese Zahl mit 4 zu multiplizieren (ihr merkt euch diese Zahl als erste). Man erhält 24. Ihr gebt weiter auf, 15 (die zweite Zahl) zu addieren. Man erhält 39. Ihr gebt schließlich auf, durch 3 (dritte Zahl) zu dividieren. Man erhält 13. Eure Berechnung ist: $4 : 3 = 1^1/_3$. Nun gebt ihr dem Teilnehmer auf, von dem von ihm errechneten Quotienten (von 13) die gedachte Zahl und noch ein Drittel von ihr zu subtrahieren. Er subtrahiert 6 und 2, insgesamt 8, und erhält $13 - 8 = 5$. In dieser Zeit führt ihr im Kopf die Division der zweiten von euch genannten Zahl (15) durch die dritte (3) aus und erhaltet auch 5. Diese Zahl gebt ihr als das erwartete Resultat bekannt.

Beweist, daß eine solche Übereinstimmung der Resultate nicht zufällig, sondern völlig gesetzmäßig ist!

Kunststück 2. Schreibt irgendeine ganze Zahl zwischen 1 und 50 auf ein Stück Papier und haltet sie geheim.

Auch jeder Teilnehmer soll nach Belieben eine ganze Zahl aufschreiben, die größer als 50 ist, aber 100 nicht übersteigt, und ohne sie euch zu zeigen, soll er folgende Berechnungen ausführen:

1. Er soll zu seiner Zahl $99 - x$ addieren, wobei x die von euch aufgeschriebene Zahl ist. Die Differenz berechnet ihr im Kopf und nennt dem Teilnehmer nur das Resultat.
2. In der erhaltenen Summe soll er die äußerste linke Ziffer wegstreichen und die ihr entsprechende Zahl zur restlichen Zahl addieren.
3. Die erhaltene Zahl soll er von der Zahl abziehen, die er am Anfang niedergeschrieben hat.

Im Ergebnis kommt bei allen Teilnehmern ein und dieselbe Zahl heraus, und zwar diejenige, die von euch im voraus niedergeschrieben worden war.

Beispiel. Die Zahl, die von euch niedergeschrieben worden ist und geheim gehalten wird, soll 18 sein; die Zahl, die einer der Teilnehmer niedergeschrieben hat, 64. Ihr gebt auf, $99 - 18 = 81$ zu addieren. Man erhält $64 + 81 = 145$.

Die Ziffer 1 wird ausgestrichen und die Addition $45 + 1 = 46$ durchgeführt. Die Differenz zwischen der gedachten Zahl (64) und der errechneten (46) ist $64 - 46 = 18$. Das ist die Zahl, die ihr niedergeschrieben und geheim gehalten habt.

263. Ich finde heraus, wieviel jeder genommen hat

Es soll der erste Teilnehmer eine beliebige durch 4 teilbare Anzahl von Gegenständen (Streichhölzer, Geldstücke usw.) nehmen. Der zweite soll das 7fache von dem nehmen, wovon der erste das 4fache genommen hat. Den dritten Teilnehmer bittet ihr, das 13fache zu nehmen.

Jetzt soll der dritte Teilnehmer von der Anzahl seiner Gegenstände dem ersten und dem zweiten soviel abgeben, wieviel jeder von ihnen bereits hat. Dann soll der zweite Teilnehmer dem dritten und dem ersten soviel Gegenstände geben, wieviel jeder hat. Schließlich soll auch der erste so verfahren.

Fragt einen beliebigen Teilnehmer, wieviel

Gegenstände er hat. Die Zahl, die er euch nennt, teilt durch 2. Das Ergebnis besagt, wieviel Gegenstände der erste Teilnehmer ursprünglich genommen hat. Die Zahl der Gegenstände, die der erste genommen hatte, teilt durch 4 und multipliziert mit 7. Das ist die Zahl der Gegenstände, die der zweite Teilnehmer genommen hatte. Und der dritte Teilnehmer nahm das 13fache von dem, von dem der zweite das 7fache genommen hatte. Es ist sehr leicht, das Kunststück zu beweisen.

264. 1, 2 Versuche . . . und ich habe es erraten

Denkt euch zwei beliebige positive ganze Zahlen aus. Addiert ihre Summe zu ihrem Produkt und sagt mir das Resultat. Wie ein Sportler ein Hindernis nach ein, zwei Anläufen überspringt, so unternehme ich es, die von euch gedachte Zahl zu erraten, wenn auch vielleicht nicht gleich beim ersten Mal. Die Methode ist einfach, wenn auch nicht gleich zu überblicken. Ich füge 1 zu eurem Resultat, das Ergebnis teile ich in 2 Faktoren und von jedem Faktor subtrahiere ich 1.
Beispiel 1. Man hat mir das Resultat 34 genannt. Ich rechne: $34 + 1 = 35$; dann $35 = 5 \cdot 7$ und auch $35 = 35 \cdot 1$. Folglich sind die gedachten Zahlen 4 und 6 oder 34 und 0. Ich kann euch aufgeben, die Summe der gedachten Zahlen von ihrem Produkt zu subtrahieren. Um jetzt die gedachten Zahlen herauszubekommen, addiere ich wieder 1 zu eurem Resultat, zerlege die erhaltene Zahl in 2 Faktoren und addiere zu jedem 1.
Beispiel 2. Man hat das Resultat 64 genannt. Ich rechne: $64 + 1 = 65$; $65 = 13 \cdot 5$ oder $65 = 65 \cdot 1$. Folglich sind die gedachten Zahlen 14 und 6 oder 66 und 2.
Beweist die Richtigkeit dieses Verfahrens.

265. Wer hat den Radiergummi genommen und wer den Bleistift?

Eure Mitspieler sollen A und B sein. Dreht euch um und gebt dem einen auf, einen Bleistift, dem anderen, einen Radiergummi zu nehmen. Dann sagt:
„Dem Besitzer des Bleistifts nenne ich die Zahl 7, dem des Radiergummis die Zahl 9. (Es können auch andere Zahlen sein, aber die eine muß eine Primzahl und die andere eine zusammengesetzte Zahl sein, die sich nicht durch die erste teilen läßt.)
„Du, A, multiplizierst deine Zahl mit 2 und du, B, mit 3." (Die eine dieser Zahlen muß ein ganzzahliges Mal in der von euch genannten zusammengesetzten Zahl enthalten sein, wie zum Beispiel 3 in 9, und die andere muß wieder eine Primzahl sein, wie zum Beispiel 3 und 2.) „Addiert die Resultate und nennt mir die Summe oder sagt, ob sich diese Summe ohne Rest durch 3 teilen läßt" (durch die von euch gegebene Zahl, die als Teiler in der gegebenen zusammengesetzten Zahl enthalten ist).
Wenn ihr das wißt, könnt ihr sofort feststellen, wer den Bleistift genommen hat und wer den Radiergummi.
Wenn nun die erhaltene Summe durch 3 teilbar ist, bedeutet das, daß die mit 3 multiplizierte Zahl die nicht durch 3 teilbare ist, das heißt die 7. Da ihr wißt, wer seine Zahl mit 3 multipliziert hat (B) und daß die Zahl 7 dem Besitzer des Bleistifts genannt worden ist, folgert ihr, daß B den Bleistift hat. Umgekehrt, wenn die erhaltene Summe nicht durch 3 teilbar ist, dann bedeutet das, daß die Zahl mit 3 multipliziert worden ist, die durch 3 teilbar ist, das heißt die 9. In diesem Falle hat B den Radiergummi.
Wie beweist ihr dieses Kunststück?

266. Das Erraten von drei gedachten Summanden und der Summe

Gebt euren Gästen auf, drei beliebige aufeinanderfolgende natürliche Zahlen aufzuschreiben, jede nicht größer als 60. (Sie schreiben zum Beispiel 31, 32, 33.) Ihr bittet sie, dazu noch eine natürliche Zahl, die durch 3 teilbar und kleiner als 100 ist, anzusagen. (Sie nennen zum Beispiel 27.) Diese Zahl müßt ihr euch merken. Bittet sie, alle 4 Zahlen zu addieren (31 + 32 + 33 + 27

= 123) und die Summe mit 67 zu multiplizieren ($123 \cdot 67 = 8241$).
Jetzt sollen eure Gäste die beiden letzten Ziffern des Resultats ansagen. Ihr könnt sofort das ganze Resultat und die drei aufgeschriebenen Zahlen angeben.
Das Verfahren. Teilt 27 durch 3. Ihr erhaltet 9. Addiert 1 zur 9. Ihr erhaltet 10, die Schlüsselzahl. Wenn ihr sie von der Zahl subtrahiert, die aus den beiden euch angegebenen Ziffern des Resultats besteht ($41 - 10 = 31$), erhaltet ihr die kleinste der drei aufgeschriebenen Zahlen. Wenn ihr 41 verdoppelt, erhaltet ihr 82, die beiden ersten Ziffern des Resultats. Der Beweis dieses Verfahrens ist eine interessante Aufgabe.

267. Es sollen mehrere gedachte Zahlen erraten werden

Es gibt ein einfaches Verfahren, mehrere gedachte einstellige Zahlen zu erraten. Die erste der gedachten Zahlen multipliziert man mit 2 und addiert zum Produkt 5. Die erhaltene Zahl multipliziert man mit 5 und addiert zum Produkt 10. Zum Resultat addiert man die zweite gedachte Zahl und multipliziert die Summe mit 10. Zum Resultat addiert man die dritte gedachte Zahl und multipliziert das Ergebnis wieder mit 10. Dann addiert man die vierte gedachte Zahl und multipliziert mit 10 und so fort, bis die letzte der gedachten Zahlen addiert ist. Die letzte Summe und die Anzahl der gedachten Zahlen müssen angesagt werden. Zum „Erraten" muß man von der angesagten Summe abziehen:

35, wenn 2 Zahlen ausgedacht worden sind,
350, wenn 3 Zahlen ausgedacht worden sind,
3500, wenn 4 Zahlen ausgedacht worden sind usw.

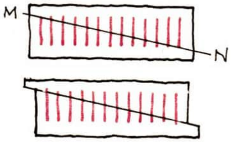
Die Ziffern der Differenz sind auch die Ziffern der gedachten Zahlen.
Beispiel. Ausgedacht wurden die Zahlen 3, 5, 8 und 2. Wir verdoppeln die erste: $3 \cdot 2 = 6$, addieren 5, erhalten $6 + 5 = 11$, multiplizieren mit 5, erhalten $11 \cdot 5 = 55$, addieren zum Resultat 10: $55 + 10 = 65$, addieren die zweite gedachte Zahl: $65 + 5 = 70$, multiplizieren mit 10, erhalten $70 \cdot 10 = 700$, addieren die dritte gedachte Zahl: $700 + 8 = 708$, und weiter: $708 \cdot 10 = 7080$; $7080 + 2 = 7082$. Vom Endresultat subtrahieren wir 3500; das ergibt 3582. Die Ziffern dieser Differenz sind die gedachten Zahlen. Beweist dieses Verfahren!

268. Wie alt seid ihr?

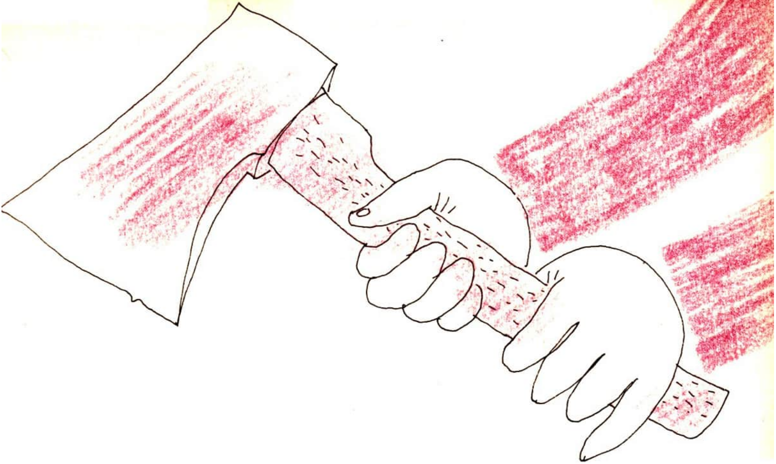
„Ihr wollt es nicht sagen? Nun gut, sagt mir nur, was sich ergibt, wenn man von der Zahl, die 10mal so groß ist wie die Zahl eures Lebensalters, das Produkt aus einer beliebigen einstelligen Zahl mit 9 abzieht. Ich danke euch, jetzt weiß ich, wie alt ihr seid."
Das Verfahren. Von dem angesagten Resultat wird die Ziffer der letzten Stelle abgetrennt und die ihr entsprechende Zahl zur restlichen Zahl addiert.
Beispiel. Von der Zahl 170, die 10mal so groß ist wie das Lebensalter, subtrahierte man, sagen wir, 27. Danach wurde das Resultat angesagt: 143.
Wir bestimmen das Alter: $14 + 3 = 17$.
Leicht und eindrucksvoll! Aber zur Vermeidung von Irrtümern überlegt den Grundgedanken des Kunststücks.

269. Geometrisches Kunststück

Zeichnet auf ein rechtwinkliges Stück Karton 13 gleiche Striche in gleichen Abständen, wie in Abb. 165 gezeigt wird. Jetzt schneidet das Rechteck entlang der Geraden durch M und N durch, die den oberen Endpunkt des äußersten linken Striches mit dem unteren Endpunkt des äußersten rechten Striches verbindet. Verschiebt beide Hälften des Rechtecks entlang der Schnittlinie, wie in der Abbildung gezeigt wird.
Es hat sich eine interessante Erscheinung ergeben: Anstatt der 13 Striche sind es 12! Wohin ist der eine Strich verschwunden?



165



Die Teilbarkeit der Zahlen

Von allen Grundrechnungsarten ist am eigenartigsten die Division. Nehmen wir beispielsweise das Rechnen mit der Null. Für alle anderen Grundrechnungsarten ist die Null eine gleichberechtigte Zahl. Man kann sie addieren wie subtrahieren; sie kann Multiplikator oder Multiplikand sein, aber sie darf niemals Divisor sein. Grundsätzlich darf man keine Zahl, keinen algebraischen Ausdruck durch Null dividieren. Wenn man das nicht beachtet, kann man sich leicht blamieren. Man kann, sagen wir, eine beliebige bewußt falsche Behauptung „beweisen" - und das ist doch „paradox". Wie verhaltet ihr euch zum Beispiel zu folgender Behauptung:
„Jede Größe ist ihrer Hälfte gleich."
Der „Beweis". Angenommen, a und b sind zwei gleiche Größen: $a = b$. Wir wollen beide Seiten dieser Gleichung mit a multiplizieren: $a^2 = ab$. Jetzt vermindern wir die linke wie die rechte Seite der Gleichung um b^2. Die erhaltenen Differenzen $a^2 - b^2$ und $ab - b^2$ sind auch gleich: $a^2 - b^2 = ab - b^2$. Wir lösen die Seiten dieser Gleichung in Faktoren auf: $(a + b)(a - b) = b(a - b)$. Wir teilen beide Seiten der Gleichung durch $a - b$, worauf wir folgende Gleichung erhalten: $a + b = b$. Da $b = a$ ist, können wir in der letzten Gleichung b durch a ersetzen. Es ergibt sich dann $a + a = a$ oder $2a = a$. Teilen wir durch 2, dann erhalten wir $a = \frac{a}{2}$, das heißt also, die Größe a ist ihrer Hälfte gleich (?).

Äußerlich oder, wie man sagt, „formal" scheint alles richtig zu sein, aber genaugenommen ist irgendwo in den Rechenoperationen ein Fehler. Ihr wart natürlich aufmerksam und habt gemerkt, an welcher Stelle der Umwandlungen der Fehler steckt. Der besondere „Charakter" der Division zeigt sich nicht nur im Verhalten zur Null, sondern allgemein darin, daß die Division im System der ganzen Zahlen nicht uneingeschränkt durchführbar ist. Man definiert: Eine ganze Zahl a ist durch eine ganze Zahl b teilbar, wenn es eine ganze Zahl c gibt, die mit b multipliziert die Zahl a ergibt; wenn es eine solche Zahl c nicht gibt, dann ist a nicht durch b teilbar.
Diese Eigentümlichkeiten der Division führten zur Entwicklung von Begriffen wie der Primzahlen, des größten gemeinsamen Teilers[1] und des kleinsten gemeinsamen Vielfachen[2] sowie von Teilbarkeitsregeln. Die Beschäftigung mit den Aufgaben dieses Kapitels wird den Umfang eurer Schulkenntnisse über die Teilbarkeit ganzer Zahlen erweitern.

[1] Der größte gemeinsame Teiler (g.g.T.) zweier oder mehrerer Zahlen ist die größte Zahl, durch die sich eine jede von ihnen teilen läßt

[2] Das kleinste gemeinsame Vielfache (k.g.V.) zweier oder mehrerer Zahlen ist die kleinste Zahl, die durch die gegebenen Zahlen teilbar ist

270. Die Zahl auf dem Grabmal

In einer ägyptischen Pyramide entdeckten Gelehrte auf der Steinplatte eines Grabmals in Hieroglyphen eingehauen die Zahl 2520. Es ist schwer, genau zu sagen, weshalb dieser Zahl eine solche Ehre zuteil wurde. Vielleicht deshalb, weil sie ohne Rest ausnahmslos durch alle ganzen Zahlen von 1 bis 10 teilbar ist. Es gibt keine Zahl kleiner als 2520, die die genannte Eigenschaft besitzt. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß diese Zahl das kleinste gemeinsame Vielfache der ersten zehn ganzen Zahlen ist.

271. Gibt es eine solche Zahl?

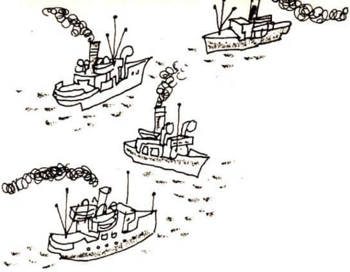
Gibt es eine Zahl, die bei der Division durch 3 den Rest 1 ergibt, bei der Division durch 4 den Rest 2, bei der Division durch 5 den Rest 3, bei der Division durch 6 den Rest 4?

272. Der Eierkorb (aus einem alten französischen Rechenbuch)

Eine Frau trug einen Eierkorb zum Markte. Ein Passant stieß sie versehentlich an; dabei fiel der Korb herunter, und die Eier zerbrachen. Der Mann wollte den Schaden ersetzen und fragte:
„Wieviel Eier waren in dem Korb?"
„Genau kann ich mich nicht erinnern", antwortete die Frau, „aber ich weiß, wenn ich aus dem Korb je 2, 3, 4, 5 oder 6 Eier herausnahm, blieb allemal ein Ei im Korb zurück, und wenn ich je 7 herausnahm, blieb nichts im Korb."
Wieviel Eier waren im Korb?

273. Die dreistellige Zahl

Wenn ich von einer dreistelligen Zahl 7 subtrahiere, dann ist sie durch 7 teilbar, und wenn ich von ihr 8 subtrahiere, ist sie durch 8 teilbar; wenn ich von ihr 9 subtrahiere, ist sie durch 9 teilbar. Welche Zahl meine ich?



274. Die vier Schiffe

In einem Hafen hatten vier Schiffe festgemacht. Am Mittag des 2. Januar 1953 verließen sie gleichzeitig den Hafen.
Es ist bekannt, daß das erste Schiff aller 4 Wochen in diesen Hafen zurückkehrte, das zweite aller 8 Wochen, das dritte aller 12 Wochen und das vierte aller 16 Wochen. Wann trafen alle Schiffe das erste Mal wieder in diesem Hafen zusammen?

275. Das Versehen des Kassierers

Ein Käufer wandte sich an den Kassierer eines Warenhauses und sagte: Ich kaufte 2 Pakete Salz zu je 0,30 DM, 2 Stück Seife zu je 0,90 DM und 3 Pakete Zucker und 6 große Schachteln Streichhölzer; für Zucker und Streichhölzer weiß ich aber den Preis nicht mehr."
Der Kassierer händigte dem Käufer einen Kassenzettel über 13,15 DM aus. Als der Käufer auf den Kassenzettel blickte, gab er ihn dem Kassierer zurück und sagte:
„Sie haben sich gewiß verrechnet."
Der Kassierer prüfte nach und gab dem Käufer recht. Er mußte sich entschuldigen und händigte ihm einen anderen Kassenzettel aus. Wie fand der Käufer den Fehler?

276. Zahlenrebus

Mit Hilfe arithmetischer Überlegungen soll man die Zahl t und die Ziffer a finden, so daß folgende Gleichung erfüllt ist:
$[3(230 + t)]^2 = 492a04$.

277. Die Teilbarkeit durch 11

Eins der wichtigsten Verfahren zur Lösung von Aufgaben ist folgendes: Man führt die Lösung einer gegebenen Aufgabe auf die Lösung einer anderen, einfacheren zurück. Man soll, nehmen wir an, feststellen, ob sich irgendeine mehrstellige Zahl durch eine andere dividieren läßt. In vielen Fällen ist es durchaus nicht nötig, die Division der gegebenen Zahlen im einzelnen durchzuführen. Sehr oft zeigt sich, daß die Aufgabe auf die Feststellung der Teilbarkeit irgendeiner anderen, nicht mehrstelligen Zahl zurückgeführt werden kann, die nach bestimmten Regeln aus Ziffern der gegebenen Zahl gebildet wird. So entstehen die Teilbarkeitsregeln.

Ist euch zum Beispiel folgende einfache Teilbarkeitsregel für 11 bekannt?

„Wenn die Summe jeder zweiten Ziffer einer Zahl, mit der Einerziffer beginnend, gleich der Summe der übrigen Ziffern ist oder die Differenz dieser Summen (= Querdifferenz) sich durch 11 teilen läßt, dann ist auch die gegebene Zahl durch 11 teilbar. Wenn jedoch die genannten Quersummen nicht gleich sind und ihre Differenz nicht durch 11 geteilt werden kann, dann ist auch die gegebene Zahl nicht durch 11 teilbar."

B e i s p i e l. Ist 3 528 041 durch 11 teilbar?

Wir wenden das Merkmal an:

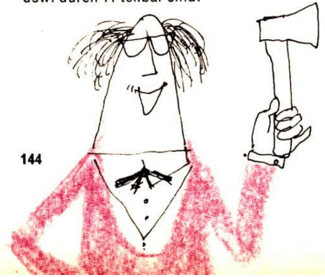
$S_1 = 1 + 0 + 2 + 3 = 6$,

$S_2 = 4 + 8 + 5 = 17$,

$S_2 - S_1 = 11$.

$S_2 - S_1$ ist durch 11 teilbar. Nach dieser Regel ist die Zahl 3528041 durch 11 teilbar. Wenn ihr die Division durchführen würdet, könntet ihr euch davon überzeugen.

Es ist nicht schwer, diese Teilbarkeitsregel zu beweisen, wenn ihr zunächst feststellt, daß Zahlen der Art, wie zum Beispiel $10 + 1$, $100 - 1$, $1000 + 1$, $10000 - 1$, $100000 + 1$ usw. durch 11 teilbar sind.



Betrachten wir zuerst die Differenzen: $100 - 1 = 99$, $10000 - 1 = 9999$ usw. Sie alle schreiben sich mit einer geraden Zahl von Neunen, und folglich sind sie durch 11 teilbar. Durch 11 teilbar sind aber auch alle Summen der genannten Art: $10 + 1 = 11$, $1000 + 1 = 99 \cdot 10 + 11$, $100000 + 1 = 9999 \cdot 10 + 11$ usw., da jede Summe in zwei Summanden zerfällt, von denen jeder durch 11 teilbar ist.

Nehmen wir eine beliebige mehrstellige Zahl an, zum Beispiel 3516282, und zerlegen sie in folgender Weise:

$2 + 8 \cdot 10 + 2 \cdot 100 + 6 \cdot 1000 + 1 \cdot 10000 + 5 \cdot 100000 + 3 \cdot 1000000$. Alle zweiten Multiplikatoren (Einsen und Nullen) wandeln wir so um, daß die oben genannten Summen und Differenzen entstehen ($10 + 1$, $100 - 1$ usw.). Wir haben:

$$\begin{aligned}3516282 &= 2 + 8(10 + 1 - 1) + 2(100 - 1 + 1) + 6(1000 + 1 - 1) + 1(10000 - 1 + 1) \\ &\quad + 5(100000 + 1 - 1) + 3(1000000 - 1 + 1) \\ &= 2 + 8(10 + 1) - 8 + 2(100 - 1) + 2 + 6(1000 + 1) - 6 + (10000 - 1) + 1 \\ &\quad + 5(100000 + 1) - 5 + 3(1000000 - 1) + 3 \\ &= (2 - 8 + 2 - 6 + 1 - 5 + 3) + [8(10 + 1) + 2(100 - 1) + 6(1000 + 1) + (10000 - 1) \\ &\quad + 5(100000 + 1) + 3(1000000 - 1)].\end{aligned}$$

Alle Summanden, die in der eckigen Klammer stehen, sind durch 11 teilbar. Folglich hängt die Teilbarkeit durch 11 allein von der Teilbarkeit der Zahl ab, die in der ersten runden Klammer steht: Wenn sie sich durch 11 teilen läßt, dann ist die betrachtete Zahl durch 11 teilbar. Die Querdifferenz in der ersten runden Klammer ist $(2 + 2 + 1 + 3) - (8 + 6 + 5) = -11$, sie ist durch 11 teilbar. Also läßt sich auch die gegebene Zahl durch 11 teilen.

Wenn die Querdifferenz der geprüften Zahl sich nicht durch 11 teilen ließe, dann könnte auch die geprüfte Zahl nicht durch 11 geteilt werden. Das Beispiel zeigt im einzelnen das Verfahren, mit dessen Hilfe man eine beliebige ganze Zahl (N) so in zwei Summanden (x und y) zerlegen kann ($N = x + y$), daß einer von ihnen (x) sich durch 11 teilen läßt und der andere (y) sich als die Querdifferenz darstellt.

Es ist klar, daß dann, wenn sich beide Summanden x und y durch 11 teilen lassen, auch

N durch 11 teilbar ist, wenn jedoch nur x durch 11 teilbar ist, nicht aber auch y, dann ist auch N nicht durch 11 teilbar.
Umgekehrt, wenn N und x durch 11 teilbar sind, muß auch y durch 11 teilbar sein; wenn jedoch N nicht durch 11 teilbar ist, wohl aber x, dann kann auch y nicht durch 11 geteilt werden.
So läßt sich die Lösung der Frage nach der Teilbarkeit einer beliebigen mehrstelligen Zahl durch 11 zurückführen auf die leichtere Klärung der Teilbarkeit der Querdifferenz der Zahl durch 11.

Löst noch einen arithmetischen *Rebus*. Wie findet man schnell die fehlende Ziffer a in der achtstelligen Zahl 37a10201, und durch welche Zahl muß man den Buchstaben x in dem Ausdruck $[11\,(492 + x)]^2$ ersetzen, damit die Gleichung $[11\,(492 + x)]^2 = 37a10201$ richtig ist?

278. Die Teilbarkeit durch 7, 11 und 13

In der Tabelle der Primzahlen, das heißt derjenigen positiven ganzen Zahlen, die nur durch 1 und durch sich selbst geteilt werden können, stehen die Zahlen 7, 11 und 13 nebeneinander (vgl. die Tabelle der Primzahlen auf S. 202). Ihr Produkt ist gleich $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001 = 1000 + 1$.
Wir merken uns, daß $1000 + 1$ sich sowohl durch 7 wie durch 11 wie durch 13 teilen läßt. Wenn eine beliebige dreistellige Zahl mit 1001 multipliziert wird, dann schreibt sich das Produkt mit denselben Ziffern wie der Multiplikator, nur mit zweimaliger Wiederholung. Es soll $\overline{abc}$ eine beliebige dreistellige Zahl sein. (a, b und c sind die Ziffern dieser Zahl.) Wir multiplizieren sie mit 1001:

$$\begin{array}{l} \overline{abc} \cdot 1001 \\ \hline \overline{abc} \\ \overline{abc} \\ \hline \overline{abcabc} \end{array}$$

Folglich lassen sich alle Zahlen in der Form $\overline{abcabc}$ durch 7, 11 und 13 teilen. Insbesondere läßt sich die Zahl 999999 oder, anders ausgedrückt, $1000000 - 1$ durch 7, 11 und 13 teilen.
Die Frage nach der Teilbarkeit einer *mehrstelligen* Zahl durch 7 oder 11 oder 13 läßt sich auf die Frage nach der Teilbarkeit einer beliebigen, höchstens *dreistelligen* Zahl zurückführen.
Man soll, nehmen wir an, feststellen, ob sich die Zahl 42623295 durch 7, 11 und 13 teilen läßt. Wir teilen die Zahl von rechts nach links in drei Gruppen zu je drei Ziffern ab. Die äußerste linke Gruppe braucht nicht drei Ziffern zu haben. Wir stellen jetzt die gegebene Zahl in folgender Form dar:
$42623295 = 295 + 623 \cdot 1000 + 42 \cdot 1000000$,
oder (analog dem Verfahren bei der Betrachtung der Teilbarkeitsregel für 11):
42623295
$= 295 + 623\,(1000 + 1 - 1) + 42\,(1000000 - 1 + 1)$
$= (295 - 623 + 42) + [623\,(1000 + 1) + 42\,(1000000 - 1)]$.

Die Zahl in der eckigen Klammer läßt sich durch 7 wie durch 11 und durch 13 teilen. Folglich hängt die Teilbarkeit der untersuchten Zahl durch 7, 11 und 13 allein von der Teilbarkeit der Zahl ab, die in der ersten runden Klammer steht und die wir Gruppendifferenz nennen wollen.

Man kann folgende gemeinsame Teilbarkeitsregel für die drei Zahlen 7, 11 und 13 formulieren:
„Wenn die Gruppendifferenz einer gegebenen Zahl durch 7 oder 11 oder 13 teilbar ist, dann läßt sich dementsprechend auch die gegebene Zahl durch 7 oder 11 oder 13 teilen."
Kehren wir zur Zahl 42623295 zurück. Wir bestimmen, durch welche der Zahlen 7, 11 oder 13 sich die Gruppendifferenz dieser Zahl teilen läßt: $(295 + 42) - 623 = -286$. Die Zahl -286 läßt sich durch 11 und durch 13, aber nicht durch 7 teilen, folglich ist die Zahl 42623295 durch 11 und durch 13, aber nicht durch 7 teilbar.
Daraus folgt, daß die Teilbarkeit durch 7, 11 und 13 bei vier-, fünf- und sechsstelligen Zahlen, das heißt bei solchen, die sich nur in zwei Gruppen zerlegen lassen, besonders leicht feststellbar ist. So ist zum Beispiel leicht festzustellen, daß 29575 durch 7 und durch 13 teilbar ist, nicht aber durch 11. Die Gruppendifferenz ist $575 - 29 = 546$, und die Zahl 546 läßt sich durch 7 und durch 13, aber nicht durch 11 teilen.
Aufgabe. Als wir die Teilbarkeitsregel für 7, 11 und 13 erörterten, haben wir mit einer Zahl operiert, die in drei Gruppen zerlegt werden mußte. Beweist die Teilbarkeitsregel für eine Zahl, die von rechts nach links in vier Gruppen zu je drei Ziffern zu zerlegen ist!

279. Vereinfachung der Teilbarkeitsregel für 8

In der Schule lernt man gewöhnlich folgende Teilbarkeitsregel für 8: Wenn die Zahl, die die letzten drei Ziffern der gegebenen Zahl bilden, durch 8 teilbar ist, dann ist auch die ganze gegebene Zahl durch 8 teilbar.
Folglich ist die Frage der Teilbarkeit durch 8 auf die Frage der Teilbarkeit einer beliebigen dreistelligen Zahl durch 8 zurückgeführt.
Dabei wird aber nichts darüber gesagt, wie man wiederum schnell erkennt, ob sich eine dreistellige Zahl durch 8 teilen läßt. Die Teilbarkeit einer dreistelligen Zahl durch 8 ist doch auch nicht immer sofort erkennbar, man muß dazu faktisch die Division durchführen.
Die Teilbarkeitsregel für 4 ist einfacher. Hier hängt die Teilbarkeit davon ab, daß sich die Zahl durch 4 teilen läßt, die nur aus den beiden letzten Ziffern der untersuchten Zahl besteht. Es ergibt sich die Frage, ob man nicht auch die Teilbarkeitsregel für 8 vereinfachen kann. Das ist möglich.
„Durch 8 läßt sich eine dreistellige Zahl teilen, wenn die zweistellige Zahl, die aus den ersten beiden Ziffern gebildet wird, vermehrt um die Hälfte der Zahl, die durch die letzte Ziffer ausgedrückt wird, durch 4 teilbar ist."
Beispiel. Gegeben ist die Zahl 592. Wir trennen die letzte Ziffer ab und addieren die Hälfte der durch sie ausgedrückten Zahl zu der Zahl, die aus den beiden ersten Ziffern gebildet wird. und erhalten $59 + 1 = 60$. Die Zahl 60 läßt sich durch 4 teilen; folglich läßt sich auch die Zahl 592 durch 8 teilen.
Beweist die Richtigkeit der hier dargestellten Regel für die Teilbarkeit einer dreistelligen Zahl durch 8 und formuliert sie für eine Zahl mit einer beliebigen Anzahl von Stellen.

Anmerkung 1. Es ist klar, daß eine Zahl, deren letzte Ziffer eine ungerade Zahl ist, nicht durch 8 geteilt werden kann.
Anmerkung 2. In den meisten Fällen ist die Summe aus der zweistelligen Zahl, die in der Regel erwähnt wird, und der Hälfte der durch die letzte Ziffer ausgedrückten Zahl auch eine zweistellige Zahl. Die Summe ist nur bei den Zahlen von 984 bis 998 dreistellig; aber auch in diesen Fällen ist sie höchstens 103, nämlich $99 + 4 = 103$.

280. Erstaunliches Gedächtnis

Erklärt euren Freunden, daß ihr alle durch 37 teilbaren Zahlen, selbst wenn sie sechs- und neunstellig sind, auswendig wißt.
Um die Wirkung zu steigern, sagt, daß ihr es auf euch nehmt, augenblicklich zu einer beliebig angegebenen dreistelligen Zahl noch drei Ziffern oder sogar sechs Ziffern so hinzuzuschreiben, daß die gebildete

sechs- oder neunstellige Zahl durch 37 teilbar ist.
Wir nehmen an, euch sei die Zahl 412 genannt worden. Schreibt 143 daneben, rechts oder links – es ist gleichgültig. Es ergeben sich die Zahlen 143412 oder 412143, von denen jede durch 37 teilbar ist.
Das liegt hier natürlich nicht an einem phänomenalen Gedächtnis, sondern an der recht einfachen Teilbarkeitsregel für 37. Sollen wir von einer gegebenen Zahl feststellen, ob sie durch 37 teilbar ist, so zerlegen wir sie von rechts nach links in Gruppen zu je 3 Ziffern. (Die letzte Gruppe links kann unvollständig sein.) Wir betrachten jede Gruppe als selbständige Zahl und addieren diese Zahlen. Wenn die sich ergebende Summe (wir nennen sie Gruppensumme) durch 37 teilbar ist, dann ist auch die gegebene Zahl durch 37 teilbar.
So ist zum Beispiel die Zahl 153217 durch 37 teilbar, weil $153 + 217 = 370$ durch 37 teilbar ist.

Beweis. Es sei N eine positive ganze Zahl, die in 2 Gruppen zerlegt wird. Wir stellen sie in folgender Form dar: $N = 1000\,a + b$, wobei a die von der linken Zifferngruppe und b die von der rechten Zifferngruppe gebildete dreistellige Zahl bezeichnet. Wenn N durch 37 teilbar ist, dann ist $1000a + b = 37k$. (k ist eine positive ganze Zahl.) Wir beweisen, daß in solchem Falle $a + b$ auch durch 37 teilbar ist.
Dazu lösen wir die erste Gleichung nach b auf und setzen das Ergebnis in $a + b$ ein. Dann ist $a + b = a + (37\,k - 1000\,a) = 37\,k - 999\,a = 37(k - 27a)$, also teilbar durch 37. Ist umgekehrt $a + b$ durch 37 teilbar, dann ist $a + b = 37\,k$. Wir lösen nach b auf und setzen das Ergebnis in die Gleichung $N = 1000\,a + b$ ein. Wir erhalten: $N = 1000a + 37\,k - a = 999\,a + 37\,k = 37\,(27a + k)$, das heißt, N ist durch 37 teilbar.
Für Zahlen mit mehr als 2 Gruppen ist der Beweis analog.
Das Geheimnis des Kunststücks liegt folglich darin, daß ihr zu der von euren Freunden angegebenen dreistelligen Zahl geschickt eine (für eine sechsstellige Zahl) oder zwei (für eine neunstellige Zahl) passende dreistellige Zahlen hinzuschreibt, so daß die Summe der von euch hinzugeschriebenen Zahlen und der Zahl, die euch gegeben worden ist, durch 37 teilbar ist.
Wie erreicht man das?
Es ist sehr einfach. Schreibt solche Zahlen hinzu, daß sich, wenn ihr sie zu der gegebenen Zahl addiert, eine dreistellige Zahl mit gleichen Ziffern ergibt: 111 oder 222 oder 333 usw. bis 999. Jede dreistellige Zahl, die aus gleichen Ziffern besteht, ist durch 37 teilbar.
Wenn die gegebene Zahl, sagen wir, 341 ist, dann schreibt 103 hinzu (die Ergänzung zu 444) oder 214 (die Ergänzung zu 555) usw. Eine solche Ergänzung im Kopfe durchzuführen, ist sehr leicht. Das gewährleistet euch auch die wünschenswerte Schnelligkeit bei der Vorführung des Kunststücks.
Falls eine neunstellige Zahl zu bilden ist, die durch 37 teilbar ist, schreibt zuerst drei beliebige Ziffern hinzu und dann 3 weitere Ziffern so, daß die Gruppensumme der entstandenen neunstelligen Zahl durch eine dreistellige Zahl mit gleichen Ziffern ausgedrückt wird.
Wenn euch zum Beispiel die Zahl 412 angesagt wurde, dann könnt ihr, sagen wir, erst 101 hinzuschreiben und dann 042 als Ergänzung zu 555. Es ergibt sich die Zahl 412101042. Bedenkt dabei, daß ihr zur Variierung geeignete Zahlen auf beiden Seiten der angegebenen Zahl hinzuschreiben könnt.
Wenn die angegebene Zahl selbst aus gleichen Ziffern besteht, wie zum Beispiel 333, dann ist es riskant, eine Zahl hinzuzuschreiben, die auch aus gleichen Ziffern besteht: Dadurch kann man leicht „entlarvt“ werden. Um dem zu entgehen, vergrößert oder verringert die Zahl, die ihr hinzuschreiben müßtet, um 37 oder 74.

Man kann zulassen, daß nur eine zweistellige oder einstellige Zahl genannt wird. In solchem Falle schreibt ihr zuerst eine beliebige dritte oder zweite und dritte Ziffer hinzu und verfahrt dann wie dargelegt.
Aufgabe. Beweist die Teilbarkeitsregel bezüglich der Teilbarkeit durch 37 für eine Zahl, die aus drei Gruppen besteht.

281. Die Teilbarkeit durch 3, 7 und 19

Das Produkt der Primzahlen 3, 7 und 19 ist 399.
Wenn eine Zahl $100a + b$ (wobei b eine zweistellige Zahl, a eine einstellige Zahl ist) durch die Zahl 399 oder durch einen ihrer Faktoren teilbar ist, dann ist es auch die Zahl $a + 4b$.
Beweist diese Behauptung!
Formuliert und beweist die Umkehrung des Satzes.
Stellt auf Grund des Beweises eine Regel für die Teilbarkeit einer Zahl durch 3, 7 und 19 auf.

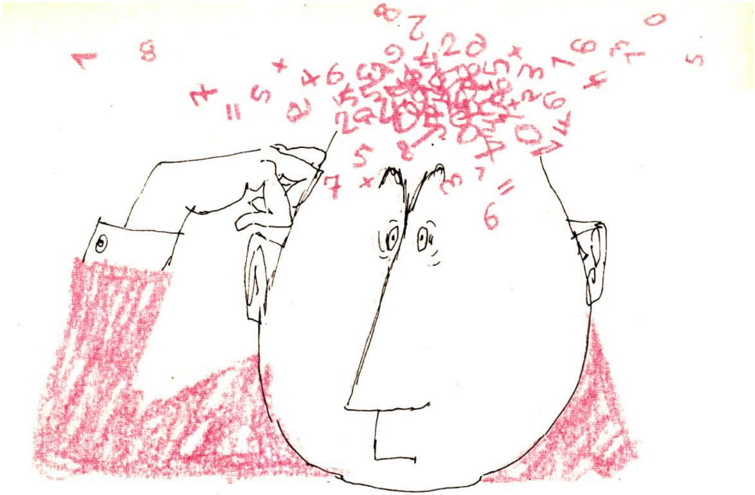
282. Die Teilbarkeit eines Binoms

Einige Vorbemerkungen:
1. Als Polynom bezeichnet man einen algebraischen Ausdruck der Form:
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, wobei n eine nicht negative ganze Zahl ist und die Koeffizienten $a_0, a_1 \cdots a_n$ beliebige reelle Zahlen sind; unter dem Buchstaben x wird auch eine beliebige reelle Zahl verstanden.
2. Wenn ein Polynom (p) der angegebenen Form gleich dem Produkt zweier anderer (p_1 und p_2) ist ($p = p_1 \cdot p_2$), dann sagen wir, daß sich das Polynom p durch das Polynom p_1 (oder p_2) teilen läßt und sich als Quotient das Polynom p_2 (oder p_1) ergibt. Zum Beispiel läßt sich $x^2 - 9$ durch $3x + 9$ teilen, und als Quotient ergibt sich $\frac{1}{3}x - 1$. In der Tat ist $(3x + 9)\left(\frac{1}{3}x - 1\right) = x^2 - 9$.
Wir sehen, daß einige der Koeffizienten des Quotienten Brüche sein können, obwohl alle Koeffizienten des Dividenden und des Divisors ganze Zahlen sind.
3. Aus der Tatsache der Teilbarkeit eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten durch ein anderes Polynom, mit ebenfalls ganzzahligen Koeffizienten folgt noch nicht, daß auch die Zahlen, die sich aus den Polynomen ergeben, wenn man für x eine beliebige ganze Zahl einsetzt, durcheinander teilbar sind.
Wie wir oben gesehen haben, ist zum Beispiel $(x^2 - 9)$ durch $(3x + 9)$ teilbar. Bei $x = 6$ ergibt der Dividend die Zahl $6^2 - 9 = 27$, der Divisor die Zahl $3 \cdot 6 + 9 = 27$. Diese Zahlen sind durcheinander teilbar ($27 : 27 = 1$). Bei $x = 7$ ergibt der Dividend die Zahl $7^2 - 9 = 40$, der Divisor die Zahl $3 \cdot 7 + 9 = 30$, aber diese Zahlen sind nicht durcheinander teilbar, wenigstens nicht im Bereich der ganzen Zahlen.
4. Wenn jedoch alle Koeffizienten des Dividenden, des Divisors und des Quotienten ganze Zahlen sind, dann sind auch die Zahlen, die sich aus den Polynomen ergeben, wenn man für x eine beliebige ganze Zahl einsetzt, durcheinander teilbar, ausgenommen den Fall, daß der Divisor Null ergibt.
Beispiel: $(2x^3 - 3x^2 - 8x + 12) : (x^2 - 4) = 2x - 3$.
Alle Koeffizienten sind ganzzahlig, folglich läßt sich auch der Dividend durch den Divisor teilen, wenn man für x eine beliebige ganze Zahl einsetzt, außer bei $x = \pm 2$, da bei diesen Werten der Divisor Null ergibt, die Division also unmöglich ist. Setzt man zum Beispiel $x = 3$, so ergibt sich für den Dividenden: $2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 12 = 15$, für den Divisor: $3^2 - 4 = 5$. Wir überzeugen uns davon, daß sich der erste Wert durch den zweiten teilen läßt: $15 : 5 = 3$. Dieselbe Zahl 3 ergibt sich auch für das Polynom des Quotienten bei $x = 3$, nämlich $2 \cdot 3 - 3 = 3$.

Zur Lösung einiger Aufgaben, besonders zum Beweis von Teilbarkeitsregeln, ist es nützlich, wenn man weiß, in welchen Fällen ein Polynom der Form $x^m + a^m$ bzw. $x^m - a^m$ – ein sogenanntes Binom – durch ein Binom der Form $x + a$ bzw. $x - a$ teilbar ist.
Die Antwort auf diese Frage wird im Algebra-Unterricht der Oberklassen der Schule gegeben. Aber auch der Leser, der in seiner Ausbildung noch nicht so weit gekommen ist, hat keine große Mühe, sich in der Lösung dieser Frage zurechtzufinden.
Die Binome $x^m + a^m$ und $x^m - a^m$ sind Spezialfälle des Polynoms

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} \cdots + a_1 x + a_0. \qquad (1)$$

Unter den auftretenden Buchstaben werden wir hier nur ganze Zahlen einschließlich der Null verstehen.



Zum Beispiel ergibt sich bei $m = 4$, $a_m = 1$, $a_{m-1} = a_{m-2} \cdots = a_1 = 0$, $a_0 = 16$ folgende einfache Form des Polynoms: $x^4 + 16$ oder $x^4 + 2^4$.

Versuchen wir jetzt, $x^4 + 2^4$ durch $x + 2$ zu dividieren:

$$
\begin{array}{l}
(x^4 + 16) : (x + 2) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8 \\
\underline{x^4 + 2x^3} \\
\quad -2x^3 \\
\quad \underline{-2x^3 - 4x^2} \\
\qquad\qquad 4x^2 \\
\qquad\qquad \underline{4x^2 + 8x} \\
\qquad\qquad\qquad -8x + 16 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-8x - 16} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 32 \text{ (Rest)}
\end{array}
$$

$x^4 + 2^4$ läßt sich nicht durch $x + 2$ teilen. Wir stellen aber fest, daß der Rest nicht mehr von x abhängt.

Es ist leicht zu begreifen, daß nicht nur in diesem Beispiel, sondern ganz allgemein die Division eines Polynoms durch ein Binom der Form $x + a$ (das heißt durch ein Binom, das x nicht höher als in der ersten Potenz enthält), einen von x unabhängigen Rest ergibt, wenn überhaupt ein Rest bleibt. Die Division geht ohne Rest auf, wenn der Dividend um die Größe des Restes vermindert wird. Daher gilt folgender Satz: Dividend minus Rest ist gleich dem Produkt aus Divisor und Quotient. Beispiel:

$$(x^4+16)-32=(x+2)(x^3-2x^2+4x-8)$$

Überzeugt euch durch unmittelbares Ausmultiplizieren davon, daß diese Gleichung algebraischer Ausdrücke zu einer Gleichung von Zahlen führt, gleichviel welche Zahl man für den Buchstaben x einsetzt. Eine solche Gleichung bezeichnet man kurz als *identische* Gleichung.

Angenommen, ihr dividiert ein beliebiges Polynom von der Form (1) durch ein Binom von der Form $x \pm a$ und stellt die Gleichung auf $A = (x \pm a)\,B + C$, wobei ich zur Verkürzung der Schreibweise mit dem Buchstaben A den polynomischen Dividenden bezeichnet habe, mit dem Buchstaben B den Quotienten und mit dem Buchstaben C den Rest, dann lautet die Frage, ob die Gleichung $A = (x \pm a)\,B + C$ (2) identisch ist.

Antwort: Sie ist eine identische Gleichung. Der Beweis dieser Behauptung in allgemeiner Form ist umfangreich, aber ein Beispiel erhärtet ihre Richtigkeit.

Die identische Gleichung (2) ist deshalb interessant, weil man mit ihrer Hilfe, **ohne die Division durchzuführen**, den Rest bestimmen kann. Ich gebe euch zum Beispiel folgende Werte: Dividend x^4+1, Divisor $x-1$, Quotient x^3+x^2+x+1. Welche Zahl C stellt den Rest dar?

Lösung. Wir stellen die Gleichung auf: $x^4+1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)+C$. Da sie für jeden Wert von x erfüllt sein muß, nehmen wir zum Beispiel $x=1$ an. Das ergibt $1+1=0+C$. Hieraus folgt $C=2$. Bei beliebigen anderen Werten für x ergibt sich derselbe Wert für C. Noch eine Probe: Es soll $x=2$ sein. Das ergibt $16+1=(2-1)(8+4+2+1)+C$ oder $17=15+C$. Hieraus folgt wiederum $C=2$.

Daraus ergibt sich noch etwas Interessantes: Es ist möglich, auch ohne den Quotienten zu kennen, den Rest zu ermitteln. Es sei zum Beispiel der Dividend x^4-1 und der Divisor $x+1$. Wie ermitteln wir den Rest, ohne die Division durchzuführen?

Wir bezeichnen das Polynom, das den Quotient darstellt, mit dem Buchstaben B und den Rest mit dem Buchstaben C. Dann ist $x^4-1=(x+1)B+C$. Wir wissen, daß sich für den Rest C ein und derselbe Wert ergibt, wenn wir für x beliebige Zahlen einsetzen, und wählen $x=-1$. Dieser Wert für x ist deshalb günstig, weil er von uns nicht die Ausrechnung des Wertes des Quotienten B erfordert, da bei $x=-1$ der Ausdruck $(x+1)B$ Null ergibt.

Wir haben: $(-1)^4-1=0+C$ oder $1-1=C$. Hieraus folgt $C=0$. Der Rest ist also gleich Null. Das bedeutet, daß x^4-1 sich ohne Rest durch $x+1$ dividieren läßt.

Jetzt kann man allgemein feststellen, in welchen Fällen sich das Binom x^m+1 durch $x+1$ teilen läßt. (m ist eine positive ganze Zahl.)

Lösung. Es sei der Quotient B und der Rest C. Wir haben: $x^m+1=(x+1)B+C$. Wir wählen $x=-1$. Dann ist $(-1)^m+1=C$. Es zeigt sich, daß $C=2$ ist, wenn m eine gerade Zahl $(m=2n)$ ist, und daß $C=0$ ist, wenn m eine ungerade Zahl $(m=2n+1)$ ist.

Wenn m eine gerade Zahl $(m=2n)$ ist, dann läßt sich folglich x^m+1 oder $x^{2n}+1$ nicht durch $x+1$ teilen, wenn jedoch m eine ungerade Zahl ist $(m=2n+1)$, dann läßt sich x^m+1 oder $x^{2n+1}+1$ durch $x+1$ teilen. Der Quotient besteht, wie man sich überzeugen kann, aus fallenden Potenzen von x mit wechselndem Vorzeichen, so daß wir folgende allgemeine Formel haben:

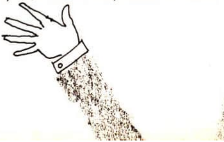
$x^{2n+1}+1=(x+1)(x^{2n}-x^{2n-1}+x^{2n-2}\ldots-x+1)$.

Das Binom x^m-1 läßt sich durch $x-1$ bei einer beliebigen positiven ganzen Zahl für m teilen, durch $x+1$ aber nur bei einer geradzahligen Zahl für m $(m=2n)$.

Überzeugt euch selbst davon!

Zur Ermittlung der Größe des Restes (C) bei der Division des Binoms von der Form x^m+a^m durch $x+a$ muß man in der identischen Gleichung $x^m+a^m=(x+a)B+C$ für x den Wert $-a$ einsetzen.

Wir kommen zu folgenden Schlußfolgerungen:



$x^{2n} + a^{2n}$ läßt sich weder durch $x + a$ noch durch $x - a$ teilen;
$x^{2n+1} + a^{2n+1}$ läßt sich durch $x + a$, aber nicht durch $x - a$ teilen;
$x^{2n} - a^{2n}$ läßt sich sowohl durch $x + a$ wie durch $x - a$ teilen;
$x^{2n+1} - a^{2n+1}$ läßt sich nicht durch $x + a$, aber durch $x - a$ teilen. (3)

Ich erinnere daran, daß im Falle der Teilbarkeit von $x^m \pm a^m$ durch $x \pm a$ sich auch diejenigen ganzen Zahlen durcheinander teilen lassen, die man erhält, wenn man die Buchstaben a und x durch ganze Zahlen ersetzt (vgl. S. 144).

Aufgabe. Ohne den Ausdruck $11^{10} - 1$ auszurechnen, soll bewiesen werden, daß er durch 100 teilbar ist.

283. Einheitliche Teilbarkeitsregeln

Der Gedanke der Zerlegung einer Zahl in Gruppen und der Bildung von Gruppensummen bzw. Gruppendifferenzen erwies sich als sehr nützlich und führte zu einer einheitlichen Regel für die Teilbarkeit mehrstelliger Zahlen durch gewisse Primzahlen. Solche Regeln lassen sich für alle Primzahlen p beweisen, die Teiler von $d = 10^n + 1$ ($n = 1, 2, 3, 4 \ldots$) sind.

$n = 1$, $d = 11$, $p = 11$;
$n = 2$, $d = 101$, $p = 101$;
$n = 3$, $d = 1001$, $p = 7, 11$ und 13;
$n = 4$, $d = 10001$, $p = 73$ und 137 usw.

Zur Feststellung der Teilbarkeit einer beliebigen ganzen Zahl durch eine dieser Zahlen p muß man:
1. die gegebene Zahl von rechts nach links (von der Einerstelle aus) in Gruppen zu je n Ziffern zerlegen; jedem Wert für p entspricht ein bestimmter Wert für n; die äußerste linke Gruppe kann weniger als n Ziffern haben;
2. die durch die Zifferngruppen ausgedrückten Zahlen eine um die andere addieren, wobei man mit der äußersten rechten beginnt;
3. die durch die übrigen Zifferngruppen ausgedrückten Zahlen addieren;
4. von der größeren Summe die kleinere subtrahieren.

Wenn sich das Resultat durch p teilen (nicht teilen) läßt, dann ist auch die gegebene Zahl durch p teilbar (nicht teilbar). So zerlegen wir zur Feststellung der Teilbarkeit einer Zahl durch $p = 11$ die Zahl in Gruppen zu je einer Ziffer ($n = 1$). Wenn wir weiter, wie angegeben, vorgehen, gelangen wir zu der bekannten Teilbarkeitsregel für 11 (S. 148). Zur Feststellung der Teilbarkeit einer Zahl durch 7, 11 oder 13 ($p = 7, 11, 13$) zerlegen wir sie in Gruppen zu je 3 Ziffern ($n = 3$). Zur Untersuchung der Teilbarkeit einer Zahl durch 73 und 137 zerlegen wir die Zahl in Gruppen zu je 4 Ziffern ($n = 4$).

Prüfen wir zum Beispiel, ob die fünfzehnstellige Zahl 837362172504831 durch 73 und durch 137 teilbar ist ($p = 73, 137$; $n = 4$).
Wir teilen die Zahl in Gruppen: 837/3621/7250/4831.
Wir addieren sie wechselweise:

$$\begin{array}{r} 4831 \\ +\,3621 \\ \hline 8452 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7250 \\ +\,837 \\ \hline 8087 \end{array}$$

Wir subtrahieren die kleinere von der größeren Summe: $8452 - 8087 = 365$.
Wir stellen fest, daß sich 365 durch 73 teilen läßt, aber nicht durch 137; das gleiche gilt also auch für die gegebene Zahl.
Eine einheitliche Teilbarkeitsregel läßt sich auch für alle Primzahlen p beweisen, die Teiler von $d = 10^n - 1$ ($n = 1, 3, 5, 7 \ldots$) sind. Wir beschränken uns auf ungerade Werte für n, weil bei geradzahligen n ($n = 2m$) der Ausdruck $10^{2m} - 1$ in die Faktoren $(10^m + 1)$ und $(10^m - 1)$ zerlegt werden kann und wir die Regeln für Primzahlen, die Teiler von $10^m + 1$ sind, schon behandelt haben.
Die Zahl $d = 10^n - 1$ ergibt folgende Divisoren:

$n = 1$, $d = 9$, $p = 3$;
$n = 3$, $d = 999$, $p = 37$;
$n = 5$, $d = 99999$, $p = 41, 271$ usw.

Zur Feststellung der Teilbarkeit einer beliebigen Zahl durch eine dieser Zahlen p muß man:

1. die gegebene Zahl von rechts nach links (von der Einerstelle aus) in Gruppen zu je n Ziffern zerlegen; jedem Wert für p entspricht ein bestimmter Wert für n; die äußerste linke Gruppe kann weniger als n Ziffern haben·
2. alle durch die Gruppen ausgedrückten Zahlen addieren.

Wenn das Resultat durch p teilbar (nicht teilbar) ist, dann ist auch die gegebene Zahl durch p teilbar (nicht teilbar). Wir bemerken nebenbei, daß eine Zahl, bei der alle n Stellen Einsen sind (beginnend mit n = 3), sich stets durch die dem n entsprechenden Werte für p teilen läßt. So läßt sich 111 durch 37, 11111 durch 41 und durch 271 teilen.

284. Ein Kuriosum der Teilbarkeit

Zum Abschluß des Kapitels sollen euch vier ungewöhnliche zehnstellige Zahlen vorgestellt werden:

2 438 195 760
3 785 942 160
4 753 869 120
4 876 391 520

In jeder von ihnen sind alle Ziffern von 0 bis 9 enthalten, jede Ziffer aber nur einmal, und jede dieser Zahlen läßt sich durch 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 und 18 teilen.

Kreuzsummen

und magische Quadrate

A. Kreuzsummen

Wir nehmen alle ganzen Zahlen von 1 bis 9 und versuchen sie so in zwei Zeilen zu ordnen, daß die Summe der Zahlen in jeder Zeile gleich ist.
Prüfen wir nach, ob eine solche Aufstellung dieser Zahlen in zwei getrennten Zeilen möglich ist.
Die Summe aller ganzen Zahlen von 1 bis 9 ist 45. Wenn jede dieser Zahlen nur in eine der beiden Zeilen aufgenommen wird, muß die Summe der Zahlen jeder einzelnen Zeile die Hälfte der Summe aller gegebenen Zahlen betragen. Aber 45 läßt sich nicht in zwei gleich große ganze Zahlen teilen, also ist die Verteilung aller ganzen Zahlen von 1 bis 9 in zwei getrennte Zeilen mit gleicher Summe nicht möglich. Aber das gesteckte Ziel kann man erreichen, wenn man die Zahlen in zwei sich kreuzende Reihen aufteilt, zum Beispiel so:

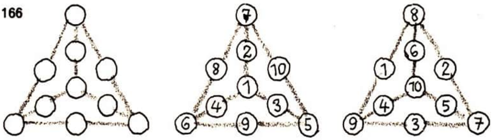
$$\begin{array}{ccccc}
 & & 5 & & \\
 & & 9 & & \\
3 & 7 & 1 & 8 & 4 \,/\, 23 = \text{Summe} \\
 & & 6 & & \\
 & & \underline{2} & & \\
 & & 23 = \text{Summe} & &
\end{array}$$

Bei der Addition ist die Eins in der Summe der Zahlen der horizontalen wie der vertikalen Reihe enthalten.
Sich überkreuzende Reihen von Zahlen mit gleichen Summen in jeder Reihe wollen wir in Analogie zu den Kreuzworträtseln ,,Kreuzsummen'' nennen. Die Zahlen können statt zu Zahlenkreuzen auch an den Linien beliebiger symmetrischer Figuren angeordnet werden. Die Zahlen, die sich in den Kreuzungspunkten zweier oder mehrerer Linien befinden, werden in die Summe der Zahlen an einer jeden dieser Linien eingerechnet.
Löst die hier gestellten Aufgaben, bei denen Kreuzsummen aufzustellen sind, und denkt euch selbst Aufgaben aus. Strebt dabei nach einer symmetrischen Anordnung der gegebenen Zahlen. Beachtet, daß eine Aufgabe über ,,Kreuzsummen'' in der Regel nicht nur eine Lösung hat.

285. Interessante Gruppierungen

In zehn Kreisen, die an den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks und an den Radien des umbeschriebenen Kreises angebracht sind (Abb. 166), kann man die zehn Zahlen von 1 bis 10 so anordnen, daß die Summe der Zahlen, die an den Seiten und in den Ecken eines jeden der drei durch die Radien gebildeten kleinen Dreiecke stehen, gleich 28 ist. Eine der möglichen Lösungen wird in dem mittleren Schema der Abb. 166 angegeben. Hier ist die Zahl 1, die im mittelsten Kreis steht, in jeder der drei Summen enthalten: $1+2+7+8+6+4=1+4+6+9+5+3=1+3+5+10+7+2=28$.
Dieselben zehn Zahlen kann man auch anders in die Kreise des Dreiecks setzen, siehe das zweite Beispiel in Abb. 166. Jetzt ist die Summe der Zahlen, die an den Seiten und in den Ecken der kleinen Dreiecke stehen, jedesmal gleich 38:

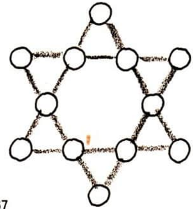
166



$10 + 6 + 8 + 1 + 9 + 4 = 10 + 4 + 9 + 3 + 7 + 5 = 10 + 5 + 7 + 2 + 8 + 6 = 38$.
Interessant ist, daß man aus denselben zehn ganzen Zahlen Gruppierungen bilden kann, und zwar so, daß sich für jedes der kleinen Dreiecke die Summen 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36 und 37 ergeben!
Wie muß man dann die gegebenen Zahlen in die Kreise setzen?
Fertigt euch zehn Spielmarken von beliebiger Gestalt an, schreibt die Zahlen darauf und verschiebt sie von Kreis zu Kreis, bis ihr die gewünschten Ergebnisse erhaltet.

286. Das „Sternchen"

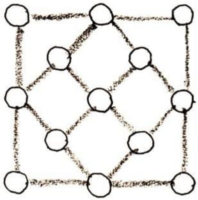
Fertigt euch 12 Spielmarken an, numeriert sie mit den Zahlen von 1 bis 12 und legt sie so in die Kreise eines sechszackigen Sternchens (Abb. 167), daß die Summe der Zahlen in den vier Feldern eines jeden der sechs Strahlen gleich 26 ist.



167

287. Der „Kristall"

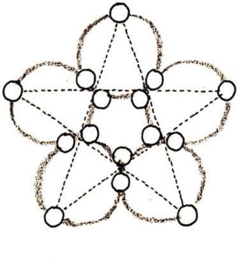
In Abb. 168 wird ein Teil eines Phantasie-„Kristallgitters" gezeigt, dessen „Atome" durch 10 Ketten zu je 3 „Atomen" verbunden sein sollen. (Die Verbindungen der „Atome" in Ketten sind in Abb. 168 durch Linien dargestellt.) Wählt 13 ganze Zahlen aus, unter denen 11 verschieden und 2 gleich sind und setzt sie in die „Atome" so ein, daß die Summe der Zahlen in jeder Kette (an den in der Abbildung angegebenen Linien) gleich 20 ist.
Die kleinste der auszuwählenden Zahlen soll gleich 1 und die größte gleich 15 sein.



168

288. Die Schaufensterdekoration

Für das Schaufenster eines Juweliergeschäftes fertigte ein Lehrling einen fünfzackigen Stern aus Drahtringen und runden Fassungen an (Abb. 169).
In die Fassungen setzte er alle möglichen Edelsteine (sie sind in der Zeichnung nicht

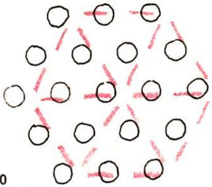


169

dargestellt); in die eine Fassung einen Stein, in die andere zwei Steine in die dritte drei usw. der Reihe nach bis zu 15 Steinen.
Der Meister aber verteilte die Steine so geschickt, daß ihre Gesamtzahl in allen fünf Fassungen, die an einem Ring angebracht waren, gleich 40 war und die Gesamtzahl der Steine in den Fassungen an den fünf Spitzen des Sterns ebenfalls gleich 40 war.
Sucht die Verteilung der Steine auf die 15 Fassungen, die die geforderten Bedingungen erfüllt.

289. Wer ist eher fertig?

Fertigt zwei Sätze Spielmarken an und numeriert jeden Satz mit den Zahlen von 1 bis 19. Zeichnet für euch und einen Mitspieler je ein Sechseck, wie es in Abb. 170 dargestellt ist, gebt dem Mitspieler einen Satz Spiel-



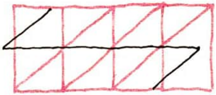
170

marken und fordert ihn auf, an einem kleinen Wettkampf teilzunehmen. Es soll jeder von euch seine Spielmarken so in die Kreise seines Sechsecks einordnen, daß die Summe der Zahlen an jeder Seite des Sechsecks und an jedem Radius des ihm umbeschriebenen Kreises gleich ist, und zwar bei einem von euch gleich 22 und bei dem anderen gleich 23. Die Schwierigkeit ist für beide Zahlen völlig gleich. Wem von euch gelingt es zuerst, die Aufgabe zu lösen?
Beachtet, daß sich bei dem einen von euch zwölf gleiche Summen zu 22 und bei dem anderen auch zwölf Summen, aber zu 23 ergeben müssen.

290. Das „Ornament"

Ihr habt vor euch ein eigenartiges Ornament, das aus 16 kleinen Dreiecken besteht. Einige Gruppen aus 4 benachbarten kleinen Dreiecken bilden große Dreiecke. In der Abbildung des Ornaments (Abb. 171) lassen sich unschwer 6 große Dreiecke erkennen, die miteinander „verflochten" sind.
Tragt in jedes kleine Dreieck des Ornaments eine der ganzen Zahlen von 1 bis 16 (ohne sie zu wiederholen) in der Weise ein, daß die Summe der Zahlen in jedem beliebigen der 6 großen Dreiecke 34 beträgt.

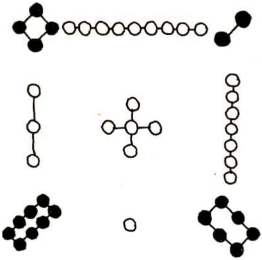
171



B. Magische Quadrate

291. Aus China und Indien

Als älteste und vollkommenste Kreuzsummen stellen sich die sogenannten magischen Quadrate dar.
Zum ersten Mal wurden magische Quadrate wahrscheinlich von den Chinesen ersonnen; ihre früheste Erwähnung findet sich in einem chinesischen Buch, das etwa 4000 bis 5000 Jahre vor unserer Zeitrechnung verfaßt worden ist.
Das älteste magische Quadrat der Welt ist in Abb. 172 dargestellt.



172

Mit schwarzen Kreisen sind in diesem Quadrat die geraden (weiblichen) Zahlen bezeichnet, mit weißen die ungeraden (männlichen). In der gewöhnlichen Schreibweise ist es nicht so eindrucksvoll:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Und dennoch, was für ein ausgezeichnetes Vorbild für Kreuzsummen ist das! Die neun ersten Zahlen der natürlichen Zahlenfolge sind auf die neun Felder des Quadrats so verteilt, daß die Summen der Zahlen in jeder Zeile, jeder Spalte und jeder der beiden Diagonalen gleich sind (die Haupteigenschaften eines magischen Quadrats).
Magische Quadrate, die bereits auf das 1. Jahrhundert zurückgehen, sind uns aus Indien überliefert. Hier ist eines dieser altindischen Kulturdenkmale von fast 2000jährigem Alter:

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Hier sind die 16 ersten Zahlen der natürlichen Zahlenfolge auf 16 Felder eines Quadrates so verteilt, daß alle Haupteigenschaften magischer Quadrate erfüllt sind. Im einzelnen ergibt sich:

$$+\left\{\begin{array}{rrrrl} 1 + & 14 + & 15 + & 4 & = 34 \\ 12 + & 7 + & 6 + & 9 & = 34 \\ 8 + & 11 + & 10 + & 5 & = 34 \\ 13 + & 2 + & 3 + & 16 & = 34 \end{array}\right.$$
$$\begin{array}{rrrr} \hline 34 & 34 & 34 & 34 \end{array}$$

und

$$1 + 7 + 10 + 16 = 34$$
$$13 + 11 + 6 + 4 = 34$$

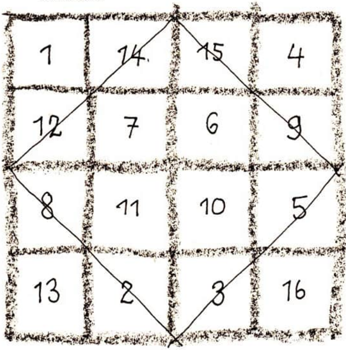
Jede Zahl des magischen Quadrats ist in mindestens zwei Summen einbezogen, und die Zahlen, die in den Diagonalen stehen, sogar in drei, und alle diese Summen sind einander gleich!

Nicht ohne Grund schrieben in dieser fernen Epoche des Aberglaubens die alten Inder und nach ihnen auch die Araber diesen Zahlenverbindungen geheimnisvolle und magische Eigenschaften zu.

Dieses ganz eigenartige Zahlenmosaik mit seiner Unveränderlichkeit der Summen verleiht wirklich dem magischen Quadrat die „magische" Kraft eines Kunstwerks, und diese zog die Aufmerksamkeit nicht nur der Mathematiker, sondern auch der Künstler an.

Nach Westeuropa kam das magische Quadrat aus Indien erst am Anfang des 16. Jahrhunderts. Den hervorragenden deutschen Künstler Albrecht Dürer, der auch mathematisch interessiert war, bezauberte es so, daß er es sogar (in etwas veränderter Gestalt) in einem seiner Kupferstiche (der „Melancholie", 1514) nachbildete.

Der Zauber des magischen Quadrats liegt nicht nur in der Unveränderlichkeit der Summen. Ähnlich, wie man einem wahrhaft künstlerischen Werk um so mehr neue fesselnde Seiten abgewinnt, je aufmerksamer man es betrachtet, verbergen sich auch in diesem Werk mathematischer Kunst noch manche weitere schöne Eigenschaften.



Wir weisen noch auf sechs zusätzliche Eigenschaften des oben angeführten 16 Feld großen Quadrats hin:

1. Die Summe der Zahlen in den Ecken unseres magischen Quadrats ist gleich 34, das ist dieselbe Zahl wie die Summe der Zahlen in jeder Zeile oder Spalte des Quadrats.

2. Die Summen der Zahlen in jedem der kleineren (aus vier Feldern bestehenden) Quadrate, die an die Ecken des gegebenen Quadrats grenzen, und in dem mittelsten Quadrat sind auch gleich, und jede von ihnen ist gleich 34:

$$\begin{aligned} 1 + 14 + 12 + 7 &= 34,\\ 8 + 11 + 13 + 2 &= 34,\\ 10 + 5 + 3 + 16 &= 34,\\ 15 + 4 + 6 + 9 &= 34,\\ 7 + 6 + 11 + 10 &= 34. \end{aligned}$$

3. In jeder Zeile gibt es ein Paar nebeneinanderliegender Zahlen, deren Summe 15 ist, und ein weiteres Paar ebenfalls nebeneinanderliegender Zahlen, deren Summe 19 ist.

4. Stellt nun einmal die Summe der Quadrate der Zahlen in den beiden äußeren und den beiden mittleren Zeilen fest:

$$\begin{aligned} & 1^2 + 14^2 + 15^2 + 4^2 = 438\\ \text{und } & 13^2 + 2^2 + 3^2 + 16^2 = 438,\\ & 12^2 + 7^2 + 6^2 + 9^2 = 310\\ \text{und } & 8^2 + 11^2 + 10^2 + 5^2 = 310. \end{aligned}$$

Wie ihr seht, haben sich paarweise die gleichen Summen ergeben!

5. Es ist nicht schwer, sich davon zu überzeugen, daß die analoge Eigenschaft auch die Zahlenspalten besitzen. Die Summen der Quadrate der Zahlen der beiden äußeren Spalten sind einander gleich, und die Summen der Quadrate der Zahlen der beiden mittleren Spalten sind auch gleich.

6. Wenn man in das gegebene Quadrat noch ein Quadrat einzeichnet, dessen Ecken die Seitenmitten des gegebenen Quadrats sind (siehe nebenstehende Zeichnung), dann ist a) die Summe der Zahlen, die an einem Paar gegenüberliegender Seiten des eingeschriebenen Quadrats liegen, gleich der Summe der Zahlen, die an dem anderen

Paar der gegenüberliegenden Seiten liegen, und jede dieser Summen ist wiederum gleich 34:

$12 + 14 + 3 + 5 = 15 + 9 + 8 + 2 = 34$;

b) noch interessant, daß die Summen der Quadrate und die Summen der Kuben dieser Zahlen einander jeweils gleich sind:

$12^2 + 14^2 + 3^2 + 5^2 = 15^2 + 9^2 + 8^2 + 2^2$,

$12^3 + 14^3 + 3^3 + 5^3 = 15^3 + 9^3 + 8^3 + 2^3$.

Wenn man alle Spalten des magischen Quadrats unter Beibehaltung ihrer Reihenfolge zu Zeilen macht, das heißt, wenn man die Zahlen der ersten Spalte in derselben Reihenfolge als erste Zeile anordnet, die Zahlen der zweiten Spalte als zweite Zeile usw., dann bleibt das Quadrat „magisch" mit entsprechenden Eigenschaften.

Beim Austausch der Plätze einzelner Zeilen oder Spalten des magischen Quadrats können einige der oben aufgezählten Eigenschaften verlorengehen, aber es können auch alle erhalten bleiben und neue auftreten. Wir tauschen zum Beispiel die Plätze der ersten und zweiten Zeile des gegebenen Quadrats:

12	7	6	9
1	14	15	4
8	11	10	5
13	2	3	16

Die Summen der Zahlen in den Zeilen und Spalten ändern sich zwar nicht, aber die Summen der Zahlen in den Diagonalen werden anders, sie sind nicht gleich 34; das magische Quadrat hat eine seiner Haupteigenschaften verloren. Es ist ein „halbmagisches Quadrat" geworden.

Wenn ihr fortfahrt, die Plätze der Zeilen und Spalten des Quadrats zu vertauschen, erhaltet ihr immer wieder neue magische Quadrate aus 16 Zahlen. Einige davon erfüllen alle Haupteigenschaften.

Aufgabe. Versucht, durch Austausch der Plätze der Zeilen und Spalten des gegebenen magischen Quadrats (vgl. S. 157) eine solche Anordnung der Zahlen zu erhalten, daß

1. alle Haupteigenschaften des magischen Quadrats (Gleichheit der Summen in jeder Zeile, Spalte und Diagonalen) erfüllt sind;
2. die Summen der Quadrate der Zahlen in den Diagonalen gleich sind;
3. die Summen der Kuben der Zahlen in den Diagonalen auch gleich sind.

292. Wie setzt man sich selbst ein magisches Quadrat zusammen?

Der Gedanke, magische Quadrate zu bilden, der vor einigen tausend Jahren entstanden ist, begeisterte allmählich interessierte Laien wie auch die Fachleute auf dem Gebiet der Mathematik. Es begannen die bis jetzt noch andauernden Nachforschungen nach den theoretischen Grundlagen dieser merkwürdigen und schönen Erscheinung in der Welt der Zahlen. In Hunderten von Jahren wurden Hunderte von geistreichen Verfahren ersonnen, wie man magische Quadrate bilden kann.

Möchtet ihr einige der interessantesten davon kennenlernen? In solchem Falle werden wir ähnlich den Rundfunkbastlern verfahren. Obwohl sie noch nicht in allen Einzelheiten der Theorie des Rundfunkempfangs Bescheid wissen, verstehen sie es doch, einen Rundfunkempfänger aus fertigen Einzelteilen nach vorgegebenem Schema zu bauen. Unsere „Einzelteile" sind Zahlen, und das Chassis, auf das alle Einzelteile montiert werden, ist ein Quadrat mit entsprechenden Feldern.

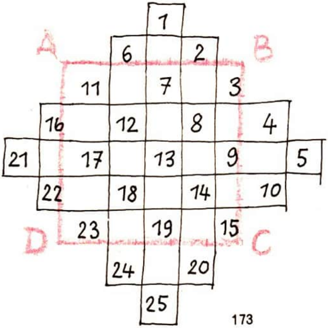
Durch die Anzahl der Felder in jeder Zeile oder Spalte des magischen Quadrats wird seine Ordnung bestimmt. Ein magisches Quadrat 3. Ordnung hat in jeder Reihe 3 Felder, ein magisches Quadrat 4. Ordnung 4 Felder usw.

Quadrate ungeradzahliger Ordnung.

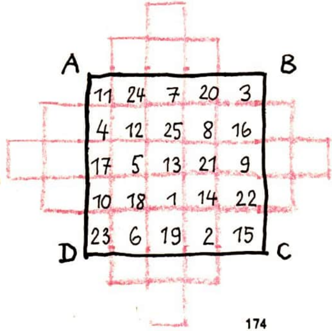
Es wird verlangt, nehmen wir an, ein magisches Quadrat irgendeiner ungeradzahligen Ordnung „zusammenzubauen".

Das kann man nach einem einheitlichen Schema tun, und Schemata sind viele ersonnen worden. Hier führen wir eines zur Aufstellung eines Quadrats 5. Ordnung an; später könnt ihr dieses Schema auch für Quadrate 3., 7. und anderer ungeradzahliger Ordnung anwenden.

Wir konstruieren das Quadrat ABCD (Abb. 173) mit 25 Feldern und ergänzen es vorübergehend zu einer symmetrischen stufenförmigen Figur (wie sie in derselben Abbildung dargestellt ist) mit Stufen von der Größe eines Feldes.



173



174

In die Figur setzen wir nacheinander in schrägen Reihen von oben nach rechts unten die 25 ganzen Zahlen von 1 bis 25 ein. Und jetzt muß man jede Zahl, die sich außerhalb des Quadrats ABCD befindet, in derselben Zeile oder Spalte genau um soviel Felder von ihrem Feld entfernt versetzen, wie die Ordnung des Quadrats angibt, in unserem Beispiel um 5. So muß nach dieser Regel die Zahl 6 in das Feld unter der Zahl 18 eingetragen werden, die Zahl 24 über der Zahl 12; weiter 1 unter 13, 25 über 13, 16 rechts von 8 und 4 links von 12 usw.

Wir erhalten ein magisches Quadrat, wie es in Abb. 174 dargestellt ist.

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß in dem erhaltenen Quadrat die Haupteigenschaften des magischen Quadrats erfüllt sind, das heißt, daß die Summe der Zahlen in jeder Diagonalen, jeder Horizontalen und Vertikalen ein und dieselbe, und zwar gleich 65 ist.

Diese Zahl heißt die *Konstante* des Quadrats 5. Ordnung. In dem Quadrat findet sich aber noch eine zusätzliche Eigenschaft: Alle Zahlenpaare, die symmetrisch zum mittelsten Feld liegen, ergeben die gleiche Summe; zum Beispiel $1 + 25 = 19 + 7 = 18 + 8 = 23 + 3 = 6 + 20 = 2 + 24 = 4 + 22$ usw. Magische Quadrate, die diese Eigenschaft besitzen, nennt man *symmetrische*.

Aufgabe. Überlegt, wie man das eben beschriebene Verfahren zur Bildung eines magischen Quadrats mit 25 Feldern zur Aufstellung magischer Quadrate 3. und 7. Ordnung anwenden kann.

Quadrate einer *durch 4 teilbaren* Ordnung ($n = 4k$).

Zur Bildung eines beliebigen magischen Quadrats der Ordnung $n = 4, 8, 12, \ldots 4k$ aus den n^2 ganzen Zahlen von 1 bis n^2 ist zum Beispiel folgendes einfache Schema nötig:

1. Man trägt die gegebenen Zahlen in die Felder des gegebenen Quadrats in natürlicher Folge ein.

2. Dann trennt man in den Ecken des gegebenen Quadrats die 4 Quadrate mit den Seiten $\frac{n}{4}$ und in der Mitte ein Quadrat mit der

Seite $\frac{n}{2}$ ab (zum Beispiel wie in Abb. 175a und 176a).

3. Nunmehr vertauscht man in den 5 abgetrennten Quadraten die Plätze der Zahlen miteinander, die symmetrisch zum Mittelpunkt des gegebenen Quadrats liegen. Das bedeutet, daß man bei natürlicher Zahlenfolge in einem Quadrat 4. Ordnung die Plätze 1 und 16, 4 und 13, 6 und 11, 7 und 10 (Abb. 175b) und bei natürlicher Zahlenfolge

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

175 a b

in einem Quadrat 8. Ordnung die Plätze 1 und 64, 10 und 55, 2 und 63, 9 und 56, 19 und 46, 28 und 37, 20 und 45, 27 und 38, 21 und 44 usw. (Abb. 176b) austauschen muß.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

a

64	63	3	4	5	6	58	57
56	55	11	12	13	14	50	49
17	18	46	45	44	43	23	24
25	26	38	37	36	35	31	32
33	34	30	29	28	27	39	40
41	42	22	21	20	19	47	48
16	15	51	52	53	54	10	9
8	7	59	60	61	62	2	1

176 b

Man erhält in jedem Falle symmetrische magische Quadrate.

Zwei Aufgaben zur selbständigen Lösung (ohne Antworten im Lösungsteil).

1. Überzeugt euch davon, daß auch dann ein magisches Quadrat entsteht, wenn die Zahlen in den 5 abgetrennten Quadraten auf ihren Plätzen bleiben und man in den übrigen 4 Rechtecken die Zahlen miteinander vertauscht, die symmetrisch zum Mittelpunkt des Quadrats liegen.

2. Bildet ein magisches Quadrat 12. Ordnung!

Quadrate einer durch 2, aber nicht durch 4 teilbaren Ordnung ($n = 4k + 2$) aus den n^2 ganzen Zahlen von 1 bis n^2.

Zum „Bau" von Quadraten der Ordnung $n = 6, 10 \ldots 4k + 2$ wird vielleicht am meisten die „Rahmenmethode" bevorzugt, die schon im Jahre 1544 von Michael Stifel ausgearbeitet worden ist. Zuerst wird auf beliebige Art ein magisches Quadrat $(n-2)$ter Ordnung (das ist einer durch 4 teilbaren Ordnung) aus den $(n-2)^2$ ganzen Zahlen von 1 bis $(n-2)^2$ gebildet. Dann wird das Quadrat in einen Rahmen eingesetzt, mit dem zusammen ein magisches Quadrat der n-ten Ordnung entsteht.

Nach dieser Methode lassen sich leicht aus magischen Quadraten 4. und 8. Ordnung magische Quadrate 6. und 10. Ordnung konstruieren usw.

Die Methode kann auch für Quadrate ungeradzahliger Ordnung verwertet werden: Aus einem Quadrat 3. Ordnung kann man ein Quadrat 5. Ordnung bilden usw. Die ganze „Montage" läßt sich so auf ein geschicktes Ausfüllen der Felder des äußeren Rahmens mit Zahlen zurückführen.

Man soll zum Beispiel ein magisches Quadrat n-ter Ordnung aus den Zahlen 1, 2, 3, ... n^2 bilden. Wir verfahren so:

1. Wir bilden ein magisches Quadrat $(n-2)$ter Ordnung aus den Zahlen 1, 2, 3, ... $(n-2)^2$ und vermehren jede Zahl um $2n-2$.

2. Das erhaltene Quadrat ergänzen wir mit einem Rahmen von der Breite eines Feldes (vgl. zum Beispiel Abb. 177).

Jetzt muß man in die Felder des Rahmens

die Zahlen 1, 2, 3, ... 2n — 2 und ihre Ergänzungen zu $n^2 + 1$ so setzen, daß die magischen Eigenschaften erfüllt werden. Wie stellt man das an? Nach welcher Regel muß man die Zahlen in das Rähmchen setzen?

Für eine kleine Zahl für n kann man die gewünschte Aufstellung durch Versuche erhalten. Selbstverständlich muß man dazu die Konstante des zu bildenden magischen Quadrats kennen. Sie ist leicht vorauszuberechnen: Die Summe aller Zahlen des Quadrats ist

$$1 + 2 \ldots + n^2 = \frac{(1 + n^2)\, n^2}{2};$$

dividieren wir diese Summe durch n, dann erhalten wir die Konstante S des magischen Quadrats n-ter Ordnung: $S = \frac{(1 + n^2)\, n}{2}$.

Aber man kann auch auf rein mathematischem Wege die Anordnung der Zahlen in den Feldern des Außenrahmens finden, wobei es genügt, sie für die Zahlen 1, 2, ... 2n — 2 zu ermitteln.

Im einzelnen muß also, wenn eine dieser Zahlen ein Eckfeld des Rahmens einnimmt, ihre Ergänzung zu $n^2 + 1$ auf der Diagonalen in die gegenüberliegende Ecke (zur Erlangung der magischen Konstanten in der Diagonalen) gesetzt werden. Infolgedessen muß man, wenn eine der Zahlen der Gruppe 1, 2, ... 2n — 2 irgendein Feld des Rahmens belegt, dann ihre Ergänzung zu $n^2 + 1$ in dieselbe Spalte (in dieselbe Zeile) auf der gegenüberliegenden Seite des Rahmens setzen.

Der bekannte deutsche Mathematiker L. Bieberbach stellte 1954 fest, daß in dem Rahmen oben und unten diejenigen Zahlen aus der Folge 1, 2, ... 2n — 2 stehen müssen, die nach dem Verhältnis bestimmt werden: $a + b + \left(\overline{\frac{n-4}{2}}\right)_o = \left(\overline{\frac{n}{2}}\right)_u$, und links und rechts die übrigen Zahlen derselben Folge in Übereinstimmung mit der Forderung $a - b + \left(\overline{\frac{n-2}{2}}\right)_l = \left(\overline{\frac{n-2}{2}}\right)_r'$, wobei a und b für das linke und rechte obere Eckfeld mit der Einschränkung beliebig ausgewählte Zahlen sind, daß $a < b$ und $a + b$ nicht durch 2 teilbar ist. Der Strich über der Zahl bedeutet, daß man soviel Zahlen aus der Folge 1, 2, ... 2n — 2 addieren muß, wieviel die Zahl angibt, die unter dem Strich steht. Wenn die Summanden (auf dem Wege des einfachen Probierens) bestimmt werden, dann kann man sie in den Feldern des Rahmens in willkürlicher Folge anordnen, aber man muß es in Übereinstimmung mit den Hinweisen o = oben, u = unten, l = links und r = rechts tun.

Für ein Beispiel bilden wir nach den Formeln Bieberbachs einen Rahmen für ein magisches Quadrat 6. Ordnung. Da n = 6 ist, ist 2n — 2 = 10, $n^2 + 1 = 37$; folglich müssen im Rahmen die Zahlen 1, 2, 3, ... 10 und ihre Ergänzungen zu $n^2 + 1 = 37$, das heißt noch die Zahlen 36, 35, 34, ... 27 stehen. Wir nehmen an, daß a = 1 und b = 2 ist. Nun sind noch die Plätze für die Zahlen 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 zu suchen. Die Formeln Bieberbachs nehmen folgenden Ausdruck an:

$$1 + 2 + (\overline{1})_o = (\overline{3})_u \text{ oder } 3 + (\overline{1})_o = (\overline{3})_u;$$
$$1 - 2 + (\overline{2})_l = (\overline{2})_r' \text{ oder } -1 + (\overline{2})_l = (\overline{2})_r'.$$

Das bedeutet, daß man die Zahlen 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 in 4 Gruppen teilen muß; für die eine Gruppe muß man eine Zahl aussuchen, für die andere Gruppe drei, für die dritte zwei und für die vierte die übrigen zwei. Die erste Formel verlangt, daß die Summe der Zahlen der ersten Gruppe $(\overline{1})$ und der Zahl 3 gleich ist der Summe der Zahlen der zweiten Gruppe $(\overline{3})$. Die zweite Formel verlangt, daß die Summe der Zahlen der dritten Gruppe $(\overline{2})$ und der Zahl —1 gleich der Summe der Zahlen der vierten Gruppe $(\overline{2})'$ ist. Wenn wir die Gruppen zusammensetzen, erhalten wir:

$$3 + (9)_o = (3 + 4 + 5)_u,$$
$$-1 + (6 + 10)_l = (7 + 8)_r.$$

Damit sind die Plätze für alle Zahlen festgelegt: in den oberen Ecken des Rahmens 1 und 2, außerdem oben noch die Zahl 9; unten 3, 4 und 5 in beliebiger Folge; links 6 und 10, rechts 7 und 8 (Abb. 177 a).

Die übrigen Felder des Rahmens werden mit den Ergänzungen zu 37 nach dem oben erläuterten Prinzip ausgefüllt (Abb. 177b).

1	.	9	.	.	2
6					.
10					.
.					8
.					7
.	4	.	3	5	

a

1	33	9	34	32	2
6					31
10					27
29					8
30					7
35	4	28	3	5	36

b

26	12	13	23
15	21	20	18
19	17	16	22
14	24	25	11

c

1	33	9	34	32	2
6	26	12	13	23	31
10	15	21	20	18	27
29	19	17	16	22	8
30	14	24	25	11	7
35	4	28	3	5	36

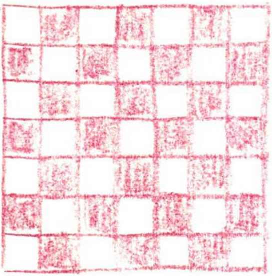
d

177

Jetzt nehmen wir ein beliebiges fertiges magisches Quadrat der 4. Ordnung, zum Beispiel dasjenige, das in Abb. 175b gezeigt wurde; wir vermehren alle Zahlen um 10 (das ist um $2n-2$) und erhalten ein neues magisches Quadrat (Abb. 177c). Bleibt nur noch übrig, es in den Rahmen zu setzen, und das magische Quadrat 6. Ordnung ist fertig (Abb. 177d).
Bildet mit Hilfe der Bieberbachschen Formeln selbständig magische Quadrate 8. und 12. Ordnung!

293. Eine Prüfung auf Scharfsinn

Tragt in die weißen Felder des Quadrats, das in Abb. 178 dargestellt ist, alle ganzen Zahlen von 30 bis 54 so ein, daß die Summe der Zahlen in jeder der 7 horizontalen und der 7 vertikalen Reihen gleich 150 ist und die Summe der Zahlen in jeder der beiden Diagonalen gleich 300. Tut das nicht aufs Geratewohl, sondern versucht, euch irgendein Schema für die Anordnung der gegebenen Zahlen auszudenken.



178

294. „Magisches" Spiel mit „15"

In einem Kästchen, das für 16 quadratische Steine berechnet ist, befinden sich 15 durchnumerierte Steine; ein Platz ist „frei". Gewöhnlich besteht das Spiel mit „15" darin, daß man zunächst alle 15 Steine in willkürlicher Folge in das Kästchen legt und dann versucht, sie in die natürliche Zahlenfolge zu ordnen (Abb. 179), indem man die Steine einen um den anderen verschiebt, ohne sie

179

aus dem Kästchen herauszunehmen. In dieser Form ist das Spiel wenig inhaltsreich. Aber sein mathematischer Wert kann durch eine zusätzliche Forderung bedeutend erhöht werden: Man soll durch Verschieben die Steine so ordnen, daß ein magisches Quadrat aus 16 Zahlen entsteht. (Das leere Feld, das sich an beliebiger Stelle im Kästchen befinden kann, wird als Null gerechnet.) Ordnet jetzt die Steine des Spiels so an, wie in Abb. 180 dargestellt ist. (Die natürliche Zahlenfolge in der Anordnung der Steine wird lediglich durch die beiden letzten Steine gestört.) Ohne daß ihr Steine aus dem Kästchen nehmt, nur, indem ihr sie verschiebt, sollt ihr ein magisches Quadrat mit der Konstanten 30 bilden.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

180

Sucht nach einer Lösung in nicht mehr als 50 Zügen!

Hierzu muß man zweifellos Geduld und große Beharrlichkeit aufbringen.

Man kann ein magisches Quadrat auch aus der in Abb. 179 gezeigten Stellung bilden, aber das wird immer ein anderes Quadrat sein als eins, das man aus der in Abb. 180 gezeigten Stellung bilden kann. Überzeugt euch!

295. Ein „nicht traditionelles" magisches Quadrat

Aufgabe 1. Traditionsgemäß werden n^2 Felder eines magischen Quadrats der n-ten Ordnung mit den Zahlen von 1 bis n^2 ausgefüllt. In allgemeineren Fällen können die Felder des Quadrats mit beliebigen Zahlen ausgefüllt werden.

Es sollen in den 16 Feldern eines Quadrats alle ganzen Zahlen von 1 bis 8, jede zweimal, angeordnet sein, wie in Abb. 181 gezeigt

1	2	3	4
5	6	7	8
8	7	6	5
4	3	2	1

181

wird. Stellt diese Zahlen so um, daß ihre Summe in jeder beliebigen horizontalen, vertikalen und diagonalen Reihe und ebenso in den Ecken des Quadrats gleich 18 ist. Außerdem sollen dieselbe Summe bilden 1. die Zahlen jedes beliebigen Quadrats aus vier benachbarten Feldern, 2. die Zahlen, die in den Ecken jedes beliebigen Quadrats aus neun benachbarten Feldern stehen, wobei sich kein Summand in einer dieser Summen wiederholen darf.

Sucht die Lösung durch Probieren; vielleicht denkt ihr euch auch ein Lösungsschema aus.

Aufgabe 2. Bildet ein magisches Quadrat aus den 16 ungeraden Zahlen von 1 bis 31. Es wird weiter verlangt, daß dieses magische Quadrat noch einige zusätzliche Eigenschaften haben soll, nämlich:

1. Es sollen gleich sein, und zwar gleich der Zahl 64 (der Konstanten des Quadrats), die Summe der Zahlen, die angeordnet sind

a) in den vier Ecken des gesamten 16feldigen Quadrats,

b) in den vier Ecken der vier 9feldigen Quadrate,

c) in den vier Ecken der neun 4feldigen Quadrate,

d) in den vier Ecken der sechs Rechtecke mit einer Länge von 4 Feldern und einer Breite von 2 Feldern,

e) an jedem Paar gegenüberliegender Seiten des eingeschriebenen Quadrats, dessen Ecken in den Seitenmitten des gegebenen Quadrats liegen;

2. die Summen der Quadrate der Zahlen in zwei Zeilen sollen gleich sein, und die Summen der Quadrate der Zahlen in den beiden anderen Zeilen sollen auch einander gleich sein;

3. die Summen der Quadrate der Zahlen in zwei Spalten sollen einander gleich sein, und die Summen der Quadrate der Zahlen in den beiden anderen Spalten sollen auch gleich sein.

Ihr bildet das Quadrat, das alle geforderten Eigenschaften besitzt, indem ihr in dem Ausgangsquadrat die Zeilen miteinander und die Spalten miteinander vertauscht.

Ein Witzbold bildete ein ziemlich spaßiges, „untraditionelles" magisches Quadrat mit der Konstanten $S = 264$ (Abb. 182).

Es ist ein „Verwandlungsquadrat".

Was meint ihr, warum?

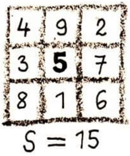
96	11	89	68
88	69	91	16
61	86	18	99
19	98	66	81

182

296. Welche Zahl steht im mittelsten Feld?

Bildet ein magisches Quadrat 3. Ordnung aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9. Habt ihr es? Jetzt bildet durch Drehung des Quadrats um 90°, 180° und 270° 3 weitere magische Quadrate. Dann vertauscht in jedem dieser 4 Quadrate die obere mit der unteren Zeile. Insgesamt habt ihr damit 8 magische Quadrate.

Ich kann nun mit Bestimmtheit vorhersagen, daß eins eurer Quadrate so ist wie das in Abb. 183 dargestellte. Wie wir sehen, befindet sich im mittelsten Feld dieses



183

Quadrats die Zahl 5, die $^1/_3$ der Konstanten des magischen Quadrats bildet.

Beweist, daß keine andere Zahl im mittelsten Feld eines magischen Quadrats 3. Ordnung stehen kann.

Für den algebraischen Beweis benutzt die Form des Quadrats 3. Ordnung in Abb. 184 und betrachtet die 8 Haupteigenschaften des

184

magischen Quadrats:

$a_1 + a_2 + a_3 = S, \qquad a_1 + a_4 + a_7 = S,$

$a_4 + a_5 + a_6 = S, \qquad a_2 + a_5 + a_8 = S,$

$a_7 + a_8 + a_9 = S, \qquad a_3 + a_6 + a_9 = S,$

$a_1 + a_5 + a_9 = S, \qquad a_3 + a_5 + a_7 = S.$

Beweist, daß bei diesen Bedingungen $a_5 = \frac{S}{3}$ ist, selbst wenn das magische Quadrat ,,untraditionell'' ist.

297. Eine ,,Kiste'' voller arithmetischer Kuriositäten

Äußerst seltsame Wechselbeziehungen zeigen sich manchmal zwischen den ganzen Zahlen.

Wir nehmen zum Beispiel die 12 positiven ganzen Zahlen: 1, 2, 3, 6, 7, 11, 13, 17, 18, 21, 22, 23.

Dem Aussehen nach haben sie nichts Bemerkenswertes an sich. Aber jetzt teile ich sie in zwei Gruppen:

1, 6, 7, 17, 18, 23 und 2, 3, 11, 13, 21, 22.

Stellt jetzt die Summen der Zahlen jeder Gruppe gegenüber:

$1 + 6 + 7 + 17 + 18 + 23 = 72,$

$2 + 3 + 11 + 13 + 21 + 22 = 72.$

Die Summen sind gleich. Und die Summen der Quadrate dieser Zahlen?

$1^2 + 6^2 + 7^2 + 17^2 + 18^2 + 23^2 = 1228,$

$2^2 + 3^2 + 11^2 + 13^2 + 21^2 + 22^2 = 1228.$

Die Summen der Quadrate sind auch gleich. Und die Summen der Kuben? Ihr könnt euch selbst davon überzeugen, daß auch die Summen der Kuben und die Summen der 4. Potenz und die Summen der 5. Potenz dieser Zahlen gleich sind:

$1^3 + 6^3 + 7^3 + 17^3 + 18^3 + 23^3$
$= 2^3 + 3^3 + 11^3 + 13^3 + 21^3 + 22^3;$

$1^4 + 6^4 + 7^4 + 17^4 + 18^4 + 23^4$
$= 2^4 + 3^4 + 11^4 + 13^4 + 21^4 + 22^4;$

$1^5 + 6^5 + 7^5 + 17^5 + 18^5 + 23^5$
$= 2^5 + 3^5 + 11^5 + 13^5 + 21^5 + 22^5.$

Etwas noch Erstaunlicheres: Vermehrt oder vermindert alle Zahlen der ersten und der zweiten Gruppe um ein und dieselbe beliebige ganze Zahl; die sich daraus ergebenden neuen Gruppen besitzen dieselben Eigenschaften.

Wir vermindern zum Beispiel alle gegebenen Zahlen um 12; wir erhalten: —11, —6, —5, 5, 6, 11 und —10, —9, —1, 1, 9, 10.

Es ist offensichtlich, daß die Summe der Zahlen der ersten Gruppe gleich der Summe der Zahlen der zweiten Gruppe ist (beide Summen sind 0). Gleich sind auch die Summen der Kuben und die Summen der 5. Potenz dieser Zahlen (sie sind auch 0). Es ist nicht schwer, sich von der Gleichheit der Summen der Quadrate und der Summen der 4. Potenz der Zahlen zu überzeugen:

$(-11)^2 + (-6)^2 + (-5)^2 + 5^2 + 6^2 + 11^2$
$= (-10)^2 + (-9)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 9^2 + 10^2$;
$(-11)^4 + (-6)^4 + (-5)^4 + 5^4 + 6^4 + 11^4$
$= (-10)^4 + (-9)^4 + (-1)^4 + 1^4 + 9^4 + 10^4$.
Und jetzt noch ein kleiner Trick, und ihr habt eine Formel in der Hand, die soviel Gruppen von Zahlen mit den obengenannten Eigenschaften ergibt, wie ihr wünscht:
$(m-11)^n + (m-6)^n + (m-5)^n + (m+5)^n + (m+6)^n + (m+11)^n = (m-10)^n + (m-9)^n + (m-1)^n + (m+1)^n + (m+9)^n + (m+10)^n$,
wobei m eine beliebige Zahl ist und $n = 1$, 2, 3, 4 oder 5.
Interessant sind auch diejenigen Zahlen, die von der Zahl m abgezogen oder zu ihr hinzugefügt werden. Diese Zahlen, entsprechend positiv oder negativ verwendet, eignen sich zur Bildung der ersten und der dritten Zeile eines sogenannten unvollständigen magischen Null-Quadrats (Abb. 185). Null-Quadrat heißt es deswegen, weil

6	-11	5
-16	12	4
10	-1	-9

185

die Summe der Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte gleich 0 ist. Die Zahlen dieses magischen Null-Quadrats bieten noch einige kuriose Beziehungen:
1. $6^2 + (-11)^2 + 5^2 = 10^2 + (-1)^2 + (-9)^2$,
$6^4 + (-11)^4 + 5^4 = 10^4 + (-1)^4 + (-9)^4$;
2. die Summen der Produkte der Zahlen in den Zeilen, in den Spalten und in den Diagonalen sind gleich auch bei beliebigen Umstellungen der Zeilen und der Spalten des Quadrats:
$[6 \cdot (-16) \cdot 10] + [(-11) \cdot 12 \cdot (-1)] + [5 \cdot 4 \cdot (-9)]$
$= [6 \cdot (-11) \cdot 5] + [(-16) \cdot 12 \cdot 4] + [10 \cdot (-1) \cdot (-9)]$
$= [6 \cdot 12 \cdot (-9)] + [(-11) \cdot 4 \cdot 10] + [5 \cdot (-16) \cdot (-1)]$
$= (5 \cdot 12 \cdot 10) + [(-11) \cdot (-16) \cdot (-9)] + [6 \cdot 4 \cdot (-1)] = -1008$;
3. wenn man die Zahlen einer beliebigen Spalte oder Zeile mit den Buchstaben a, b und c bezeichnet, dann ergeben sich, abgesehen von der identischen Gleichung $a + b + c = 0$, folgende Gleichungen:
$a^2 - bc = b^2 - ca = c^2 - ab$,
$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.
Überzeugt euch davon!
Wie ihr seht, ist dieses magische Null-Quadrat eine ganze „Kiste" voller verschiedener kurioser arithmetischer Wechselbeziehungen.

298. „Regelmäßige" magische Quadrate 4. Ordnung

Jedes „traditionelle" magische Quadrat 4. Ordnung mit den Zahlen von 1 bis 16 kann man in ein magisches Quadrat 4. Ordnung mit den Zahlen 0, 1, 2 . . . 15 verwandeln, indem man jede Zahl um 1 vermindert. Jede ganze Zahl von 1 bis 15 kann man durch eine Summe von höchstens 4 Summanden der Zahlen 1, 2, 4 und 8 ausdrücken, wobei keiner der Summanden 1, 2, 4 und 8 mehr als einmal in einer Summe auftritt:

$1 = 1$,
$2 = 2$,
$3 = 1 + 2$,
$4 = 4$,
$5 = 1 + 4$,
$6 = 2 + 4$,
$7 = 1 + 2 + 4$,
$8 = 8$,
$9 = 1 + 8$,
$10 = 2 + 8$,
$11 = 1 + 2 + 8$,
$12 = 4 + 8$,
$13 = 1 + 4 + 8$,
$14 = 2 + 4 + 8$,
$15 = 1 + 2 + 4 + 8$.

Nunmehr setzen wir in das magische Quadrat an Stelle der Zahlen 1 bis 15 die Summanden aus der vorstehenden Tabelle ein und streichen alle von 1 verschiedenen Summanden weg. In die leer werdenden Felder setzen wir Null. Es ergibt sich ein Quadrat, das nur Nullen und Einsen enthält. Die weggestrichenen Summanden 2 setzen wir in die entsprechenden Felder eines zweiten Quadrats, das also nur Nullen und Zweien enthält. Die weggestrichenen Summanden 4

setzen wir in die entsprechenden Felder eines dritten und die Summanden 8 in die eines vierten Quadrats, so daß das dritte Quadrat nur Nullen und Vieren und das vierte nur Nullen und Achten enthält.
So haben wir das Quadrat, das in Abb. 186 dargestellt ist,

9	14	2	5
15	4	8	3
0	11	7	12
6	1	13	10

186

in die vier Quadrate zerlegt, die in Abb. 187 dargestellt sind.

1	0	0	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	1	0

0	2	2	0
2	0	0	2
0	2	2	0
2	0	0	2

0	4	0	4
4	4	0	0
0	0	4	4
4	0	4	0

8	8	0	0
8	0	8	0
0	8	0	8
0	0	8	8

187

Das magische Quadrat, das in Abb. 188 dar-

0	4	15	11
9	13	2	6
14	10	5	1
7	3	8	12

188

gestellt ist, wird auf diese Weise in die vier Quadrate zerlegt, die in Abb. 189 dargestellt sind. (Die „Summe" der vier Quadrate ergibt das jeweilige Ausgangsquadrat; sie

0	0	1	1
1	1	0	0
0	0	1	1
1	1	0	0

0	0	2	2
0	0	2	2
2	2	0	0
2	2	0	0

0	4	4	0
0	4	0	4
4	0	4	0
4	0	0	4

0	0	8	8
8	8	0	0
8	8	0	0
0	0	8	8

189

wird durch Addition der Zahlen in sich entsprechenden Feldern gebildet.)
Wenn jedes dieser vier Quadrate auch ein magisches Quadrat ist, nennen wir das magische Quadrat 4. Ordnung, von dem wir ausgegangen sind, ein „regelmäßiges". So ist das magische Quadrat das im ersten Beispiel dargestellt ist, ein regelmäßiges, das im zweiten Beispiel dargestellte aber ein unregelmäßiges.
Magische Quadrate 4. Ordnung, die aus nur zwei verschiedenen Zahlen bestehen, kann man in acht verschiedenen Zusammenstellungen bilden (vgl. Abb. 190).

a	a	a'	a'
a'	a'	a	a
a	a	a'	a'
a'	a'	a	a

b	b'	b	b'
b	b'	b	b'
b'	b	b'	b
b'	b	b'	b

c	c'	c	c'
c'	c	c'	c
c'	c	c'	c
c	c'	c	c'

d	d'	d'	d
d'	d	d	d'
d	d'	d'	d
d'	d	d	d'

e	e	e'	e'
e'	e'	e	e
e'	e'	e	e
e	e	e'	e'

f	f'	f'	f
f	f'	f'	f
f'	f	f	f'
f'	f	f	f'

g	g	g'	g'
g	g'	g	g'
g'	g	g'	g
g'	g'	g	g

h	h'	h	h'
h'	h'	h	h
h	h	h'	h'
h'	h	h'	h

190

Jede „Summe" von vier aus diesen acht Quadraten ergibt ein regelmäßiges magisches Quadrat 4. Ordnung. Darunter sind nur elf magische Quadrate, die in allen Teilen voneinander verschieden sind.
Wenn wir die acht Quadrate mit den Buchstaben A, B, C, D, E, F, G und H bezeichnen, dann sind diese elf „Summen" aus vier Quadraten die folgenden:

$$A + B + C + D,$$
$$A + B + C + E,$$
$$A + B + D + F,$$
$$A + B + E + F,$$
$$A + C + D + E,$$
$$A + D + E + F,$$
$$B + C + D + F,$$
$$B + C + E + F,$$
$$C + D + E + F,$$
$$C + E + G + H,$$
$$D + F + G + H.$$

In jedem der elf Quadrate muß man an Stelle der Buchstabenpaare a und a', b und b', c und c' usw. die vier Zahlenpaare 0 und 1, 0 und 2, 0 und 4, 0 und 8 einsetzen. So setzen wir in dem Quadrat $C + E + G + H$ ein:
$c = 0$, $e = 4$, $g = 8$, $h = 0$,
$c' = 2$, $e' = 0$, $g' = 0$, $h' = 1$.
Es ergibt sich das magische Quadrat, das in Abb. 191 dargestellt ist.

12	15	0	3
11	1	14	4
2	8	7	13
5	6	9	10

191

Da man vier Zahlenpaare auf 24 verschiedene Weisen zu vier Paaren und jedes Zahlenpaar auf zwei Weisen zusammenstellen kann, ist die Anzahl aller regelmäßigen magischen Quadrate 4. Ordnung gleich $11 \cdot 24 \cdot 16 = 4224$. Wenn wir jedoch die acht Quadrate, die sich durch Umkehrung und Spiegelung eines Quadrats ergeben, als eine Lösung betrachten, dann ist die Zahl der möglichen verschiedenen regelmäßigen magischen Quadrate 4. Ordnung für die Zahlen 0, 1, 2 ... 15 gleich $4224 : 8 = 528$.

299. Auswahl der Zahlen für ein magisches Quadrat beliebiger Ordnung

Es sei ein Quadrat gegeben, das aus n^2 Feldern besteht (n sei eine beliebige ganze Zahl, größer als 1). Es wird verlangt, alle Felder so mit ganzen Zahlen auszufüllen, daß ihre Summe in jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonalen gleich ein und derselben beliebig vorgegebenen Zahl S (der Konstanten des Quadrats) ist. Mit anderen Worten, es wird aufgegeben, ein magisches Quadrat zu bilden, das kein „traditionelles" zu sein braucht, das heißt, nicht aufeinanderfolgende natürliche Zahlen enthalten muß. Wir lassen also, wenn wir die Felder des Quadrats ausfüllen, zu, beliebige ganze Zahlen zu verwenden, sogar negative, und nicht unbedingt jede nur einmal. (Dabei versteht sich, daß nicht alle n^2 Zahlen gleich sein sollen.)

Man könnte glauben, daß die Aufgabe bei dieser Freiheit in der Wahl der Zahlen höchst einfach wird. Ein Versuch wird euch davon überzeugen, daß das bei weitem nicht so ist. Ich empfehle zu versuchen, ein Quadrat 5. Ordnung aus beliebigen Zahlen mit einer gegebenen Konstanten zu bilden und erst danach die Lektüre dieses Kapitels fortzusetzen.

Bevor wir zur generellen Formulierung übergehen, gehen wir besonders auf Quadrate 3. und 4. Ordnung ein. Wir nehmen dabei die Algebra zu Hilfe.

Das Quadrat 3. Ordnung. Die gesuchten Zahlen bezeichnen wir mit dem Buchstaben a und mit zwei Zahlen, die wir rechts unten hinzusetzen (Indizes) (Abb. 192). Die erste

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

192

Zahl des Index zeigt die Nummer der Zeile an, in der sich a befindet, und die zweite Zahl die der Spalte, in der a liegt.

Da das Quadrat magisch sein soll, haben wir 8 Gleichungen: 6 für die Summen der Zahlen in jeder der 3 Zeilen und in jeder der 3 Spalten und 2 für die Summen der Zahlen in jeder der beiden Diagonalen. Wenn wir berücksichtigen, daß $a_{22} = \frac{S}{3}$ ist, wobei S die Konstante des Quadrats bezeichnet (vgl. S. 165), erhalten wir folgende 8 Gleichungen:

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = S, \qquad (1)$$
$$a_{31} + a_{32} + a_{33} = S, \qquad (2)$$
$$a_{11} + a_{21} + a_{31} = S, \qquad (3)$$
$$a_{13} + a_{23} + a_{33} = S, \qquad (4)$$
$$a_{21} + a_{23} = \frac{2}{3} S, \qquad (5)$$
$$a_{12} + a_{32} = \frac{2}{3} S, \qquad (6)$$
$$a_{11} + a_{33} = \frac{2}{3} S, \qquad (7)$$
$$a_{13} + a_{31} = \frac{2}{3} S. \qquad (8)$$

Wenn wir die Gleichungen (6), (7) und (8) addieren und davon die Gleichung (2) subtrahieren, erhalten wir die Gleichung (1). Das zeigt, daß die Gleichung (1) von den übrigen nicht unabhängig ist, sondern aus den übrigen Gleichungen abgeleitet werden kann. Wir streichen sie aus unserem System. Wenn wir die Gleichungen (5), (7) und (8) addieren und davon die Gleichung (3) subtrahieren, erhalten wir die Gleichung (4). Hieraus folgt, daß die Gleichung (4) auch aus den übrigen Gleichungen ableitbar ist. Wir streichen sie auch aus unserem System. Es bleiben 6 Gleichungen für die 8 Unbekannten. Jetzt muß man beweisen, daß diese 6 Gleichungen (2), (3), (5), (6), (7) und (8) voneinander unabhängig sind. Dazu muß man 6 beliebige Unbekannte aus den 8 auswählen und jede von ihnen durch die übrigen 2 unbekannten Zahlen und die bekannte Größe S ausdrücken. Wenn das gelingt, dann ist das System unabhängig. Überzeugt euch selbst davon, daß das System der Gleichungen (2), (3), (5), (6), (7) und (8) auflösbar ist, zum Beispiel nach den Unbekannten a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22} und a_{32}.

Da $a_{22} = \frac{S}{3}$ ist, ist mit S auch a_{22} eindeutig festgelegt, und wir setzen $a_{22} = k$. Für die übrigen 8 Unbekannten haben wir 6 voneinander unabhängige Gleichungen. Das berechtigt uns, zwei Unbekannte beliebig zu wählen. Wir setzen $a_{11} = k + x$ und $a_{13} = k + y$. Dann erhalten wir die Lösungen, die in Abb. 193 angegeben werden.

$k+x$	$k-x-y$	$k+y$
$k-x+y$	k	$k+x-y$
$k-y$	$k+x+y$	$k-x$

193

Wenn wir in dieser Lösung x durch $-x$ oder y durch $-y$ oder x durch y und y durch x ersetzen, dann erhalten wir die gleiche Aufteilung der Zahlen, bis auf Vertauschung von Zeilen und Spalten bzw. auf die Reihenfolge der Zeilen oder Spalten. Wir können daher $x \geq y$ setzen, wobei x und y positiv sind. Die kleinste Zahl in dem Quadrat ist dann $k - x - y$, die größte $k + x + y$. Wenn wir das wissen, ist es leicht, auch das uns schon bekannte traditionelle Quadrat zu erhalten, dessen kleinste Zahl 1 und dessen größte 9 ist.
Wir haben $k - x - y = 1$, $k + x + y = 9$, außerdem $k = \frac{S}{3} = \frac{15}{3} = 5$. Hieraus folgt: $x = 3$, $y = 1$, und wir erhalten die einzig mögliche Anordnung der Zahlen (mit Ausnahme der genauen Anordnung der Zeilen und Spalten) für das traditionelle magische Quadrat 3. Ordnung (Abb. 194).

8	1	6
3	5	7
4	9	2

194

Das Quadrat 4. Ordnung. Zur Auffindung der 16 Zahlen, aus denen man ein magisches Quadrat 4. Ordnung (Abb. 195) zu

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

195

einer gegebenen Konstanten S bilden kann, haben wir 8 unabhängige Gleichungen.
Wenn wir die Werte für 8 Unbekannte beliebig auswählen, dann ergeben sich die übrigen 8 Unbekannten als Lösung des Gleichungssystems. Von Nutzen ist hierbei die Feststellung, daß in einem jeden magischen Quadrat 4. Ordnung die Summe der 4 mittelsten Zahlen gleich der Summe jeder Zeile oder Spalte ist, das heißt der Konstanten des Quadrats S:

$$a_{22} + a_{23} + a_{32} + a_{33} = S.$$

Von der Richtigkeit dieser charakteristischen Eigenschaft des magischen Quadrats 4. Ordnung könnt ihr euch selbst überzeugen. Wir setzen jetzt 8 beliebige Zahlen A, B, C, D, a, b, c, d in folgender Weise ein:
$a_{32} = A$, $a_{22} = B$, $a_{23} = C$, $a_{33} = D$,
$a_{11} = A - a$, $a_{12} = C + a + c$,
$a_{13} = B + b - c$, $a_{21} = D + a - d$.
Die übrigen 8 Zahlen festzustellen ist nicht schwer, und wir erhalten die Formeln (aufgestellt von E. Bergholz 1910), die in Abb. 196 dargestellt sind.

$A-a$	$C+a+c$	$B+b-c$	$D-b$
$D+a-d$	B	C	$A-a+d$
$C-b+d$	A	D	$B+b-d$
$B+b$	$D-a-c$	$A-b+c$	$C+a$

196

Bedeutend früher, 1884, wurde in der russischen „Zeitschrift für Elementarmathematik" von Prof. W. P. Jermakow eine Formel veröffentlicht, die man als „Summe" zweier magischen Quadrate darstellen kann (Abb. 197).

A	C	D	B
D	B	A	C
B	D	C	A
C	A	B	D

+

	$a+b$	$-a-b$	
$c-d$	$-a-c$	$a-c$	$c+d$
$-c+d$	$-a+c$	$a+c$	$-c-d$
	$a-b$	$-a+b$	

197

Wenn man willkürlich 8 Zahlen A, B, C, D, a, b, c, d auswählt und beide Quadrate „felderweise" addiert (das heißt, wenn man die Zahlen in den Feldern addiert, die sich decken, wenn man das eine Quadrat auf das andere legt), erhalten wir das gesuchte magische Quadrat.

$b_{n-1} = R_1 - C_n - (b_1 + b_2 \ldots + b_{n-3} + b_{n-2})$

Darüber, wie man diese 8 Zahlen auswählt, damit in den Feldern des erhaltenen Quadrats alle ganzen Zahlen von 1 bis 16 stehen (das heißt, damit das Quadrat ein „traditionelles" ist), schreibt W. P. Jermakow: „Wir kennen keine einfache Lösung dieser Frage und stellen es den Lesern anheim, eine solche zu finden."

Das Quadrat n. Ordnung ($n > 4$). Die Zahlen, die ein Quadrat n. Ordnung bei $n > 4$ bilden, kann man so darstellen:

$$\begin{aligned}
&a_{11},\ a_{12},\ \ldots\ a_{1,\,p-1},\ a_{1p},\\
&\qquad a_{1,\,p+1},\ \ldots\ a_{1,\,n-1},\ a_{1n},\\
&a_{21},\ a_{22},\ \ldots\ a_{2,\,p-1},\ a_{2p},\\
&\qquad a_{2,\,p+1},\ \ldots\ a_{2,\,n-1},\ a_{2n},\\
&a_{31},\ a_{32},\ \ldots\ a_{3,\,p-1},\ a_{3p},\\
&\qquad a_{3,\,p+1},\ \ldots\ a_{3,\,n-1},\ a_{3n},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n-1,1},\ a_{n-1,2},\ \ldots\ a_{n-1,\,p-1},\ a_{n-1,\,p},\\
&\qquad a_{n-1,\,p+1},\ \ldots\ a_{n-1,\,n-1},\ a_{n-1,\,n},\\
&a_{n1},\ a_{n2},\ \ldots\ a_{n,\,p-1},\ a_{n,\,p},\ a_{n,\,p+1},\ \ldots\\
&\qquad a_{n,\,n-1},\ a_{n,\,n}.
\end{aligned}$$

$$\left(p = \frac{n}{2},\ \text{falls } n \text{ gerade, sonst: } p = \frac{n+1}{2}.\right)$$

Ihre Summe in jeder Zeile, jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen muß ein und dieselbe und einer beliebigen vorher ausgewählten Zahl S gleich sein.

Nach der Bedingung haben wir für die n^2 Unbekannten $2n + 2$ lineare Gleichungen, von denen $2n$ voneinander unabhängig sind. Folglich kann man $n^2 - 2n$ Größen a beliebig auswählen.

Wir behalten für diejenigen Größen, die wir beliebig festlegen, als Bezeichnung den Buchstaben a mit entsprechenden Indizes bei; die übrigen gesuchten Größen bezeichnen wir mit $b_1, b_2, \ldots b_{2n-1}, b_{2n}$ und verteilen sie auf die Felder des Quadrats, indem wir uns nach folgendem Schema richten:

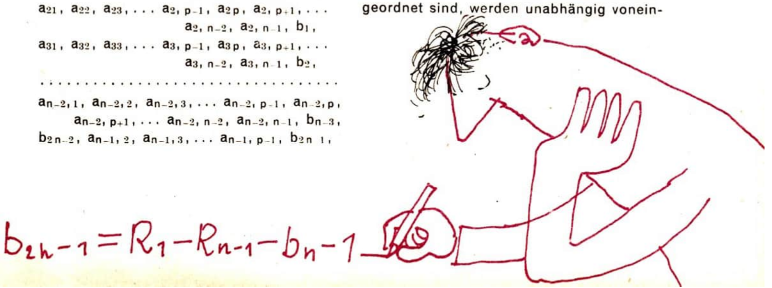
$$\begin{aligned}
&a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ \ldots\ a_{1,\,p-1},\ a_{1p},\ a_{1,\,p+1},\ \ldots\\
&\qquad a_{1,\,n-2},\ a_{1,\,n-1},\ a_{1n},\\
&a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ \ldots\ a_{2,\,p-1},\ a_{2p},\ a_{2,\,p+1},\ \ldots\\
&\qquad a_{2,\,n-2},\ a_{2,\,n-1},\ b_1,\\
&a_{31},\ a_{32},\ a_{33},\ \ldots\ a_{3,\,p-1},\ a_{3p},\ a_{3,\,p+1},\ \ldots\\
&\qquad a_{3,\,n-2},\ a_{3,\,n-1},\ b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n-2,1},\ a_{n-2,2},\ a_{n-2,3},\ \ldots\ a_{n-2,\,p-1},\ a_{n-2,p},\\
&\qquad a_{n-2,\,p+1},\ \ldots\ a_{n-2,\,n-2},\ a_{n-2,\,n-1},\ b_{n-3},\\
&b_{2n-2},\ a_{n-1,\,2},\ a_{n-1,3},\ \ldots\ a_{n-1,\,p-1},\ b_{2n-1},\\
&\qquad a_{n-1,\,p+1},\ \ldots\ a_{n-1,\,n-2},\ a_{n-1,\,n-1},\ b_{n-1},\\
&b_{2n-3},\ b_{2n-4},\ b_{2n-5},\ \ldots\ b_{2n-v-1},\ b_{2n},\\
&\qquad b_{2n-v-2},\ \ldots\ b_{n+1},\ b_n,\ b_{n-2}.
\end{aligned}$$

Es sei R_i die Summe der Zahlen in der i. Reihe, wobei $R_1 = S$ ist, C_i die Summe der Zahlen in der i. Spalte, und es seien D_1 und D_2 ($D_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} \ldots + a_{n-1,\,n-1}$, $D_2 = a_{1,\,n} + a_{2,\,n-1} + a_{3,\,n-2} \ldots + a_{n-1,\,2}$) die Summen der Zahlen in den Diagonalen. Die Summe aller Zahlen, die es im Quadrat gibt, bezeichnen wir mit $\bar{S}$. Wenn wir die Größen, die wir mit a bezeichnet haben, durch beliebige Zahlen ersetzen, können wir die Größen b mit Hilfe folgender Gleichungen feststellen:

$$\left.\begin{aligned}
b_1 &= R_1 - R_2,\\
b_2 &= R_1 - R_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
b_{n-3} &= R_1 - R_{n-2},\\
b_{n-2} &= R_1 - D_1,\\
b_{n-1} &= R_1 - C_n - (b_1 + b_2 \ldots + b_{n-3}\\
&\qquad + b_{n-2}),\\
b_n &= R_1 - C_{n-1},\\
b_{n+1} &= R_1 - C_{n-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\\
b_{2n-p-2} &= R_1 - C_{p+1},\\
b_{2n-p-1} &= R_1 - C_{p-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\\
b_{2n-4} &= R_1 - C_2,\\
b_{2n-3} &= R_1 - D_2,\\
b_{2n-2} &= R_1 - C_1 - b_{2n-3},\\
b_{2n-1} &= R_1 - R_{n-1} - b_{n-1} - b_{2n-2},\\
b_{2n} &= R_1 - C_p - b_{2n-1}.
\end{aligned}\right\}\ (*)$$

Wir stellen fest, daß b_{2n-1} ein Feld in der $(n - 1)$. Zeile einnimmt, aber nicht zum Bestand der einen oder anderen Diagonalen gehört. Eine solche Anordnung wäre unmöglich für $n \leq 4$. Folglich werden diese Fälle von diesem Schema nicht erfaßt, sie sind ja auch schon gesondert betrachtet worden.

Alle Größen b, die in der letzten Zeile angeordnet sind, werden unabhängig vonein-



ander festgestellt, folglich muß man probieren, ob ihre Summe

$$b_{n-2} + b_n + b_{n+1} \ldots + b_{2n-3} + b_{2n} \quad (**)$$

die Konstante S unseres Quadrats bildet oder, was dasselbe ist, R_1. Dazu wählen wir die entsprechenden Gleichungen aus dem System (*) und gestalten einige von ihnen vorübergehend um:

$$\begin{aligned}
b_{n-1} &= R_1 - C_n - (b_1 + b_2 \ldots + b_{n-3} \\
&\qquad + b_{n-2}) \\
&= R_1 - C_n - (R_1 - R_2 + R_1 - R_3 \ldots \\
&\qquad + R_1 - R_{n-2} + R_1 - D_1) \\
&= R_1 - C_n - R_1 + R_2 - R_1 + R_3 \ldots \\
&\qquad - R_1 + R_{n-2} - R_1 + D_1 \\
&= D_1 - C_n + (R_1 + R_2 \ldots + R_{n-2}) \\
&\qquad - \underbrace{(R_1 + R_1 \ldots + R_1)}_{(n-2)\text{ mal}}.
\end{aligned}$$

Wenn wir uns die Definition der Zahlen R_i und $\bar{S}$ ins Gedächtnis rufen und beachten, daß in allen Zeilen mit Ausnahme der letzten Zahlen a_{ik} stehen, dann haben wir:

$$R_1 + R_2 \ldots + R_{n-2} = \bar{S} - R_{n-1},$$

folglich:

$$b_{n-1} = D_1 - C_n + \bar{S} - R_{n-1} - (n-2)\, R_1,$$

. . . .

$$\begin{aligned}
b_{2n-2} &= R_1 - C_1 - b_{2n-3} = R_1 - C_1 \\
&\qquad - (R_1 - D_2) = D_2 - C_1, \\
b_{2n-1} &= R_1 - R_{n-1} - b_{n-1} - b_{2n-2} = R_1 \\
&\qquad - R_{n-1} - [D_1 - C_n + \bar{S} - R_{n-1} \\
&\qquad - (n-2)\, R_1] - (D_2 - C_1) \\
&= (n-1)\, R_1 + C_1 + C_n - D_1 - D_2 - \bar{S}; \\
b_{2n} &= R_1 - C_p - b_{2n-1} \\
&= R_1 - C_p - (n-1)\, R_1 - C_1 - C_n \\
&\qquad + D_1 + D_2 + \bar{S} \\
&= D_1 + D_2 - C_1 - C_p - C_n \\
&\qquad - (n-2)\, R_1 + \bar{S}.
\end{aligned}$$

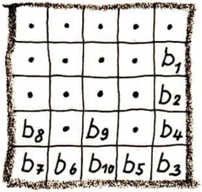
Wenn wir die gefundenen Gleichungen in (**) einsetzen, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&b_{n-2} + \underbrace{(b_n + b_{n+1} \ldots + b_{2n-4} + b_{2n-3})}_{(n-2)\text{ Summanden}} + b_{2n} \\
&= R_1 - D_1 + (R_1 - C_{n-1} + R_1 - C_{n-2} \ldots \\
&\quad + R_1 - C_2 + R_1 - D_2) + D_1 + D_2 - C_1 \\
&\quad - C_p - C_n - (n-2)\, R_1 + \bar{S} \\
&= R_1 - D_1 + [R_1 (n-2) - (C_{n-1} + C_{n-2} \ldots \\
&\quad + C_2) - D_2] + D_1 + D_2 - C_1 - C_p - C_n \\
&\quad - (n-2)\, R_1 + \bar{S} \\
&= R_1 - (C_n + C_{n-1} \ldots + C_p \ldots + C_2 \\
&\quad + C_1) + \bar{S}.
\end{aligned}$$

Aber $C_1 + C_2 \ldots + C_{n-1} + C_n = \bar{S}$, folglich ist $b_{n-2} + b_n + b_{n+1} \ldots + b_{2n-3} + b_{2n} = R_1$.

Folglich gewährleisten die hier dargelegten allgemeinen Formeln, beliebig viele magische Quadrate aufzustellen.

Für den Fall $n = 5$ ist die Konstruktion eines magischen Quadrats in Abb. 198 dargestellt.



198

Setzt an Stelle der Punkte beliebige Zahlen und bestimmt $b_1, b_2, \ldots b_{10}$. Das erhaltene Quadrat wird magisch sein.

300. „Magische" Produkte

Eine Variante der Übungen mit dem magischen Quadrat ist die Aufgabe, die Felder eines Quadrats mit natürlichen Zahlen, von denen jede nur einmal verwendet werden darf, so auszufüllen, daß ihre Produkte in jeder Zeile, jeder Spalte und in den beiden Diagonalen einander gleich sind. Aus aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist ein solches Quadrat überhaupt noch nicht gebildet worden, ja, anscheinend kann es auch nicht gebildet werden. Wenn man jedoch eine willkürliche Zahlenauswahl zuläßt, dann finden sich schließlich in der unendlichen Menge der natürlichen Zahlen geeignete.

Wie soll man sie aber aussuchen?

Ein Verfahren zur Bildung irgendeines Quadrats mit gleichen Produkten beruht auf der bekannten Regel der Multiplikation von Potenzen: Bei der Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis bleibt die Basis dieselbe, und die Exponenten der Potenzen werden addiert. Zum Beispiel:

$2^4 \cdot 2^3 \cdot 2^8 = 2^{4+3+8}$ oder $2^8 \cdot 2 \cdot 2^6 = 2^{8+1+6}$.
In dem gewählten Beispiel sind die Summen der Exponenten der Potenzen gleich: $4 + 3 + 8 = 8 + 1 + 6$, folglich sind auch die Produkte der Potenzen gleich: $2^4 \cdot 2^3 \cdot 2^8 = 2^8 \cdot 2 \cdot 2^6$.
Jetzt ist klar, daß dann, wenn man eine beliebige natürliche Zahl, zum Beispiel 2, als Basis der Potenzen und die Zahlen irgendeines magischen Quadrats mit gleichen

4	9	2
3	5	7
8	1	6

a

2^4	2^9	2^2
2^3	2^5	2^7
2^8	2	2^6

b

=

16	512	4
8	32	128
256	2	64

c

199

Summen als Exponenten nimmt, zum Beispiel so wie in Abb. 199a, die erhaltenen Potenzen ein magisches Quadrat mit gleichen Produkten P darstellen (Abb. 199b).
In diesem Quadrat ist das Produkt
$P = 2^4 \cdot 2^3 \cdot 2^8 = 2^4 \cdot 2^9 \cdot 2^2 = 2^4 \cdot 2^5 \cdot 2^6$
$=$ usw. $= 2^{15} = 32\,768$.
Auf diese Weise kann ein beliebiges magisches Quadrat mit gleichen Summen in ein Quadrat mit gleichen Produkten umgewandelt werden.
Ein zweites Verfahren zur Bildung eines Quadrats mit gleichen Produkten ergibt sich aus folgenden Überlegungen. Da Multiplikation und Division gewisse Analogien mit Addition und Subtraktion haben, müssen alle in Buchstaben ausgedrückten Formeln für magische Quadrate mit gleichen Summen sich als Formeln für magische Quadrate mit gleichen Produkten verwenden lassen, wenn man alle Additionen durch Multiplikationen und alle Subtraktionen durch Divisionen ersetzt.
So ergibt sich aus der Formel, die in Abb. 193 dargestellt ist, sofort die Formel für ein magisches Quadrat 3. Ordnung mit gleichen Produkten (Abb. 200; hier erhält man die Formel b aus a, wenn man alle Ausdrücke in den Feldern des Quadrats mit xy multipliziert und $k = 1$ setzt), und aus der Formel

kx	$\frac{k}{xy}$	ky
$\frac{ky}{x}$	k	$\frac{ky}{y}$
$\frac{k}{y}$	kxy	$\frac{k}{x}$

a

oder

x^2y	1	xy^2
y^2	xy	x^2
x	x^2y^2	y

b

200

von Bergholz (Abb. 196) und der von Jermakow (Abb. 197) ergeben sich die Formeln für Quadrate 4. Ordnung mit gleichen Produkten. (Führt das selbständig durch!)
Von diesen Gedanken ausgehend, arbeitete der junge E. Tscherpow ein Verfahren zur Bildung von Quadraten beliebiger Ordnung mit gleichen Produkten aus, mit dessen Hilfe man Quadrate mit der kleinstmöglichen Konstanten P erhält.
Um nach dem Tscherpowschen Verfahren ein solches magisches Quadrat n. Ordnung zu bilden, muß man folgendermaßen verfahren:
1. Man nimmt die kleinste Zahl, die n^2 Divisoren hat, und stellt alle Divisoren dieser Zahl zusammen;
2. dann nimmt man ein beliebiges magisches Quadrat n. Ordnung mit gleichen Summen und ersetzt darin alle Zahlen nach einer festgelegten Regel (die aus den Beispielen klar wird).
Jeder ganzen Zahl N kann man die sogenannte kanonische Form verleihen:
$N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, wobei $p_1, p_2 \ldots p_k$ verschiedene Primfaktoren sind. Die Anzahl aller Teiler einer solchen Zahl, einschließlich ihrer selbst und 1, ist gleich dem Produkt $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1)$.
So hat zum Beispiel $N = a^2 b^2$, wobei a und b Primzahlen sind, $(2 + 1)(2 + 1) = 9$ Teiler. Da sind sie: $1, a, a^2, b, ab, a^2b, b^2, ab^2, a^2b^2$.
Richtet euer Augenmerk auf das System der Reihenfolge der Teiler. Bei diesem System muß man immer bleiben.

Wir bilden ein magisches Quadrat 3. Ordnung mit gleichen Produkten.
Dazu nehmen wir ein magisches Quadrat 3. Ordnung mit gleichen Summen (Abb. 201 a) und ersetzen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 durch die 9 Teiler der Zahl $N = a^2 b^2$ in der Reihenfolge, in der sie oben stehen. Wir erhalten das uns schon bekannte Quadrat 3. Ordnung mit gleichen Produkten (Abb. 201 b).

4	9	2
3	5	7
8	1	6

b	a^2b^2	a
a^2	ab	b^2
ab^2	1	a^2b

3	36	2
4	6	9
18	1	12

201 a b c

Wenn wir für a und b die kleinsten Primzahlen, also 2 und 3, einsetzen, erhalten wir das Quadrat 3. Ordnung mit dem kleinstmöglichen Produkt $P = 216$ (Abb. 201 c).
Die Zahl $N = a^3b^3$ hat analog $4 \cdot 4 = 16$ Teiler; folglich kann man aus ihren Teilern ein Quadrat 4. Ordnung mit gleichen Produkten bilden. Das führt selbständig durch. (Tut es unbedingt, damit ihr kontrolliert, ob ihr euch das System der Anordnung der Teiler angeeignet habt.)
Die Zahl $N = abcd$ hat auch 16 Teiler $(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$, aber bei den kleinstmöglichen Primzahlenwerten $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$, $d = 7$ ist sie kleiner als $N = a^3b^3$. Die erste Zahl (für $N = 2^3 \cdot 3^3$) ist 216, und die zweite Zahl (für $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$) ist 210 (die kleinste Zahl, die 16 Teiler hat). Folglich gibt die Formel $N = abcd$ das Quadrat mit der kleinsten Konstanten P für die Quadrate 4. Ordnung an. Wir stellen die Teiler der Zahl $N = abcd$ zusammen: 1, a, b, ab, c, ac, bc, abc, d, ad, bd, abd, cd, acd, bcd, abcd.
Wir wenden uns jetzt zur Abb. 175 b und ersetzen die Zahlen des magischen Quadrats durch die Teiler der Zahl N; dann erhalten wir die Lösung, die in Abb. 202 dargestellt ist.

202

abcd	a	b	cd
c	bd	ad	abc
d	bc	ac	abd
ab	acd	bcd	1

Wenn ihr euch die Tscherpowsche Methode angeeignet habt, dann fällt es euch leicht, aus den Teilern der Zahlen $N = a^4b^4$ und $N = a^5b^5$ Quadrate mit gleichen Produkten zu bilden. Werden ihre Konstanten P die kleinstmöglichen für Quadrate 5. und 6. Ordnung sein?

Kurioses und Ernsthaftes von Zahlen

An den Dingen eurer Umwelt bemerkt ihr zuallererst die Besonderheiten, in denen sich ein Ding von anderen unterscheidet. Der Reichtum an besonderen, individuellen Eigenheiten läßt die allgemein allen Dingen gemeinsamen und charakteristischen Eigenschaften zurücktreten. Solche Eigenschaften aufzudecken ist daher immer schwierig.

Eine wichtige allgemeine Eigenschaft der Dinge ist, daß man sie zählen und messen kann. Wir bringen diese gemeinsame Eigenschaft der Dinge im Begriff der Zahl zum Ausdruck.

Die Fähigkeit, Dinge zu zählen und zu vergleichen (zu messen), entwickelten die Menschen schon in sehr früher Zeit. Sie entstand allmählich im Laufe von Jahrhunderten, und zwar bei der Arbeit des Menschen.

„Zum Zählen" – schreibt Friedrich Engels – „gehören nicht nur zählbare Gegenstände, sondern auch schon die Fähigkeit, bei Betrachtung dieser Gegenstände von allen ihren übrigen Eigenschaften abzusehn außer ihrer Zahl – und diese Fähigkeit ist das Ergebnis einer langen geschichtlichen, erfahrungsmäßigen Entwicklung."[1]

Mit Hilfe der Zahlen zu zählen, lernt jetzt jeder Mensch in der Kindheit, fast gleichzeitig mit dem Beginn des Sprechens. Aber dieses uns gewohnte Zählen durchlief einen langwierigen Weg der Entwicklung und nahm verschiedene Formen an.

Es gab eine Zeit, da für das Zählen von Gegenständen nur zwei Zahlwörter verwendet wurden: 1 und 2. Bei der weiteren Ausdehnung des Zahlensystems wurden Teile des menschlichen Körpers zu Hilfe genommen, in erster Linie die Finger, und wenn es an „Zahlen" solcher Art fehlte, dann noch Stäbchen, Steinchen und andere Gegenstände.

N. N. Miklucho-Maklai erzählt in seinem Buch „Reisen" von einem spaßigen Zählverfahren der Einwohner Neuguineas: „Ein beliebtes Zählverfahren besteht darin, daß der Papua nacheinander die Finger einer Hand krümmt und dabei einen bestimmten Laut von sich gibt, zum Beispiel ‚be, be, be . . .' Wenn er bei fünf angekommen ist, sagt er ‚ibon-be' (Hand). Dann krümmt er die Finger der anderen Hand und wiederholt die Laute ‚be, be . . .', bis er zu ‚ibon-ali' (zwei Hände) kommt. Dann fährt er mit den Worten ‚be, be . . .' fort, bis er zu ‚samba-be' und ‚samba-ali' (ein Fuß, zwei Füße) gelangt. Wenn der Papua weiter zählen muß, benutzt er Finger und Zehen eines anderen."[2]

Nach der Entstehung und Entwicklung der Zahlen bildete sich die Lehre von ihren Eigenschaften und den sie beherrschenden Gesetzen aus, die „Zahlentheorie".

Beim Operieren mit Zahlen, das heißt bei der Ausführung der verschiedenartigen mathematischen Grundrechnungsarten, finden wir nicht nur ihre gemeinsamen Eigenschaften, mit deren Studium sich die Zahlentheorie beschäftigt, sondern auch Besonderheiten, die manchmal nur kleineren Zahlengruppen oder einzelnen Zahlen eigentümlich sind. Diese Besonderheiten brauchen nicht einmal große theoretische Bedeutung zu haben, aber sie sind mitunter höchst interessant, wir finden seltsame und spaßige, unerwartete und kuriose. Wir stoßen auf manches Zahlenunikum, aber auch auf Gruppen von Zahlen, die eigenartige Zusammenhänge haben.

[1] Engels, F.: Anti-Dühring. Dietz Verlag Berlin 1948, S. 44
[2] Miklucho-Maklai, N. N.: Reisen. Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 1940, Band I, S. 280

301. Zehn Ziffern

1. Fast in der ganzen Welt benutzt man jetzt ein einheitliches Zahlensystem: das Dezimalsystem. In diesem System werden zehn Ziffern verwendet: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 0, und diese Ziffern reichen aus, um beispielsweise jede natürliche Zahl auszudrücken.

Als Beispiel wollen wir die größte zehnstellige natürliche Zahl bilden, in der a l l e zehn Ziffern vorkommen, wobei wir die gewöhnliche, allgemein gebräuchliche Form der Schreibweise einer natürlichen Zahl verwenden. Da ist sie: 9 876 543 210.

Jede Umstellung der Ziffern in dieser Zahl führt doch unbedingt zu einer kleineren Zahl, nicht wahr?

Es wäre interessant, zu klären, wieviel verschiedene natürliche zehnstellige Zahlen man mit Hilfe der zehn Ziffern aufstellen kann, wenn man jede Ziffer nur einmal verwendet.

Eine Million? Oder weniger? Wie kann man das feststellen, ohne alle Möglichkeiten probieren zu müssen?

2. Nachdem wir festgestellt haben, daß es mehr als drei Millionen zehnstellige natürliche Zahlen mit Ziffern, die sich nicht wiederholen, gibt (vgl. S. 312), ziehen wir aus dieser Zahlenmenge insgesamt nur sechs heraus:

1 037 246 958, 1 046 389 752, 1 286 375 904,
1 307 624 958, 1 370 258 694, 1 462 938 570.

Was ist wohl Interessantes an diesen dem Anschein nach in keiner Weise bemerkenswerten Zahlen?

Dividiert jede der sechs gegebenen Zahlen durch 2 und die Quotienten durch 9. Die erste Rechenoperation führt zu neunstelligen Zahlen, die zweite zu achtstelligen.

Wiederholen sich etwa irgendwelche Ziffern in einer dieser Zahlen, die sich aus der ersten und zweiten Rechenoperation ergeben haben? Die zweite Rechenoperation führt zu Zahlen, die keine Ziffer 9 enthalten. Wenn ihr aber die verschwundene 9 an das Ende einer dieser Zahlen hängt, dann wird diese eine vollständige Quadratzahl, das heißt eine Zahl, aus der sich „restlos" die Qua-

dratwurzel ziehen läßt. Stellt selbständig fest, welcher der sechs achtstelligen Quotienten diese Eigenschaft besitzt!

3. Für weitere Betrachtungen kurioser Eigenschaften von Zahlen wählen wir die beiden natürlichen Zahlen a = 123 456 789 und b = 987 654 321, die kleinste und die größte neunstellige Zahl, die aus allen Ziffern (ohne Null) besteht, wobei jede Ziffer in jeder Zahl nur einmal vorkommt.

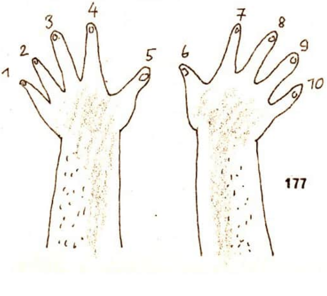
Die Differenz b — a besteht aus denselben Ziffern: 987 654 321 − 123 456 789 = 864 197 532.

Wenn man weiter alle einstelligen natürlichen Zahlen, außer 1, mit den Zahlen a und b multipliziert, dann kann man an den Produkten Gemeinsamkeiten feststellen, nach denen sich alle einstelligen Multiplikatoren in die beiden Gruppen 2, 4, 5, 7, 8 und 3, 6, 9 aufteilen lassen. Welche Besonderheit besitzen die Zahlen jeder dieser Gruppen bezüglich ihrer Produkte mit a und b? Bei der Division der Zahlen a und b durch dieselben einstelligen Zahlen kann man auch eine gewisse Besonderheit bemerken, in der sich die Zahlen der ersten Gruppe von denen der zweiten unterscheiden.

Welche ist das?

Die Zahl a verwandelt sich mit Hilfe zweier Rechenoperationen in die Zahl b: durch die Multiplikation von a mit einer einstelligen Zahl und die Addition einer anderen einstelligen Zahl zu dem Produkt.

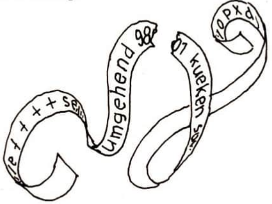
Sucht den passenden Multiplikator und den passenden Summanden!



4. Wenn man die Zahl 12345679 erst mit einer beliebigen einstelligen natürlichen Zahl multipliziert und dann mit 9, dann stimmen alle Ziffern des Endresultats mit der Ziffer des ersten einstelligen Multiplikators überein.
Zum Beispiel:

$12345679 \cdot 7 = 86419753;$
$86419753 \cdot 9 = 777777777;$
$12345679 \cdot 8 = 98765432;$
$98765432 \cdot 9 = 888888888.$

Probiert die anderen Multiplikatoren und sucht nach einer Erklärung für diese kuriose Erscheinung!



302. Noch einige interessante Beobachtungen

1. Ein Telegrammstreifen zerriß einmal mitten in der Zahl 9801. Auf dem einen Stück stand 98 und auf dem anderen 01. Zum Spaß berechnete ich die Summe dieser Zahlen, das Ergebnis erhob ich ins Quadrat und – zu meinem Erstaunen erhielt ich wiederum die Ausgangszahl: $(98 + 01)^2 = 9801$.
Es ist nicht schwer nachzuprüfen, daß auch die Zahl 3025 diese Eigenschaft besitzt. Wenn man sie in die beiden Zahlen 30 und 25 zerlegt, diese addiert und die Summe ins Quadrat erhebt, dann ist das Ergebnis gleich der Ausgangszahl.
Unter den vierstelligen natürlichen Zahlen gibt es außer den beiden genannten nur noch eine mit dieser Eigenschaft. Wie ich sie ermittelt habe, erzähle ich im Lösungsteil. Welches Verfahren würdet ihr in diesem Falle für die Lösung wählen?

2. Wir schreiben einige Zahlenfolgen untereinander:

	A							
Nr. 1	1	3	5	7	9	11	13	...
Nr. 2	1	4	7	10	13	16	19	...
Nr. 3	1	5	9	13	17	21	25	...
Nr. 4	1	6	11	16	21	26	31	...
Nr. 5	1	7	13	19	25	31	37	...
Nr. 6	1	8	15	22	29	36	43	...
Nr. 7	1	9	17	25	33	41	49	...
								C

Die erste Zahl in jeder Zeile ist 1, und alle folgenden Zahlen sind größer als die vorhergehenden: in der ersten Spalte um 2, in der zweiten um 3, in der dritten um 4 usw. (Solche Folgen heißen „arithmetische".) Es ergibt sich eine gewisse Zahlentabelle. Wenn wir diese Zahlen nach der punktierten Einteilung gruppieren und addieren, dann ist die Summe der Zahlen innerhalb jeder punktierten Begrenzung gleich dem Kubus der Nummer des Abschnitts. Zum Beispiel im Abschnitt Nr. 2: $1 + 4 + 3 = 2^3$; im Abschnitt Nr. 3: $1 + 5 + 9 + 7 + 5 = 3^3$ usw.
Allgemein ausgedrückt ist die Summe der Zahlen im n. Abschnitt gleich n^3.
Weiter ist jede beliebige Zahl auf der Diagonalen AC das Quadrat der Nummer ihrer Zeile. Die Summe der Zahlen in jedem beliebigen Quadrat, dessen Diagonale einen beliebigen Teil der Diagonalen AC bildet, stellt auch eine vollständige Quadratzahl dar, das heißt, sie ist gleich dem Quadrat irgendeiner Zahl. Zum Beispiel ist die Summe der Zahlen in dem Quadrat, das die Diagonale 25, 36 und 49 hat:
$25 + 31 + 37 + 29 + 36 + 43 + 33 + 41 + 49 = 324 = 18^2$.
Prüft diese Eigenschaft für andere Abschnitte der Diagonalen AC nach. Sucht die analogen Eigenschaften bei den Zahlen der folgenden Tabelle:

1	3	5	7	9	11	13	...
1	5	9	13	17	21	25	...
1	7	13	19	25	31	37	...
1	9	17	25	33	41	49	...
1	11	21	31	41	51	61	...

3. Viele interessante Eigenschaften kann man an der Zahl 37 entdecken.

a) Wenn man sie mit 3 oder einem Vielfachen von 3 (bis 27) multipliziert, dann wird das Resultat durch eine dreistellige Zahl mit drei gleichen Ziffern ausgedrückt: $37 \cdot 3 = 111$; $37 \cdot 6 = 222$; $37 \cdot 9 = 333$; $37 \cdot 12 = 444$; $37 \cdot 27 = 999$.

b) Das Produkt aus der Zahl 37 und ihrer Quersumme ist gleich der Summe der Kuben ihrer Ziffern: $37 \cdot (3 + 7) = 3^3 + 7^3$.

c) Wenn man von der Summe der Quadrate der Zahlen, die die Ziffern der Zahl 37 ausdrücken (wir nennen sie Quersumme 2. Ordnung), das Produkt aus diesen Zahlen abzieht, erhält man wieder 37:
$(3^2 + 7^2) - (3 \cdot 7) = 37$.

d) Die interessanteste Eigenschaft: Wir nehmen aufs Geratewohl irgendeine dreistellige Zahl, die ein Vielfaches von 37 ist, zum Beispiel $37 \cdot 7 = 259$. Die Zahlen, die man aus dieser Zahl erhält, wenn man ihre Ziffern zyklisch vertauscht, das heißt die Zahlen 925 und 592, sind auch durch 37 teilbar.

Unter zyklischem Vertauschen versteht man eine Umstellung, bei der man jedesmal die letzte Ziffer der Zahl an die erste Stelle setzt, ohne die Folge der übrigen Ziffern zu ändern. Wir nehmen aufs Geratewohl noch eine dreistellige Zahl, die ein Vielfaches von 37 ist. Sie sei $37 \cdot 5 = 185$. Die zyklische Vertauschung der Ziffern ergibt die Zahlen 518 und 851. Sie sind auch durch 37 teilbar.

Eine gleichartige Eigenschaft zeichnet auch die fünfstelligen durch 41 teilbaren Zahlen aus. So sind z. B. die Zahlen 15498, 81549, 98154, 49815, 54981, wie man leicht nachprüfen kann, alle durch 41 teilbar, und jede erhält man aus der vorhergehenden, wenn man deren letzte Ziffer nach vorn setzt.

303. Zwei interessante Versuche

1. Wir schreiben nacheinander willkürlich vier positive ganze Zahlen auf, zum Beispiel 8, 17, 3, 107. Dann berechnen wir die Differenzen zwischen der ersten und zweiten Zahl (indem wir die kleinere von der größeren abziehen), zwischen der zweiten und dritten, der dritten und vierten und schließlich zwischen der vierten und ersten, wobei wir jedesmal die kleinere Zahl von der größeren abziehen: $17 - 8 = 9$; $17 - 3 = 14$; $107 - 3 = 104$; $107 - 8 = 99$. Wir nennen die erhaltenen Zahlen die ersten Differenzen und stellen sie zu einer Gruppe zusammen: 9, 14, 104, 99.

Wieder berechnen wir die Differenzen zwischen der ersten und zweiten, der zweiten und dritten, der dritten und vierten und der vierten und ersten Zahl der Gruppe der ersten Differenzen, wobei wir jedesmal die kleinere Zahl von der größeren Zahl abziehen: $14 - 9 = 5$; $104 - 14 = 90$; $104 - 99 = 5$; $99 - 9 = 90$. Wir erhalten die Gruppe der zweiten Differenzen: 5, 90, 5, 90.

Auf die gleiche Weise bilden wir die Gruppe der dritten Differenzen: 85, 85, 85, 85.

Nun aber besteht die Gruppe der vierten Differenzen nur aus Nullen: 0, 0, 0, 0.

Wir wiederholen das mit einer anderen Gruppe positiver ganzer Zahlen. Wir führen für die Anfangsgruppe die Bezeichnung A_0 ein, für die Gruppe der ersten Differenzen A_1, für die der zweiten A_2 usw.

Es soll die Anfangsgruppe A_0 folgende vier Zahlen enthalten: 93, 5, 21, 50.

Wir führen die Rechenoperationen durch:

$$\begin{aligned}
A_0 &= (93,\ \ 5, 21, 50),\\
A_1 &= (88, 16, 29, 43),\\
A_2 &= (72, 13, 14, 45),\\
A_3 &= (59,\ \ 1, 31, 27),\\
A_4 &= (58, 30,\ \ 4, 32),\\
A_5 &= (28, 26, 28, 26),\\
A_6 &= (\ 2,\ \ 2,\ \ 2,\ \ 2),\\
A_7 &= (\ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0).
\end{aligned}$$

Nachdem wir sieben Differenzengruppen berechnet haben, erhalten wir wieder eine Gruppe von Nullen.

Ein Experimentator muß die Voraussetzungen eines Versuchs variieren. Wir wiederholen daher den Versuch mit einer weit auseinandergezogenen Vierergruppe von Zahlen, zum Beispiel mit den Zahlen: 1, 11, 130, 1760. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
A_0 &= (\ \ \ 1,\ \ \ 11,\ 130,\ 1760),\\
A_1 &= (\ \ 10,\ 119,\ 1630,\ 1759),\\
A_2 &= (\ 109,\ 1511,\ 129,\ 1749),\\
A_3 &= (1402,\ 1382,\ 1620,\ 1640),\\
A_4 &= (\ \ 20,\ 238,\ \ 20,\ 238),\\
A_5 &= (\ 218,\ 218,\ 218,\ 218),\\
A_6 &= (\ \ \ 0,\ \ \ 0,\ \ \ 0;\ \ \ 0).
\end{aligned}$$

Die Nullen ergeben sich wider Erwarten sogar eher, nämlich bei der sechsten Differenz.

Führt selbst noch zehn derartige Versuche an verschiedenen Gruppen von vier positiven ganzen Zahlen durch; in jedem Falle gelangt ihr zu einer Nullengruppe, und zwar häufig (aber nicht immer) bei weniger als acht Differenzengruppen.

Ist die beobachtete Erscheinung gesetzmäßig, oder läßt sich vielleicht eine Vierergruppe von positiven ganzen Zahlen finden, die nicht zu einer Nullengruppe führt, wieviel Differenzen wir auch bilden mögen? Das zu klären ist nicht leicht, es erfordert einige Findigkeit, welchen Gedankengang man einschlagen soll. Dennoch muß man sein Glück versuchen. Die Suche nach der Lösung ist sogar in dem Falle von Nutzen, wenn es einem nicht selbständig gelingt, bis zur vollständigen Lösung zu gelangen.

Anmerkung 1. Die Eigenschaft, stets auf Nullengruppen zu führen, besitzt auch jede beliebige Gruppe aus 8 oder 16 oder allgemein aus 2^n positiven ganzen Zahlen. (n ist eine beliebige positive ganze Zahl.)

Anmerkung 2. Wenn die Anzahl der Zahlen in der Ausgangsgruppe keine Potenz von 2 (das heißt nicht 4, 8, 16 usw.) ist, dann kann das Verfahren der Differenzenbildung niemals zu einer Nullengruppe führen. Zum Beispiel sei $A_0 = 2, 5, 9$:

$$\begin{aligned}
A_0 &= (2, 5, 9), & A_5 &= (1, 1, 0),\\
A_1 &= (3, 4, 7), & A_6 &= (0, 1, 1),\\
A_2 &= (1, 3, 4), & A_7 &= (1, 0, 1),\\
A_3 &= (2, 1, 3), & A_8 &= (1, 1, 0).\\
A_4 &= (1, 2, 1), & &
\end{aligned}$$

A_8 stimmt mit A_5 überein; folglich werden sich die Differenzen A_6, A_7, A_8 unendlich wiederholen.

2. Schreibt eine beliebige positive ganze Zahl auf und bildet die Quersumme 2. Ordnung (vgl. Aufgabe 302, 3c). Vom Resultat bildet wieder die Quersumme 2. Ordnung. Wenn ihr diese Operation einige Male fortgesetzt habt, kommt ihr unbedingt entweder zur Zahl 1 oder zur Zahl 89. So haben wir zum Beispiel für die Zahl 31: $3^2 + 1^2 = 10$; $1^2 + 0^2 = 1$.

Zum gleichen Resultat führen offensichtlich sofort die Zahlen der Form 10^n, wobei n eine beliebige positive ganze Zahl ist, und auch die Zahlen, die aus den Ziffern 1 und 3 oder 6 und 8, jede einmal verwandt, und aus einer beliebigen Anzahl von Nullen gebildet sind, das heißt zum Beispiel solche Zahlen wie 13, 103, 3001, 68, 608, 8006 usw. Wir nehmen jetzt irgendeine andere Zahl, zum Beispiel 48. In diesem Falle ist

$$\begin{aligned}
4^2 + 8^2 &= 80, & 5^2 + 2^2 &= 29,\\
8^2 + 0^2 &= 64, & 2^2 + 9^2 &= 85,\\
6^2 + 4^2 &= 52, & 8^2 + 5^2 &= 89.
\end{aligned}$$

Wenn wir die Berechnung fortsetzen, dann erhalten wir:

$$\begin{aligned}
8^2 + 9^2 &= 145, & 4^2 &= 16,\\
1^2 + 4^2 + 5^2 &= 42, & 1^2 + 6^2 &= 37,\\
4^2 + 2^2 &= 20, & 3^2 + 7^2 &= 58,\\
2^2 + 0^2 &= 4, & 5^2 + 8^2 &= 89.
\end{aligned}$$

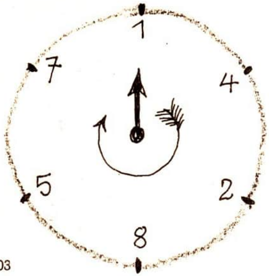
Nach acht Stufen wiederholt sich die Zahl 89. Wir stellen fest, daß die Zwischenzahlen 145, 42, 20, 4, 16, 37 und 58 waren. Hieraus folgt, daß dann, wenn die Quersumme 2. Ordnung einer Zahl zur Zahl 89 führt, man nicht bis zur 89 zu rechnen braucht, sondern nur bis zu einer beliebigen der sieben Zahlen 145, 42, 20, 4, 16, 37 oder 58.

Führt selbst noch einige Versuche mit verschiedenen Zahlen durch. Beweist diese Eigenschaft.

Nicht weniger interessante Gesetzmäßigkeiten kann man entdecken, wenn man die Quersummen 3. oder 4. Ordnung einer beliebigen Zahl bildet. Prüft das selbst nach und beweist es!

304. Das Zahlenkarussell

1. Ich nehme aus der unendlichen Menge der positiven ganzen Zahlen die Zahl 142857 heraus. Sie besteht aus sechs verschiedenen Ziffern. Diese ordnen wir in einem Kreis nach Art eines Zifferblatts an (Abb. 203). Jetzt multiplizieren wir die Zahl nach-



203

einander mit 1, 2, 3, 4, 5 und 6:

$$142857 \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 = 142857, \\ 2 = 285714, \\ 3 = 428571, \\ 4 = 571428, \\ 5 = 714285, \\ 6 = 857142. \end{array} \right.$$

Jedes dieser Produkte läßt sich auf dem Kreis ablesen, wenn man, bei der ersten Ziffer des Produkts beginnend, im Uhrzeigersinn fortschreitet. Ist das nicht wirklich ein Zahlenkarussell?

2. Es gibt noch eine interessante Eigenschaft: Wenn man jedes dieser Produkte in zwei Teile zu je drei Ziffern zerlegt und beide Teile addiert, dann ist das Resultat in allen Fällen ein und dieselbe Zahl: 999. Zum Beispiel: $142 + 857 = 999$; $285 + 714 = 999$ usw.

3. Wir setzen unsere Beobachtungen an den Produkten aus der Zahl 142857 und den ganzen Zahlen fort, die größer als 7 sind (das Produkt mit 7 betrachten wir später):

$$142857 \cdot \left\{ \begin{array}{l} 8 = 1142856 \ (142856 + 1 = 142857), \\ 9 = 1285713 \ (285713 + 1 = 285714), \\ 10 = 1428570 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 11 = 1571427 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$69 = 9857133 \ (857133 + 9 = 857142).$$

Es ergeben sich siebenstellige merkwürdige Zahlen: Wenn wir die erste Ziffer wegstreichen und sie als Einer addieren (vgl. die Additionen in den runden Klammern), erhalten wir wieder eine der zyklischen Vertauschungen von 142857.

Dasselbe „Karussell" aus den Ziffern der Zahl 142857 ergibt sich (mit einigen Ausnahmen) auch bei achtstelligen Produkten, wenn die ersten beiden Ziffern weggestrichen und als Zahl addiert werden.

4. Das Produkt aus der Zahl 142857 und 7 unterscheidet sich stark von den übrigen Produkten. Es besteht nur aus Neunen: $142857 \cdot 7 = 999999$. Das ist der Umstand, der auch Licht in den Ursprung der Zahl 142857 wie auch in ihre „geheimnisvollen" Eigenschaften bringt: Die Ziffernfolge der Zahl ist die Periode des Bruchs $^1/_7$ bei seiner Umwandlung in einen Dezimalbruch. Wir teilen 1 durch 7:

$$\begin{array}{l} 1 : 7 = 0{,}142857 \\ 10 \\ \ \ 30 \\ \ \ \ \ 20 \\ \ \ \ \ \ \ 60 \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 40 \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 50 \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 1 \end{array}$$

Der letzte Rest ist wieder 1; folglich werden sich bei der Fortsetzung der Division im Quotienten dieselben Ziffern in derselben Folge wiederholen. Es ist also ein periodischer Dezimalbruch, das heißt ein unendlicher Bruch, bei dem sich die Ziffern gruppenweise wiederholen.

Um zu erklären, warum die Zahl 142857 bei der Multiplikation mit 2, 3, 4, 5 und 6 nur zyklische Vertauschungen ihrer Ziffern ergibt, teilen wir den ganzen Vorgang der Umwandlung des Bruchs $^1/_7$ in einen Dezimalbruch in folgende Etappen auf:

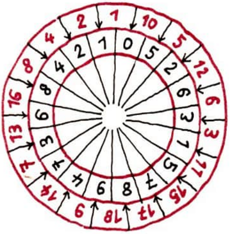
$$\frac{1}{7} = 0{,}1 + \frac{3}{7} \cdot 10^{-1} = 0{,}14 + \frac{2}{7} \cdot 10^{-2} = 0{,}142 + \frac{6}{7} \cdot 10^{-3} = 0{,}1428 + \frac{4}{7} \cdot 10^{-4} = 0{,}14285 + \frac{5}{7} \cdot 10^{-5} = 0{,}142857 + \frac{1}{7} \cdot 10^{-6} = \ldots$$

(von hier ab wiederholen sich dieselben Ziffern). Hieraus ist klar, daß bei der Umwandlung des Bruchs $\frac{3}{7}$ in einen Dezimalbruch die Periode mit der Ziffer beginnt, die in der Zahl 14285714285714 . . . nach der Ziffer 1 steht, das heißt, die Periode ist 428571; dieselbe Zahl muß offensichtlich das Produkt aus den Zahlen 142857 und 3 sein, da $\frac{3}{7} = \frac{1}{7} \cdot 3$ ist.

Ferner beginnt bei der Umwandlung des Bruchs $^2/_7$ in einen Dezimalbruch die Periode mit der Ziffer, die in der Zahl 142857142857 14 ... nach der Ziffer 4 steht, das heißt, die Periode ist 285714; dieselbe Zahl muß offensichtlich auch das Produkt aus 142857 und 2 sein, da $\frac{2}{7} = \frac{1}{7} \cdot 2$ ist usw.
Ebenso ist es nicht schwer zu erklären, warum das Produkt aus der Zahl 142857 und 7 nur aus Neunen besteht. Das liegt daran, daß der Dezimalbruch mit unendlich sich wiederholenden Neunen hinter dem Komma die Zahl 1 darstellt, das heißt $1 = 0{,}9999999\ldots$, und das Produkt aus dem Bruch $^1/_7$ und 7 auch gleich 1 ist.
5. Wenn man einen Bruch aus positiven ganzen Zahlen $\frac{a}{b}$ in einen Dezimalbruch umwandelt, dann ergibt sich stets ein periodischer Bruch, und die Periode hat nicht mehr als $b-1$ Ziffern. In der Tat muß bei der Division der von 0 verschiedene Rest immer kleiner als der Divisor sein; aber es gibt nur endlich viele ganze Zahlen, die kleiner als b sind, und zwar $1, 2, 3, \ldots b-1$. Jede dieser Zahlen kann bei der Division von a durch b Rest sein, und jedem Rest entspricht eine bestimmte Ziffer des Quotienten. Da sich keiner der möglichen Reste innerhalb der Periode wiederholen kann, kann die Periode nicht mehr Ziffern haben, als positive Reste möglich sind, also höchstens $b-1$ Ziffern.
In dem Bruch $^1/_7$ ist gerade diese maximale Länge einer Periode erreicht (6 Ziffern).
Diese Periode heißt ,,voll'', weil sie aus der entsprechend dem Nenner größtmöglichen Anzahl von Ziffern besteht.
Aber nicht jeder Bruch hat eine volle Periode. Zum Beispiel enthält die Periode des Bruchs $^1/_{39}$ nicht 38 Ziffern, sondern nur 6:
$\frac{1}{39} = 0{,}025641025641\ldots$
Die ,,Kreis''eigenschaft der Zahl 142857, die sich als volle Periode des Bruchs $^1/_7$ erweist, finden wir bei allen positiven ganzen Zahlen, deren Ziffernfolge einer vollen Periode eines Bruches entspricht.
Die Perioden der Brüche $^1/_{17}$ und $^1/_{29}$ sind voll:
$\frac{1}{17} = 0{,}(0588235294117647)$,
$\frac{1}{29} = 0{,}(0344827586206896551724137931)$.
Im ersten Falle sind es 16 Ziffern, im zweiten 28. Die Zahlen, die aus den Ziffern dieser Perioden gebildet sind, besitzen dieselben Eigenschaften wie die Zahl 142857.

305. Eine Scheibe für schnelle Multiplikation

Zu derselben Familie der ,,Kreis''zahlen wie die Zahl 142857 (vgl. Aufgabe 304) gehört die Zahl M = 052631578947368421. Mit Hilfe der Scheibe, die in Abb. 204 dargestellt ist, kann sie schnell mit einer beliebigen ganzen Zahl im Bereich von 1 bis 18 multipliziert werden.



204

Auf dem äußeren Ring der Scheibe werden alle 18 Multiplikatoren eingetragen, auf dem inneren Ring alle Ziffern des Multiplikanden M; diese Ziffern bilden auch die 18 Produkte. Um das Resultat der Multiplikation der Zahl M mit einer beliebigen Zahl des äußeren Rings abzulesen, muß man den inneren Ring im Uhrzeigersinn vollständig durchlaufen, wobei man mit der Ziffer beginnt, die von dem Pfeil bezeichnet wird, der sich – von der Mitte der Scheibe aus gesehen – rechts vom Multiplikator befindet.
Zum Beispiel zeigt der Pfeil rechts von der Zahl 14 im äußeren Ring auf die Ziffer 7. Das bedeutet, daß die Zahl 736842105263157894 das Resultat der Multiplikation der Zahl M mit 14 ist. Führt noch einige Multiplikationen mit der Zahl M durch!
Das Produkt aus der Zahl M und 19 ist ganz

anders; es besteht nur aus Neunen, und ihr „erratet" sofort, daß die Ziffernfolge der Zahl M die (volle) Periode des Bruchs $\frac{1}{19}$ darstellt. Die Periode dieses Bruchs ist „voll"; sie enthält 18 Ziffern. Folglich kann sie im Kreis gruppiert werden, womit sich auch das „Geheimnis" unserer Scheibe erklärt.
Fertigt euch aus starkem Papier noch zehn verschiedene „Scheiben für schnelle Multiplikation" mit Ziffern voller Perioden anderer Brüche an und demonstriert euren Freunden eure „phänomenale Fähigkeit" im Schnellrechnen!

306. Ziffernornamente

Manchmal bilden Ziffern, wenn wir sie zu Zahlen zusammenstellen, höchst phantastische und in ihrer Art schöne Kombinationen, die an die Kristallornamente der Schneeflocken an den Fensterscheiben erinnern.
1. Betrachtet zum Beispiel folgende sehr einfache Multiplikationen, die richtig, aber originell durchgeführt sind:

77 · 77
49
4949
49
5929

oder

77 · 77
7
777
847 · 7 = 5929

666 · 666
36
3636
363636
3636
36
443556

oder

666 · 666
6
666
66666
73926 · 6 = 443556

777777777777 · 777777777777
49
4949
494949
49494949
4949494949
494949494949
49494949494949
4949494949494949
494949494949494949
49494949494949494949
4949494949494949494949
494949494949494949494949
4949494949494949494949
49494949494949494949
494949494949494949
4949494949494949
49494949494949
494949494949
4949494949
49494949
494949
4949
49
604938271603728395061729

oder

777777777777 · 777777777777
7
777
77777
7777777
777777777
77777777777
7777777777777
777777777777777
77777777777777777
7777777777777777777
777777777777777777777
77777777777777777777777
86419753086246913580247 · 7
604938271603728395061729

2. Noch 8 Produkte:

$1738 \cdot 4 = 6952$, $483 \cdot 12 = 5796$,
$1963 \cdot 4 = 7852$, $297 \cdot 18 = 5346$,
$198 \cdot 27 = 5346$, $157 \cdot 28 = 4396$,
$138 \cdot 42 = 5796$, $186 \cdot 39 = 7254$.

Der Multiplikand, der Multiplikator und das Produkt enthalten in jeder Multiplikation 9 verschiedene Ziffern.

3. In folgenden Gleichungen werden beide Seiten durch ein und dieselben Ziffern ausgedrückt:

$$42 : 3 = 4 \cdot 3 + 2,$$
$$63 : 3 = 6 \cdot 3 + 3,$$
$$95 : 5 = 9 + 5 + 5,$$
$$(2 + 7) \cdot 2 \cdot 16 = 272 + 16,$$
$$5^{6-2} = 625,$$
$$(8 + 9)^2 = 289,$$
$$2^{10} - 2 = 1022,$$
$$2^{8-1} = 128,$$
$$4 \cdot 2^3 = 4^3 : 2 = 34 - 2$$

$$\sqrt{121} = 12 - 1,$$
$$\sqrt{64} = 6 + \sqrt{4},$$
$$\sqrt{49} = 4 + \sqrt{9} = 9 - \sqrt{4},$$
$$\sqrt{169} = 16 - \sqrt{9} = \sqrt{16 + 9},$$
$$\sqrt{256} = 2 \cdot 5 + 6,$$
$$\sqrt{324} = 3 \cdot (2 + 4),$$
$$\sqrt{11881} = 118 - 8 - 1,$$
$$\sqrt{1936} = -1 + 9 + 36,$$
$$\sqrt[3]{1331} = 1 + 3 + 3 + 1 + 3.$$

Denkt euch analoge schöne Beispiele aus!

4. Unsere Schneeflocken-Ziffern haben folgendes „Ornament" gebildet: das Produkt aus irgendeiner Zahl und ihrer Quersumme, zum Beispiel $37 \cdot (3 + 7)$. Auf einmal ist der erste Multiplikator „geschmolzen" und, was übrig blieb, verwandelte sich in die Summe der Kuben: $3^3 + 7^3$, doch – stellt euch vor – das Resultat hat sich nicht verändert: $37 \cdot (3 + 7) = 3^3 + 7^3$.
Jetzt wird eine andere Zahl mit ihrer Quersumme multipliziert: $48 \cdot (4 + 8)$. Mit ihr geschieht dasselbe: Der erste Multiplikator verschwindet, das übrige wird durch die Summe der Kuben ersetzt ($4^3 + 8^3$), und das Resultat bleibt unverändert: $48 \cdot (4 + 8) = 4^3 + 8^3$.

Und hier sind noch drei analoge „Ornamente":

$$147 \cdot (14 + 7) = 14^3 + 7^3,$$
$$148 \cdot (14 + 8) = 14^3 + 8^3,$$
$$111 \cdot (11 + 1) = 11^3 + 1^3.$$

5. Zwei andere Schneeflocken-Ziffern, 1 und 6, haben die Zahl $16 = 4^2$ gebildet.
Nun hat sich zwischen die Ziffern 1 und 6 eine „Schneeflocke" (15) gelagert. Dadurch hat sich eine neue Zahl, 1156, gebildet; sie ist auch eine Quadratzahl: $1156 = 34^2$.
Wiederum fällt eine „Schneeflocke" (15) und gerät genau in die Mitte der Zahl 1156. Jetzt entsteht die Zahl 111556, die wiederum eine Quadratzahl ist: $111556 = 334^2$.
Schneeflocke (= die Zahl 15) auf Schneeflocke fällt, und jede gerät genau in die Mitte der Zahl. Diese wird dadurch immer „länger", aber sie bleibt unverändert eine Quadratzahl, wie lange auch der „Schneefall" anhält:

$$11115556 = 3334^2,$$
$$1111155556 = 33334^2,$$
$$111111555556 = 333334^2 \text{ usw.}$$

Der Vorgang spielt sich anscheinend gesetzmäßig ab; um aber voll von dieser Gesetzmäßigkeit überzeugt zu sein, muß man natürlich beweisen, daß jede positive ganze Zahl N, die von links nach rechts n Einsen (wobei n eine beliebige positive ganze Zahl ist), n – 1 Fünfen und eine 6 hat, das heißt, daß jede positive Zahl N in der Form:

$$N = \underbrace{11\ldots1}_{n \text{ mal}}\underbrace{55\ldots5}_{n-1 \text{ mal}}6$$

eine Quadratzahl ist. Beweisen kann man das auf verschiedene Arten. Ihr braucht nur ein bißchen Scharfsinn, und ihr findet einen verhältnismäßig kurzen Beweis für die Behauptung, daß N das Quadrat der Zahl $\frac{10^n + 2}{3}$ ist.

Beweist selbständig, daß bei einer beliebigen positiven ganzen Zahl n

1. $\frac{10^n + 2}{3}$ eine ganze Zahl ist und

2. $\frac{10^n + 2}{3} = \underbrace{33\ldots3}_{n \text{ mal}} + 1$ ist.

307. Einer für alle und alle für einen

1. Um alle ganzen Zahlen von 1 bis 26 ausdrücken zu können, genügen die 10 Ziffern 0, 1, 2, . . . 9. Aber sie sind nicht einmal nötig. Wenn man will, kann man alle Ziffern mit Ausnahme der 2 entbehren, und man kann sogar fordern, daß man sie genau fünfmal zur Bildung jeder Zahl verwendet und nur die vier arithmetischen Grundrechnungsarten, einschließlich der Erhebung ins Quadrat, und Klammern benutzt. Beschäftigt euch in einer ruhigen Stunde mit dieser Gehirngymnastik!
Hier sind als Beispiele die ersten zehn Zahlen:

$$1 = 2 + 2 - 2 - \frac{2}{2},$$
$$2 = 2 + 2 + 2 - 2 - 2,$$
$$3 = 2 + 2 - 2 + \frac{2}{2},$$
$$4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 - 2,$$
$$5 = 2 + 2 + 2 - \frac{2}{2},$$
$$6 = 2 + 2 + 2 + 2 - 2,$$
$$7 = 22 : 2 - 2 - 2,$$
$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 - 2,$$
$$9 = 2 \cdot 2 \cdot 2 + \frac{2}{2},$$
$$10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2.$$

Nach dem angeführten Muster bildet auch die folgenden 16 Zahlen (von 11 bis 26).
Die Zahl 27 durch fünf Zweien unter diesen Bedingungen zu bilden gelingt jedoch nicht. Ich erinnere noch einmal daran, daß zur Bildung jeder Zahl genau fünf Zweien verwendet werden müssen.

2. Bildet mit Hilfe der Vier unter der Bedingung, sie unbedingt viermal zu verwenden, alle ganzen Zahlen von 1 bis 10.

3. Für den, der sich für Zahlenrätsel interessiert, verallgemeinern wir die vorhergehende Aufgabe.
Es soll eine positive ganze Zahl mit Hilfe von vier beliebigen gleichen Ziffern dargestellt werden, die durch mathematische Zeichen zu verbinden sind. Das bedeutet: Es soll eine Zahl durch vier gleiche Ziffern so dargestellt werden, daß man bei Ersatz dieser Ziffern durch vier beliebige andere gleiche Ziffern (außer der Null) dieselbe Zahl erhält.
Wir nehmen zum Beispiel die Darstellung der Zahl 3 durch vier Vieren: $3 = (4 + 4 + 4) : 4$.
Bei dieser Darstellungsweise der Zahl 3 ersetzen wir die Ziffer 4 durch eine beliebige andere Ziffer (außer durch Null). Zum Beispiel $3 = (5 + 5 + 5) : 5$ oder $3 = (8 + 8 + 8) : 8$ und allgemein $3 = (n + n + n) : n$.
Bei der Darstellung der Zahl 5 mit Hilfe von vier Vieren: $5 = (4 \cdot 4 + 4) : 4$, kann man jedoch die Ziffer 4 durch keine andere Ziffer ersetzen. Man muß folglich eine andere Darstellung der Zahl 5 suchen. Dabei ist gestattet, Additions-, Subtraktions-, Multiplikations- und Divisionszeichen und Klammern zu verwenden. Wenn diese Zeichen nicht ausreichen, dann kann man noch verwenden

a) das Zeichen für die Quadratwurzel: $\sqrt{\ }$. Dabei haben wir den arithmetischen Wert der Wurzel im Auge, das heißt nur ihren positiven Wert aus einer positiven Zahl: $\sqrt{9} = 3$, aber nicht -3;

b) das Fakultätszeichen: !. Dieses Zeichen wird rechts neben eine positive ganze Zahl gesetzt und bedeutet das Produkt aus allen ganzen Zahlen von 1 bis zu dieser Zahl, sie eingeschlossen; zum Beispiel
$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$; allgemein
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n - 1)\, n$;

c) einen Punkt vor der Zahl (auf Zeilenhöhe), zum Beispiel .4; und je einen Punkt vor der Zahl und über der Zahl, zum Beispiel .$\dot{4}$.
Das erste Symbol ist in einigen Ländern

üblich, um einen Dezimalbruch zu kennzeichnen: $.4 = 0{,}4$, und das zweite Symbol, um eine Periode auszudrücken: $.\dot{4} = 0{,}(4)$. Ich erinnere daran, daß sich ein periodischer Bruch durch einen gemeinen Bruch ersetzen läßt: $0{,}(4) = \frac{4}{9}$; $0{,}(n) = \frac{n}{9}$.

Denkt darüber nach, wie man unter Verwendung der genannten mathematischen Zeichen eine positive ganze Zahl mit Hilfe von vier beliebigen gleichen Ziffern darstellen kann.

Beispiele. $1 = (n : n) \cdot (n : n)$,

$5 = \frac{n + .\dot{n}}{.\dot{n} + .\dot{n}}$, $16 = \frac{n}{.n} + \left(\sqrt{\frac{n}{.\dot{n}}}\right)!$, wobei n eine beliebige ganze Zahl zwischen 1 und 9 bezeichnet.

Es soll im letzten Beispiel, sagen wir, $n = 7$ sein; dann ist

$$\frac{7}{.7} + \left(\sqrt{\frac{7}{.\dot{7}}}\right)! = \frac{7}{0{,}7} + \left(\sqrt{\frac{7}{0{,}(7)}}\right)! = 10 + (\sqrt{9})!$$
$$= 10 + 3! = 10 + 1 \cdot 2 \cdot 3 = 10 + 6 = 16.$$

Überlegt, wie man alle ganzen Zahlen von 1 bis 21 mit Hilfe von nur vier n darstellen kann, wobei man n durch jede beliebige Ziffer (außer 0) ersetzen kann. Aus dem genannten Zahlenbereich ist mir bisher nur die Darstellung der Zahl 14 noch nicht begegnet. Wenn ihr sie herausbekommt, dann teilt sie mir mit.

Warnung. Eine „Lösung" ähnlich folgender: $14 = \frac{n}{.n} + \sqrt{n + n}$ ist falsch, da diese Gleichung nur bei $n = 8$ richtig ist, nach der Bedingung muß n aber durch jede beliebige Ziffer (außer 0) ersetzbar sein.

4. Wenn sich die ganze Familie der Ziffern von 1 bis 9 (ohne die Null) beteiligt, kann sie jede beliebige Ziffer ihrer eigenen Familie ersetzen. Hier ersetzt sie zum Beispiel 2 und 4:

$2 = \frac{13458}{6729}$, $4 = \frac{15768}{3942}$. Jeder dieser unechten Brüche enthält alle Ziffern von 1 bis 9, und zwar jede Ziffer nur einmal.

Wenn ihr analoge Brüche aus den Ziffern von 1 bis 9 bildet, dabei aber jede Ziffer nur einmal verwendet, könnt ihr die Zahlen 3, 5, 6, 7, 8 und 9 bilden, das heißt alle übrigen positiven einstelligen Zahlen außer 1. Für die Darstellung der 1 mit Hilfe der neun Ziffern muß man sich ein besonderes Verfahren ausdenken.

Schlagt nicht gleich im Lösungsteil nach, sondern versucht erst einmal selbst, die Lösung zu finden.

5. Nehmen wir die Ausgestoßene (die Null) in die Familie der übrigen Ziffern wieder auf. Jetzt kann man mit Hilfe der zehn verschiedenen Ziffern sechs Brüche bilden, von denen jeder gleich 9 ist.

Drei Brüche sind folgende: $9 = \frac{97524}{10836} = \frac{95823}{10647} = \frac{57429}{06381}$; die übrigen drei bildet selbständig.

Die 1 läßt sich schließlich auch sehr leicht aus zehn Ziffern bilden (tut es!). Man kann sein Glück versuchen, auch die anderen einstelligen Zahlen aus allen zehn Ziffern zu bilden.

308. Zahlenbesonderheiten

Unendlich viele verschiedenartige Wechselbeziehungen gibt es zwischen Zahlen. Einige bedeutende wurden Gegenstand ernsthafter Forschungen. Andere sind weniger wesentlich; ihre Eigenschaften sind begrenzt und nicht allgemein, aber gerade durch ihre Ausschließlichkeit sind sie bisweilen auch interessant.

1. Unter den ganzen Zahlen lassen sich einige Paare finden, bei denen sich die Summe und das Produkt der Zahlen eines jeden Paares nur durch die Anordnung der Ziffern unterscheiden:

$9 + 9 = 18$,	$9 \cdot 9 = 81$,
$24 + 3 = 27$,	$24 \cdot 3 = 72$,
$47 + 2 = 49$,	$47 \cdot 2 = 94$,
$263 + 2 = 265$,	$263 \cdot 2 = 526$,
$497 + 2 = 499$,	$497 \cdot 2 = 994$.

2. Einige Paare zweistelliger Zahlen sind durch eine ganz andere Eigenschaft bemerkenswert: Das aus den Zahlenpaaren gebildete Produkt ändert sich nicht, wenn in jedem Faktor die Ziffern umgestellt werden. Seht euch an:

$12 \cdot 42 = 21 \cdot 24$, $\quad 24 \cdot 63 = 42 \cdot 36$,
$12 \cdot 63 = 21 \cdot 36$, $\quad 24 \cdot 84 = 42 \cdot 48$,
$12 \cdot 84 = 21 \cdot 48$, $\quad 26 \cdot 93 = 62 \cdot 39$,
$13 \cdot 62 = 31 \cdot 26$, $\quad 36 \cdot 84 = 63 \cdot 48$,
$23 \cdot 96 = 32 \cdot 69$, $\quad 46 \cdot 96 = 64 \cdot 69$.

Es gibt noch 4 Paare zweistelliger Zahlen, die diese Eigenschaft besitzen. Sucht sie!

3. Und hier sind noch drei Paare je zweier aufeinanderfolgender ganzer Zahlen, deren Quadrate sich mit denselben Ziffern, aber in anderer Reihenfolge schreiben lassen:

$13^2 = 169$, $\quad 157^2 = 24649$, $\quad 913^2 = 833569$,
$14^2 = 196$, $\quad 158^2 = 24964$, $\quad 914^2 = 835396$.

4. Gibt es etwa unter den ganzen Zahlen eine, die folgende Eigenschaften besitzt?
a) Sie muß die vierte Potenz ihrer Quersumme sein. (Hieraus folgt, daß sie auch eine Quadratzahl sein muß.)
b) Wenn man sie in drei Gruppen zu je 2 Ziffern zerlegt, muß die Summe der drei zweistelligen Zahlen auch eine Quadratzahl sein.
c) Wenn man sie in umgekehrter Ziffernfolge schreibt und wieder in drei Gruppen zu je 2 Ziffern zerlegt, muß die Summe dieser drei zweistelligen Zahlen ebenfalls eine Quadratzahl sein.
Die Berechnungen ergeben, daß es eine solche Zahl gibt. Da ist sie: 234256. Überzeugt euch selbst davon, daß sie alle geforderten Eigenschaften besitzt!

5. Wir können die Zahlen zu verschiedenartigen Zahlen„sternbildern" gruppieren. Ein „Sternbild" aus den sechs Zahlen 2, 3, 7, 1, 5, 6 ist dadurch interessant, daß die Summe der ersten drei Zahlen gleich der Summe der letzten drei ist, gleich sind aber auch die Summen ihrer Quadrate:

$$2 + 3 + 7 = 1 + 5 + 6,$$
$$2^2 + 3^2 + 7^2 = 1^2 + 5^2 + 6^2.$$

Diese Zahlen 2, 3, 7, 1, 5, 6 lassen sich sozusagen durch die sechs Unbekannten x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 in dem Gleichungssystem

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$ ersetzen.

Es gibt unendlich viele ganze Zahlen, die dieses Gleichungssystem erfüllen. Es wäre interessant, wie schnell es euch gelingt, noch eine solche Gruppe aus sechs ganzen Zahlen zusammenzusuchen. Noch großartiger sind die „Sternbilder" aus den acht Zahlen 0, 5, 5, 10, 1, 2, 8, 9 und aus den zehn Zahlen 1, 4, 12, 13, 20, 2, 3, 10, 16, 19. In jedem Falle ist die Summe der Zahlen der ersten Hälfte gleich der Summe der Zahlen der zweiten Hälfte; außerdem sind, wie im vorangehenden Beispiel, die Summen der Quadrate dieser Zahlen gleich; ja noch mehr, es sind auch die Summen der Kuben dieser Zahlen gleich:

$$0 + 5 + 5 + 10 = 1 + 2 + 8 + 9,$$
$$0^2 + 5^2 + 5^2 + 10^2 = 1^2 + 2^2 + 8^2 + 9^2,$$
$$0^3 + 5^3 + 5^3 + 10^3 = 1^3 + 2^3 + 8^3 + 9^3;$$

$$1 + 4 + 12 + 13 + 20$$
$$= 2 + 3 + 10 + 16 + 19,$$
$$1^2 + 4^2 + 12^2 + 13^2 + 20^2$$
$$= 2^2 + 3^2 + 10^2 + 16^2 + 19^2,$$
$$1^3 + 4^3 + 12^3 + 13^3 + 20^3$$
$$= 2^3 + 3^3 + 10^3 + 16^3 + 19^3.$$

Gewiß gibt es auch andere Gruppen ganzer Zahlen, die durch genau dieselben Gleichungen verknüpft sind; aber wie soll man solche Zahlen finden?
In das „Geheimnis" aller hier angeführten „Zahlensternbilder" drangen als erste schon vor 200 Jahren (1750—1751) zwei Petersburger Akademiemitglieder ein: Goldbach und der geniale Euler. Sie fanden eine Reihe von Formeln, die sich für die Lösung einiger Gleichungssysteme mit ganzen Zahlen eignen, besonders auch für solche, die zu den erwähnten „Zahlensternbildern" führen.
So erwiesen sich für die Zusammenstellung der Zahlen, die das erste „Sternbild"

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

darstellen, folgende Formeln als geeignet:
$x_1 = a + c$, $x_2 = b + c$, $x_3 = 2a + 2b + c$
und
$y_1 = c$, $y_2 = 2a + b + c$, $y_3 = a + 2b + c$.
Ihr braucht in diesen Formeln die Buchstaben a, b und c nur durch beliebige Zahlen zu ersetzen, und ihr erhaltet soviele Zahlen für das „Sternbild", wie ihr wollt.
Speziell bei $a = 1$, $b = 2$ und $c = 1$ ergibt sich das Sternbild, das als erstes Beispiel angeführt ist: 2, 3, 7, 1, 5, 6.
Bildet andere Zahlengruppen für das erste

„Sternbild", indem ihr den Buchstaben a, b und c verschiedene Werte beilegt.

Euler und Goldbach fanden auch noch eine andere Formelgruppe für die Zahlen des ersten „Sternbilds":

$$x_1 = a\,d, \qquad x_2 = a\,c + b\,d, \qquad x_3 = b\,c,$$
$$y_1 = a\,c, \qquad y_2 = a\,d + b\,c, \qquad y_3 = b\,d,$$

wobei a, b, c und d auch willkürlich gewählte Zahlen sind.

Für die Aufstellung von Zahlen, die das zweite „Sternbild"

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2,$$
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + y_4^3$$

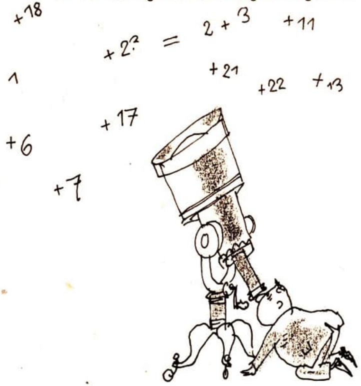
ergeben, sind folgende Formeln geeignet:

$x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = 3a + 3b$, $x_4 = 2a + 4b$, $y_1 = 2a + b$, $y_2 = a + 3b$, $y_3 = 3a + 4b$, $y_4 = 0$.

Ersetzt wiederum die Buchstaben a und b durch beliebige Zahlen, und ihr erhaltet soviele Zahlen für das zweite „Sternbild", wie ihr wollt.

Es ist nützlich, die hier angeführten Formeln nicht nur an diesen speziellen Beispielen nachzuprüfen, sondern allgemein zu beweisen, indem ihr in jeder Gleichung die Unbekannten durch die entsprechenden rechten Seiten obiger Formeln ersetzt.

6. Nach Euler tauchten im Zusammenhang mit der Lösung von Gleichungen mit ganzen Zahlen[1] viele andere Zahlenbesonderheiten auf, wofür euch Beispiele auf S. 157 ff. begegnet sind. Mühe, Beharrlichkeit und mathematischer Scharfsinn mehren unseren Vorrat an „Zahlensternbildern" durch neue interessante Muster.



Möchtet ihr euch nicht zum Beispiel mit einem der neuen, sehr großartigen „Sternbilder" bekanntmachen? Die Summen aller Potenzen, von der ersten bis zur fünften, der sechs Zahlen 1, 6, 7, 17, 18 und 23 sind gleich den Summen derselben Potenzen der anderen sechs Zahlen 2, 3, 11, 13, 21 und 22:

$$1 + 6 + 7 + 17 + 18 + 23 = 2 + 3 + 11 + 13 + 21 + 22,$$
$$1^2 + 6^2 + 7^2 + 17^2 + 18^2 + 23^2 = 2^2 + 3^2 + 11^2 + 13^2 + 21^2 + 22^2,$$
$$1^3 + 6^3 + 7^3 + 17^3 + 18^3 + 23^3 = 2^3 + 3^3 + 11^3 + 13^3 + 21^3 + 22^3,$$
$$1^4 + 6^4 + 7^4 + 17^4 + 18^4 + 23^4 = 2^4 + 3^4 + 11^4 + 13^4 + 21^4 + 22^4,$$
$$1^5 + 6^5 + 7^5 + 17^5 + 18^5 + 23^5 = 2^5 + 3^5 + 11^5 + 13^5 + 21^5 + 22^5.$$

Als „Schlüssel" zur Auffindung anderer Zahlen für dieses „Sternbild" dient die Gleichung

$$\begin{aligned} a^n &+ (a + 4b + c)^n + (a + b + 2c)^n \\ &+ (a + 9b + 4c)^n + (a + 6b + 5c)^n \\ &+ (a + 10b + 6c)^n = (a + b)^n + (a + c)^n \\ &+ (a + 6b + 2c)^n + (a + 4b + 4c)^n \\ &+ (a + 10b + 5c)^n + (a + 9b + 6c)^n. \end{aligned}$$

Ersetzt ihr die Buchstaben a, b und c durch beliebige Zahlen und setzt ihr für n die Werte 1, 2, 3, 4 oder 5 ein, dann erhaltet ihr immer eine Gleichung.

7. Bildet zwei Gruppen aus der gleichen Anzahl solcher **einstelliger** Zahlen, daß die Quadratsumme der Zahlen der ersten Gruppe gleich der Quadratsumme der Zahlen der zweiten ist, zum Beispiel $4^2 + 5^2 + 6^2 = 8^2 + 3^2 + 2^2$. Und jetzt bildet aus den Ziffern 4, 5, 6 und 8, 3, 2 drei zweistellige Zahlen, indem ihr die ersten drei Ziffern als Zehner und die letzten drei als Einer verwendet und sie beliebig kombiniert. Die Summe ihrer Quadrate ist gleich der Summe der Quadrate der Zahlen, die entstehen,

[1] Vgl. auch **Helfond, A. O.**: Die Lösung von Gleichungen mit ganzen Zahlen. Populäre Kapitel aus der Mathematik, Jg. 8, Gostechisdat, 1952

wenn man bei jeder gebildeten zweistelligen Zahl die Ziffern vertauscht.

So kann man aus den Gruppen 4, 5, 6 und 8, 3, 2 folgende Gleichungen bilden:

$$48^2 + 53^2 + 62^2 = 26^2 + 35^2 + 84^2$$

oder $43^2 + 52^2 + 68^2 = 86^2 + 25^2 + 34^2$ usw.

Wenn man verallgemeinert, kann man sagen, daß dann, wenn n einstellige Zahlen $x_1, x_2, \dots x_n$ und n andere einstellige Zahlen $y_1, y_2, \dots y_n$ durch die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 \cdots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 \cdots + y_n^2$ verbunden sind, auch folgende Gleichung richtig ist:

$$(10\,x_1 + y_1)^2 + (10\,x_2 + y_2)^2 \cdots + (10\,x_n + y_n)^2$$
$$= (10\,y_n + x_n)^2 + (10\,y_{n-1} + x_{n-1})^2 \cdots$$
$$+ (10\,y_1 + x_1)^2.$$

Wer will, kann sich selbst davon überzeugen, indem er die Klammern in der zweiten Gleichung auflöst und die erste Gleichung beachtet. Übt euch in der Zusammenstellung derartiger Summen.

Nehmt zum Beispiel die acht ersten Zahlen der natürlichen Zahlenfolge 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 und 8, überlegt, welche von ihnen zu der Gruppe x_1, x_2, x_3 und x_4 und welche zu der Gruppe y_1, y_2, y_3 und y_4 zusammengefaßt werden müssen, und dann bildet nach der angeführten Regel Gruppen zweistelliger Zahlen mit gleichen Quadratsummen.

8. Als interessante „Zahlensternbilder" erweisen sich auch noch kompliziertere Paare von Gruppen derartig gebildeter Zahlen, zum Beispiel:

$$13 + 42 + 53 + 57 + 68 + 97$$
$$= 79 + 86 + 75 + 35 + 24 + 31,$$
$$13^2 + 42^2 + 53^2 + 57^2 + 68^2 + 97^2$$
$$= 79^2 + 86^2 + 75^2 + 35^2 + 24^2 + 31^2,$$
$$13^3 + 42^3 + 53^3 + 57^3 + 68^3 + 97^3$$
$$= 79^3 + 86^3 + 75^3 + 35^3 + 24^3 + 31^3;$$
$$12 + 32 + 43 + 56 + 67 + 87$$
$$= 78 + 76 + 65 + 34 + 23 + 21,$$
$$12^2 + 32^2 + 43^2 + 56^2 + 67^2 + 87^2$$
$$= 78^2 + 76^2 + 65^2 + 34^2 + 23^2 + 21^2,$$
$$12^3 + 32^3 + 43^3 + 56^3 + 67^3 + 87^3$$
$$= 78^3 + 76^3 + 65^3 + 34^3 + 23^3 + 21^3.$$

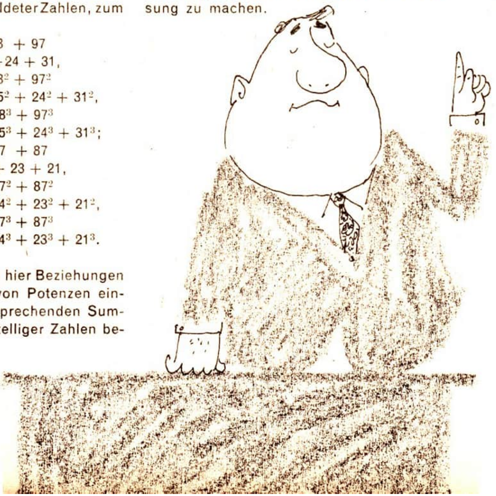
Untersucht, ob nicht auch hier Beziehungen zwischen den Summen von Potenzen einstelliger Zahlen und entsprechenden Summen von Potenzen zweistelliger Zahlen bestehen.

9. Und noch eine Besonderheit! Die Zahl 145 ist einzigartig; sie kann als einzige positive ganze Zahl durch die Summe der Zahlenwerte ihrer Ziffern mit Fakultätszeichen (!) (vgl. Aufgabe 307, 3) ausgedrückt werden: $145 = 1! + 4! + 5!$ (wenn man die trivialen Fälle $1 = 1!$ und $2 = 2!$ nicht mitrechnet). Der Student N. Golowin aus Taschkent hat bewiesen, daß es andere Zahlen mit solchen Eigenschaften nicht gibt. Wenn man aber berücksichtigt, daß $0! = 1$ ist, findet sich noch eine Zahl. Welche?

10. Es gibt nur zwei positive ganze dreistellige Zahlen, deren Ziffern in gleicher Folge und an gleicher Stelle bei jeder beliebigen Potenz mit positiven ganzen Exponenten wiederkehren:

$376^2 = 141376$, $\quad 376^3 = 53157376$ usw.,
$625^2 = 390625$, $\quad 625^3 = 244140625$ usw.

Wie hat man diese dreistelligen Zahlen gefunden, und wie hat man festgestellt, daß es nur zwei gibt? Das war eine der Aufgaben des jährlichen Preisausschreibens, das von der (sowjetischen) Zeitschrift „Mathematik in der Schule" für alle mathematisch Interessierten veranstaltet wird. Sie hat eine kurze, aber recht komplizierte Lösung. Sich darüber klarzuwerden ist gewiß von Nutzen, aber noch nützlicher ist es, eigene geistige Anstrengungen zur Auffindung einer Lösung zu machen.



309. Beobachtungen an der natürlichen Zahlenfolge

1. Wir ordnen die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 . . . in Gestalt eines Dreiecks an:

Spalte Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	. . .	. . .
										. . .
									. .	. . .
									. . . .	. . .
								50	. . . .	. . .
							37	51	. . . .	. . .
						26	38	52	. . . .	. . .
					17	27	39	53	. . . .	107
				10	18	28	40	54	. . . .	108
			5	11	19	29	41	55	. . . .	109
		2	6	12	20	30	42	56	. . . .	110
(*)	1	3	7	13	21	31	43	57	. . . .	111
		4	8	14	22	32	44	58	. . . .	112
			9	15	23	33	45	59	. . . .	113
				16	24	34	46	60	. . . .	114
					25	35	47	61	. . . .	115
						36	48	62	. . . .	. . .
							49	63	. . . .	. . .
								64	. . . .	. . .
									. . . .	. . .
									. .	. . .
										. . .

Betrachtet aufmerksam dieses Zahlendreieck, ihr werdet sicherlich manches Gesetzmäßige in der Anordnung der Zahlen in Zeilen und Spalten und Beziehungen zwischen den Zahlen und den Stellen, die sie einnehmen, finden. Habt ihr zum Beispiel folgendes bemerkt?

a) Die unterste Zahl jeder Spalte ist das Quadrat der Nummer der Spalte.

b) Das Produkt aus zwei beliebigen benachbarten Zahlen irgendeiner Zeile ist eine Zahl aus derselben Zeile; zum Beispiel $5 \cdot 11 = 55$. Beide Faktoren und das Produkt findet ihr in einer Zeile. Der Platz in der Zeile, an dem das Produkt steht, ist die Summe aus der Zahl 1 und dem kleineren der beiden Faktoren. Die Zählung muß man von links nach rechts vornehmen, wobei man mit der Stelle beginnt, die der kleinere Faktor einnimmt. Zum Beispiel steht das Produkt $5 \cdot 11 = 55$ in derselben Zeile, in der sich 5 und 11 befinden, und zwar auf der $1 + 5 = 6$. Stelle, wenn man mit der Zählung bei der Zahl 5 beginnt. $7 \cdot 13 = 91$; 91 befindet sich auf derselben Zeile an der $1 + 7 = 8$. Stelle, gerechnet von der Zahl 7 an.

c) Alle Zahlen der Zeile, die mit einem Sternchen (*) gekennzeichnet ist, erhält man nach der Formel $n^2 - n + 1$, wobei $n = 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$ ist. In dieser Zeile ist nach der Zahl 3 jede dritte Zahl durch 3 teilbar, jede siebente Zahl nach der Zahl 7 oder der Zahl 21 ist durch 7 teilbar, jede 13. Zahl nach 13 oder 91 ist durch 13 teilbar usw.

Analoge Eigenschaften besitzen die Zahlen der anderen Zeilen.

2. Kann man die ganze Folge der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, \ldots n-1, n, n+1 \ldots$, ohne die Folge zu ändern, in Gruppenpaare gleicher Summen teilen?

Probieren wir es! Das erste Paar fällt sofort ins Auge: $1 + 2 = 3$. Prüfen wir die folgenden Zahlen: $4 + 5 + 6 = 7 + 8$.

Bis hierher klappt es. Noch ein Versuch und wieder ein Erfolg:

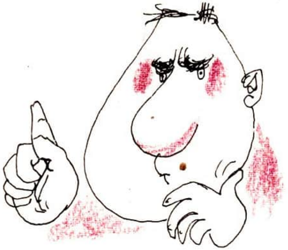
$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$. Wir bemerken, daß die Anzahl der Summanden zunimmt, aber sie nimmt gesetzmäßig zu: Jedesmal vermehrt sie sich auf der linken Seite der Gleichung wie auf der rechten um einen Summanden, wobei auf der linken Seite jeder Gleichung ein Summand mehr steht als auf der rechten.

Betrachten wir folgendes Beispiel:

$16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24$.

Es stimmt!

Sehen wir uns jetzt an, was der kleinste Summand (der äußerste linke) eines jeden Paares gleicher Summen darstellt. Er ist das Quadrat der Anzahl der Summanden derjenigen Summe, die die geringere Anzahl Summanden enthält.



In der Tat besteht die rechte Seite der ersten Gleichung aus einer Zahl (3), und der kleinste Summand in dieser Gleichung ist 1^2; auf der rechten Seite der zweiten Gleichung stehen zwei Summanden $(7 + 8)$, und der kleinste Summand in dieser Gleichung ist 2^2; auf der rechten Seite der dritten Gleichung sind drei Summanden, und der kleinste Summand in dieser Gleichung ist 3^2 usw.
Diese Gesetzmäßigkeit gestattet es, schnell ein Paar gleicher Summen niederzuschreiben, die einer im voraus festgelegten Anzahl von Summanden entsprechen.
Es sollen zum Beispiel für die linke Seite der Gleichung 7 Zahlen in natürlicher Folge gesucht werden, die die Bedingung erfüllen. Wir legen den kleinsten Summanden fest: Zuerst finden wir, daß $7 - 1 = 6$ die Anzahl der Summanden auf der rechten Seite der Gleichung bestimmt; der kleinste Summand ist danach $6^2 = 36$. Folglich ist das gesuchte Paar gleicher Summen:

$$36 + 37 + 38 + 39 + 40 + 41 + 42 = 43 + 44 + 45 + 46 + 47 + 48.$$

Allgemein gilt, daß die Summe von $n + 1$ aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, deren kleinste n^2 ist, gleich der Summe der ihnen folgenden n Zahlen ist. Wenn der erste Summand der ersten Summe n^2 ist, dann ist der zweite Summand dieser Summe um 1 größer, der dritte Summand um 2, der vierte um 3, der $(n + 1)$-te um n größer als der erste. Folglich ist der letzte Summand der ersten Summe $n^2 + n$. Also ist der erste Summand der zweiten Summe $n^2 + n + 1$, der zweite Summand ist, wie bisher, um 1 größer, der dritte um 2, der n-te um $n - 1$ größer als der erste. Folglich ist der letzte Summand der zweiten Summe: $n^2 + n + 1 + (n - 1)$ oder $n^2 + 2n$. Das Ergebnis können wir also in folgender algebraischer Form ausdrücken:

$$\underbrace{n^2 + (n^2 + 1) + (n^2 + 2) \ldots + (n^2 + n)}_{(n + 1) \text{ Summanden}}$$
$$= \underbrace{(n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 2) \ldots + (n^2 + 2n)}_{n \text{ Summanden}}.$$

Wer die Formel für die Summe der Zahlen einer arithmetischen Reihe 1. Ordnung kennt, beweist ohne große Mühe die Richtigkeit dieser Gleichung.

3. Nach der Betrachtung der Summen natürlicher Zahlen wenden wir uns den Summen der Quadrate natürlicher Zahlen zu.
Wir betrachten die Summe der Quadrate der n ersten natürlichen Zahlen: $1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + (n - 1)^2 + n^2$. Das ist eine arithmetische Reihe 2. Ordnung. Ihre Summe läßt sich ebenfalls nach einer Formel berechnen:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.$$

Wenn man nur die Quadrate der geraden oder nur die der ungeraden Zahlen addieren will, benötigt man andere Formeln. Die Summe der Quadrate aller ungeraden Zahlen von 1 bis 9 kann man zum Beispiel nach folgender Formel ausrechnen: $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 = \frac{1}{6}(10^3 - 10)$. Zur Berechnung der Summe der Quadrate aller geraden Zahlen von 2 bis 10 eignet sich die Formel: $2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 = \frac{1}{6}(11^3 - 11)$. Wenn wir diese beiden Gleichungen addieren, erhalten wir eine Variante

der Formel für die Summe der Quadrate aller ganzen Zahlen von 1 bis 10: $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ldots + 10^2 = \frac{1}{6}[10^3 + 11^3 - (10 + 11)]$.
Erweitert selbst diese Formel auf eine beliebige Anzahl von Summanden!

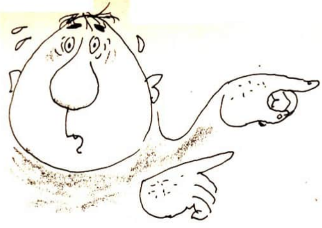
4. Wenn die Katheten eines Dreiecks 3 bzw. 4 Einheiten lang sind, dann ist die Hypotenuse 5 Einheiten lang, denn $3^2 + 4^2 = 5^2$. (Es ist das sogenannte ägyptische Dreieck.) Hier ist die Summe der Quadrate zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen gleich dem Quadrat der nächstfolgenden Zahl. Eine andere Beobachtung: Ende des 19. Jahrhunderts malte der Genremaler N. P. Bogdanow-Belski (1868–1945) ein Bild „Eine schwierige Aufgabe", auf dem er eine Gruppe von Schülern einer Dorfschule darstellte, die darüber nachdenken, wie man „im Kopf" die Aufgabe des S. A. Ratschinski lösen könne, die vom Lehrer an die Wandtafel geschrieben worden war:

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365} = ?$$

In der Tat keine leichte Aufgabe zur raschen Lösung „im Kopf", wenn man das „Geheimnis" nicht kennt. Aber das „Geheimnis" ist sehr einfach. Es besteht darin, daß $10^2 + 11^2 + 12^2 = 365$ und $13^2 + 14^2 = 365$ sind. Folglich ist die gesuchte Antwort 2.
Aber lenken wir unsere Aufmerksamkeit auf etwas anderes. Aus dem Vergleich der oben angegebenen Gleichung folgt, daß $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$ ist, das heißt, daß die Summe der Quadrate einiger aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen gleich der Summe der Quadrate der nächstfolgenden Zahlen ist, und wieder ist (wie in der gleichartigen Aufgabe unter 2) die Anzahl der Summanden auf der linken Seite der Gleichung nur um einen größer als auf der rechten Seite.

Aufgabe. Es sollen $n + 1$ aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gesucht werden, bei denen die Summe der Quadrate gleich der Summe der Quadrate der nächstfolgenden n Zahlen ist.

5. Unter den natürlichen Zahlen gibt es kein Paar aufeinanderfolgender Zahlen, von denen die Summe der Kuben gleich dem Kubus der nächstfolgenden Zahl ist. Davon kann man sich mit Hilfe der Algebra überzeugen.
Wenn man drei beliebige aufeinanderfolgende Zahlen mit $x - 1, x, x + 1$ bezeichnet, dann müßte nach der Bedingung $(x - 1)^3 + x^3 = (x + 1)^3$ oder $x^3 - 6x^2 - 2 = 0$ sein. Wir verleihen dieser kubischen Gleichung folgende Gestalt: $x^2 (x - 6) = 2$. Es läßt sich leicht feststellen, daß keine natürliche Zahl diese Gleichung erfüllt. Ihre rechte Seite ist eine natürliche Zahl; folglich muß x größer als 6 sein. Der kleinste mögliche Wert für x ist dann 7. Aber bei $x = 7$ ist der Wert der linken Seite der Gleichung bedeutend größer als 2; das gilt erst recht bei größeren Werten für x, das heißt, daß es keine natürliche Zahl für x gibt, die die Gleichung erfüllt.
Dennoch ist es Liebhabern derartiger Zahlenrätsel geglückt, auch aus Kuben aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen gesetzmäßig gleiche Summen zu bilden, wenn auch jedesmal mit einigen Zusätzen:
$[5^3 + \underline{6}^3] + 1^3 = [7^3] - 1^3$,
$[16^3 + 17^3 + \underline{18}^3] + (1^3 + 2^3) = [19^3 + 20^3] - (1^3 + 2^3)$,
$[33^3 + 34^3 + 35^3 + \underline{36}^3] + (1^3 + 2^3 + 3^3) = [37^3 + 38^3 + 39^3] - (1^3 + 2^3 + 3^3)$ usw.
In den eckigen Klammern stehen die Summen der Kuben aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, wobei wieder auf n Summanden in der rechten Klammer $n + 1$ Summanden in der linken Klammer entfallen. In den runden Klammern stehen rechts und links die gleichen Summen der Kuben aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, beginnend mit 1. Dabei ist zu bemerken, daß die unterstrichene Zahl (ohne den Exponenten) in jeder Gleichung folgendermaßen mit der Anzahl der Summanden in den eckigen Klammern zusammenhängt: Die unterstrichene Zahl (jeweils die größte in der eckigen Klammer der linken Seite) ist gleich dem dreifachen Produkt aus der Anzahl der Glieder links und der Anzahl der Glieder rechts (in den eckigen Klammern). So sind in der ersten Gleichung in der linken eckigen Klammer



2 Glieder und in der rechten 1, und folglich ist $3\,(2 \cdot 1) = \underline{6}$. In der zweiten Gleichung stehen in der linken eckigen Klammer 3 Glieder und in der rechten 2, und folglich ist $3\,(3 \cdot 2) = \underline{18}$. In der dritten Gleichung ist $3\,(4 \cdot 3) = \underline{36}$.

Wir wollen auf den Beweis dieser Gesetzmäßigkeit verzichten und beschränken uns auf die Bildung und praktische Erprobung einer Gleichung solcher seltsamen Summen für einen anderen Einzelfall. Wir wünschen zum Beispiel, daß in der linken eckigen Klammer 5 Summanden sind und demgemäß in der rechten 4. Wir verdreifachen ihr Produkt: $3\,(5 \cdot 4) = \underline{60}$. Dann ist

$$[56^3 + 57^3 + 58^3 + 59^3 + 60^3] + (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) = [61^3 + 62^3 + 63^3 + 64^3] - (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3).$$

Überzeugt euch auf arithmetischem Wege von der Richtigkeit dieser Gleichung!

Übrigens kann man analoge Gesetzmäßigkeiten auch bei gleichen Summen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen und bei den Summen ihrer Quadrate feststellen. Ihr erinnert euch, welche Gleichungen wir hatten:

für die ersten Potenzen:

$$1 + \underline{2} = 3, \quad 4 + 5 + \underline{6} = 7 + 8,$$
$$9 + 10 + 11 + \underline{12} = 13 + 14 + 15;$$

die unterstrichene Zahl ist gleich dem Produkt aus der Anzahl der Summanden rechts und links vom Gleichheitszeichen;

für die zweiten Potenzen:

$$3^2 + \underline{4}^2 = 5^2,$$
$$10^2 + 11^2 + \underline{12}^2 = 13^2 + 14^2,$$
$$21^2 + 22^2 + 23^2 + \underline{24}^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2;$$

die unterstrichene Zahl (ohne den Exponenten) ist gleich dem doppelten Produkt aus der Anzahl der Summanden links und rechts vom Gleichheitszeichen.

6. Ist euch folgende Multiplikationstabelle bekannt?

1	2	3	4	5	..	..	p	..	n
2	4	6	8	10	..	..	2p	..	2n
3	6	9	12	15	..	..	3p	..	3n
4	8	12	16	20	..	..	4p	..	4n
5	10	15	20	25	..	..	..	..	..
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
p	2p	3p	4p	..	..	..	p^2	..	..
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
n	2n	3n	4n	..	..	..	..	..	n^2

Das Produkt aus einer beliebigen Zahl der ersten Zeile und einer beliebigen Zahl der äußersten linken Spalte steht im Schnittpunkt der Zeile und der Spalte, in der die Faktoren stehen. So steht zum Beispiel die Zahl 12 im Schnittpunkt der vierten Spalte mit der dritten Zeile oder der sechsten Spalte mit der zweiten Zeile.

Wenn ihr diese Tabelle aufmerksam betrachtet, findet ihr auch noch einige andere interessante Beziehungen:

a) Die Summe der Zahlen in einem beliebigen Quadrat, das die 1 enthält, ist eine Quadratzahl, zum Beispiel: $1 = 1^2$,
$1 + 2 + 2 + 4 = 3^2 = (1 + 2)^2$,
$1 + 2 + 3 + 2 + 4 + 6 + 3 + 6 + 9 = 6^2 = (1 + 2 + 3)^2$ usw.

b) Jedes der oben erwähnten Quadrate wird durch Anlegen einer im rechten Winkel gekrümmten Spalte bzw. Zeile an das vorhergehende Quadrat gebildet. Das angelegte Gebilde ist ein sogenannter Gnomon. Die Summe der Zahlen in jedem beliebigen Gnomon ist der Kubus irgendeiner Zahl: $1 = 1^3$, $2 + 4 + 2 = 2^3$, $3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 3^3$ usw.

c) Jedes der oben erwähnten Quadrate besteht aus 1, 2, 3 ... n Gnomonen. Hieraus ergibt sich die Formel, die schon aus dem Altertum bekannt ist:

$$1^3 + 2^3 \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 \ldots + n)^2.$$

7. In dieser klassischen Formel für die Summe der Kuben natürlicher Zahlen sind die Summanden aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, mit 1 beginnend. Der Mathematiker Liouville (Frankreich) stellte die um-

13

fassendere Aufgabe: Es sollen beliebige natürliche Zahlen a, b, c, d ... gesucht werden, bei denen die Summe ihrer Kuben dem Quadrat ihrer Summe gleich ist:

$a^3 + b^3 + c^3 + \ldots = (a + b + c + \ldots)^2$.

Unter den Zahlen a, b, c, d ... dürfen auch einige wiederkehren. Passende Zahlen einfach aufs Geratewohl auszuwählen, ohne sich dabei nach irgendeiner Regel zu richten, ist beinahe hoffnungslos.

Macht dennoch zwei, drei Versuche!

Liouville gelang es, ein interessantes Ergebnis zu erhalten, dessen Wesenskern sich leicht an folgenden beiden Beispielen erkennen läßt.

Beispiel 1. Wir nehmen die Zahl 6. Sie ist teilbar durch 1, 2, 3 und 6. Und wieviel Teiler hat jeder dieser Teiler? Die Zahl 1 hat einen Teiler, die Zahl 2 zwei (1 und 2), die Zahl 3 zwei (1 und 3) und die Zahl 6 vier (1, 2, 3 und 6). Hier ist die Zahlenfolge der Teiler: 1, 2, 2 und 4; sie erfüllt die uns interessierende Beziehung, das heißt, wir haben:

$1^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3 = (1 + 2 + 2 + 4)^2 = 81$.

Beispiel 2. Wir nehmen die Zahl 30. Ihre Teiler sind: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30. Die Anzahl der Teiler bei jeder Zahl ist: 1, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 8. Wir haben:

$1^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3 + 8^3$
$= (1 + 2 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4 + 8)^2$.

Das Verfahren ist einfach und geistreich. Wendet es selbständig für andere Zahlen an!

8. Beobachtungen an der natürlichen Zahlenfolge kann man endlos fortführen. Hier ist ein anderes Beispiel für eine interessante Beziehung zwischen den natürlichen Zahlen. Wir teilen die natürliche Zahlenfolge in folgende Gruppen ein: 1; 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9, 10; ... In der ersten Gruppe steht eine Zahl, in der zweiten stehen die beiden folgenden, in der dritten die drei darauffolgenden usw., in der n. Gruppe n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Wir stellen fest, daß die erste und die letzte Zahl in jeder Gruppe nach den Formeln $\frac{(n-1)\,n}{2} + 1$ und $\frac{n\,(n+1)}{2}$ festgestellt werden kann, wobei n die Nummer der Gruppe ist. Die Zahlen jeder Gruppe bilden eine arithmetische Reihe mit der Differenz $d = 1$. Wenn man die Anzahl (n) der Glieder in jeder Gruppe und auch ihr erstes (a_1) und letztes (a_n) Glied kennt, kann man die Summe der Zahlen in jeder Gruppe errechnen.

Die Summe der Glieder einer arithmetischen Reihe wird nach der Formel $S = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}$ festgestellt. Für jede Gruppe ist

$$S = \frac{\left[\frac{(n-1)\,n}{2} + 1 + \frac{n\,(n+1)}{2}\right] n}{2}$$
$$= \frac{(n^2+1)\,n}{2} = \frac{n^3+n}{2}.$$

Wenn wir die Summen der verschiedenen Gruppen mit S_1, S_2, S_3, S_4 ... bezeichnen und uns nur für die Summen der Gruppen mit ungeraden Nummern interessieren, haben wir:

$$S_1 = \frac{1^3+1}{2};\ S_3 = \frac{3^3+3}{2};\ S_5 = \frac{5^3+5}{2};\ \ldots$$
$$S_{2k-1} = \frac{(2k-1)^3 + (2k-1)}{2}.$$

Die Summe aller dieser Summen ist

$$S_1 + S_3 \ldots + S_{2k-1} = \frac{[1^3 + 3^3 + 5^3 \ldots + (2k-1)^3] + [1 + 3 + 5 \ldots + (2k-1)]}{2}$$

Für den, der an algebraischen Umwandlungen Interesse hat, ergibt sich hier eine interessante Aufgabe.

Aufgabe. Es soll bewiesen werden, daß

$$\frac{[1^3 + 3^3 \ldots + (2k-1)^3] + [1 + 3 \ldots + (2k-1)]}{2} = k^4 \text{ ist.}$$

Hinweis. Wandelt dazu die Formel für die Summe der Kuben (vgl. S. 193) in eine Formel für die Summe der Kuben ungerader Zahlen um, also in die Formel $1^3 + 3^3 + 5^3 \ldots + (2k-1)^3$.

Wir kehren zurück zur Summe $S_1 + S_3 \ldots + S_{2k-1}$. Als Ergebnis der Umwandlungen haben wir: $S_1 + S_3 + S_5 \ldots + S_{2k-1} = k^4$. Diese Formel enthüllt uns eine recht interessante Beziehung zwischen den genannten Zahlengruppen: 1; 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9, 10; ..., und zwar: Wenn man aus der Folge dieser Gruppen diejenigen mit geradzahliger Numerierung (die zweite, vierte usw.) herausstreicht und die Zahlen der übriggebliebenen Gruppen addiert, dann ist die Summe gleich der vierten Potenz der Anzahl der addierten Gruppen.

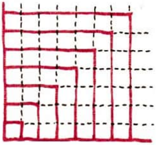
So kann man zum Beispiel sofort sagen, daß die Summe der Zahlen $1 + (4 + 5 + 6) + (11 + 12 + 13 + 14 + 15) = 3^4$, das heißt 81 ist.

9. Jeder, der sich für die betrachteten mannigfaltigen Abhängigkeiten, die zwischen den natürlichen Zahlen bestehen, interessiert, muß die einfachsten Eigenschaften ihrer Summen, besonders der Summen der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, ... $(2n-1)$ kennen: Die Summe der zwei ersten ungeraden Zahlen 1 und 3 ist gleich dem Quadrat der Zahl 2, also 2^2.

Die Summe der drei ersten ungeraden Zahlen 1, 3 und 5 ist gleich dem Quadrat der Zahl 3, also 3^2.

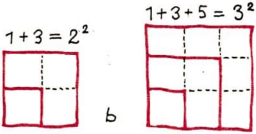
Die Summe der vier ersten ungeraden Zahlen 1, 3, 5 und 7 ist gleich dem Quadrat der Zahl 4, also 4^2 usw.

Diese Eigenschaft der Summen der ungeraden Zahlen wird höchst anschaulich, wenn man sich ein Quadrat vorstellt (Abb. 205 a), das in Gnomone eingeteilt ist. Jeder



205a

Gnomon besteht aus ungeradzahlig vielen quadratischen Feldern. Die Angliederung der Gnomone an das einzelne Feld links unten (Abb. 205 b) veranschaulicht, daß die



b

Summe aufeinanderfolgender ungerader Zahlen stets gleich dem Quadrat der Anzahl der Summanden ist:

$$\underbrace{1 + 3 + 5 \ldots + (2n-1)}_{n \text{ Summanden}} = n^2.$$

Wird nun vielleicht doch einmal diese Vermutung nicht bestätigt? Ordnen sich vielleicht doch einmal unsere Summen nicht mehr dem gefundenen Gesetz unter, etwa bei irgendeiner sehr großen Zahl von Summanden?

Bei Gesetzmäßigkeiten, die nur an Beispielen gefunden worden sind, kann das durchaus einmal eintreten.

Da die natürliche Zahlenfolge unendlich ist, ist es nicht möglich, die beobachtete Gesetzmäßigkeit an Beispielen für alle Summen ungerader Zahlen nachzuprüfen. Aber dazu besteht auch keine Notwendigkeit. Der Mathematiker hat Mittel, die Allgemeingültigkeit einer Aussage zu beweisen.

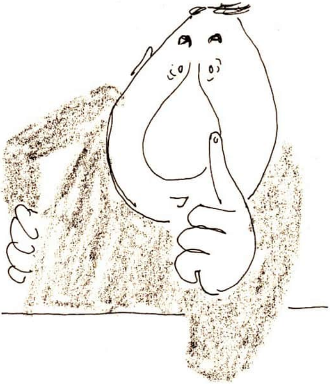
Wir überlegen so: Es sei für k Summanden die Behauptung richtig, daß ihre Summe gleich dem Quadrat ihrer Anzahl ist:

$$\underbrace{1 + 3 + 5 \ldots + (2k - 1)}_{k \text{ Summanden}} = k^2.$$

Fügen wir jetzt die nächstfolgende ungerade Zahl $2k + 1$ hinzu, so ergibt sich: $1 + 3 + 5 \ldots + (2k-1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$, das heißt, die Behauptung gilt auch für $k + 1$ Summanden.

So haben wir festgestellt, daß dann, wenn die Behauptung für k Summanden gilt, sie auch für $k + 1$ Summanden gilt. Also braucht man die Richtigkeit der Behauptung nur an einem Beispiel zu prüfen. Wir nehmen die kleinste Anzahl der Summanden: $k = 2$. Wir haben $1 + 3 = 2^2$. Die Summe zweier Summanden $(k = 2)$ ist gleich dem Quadrat der Anzahl der Summanden. Folglich gilt die Behauptung auch für drei Glieder $(k + 1 = 3)$; aber wenn sie für drei Summanden $(k = 3)$ gilt, dann gilt sie auch für vier $(k + 1 = 4)$; wenn sie für $k = 4$ gilt, gilt sie auch für $k + 1 = 5$; wenn sie für $k = 5$ gilt, dann auch für $k + 1 = 6$ usw.

Damit ist allgemein bewiesen, daß die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gleich dem Quadrat der Anzahl der Summanden, also gleich n^2 ist. Von der Richtigkeit der Formel $1 + 3 + 5 \ldots + (2n - 1) = n^2$ könnte man sich auch durch die Berechnung der Summe $1 + 3 + 5 \ldots + (2n - 1)$ nach der Summenformel für arithmetische Reihen 1. Ordnung überzeugen; aber im Grunde genommen wären dies dieselben Schlußfolgerungen, denn der Beweis der Summenformel verläuft ebenso wie der obige nach der Methode der vollständigen Induktion.



10. Nicht weniger interessant ist noch eine Eigentümlichkeit der Summe der ungeraden Zahlen. Wenn man die Folge der ungeraden Zahlen, beginnend mit 1, in Gruppen einteilt, und dabei in die erste Gruppe eine Zahl, in die zweite zwei Zahlen, in die dritte drei usw. aufnimmt, dann ist die Summe der Zahlen in der n-ten Gruppe gleich dem Kubus von n (Lehrsatz des Nikomachos).

Zeile Nr. 1: $1^3 = 1$,
,, ,, 2: $2^3 = 3 + 5$,
,, ,, 3: $3^3 = 7 + 9 + 11$,
,, ,, 4: $4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$,
,, ,, 5: $5^3 = 21 + 23 + 25 + 27 + 29$,
. . . .

Jede Zeile enthält die Summe von n Gliedern (n ist die Nummer der Zeile) einer arithmetischen Reihe mit der konstanten Differenz $d = 2$.

Wenn ihr die Richtigkeit der ausgesprochenen Behauptung für eine beliebige Größe n beweisen wollt, dann sucht zuerst einen allgemeinen Ausdruck für das erste Glied der n-ten Zeile zu finden. Wenn man mit a_n das erste Glied der Zeile bezeichnet, deren Nummer n ist, dann ist $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 7$, $a_4 = 13$ usw.

Allgemein gilt: $a_n = n^2 - n + 1$. Beweist das!

310. Eine lästige Differenz

Schreibt eine vierstellige Zahl auf, bei der nicht alle Ziffern gleich sind. Bildet aus den Ziffern der Zahl zwei neue Zahlen, und zwar M als die größtmögliche Zahl und m als die kleinstmögliche. Sucht die Differenz $d = M - m$ und führt mit ihr dasselbe durch. (Wenn die Differenz d dreistellig ist, dann setzt als vierte Ziffer eine 0 vor diese drei Ziffern.) Wenn ihr diese Berechnungen einige Male wiederholt habt, kommt ihr unbedingt zur Differenz 6174, die sich bei der Fortführung der Berechnung immer wiederholen wird.

Es soll zum Beispiel die Ausgangszahl 4818 sein.

$M_1 = 8841$; $m_1 = 1488$; $d_1 = 7353$;
$M_2 = 7533$; $m_2 = 3357$; $d_2 = 4176$;
$M_3 = 7641$; $m_3 = 1467$; $d_3 = 6174$;
$M_4 = 7641$; $m_4 = 1467$; $d_4 = 6174$ usw.

Beweist, daß diese Erscheinung bei **jeder beliebigen** vierstelligen Zahl auftritt.

J. N. Lambina (aus Rjasan) wies darauf hin, daß es zum Beweis dieser Eigenschaft genügt, sich von ihrer Richtigkeit an 30 vierstelligen Zahlen zu überzeugen.

Wie überlegte sie, und welches sind diese Zahlen?

Kann man nicht die Anzahl der zur Überprüfung nötigen Zahlen noch verringern?

311. Die symmetrische Summe (eine bisher noch nicht geknackte Nuß)

Schreibt irgendeine beliebige positive ganze Zahl mit 2, 3 oder mehr Stellen auf. Addiert dazu die Zahl mit umgekehrter Ziffernfolge. Dasselbe führt mit der erhaltenen Summe durch. Es wird sich zeigen, daß ihr, wenn ihr diese Berechnungen einige Male wiederholt habt, unbedingt eine Zahl erhaltet, die sich von links nach rechts genauso wie von rechts nach links lesen läßt.

Einige Beispiele:

$$\begin{array}{r} 38 \\ +\ 83 \\ \hline 121 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 139 \\ +\ 931 \\ \hline 1070 \\ +\ 0701 \\ \hline 1771 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 48017 \\ +\ 71084 \\ \hline 119101 \\ +\ 101911 \\ \hline 221012 \\ +\ 210122 \\ \hline 431134 \end{array}$$

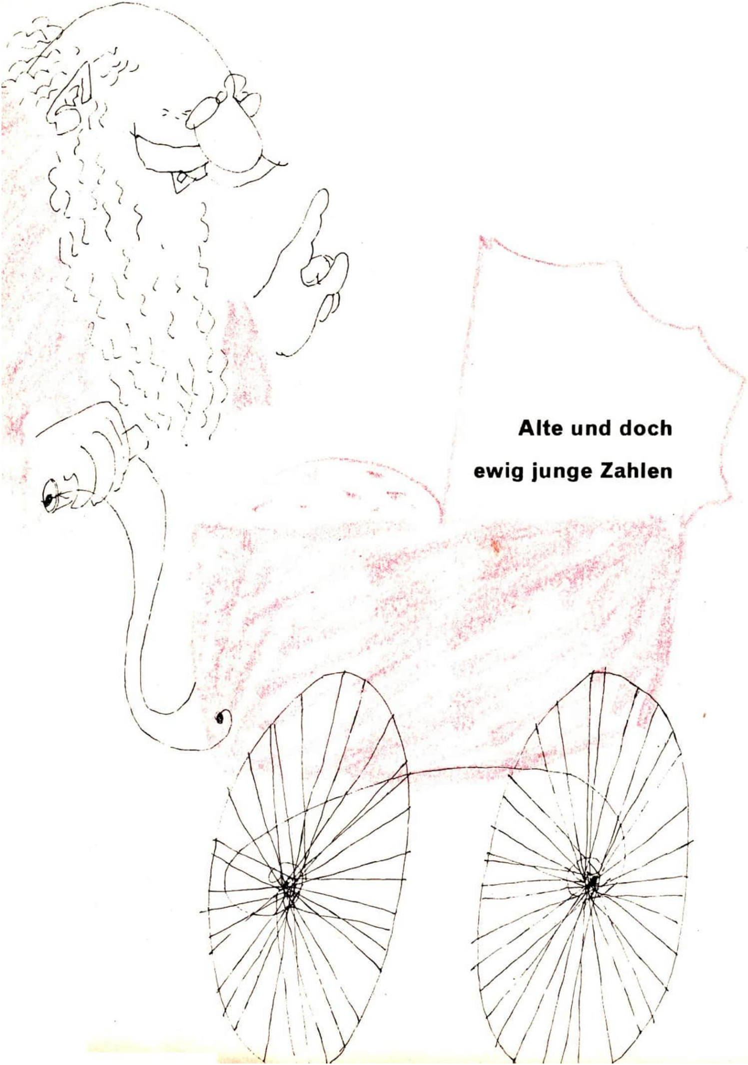
Manchmal muß man eine große Anzahl Additionen bis zu einem symmetrischen Resultat durchführen. Wenn ihr zum Beispiel mit der Zahl 89 beginnt, erhaltet ihr das erwartete Resultat nicht so bald. Erst 24 Additionen führen zu dem symmetrischen Resultat 8813200023188.

Überzeugt euch davon!

Gibt es etwa eine Zahl, die niemals zu einem symmetrischen Resultat führt?

Auf der Suche nach der Antwort stieß P. R. Mols (Riga) auf die Zahl 196. Sie erwies sich als „tückisch". Nicht einmal 75 Additionen führten zu einer symmetrischen Summe. Es war schließlich töricht, die Nachprüfung fortzusetzen; denn die 75. Summe hatte schon 36 Ziffern. Man muß durch **Überlegungen** die vermutete Gesetzmäßigkeit widerlegen oder bestätigen.

Alte und doch ewig junge Zahlen



312. Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen

Die natürliche Zahl a heißt Teiler einer natürlichen Zahl N, wenn sich als Resultat der Division von N durch a wieder eine natürliche Zahl ergibt.

Eine Sonderstellung nimmt die 1 ein. Sie ist (ohne Rest) nur durch sich selbst teilbar; folglich hat die Zahl 1 nur einen Teiler. Jede andere positive ganze Zahl hat entweder zwei Teiler (die 1 und sich selbst) oder mehr als zwei Teiler.

Nur durch 1 und durch sich selbst lassen sich zum Beispiel die positiven ganzen Zahlen 2, 3, 5, 7 teilen.

Die positive Zahl 4 hat drei Teiler: 1, 2 und 4. Die positive Zahl 6 hat vier Teiler: 1, 2, 3 und 6 usw.

Positive ganze Zahlen, die nur zwei Teiler haben, heißen „Primzahlen"; positive ganze Zahlen, die mehr als zwei Teiler haben, heißen „zusammengesetzte Zahlen".

Die kleinste Primzahl ist die Zahl 2. Sie ist die einzige gerade Primzahl. Alle übrigen Primzahlen sind ungerade Zahlen; aber selbstverständlich ist bei weitem nicht jede ungerade Zahl eine Primzahl. So sind zum Beispiel die ungeraden Zahlen 3, 5, 7, 11, 13 Primzahlen, und solche Zahlen wie 9, 15, 21 sind zusammengesetzte Zahlen; die positive Zahl 9 hat drei Teiler: 1, 3, 9, die positive Zahl 15 hat vier Teiler: 1, 3, 5, 15 usw.

Jede zusammengesetzte Zahl kann man so lange in Faktoren zerlegen, bis jeder Faktor eine Primzahl ist. Zum Beispiel: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$; $363 = 3 \cdot 11 \cdot 11$ usw.

Primzahlen sind wie primäre Elemente, aus denen sich alle Zahlen bilden lassen. Begreiflich ist daher bei den Mathematikern das Interesse an diesen Zahlen.

313. Das „Sieb des Eratosthenes"

Wie findet man nun die Primzahlen aus der Menge aller positiven ganzen Zahlen heraus? Je größer eine Zahl ist, desto schwieriger ist es zu erkennen, ob sie Teiler hat, die kleiner als sie selbst und größer als 1 sind.

Wenn man Körner aus einem Gemenge heraussortiert, verwendet man ein Sieb mit Löchern, die dem Umfang der Körner entsprechen.

Ungefähr nach diesem Verfahren sucht man auch die Primzahlen aus den zusammengesetzten Zahlen heraus.

Es wird verlangt, nehmen wir an, alle Primzahlen aus dem Bereich von 2 bis zu irgendeiner gegebenen positiven ganzen Zahl N herauszusuchen. Wir schreiben zunächst alle positiven ganzen Zahlen von 2 bis N nebeneinander: 2, 3, 4, 5, . . . N. Die erste Primzahl ist 2. Wir unterstreichen sie, und alle Zahlen, die durch zwei teilbar sind (die geraden), streichen wir durch. Die erste der übriggebliebenen Zahlen ist 3. Wir unterstreichen sie ebenfalls als Primzahl, und alle durch drei teilbaren Zahlen streichen wir durch. Die erste der übriggebliebenen Zahlen ist jetzt 5. Die Zahl 4 ist bereits durchgestrichen. Wir unterstreichen 5 als Primzahl und streichen alle durch fünf teilbaren Zahlen durch usw.

Alle unterstrichenen Zahlen bilden die Tabelle der Primzahlen im Bereich von 2 bis N:

	2,	3,	~~4~~,	5,	~~6~~,	7,	~~8~~,	~~9~~,	~~10~~,
11,	~~12~~,	13,	~~14~~,	~~15~~,	~~16~~,	17,	~~18~~,	19,	~~20~~,
~~21~~,	~~22~~,	23,	~~24~~,	~~25~~,	~~26~~,	~~27~~,	~~28~~,	29,	~~30~~,
31,	~~32~~,	~~33~~,	~~34~~,	~~35~~,	~~36~~,	37,	~~38~~,	~~39~~,	~~40~~,

. . . .

Dieses Verfahren des allmählichen „Durchsiebens" der Zahlen ist vor mehr als 2000 Jahren von dem griechischen Mathematiker Eratosthenes (276—194 v. u. Z.) erdacht worden. Eratosthenes strich die durch 2, 3, 5 usw. teilbaren Zahlen nicht durch, sondern

zeichnete über ihnen kleine Löcher. Es ergab sich so etwas wie ein Sieb, durch dessen Löcher die zusammengesetzten Zahlen gewissermaßen durchgesiebt worden waren, während die Primzahlen zurückblieben. Daher heißt dieses Verfahren zur Aufstellung der Tabelle der Primzahlen bis heute das „Sieb des Eratosthenes".
Dieses Verfahren ist, wie ihr seht, sehr mühsam, aber völlig zuverlässig.

Die Tabelle der Primzahlen ist gegenwärtig bis auf 10000000 gebracht, das heißt, es gibt eine Tabelle aller Primzahlen von 1 bis 10000000. Die große Arbeit der Aufstellung, sorgfältigen Nachprüfung und Herausgabe dieser Tabelle (1914 veröffentlicht) bewältigte der amerikanische Mathematiker D. Lemmer. Zwanzig Jahre vor Lemmer stellte ein Autodidakt auf dem Gebiete der Mathematik, der Priester I. M. Perwuschin, eine Tabelle der Primzahlen gleichen Umfangs (bis 10000000) auf und übergab sie als Geschenk der Nationalen Akademie der Wissenschaften. Die Tabellen Perwuschins werden im Archiv der Akademie der Wissenschaften der UdSSR im Manuskript aufbewahrt und sind bis in unsere Tage noch nicht veröffentlicht worden.
Eine noch gewaltigere Rechenarbeit vollbrachte der Professor der Prager Universität J. F. Kulik. Er führte die Tabelle der Primzahlen bis zu 100000000 fort (6 Bände der Primzahlen und der Teiler der zusammengesetzten Zahlen). Seit 1867 sind die Tabellen Kuliks im Besitz der Bibliothek der Wiener Akademie der Wissenschaften. Ein Band ist jedoch spurlos verschwunden, und zwar derjenige, der die Zahlen im Bereich von der 13. bis zur 23. Million enthielt. Wer stellt wohl alle verlorenen Primzahlen wieder her, und wer prüft die Unmenge an Zahlen nach, die in den erhaltenen Bänden der Tabellen Kuliks stehen?
Der Mathematiklehrer W. A. Golubew (Kuwschinowo) arbeitete für die Aufstellung der Tabellen der Primzahlen ein System von „Schablonen" aus, das die Rechenarbeit vereinfacht und die Möglichkeit von Fehlern fast ausschließt. Mit Hilfe seiner „Schablonen" ermittelte W. A. Golubew 1939 die Primfaktoren aller Zahlen der 11. Million und 1941 der 12. Million. Seine Tabellen überbrachte er traditionsgemäß der Akademie der Wissenschaften der UdSSR als Geschenk.
Die Menge der ermittelten Primzahlen nimmt ständig zu. Bekannt sind einzelne sehr große Zahlen auch außerhalb der Grenzen der vorhandenen Tabellen.
So bewies zum Beispiel I. M. Perwuschin 1883, daß die Zahl $2^{61} - 1$
$= 2\,305\,843\,009\,213\,693\,951$ eine Primzahl ist. Lange Zeit war die Zahl $2^{127} - 1 =$
$170\,141\,183\,460\,469\,231\,731\,687\,303\,715\,884\,105\,727$ die größte bekannte Primzahl. Mit Hilfe moderner schnellarbeitender Rechenmaschinen wurde in Los Angeles die riesige Primzahl $2^{2281} - 1$ ermittelt.
Die Mathematiker möchten sich nicht damit abfinden, daß Primzahlen mit Hilfe primitiver Verfahren ermittelt werden. Sie möchten eine allgemeine Formel aufstellen, nach der die Primzahlen für alle möglichen positiven ganzen Zahlen berechnet werden können. Aber leider erwies sich eine solche Formel als Illusion. Sie hat bisher noch keiner ersonnen.

314. Ein neues „Sieb“ für Primzahlen

In den zwei Jahrtausenden, die uns von Eratosthenes trennen, entwickelte sich die Technik der Ermittlung von Primzahlen vom primitiven „Sieb“ bis zur Anwendung von elektronischen Rechenautomaten.
Aber für den „Hausgebrauch“ ist es ganz gut, wenn man das einfache „Sieb“ zur Hand hat. Allmählich tauchten einige Vervollkommnungen auch in dieser „handwerklichen Technik“ der Primzahlenermittlung auf. Der Student der Mathematik S. P. Sundaram (Indien)[1] erdachte zum Beispiel ein solches „Sieb“:

4	7	10	13	16	19	...
7	12	17	22	27	32	...
10	17	24	31	38	45	...
13	22	31	40	49	58	...
16	27	38	49	60	71	...
...	...	...	...	...	...	...

Dieses „Sieb“ ist eine Tabelle, die aus einer unendlichen Anzahl unendlicher arithmetischer Folgen besteht, wobei jedes Glied der ersten Folge 4, 7, 10, 13, 16, 19, ... den Beginn einer neuen Folge darstellt. Alle Differenzen der Folgen sind ungerade Zahlen, beginnend mit 3: $d_1 = 3$, $d_2 = 5$, $d_3 = 7$, $d_4 = 9$ usw.
Wenn irgendeine beliebige Zahl N in dieser Tabelle vorkommt, dann ist $2N + 1$ eine zusammengesetzte Zahl. Wenn es diese Zahl N in der Tabelle nicht gibt, dann ist $2N + 1$ eine Primzahl.
Beispiele.
1. In der Tabelle gibt es nicht die Zahl $N = 3$; folglich ist $2N + 1 = 7$ eine Primzahl.
2. In der Tabelle gibt es nicht die Zahl $N = 5$; folglich ist $2N + 1 = 11$ eine Primzahl.
3. Die Zahl $N = 6$ gibt es auch nicht in der Tabelle; folglich ist $2N + 1 = 13$ eine Primzahl.
4. Die Zahl $N = 7$ gibt es in der Tabelle; folglich ist $2N + 1 = 15$ eine zusammengesetzte Zahl usw.

Wenn man N in der Formel $2N + 1$ nacheinander durch alle Zahlen ersetzt, die nicht in der Tabelle stehen (die gewissermaßen durch das „Sieb“ hindurchgefallen sind), kann man alle Primzahlen außer der Zahl 2 erhalten.
Wie beweist man, daß $2N + 1$ eine zusammengesetzte Zahl ist, wenn N „im Sieb geblieben“ ist, und eine Primzahl, wenn N „durchgesiebt“ ist?

315. Die 50 ersten Primzahlen

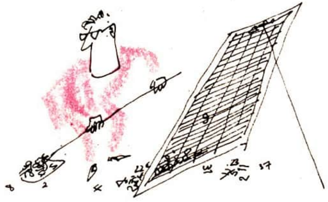
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229

316. Ein anderes Verfahren zur Ermittlung von Primzahlen

Wir nehmen die ersten n Primzahlen und teilen sie beliebig in zwei Gruppen. In jeder Gruppe bilden wir das Produkt aller enthaltenen Zahlen. Wenn die Summe oder die Differenz dieser Produkte eine Zahl N ergibt, die kleiner ist als das Quadrat der $(n + 1)$-ten Primzahl, dann ist N eine Primzahl.
Wir nehmen zum Beispiel 1 und die vier ersten Primzahlen, also 1, 2, 3, 5 und 7. Die fünfte Primzahl ist 11; $11^2 = 121$. Folglich können wir mit dem geschilderten Verfahren

[1] Zwei andere neue „Siebe“ teilte mir der Ingenieur für Fernmeldetechnik M. Soukup (ČSSR) mit

Primzahlen bilden, die kleiner als 121 sind. Wir teilen die ausgewählten Zahlen in zwei Gruppen, zum Beispiel 2, 3, 5, 7 und 1 und bilden $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 = 209$.
Da die Differenz 209 größer als 121 ist, können wir nicht dafür garantieren, daß sie eine Primzahl ist. In der Tat ist sie in der Tabelle (vgl. S. 202) nicht enthalten.
Wir teilen die Zahlen anders: 1, 3, 5, 7 und 2 und erhalten $N_1 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 = 103$; $N_2 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 2 = 107$. Beide Zahlen sind kleiner als 121. Folglich müssen beide Primzahlen sein. Wenn sie zusammengesetzt wären, dann zerfielen sie in Primfaktoren (vgl. S. 200); aber aus der Art der Bildung dieser Zahlen folgt, daß keine von ihnen durch 2, 3, 5 oder 7 teilbar ist. Die Zahlen N_1 und N_2 können aber auch nicht durch eine größere Primzahl teilbar sein.
Nehmen wir an, daß N_1 (oder N_2) durch 11 teilbar wäre. Da jede Zahl kleiner als 121 ist, wäre der Quotient kleiner als 11 und könnte folglich keine anderen Primfaktoren enthalten als 2, 3, 5 oder 7. Wäre aber in solchem Falle N_1 (oder N_2) durch irgendeinen dieser Faktoren teilbar, dann widerspräche das dem Verfahren zur Bildung der Zahlen N_1 oder N_2.
Wenn wir als erste Gruppe 1, 5 und 7 nehmen und als zweite 2 und 3, dann können wir zwei andere Primzahlen bilden:
$1 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 3 = 29$ und $1 \cdot 5 \cdot 7 + 2 \cdot 3 = 41$.
Einige andere mögliche Kombinationen:
$1 \cdot 3 \cdot 7 - 2 \cdot 5 = 11$; $1 \cdot 3 \cdot 7 + 2 \cdot 5 = 31$;
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 - 7 = 23$; $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 + 7 = 37$ usw.
Es ist auch klar, daß dann, wenn man einen beliebigen Faktor der ersten oder zweiten Gruppe potenziert, die Summe oder Differenz der Produkte ebenfalls eine Primzahl ergibt, wenn sie nur kleiner ist als das Quadrat der $(n+1)$-ten Primzahl.
Zum Beispiel:
$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2^3 = 97$; $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 2^3 = 113$;
$1 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 3^2 = 17$; $1 \cdot 5 \cdot 7 + 2 \cdot 3^2 = 53$;
$1 \cdot 3 \cdot 5^2 - 2^2 \cdot 7 = 47$; $1 \cdot 3 \cdot 5^2 + 2^2 \cdot 7 = 103$ usw.
Wenn man Kombinationen ähnlicher Art nur aus den drei Zahlen 1, 2 und 3 bildet, kann man alle Primzahlen, die kleiner als 25 sind, feststellen. Ihr könnt ohne große Schwierigkeiten dieses Verfahren zur Ermittlung von Primzahlen begründen.



317. Wieviel Primzahlen gibt es?

Die Tabelle der Primzahlen hat keine größte Primzahl. Die Anzahl der Primzahlen ist unendlich. Das hat schon Euklid bewiesen.[1] Aber die Primzahlen verteilen sich auf die natürliche Zahlenfolge sehr ungleich. Die ersten zehn natürlichen Zahlen enthalten 4 Primzahlen, das sind 40%. Die ersten hundert natürlichen Zahlen enthalten 25 Primzahlen, das sind 25%. Die erste Million der natürlichen Zahlen enthält bereits nur noch 8% Primzahlen usw.
Wie kann man durch Berechnung feststellen, und wäre es auch nur annähernd, wieviel Primzahlen in der Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer beliebigen Zahl N enthalten sind?
Diese Frage hat sich als derart schwierig erwiesen, daß es bisher noch keine exakte Formel gibt. Es wurde nur eine Näherungsformel gefunden, die es erlaubt, um so genauer die Anzahl n der Primzahlen zu finden, die auf die N ersten natürlichen Zahlen entfallen („Dichte" der Verteilung der Primzahlen), je größer N ist:[2]

$$n \approx \frac{0{,}43429\ldots}{\lg N} N .$$

[1] Der Beweis des Euklid ist in den Lehrbüchern über die Zahlentheorie enthalten und auch in den Büchern: Berman, G. N.: Die Zahl und die Wissenschaft von ihr. Gostechisdat, 1954; Rademacher, G. und Toeplitz, O.: Zahlen und Figuren. ONTI, 1936
[2] Wegen der Einzelheiten verweise ich die Leser auf die in der Fußnote 1 angeführten Bücher

B. Die Zahlen des Fibonacci

318. Eine öffentliche Prüfung

Anfang des 13. Jahrhunderts lebte in der Stadt Pisa in Italien der große Meister der Zahlentheorie und höchst geschickte Rechner Leonardo mit dem Beinamen „von Pisa". Man nannte ihn auch Fibonacci, was „Sohn des Bonacci" bedeutet. Im Jahre 1202 gab er ein Buch in lateinischer Sprache unter dem Titel „Das Buch vom Abacus"[1] heraus (Liber abaci compositus a Leonardo filio Bonacci Pisano), das in sich die Gesamtheit des Wissens der damaligen Zeit auf dem Gebiete der Arithmetik und Algebra vereinigte. Es war eins der ersten Bücher in Europa, das den Gebrauch des Dezimalsystems lehrte.

Das Buch des Leonardo von Pisa erlebte eine weite Verbreitung und genoß auf dem Gebiete der Zahlentheorie mehr als zwei Jahrhunderte lang höchste Autorität in der Wissenschaft.

Nach den Sitten jener Zeit nahm Fibonacci an Mathematik-Turnieren teil (öffentlichen Wettkämpfen um die beste und schnellste Lösung schwieriger Aufgaben; etwa in der Art der in der Sowjetunion üblichen Mathematik-Olympiaden).

Leonardos Fertigkeit in der Lösung von Rechenaufgaben versetzte alle in Staunen.

Sein hohes Ansehen veranlaßte eines Tages im Jahre 1225 Friedrich II., den Kaiser des Römischen Reiches deutscher Nation, in Begleitung einer Gruppe von Mathematikern, die Leonardo öffentlich prüfen wollten, nach Pisa zu kommen. Eine der Aufgaben, die auf dem Turnier gestellt wurden, hatte folgenden Inhalt:

Es sollte eine Quadratzahl gesucht werden, die sowohl nach ihrer Vergrößerung wie nach ihrer Verringerung um 5 eine Quadratzahl ergab.

[1] abax (griech.), abacus (lat.) war eine meist besonders schmuckvolle Tischplatte zum Auflegen der Rechensteine

Fibonacci fand nach einigen Überlegungen eine solche Zahl. Sie war ein Bruch: $\frac{1681}{144}$ oder $\left(\frac{41}{12}\right)^2$. In der Tat ist $\frac{1681}{144} - 5 = \frac{961}{144}$ und $\frac{1681}{144} + 5 = \frac{2401}{144}$, anders ausgedrückt $\left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2$ und $\left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2$.

Von welchen Überlegungen sich Fibonacci bei dem Turnier leiten ließ, haben wir niemals erfahren, aber die Aufgabe löste er glänzend. Vielleicht löste er die Aufgabe wirklich so, wie darüber in dem Buch von G. N. Popow „Historische Aufgaben" (ONTI, 1932) berichtet wird, das heißt folgendermaßen: Nach der Bedingung ist $x^2 + 5 = u^2$ und $x^2 - 5 = v^2$. Hieraus folgt $u^2 - v^2 = 10$, da aber $10 = \frac{80 \cdot 18}{12^2}$, folgt $(u + v)(u - v) = \frac{80 \cdot 18}{12^2}$. Wenn wir $u + v = \frac{80}{12}$ und $u - v = \frac{18}{12}$ setzen, erhalten wir $u = \frac{49}{12}$, $v = \frac{31}{12}$ und schließlich $x = \frac{41}{12}$.

Welches Vorstellungsvermögen von der Welt der Zahlen muß man besitzen, um daraufzukommen, daß man 10 durch den Bruch $\frac{80 \cdot 18}{12^2}$ ersetzen muß? Ein solcher

Scharfsinn erscheint unglaublich, um so mehr unter den Bedingungen eines Turniers. Vielleicht ist die angeführte Lösung nur das Ergebnis einer späteren Bearbeitung des Problems?
Sucht selbst nach Möglichkeiten für die Lösung und überlegt euch, für welche anderen natürlichen Zahlen an Stelle der 5 man eine analoge Aufgabe stellen und lösen kann.

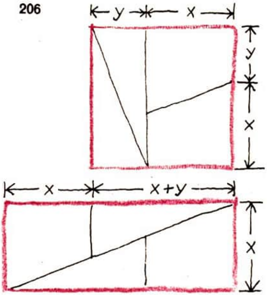
319. Die Folge des Fibonacci

Fibonacci bildete folgende Folge natürlicher Zahlen, die später von großem Nutzen in der Wissenschaft war: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 ... Das Gesetz zur Bildung dieser Folge ist sehr einfach: Die ersten beiden Glieder sind Einsen, und dann ergibt sich jedes folgende Glied als Summe der beiden ihm unmittelbar vorausgehenden Glieder. Zum Beispiel ist $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 2$, $5 = 2 + 3$, $8 = 3 + 5$ usw.
Jedes beliebige Paar x, y benachbarter Zahlen der Folge des Fibonacci erfüllt eine der Gleichungen $x^2 - xy - y^2 = 1$ oder $x^2 - xy - y^2 = -1$, wobei die größere Zahl x und die kleinere y ist.
Zum Beispiel sind
$\begin{cases} x = 2, \\ y = 1 \end{cases}$ oder $\begin{cases} x = 5, \\ y = 3 \end{cases}$ oder $\begin{cases} x = 13, \\ y = 8 \end{cases}$ usw.
Lösungen der ersten Gleichung und
$\begin{cases} x = 3, \\ y = 2 \end{cases}$ oder $\begin{cases} x = 8, \\ y = 5 \end{cases}$ oder $\begin{cases} x = 21, \\ y = 13 \end{cases}$ usw.
Lösungen der zweiten Gleichung.
Der Beweis dieser Eigenschaft wird für den allgemeinen Fall auf S. 208 unter Ziffer 3 geführt.
Die Folge des Fibonacci ist nicht nur den Mathematikern, sondern auch den Naturwissenschaftlern bekannt.
Wenn Blätter einzeln am Zweig sitzen, dann sind sie immer ringsherum um den Zweig angeordnet, aber nicht in einer Kreislinie, sondern in schraubenförmigen Linien, das heißt, jedes Blatt sitzt höher als das vorhergehende und seitwärts von ihm. Dabei ist für jede Pflanzenart der Winkel zwischen zwei benachbarten Blättern charakteristisch, der, wie die Botaniker behaupten, mehr oder weniger genau in allen Teilen des Zweiges eingehalten wird. Diesen Winkel drückt man gewöhnlich durch einen Bruch aus, der angibt, welchen Teil des Kreises er bildet. So bildet bei der Linde und der Ulme der Winkel zwischen zwei Blättern $\frac{1}{2}$ des Kreises, bei der Buche $\frac{1}{3}$, bei der Eiche und der Kirsche $\frac{2}{5}$, bei der Pappel und der Birke $\frac{3}{8}$, bei der Weide $\frac{5}{13}$ usw. Der gleiche Winkel tritt bei der jeweiligen Pflanzenart auch in der Stellung der Zweige, der Knospen, der Blättchen im Innern der Knospe und der Blüten auf.
Am meisten sind bei den Pflanzen folgende Winkel (nach Kreissektoren) verbreitet: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}, \ldots$ Die Folge der Zähler und die der Nenner sind hierbei die Zahlen des Fibonacci, so daß sich jeder der Brüche (beginnend mit dem dritten) aus den beiden vorhergehenden durch die Addition der Zähler und der Nenner ergibt:
$\frac{2}{5} = \frac{1+1}{2+3}, \frac{3}{8} = \frac{1+2}{3+5}$ usw.

320. Ein Paradoxon

Mit den Zahlen des Fibonacci ist indirekt ein interessantes geometrisches Paradoxon verbunden.
Wenn man eine beliebige ebene Figur in einige Teile zerlegt und dann eine neue Figur bildet, indem man die Teile aneinanderlegt (ohne sie jedoch aufeinanderzulegen), dann ist ganz klar, daß sich die neue Figur der Form nach von der Ausgangsfigur unterscheiden kann, aber ihre Fläche die ursprüngliche bleiben muß. Sie nimmt um nichts zu und nimmt um nichts ab.
In Abb. 206 wird die Umwandlung eines Quadrats in ein Rechteck gezeigt. Das Quadrat ist in zwei kongruente Dreiecke und zwei kongruente Trapeze geteilt, deren Seitenlängen mit den Buchstaben x und y bezeichnet sind. Aus diesen Teilen ist ein Rechteck gebildet worden. Wie muß man die Seite des Quadrats in Abschnitte x und y

206



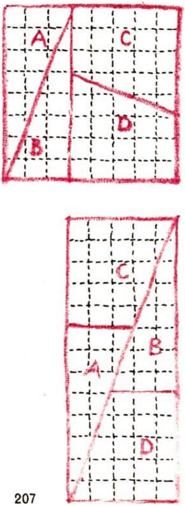
teilen, damit eine solche Umwandlung eines Quadrats in ein Rechteck tatsächlich möglich ist? Einer meiner jungen Freunde wollte das praktisch durchführen und stieß dabei auf eine überraschende Erscheinung.

„Ich dachte", schrieb er mir, „diese Umwandlung praktisch durchzuführen. Ich wollte die Abbildung aus dem Buch nicht kopieren, sondern zeichnete auf Millimeterpapier ein Quadrat mit 64 Feldern und dachte über die Frage nach, in welche Abschnitte x und y man eine Seite des Quadrats teilen muß. Zuerst meinte ich, daß das gleichgültig sei, und setzte $x = 6$ und $y = 2$. Ich teilte das Quadrat in zwei kongruente Dreiecke und zwei kongruente Trapeze, begann, das Rechteck zusammenzusetzen, wie in der Abb. 206 angegeben ist, und ... es gelang nicht! Es ergab sich kein vollkommenes Rechteck. Es ergab sich aber auch bei anderen Werten für x und y, zum Beispiel bei $x = 4^1/_2$ und $y = 3^1/_2$ kein vollkommenes Rechteck.

Nur bei $x = 5$ und $y = 3$ konnte ich ein Rechteck aus den Teilen des Quadrats bilden. Aber hier wurde ich durch eine neue Schwierigkeit in Erstaunen gesetzt: Die Fläche des Rechtecks bestand aus 65 Feldern, das heißt, sie war um ein Feld g r ö ß e r als die Fläche des Ausgangsquadrats (Abb. 207).

Tatsächlich entspricht die Länge des Rechtecks (vgl. Abb. 206) der von $x + x + y = 2x + y = 2 \cdot 5 + 3 = 13$ Feldern und die Breite des Rechtecks der von $x = 5$ Feldern (vgl. Abb. 207). Folglich enthält die Fläche des Rechtecks $13 \cdot 5 = 65$ Felder.

Aber das ist noch nicht alles. Nach demselben Muster (vgl. Abb. 206) zerlegte ich auch ein anderes Quadrat mit der Seitenlänge von 13 Feldern. Wenn ich $x = 8$ und $y = 5$ nahm, ließ sich aus den Teilen des Quadrats ein Rechteck bilden, aber dieses Mal mit einer Fläche, die k l e i n e r war als die Fläche des Quadrats, und zwar auch genau um ein Feld.



207

Urteilen Sie selbst: Die Fläche des Quadrats enthält $13^2 = 169$ Felder und die Fläche des Rechtecks $(2x + y)\,x = (2 \cdot 8 + 5) \cdot 8 = 168$ Felder!

Zwei andere Beispiele:

1. Ich nehme ein Quadrat von $21 \cdot 21 = 441$ Feldern, teile eine Seite in die Abschnitte $x = 13$ und $y = 8$ und zerlege es. Ich lege die Teile wieder zusammen, und es ergibt

sich ein Rechteck. Die Berechnung der Fläche ergibt $(2x + y)x = (2 \cdot 13 + 8) \cdot 13 = 442$ Felder! Wieder ein Feld mehr.

2. Ich nehme ein Quadrat von $34 \cdot 34 = 1156$ Feldern, teile eine Seite in die Abschnitte $x = 21$ und $y = 13$ und zerlege es. Wenn ich die Teile wieder zusammenlege, entsteht ein Rechteck mit der Fläche: $(2x + y)x = (2 \cdot 21 + 13) \cdot 21 = 1155$ Felder. Hier fehlt ein Feld!

Was soll das bedeuten? Woher kommt dieses Ergebnis?''

Was würdet ihr meinem jungen Freund antworten? Überdenkt genau dieses Paradoxon, bevor ihr die Lösung durchlest. Welche Rolle spielen dabei die Zahlen des Fibonacci?

321. Eigenschaften der Zahlen des Fibonacci

Es sind viele interessante Beziehungen zwischen den Zahlen des Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 ... entdeckt worden.

1. Das Gesetz der Bildung dieser Folge führt zu folgender Beziehung zwischen beliebigen drei nebeneinanderstehenden Gliedern S_{n-2}, S_{n-1} und S_n:

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}.$$

Diese Formel gibt die Möglichkeit, aus den ersten beiden Gliedern der Folge ihr drittes Glied zu bestimmen, aus dem zweiten und dritten ihr viertes, aus dem dritten und vierten ihr fünftes usw.

2. Es wäre interessant, ob man ein beliebiges Glied S_n der Folge ermitteln könnte, wenn man nur die Nummer n seines Platzes in der Folge kennt. Das erweist sich als durchaus möglich; aber hierbei stoßen wir auf eine der merkwürdigen Überraschungen, die in der Mathematik nicht selten sind.

Jedes beliebige Glied der Folge des Fibonacci ist eine ganze Zahl. Die Nummer seines Platzes ist auch eine ganze Zahl. Man könnte erwarten, daß sich die Abhängigkeit jedes beliebigen Gliedes S_n der Folge von der Nummer n des von ihm eingenommenen Platzes mit Hilfe von Berechnungen nur mit ganzen Zahlen ergibt. Aber so ist es nicht. Nicht nur die ganzen Zahlen, sondern sogar die Menge der rationalen Zahlen reichen nicht aus, um die uns interessierende Formel zu bilden.

Aus der schwierigen Lage helfen uns zwei irrationale Zahlen:

$$a_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ und } a_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Ihr erinnert euch, daß gerade diese beiden Zahlen die Differenz R zwischen den Flächen eines Rechtecks und eines Quadrats (vgl. die Lösung zur Aufgabe 320 auf S. 318) zu Null gemacht haben. Das ist doch ein überraschendes Zusammentreffen!

So könnt ihr, wenn n die Nummer des Platzes ist, jedes beliebige Glied S_n der Folge des Fibonacci nach folgender Formel ermitteln:

$$S_n = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}}. \quad (*)$$

Aus $n = 1$ folgt $S_1 = \dfrac{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = 1$,

aus $n = 2$ folgt $S_2 = \dfrac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = 1$.

Da diese Formel sich für die zwei ersten Glieder der Folge bestätigt und jedes folgende Glied der Folge des Fibonacci sich als Summe der beiden vorangehenden ergibt, besteht weiter keine Notwendigkeit, die Richtigkeit der Formel für die übrigen Fälle nachzuprüfen, wenn man ihre Richtigkeit für jedes beliebige n zeigen kann. Wir schreiben sie als Ausdruck für zwei benachbarte Glieder n:

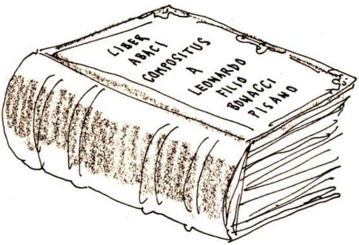
$$S_{n-2} = \frac{a_1^{n-2} - a_2^{n-2}}{\sqrt{5}} \text{ und } S_{n-1} = \frac{a_1^{n-1} - a_2^{n-1}}{\sqrt{5}}.$$

Also gilt:

$$S_{n-2} + S_{n-1} = \frac{a_1^{n-2} - a_2^{n-2}}{\sqrt{5}} + \frac{a_1^{n-1} - a_2^{n-1}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{a_1^{n-2}(a_1 + 1) - a_2^{n-2}(a_2 + 1)}{\sqrt{5}}$$

Da ihr wißt, was a_1 und a_2 darstellen, könnt ihr leicht durch Rechnung nachprüfen, daß $a_1 + 1 = a_1^2$ und $a_2 + 1 = a_2^2$ ist.



Wenn wir zur Summe $S_{n-2} + S_{n-1}$ zurückkehren, erhalten wir:

$$S_{n-2} + S_{n-1} = \frac{a_1^{n-2}\, a_1^2 - a_2^{n-2}\, a_2^2}{\sqrt{5}} = \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}}$$

$= S_n$, was zu beweisen war.

3. Wir wissen, daß sich das Glied S_n der Folge des Fibonacci nach der Formel bestimmt:

$$S_n = \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}}, \text{ wobei } a_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ und } a_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

ist. Es ist daher leicht zu beweisen, daß jedes beliebige Paar x, y benachbarter Zahlen der Folge des Fibonacci einer der Gleichungen $x^2 - xy - y^2 = \pm 1$ entspricht, wobei, wenn $y = S_n$ ist, dann $x = S_{n+1}$ ist.

Aus $y = \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}}$ und $x = \frac{a_1^{n+1} - a_2^{n+1}}{\sqrt{5}}$ erhalten wir:

$$x^2 - xy - y^2 = \frac{(a_1^{n+1} - a_2^{n+1})^2}{5} - \frac{(a_1^{n+1} - a_2^{n+1})(a_1^n - a_2^n)}{5} - \frac{(a_1^n - a_2^n)^2}{5}$$

$$= \frac{1}{5}(a_1^{2n+2} - 2a_1^{n+1}a_2^{n+1} + a_2^{2n+2} - a_1^{2n+1} + a_1^n a_2^{n+1} + a_1^{n+1} a_2^n - a_2^{2n+1} - a_1^{2n} + 2a_1^n a_2^n - a_2^{2n})$$

$$= \frac{1}{5}[a_1^{2n}(a_1^2 - a_1 - 1) + a_2^{2n}(a_2^2 - a_2 - 1) + a_1^n a_2^n(-2a_1 a_2 + a_2 + a_1 + 2)] = a_1^n a_2^n$$

$$= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n = (-1)^n = \pm 1.$$

4. Ein sehr spaßiges Aussehen hat die Formel für die Summe der ersten n Glieder der Folge des Fibonacci: $S_1 + S_2 \cdots + S_n = S_{n+2} - 1$. Die Summe der ersten n Glieder der Folge des Fibonacci ist um 1 kleiner als das $(n + 2)$-te Glied der Folge.

Beweis. Nach dem Gesetz für die Bildung der Glieder der Folge haben wir:

$$\begin{aligned} S_{n+2} &= S_{n+1} + S_n, \\ S_{n+1} &= S_n + S_{n-1}, \\ S_n &= S_{n-1} + S_{n-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_4 &= S_3 + S_2, \\ S_3 &= S_2 + S_1. \end{aligned}$$

Wenn wir diese Gleichungen addieren und die gleichartigen Glieder gegeneinander aufheben, erhalten wir:

$S_{n+2} = (S_n + S_{n-1} \ldots + S_1) + S_2$; folglich ist wegen $S_2 = 1$

$$S_1 + S_2 \ldots + S_n = S_{n+2} - 1 \text{ oder}$$

$$S_1 + S_2 \ldots + S_n = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}} - 1.$$

5. Die Quadratsumme der ersten n Zahlen aus der Folge des Fibonacci läßt sich durch das Produkt aus der n-ten und der $(n + 1)$-ten Zahl dieser Folge ausdrücken:

$$S_1^2 + S_2^2 \ldots + S_n^2 = S_n S_{n+1}. \qquad (**)$$

Zum Beispiel: $1^2 + 1^2 = 1 \cdot 2$,
$1^2 + 1^2 + 2^2 = 2 \cdot 3$,
$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 3 \cdot 5$ usw.

Für den Beweis wenden wir die Methode der vollständigen Induktion an. Wie die Probe gezeigt hat, gilt die Formel (**) für $k = 2$ Glieder. Es sei die Formel (**) für k Glieder richtig:

$$S_1^2 + S_2^2 \ldots + S_k^2 = S_k S_{k+1}.$$

Wir addieren zu beiden Seiten der Gleichung S_{k+1}^2:

$S_1^2 + S_2^2 \cdots + S_k^2 + S_{k+1}^2 = S_k S_{k+1} + S_{k+1}^2 = S_{k+1}(S_k + S_{k+1}) = S_{k+1} S_{k+2}$. Die Formel ist also auch für $k + 1$ Summanden bestätigt. Damit ist bewiesen, daß sie für alle natürlichen Zahlen $k \geq 2$ gilt.

Beweist unter Verwendung der Formel (*) oder der Methode der vollständigen Induktion selbständig folgende weitere Beziehungen:

6. Das Quadrat eines jeden Glieds der Folge des Fibonacci, vermindert um das Produkt aus dem vorausgehenden und dem folgenden Glied, ergibt abwechselnd $+1$ und -1.

Zum Beispiel: $2^2 - (1 \cdot 3) = +1$,
$3^2 - (2 \cdot 5) = -1$,
$5^2 - (3 \cdot 8) = +1$,
. . . .

allgemein ausgedrückt:

$$S_n^2 - S_{n-1} S_{n+1} = (-1)^{n+1}.$$

7. $S_1 + S_3 \ldots + S_{2n-1} = S_{2n}$.

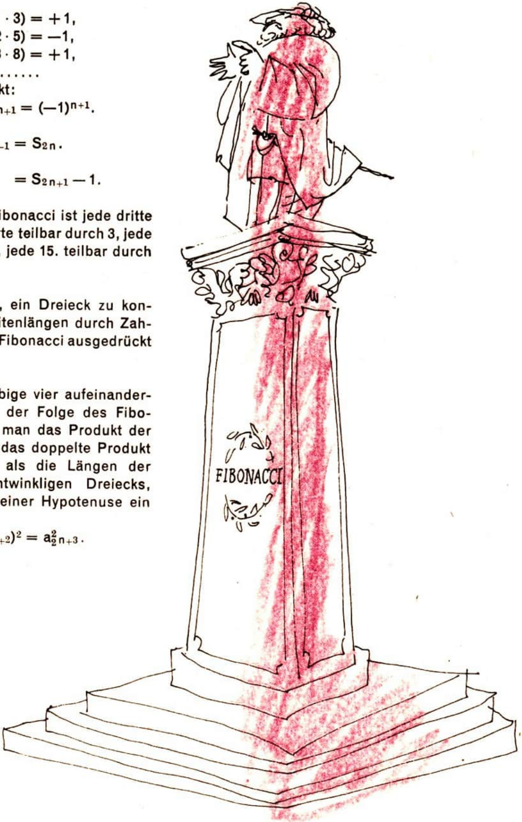
8. $S_2 + S_4 \ldots + S_{2n} = S_{2n+1} - 1$.

9. In der Folge des Fibonacci ist jede dritte Zahl gerade, jede vierte teilbar durch 3, jede fünfte teilbar durch 5, jede 15. teilbar durch 10.

10. Es ist unmöglich, ein Dreieck zu konstruieren, dessen Seitenlängen durch Zahlen aus der Folge des Fibonacci ausgedrückt werden können.

11. Nimmt man beliebige vier aufeinanderfolgende Zahlen aus der Folge des Fibonacci und betrachtet man das Produkt der äußeren Glieder und das doppelte Produkt der inneren Glieder als die Längen der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, dann ist die Länge seiner Hypotenuse ein Glied der Folge:

$(a_n a_{n+3})^2 + (2 a_{n+1} a_{n+2})^2 = a^2_{2n+3}$.



C. Figurierte Zahlen

322. Eigenschaften figurierter Zahlen

1. Bereits lange vor unserer Zeitrechnung bildeten Gelehrte Folgen natürlicher Zahlen, deren Gliedern sie die eine oder andere geometrische Deutung beilegten. So wurden zum Beispiel im 5. und 4. Jahrhundert v. u. Z. solche Folgen sogenannter „figurierter Zahlen" entwickelt. Betrachten wir zuerst eine Folge, in der die Differenz zwischen je zwei benachbarten Gliedern ein und dieselbe natürliche Zahl ist (arithmetische Folge), zum Beispiel

1, 2, 3, 4, 5 ... (Differenz $d = 1$),
1, 3, 5, 7, 9 ... („ $d = 2$),
1, 4, 7, 10, 13 ... („ $d = 3$);

in allgemeiner Form:

$$1,\ 1 + d,\ 1 + 2d,\ 1 + 3d,\ 1 + 4d \ldots$$

Um das n-te Glied der Folge (wir nennen es a_n) zu erhalten, muß man zum ersten Glied der Folge das Produkt aus der Differenz der Folge und der Zahl hinzufügen, die um 1 kleiner ist als n: $a_n = 1 + d\,(n-1)$. Die Glieder einer solchen Folge heißen „lineare figurierte Zahlen" oder „figurierte Zahlen erster Ordnung".

2. Aus den Folgen mit linearen figurierten Zahlen bilden wir Summen: die erste „Summe" aus dem ersten Glied der Folge linearer figurierter Zahlen, die zweite Summe, indem wir die beiden ersten Glieder dieser Folge addieren, die dritte Summe, indem wir die drei ersten Glieder addieren usw., die n-te Summe, indem wir die n ersten Glieder addieren.

Aus der ersten Folge linearer figurierter Zahlen (mit $d = 1$) 1, 2, 3, 4, 5 ... ergibt sich so die Folge: $S_1 = 1$, $S_2 = 1 + 2 = 3$, $S_3 = 1 + 2 + 3 = 6$, $S_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, $S_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ ... oder 1, 3, 6, 10, 15 ... Man hat diese Zahlen „dreieckige" genannt.

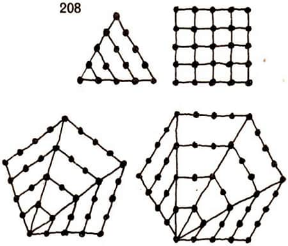
Die zweite Folge linearer figurierter Zahlen (mit $d = 2$) 1, 3, 5, 7, 9 ... führt zur Folge 1, 4, 9, 16, 25 ... Diese Zahlen nannte man „quadratische".

Aus der dritten Folge der linearen figurierten Zahlen (mit $d = 3$) 1, 4, 7, 10, 13 ... kann man die Folge der „fünfeckigen" Zahlen bilden: 1, 5, 12, 22, 35 ... Analog kann man „sechseckige", „siebeneckige" usw. Zahlen bilden.

Alle diese „vieleckigen" Zahlen heißen „ebene" figurierte Zahlen oder „figurierte Zahlen zweiter Ordnung".

3. Die der Geometrie entnommenen Namen, die diese Zahlen erhalten haben, erklären sich dadurch, daß man sie anschaulich darstellen kann. Wir konstruieren gleichseitige Dreiecke, Quadrate, regelmäßige Fünfecke, Sechsecke usw. mit Seiten, die wir gleich 1 setzen. In jeder Figur verlängern wir, von einer der Ecken ausgehend, alle Seiten um das Zwei-, Drei-, Vier- ... fache, das heißt, wir konstruieren Vielecke, die, wie die Mathematiker sagen, den gegebenen perspektivisch ähnlich sind (Abb. 208). Wir

208



setzen in alle Ecken der Figuren und auf ihre Seiten in Abständen gleich 1 markante Punkte. Wenn man die Punkte zusammenzählt, die jedes Dreieck enthält, kommt man zur Folge der dreieckigen Zahlen 1, 3, 6,

10, 15 . . . Die Addition der Punkte in jedem Quadrat ergibt die Folge der quadratischen Zahlen 1, 4, 9, 16, 25 . . . Analoge Additionen der Punkte in jedem Fünfeck, Sechseck usw. führen demgemäß zu den Folgen der fünfeckigen, sechseckigen usw. Zahlen. (Das erste Glied S_1 der jeweiligen Folge ist gleich 1.)

4. Wir geben eine Zusammenstellung ebener figurierter Zahlen:

d	Figur	Zahlen						Allgemeines Glied S_n
		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5		
1	Dreieck	1	3	6	10	15	...	$\frac{n(n+1)}{2}$
2	Quadrat	1	4	9	16	25	...	n^2
3	Fünfeck	1	5	12	22	35	...	$\frac{n(3n-1)}{2}$
4	Sechseck	1	6	15	28	45	...	$n(2n-1)$
.	...	.	.	.	.	.	...	...
d		1	$2+d$	$3+3d$	$4+6d$	$5+10d$		$\frac{n[dn-(d-2)]}{2}$

Das allgemeine Glied S_n jeder Folge ebener figurierter Zahlen ist, wie sich aus der Berechnung ergibt, die Summe von n Gliedern der entsprechenden Folge der linearen figurierten Zahlen $1, 1+d, 1+2d, 1+3d \ldots 1+d(n-1)$, wobei $d = 1, 2, 3, 4 \ldots$ ist. Mit anderen Worten ist S_n die Summe von n Gliedern einer arithmetischen Folge, bei der $a_1 = 1$, $a_n = 1 + d(n-1)$ und die Differenz $d = 1, 2, 3 \ldots$ ist.

Ihr erinnert euch an die Formel für die Summe der Glieder einer arithmetischen Folge: $S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$. Nach dieser Formel haben wir:

$$S_n = \frac{[1+1+d(n-1)]n}{2} = \frac{n[dn-(d-2)]}{2}.$$

Hiernach erhalten wir bei $d = 1$ die Formel für S_n der ersten Zeile der Tabelle; bei $d = 2$ erhalten wir die Formel für S_n der zweiten Zeile der Tabelle usw.

5. Zwischen den natürlichen Zahlen und den ebenen figurierten Zahlen und zwischen den ebenen figurierten Zahlen selbst gibt es viele interessante Beziehungen.

Pierre Fermat (1601—1665), ein Jurist, der im öffentlichen Leben der Stadt Toulouse (Frankreich) stand, beschäftigte sich in seinen Mußestunden mit Mathematik; er fand zum Beispiel, daß

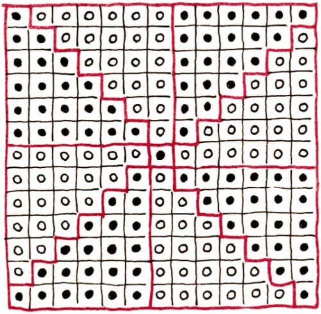
a) jede natürliche Zahl eine dreieckige oder die Summe zweier oder dreier dreieckigen Zahlen ist;

b) jede natürliche Zahl entweder eine quadratische oder die Summe von zwei, drei oder vier quadratischen Zahlen ist; jede natürliche Zahl entweder eine fünfeckige oder die Summe von zwei, drei, vier oder fünf fünfeckigen Zahlen ist;

c) überhaupt jede natürliche Zahl in der Form einer Summe von nicht mehr als k k-eckigen Zahlen dargestellt werden kann. Für einzelne spezielle Fälle bewies diesen Lehrsatz der Petersburger Mathematiker Euler, und den allgemeinen Beweis erbrachte 1815 der französische Mathematiker Cauchy.

Zur Übung: Nehmt irgendeine natürliche Zahl und zerlegt sie in die Summe dreieckiger, quadratischer oder fünfeckiger Zahlen. Man kann einen Wettbewerb veranstalten, wer das am schnellsten fertigbringt.

6. Der Mathematiker Diophant (Griechenland, 3. Jahrhundert v. u. Z.) fand eine einfache Beziehung zwischen dreieckigen und quadratischen Zahlen. Ist T eine dreieckige Zahl und bildet man $8T + 1 = K$, dann ist K stets eine quadratische Zahl. Man kann sich diese Formel des Diophant etwa am Beispiel der dreieckigen Zahl 21 vorstellen.



209

In der Abb. 209 sind 169 Punkte dargestellt, die in einem Quadrat angeordnet sind. Sie bilden die quadratische Zahl K. Ein Punkt liegt genau in der Mitte des Quadrats, und die übrigen 168 sind zu 8 dreieckigen Zahlen T in Gestalt von acht „rechtwinkligen Dreiecken" mit gebrochenen Hypotenusen gruppiert.

Es ergibt sich: $8T + 1 = K$.

7. Als selbständige Übung beweist algebraisch:

a) die Richtigkeit der Formel des Diophant,

b) daß keine dreieckige Zahl auf die Ziffern 2, 4, 7 und 9 enden kann,

c) daß jede sechseckige Zahl einer dreieckigen mit ungerader Platznummer gleich ist.

8. Für die linearen figurierten Zahlen ist folgende Formel bekannt:
$(1 + 2 + 3 \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 \ldots + n^3$
(vgl. S. 193).

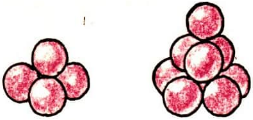
Jacobi fand eine andere interessante Beziehung zwischen diesen Zahlen:
$2(1 + 2 + 3 \ldots + n)^4 = (1^5 + 2^5 \ldots + n^5) + (1^7 + 2^7 \ldots + n^7)$. Eine analoge Beziehung wurde für dreieckige Zahlen entdeckt:

$$3\left[1 + 3 + 6 + 10 \ldots + \frac{n(n+1)}{2}\right]^3$$
$$= \left[1^3 + 3^3 \ldots + \frac{[n(n+1)]^3}{2^3}\right]$$
$$+ 2\left[1^4 + 3^4 \ldots + \frac{[n(n+1)]^4}{2^4}\right].$$

Zum Beispiel: $3(1 + 3 + 6)^3 = 1^3 + 3^3 + 6^3 + 2(1^4 + 3^4 + 6^4) = 3000$,
$3(1 + 3 + 6 + 10)^3 = 1^3 + 3^3 + 6^3 + 10^3 + 2(1^4 + 3^4 + 6^4 + 10^4) = 24000$.

9. Wie bei der Bildung ebener figurierter Zahlen bilden wir Summen aus den ebenen figurierten Zahlen $V_1 = S_1$, $V_2 = S_1 + S_2$, $V_3 = S_1 + S_2 + S_3$, $V_4 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$. Dadurch erhalten wir „räumliche figurierte Zahlen" oder „figurierte Zahlen dritter Ordnung": $V_1, V_2, V_3 \ldots$ So führt die Folge der dreieckigen Zahlen 1, 3, 6, 10, 15 ... zur Folge figurierter Zahlen dritter Ordnung: 1, 4, 10, 20, 35 ... Diese Zahlen heißen auch „pyramidale", weil zu ihrer geometrischen Darstellung Pyramiden aus Kugeln mit einheitlichem Durchmesser aufeinander gelegt werden.

Wir legen unter eine Kugel drei Kugeln und erhalten eine „Pyramide" aus vier Kugeln als Darstellung der Zahl 4. Legen wir darunter sechs weitere Kugeln, erhalten wir eine Pyramide aus zehn Kugeln als Darstellung der Zahl 10 (Abb. 210) usw.



210

10. Wir geben eine Zusammenstellung figurierter Zahlen dritter Ordnung:

d	Zahlen						Allgemeines Glied V_n
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5		
1	1	4	10	20	35	...	$\frac{1}{6} n (n+1)(n+2)$
2	1	5	14	30	55	...	$\frac{1}{6} n (n+1)(2n+1)$
3	1	6	18	40	75	...	$\frac{1}{2} n^2 (n+1)$
4	1	7	22	50	95	...	$\frac{1}{6} n (n+1)(4n-1)$
.	.	.	.	.	.	...	...
d	1	$3+d$	$6+4d$	$10+10d$	$15+20d$		$\frac{1}{6} n (n+1)[dn-(d-3)]$

Die Formel für das allgemeine Glied V_n für räumliche figurierte Zahlen aufzustellen ist verhältnismäßig schwierig. Das erfordert Kenntnisse der Kombinatorik. Diejenigen Leser, die sie nicht haben, können die weitere Beschreibung der Ableitung der Formel für V_n übergehen.

Wir führen die Bezeichnungen ein:

$V_2 - V_1 = b_1$,
  wobei $b_1 = 3 + d - 1 = 2 + d$;
$V_3 - V_2 = b_2$,
  wobei $b_2 = 6 + 4d - 3 - d = 3 + 3d$;
$V_4 - V_3 = b_3$,
  wobei $b_3 = 10 + 10d - 6 - 4d = 4 + 6d$;
$V_5 - V_4 = b_4$,
  wobei $b_4 = 15 + 20d - 10 - 10d$
  $= 5 + 10d$;
$V_6 - V_5 = b_5$
...
$V_2 = V_1 + b_1$,
$V_3 = V_2 + b_2$,
$V_4 = V_3 + b_3$,
$V_5 = V_4 + b_4$,
$V_6 = V_5 + b_5$
...

Weiter:
$b_2 - b_1 = r_1$,
  wobei $r_1 = 3 + 3d - 2 - d = 1 + 2d$;
$b_3 - b_2 = r_2$,
  wobei $r_2 = 4 + 6d - 3 - 3d = 1 + 3d$;
$b_4 - b_3 = r_3$,
  wobei $r_3 = 5 + 10d - 4 - 6d = 1 + 4d$;
$b_5 - b_4 = r_4$
...
$b_2 = b_1 + r_1$,
$b_3 = b_2 + r_2$,
$b_4 = b_3 + r_3$,
$b_5 = b_4 + r_4$
...

Wir bemerken jetzt, daß
$r_2 - r_1 = d$,
$r_3 - r_2 = d$,
$r_4 - r_3 = d$ usw.;
hieraus folgt:
$r_2 = r_1 + d$,
$r_3 = r_2 + d = r_1 + 2d$,
$r_4 = r_3 + d = r_1 + 3d$ usw.

Diese Beziehungen geben die Möglichkeit, die Zahlen $V_1, V_2, V_3 \ldots V_n$ durch V_1, b_1, r_1 und d auszudrücken:

$V_2 = V_1 + b_1,$
$V_3 = V_2 + b_2 = V_1 + b_1 + b_1 + r_1$
$= V_1 + 2\,b_1 + r_1.$
Wir stellen fest, daß die Koeffizienten bei b_1 und r_1 durch die Formeln für Kombinationen aus zwei Varianten ausgedrückt werden können: $2 = C_2^1$, $1 = C_2^2$. Dann ist $V_3 = V_1 + C_2^1\,b_1 + C_2^2\,r_1$. Weiter ist:
$V_4 = V_3 + b_3 = V_1 + 2\,b_1 + r_1 + b_2 + r_2$
$= V_1 + 2\,b_1 + r_1 + b_1 + r_1 + r_1 + d$
$= V_1 + 3\,b_1 + 3\,r_1 + d$. Da $3 = C_3^1 = C_3^2$ und $1 = C_3^3$ sind, ist $V_4 = V_1 + C_3^1\,b_1 + C_3^2\,r_1 + C_3^3\,d$,
$V_5 = V_4 + b_4 = V_1 + 3 b_1 + 3 r_1 + d + b_3 + r_3$
$= V_1 + 3\,b_1 + 3\,r_1 + d + b_2 + r_2 + r_1 + 2\,d$
$= V_1 + 3\,b_1 + 3\,r_1 + d + b_1 + r_1 + r_1 + d + r_1 + 2\,d$
$= V_1 + 4\,b_1 + 6\,r_1 + 4\,d$. Da $4 = C_4^1 = C_4^3$ und $6 = C_4^2$ ist, ist $V_5 = V_1 + C_4^1\,b_1 + C_4^2\,r_1 + C_4^3\,d$. Für V_6 erhalten wir:
$V_6 = V_1 + C_5^1\,b_1 + C_5^2\,r_1 + C_5^3\,d$. Für V_n ergibt sich:
$V_n = V_1 + C_{n-1}^1\,b_1 + C_{n-1}^2\,r_1 + C_{n-1}^3\,d.$
Wenn wir hier die Ausdrücke für b_1, r_1 einsetzen und die Formeln der Kombinationen auflösen, erhalten wir:

$$V_n = 1 + (n-1)(2+d) + \frac{(n-1)(n-2)}{2}(1+2d) + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3}\,d\,.$$

Nach der Umgestaltung ist

$$V_n = \frac{1}{6}\,n\,(n+1)\,[d\,n - (d-3)].$$

Bei $d = 1$ erhalten wir

$$V_n = \frac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(n+2)\,.$$

Bei $d = 2$ ergibt sich

$V_n = \frac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(2\,n+1)$ usw. (vgl. die erste und die zweite Zeile der Tabelle auf S. 213).

11. Ein Vorschlag für selbständige Übungen (nur für solche Leser, die in der Kombinatorik bewandert sind):
Auf analogem Wege, wie sich die figurierten Zahlen dritter Ordnung ergaben, bildet figurierte Zahlen vierter Ordnung und sucht die Formel für die allgemeinen Glieder.

323. Pythagoreische Zahlen

Manchmal entsteht die Notwendigkeit, ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, bei dem die Längen beider Katheten und der Hypotenuse durch natürliche Zahlen ausgedrückt werden können. Natürliche Zahlen, die dazu geeignet sind, nennt man auch „pythagoreische", weil sie die von Pythagoras gefundene Beziehung zwischen den Katheten x und y und der Hypotenuse z erfüllen müssen: $x^2 + y^2 = z^2$.
Wenn man die Längen der Katheten x und y vorgibt, kann man die Hypotenuse z nach der Formel $z = +\sqrt{x^2 + y^2}$ berechnen; jedoch ist es schwierig, aufs Geratewohl solche natürliche Zahlen für x und y auszuwählen, daß z auch eine natürliche Zahl ist.
Bei $x = 3$ und $y = 4$ erhalten wir zum Beispiel $z = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, wohlbekannt als „ägyptisches" Dreieck (3, 4, 5); aber bei $x = 2$ und $y = 6$ läßt sich die Hypotenuse $z = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40}$ nicht durch eine natürliche Zahl ausdrücken.
Nichtsdestoweniger gibt es eine unzählige Menge pythagoreischer Zahlen. Jede beliebige komplexe Zahl $a + b\,i$ mit ganzen von Null verschiedenen Werten für a und b ist eine Zahl, die zu pythagoreischen Zahlen führt, vorausgesetzt $a^2 \neq b^2$.
Ich erinnere daran, daß mit dem Buchstaben i der Ausdruck $\sqrt{-1}$ bezeichnet wird, wobei $i^2 = -1$ ist. Eine komplexe Zahl wird nach der Formel für das Quadrat von Summen ins Quadrat erhoben.
Zum Beispiel:
a) $(3 + 2\,i)^2 = 9 + 12\,i - 4 = 5 + 12\,i$,
b) $(2 + 5\,i)^2 = 4 + 20\,i - 25 = -21 + 20\,i$.
Das Quadrat einer komplexen Zahl $a + b\,i$ ist wieder eine komplexe Zahl von der Form $x + y\,i$. Die Zahlen $|x|$, $|y|$ und $a^2 + b^2$ bilden immer pythagoreische Zahlen.
So haben wir für das Beispiel a): $|x| = 5$, $|y| = 12$, $a^2 + b^2 = 3^2 + 2^2 = 13$, wobei $5^2 + 12^2 = 13^2$ ist; für das Beispiel b) haben wir: $|x| = 21$, $|y| = 20$, $a^2 + b^2 = 2^2 + 5^2 = 29$, wobei $21^2 + 20^2 = 29^2$ ist.
Wir wollen, nehmen wir an, pythagoreische Zahlen aus den Zahlen 1 und 4 ableiten.

Wir bilden die komplexe Zahl $1 + 4\,i$ (oder auch: $4 + i$). Wir erheben sie ins Quadrat: $(1 + 4\,i)^2 = -15 + 8\,i$. Jetzt haben wir: $15^2 + 8^2 = 17^2$; $(17 = 1^2 + 4^2)$. Ein einfaches, leicht einprägsames Verfahren!

Wenn wir diese Berechnungen mit Buchstaben ausführen, ergeben sich die wohlbekannten Formeln für die Ermittlung der pythagoreischen Zahlen x, y, z: $(a + b\,i)^2 = (a^2 - b^2) + 2\,a\,b\,i$. Hieraus folgt: $x = |\,a^2 - b^2\,|$, $y = 2\,|\,a\,b\,|$, $z = a^2 + b^2$, wobei a und b willkürliche ganze Zahlen sind.

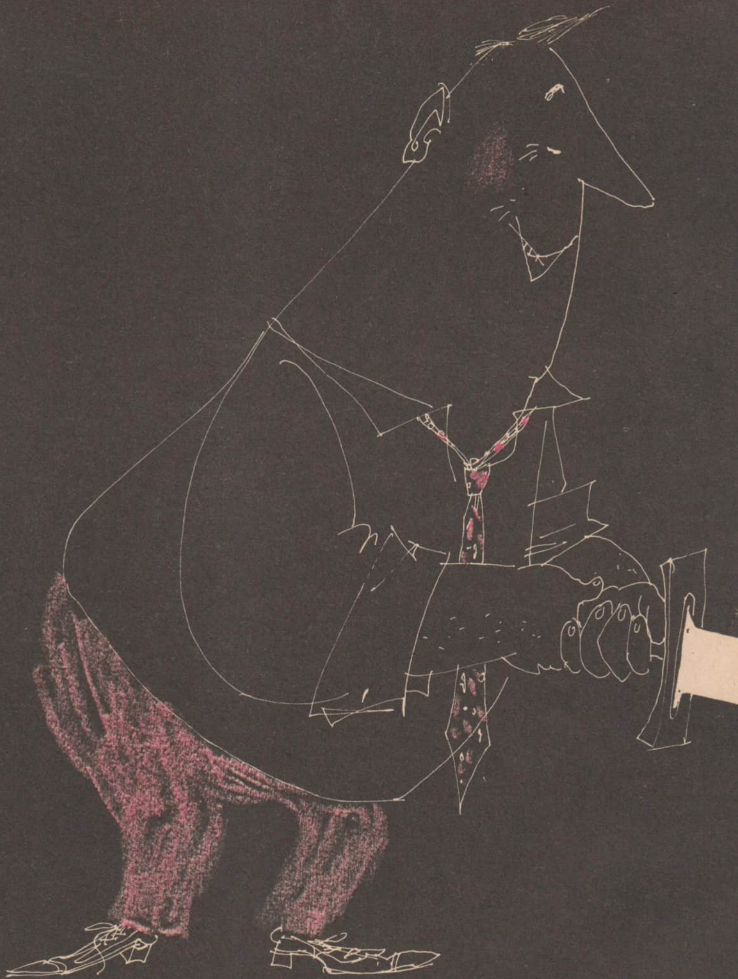
Von Interesse ist die ergänzende Bemerkung, daß der Kubus einer beliebigen komplexen Zahl auf analogem Wege zur Lösung der Gleichung $x^2 + y^2 = z^3$ führt.

Es soll zum Beispiel sein: $a + b\,i = 1 + 2\,i$. Wir erheben in die 3. Potenz: $(1 + 2\,i)^3 = 1 + 3 \cdot 2\,i + 3 \cdot 4\,i^2 + 8\,i^3 = 1 + 6\,i - 12 - 8\,i$ (weil $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$ ist); $(1 + 2\,i)^3 = -11 - 2\,i$. Hieraus haben wir: $|\,x\,| = 11$, $|\,y\,| = 2$, $z = 1^2 + 2^2 = 5$. In der Tat ist $11^2 + 2^2 = 5^3$.

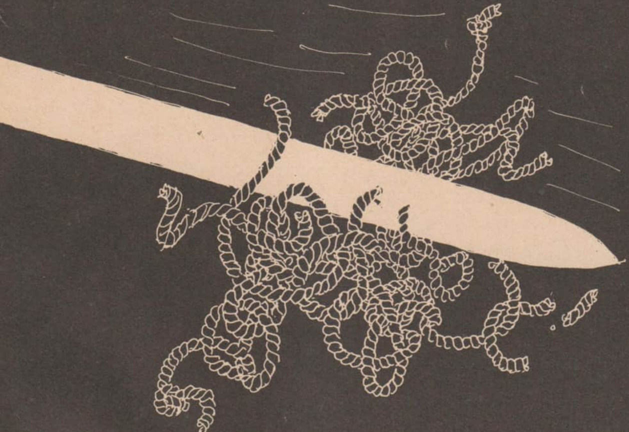
Noch ein Beispiel: $(5 + 3\,i)^3 = 125 + 3 \cdot 25 \cdot 3i + 3 \cdot 5 \cdot 9\,i^2 + 27\,i^3 = -10 + 198\,i$. Wir haben: $10^2 + 198^2 = 34^3$.

Auf diese Weise findet ihr leicht eine beliebige Anzahl Lösungen mit natürlichen Zahlen für die Gleichung $x^2 + y^2 = z^n$ (für beliebiges natürliches n).

Sucht zum Beispiel drei natürliche Zahlen x, y und z, die die Gleichung $x^2 + y^2 = z^4$ erfüllen!



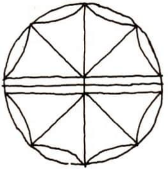
Lösungen



Unterhaltsame Aufgaben

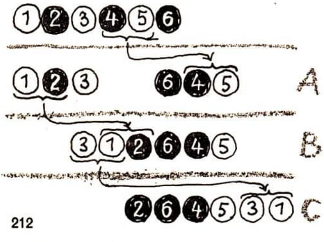
1. Man muß die Aufmerksamkeit auf den Rauch richten, der aus der Esse der Lokomotive kommt. Würde der Zug stehen, dann würde der Rauch dorthin ziehen, wohin der Wind weht. Würde der Zug hingegen bei Windstille vorwärts fahren, würde der Rauch nach rückwärts ziehen. Wie man in Abb. 1 (vgl. S. 8) sehen kann, steigt der Rauch aus dem fahrenden Zug senkrecht nach oben. Folglich hat der Zug dieselbe Geschwindigkeit wie der Wind, das heißt 7 m in der Sekunde oder etwa 25 km in der Stunde.

2. Die Lösung kann man in Abb. 211 sehen.



211

3. Wir numerieren die Damesteine von links nach rechts, wie aus Abb. 212 ersichtlich ist. Wenn der freie Platz rechts bleibt, dann



212

verlegen wir die Steine Nr. 4 und 5 nach rechts und setzen sie an das Ende der Reihe, so daß der Stein Nr. 4 neben dem Stein Nr. 6 liegt (vgl. Umstellung A in Abb. 212). Auf den freigewordenen Platz legen wir die Steine Nr. 1 und 2 (Umstellung B). Jetzt verschieben wir die Steine Nr. 3 und 1 nach rechts neben den Stein Nr. 5 (Umstellung C).
Führt die Lösung in umgekehrter Reihenfolge aus. Kehrt von der letzten Anordnung der Steine, ebenfalls in 3 Zügen, zur Anfangsstellung zurück.
Das ist jetzt nicht schwer!

4.

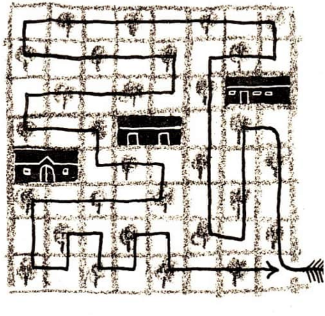
Häufchen	Anfangsbestand	1. Zug	2. Zug	3. Zug
1.	11	$11 - 7 = 4$	4	$4 + 4 = 8$
2.	7	$7 + 7 = 14$	$14 - 6 = 8$	8
3.	6	6	$6 + 6 = 12$	$12 - 4 = 8$

5. 35 Dreiecke. Und jetzt zählt aus, wieviel Vierecke in der Figur in Abb. 4 enthalten sind (vgl. S. 9).

6. Man gibt 4 Mädchen je einen Apfel und dem 5. Mädchen den übrigen Apfel zusammen mit dem Korb.

7. 4 Katzen.

8. Einen der möglichen Wege kann man an dem Pfeil in Abb. 213 erkennen.



213

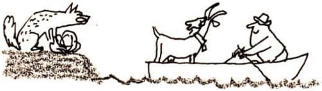
9. In der Anfangsstellung der Bleistifte ist 1 cm von der Länge des gelben Bleistifts mit Farbe bestrichen. Bei der Bewegung des blauen Bleistifts nach unten wird der zweite Zentimeter seiner Länge bestrichen, und bei der folgenden Aufwärtsbewegung bestreicht der zweite Zentimeter des blauen Bleistifts den zweiten Zentimeter des gelben. Auf diese Weise bestreicht jede Ab- und Aufwärtsbewegung 1 cm der Länge des gelben Bleistifts. 10 Auf- und Abwärtsbewegungen bestreichen 10 cm, und zusammen mit dem Zentimeter in der Anfangsstellung werden 11 cm von der Länge des gelben (aber auch des blauen) Bleistifts mit Farbe bestrichen.

*

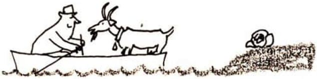
Als Leonid Michailowitsch seine Stiefel besah, bemerkte er, daß sie von unten bis oben mit Schlamm beschmutzt waren, und zwar an den Stellen, an denen sich die Stiefel beim Gehen berührten. ,,Wie komisch'', dachte Leonid Michailowitsch, ,,ich bin gar nicht durch tiefen Schlamm gegangen und habe mich bis zu den Knien beschmutzt.''
Jetzt wird uns klar, wie dieser seltsame Vorgang zustande kam.

10. Zuerst setzten die Jungen über den Fluß. Der eine blieb am Ufer, und der andere trieb das Boot zu den Wanderern und stieg aus. In das Boot setzte sich nun ein Erwachsener und fuhr nach dem anderen Ufer hinüber. Darauf trieb der Junge, der am anderen Ufer geblieben war, das Boot zurück zu den Wanderern, nahm seinen Kameraden auf, brachte ihn zum anderen Ufer und fuhr erneut zurück und stieg aus. Nun betrat der zweite Wanderer das Boot und setzte über und so fort.
Auf diese Weise wurde mit zwei Fahrten hin und her über den Fluß jeweils ein Erwachsener übergesetzt. Das war so viele Male nötig, wie erwachsene Personen da waren.

11. Ein Wolf frißt keinen Krautkopf, also muß man die Überfahrt mit der Ziege beginnen, weil der Wolf und der Krautkopf ohne den Menschen auf dem Ufer zurückgelassen werden können.



Nachdem der Mann die Ziege zum andern Ufer gebracht hat, kehrt er zurück und nimmt den Krautkopf in den Kahn, fährt ihn zum

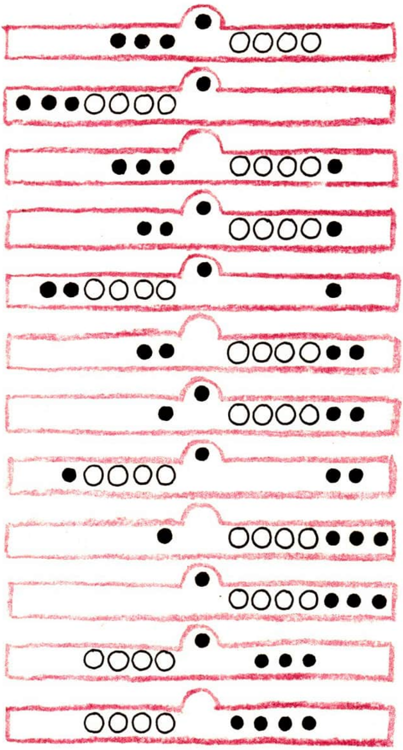


anderen Ufer, wo er ihn niederlegt, jedoch die Ziege wieder in den Kahn nimmt und sie zum ersten Ufer zurückbringt.
Hier läßt er die Ziege zurück und setzt den

Wolf über. Den Krautkopf läßt er zusammen mit dem Wolf auf dem zweiten Ufer.
Er selbst kehrt wegen der Ziege zurück und setzt sie über. So bringt er glücklich die Überfahrt zuwege.

12. Abb. 214 zeigt, welche Verschiebungen nötig sind.

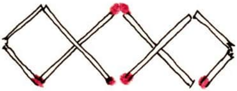
214



13. Der Meister öffnet die 3 Glieder eines Kettenteils (3 Arbeitsgänge) und verbindet mit ihnen die 4 übrigen Teile (noch einmal 3, insgesamt 6 Arbeitsgänge).

14.

15. Die Lösung zeigt Abb. 215.



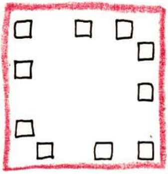
215

16. 1. Lösung:

2. Lösung:

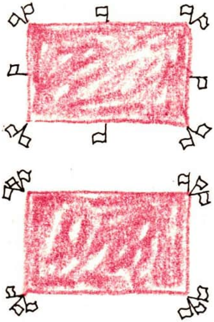
17. Wenn man die Aufgabe nicht aufmerksam genug durchdenkt, überlegt man folgendermaßen: 36 Rohlinge, das sind 36 Einzelteile; da die Späne von je 6 Rohlingen einen weiteren Rohling ergeben, können aus den Spänen von 36 Rohlingen 6 neue Rohlinge hergestellt werden, und das sind noch einmal 6 Einzelteile, insgesamt also $36 + 6 = 42$ Einzelteile. Man vergißt aber dabei, daß die Späne, die man von den letzten 6 Rohlingen erhält, noch einmal einen Rohling ergeben und damit noch ein Einzelteil. Auf diese Weise ergeben sich insgesamt nicht 42, sondern 43 Einzelteile.

18. Aus Abb. 216 kann man die Anordnung der Sessel ersehen, die der Aufgabenstellung entspricht.



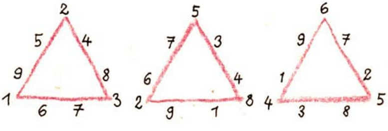
216

19. Die Verteilung der Fähnchen zeigt Abb. 217.

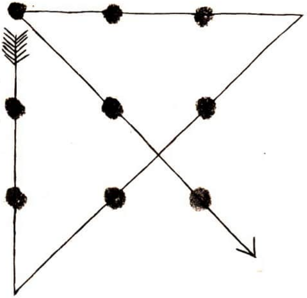


217

20. Mögliche Varianten der Zahlenanordnung werden in Abb. 218 gezeigt. Die Summe der Zahlen an jeder Seite des 1. Dreiecks ist 17 und an jeder Seite des 2. und 3. Dreiecks 20.



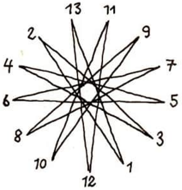
218



219

21. Eine der möglichen Lösungen wird in Abb. 219 gezeigt.

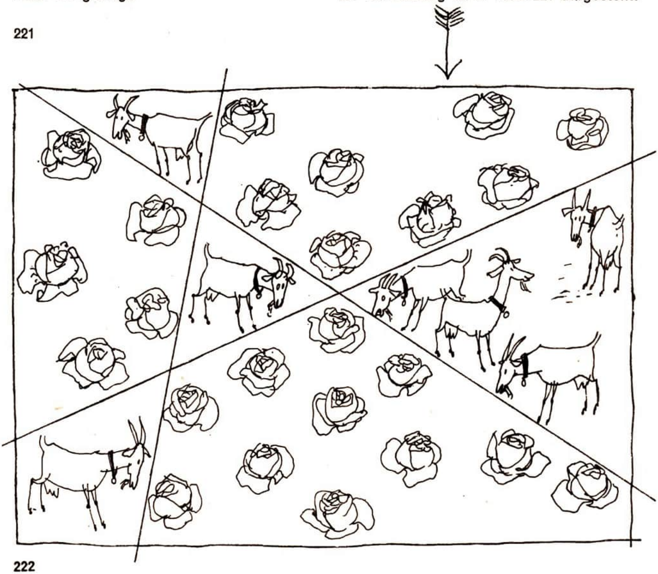
22. Bei 13 Mitspielerinnen kann der Ball auch über fünf Personen geworfen werden (Abb. 220). Wenn man ihn über sechs Personen wirft (den Ball fängt also jedes siebente Mädchen), dann läuft er in entgegengesetzter Richtung.



220

23. Die Lösung ist in Abb. 221 dargestellt.

221

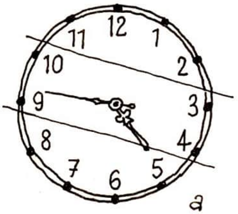


222

24. Wo sich die Züge auch begegnen mögen, eine Stunde vorher werden sie immer 100 km (60 km + 40 km) voneinander entfernt sein.

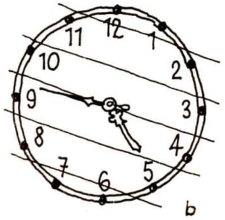
25. Keinerlei Berechnungen führen zu einem richtigen Ergebnis; man muß nur berücksichtigen, daß sich mit dem Wasser auch das Schiff und die Strickleiter heben, so daß in Wirklichkeit das Wasser niemals die dritte Sprosse erreicht.

26. a) Die Summe aller Zahlen auf dem Zifferblatt ist 78. Folglich muß die Summe in jedem Teil des Zifferblatts $78 : 3 = 26$ sein. Wenn wir erkennen, daß $12 + 1 = 13$ und $11 + 2 = 13$ ist usw., dann liegt die Lösung (Abb. 222a) nahe.

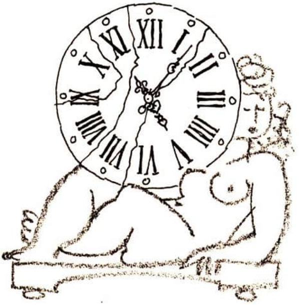


222

b) Die Summe der Zahlen in jedem der sechs Teile des Zifferblattes muß 13 sein. Da wir auf dem Zifferblatt solche Zahlenpaare finden, deren Summe 13 ist, erhalten wir die Lösung wie in Abb. 222b.



27. Bei den Zahlen IX, X und XI liegen drei Zehner (X) nebeneinander. Es ist klar, daß zwei von ihnen einen Teil bilden müssen. So braucht man nur zwei Möglichkeiten durchzuprobieren. Nach einigen Versuchen werdet ihr die Anordnung der Risse finden, wie sie Abb. 223 zeigt. Die Summen der Zahlen sind in jedem Teil des Zifferblattes 20.



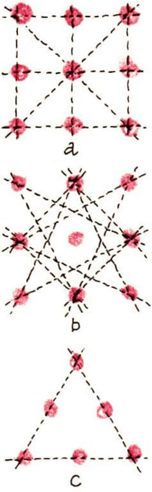
223

28. Der Lehrling verwechselte die Teile der Zeiger und lötete sie so zusammen, daß der Minutenzeiger zum kleinen und der Stundenzeiger zum großen Zeiger wurde. Als er sie nun wieder auf die Achse steckte, hatte das zur Folge, daß sich der große Zeiger auf dem Zifferblatt mit der Geschwindigkeit des Stundenzeigers zu drehen begann, also sehr langsam, und der kleine Zeiger mit der Geschwindigkeit des Minutenzeigers, also schnell.
Das erste Mal kehrte der Lehrling ungefähr 2 Stunden und 20 Minuten, nachdem er die Uhr auf 6 Uhr (abends) gestellt hatte, zum Kunden zurück. Der große Zeiger war mit der Geschwindigkeit eines Stundenzeigers von der 12 auf die 2 gerückt. Der kleine Zeiger jedoch, der wie ein Minutenzeiger lief, hatte zwei vollständige Umläufe und noch 10 Minuten zurückgelegt. Auf diese Weise zeigte die Uhr in diesem Augenblick die genaue Zeit an.

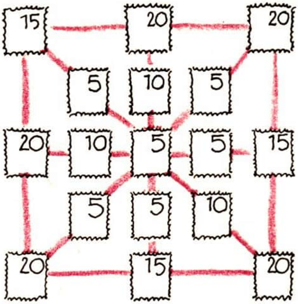
Es ist nicht schwer auszurechnen, daß der Lehrling nach dem nochmaligen Anruf am folgenden Morgen 13 Stunden 5 Minuten, nachdem er die Zeiger auf 6 Uhr gestellt hatte, zum Kunden kam. Zu dieser Zeit war der große Zeiger mit der Geschwindigkeit eines Stundenzeigers 13 Stunden vorgerückt und war so bis zur 1 gelangt. Der kleine Zeiger jedoch, der wie ein Minutenzeiger lief, hatte bis dahin 13 vollständige Umläufe und noch 5 Minuten zurückgelegt und war so auf die 7 gelangt. Daher zeigte auch im zweiten Falle die Uhr Übereinstimmung mit der genauen Zeit.

29. Mit 3 Knöpfen gibt es 8 Reihen (vgl. Abb. 224a), mit 2 Knöpfen 12 (Abb. 224b). (Die Reihen sind durch punktierte Gerade gekennzeichnet.)
Die übriggebliebenen 6 Knöpfe legt man in 3 Reihen zu je 3 Knöpfen in Gestalt eines Dreicks auf (Abb. 224c).

224

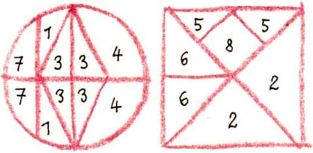


30. Die Anordnung der Briefmarken zeigt Abb. 225.



225

31. Die Lösung zeigt Abb. 226.



226

32. 1. Oft antwortet man, daß der Autobus weiter von A entfernt ist als der Radfahrer. Das ist falsch, weil sich alle Beteiligten bei der Begegnung an einem Ort befinden und folglich in demselben Abstand von A.
2. Sechs Schläge dauern 30 Sekunden. Folglich brauchen 12 Schläge 60 Sekunden oder 1 Minute. Das ist der häufig angestellte falsche Gedankengang.
Wenn die Uhr sechsmal schlägt, dann sind zwischen den Schlägen nur fünf Zwischenräume. Jeder von ihnen dauert 30 : 5 = 6 Sekunden. Zwischen dem ersten und zwölften Schlag sind elf Zwischenräume mit einer Dauer von je 6 Sekunden.
Folglich sind für zwölf Schläge 66 Sekunden nötig.
3. Immer.

33. 2 DM.

34. Auf den ersten Blick scheint die Aufgabe kompliziert zu sein und besondere Überlegungen zu erfordern. Wenn man sich aber hineinvertieft, kommt man leicht darauf, daß die Fliege ununterbrochen genau 2 Stunden flog und folglich 120 km zurücklegte.

35. 1. Das Mädchen las die Zahl kopfstehend: 98 anstatt 86.
2. Tauscht die Plätze der Zettel mit den Zahlen 8 und 9 aus und dreht dabei die 9 um, daß sie eine 6 wird! Dann ergibt jede Spalte 18.

36. 23 Jahre alt. Die Differenz zwischen dem Lebensalter des Vaters und dem des Sohnes beträgt 23 Jahre. Folglich muß der Sohn 23 Jahre alt sein, wenn der Vater doppelt so alt sein soll.

37. Auf den ersten Blick scheint es, daß die Summen der beiden Spalten nicht gleich groß zu sein brauchen. Wenn man diese aber ein bißchen aufmerksamer betrachtet, merkt man, daß den 9 Einsen $(9 \cdot 1)$ in der zweiten Spalte eine 9 $(1 \cdot 9)$ in der ersten Spalte entspricht, den 8 Zweien $(8 \cdot 2)$ in der zweiten Spalte 2 Achten $(2 \cdot 8)$ in der ersten Spalte entsprechen, den 7 Dreien $(7 \cdot 3)$ in der zweiten Spalte 3 Siebenen $(3 \cdot 7)$ usw.
Hieraus folgt, daß die Summen der beiden Spalten gleich groß sein müssen. Überzeugt euch davon durch die Addition!

38. In der ersten und fünften Zeile ergänzen sich die Einer gegenseitig zu 10 und die Zehner, Hunderter und alle übrigen Stellen ergänzen sich gegenseitig zu 9; folglich ist die Summe dieser beiden Zeilen 1000000.
Dieselbe Eigenschaft findet sich auch in den übrigen drei Zahlenpaaren: in der zweiten und sechsten, der dritten und siebenten und der vierten und achten Zeile.
Die Summe eines jeden Zahlenpaares ist 1000000. Folglich ist die Summe aller acht Zahlen 4000000.
Antwort zum zweiten Kunststück: Wahrscheinlich habt ihr erraten, daß man eine Zahl hinzuschreibt, deren Ziffern alle Ziffern einer der beiden Zahlen, zum Beispiel der zweiten, zu 9 ergänzen. Unter dieser Bedingung wird die letzte Ziffer der Summe um 1 kleiner sein als die letzte Ziffer des ersten Summanden, alle übrigen Ziffern werden die gleichen in der Reihenfolge sein wie beim ersten Summanden, und die allererste Ziffer der Summe wird immer eine 1 sein.
So beginnt man, die Summe von links nach rechts zu schreiben, indem man mit einer 1 anfängt und dann alle Ziffern des ersten Summanden wiederholt mit Ausnahme der letzten, die man um 1 vermindern muß. Die Summe lautet 172603293.
Übt euch, bevor ihr euren Kameraden diese mathematischen Kunststücke zeigt!

39. Zunächst sei das Geldstück mit der geraden Zahl (das 10-DPf-Stück) in der rechten Hand und das mit der ungeraden (das 5-DPf-Stück) in der linken. Dann bleibt die verdreifachte gerade Zahl eine gerade Zahl, und die verdoppelte ungerade Zahl wird auch eine gerade Zahl, die Summe gerader Zahlen ist selbstverständlich eine g e r a d e.
Jetzt sei das Geldstück mit der ungeraden Zahl (das 5-DPf-Stück) in der rechten Hand und das mit der geraden (das 10-DPf-Stück) in der linken. Dann bleibt die verdreifachte ungerade Zahl eine ungerade Zahl, und die verdoppelte gerade Zahl eine gerade. Die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl ist selbstverständlich eine u n g e r a d e.
Man kann das Kunststück folgendermaßen abwandeln: Man gibt auf, den Inhalt der rechten Hand nicht unbedingt mit 3, sondern überhaupt mit einer beliebigen ungeraden Zahl zu multiplizieren und den Inhalt der linken Hand mit einer beliebigen geraden Zahl.

40. 4 Brüder und 3 Schwestern.

41. $22+2+2+2$ und $888+88+8+8+8$.

42. $100 = 111 - 11$, $100 = 5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5$,
$100 = (5+5+5+5) \cdot 5$,
$100 = 5 \cdot 5\,(5 - \frac{5}{5})$.

43.

1. 100 oder	111	2. 111	3. 100	4. 111
000	030	003	330	333
005	000	000	505	500
007	070	007	077	077
+999	+900	+990	+099	+090
1111	1111	1111	1111	1111

44. Ähnlich wie man beim Füllen eines Behälters mit Gegenständen verschiedener Größe mit den größten Gegenständen beginnt, so fängt man auch bei der Zusammenstellung der gegebenen Summe am besten mit dem größtmöglichen Summanden an. Nach der Aufgabenstellung müssen die Summanden acht ungerade Zahlen sein. Wir überlegen folgendermaßen:
Es kann keine der Zahlen 19, 17 und 15 ein Summand sein, weil in jedem dieser Fälle kein Platz für weitere sieben Summanden bleibt. Wenn man als Summand die Zahl 13 nimmt, dann ist es für die Zusammenstellung der Zahl notwendig und hinreichend, zur 13 siebenmal die 1 hinzuzufügen:

$$13+1+1+1+1+1+1+1 = 20.$$

Wenn der erste Summand 11 ist, dann kann der zweite Summand nicht 9, 7 oder 5 sein. (Es bleibt kein Platz für die nötige Anzahl der übrigen Summanden.) Versuchen wir es mit der 3:

$$11+3 = 14.$$

Bis 20 bleiben sechs Einsen, und wir brauchen sechs Summanden. Folglich erhalten wir als zweite Lösung:

$$11+3+1+1+1+1+1+1 = 20.$$

Nehmen wir nun als ersten Summanden die Zahl 9. 7 kann nicht der zweite Summand sein ($9+7=16$; es bleiben vier Einsen für sechs Summanden). Versuchen wir es mit der 5. Wir erhalten $9+5=14$. Für sechs Summanden bleiben sechs Einsen. Das ist möglich. Wir erhalten somit die dritte Lösung:

$$9+5+1+1+1+1+1+1 = 20.$$

Probieren wir die 3. Wir erhalten $9+3=12$. Es bleiben acht Einsen für sechs Summanden. Fügen wir noch die 3 hinzu. Dann ist $9+3+3=15$. Es bleiben fünf Einsen für fünf Summanden. Wir erhalten die vierte Lösung:

$$9+3+3+1+1+1+1+1 = 20.$$

Das System des Ausprobierens ist, denke ich, jetzt klar. Setzt die Überlegung selbständig fort, indem ihr als ersten Summanden 7, dann 5 und dann 3 setzt. Insgesamt ergeben sich folgende 11 Lösungen:

$$\begin{aligned}
13+1+1+1+1+1+1+1 &= 20,\\
11+3+1+1+1+1+1+1 &= 20,\\
9+5+1+1+1+1+1+1 &= 20,\\
9+3+3+1+1+1+1+1 &= 20,\\
7+7+1+1+1+1+1+1 &= 20,\\
7+5+3+1+1+1+1+1 &= 20,\\
7+3+3+3+1+1+1+1 &= 20,\\
5+5+5+1+1+1+1+1 &= 20,\\
5+5+3+3+1+1+1+1 &= 20,\\
5+3+3+3+3+1+1+1 &= 20,\\
3+3+3+3+3+3+1+1 &= 20.
\end{aligned}$$

Nur eine Lösung (die 6. Zeile von unten) hat vier ungleiche Summanden; eine größere Anzahl ungleicher Summanden gibt es nicht.

45. Bei vier Zahlen gibt es nur eine Möglichkeit:

$$1+1+2+4 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4.$$

Bei fünf Zahlen gibt es drei Möglichkeiten:

$$\begin{aligned}
1+1+1+2+5 &= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5,\\
1+1+1+3+3 &= 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3,\\
1+1+2+2+2 &= 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2.
\end{aligned}$$

Die Möglichkeiten bei sechs oder sieben oder mehr Zahlen sucht selbst. Nehmt, sagen wir, die Zahlen 2 und 6 und ergänzt ihre Summe $2+6$ mit Einsen bis zum Produkt $2 \cdot 6 = 12$ und multipliziert das Produkt $2 \cdot 6$ mit der entsprechenden Anzahl Einsen.

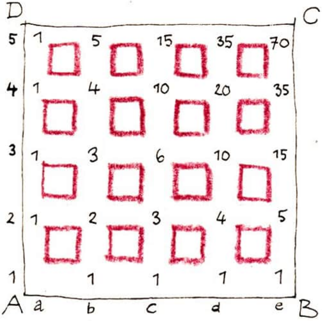
46. Einfach alle Möglichkeiten des Weges von A nach C auszuzählen ist kompliziert, und ihr „verheddert" euch. Man muß mit der Zählung der Wege bis zu den Straßenkreuzungen beginnen, die dem Ausgangspunkt A am nächsten liegen (Abb. 227).

Es ist klar, daß nach jeder Straßenkreuzung, die an den Seiten AB und AD liegt, nur ein Weg führt; zur Straßenkreuzung 2b führen 2 Wege. Zur Straßenkreuzung 2c kann man gelangen: 1. von Punkt 2b, also auch auf zwei Wegen, und 2. von Punkt 1c, das heißt auf einem weiteren Weg. Folglich führen zur Straßenkreuzung 2c insgesamt $2 + 1 = 3$ Wege. Wenn wir analog überlegen, finden wir, daß auch zur Straßenkreuzung 3b drei Wege führen.

Zur Straßenkreuzung 3c führen diejenigen drei Wege, auf denen man zur Straßenkreuzung 3b, und diejenigen drei Wege, auf denen man zur Straßenkreuzung 2c gelangen kann, das heißt insgesamt sechs Wege. Wenn wir diese Überlegungen fortsetzen, merken wir, daß allgemein die Anzahl der Wege, die zu einer beliebigen Straßenkreuzung führen, gleich der Summe der Wege ist, die (in der Bezeichnung nach der Karte) zu den links und unterhalb von ihr gelegenen Straßenkreuzungen führen. Wenn wir zum Beispiel feststellen, daß die Zahl der Wege, die nach 3c führen, 6 ist, und die nach 2d 4, dann ist die Anzahl der Wege nach 3d 10 usw.

So kann man die Anzahl der Wege bestimmen, die vom Ausgangspunkt A zu jeder beliebigen Straßenkreuzung führen. Zum Endpunkt C kann man so auf 70 verschiedenen Wegen gelangen.

227



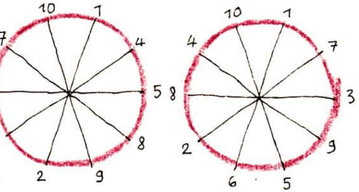
47. Wenn an den Endpunkten eines beliebigen Durchmessers die Zahlen A und a stehen und an den Endpunkten eines benachbarten Durchmessers B und b, dann ist nach der Bedingung $A + B = a + b$. Hieraus folgt $A - a = b - B$, das heißt, es müssen die Differenzen zweier einander gegenüberliegender Zahlen gleich sein.

Hierin liegt der Schlüssel zur Auffindung aller Lösungen.

Es ist jetzt klar, daß man zur Lösung alle gegebenen Zahlen von 1 bis 10 auf 5 Paare mit gleicher Differenz verteilen muß. Eine einfache Probe zeigt, daß nur zwei Gruppen von Paaren möglich sind, die diese Bedingungen erfüllen:

a) mit der Differenz = 1	b) mit der Differenz = 5
1—2	1—6
4—3	7—2
5—6	3—8
8—7	9—4
9—10	5—10

Wenn wir diese Zahlen um den Kreis herum anordnen, erhalten wir zwei Grundlösungen (Abb. 228). Alle übrigen Lösungen können aus den Grundlösungen gebildet werden, indem man die Zahlenpaare von einem Durchmesser zu einem anderen versetzt, weil die Reihenfolge der Paare innerhalb einer Gruppe willkürlich sein kann.



228

So kann man neben das Paar 1—2, das an den ersten Durchmesser geschrieben ist, an den zweiten Durchmesser das Paar 4—3 oder 6—5, 8—7 oder 10—9 setzen.

Das ergibt vier verschiedene Lösungen. Bei jeder Anordnung kann man an den dritten Durchmesser ein beliebiges der übrigen drei Paare setzen. Das ergibt $4 \cdot 3 = 12$ Lösungen. Bei jeder von ihnen gibt es zwei Möglichkeiten für die Anordnung der übrigen 2 Paare an den vierten und fünften Durchmesser. Das führt zu $12 \cdot 2 = 24$ Lösungen für jede Gruppe von Zahlenpaaren. Insgesamt sind es 48 Lösungen.

48. Eine mögliche Lösung zeigt Abb. 229.

229

49. $9 + 8 + 7 + 65 + 4 + 3 + 2 + 1 = 99$ oder

$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 43 + 21 = 99$;
$1 + 2 + 34 + 56 + 7 = 100$ oder
$1 + 23 + 4 + 5 + 67 = 100$.

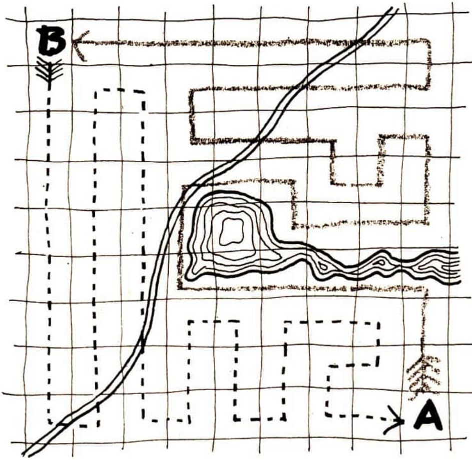
50. Eine der möglichen Lösungen ist in Abb. 230 dargestellt.

Der Weg des einen ist durch die ausgezogene Linie, der des anderen Mannes durch die punktierte angegeben. Beide durchschreiten je 40 Felder und berühren jedes Feld nur einmal.

51. Jede beliebige von euch ersonnene und zum Ziel führende Reihenfolge beim Umlegen der Streichhölzer ist nur eine Variante des Grundschemas der Lösung, nach dem unbedingt ein Paar am Ende der Reihe zusammengelegt werden muß und je ein Paar auf den zweiten Streichhölzern, gerechnet vom Ende der Reihe aus, die aus den acht übriggebliebenen Streichhölzern besteht.

52. Um die Benutzung des nachgenannten Schemas, nach dem die Streichhölzer verlegt werden, zu erleichtern, schreibt die ersten 15 natürlichen Zahlen, mit 1 beginnend, auf Papier und legt über jede Zahl ein Streichholz, wie aus der Zeichnung auf der folgenden Seite ersichtlich ist:

230



Legt die Streichhölzer in folgender Reihenfolge um:
5 auf 1, 6 auf 1, oder schematisch ausgedrückt: 5—1, 6—1, 9—3, 10—3, 8—14, 7—14, 4—2, 11—2, 13—15, 12—15.
Beachtet, daß die Lösung nach demselben Schema aufgebaut ist wie in der vorhergehenden Aufgabe: Es wird eine Dreiergruppe an einem Ende der Reihe zusammengelegt und je eine Dreiergruppe auf den zweiten Streichhölzern, gerechnet vom Ende der Reihe aus, die aus den 12 übriggebliebenen Streichhölzern besteht.
Jede andere Reihenfolge beim Umlegen der Streichhölzer ergibt nur eine Variante der angeführten Lösung.
Die Schlußfolgerungen im Text der Aufgaben 51 und 52 zeigen, daß zur Verwandlung von Streichholzpaaren in eine Reihe einzelner Streichhölzer wenigstens vier Paare (acht Streichhölzer) und zur Verwandlung von Dreiergruppen in eine solche Reihe wenigstens vier Dreiergruppen (zwölf Streichhölzer) nötig sind. Die gleichen Schlußfolgerungen gelten auch für Gruppen, die je 4, 5 ... n Streichhölzer enthalten: Jedesmal muß man wenigstens vier Gruppen (4 n Streichhölzer) haben. Hieraus folgt, daß zur Bildung von Gruppen zu je n Streichhölzern mindestens 4 n nebeneinanderliegende Streichhölzer nötig sind, aber es können auch 5 n, 6 n, 7 n usw. Streichhölzer sein.
Folglich kann man kn Streichhölzer, wobei $k \geqq 4$ ist, immer in Gruppen zu je n Streichhölzern anordnen.

53. Der Angelpunkt für die Lösung liegt darin, daß ich beim Weggehen von meiner Wohnung auf den Gedanken kam, meine Wanduhr in Gang zu bringen und nach ihr festzustellen, wann ich wegging und wann ich wieder heimkam. So ersah ich an meiner Uhr, wie lange ich abwesend war. Bei der Ankunft bei meinem Bekannten und beim Weggang stellte ich die Zeit an seiner Uhr fest. Damit hatte ich die Möglichkeit, die Dauer des Aufenthaltes bei meinem Bekannten zu ermitteln.
Als ich von der Zeit, die ich abwesend war, die Dauer meines Aufenthaltes bei meinem Bekannten abzog, erhielt ich die Zeitspanne, die ich für den Hin- und Herweg aufgewandt hatte. Wenn ich nun die Hälfte dieser Zeitspanne zu der Zeit hinzuzählte, die die Uhr meines Bekannten beim Weggang anzeigte, erhielt ich die Zeit, auf die ich meine Wanduhr stellen mußte.

54. 1. Lösung. Man braucht für die Aufstellung der ersten beiden Gleichungen nicht viel zu überlegen:

$$(1 + 2) : 3 = 1,$$
$$12 : 3 : 4 = 1.$$

Zur Aufstellung der dritten Gleichung wiederholen wir die Berechnungen der ersten Zeile, addieren die vorletzte Zahl (4) und dividieren das Resultat durch die letzte Zahl (durch 5):

$$[(1 + 2) : 3 + 4] : 5 = 1.$$

Dieses Verfahren kann man nacheinander für alle Zeilen mit ungerader Nummer wiederholen, das heißt, wir wiederholen zum Beispiel zur Bildung der fünften Gleichung die Berechnungen der dritten Zeile, addieren die vorletzte Zahl (6) und dividieren das Resultat durch die letzte Zahl (durch 7). Auf analogem Wege bilden wir auf der Grundlage der zweiten Gleichung nacheinander die Gleichungen auch für alle Zeilen mit geraden Nummern. Zusammengefaßt ergibt sich:

$$(1 + 2) : 3 = 1,$$
$$12 : 3 : 4 = 1,$$
$$[(1 + 2) : 3 + 4] : 5 = 1,$$
$$(12 : 3 : 4 + 5) : 6 = 1,$$
$$\{[(1 + 2) : 3 + 4] : 5 + 6\} : 7 = 1,$$
$$[(12 : 3 : 4 + 5) : 6 + 7] : 8 = 1,$$
$$\{[[(1 + 2) : 3 + 4] : 5 + 6] : 7 + 8\} : 9 = 1.$$

Wie ihr seht, gibt es dabei keine Subtraktion.

2. Lösung.

$(1 + 2) : 3 = 1,$

$12 : 3 : 4 = 1,$

$[(1 + 2) \cdot 3 - 4] : 5 = 1,$

$(1 \cdot 2 + 3 - 4 + 5) : 6 = 1,$

$\{[(1 + 2) \cdot 3 - 4] : 5 + 6\} : 7 = 1,$

$[(1 + 2) : 3 \cdot 4 + 5 + 6 - 7] : 8 = 1,$

$(1 \cdot 2 + 3 + 4 - 5 + 6 + 7 - 8) : 9 = 1.$

55. Der Zähler des Kraftwagens zeigte 15951. Die Ziffer der Zehntausender konnte sich innerhalb von 2 Stunden nicht ändern, folglich bleibt die erste und letzte Ziffer der neuen symmetrischen Zahl 1. Die Ziffer der Tausender konnte und mußte sich ändern, weil der Wagen in 2 Stunden zügiger Fahrt doch mehr als 49 km zurücklegte. Da er aber keinesfalls mehr als 1000 km gefahren war, war die Ziffer der Tausender und damit auch die Ziffer der Zehner eine 6.
Es ist nun klar, daß die Ziffer des Hunderters nur eine 0 oder eine 1 sein konnte, und der Zähler entweder 16061 oder 16161 anzeigte.
Die Zahl der Hunderter konnte schwerlich 2 erreichen, weil sich in diesem Falle ergeben würde, daß der Wagen in 2 Stunden 16261 minus 15951 = 310 km zurückgelegt hätte und eine solche Geschwindigkeit für Kraftfahrzeuge zu hoch ist, es sei denn, es handelt sich um Rennwagen.
Wenn der Zähler die Zahl 16061 zeigte, hatte der Wagen in 2 Stunden 16061 — 15951 = 110 km zurückgelegt und die Geschwindigkeit betrug 110 : 2 = 55 km/h.
Im zweiten Falle betrug die Geschwindigkeit 105 km/h.

56. Zur Lösung muß man die Anzahl der Geräte kennen, die vom Brigadier zusammengebaut wurde, und dazu muß man wiederum wissen, wieviel Geräte jedes der zehn Brigademitglieder im Durchschnitt zusammenbaute. Wenn wir unter die neun jungen Arbeiter die neun zusätzlich vom Brigadier angefertigten Geräte verteilen, ermitteln wir, daß jedes Brigademitglied im Durchschnitt 15 + 1 = 16 Geräte zusammenbaute. Daraus folgt, daß der Brigadier 16 + 9 = 25 Geräte anfertigte und die ganze Brigade $(15 \cdot 9) + 25 = 160$ Geräte. (Wer in Algebra Bescheid weiß, kann diese Aufgabe über eine Gleichung mit einer Unbekannten lösen. $\frac{(15 \cdot 9) + x}{10} + 9 = x$, wobei x die Anzahl der Geräte des Brigadiers ist.)

57. Bei einer Geschwindigkeit von 15 km/h legt eine Zugmaschine einen Kilometer in 4 Minuten zurück, bei einer Geschwindigkeit von 10 km/h braucht sie dazu 6 Minuten. Folglich verliert eine Zugmaschine bei einer Geschwindigkeit von 10 km/h auf jedem Kilometer 2 Minuten. Wie angegeben, braucht sie bei dieser Geschwindigkeit 1 Stunde oder 60 Minuten mehr; folglich ist die Entfernung von der LPG bis zur Erfassungsstelle 30 km.
Mit welcher Geschwindigkeit muß man fahren, um pünktlich einzutreffen?
Häufig meint man, daß die erforderliche Geschwindigkeit das arithmetische Mittel aus 15 km/h und 10 km/h sein müsse, das heißt $12^1|_2$ km/h; aber das ist nicht richtig.
Für den ganzen Weg braucht man $2^1/_2$ Stunden $\left(\frac{30}{15} + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}\right.$ und $\left.\frac{30}{10} - \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}\right)$. Folglich muß man, um das Getreide Punkt 11 Uhr bei der Erfassungsstelle abzuliefern, mit einer Geschwindigkeit von $30 : 2\frac{1}{2} = 12$ km/h fahren.

58. Wenn wir den Gegenverkehr aus einem stehenden Zug beobachten würden, dann würde die erste Berechnung richtig sein. Aber unser Zug fährt dem Gegenverkehr entgegen. Wenn folglich von der Begegnung unseres Zuges mit einem Gegenzug bis zur Begegnung mit dem nächsten Gegenzug 5 Minuten vergehen, dann bedeutet das, daß der zweite Gegenzug nach weiteren 5 Minuten an den Punkt kommt, an dem wir dem ersten Gegenzug begegneten, das heißt, die Zeitspanne zwischen den Gegenzügen beträgt, bezogen auf einen ruhenden Punkt, 10 Minuten.
Mithin kommen im Laufe einer Stunde nicht 12, sondern nur 6 Züge aus der Gegenrichtung im Hauptbahnhof an.

59. Man soll die Summe der Ziffern der Zahlen 1, 2, 3, 4 ... 999 999 998, 999 999 999, 1 000 000 000 suchen.
Dazu muß man die Zahlen paarweise gruppieren:

999 999 999 und 0,
999 999 998 und 1,
999 999 997 und 2 usw.

Das sind eine halbe Milliarde (500 000 000) Paare, und die Summe der Ziffern in jedem Paar ist 81. Die letzte Zahl 1 000 000 000 hat keinen Partner, die Summe ihrer Ziffern ist 1.
Die Gesamtsumme der Ziffern ist

$$(500\,000\,000 \cdot 81) + 1 = 40\,500\,000\,001.$$

60. Wenn das Bällchen klein genug ist und es auf dem Fußboden bleibt und sich an einer beliebigen Stelle an eine beliebige Wand des Zimmers anlegt, dann kann es dort von der großen gußeisernen Kugel nicht zerdrückt werden. Wenn sich zwischen Wand und Fußboden eine Scheuerleiste befindet, müßte sich das Bällchen in die Zimmerecke drücken.
Wer in der Geometrie Bescheid weiß, kann berechnen, daß das kleine Bällchen, wie in Abb. 231 an die Wand angelegt, in Sicherheit ist, wenn sein Durchmesser etwa 5,83-mal (genau $3 + 2\sqrt{2}$mal) kleiner ist als der Durchmesser der großen Kugel.

231

Der Fußball und der Tischtennisball haben offiziell festgelegte Maße, und ein einfacher Vergleich des Verhältnisses ihrer Durchmesser mit der Zahl 5,83 zeigt, daß dem Bällchen keine Gefahr droht, zerquetscht zu werden, wenn es sich an eine Wand anlegt.

61. In 24 Stunden geht die Uhr $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, das heißt $\frac{1}{6}$ Minute vor. Auf den ersten Blick scheint es, daß die Uhr dann nach 30 Tagen 5 Minuten vorgeht, das heißt am Morgen des 31. Mai. So ist es aber nicht.
Bereits am Morgen des 28. Mai wird die Uhr um $27 \cdot \frac{1}{6} = 4\frac{1}{2}$ Minuten vorgehen, und, weil sie am Tage $\frac{1}{2}$ Minute vorgeht, wird sie schon am Abend des 28. Mai um 5 Minuten vorgehen.

62. Der Weg ist $2\frac{1}{2}$mal so lang.

63. Ein Komma; man erhält 2,3.

64. a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{1}{7}$.

65. Wenn $\frac{1}{2}$ ein Drittel der gesuchten Zahl ist, dann enthält die gesuchte Zahl $3 \cdot \frac{1}{2}$, das heißt $1\frac{1}{2}$.

66. Die Entfernung vom Gemeindeamt bis zum Bahnhof beträgt $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ des gesamten Schulwegs. Diese Strecke lief A in 5 Minuten. Folglich brauchte er für den ganzen Weg $12 \cdot 5 = 60$ Minuten oder 1 Stunde. Ein Viertel des Weges legte er in $60 : 4 = 15$ Minuten zurück. Folglich ging er 7.15 Uhr weg und kam 8.15 Uhr in die Schule.

67. Die Antwort ist nicht: 12 Sekunden! Das liegt daran, daß es vom ersten bis zum achten Fähnchen sieben Zwischenräume sind. Vom ersten bis zum zwölften Fähnchen sind es elf Zwischenräume. Jeden Zwischenraum durchläuft der Sportler in 8/7 Sekunden; folglich brauchte er für die elf Zwischenräume $\frac{8}{7} \cdot 11 = \frac{88}{7} = 12\frac{4}{7}$ Sekunden.

68. An Zeit gewann A nichts, vielmehr verlor er etwas. Für die zweite Hälfte des Weges brauchte er soviel Zeit, wie ihn die ganze

Strecke zu Fuß gekostet hätte. Folglich verlor er gerade soviel Zeit, wie er mit der Eisenbahn fuhr, das heißt, er verlor 1/15 der Zeit, die nötig war, um die Hälfte des Weges zu Fuß zu gehen, oder 1/30 der Zeit, die er für die ganze Strecke zu Fuß gebraucht hätte.

69. Der Anreißer überlegte, daß $\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ ist.

Wenn wir also von den sieben Platten vier in drei gleiche Teile zerschneiden, dann erhalten wir zwölf Drittel, das heißt je ein Drittel für jedes Werkstück. Die übrigen drei Platten zerschneiden wir in vier gleiche Teile und erhalten zwölf Viertel, das heißt je ein Viertel für jedes Werkstück.

Für die Verteilung von fünf Platten auf sechs Werkstücke überlegen wir, daß $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ ist.

Folglich machen wir aus drei Platten sechs Hälften und aus den übrigen zwei Platten sechs Drittel.

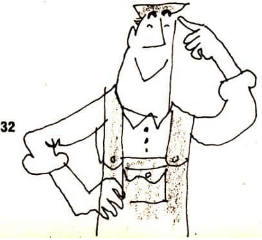
Ferner ist $\frac{13}{12} = \frac{1}{3} + \frac{3}{4}$. Folglich nehmen wir zu jedem Werkstück ein Stück aus vier Platten, die wir jede in drei gleiche Teile zerlegen, und drei Stück aus den übrigen neun Platten, die wir jede in vier gleiche Teile zerlegen.

Analog ist $\frac{13}{36} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$; neun Platten werden in vier gleiche Teile geteilt und vier Platten in neun gleiche Teile.

Da $\frac{26}{21} = \frac{2}{3} + \frac{4}{7}$ ist, werden in diesem Falle 14 Platten in drei Teile geteilt und zwölf in sieben Teile.

Denkt euch unter Verwendung dieses Verfahrens selbst noch einige analoge Aufgaben aus!

70. Ein Viertel des Riegels wiegt $^1/_8$ kp; ein ganzer Riegel wiegt dann $^1/_2$ kp.



71.

1. $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{9}{9}$ usw., auch $1 \cdot 1$ oder $1 - 0$, $2 - 1, \ldots$ oder $1^0, 2^0, \ldots$

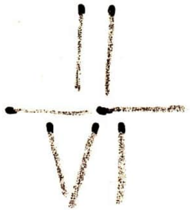
2. $37 = \frac{333}{3 \cdot 3}$.

3. Zum Beispiel: $99 + \frac{99}{99}$, oder $55 + 55 - 5 - 5$ oder in allgemeiner Form: $\frac{(100a + 10a + a) - (10a + a)}{a}$, wobei a eine beliebige Ziffer ist.

4. $44 + \frac{44}{4}$.

5. $9 + \frac{99}{9}$.

6. Vgl. folgende Abb.; $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.



7. $1 + 3 + 5 + 7 + \frac{75}{75} + \frac{33}{11}$.

8. $79\frac{1}{3} + 5 = 84 + \frac{2}{6}$.

9. 1 und $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{n+1}$, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist, beginnend mit 1, oder x und $\frac{x}{x+1}$, wobei x eine beliebige reelle Zahl ist (außer $x = -1$).

10. $\frac{35}{70} + \frac{148}{296} = 1$;

$0{,}5 + \frac{1}{2}(9-8)\ (7-6)\ (4-3) = 1$.

Es sind auch andere Lösungen möglich.

11. $78\frac{3}{6} + 21\frac{45}{90} = 100$ oder $50\frac{1}{2} + 49\frac{38}{76} = 100$.
Es sind auch andere Lösungen möglich.

72. Eine der möglichen Lösungen:

$$\frac{1}{3}+\frac{6}{1}+\frac{3}{4}+\frac{5}{3}+\frac{5}{4}=10;$$
$$\frac{2}{1}+\frac{5}{1}+\frac{2}{6}+\frac{6}{3}+\frac{4}{6}=10;$$
$$\frac{4}{1}+\frac{2}{3}+\frac{4}{2}+\frac{5}{2}+\frac{5}{6}=10.$$

73. Es ist nicht schwer zu erkennen, daß $^3/_4$ Kätzchen einem Viertel aller Katzen entspricht. Folglich sind alle Katzen viermal mehr als $^3/_4$, das heißt 3.
Probe: $^3/_4$ von 3 sind $2^1/_4$; wenn zu $2^1/_4$ Kätzchen noch $^3/_4$ hinzukommt, sind es 3 Kätzchen.

74. Wer nicht nachdenkt, mag vielleicht antworten: 8 km/h $\left(\frac{12+4}{2} = 8\right)$. Aber so ist es nicht. Nehmen wir die ganze Entfernung an mit 1. Dann lief das Pferd die erste Hälfte des Weges in $^1/_2 : 12 = {}^1/_{24}$ Zeiteinheiten und die zweite Hälfte in $^1/_2 : 4 = {}^1/_8$ Zeiteinheiten. Für den ganzen Weg brauchte es $^1/_{24} + {}^1/_8 = {}^1/_6$ Zeiteinheiten. Folglich ist die mittlere Geschwindigkeit 6 km/h, denn $1 : {}^1/_6 = 6$.

75. Der Fahrgast schlief während $^2/_3$ der Hälfte der ganzen Strecke, also während $^1/_3$ der ganzen Strecke.

76. Der Radfahrer legte zu Fuß $^1/_3$ des Weges zurück, das heißt halb soviel, wie er gefahren war. An Zeit brauchte er doppelt soviel. Folglich war er 4mal so schnell gefahren, wie er lief.

77. Die Geschwindigkeit, mit der sich der Fahrgast im zweiten Zug gegenüber dem fahrenden ersten Zug fortbewegt, ist 45 km/h + 36 km/h = 81 km/h = $\frac{81\,000}{60 \cdot 60}$ m/s = $\frac{45}{2}$ m/s.
Folglich ist die Länge des ersten Zuges $\frac{45}{2}$ m/s · 6 s = 135 m.

78. A hatte $^2/_3$ seines Auftrages erfüllt, und ihm blieb noch $^1/_3$ zu tun. B hatte $^1/_6$ seines Auftrages erledigt, und ihm blieb noch $^5/_6$ seines ganzen Auftrages übrig.
Folglich mußte B seine tägliche Produktion um das Zweieinhalbfache gegenüber A steigern $\left(\frac{5}{6} : \frac{1}{3} = \frac{15}{6} = 2\frac{1}{2}\right)$, wenn er ihn einholen und gleichzeitig mit ihm fertig werden wollte.

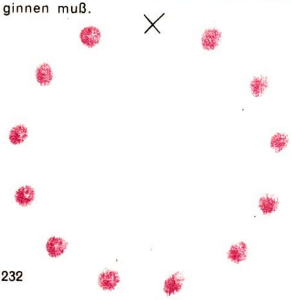
79. Recht hat B. Durch die Vergrößerung des zweiten Multiplikators um $^1/_3$ vergrößert sich das Produkt um $^1/_3$ auf $^4/_3 = {}^{12}/_9$. Durch die Verringerung des dritten Multiplikators um $^1/_3$ verringert sich das erhöhte Produkt ($^{12}/_9$) um $^1/_3$; das ist um $^4/_9$ auf $^8/_9$; der Fehler beträgt also $^1/_9$. Da er 20 Kubikmeter ausmachen soll, ist das richtige Resultat der Aufgabe 180 Kubikmeter.
Probe: Angenommen, die Aufgabe lautete: $5 \cdot 6 = 30$; $30 \cdot 6 = 180$. A rechnete: $5 \cdot 8$ ($8 = 6 + {}^1/_3$ von 6) = 40; 40 = $^4/_3$ von 30. Sie rechnete weiter: $40 \cdot 4$ ($4 = 6 - {}^1/_3$ von 6) = 160; 160 = $^8/_9$ von 180.

80. Man legt zwei Scheiben Brot in den Brotröster und röstet in 30 Sekunden ihre eine Seite. Dann dreht man die eine Scheibe um, die zweite nimmt man aber heraus und legt an ihrer Stelle die dritte ein. So wird in der zweiten halben Minute die erste Scheibe vollständig geröstet und die dritte zur Hälfte. Jetzt nimmt man die erste Scheibe heraus, legt die zweite halbfertige ein und wendet die dritte. Sie werden in der folgenden halben Minute fertig.
Die ganze Zeit ist, wie ihr seht, $1^1/_2$ Minuten und nicht 2 Minuten.

Schwierige Lagen

81. Zuerst legten die Gefangenen ein Kettenglied (5 kp) in den Korb und beförderten ihn nach unten. In den leeren nach oben steigenden Korb legten sie 2 Kettenglieder (10 kp). Diese Last sank zur Erde und gab die Möglichkeit, die Belastung des aufsteigenden Korbs auf 15 kp zu erhöhen, indem sie 2 Kettenglieder hinzulegten. Es sanken 15 kp zur Erde hinab, 10 kp schwebten nach oben. Wieder legten sie 2 Kettenglieder hinzu. Jetzt sanken 20 kp hinab. Indem die Gefangenen so fortfuhren, ließen sie in einem Korb 7 Kettenglieder (35 kp) zur Erde hinab. In diesem Augenblick befanden sich in dem aufsteigenden Korb 6 Kettenglieder. Chetscho lud sie aus und setzte die junge Dienerin (40 kp) in den Korb. Das Mädchen ließ sich nach unten, wodurch die 7 Kettenglieder nach oben stiegen. 6 Kettenglieder lud Chetscho aus in den Turm und gab dem Mädchen ein Zeichen, aus dem Korb zu steigen. Das eine Kettenglied (5 kp) sank hinab, und nach oben stieg der leere Korb. Unten setzte sich das Mädchen in den Korb (40 kp + 5 kp), und in den hinabfahrenden Korb setzte sich Daridshan (50 kp). Daridshan fuhr hinab und hob dadurch das Mädchen nach oben. Dieses stieg aus dem Korb in den Turm, und Daridshan stieg unten aus. Der Korb mit dem zurückgebliebenen Kettenglied sank hinab zum Erdboden, und gleichzeitig stieg der leere Korb nach oben. Jetzt wiederholte Chetscho das ganze Verfahren, um das Mädchen abermals nach unten zu bringen. Als das ausgeführt war, setzten sich unten Daridshan und die Dienerin (50 kp + 40 kp) in den Korb, und in den emporgestiegenen Korb setzte sich Chetscho mit einem Kettenglied (90 kp + 5 kp). Chetscho fuhr hinab, und Daridshan und die Dienerin stiegen nach oben. Beide stiegen aus dem Korb in den Turm, und Chetscho stieg unten aus.
In der gleichen Weise wie am Anfang ließ sich nun zuerst die Dienerin zur Erde hinab und dann Daridshan, wobei das Mädchen wieder nach oben stieg. Schließlich ließ sich die Dienerin noch einmal hinab, wobei 7 Kettenglieder nach oben gehoben wurden. Den Korb, aus dem das Mädchen zum letztenmal ausstieg, befestigte Chetscho, damit der emporgefahrene Korb nicht mit Krach zur Erde hinabstürzte. Dann versteckten sich alle drei wohlbehalten in den Bergen vor dem rasenden Fürsten.

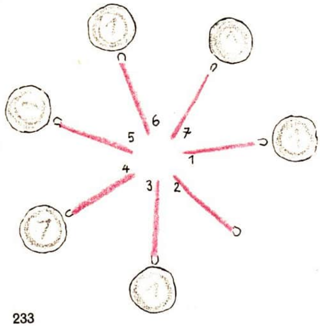
82. Zählt zum Beispiel im Uhrzeigersinn von der weißen Maus aus (diese nicht mitgerechnet) die sechste Maus ab. Mit dieser muß man die Auszählung beginnen und dabei im Kreis herum in ein und derselben Richtung (im Uhrzeigersinn) zählen.
Um im voraus festzustellen, mit welcher Maus die Auszählung beginnen muß, zeichnet zwölf Punkte und ein Kreuzchen auf einen Kreis (Abb. 232) und fangt mit der Auszählung beim Kreuzchen an. Zählt immer im Kreis herum in einer Richtung ab und streicht jeden 13. Punkt aus (auch das Kreuzchen, wenn die Zählung darauf fällt), so lange, bis nur ein Punkt übrigbleibt. Setzt jetzt an die Stelle dieses Punktes die weiße Maus, dann zeigt das Kreuzchen an, mit welcher Maus man die Auszählung beginnen muß.



232

83. Wenn die 20 Käfige in einer Reihe stehen und jeder fünfte geöffnet wird, dann bleiben als die beiden letzten Käfige diejenigen ungeöffnet, die auf dem 7. und dem 14. Platz stehen, wobei man von links nach rechts zählen muß.

84. Das Geheimnis liegt darin, daß jedesmal das Geldstück an dasjenige Streichholz gelegt wird, von dem aus man vorher zu zählen begonnen hat. Wir nehmen an, ihr beginnt mit der Zählung beim fünften Streichholz (Abb. 233). Das erste Geldstück wird dann an das siebente Streichholz gelegt. Jetzt muß man das nächste Geldstück

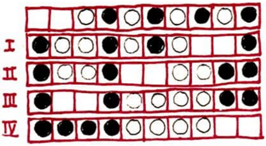


233

an das fünfte Streichholz legen. Dazu muß man mit der Zählung beim dritten Streichholz beginnen. Beim dritten Mal beginnen wir die Zählung vom ersten Streichholz aus, und das nächste Geldstück wird an das dritte Streichholz gelegt usw.

85. Der Lokführer des Bauzuges bringt die drei letzten Waggons seines Zuges auf das Abstellgleis, kuppelt sie ab und fährt den übrigen Teil des Zuges nach vorn. Der Personenzug rückt hinter den Bauzug, stößt zurück an das Abstellgleis, kuppelt an sein Ende die drei abgestellten Waggons des Bauzuges, fährt mit diesen auf seinen alten Platz zurück und kuppelt sie dort wieder ab. Währenddessen fährt der übrige Teil des Bauzuges, die Lokomotive und zwei Waggons, auf das Abstellgleis, und die Strecke ist frei für den Personenzug.

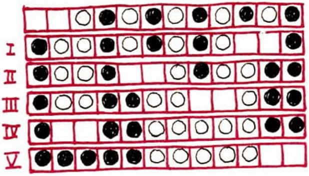
86. Die Lösung ist in Abb. 234 dargestellt.



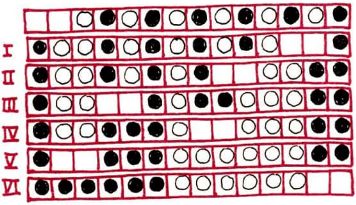
234

Nach dem vierten Zug liegen die vier schwarzen und die vier weißen Steine nebeneinander. Aus dieser Aufstellung kann man zur Anfangsstellung umgekehrt auch in vier Zügen gelangen. Löst diese umgekehrte, nun nicht mehr schwere Aufgabe!

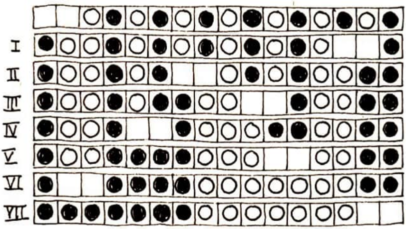
87. Für fünf Paare ist die Lösung in Abb. 235 dargestellt, für sechs Paare in Abb. 236 und für sieben Paare in Abb. 237.



235

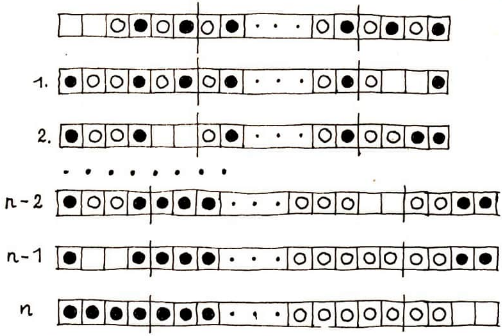


236



237

88. Von n Steinpaaren trennen wir je zwei äußere Paare links und rechts ab. (In Abb. 238 sind sie durch vertikale Striche abgetrennt.) Wir führen zwei Umstellungen (Züge) aus, die die inneren n — 4 Steinpaare nicht berühren, aber neben ihnen zwei freie Plätze schaffen (Abb. 238, Aufstellung nach den Zügen 1 und 2). Die zwei Umstellungen, die zur Lösung der Aufgabe bei vier Paaren noch nötig sind, schieben wir einstweilen auf und wenden uns der Umstellung der inneren Steine zu, wobei wir die beiden links entstandenen freien Plätze mit verwenden. Nach der Annahme können wir das in den folgenden n — 4 Zügen tun, und wir erhalten, wie die gesammelte Erfahrung lehrt, im Ergebnis links schwarze und rechts weiße Steine (Abb. 238, Aufstellung nach dem Zug n — 2).



238

Jetzt wenden wir uns wieder den vier am Anfang abgetrennten Steinpaaren zu und beenden mit zwei Umstellungen (Abb. 238, Zug n — 1 und Zug n) die Lösung.
Jede Aufgabe mit n Steinpaaren ist in n — 4 + 4 = n Zügen lösbar. Dabei hat sich auch das Schema für die Reihenfolge der Züge herausgestellt. Die Lösung für die Reihenfolge der Züge bei jeder beliebigen Anzahl von Steinpaaren besteht darin, daß man die Aufgabe auf die Umstellung einer kleineren Anzahl von Steinen bis zu der Lage zurückführt, für die die Lösung soeben gefunden wurde.

89. Legt die Karten mit den Nummern nach oben in folgender Reihenfolge auf einen Stoß: 1, 6, 2, 10, 3, 7, 4, 9, 5, 8.

90. Nach dem ersten Sturmangriff verblieben in der „Besatzung" 36 Mann. Wir wollen feststellen, wieviel von ihnen sich in der Mitte jeder Seite befinden mußten. Da in der ersten und dritten Reihe je 11 „Verteidiger" stehen mußten, mußten in der zweiten Reihe 36 — 22 = 14 Mann sein, das heißt je 7 Mann in der Mitte der beiden gegenüberliegenden Seiten, also auch je 7 Mann in der Mitte der beiden anderen Seiten.

Insgesamt sind die Mitten der Seiten mit 28 Mann besetzt. Die übrigen 8 Mann bleiben für die Ecken, das heißt je 2 Mann für jede Ecke. Es ergibt sich folgende Aufstellung der Streitkräfte vor dem zweiten Sturmangriff:

1. Reihe	2	7	2
2. „	7	$\boxed{36}$	7
3. „	2	7	2

Nach dem zweiten Sturmangriff blieben 32 „Verteidiger" in der Burg. Wir überlegen analog dem Vorhergehenden. In der ersten und dritten Reihe mußten nach wie vor 11 Mann stehen, in der zweiten waren 32 — 22 = 10 Mann, das heißt je 5 in der Mitte jeder Seite der Burg; folglich in den Ecken 32 — 20 = 12 Mann, also je 3 Mann in jeder Ecke. Es ergibt sich folgende Aufstellung der Streitkräfte vor dem dritten Sturmangriff:

1. Reihe	3	5	3
2. „	5	$\boxed{32}$	5
3. „	3	5	3

Auf die gleiche Weise kann man die Aufstellung der Streitkräfte nach dem dritten und vierten Sturmangriff festlegen:

4	3	4		5	1	5
3	$\boxed{28}$	3		1	$\boxed{24}$	1
4	3	4		5	1	5

Nach dem fünften Sturmangriff waren noch 22 „Verteidiger" in der Burg. In diesem Falle verblieben für die Mitten der Seiten keine Streitkräfte mehr, weil 22 — 22 = 0 ist.

Folglich mußten alle 22 Mann in den Ecken aufgestellt werden:

6	—	5
—	$\boxed{22}$	—
5	—	6

Wenn weitere „Verteidiger" der Burg außer Gefecht gesetzt wurden, war es unmöglich, mit den restlichen Streitkräften noch je 11 Mann auf jeder Seite der Burg aufzustellen.

91. Wenn man dieselben Überlegungen anstellt wie bei der vorhergehenden Lösung, erhält man folgendes Schema der Anordnung der Lampen (im mittleren Feld steht die Gesamtzahl der Lampen):

2	5	2	1	7	1	4	1	4	5		4.
5	$\boxed{28}$	5	7	$\boxed{32}$	7	1	$\boxed{20}$	1		$\boxed{18}$	
2	5	2	1	7	1	4	1	4	4		5

Bei 18 Lampen konzentrieren sich alle auf die Ecken des Raumes. Wenn man 36 Lampen anbringt, bleiben umgekehrt alle Ecken frei, wie aus dem folgenden Schema ersichtlich ist:

	9	
9	$\boxed{36}$	9
	9	

Auf diese Weise kann der Techniker unter Wahrung des Prinzips der Anordnung von 9 Lampen an jeder Wand als geringste Anzahl 18 und als höchste 36 Lampen anbringen.

Über die letzte Frage kann man sich entweder durch einfaches Probieren oder mit Hilfe der Algebra Klarheit verschaffen.

(Wer sich nicht mit den folgenden mathematischen Überlegungen befassen will oder wem das zu hoch ist, der möge vorläufig die nachfolgenden Darlegungen überschlagen.)

Wir bezeichnen mit a die Anzahl der Lampen in jeder Ecke, mit b die Lampen an jeder Wandfläche des Raumes. Dann ergibt sich, wenn n die Gesamtzahl aller Lampen ist: $n = 4\,(a + b)$. Diese Zahl kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$n = 2\,(a + b + a) + 2\,b.$$

Hierbei ist $a + b + a = s$ die Anzahl der Lampen an jeder Wand. Wenn diese Zahl s unverändert bleibt, dann verringert sich die Zahl aller Lampen n mit der Verringerung von b und nimmt zu mit der Vergrößerung von b. Wenn b um 2 zunimmt, dann vergrößert sich die Gesamtzahl der Lampen n um 4. Entsprechend verfuhr auch der Techniker: Wenn er die Zahl der Lampen um 4 vermehrte, vergrößerte er jedes b um 2 und, um die unveränderliche Summe $s = a + b + a$ einzuhalten, verringerte er jedes a um 1. Dabei wurde immer eine Symmetrie in der Anordnung der Lampen gewahrt.

Aber es ist auch bei unsymmetrischer Anordnung der Lampen die Beibehaltung ein und derselben Summe s der Lampen an jeder Wand möglich.

Die Anzahl der Lampen in den Ecken des Raumes sei a_1, a_2, a_3 und a_4 und die der Lampen an den Wandflächen b_1, b_2, b_3 und b_4:

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & a_2 \\ b_2 & & b_3 \\ a_3 & b_4 & a_4 \end{array}$$

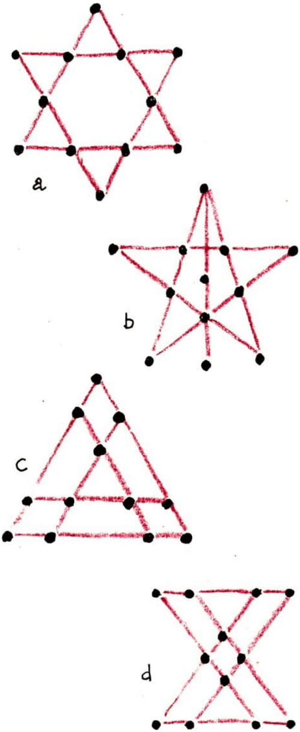
Die Anzahl aller Lampen n kann man folgendermaßen ausdrücken: $n = 4s - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$, wobei s die unveränderliche Anzahl der Lampen an jeder Wand ist ($s = a_1 + b_1 + a_2 = a_1 + b_2 + a_3 = a_3 + b_4 + a_4 = a_2 + b_3 + a_4$). Wenn s eine unveränderliche Zahl ist, dann vergrößert sich die Gesamtzahl der Lampen mit der Verringerung von $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ und verringert sich umgekehrt mit der Vermehrung von $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Wir fügen zum Beispiel zu b_1 und b_2 je x Lampen hinzu, das heißt insgesamt 2 x Lampen, und verringern a_1 um x, dann ändert sich s nicht, aber die Gesamtzahl der Lampen n vergrößert sich um x. Dasselbe erhält man, wenn man je x Lampen zu b_1 und b_3 hinzufügt und entsprechend x Lampen von a_2 wegnimmt usw.

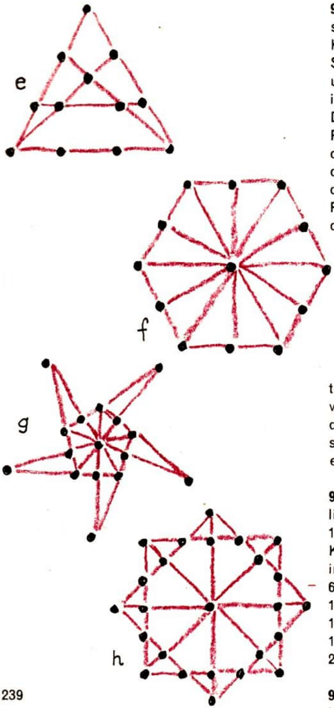
Analog ist es, wenn man x zu jeder der Zahlen b_1, b_2, b_3 und b_4 hinzufügt und x von a_1 und a_4 oder von a_2 und a_3 oder $\frac{x}{2}$ von jeder der Zahlen a_1, a_2, a_3 und a_4 wegnimmt. Dann ändert sich s nicht, aber die Zahl aller Lampen n vergrößert sich gleichzeitig um 2 x. Auf diese Weise kann man, wenn man eine unsymmetrische Anordnung der Lampen zuläßt, auf Wunsch die Gesamtzahl n um 1, 2, 3, 4 usw. vergrößern.

Wenn der Lichttechniker die Zahl der Lampen von 24 auf 25 vermehren wollte, dann wären sie zum Beispiel in folgender Weise anzuordnen:

$$\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 3 \\ 4 & \boxed{25} & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{array}$$

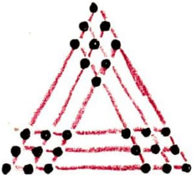
92. Die Lösungen der Aufgaben 1 bis 4 sind in den Abb. 239a–h dargestellt.





239

93. Die Lösung wird in Abb. 240 gezeigt.



240

94. Eine der Lösungen kann man leicht und schnell mit Hilfe einfacher geometrischer Konstruktionen erhalten. Man ersetzt die Steine durch Punkte auf einem Blatt Papier und streicht in der oberen Zeile drei und in der unteren einen beliebigen Punkt aus. Den ersten der übriggebliebenen beiden Punkte in der oberen Zeile verbindet man durch Geraden mit zwei beliebigen Punkten der unteren Zeile und den zweiten Punkt der oberen Zeile mit den übrigen beiden Punkten der unteren Zeile (Abb. 241). Meidet dabei solche Gruppierungen von Punkten, die zu Parallelen führen. Ihr erhaltet vier Kreuzungspunkte der Geraden. Auf diese Punkte muß man die vier Steine setzen, die den ausgestrichenen Punkten entsprechen.

241

95. Es sind mindestens 24 Züge erforderlich; die Reihenfolge ist folgende:
1. 1 → A (den Stein Nr. 1 umlegen in den Kreis A); 2. 2 → B (den Stein Nr. 2 umlegen in den Kreis B); 3. 3 → C; 4. 4 → D; 5. 2 → D; 6. 5 → B; 7. 3 → B; 8. 1 → B; 9. 6 → C; 10. 7 → A; 11. 1 → A; 12. 6 → E; 13. 3 → C; 14. 1 → C; 15. 5 → A; 16. 1 → B; 17. 3 → A; 18. 1 → A; 19. 6 → C; 20. 8 → B; 21. 6 → B; 22. 2 → E (oder C); 23. 4 → B; 24. 2 → B.

96. Es sind mindestens 19 Züge erforderlich.
Das sparsamste Spielsystem besteht darin, daß man die Einordnung der Steine in Ketten vornimmt, das heißt, man tauscht zum Beispiel die Plätze der Steine 1 und 7 und dann den Stein 7 mit demjenigen Stein, der den Platz 7 einnimmt, in unserem Beispiel mit 20. Den Stein 20 muß man wieder mit dem Stein tauschen, der seinen Platz einnimmt, das ist der Stein 16, und diesen wieder mit dem Stein 11, der fälschlich auf dem Platz 16 liegt usw. bis zum Ende der

Kette, wenn beide Steine auf den richtigen Platz geraten.
Dann muß man mit einer neuen Kette beginnen und so verfahren bis zum vollständigen Abschluß.
Alle Züge, die für die Lösung nötig sind, sind in folgenden fünf Ketten enthalten:

$1 \to 7$; $7 \to 20$; $20 \to 16$; $16 \to 11$; $11 \to 2$; $2 \to 24$;
$3 \to 10$; $10 \to 23$; $23 \to 14$; $14 \to 18$; $18 \to 5$;
$4 \to 19$; $19 \to 9$; $9 \to 22$;
$6 \to 12$; $12 \to 15$; $15 \to 13$; $13 \to 25$;
$17 \to 21$.

Eine schematische Darstellung der erforderlichen Züge kann man sich so skizzieren, daß man die Nummern der Steine zunächst in der Reihenfolge der ursprünglichen Aufstellung und darunter in der natürlichen Reihenfolge aufschreibt:

7	24	10	19	3	12	20	8	22	usw.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	usw.

Wir streichen das erste Zahlenpaar 1—7 aus; diese Zahlen stellen den ersten Austausch von Steinen dar. Dann suchen wir in der unteren Zeile die 7. Darüber steht die Zahl 20. Wir streichen das Zahlenpaar 7—20 aus; das ist der zweite Austausch. Nun suchen wir in der unteren Zeile 20 und finden über ihr 16. Wir streichen das Paar 20—16 aus; das ist der dritte Austausch usw. Wenn die Kette abreißt, beginnen wir mit dem äußersten noch nicht durchgestrichenen Zahlenpaar von links.
Als wenigstes könnte sich eine einzige Kette ergeben; dann wären für die Einordnung der 25 Steine $25 - 1 = 24$ Züge nötig, weil beim letzten Zug gleichzeitig zwei Steine den richtigen Platz einnehmen. Die Aufgabe hat fünf Ketten. Außerdem nimmt ein Stein (8) bereits in der Anfangsstellung seinen richtigen Platz ein. Daher sind für die Lösung mindestens $25 - 5 - 1 = 19$ Züge nötig.

97. Wenn man zum Beispiel eine von den neun Pralinen aus dem äußeren, größten Kästchen in das kleinste legt, dann befinden sich in diesem inneren Kästchen 5 Pralinen, das heißt zwei Paare plus eine Praline, und diese fünf Pralinen muß man einbeziehen in die Zahl der Pralinen, die sich in dem zweiten inneren Kästchen befinden.
Hieraus folgt, daß das zweite innere Kästchen jetzt $5 + 4 = 9$ Pralinen enthält, das heißt vier Paare plus eine Praline.
Wenn wir so rechnen, erhalten wir für das dritte Kästchen $9 + 4 = 13$ Pralinen, das heißt wiederum eine Zahl, die die Bedingung der Aufgabe erfüllt usw.
Sucht selbständig noch einige andere Verteilungsmöglichkeiten für die Pralinen auf die Kästchen!

98. Es sind mindestens 16 Züge erforderlich. Als ersten kann man jeden beliebigen Bauern schlagen mit Ausnahme der Bauern c4, d3, d4, e5, e6, f5. Wenn das Rössel als ersten Bauern zum Beispiel den Bauern c2 schlägt, folgt als nächster der Bauer b4 und dann weiter d3, b2, c4, d2, b3, d4, e6, g7, f5, e7, g6, e5, f7, g5.

99. 1. Wir legen fest, daß die erste Zahl die Nummer des Steins und die zweite Zahl (in einigen Fällen der Buchstabe) die Nummer des Feldes angibt, in das der Stein gesetzt werden soll. Dann können die Steine in folgender Reihenfolge verschoben werden:
$2 \to 1$; $3 \to 2$; $4 \to 3$; $4 \to A$; $5 \to 4$; $5 \to 3$; $6 \to 5$; $6 \to 4$; $7 \to 6$; $7 \to 5$; $7 \to B$; $8 \to 7$; $8 \to 6$; $8 \to 5$; $9 \to 8$; $9 \to 7$; $9 \to 6$; $1 \to 9$; $1 \to 8$; $1 \to 7$; $1 \to C$; $9 \to 7$; $9 \to 8$; $9 \to 9$; $9 \to 10$; $8 \to 6$; $8 \to 7$; $8 \to 8$; $8 \to 9$; $7 \to 5$; $7 \to 6$; $7 \to 7$; $7 \to 8$; $1 \to 7$; $1 \to 6$; $1 \to 5$; $1 \to B$; $6 \to 5$; $6 \to 6$; $6 \to 7$; $6 \to C$; $5 \to 4$; $5 \to 5$; $5 \to 6$; $5 \to 7$; $4 \to 3$; $4 \to 4$; $4 \to 5$; $4 \to 6$; $1 \to 5$; $1 \to 4$; $1 \to 3$; $1 \to A$.
Die weitere Reihenfolge ist klar.

2. Wenn wir die möglichen Richtungen für die Bewegung der Steine als die vier Himmelsrichtungen Norden, Süden, Osten und Westen ansehen, dann läßt sich die Reihenfolge, in der die Steine verschoben werden müssen, so ausdrücken:

1. Zug nach Osten;	23. S N
2. Sprung nach Westen;	24. S N
3. Zug nach Westen;	25. Z S
4. Sprung nach Osten;	26. S S
5. Zug nach Norden;	27. S O
6. Sprung nach Süden;	28. Z N

weiter in abgekürzter Schreibweise:

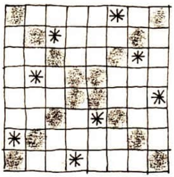
7. Z S
8. S N
9. S O
10. Z W
11. S W
12. Z N
13. Z O
14. S W
15. Z S
16. S O
17. Z N
18. S S
19. Z O
20. Z N
21. S S
22. Z W

29. S S
30. S W
31. S N
32. Z O
33. S W
34. S N
35. Z O
36. S W
37. S S
38. S O
39. S O
40. Z W
41. S W
42. Z O
43. S N
44. Z S
45. S S
46. Z N.

100. $\left.\begin{matrix}1\\8\\15\end{matrix}\right\} d = 7;\quad \left.\begin{matrix}2\\7\\12\end{matrix}\right\} d = 5;\quad \left.\begin{matrix}6\\10\\14\end{matrix}\right\} d = 4;$

$\left.\begin{matrix}9\\11\\13\end{matrix}\right\} d = 2;\quad \left.\begin{matrix}3\\4\\5\end{matrix}\right\} d = 1.$

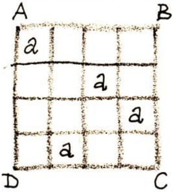
101. Die Aufgabe hat eine einzige Lösung. Sie ist in Abb. 242 dargestellt. Um bei der Suche nach der Lösung nicht im Dunklen zu tappen, kann man folgendes Verfahren anwenden: Man setzt ein Sternchen in die zweite Spalte der Felder so tief nach unten, wie dies die Stellung des Sternchens in der ersten Spalte zuläßt. Dabei muß die Bedingung beachtet werden, daß die Sternchen nur auf weiße Felder gesetzt werden dürfen. In der dritten Spalte muß man das Sternchen wieder in ein möglichst tiefes Feld setzen. Sobald sich zeigt, daß man in kein Feld einer Spalte ein Sternchen setzen kann, muß man das Sternchen in der vorhergehenden Spalte um die kleinstmögliche Anzahl Felder höherrücken (aber immer unter Einhaltung der Bedingungen der Aufgabe). Wenn man es ebenfalls nirgendwohin mehr setzen kann, dann muß man es ganz wegnehmen und das vorhergehende Sternchen wieder höherrücken und die folgenden nach der Regel unterbringen: Die bereits eingesetzten Sternchen dürfen nur in dem Falle nach oben gerückt werden, wenn rechts davon durchaus kein Platz mehr für das folgende Sternchen ist.



242

Dieses Ausprobieren ist vielleicht langwierig, aber dafür ist es systematisch und führt unbedingt zum Ziel.

102. 1. Angenommen, die Buchstaben sind gleich. Wir setzen einen Buchstaben in ein beliebiges Feld der Diagonale AC, zum Beispiel in die linke obere Ecke (Abb. 243).



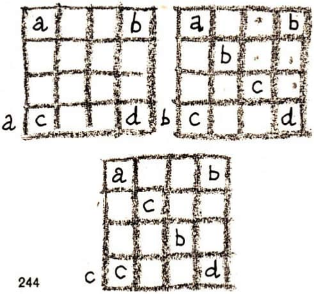
243

Unter den Feldern der zweiten Diagonale BD gibt es ein Feld, das in derselben Zeile liegt wie der erste eingesetzte Buchstabe, und ein Feld, das in derselben Spalte liegt. In eins der übrigen beiden Felder der zweiten Diagonale kann man den zweiten Buchstaben setzen.

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die Lage der übrigen beiden Buchstaben, nachdem zwei Buchstaben festgelegt sind, eindeutig bestimmt ist, das heißt, in jeder der noch nicht mit einem Buchstaben besetzten Zeile ist nur ein Feld, wohin man nach den Bedingungen der Aufgabe die übrigen Buchstaben setzen kann.

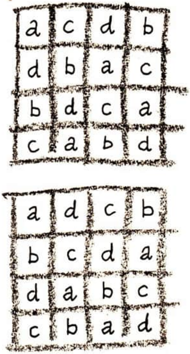
Jetzt ist es nicht schwer, die Anzahl der möglichen Lösungen zu berechnen. Für jede der vier Möglichkeiten für die Einordnung des ersten Buchstabens in ein Feld der Diagonale AC gibt es zwei Möglichkeiten für die Einordnung des zweiten Buchstabens auf der Diagonale BD, das heißt insgesamt $4 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten. Alle acht Lösungen kann man aus einer Drehung des Quadrats um jeweils 90° und durch Spiegelung des Quadrats an einer Diagonale erhalten. Jetzt nehmen wir an, daß die vier Buchstaben verschieden sind, nämlich a, b, c und d, und an Stelle der Buchstaben a in denselben Feldern wie in Abb. 243 in beliebiger Reihenfolge untergebracht sind, zum Beispiel in der Reihenfolge a, b, c, d. Aber in dieselben Felder kann man die Buchstaben auch in anderer Reihenfolge einordnen, zum Beispiel b, c, d, a. So gibt es 24 Reihenfolgen der Buchstabenanordnung. Alle diese Möglichkeiten ergeben verschiedene Lösungen. Insgesamt gibt es $8 \cdot 24 = 192$ verschiedene Lösungen.

2. Aus der Aufgabe folgt, daß die Buchstaben in den Eckfeldern verschieden sein müssen. Deshalb setzen wir die vier Buchstaben in willkürlicher Reihenfolge in die Eckfelder (Abb. 244a). In den mittleren Feldern der Diagonale, die bereits die Buch-



244

staben a und d enthalten, müssen die Buchstaben b und c stehen. Sie können auf zwei Arten eingesetzt werden (Abb. 244b und c). Nachdem sechs Felder, wie angegeben, ausgefüllt sind, können die übrigen Felder unter Einhaltung der Bedingungen der Aufgabe nur auf eine einzige Art ausgefüllt werden. Dazu muß man zunächst die Buchstaben in die äußeren Zeilen und Spalten setzen und dann in die zweite Diagonale. Die endgültige Aufstellung wird in Abb. 245 gezeigt.



245

So hat die Aufgabe, wenn die Buchstaben in den Eckfeldern eingesetzt sind, zwei Lösungen. Da man aber die vier Buchstaben in die Eckfelder auf 24 Arten einordnen kann, hat die Aufgabe $24 \cdot 2 = 48$ Lösungen. Aus jeweils einer Aufstellung erhält man durch Drehung des Quadrats um 90° und durch Spiegelung an einer Diagonale sieben weitere Lösungen.

Wenn man alle Aufstellungen, die man durch Drehung und Spiegelung erhält, als eine Lösung rechnen will, dann hat die Aufgabe $48 : 8 = 6$ verschiedene Lösungen.

103. Nach einer Reihe von Versuchen ist es euch sicherlich gelungen, irgendeine der zahlreichen Lösungen zu finden. Eine Lösung ist die in der folgenden Tabelle.

Zur Klärung der Anzahl aller möglichen Lösungen bezeichnen wir mit A, B, C und D die Farben der angefertigten Quadrate, mit a, b, c und d die Ziffern 1, 2, 3 und 4. Die Aufgabe wird dahin zusammengefaßt, daß die vier großen Buchstaben A, B, C und D so auf die 16 Felder verteilt werden, daß alle vier Buchstaben in jeder Horizontalen, jeder Vertikalen und jeder Diagonale vor-

1 rot	4 schwarz	2 grün	3 weiß
2 weiß	3 grün	1 schwarz	4 rot
3 schwarz	2 rot	4 weiß	1 grün
4 grün	1 weiß	3 rot	2 schwarz

kommen, aber sich nicht wiederholen. In der gleichen Weise verfahren wir auch mit den kleinen Buchstaben a, b, c und d, wobei sie mit den großen Buchstaben auf alle möglichen Arten kombiniert werden. Jede dieser Anordnungen können wir durch ein Verfahren erreichen, wie es in der Lösung der vorhergehenden Aufgabe beschrieben ist. Wie dort klargestellt worden ist, erhalten wir im Ergebnis 48 Varianten für die Anordnung der Buchstaben A, B, C und D in der Form eines 16 Felder umfassenden Quadrats und 48 Varianten für die Anordnung der Buchstaben a, b, c und d in der Form eines anderen 16 Felder umfassenden Quadrats. Um die Lösung zu finden, genügt es jetzt, eine beliebige Variante der ersten Gruppe auf eine beliebige Variante der zweiten zu legen. Ein Beispiel für eine Lösung ist in Abb. 246 dargestellt. Wenn wir jetzt

Aa	Bd	Cb	Dc
Db	Cc	Ba	Ad
Bc	Ab	Dd	Ca
Cd	Da	Ac	Bb

246

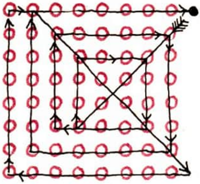
A, B, C und D entsprechend durch rote, schwarze, grüne und weiße Quadrate ersetzen und wenn wir den Buchstaben a, b, c und d wieder die Bedeutungen 1, 2, 3 und 4 zulegen, dann erhalten wir die oben angeführte Tabelle. Es ergeben sich danach 48 · 48 verschiedenartige Lösungen, das heißt mehr als 2000.

104. Es soll am Anfang der Kreis Nr. 1 frei bleiben. Jeden Zug kann man durch zwei Zahlen ausdrücken: die erste bedeutet die Nummer des Kreises, in dem ein Zug beginnt, die zweite die Nummer des Kreises, in dem er endet. Es ist dann folgende Lösung möglich: 9 → 1; 7 → 9; 10 → 8; 21 → 7; 7 → 9; 22 → 8; 8 → 10; 6 → 4; 1 → 9; 18 → 6; 3 → 11; 16 → 18; 18 → 6; 30 → 18; 27 → 25; 24 → 26; 28 → 30; 33 → 25; 18 → 30; 31 → 33; 33 → 25; 26 → 24; 20 → 18; 23 → 25; 25 → 11; 6 → 18; 9 → 11; 18 → 6; 13 → 11; 11 → 3; 3 → 1.

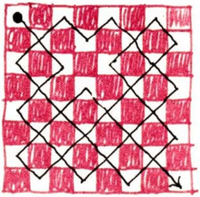
105. Die Tabelle aller 24 Lösungsmöglichkeiten:

1.	1 → 2, 3	2 → 6, 5	6 → 1, 3	1 → 6, 2
2.	1 → 2, 3	4 → 1, 3	3 → 6, 5	5 → 3, 4
3.	1 → 4, 5	3 → 4, 1	4 → 2, 6	2 → 3, 4
4.	1 → 4, 5	5 → 2, 6	6 → 4, 1	1 → 6, 5
5.	2 → 3, 4	3 → 1, 6, 5	6 → 2, 4	2 → 1, 6
6.	2 → 3, 4	5 → 2, 3	3 → 1, 6	1 → 3, 5
7.	2 → 4, 5	5 → 1, 3, 6	6 → 2, 4	2 → 1, 6
8.	2 → 4, 5	3 → 2, 5	5 → 1, 6	1 → 5, 3
9.	3 → 1, 2	5 → 3, 2	2 → 6, 4	4 → 5, 2
10.	3 → 1, 2	4 → 3, 1	1 → 6, 5	5 → 1, 4
11.	3 → 1, 2	1 → 2, 6, 4	6 → 2, 3	3 → 6, 5
12.	3 → 1, 2	2 → 1, 6, 5	6 → 3, 1	3 → 6, 4
13.	3 → 4, 5	2 → 3, 5	5 → 1, 6	1 → 2, 5
14.	3 → 4, 5	1 → 3, 4	4 → 2, 6	2 → 1, 4
15.	3 → 4, 5	4 → 1, 6, 5	6 → 5, 3	3 → 2, 6
16.	3 → 4, 5	5 → 2, 6, 4	6 → 3, 4	3 → 1, 6
17.	4 → 3, 2	3 → 1, 6, 5	6 → 2, 4	4 → 5, 6
18.	4 → 3, 2	1 → 4, 3	3 → 5, 6	5 → 3, 1
19.	4 → 1, 2	1 → 3, 6, 5	6 → 2, 4	4 → 6, 5
20.	4 → 1, 2	3 → 1, 4	1 → 6, 5	5 → 1, 3
21.	5 → 3, 4	4 → 1, 6	6 → 3, 5	5 → 6, 4
22.	5 → 3, 4	2 → 3, 5	3 → 1, 6	1 → 2, 3
23.	5 → 1, 2	3 → 2, 5	2 → 6, 4	4 → 3, 2
24.	5 → 1, 2	1 → 4, 6	6 → 2, 5	5 → 1, 6

106. Die Bahnen des Mädchens und des Jungen sind in Abb. 247a und b dargestellt.



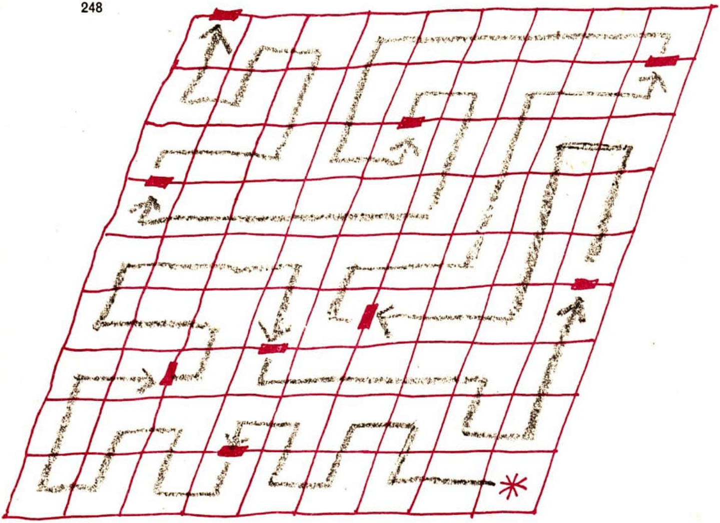
247 a



b

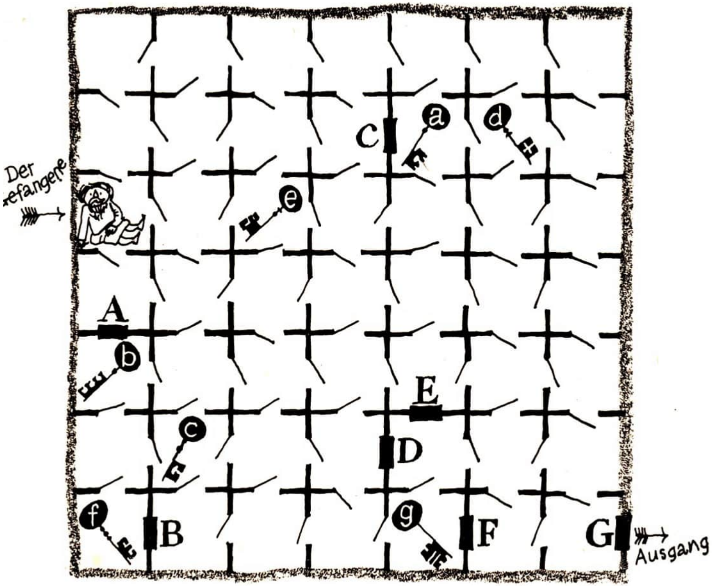
107. Der Springer gelangt immer von einem schwarzen Feld auf ein weißes und dann vom weißen wiederum auf ein schwarzes usw. Das Schachbrett hat 64 Felder. Um in die rechte obere Ecke (Feld h8) zu gelangen, muß der Springer, wenn er jedes Feld berührt, 63 Züge ausführen.
Am Anfang steht der Springer auf einem schwarzen Feld (vgl. Abb. 54 auf S. 46) und am Ende muß er ebenfalls auf einem schwarzen Feld ankommen (h8).
Das ist aber nicht möglich, weil der 63. Zug ein ungerader ist und der Springer bei jedem ungeraden Zug, da er doch auf einem schwarzen Feld beginnt, auf ein weißes Feld kommt.

248



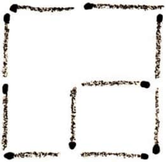
108. Der Weg, den der Gefangene fand, ist in Abb. 248 dargestellt.

109. Zuerst muß der Gefangene die Schlüssel d und e holen und damit die Türen der Zellen D und E öffnen (vgl. Abb. 56 auf S. 48). Dann muß er den Schlüssel c holen, mit ihm die Tür der Zelle C öffnen und den Schlüssel a holen, der ihm die Möglichkeit gibt, durch die Zelle A zu gehen und den Schlüssel b zu holen. Es ist jetzt unumgänglich, noch einmal durch die Zellen E und D zu gehen, um nach der Zelle B zu gelangen. Er nimmt den Schlüssel f und geht wieder durch E und öffnet die Tür der Zelle F, nimmt den Schlüssel g und geht durch die Tür G aus dem Keller heraus. Der Weg in die Freiheit war nicht leicht, er führte durch 84 Türen.



Geometrie mit Streichhölzern

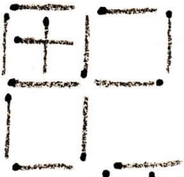
110. a) vgl. Abb. 249; b) vgl. Abb. 250; c) vgl. Abb. 251; d) vgl. Abb. 252; e) vgl. Abb. 253.



249

250

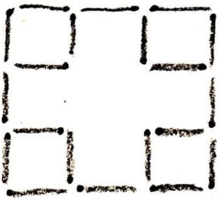
251



252

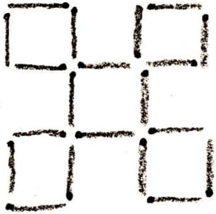
253

111. a) Man nimmt die zwölf Streichhölzer heraus, die innerhalb des großen Quadrats liegen und legt aus ihnen ein neues ebensolches Quadrat;
b) vgl. Abb. 254;
c) vgl. Abb. 255a (wenn man vier Streichhölzer wegnimmt); vgl. Abb. 255b (wenn man sechs wegnimmt); vgl. Abb. 255c (wenn man acht wegnimmt);
d) vgl. Abb. 256;
e) vgl. Abb. 257;
f) vgl. Abb. 258;
g) vgl. Abb. 259;
h) vgl. Abb. 260.



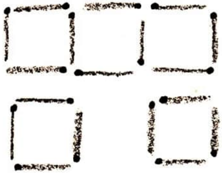
254

a

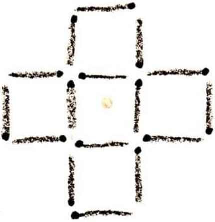


255

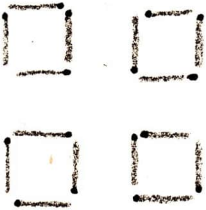
b

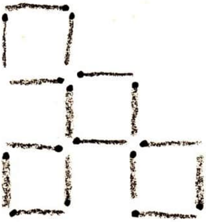


c

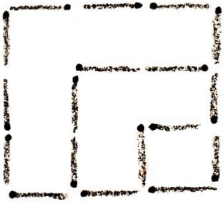


256

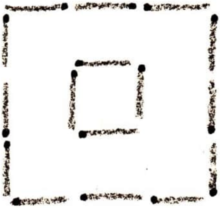




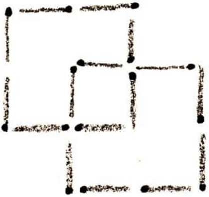
257



258

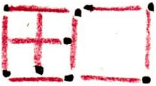


259

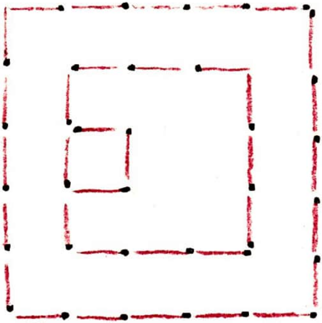



260

112. Vgl. Abb. 261.


261

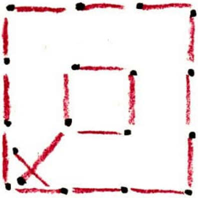
113. Vgl. Abb. 262.


262

114. Knickt zwei Streichhölzer in der Mitte (Abb. 263).


263

115. Vgl. Abb. 264.


264

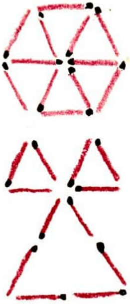
116. Vgl. Abb. 265.


265

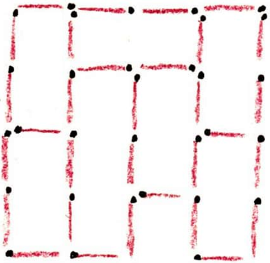
117. Vgl. Abb. 266.


266

118. Vgl. Abb. 267.


267

119. 1. Frage: 30 Quadrate (vgl. Abb. 71); 2. Frage: vgl. Abb. 268.



268

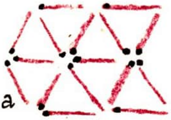
120. Vgl. Abb. 269.

269

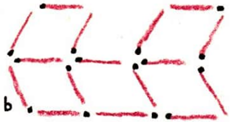
121. Vgl. Abb. 270.

270

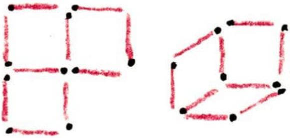
122. a) Vgl. Abb. 271 a; b) vgl. Abb. 271 b.



271

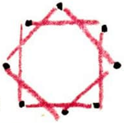


123. Vgl. Abb. 272.



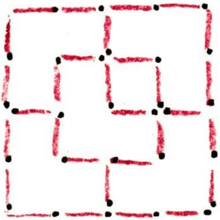
272

124. Vgl. Abb. 273.



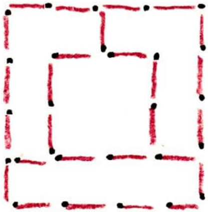
273

125. Vgl. Abb. 274.



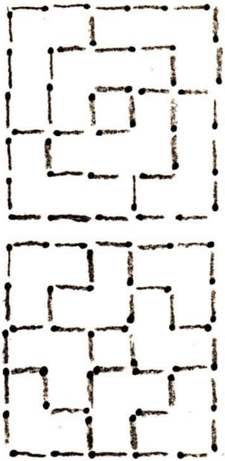
274

126. 1. Vgl. Abb. 275; 2. vgl. Abb. 276.



275

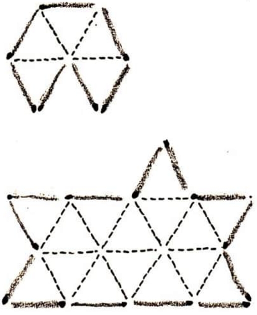
276



127. 840

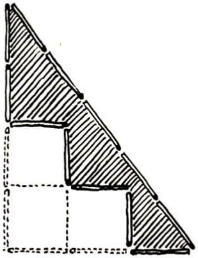
128. Vgl. Abb. 277. Es sind auch andere Lösungen möglich.

277



129. 1. Lösung. Aus den zwölf Streichhölzern muß man zunächst ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten aus drei und vier Streichhölzern und mit der Hypotenuse aus fünf Streichhölzern legen (Abb. 278). Die Fläche eines solchen Dreiecks enthält

278

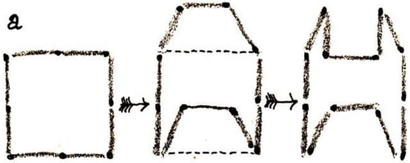


$\frac{1}{2}(3 \cdot 4) = 6$ Quadrate (mit Seiten von einer Längeneinheit).

Wenn man dann die vier Streichhölzer wegnimmt, die den rechten Winkel bilden, und sie stufenförmig umlegt (wie in Abb. 278 gezeigt ist), dann verringert sich die Fläche des Dreiecks um drei Quadrate. Die sich ergebende Figur (in der Zeichnung schraffiert) enthält ebenfalls $6 - 3 = 3$ Quadrate (mit Seiten von einer Längeneinheit).

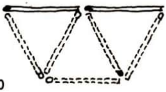
2. Lösung. Eine geistreiche Lösung ist folgende: Man konstruiert ein Quadrat, das vier Quadrate mit Seiten von einer Längeneinheit enthält (Abb. 279a), verwandelt es in eine flächengleiche Figur (wie Abbildung) und, nachdem man ein Quadrat herausgenommen hat, erhält man eine Figur, deren Fläche drei Quadrate (mit Seiten von einer Längeneinheit) enthält.

3. Lösung. Sehr geistreich ist auch die Lösung, daß man ein Parallelogramm mit einer Grundlinie von der Länge eines Streichholzes und einer Höhe von der Länge dreier Streichhölzer konstruiert (Abb. 279b).



279

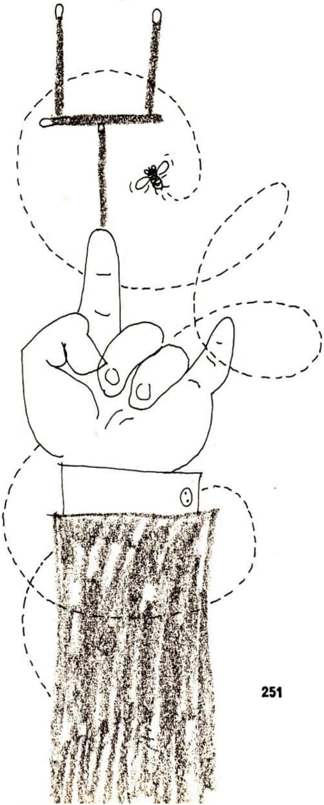
130. Zwei Streichhölzer, die in einer Geraden liegen, bilden miteinander einen Winkel von 180°. Um einen solchen Winkel zu erhalten, konstruieren wir aus Streichhölzern drei gleichseitige Dreiecke mit einer gemeinsamen Spitze (Abb. 280). Die Summe der Winkel an der gemeinsamen Spitze bildet gerade 180°, weil $60° \cdot 3 = 180°$ sind.



280

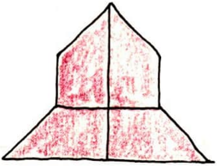
131. Wir konstruieren sechs gleichseitige Dreiecke mit einer gemeinsamen Spitze (Abb. 281). Alle inneren Streichhölzer nehmen wir weg. Die Figur, die übrigbleibt, ist ein regelmäßiges Sechseck, weil jede Seite gleich dem Radius des umbeschriebenen Kreises ist; eine solche Eigenschaft besitzt nur das regelmäßige Sechseck.

281



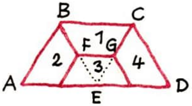
Erst wäg's, dann wag's!

132. 1. Die Schnittlinien sind in Abb. 282 angegeben. Wenn alle Konstruktionen und Schnitte genau ausgeführt sind, dann kann man die Kongruenz der erhaltenen Teile durch Übereinanderlegen prüfen.



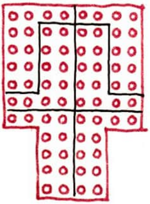
282

2. Das Trapez ABCD (Abb. 283) muß man entlang der gebrochenen Linie, die die Mitten der Strecken AE, BE, CE und DE verbindet, und entlang den Strecken BF und CG zerschneiden. Man erhält vier kongruente Trapeze.



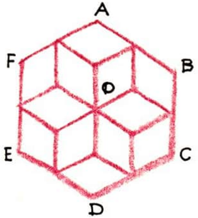
283

3. Die Schnittlinien sind in Abb. 284 gezeigt.



284

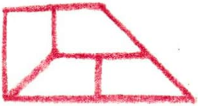
4. Um die nötigen Schnittlinien des regelmäßigen Sechsecks ABCDEF (Abb. 285) zu erhalten, muß man die Mitten seiner Seiten



285

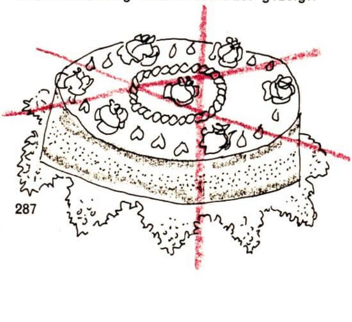
mit den Mitten der Radien OA, OB, OC, OD, OE und OF verbinden. Jeder Teil des Sechsecks ist ein Rhombus (ihr könnt es nachprüfen), der zwar gleiche Seiten hat, der aber doch kein regelmäßiges Viereck ist, weil nicht alle seine Winkel gleich sind.

5. Die Lösung ist in Abb. 286 angegeben.



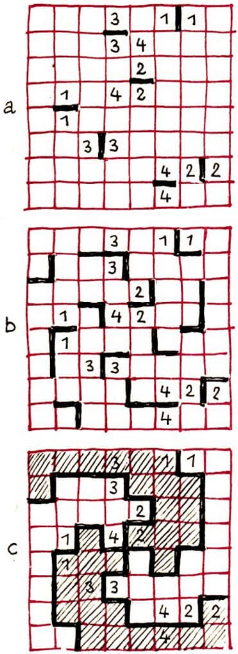
286

133. Die Lösung wird in Abb. 287 gezeigt.



287

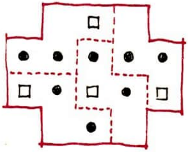
134. Die Schnittlinien werden wir folgerichtig wieder herstellen (Abb. 288):



288

a) Wir geben die Schnitte zwischen nebeneinanderliegenden Feldern mit gleichen Ziffern an (Abb. 288a);
b) entsprechend der geforderten Symmetrie (die Figurenumrisse decken sich bei einer Drehung um 90°) rekonstruieren wir jeden Schnitt noch an drei Stellen des Quadrats (Abb. 288b);
c) wir trennen die vier mittelsten Felder, weil nicht mehr als eins von ihnen einer Figur angehören kann, und beenden die Rekonstruktion der Konturen, indem wir beachten, daß alle Eckfelder verschiedenen Figuren angehören müssen und daß in jeder Figur einmal alle Ziffern von 1 bis 4 enthalten sein müssen (Abb. 288c).

135. Die Trennungslinien sind in Abb. 289 durch gestrichelte Linien dargestellt.

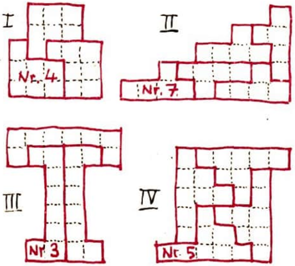


289

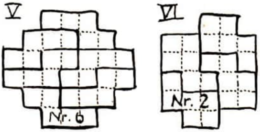
136. Durch Probieren kann man sich leicht davon überzeugen, daß ein Rechteck aus sechs Platten Nr. 1 zusammengesetzt werden kann (Abb. 290).

290

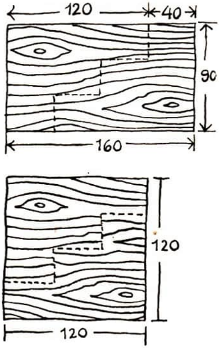
Die Figur III (vgl. Abb. 87 S. 60) läßt sich in drei Platten Nr. 3 schneiden, die Figur IV in vier Platten Nr. 5, die Figur V in sechs Platten Nr. 6, die Figur VI in vier Platten Nr. 2. Alle erforderlichen Schnitte sind in Abb. 291 eingezeichnet.



291



137. A kam auf den Gedanken, einen stufenförmigen Schnitt durch die rechteckige Sperrholzplatte (Abb. 292) zu führen.

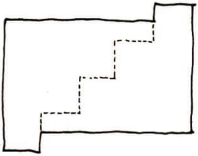


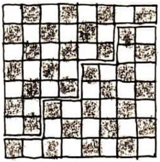
292

Man muß zugeben, daß für die genaue geometrische Umwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat ein solcher stufenförmiger Schnitt nicht immer brauchbar ist. Dennoch kann jedes beliebige Rechteck in ein Quadrat verwandelt werden.

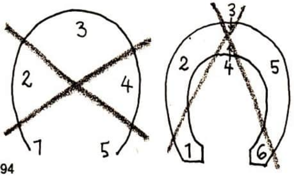
138. Die Schnittlinie ist in Abb. 293 angegeben.

293





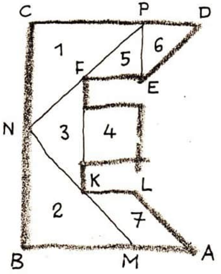
139. Man darf sich nicht darauf beschränken, das Hufeisen schematisch als Bogen darzustellen (Abb. 294). Wenn ihr das Hufeisen nicht in den genauen Ausmaßen



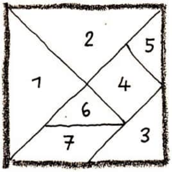
294

zeichnet, dann gelingt es euch nicht, wie sehr ihr euch auch müht, es mit zwei Geraden in mehr als fünf Teile zu zerlegen. In der Abbildung ist ein Hufeisen dargestellt, wie es mehr der Wirklichkeit entspricht, und darin ist angegeben, wie es in sechs Teile zerlegt werden kann.

140. Die Lösung ist in Abb. 295 dargestellt. Die Schnittlinien sind eingezeichnet. Gleiche Ziffern kennzeichnen gleiche Teile.

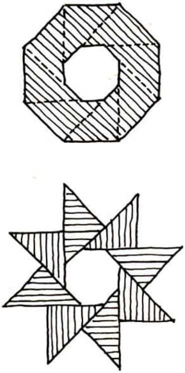


295



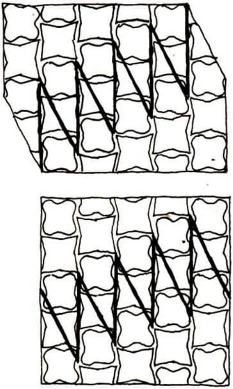
Um die Schnittlinie MN zu ziehen, tragt auf der Seite AB den Abschnitt AM = KL ab und zieht eine Gerade durch die Punkte M und K über K hinaus. Die Schnittlinie NP erhaltet ihr, wenn ihr eine Gerade durch die Punkte N und F über F hinaus zieht. Die Konstruktion der übrigen Schnittlinien ergibt sich klar aus der Zeichnung. Wenn die Figur genau gezeichnet ist, dann ist der Winkel MNP ein rechter, und die Abschnitte MB, BN, NC und CP sind gleich.

141. Die Lösung zeigt Abb. 296.



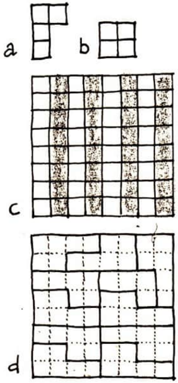
296

142. Die Lösung zeigt Abb. 297. Wenn man den oberen gezackten Teil herausnimmt und, nachdem man ihn um einen Zahn nach rechts verschoben hat, wieder in den unteren gezackten Teil schiebt, erhält der Teppich die Gestalt eines Quadrats.



297

143. Zum Beweis dessen, daß es unmöglich ist, aus einem Schachbrett 15 Figuren der Form a und eine der Form b (Abb. 298) zu schneiden, betrachten wir ein ebensolches Brett aus 8 · 8 Feldern, bei dem aber die schwarzen und weißen Felder anders angeordnet sind (Abb. 298c).

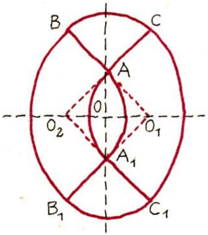


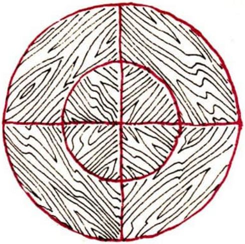
298

Aus welchem Teil des Bretts wir auch die Figur a herausschneiden mögen, sie wird eine ungerade Anzahl weißer und eine ungerade Anzahl schwarzer Felder enthalten. 15 Figuren a werden auch eine ungerade Anzahl weißer wie schwarzer Felder enthalten. Die Figur b hat dagegen eine gerade Anzahl weißer wie schwarzer Felder. Alle 16 Figuren werden zusammengenommen so eine ungerade Anzahl weißer wie schwarzer Felder haben, während unser Brett jedoch eine gerade Anzahl weißer wie schwarzer Felder enthält. Hieraus folgt die Unlösbarkeit der Aufgabe.
Eine der möglichen Lösungen der Zusatzaufgabe ist in Abb. 298d dargestellt. Die dicken Linien sind die Schnittlinien.

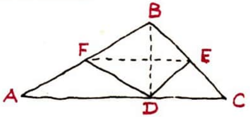
144. Zunächst stellte der Tischler fest, daß jede Tafel eine symmetrische Figur mit zwei Symmetrieachsen darstellt. Dann fand er folgendes: Wenn man die Hälfte der Längsachse der Öffnung (OA in Abb. 299) auf der Querachse abträgt ($OO_1 = OA$ und $OO_2 = OA$) und die Punkte O_1 und A sowie O_2 und A durch Gerade verbindet, dann stellt jede der Figuren BO_1B_1 und CO_2C_1 genau ein Viertel eines Kreises mit dem Radius BO_1 dar und jede der Figuren ABC und $A_1B_1C_1$ ein Viertel eines Kreises mit dem Radius A_1B_1, der gleich der Hälfte des Radius O_1B_1 ist.
Der Tischler zersägte jede Platte entlang den Linien BA, CA, B_1A_1 und C_1A_1 und leimte aus den acht Teilen eine genau kreisrunde Tischplatte zusammen, wie in Abb. 299 dargestellt ist.

299





145. Es soll ABC (Abb. 300) der Grundriß des Pelzflickens sein. Wir fällen das Lot BD auf AC.
Wenn E und F die Mitten der Seiten BC und AB sind, dann muß der Kürschner den Flicken ABC entlang den Geraden DE und DF zerschneiden, jedes Teil wenden, wobei es seinen Platz beibehält, und alles wieder zusammennähen. Dann ist das Stück ABC auf die andere Seite gewendet und hat seine Gestalt behalten. Das kann man genau beweisen.



300

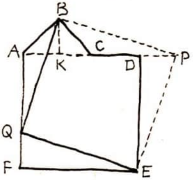
Bekanntlich ist im rechtwinkligen Dreieck die Seitenhalbierende (oder Mittellinie) der Hypotenuse gleich der Hälfte der Hypotenuse. DF und DE sind die Seitenhalbierenden in den rechtwinkligen Dreiecken ADB und BDC, folglich sind DF = AF = FB und DE = BE = CE. Hieraus folgt: $\triangle FBE \cong \triangle FDE$, und die Dreiecke AFD und DEC sind gleichschenklig. Wenn wir also die gleichschenkligen Dreiecke AFD und DEC um ihre Höhen und das Viereck FBED um die Achse FE drehen, gelangt jede Figur wieder auf ihren alten Platz in die alte Lage.
Die Aufgabe, ein Dreieck auf die andere Seite zu wenden, kann man auch auf andere Arten lösen.

Das hier dargestellte Verfahren ist das sparsamste.

146. Um die größtmögliche Anzahl von Teilen zu erreichen, muß man die Geraden so legen, daß jede von ihnen alle übrigen schneidet, wobei sich in einem Punkt nicht mehr als zwei Gerade schneiden dürfen.
Eine der Lösungsmöglichkeiten wird in Abb. 301 gezeigt; die Anordnung der Geraden ist symmetrisch. Man erhält 22 Teile.

301

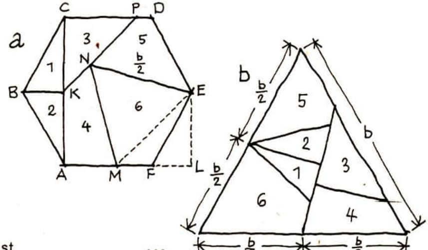
147. Das Verfahren für die Lösung ist analog demjenigen, das im Text der Aufgabe angewandt wurde (vgl. S. 64). Wir suchen von AC die Mitte K (Abb. 302) und tragen FQ = AK auf der Seite AF und DP = AK auf der Verlängerung von CD ab.



302

Jetzt zerschneiden wir die Figur durch die Geraden BQ und QE. Aus den Teilen wird das Quadrat BPEQ gebildet. Wer in der Geometrie Bescheid weiß, überlegt sich den Beweis.
Anmerkung: Das Lösungsverfahren ändert sich nicht, wenn der rechtwinklige Vorsprung ABC so groß ist, daß der Punkt C mit der Ecke D des Quadrats zusammenfällt, oder wenn ferner AC größer ist als die Quadratseite AD, aber kleiner als 2 AD, sofern nur das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist.

148. Gegeben ist ein regelmäßiges Sechseck ABCDEF (Abb. 303). Um es in ein regelmäßiges Dreieck zu verwandeln, führen wir folgende Konstruktionen aus: Wir ziehen die Gerade AC, fällen auf AC das Lot BK und auf die Verlängerung von AF das Lot



303

EL. Dann tragen wir LM = LE auf LA ab, ziehen die Gerade EM und konstruieren das gleichseitige Dreieck EMN über der Seite EM. Schließlich ziehen wir KP als Verlängerung von KN bis zum Schnittpunkt P auf CD.
Probe: Wenn alle Konstruktionen sorgfältig ausgeführt worden sind, ist CP = CK.
Die Schnittlinien sind in Abb. 303a durch ausgezogene Linien, die Hilfslinien durch gestrichelte dargestellt. Man erhält insgesamt sechs Teile. In Abb. 303b wird gezeigt, wie sich aus diesen Teilen ein gleichseitiges Dreieck zusammensetzen läßt. Zeichnet das Sechseck auf festes Papier oder Karton und schneidet es in die angegebenen Teile. Ihr erhaltet eine Rätselaufgabe für eure Freunde: Sie sollen aus den Teilen entweder ein regelmäßiges Sechseck oder ein regelmäßiges Dreieck bilden.
An Hand der Lösungszeichnung kann man leicht die Richtigkeit der Konstruktion beweisen.

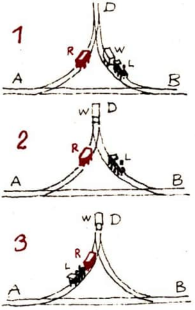
Können ist immer von Nutzen

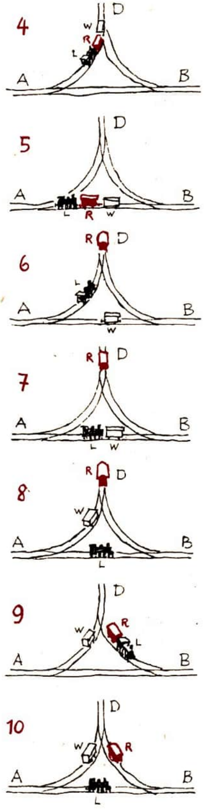
149. Das Ziel befindet sich nach den Angaben auf den Schirmen 75 km von Station A und 90 km von Station B entfernt.
Man muß mit dem Zirkel in dem Maßstab, der in Abb. 99 unten (vgl. S. 66) angegeben ist, entsprechend den beiden Entfernungen Kreisbögen schlagen, und zwar einen um A mit dem Radius, der der Entfernung von 75 km entspricht, und einen um B mit dem Radius, der der Entfernung von 90 km entspricht. Die Bögen schneiden sich in dem Punkte auf dem Meer, wo sich das entdeckte Ziel befindet.

150. 1. 6 Schnitte; 2. 27 Würfel; 3. kein einziger; 4. 8, das sind soviel, als der Würfel Ecken hat; 5. 12, das sind soviel, als der Würfel Kanten hat; 6. 6, das sind soviel, als der Würfel Flächen hat; 7. 1 Würfel.

151. Wie der Lokführer die Aufgabe löste, kann man sich an Hand der folgenden schematischen Darstellung (Abb. 304) vorstellen. (Wir kennzeichnen den weißen und den roten Waggon mit den entsprechenden Buchstaben W und R und die Lok mit dem Buchstaben L.)

304



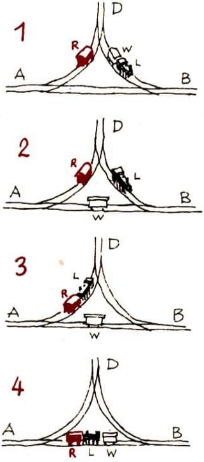


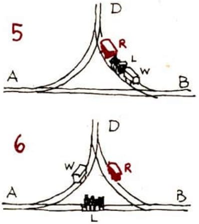
1. Die Lok fährt nach BD, kuppelt den Waggon W an und fährt mit ihm nach D;
2. bringt den Waggon W auf das Auslaufgleis D, läßt ihn dort und fährt nach BA;
3. fährt über BA nach AD, kuppelt den Waggon R an und fährt mit ihm in Richtung Auslaufgleis D;
4. kuppelt den Waggon W an und fährt mit den Waggons R und W nach AB;
5. läßt den Waggon W auf AB stehen und fährt mit R nach AD;
6. bringt R auf das Auslaufgleis D, läßt ihn dort und fährt nach AB;
7. kuppelt den Waggon W an und fährt mit ihm nach AD;
8. läßt W auf AD stehen und fährt über AB nach BD;
9. kuppelt R an und bringt ihn nach DB;
10. läßt R auf DB stehen und kehrt zurück auf ihren alten Platz auf AB.

Sucht selbständig andere Lösungen! Mir sind zum Beispiel noch zwei Lösungen in zehn Zügen bekannt.

Lösung der Aufgabe in sechs Zügen (Abb. 305):

305





1. Die Lok fährt nach BD, kuppelt den Waggon W an und fährt mit ihm nach AB;
2. läßt W auf AB stehen und fährt nach AD über die Weiche bei D;
3. kuppelt den Waggon R an und fährt mit ihm nach AB;
4. kuppelt W an und fährt mit den Waggons R und W nach BD;
5. läßt den Waggon R auf BD und fährt mit dem Waggon W über BA nach AD;
6. läßt den Waggon W dort stehen und kehrt allein zurück nach AB.

Ihr habt natürlich bemerkt, daß am Ende der Rangierbewegungen die Lok mit dem Schornstein nach links zeigt.

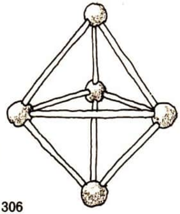
Wahrscheinlich bevorzugte deshalb auch der Lokführer die Lösung in zehn Zügen, weil er seine Lok nicht um 180° drehen wollte.

152. 1. Wiegevorgang: Die Graupen werden zu zwei gleichen Mengen von je 4,5 kp ausgewogen (das kann man ohne Gewichte machen);
2. Wiegevorgang: Eine Hälfte wiegt man noch einmal zu zwei gleichen Mengen von je 2,25 kp aus;
3. Wiegevorgang: Von einem Teil werden mit Hilfe der Gewichte 250 p abgewogen. Übrig bleiben 2 kp.

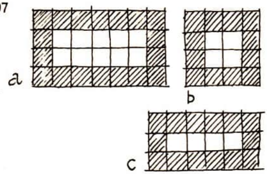
153. Bei der Anordnung, die in Abb. 101 (vgl. S. 68) gezeigt wird, ist eine Drehung aller Scheiben möglich. Wenn sich dabei die Scheibe A im Uhrzeigersinn dreht, dann dreht sich die Scheibe B entgegen dem Uhrzeigersinn, die Scheiben C und D drehen sich jedoch ebenfalls im Uhrzeigersinn.
Wenn alle vier Treibriemen gekreuzt sind,

ist auch eine Drehung der Scheiben möglich; wenn aber nur ein Riemen, beliebig welcher, oder drei Riemen, auch beliebig welche, gekreuzt sind, ist keine Drehung möglich.

154. Die Aufgabe ist bei Beschränkung auf eine Ebene unlösbar, das heißt, wenn man alle sieben Dreiecke so anordnen will, daß sie, sagen wir, auf dem Tisch liegen.
Man muß unbedingt „aus der Ebene herausgehen" und zwei Pyramiden mit gemeinsamer Grundfläche bilden, wie es in Abb. 306 gezeigt wird.


306

155. Man nimmt zunächst ein beliebiges Rechteck mit ganzzahligen Maßen für die Seiten und zerlegt es in einzelne Quadrate (Abb. 307a).

307


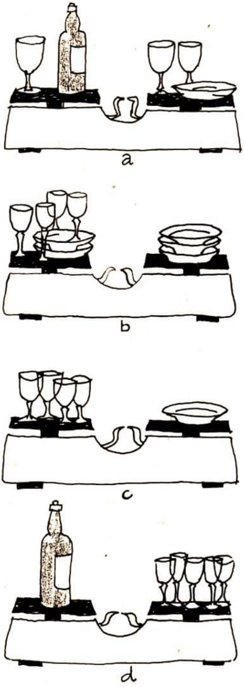
Betrachten wir jetzt den „Rand" in der Breite von einem quadratischen Feld längs den Seiten des Rechtecks. Der „Rand" ist schraffiert.
Die Fläche des „Rands" ist bereits ein Teil der Fläche des Rechtecks. Aber die Anzahl der einzelnen Quadrate des Rands ist immer um 4 kleiner als die Zahl, die den Umfang des Rechtecks ausdrückt. Der Umfang ist $4 + 7 + 4 + 7 = 22$ Einheiten; die Anzahl der Felder des Rands beträgt nur 18 Einheiten. Folglich muß das übrige „Mittelstück" des Rechtecks (der nicht schraffierte Teil in Abb. 307a) unbedingt 4 Quadrateinheiten umfassen.
Das „Mittelstück" des gesuchten Rechtecks ist auch ein Rechteck. Aber 4 einzelne Quadrate kann man nur auf zweierlei Weise zu einem Rechteck zusammenstellen (die nicht schraffierten Teile in den Abb. 307b und c). Wenn wir sie mit einem Rahmen umgeben, erhalten wir zwei Lösungen:
1. ein Quadrat $4 \cdot 4$;
2. ein Rechteck $6 \cdot 3$.
Die algebraische Lösung der Aufgabe führt zu einer sogenannten Diophantischen Gleichung mit zwei Unbekannten. Die Maße des gesuchten Rechtecks sollen x und y sein. Dann ist sein Umfang $2(x + y)$ und seine Fläche xy.
Nach der Bedingung der Aufgabe ist
$2(x + y) = xy$.
Im Bereich der natürlichen Zahlen hat diese Gleichung nur drei Lösungen:

$$x = 4, \quad y = 4;$$
$$x = 6, \quad y = 3;$$
$$x = 3, \quad y = 6.$$

Im geometrischen Sinne sind die beiden letzten Lösungen identisch.

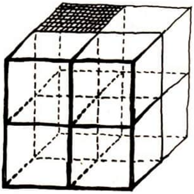
156. Wir beginnen mit Abb. 103 (S. 69), in der gezeigt wird, daß die Flasche und das Glas den Krug im Gleichgewicht halten. In Abb. 103b befinden sich auf der linken Waagschale die Flasche und auf der rechten ein Teller und das Glas. Wenn wir auf beide Waagschalen noch ein Glas stellen, stören wir das Gleichgewicht nicht. Folglich halten die Flasche und das Glas einem Teller und zwei Gläsern das Gleichgewicht (Abb. 308a). Wenn wir die linke Waagschale der Abb. 103a mit der Abb. 308a vergleichen, stellen wir fest, daß der Krug ebensoviel wiegt wie ein Teller und zwei Gläser. Weil aber andererseits zwei Krüge mit drei Tellern im Gleichgewicht sind (Abb. 103c), wiegen drei Teller ebensoviel wie zwei Teller und vier Gläser (Abb. 308b).

308



Nehmen wir jetzt von jeder Waagschale zwei Teller herunter, dann zeigt sich, daß das Gewicht eines Tellers gleich dem Gewicht von vier Gläsern ist (Abb. 308c). Kehren wir zurück zur Darstellung in Abb. 103b. An die Stelle des Tellers setzen wir vier Gläser, dann halten fünf Gläser der Flasche das Gleichgewicht (Abb. 308d), woraus sich die Antwort ergibt: Die Flasche ist fünfmal schwerer als ein Glas. Gleichzeitig erhellt daraus, daß ein Krug sechsmal so schwer ist wie ein Glas.

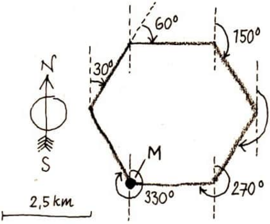
157. Der Meister zerschneidet jeden Würfel in acht Würfel (Abb. 309). Der Gesamtinhalt der Oberflächen eines Würfels verringert sich auf ein Viertel, aber die Anzahl der Würfel wird verachtfacht. Folglich verdoppelt sich der Gesamtinhalt der Oberflächen aller Würfel.



309

158. Er goß Wasser in die mit Schrot gefüllte Büchse. Das Wasser füllt alle Zwischenräume zwischen den Schrotkugeln aus. Jetzt bildete das Volumen des Wassers und das des Bleis das Volumen der Büchse. Nun nahm er das Blei aus der Büchse und maß das Volumen des Wassers, das in der Büchse blieb. Durch Subtraktion des Volumens des Wassers von dem der Büchse berechnete er das Volumen des Bleis.

159. Wie aus der Konstruktion (Abb. 310) ersichtlich ist, kam der Unteroffizier an demselben Punkt heraus, von dem aus er den Marsch begonnen hatte.

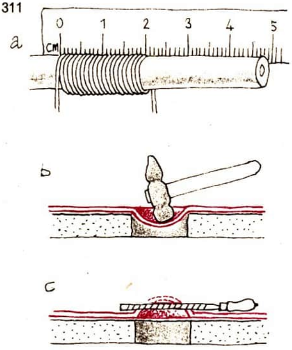


310

160. Wenn man die Entfernung von einer Schnittstelle durch einen Ast bis zur nächsten Schnittstelle durch denselben Ast mißt, dann zeigt sich (vgl. Abb. 104 auf S. 70), daß sie ungefähr $^2/_3$ der Breite der ganzen Furnierplatte beträgt.
Die Platte ist 150 cm breit. Folglich beträgt die Entfernung zwischen den Aststellen oder der Umfang des Stamms 100 cm, und der Durchmesser d des Stamms ist $d \approx 100:3{,}14 \approx 32$ cm.

161. Wenn wir einige Windungen des Drahts fest auf einen Stab – einen Nagel oder einen Bleistift – wickeln, dann können wir seinen Durchmesser mit Hilfe des Lineals bestimmen (Abb. 311 a).

311

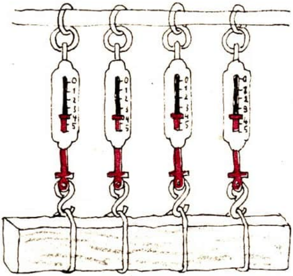


Es sollen zum Beispiel 20 Windungen des Drahts 6 mm einnehmen. Dann ist der Durchmesser des Drahts 0,3 mm.
Um eine runde Öffnung nur mit Hilfe von Hammer und Flachfeile in ein Blech zu machen, muß man das Blech vor allem auf eine Unterlage mit einer rechteckigen oder noch besser mit einer kreisrunden Öffnung legen. Dann klopft man mit dem Hammer eine becherartige Vertiefung in das Blech (Abb. 311 b), und nachdem man es mit der Wölbung nach oben gedreht hat, feilt man den Huckel ab (Abb. 311 c).

162. Mit keinerlei Erfindung kann man eine Brennstoffeinsparung von 100% erreichen, weil Energie nicht „aus nichts" entstehen kann. Allein dieser Umstand zeigt, daß die Berechnung der Einsparung unüberlegt war.
Wenn die Anwendung jeder Erfindung unabhängig von der Anwendung der anderen Erfindungen eine bestimmte Menge Brennstoff einspart, dann bewirkt die gleichzeitige Anwendung aller Erfindungen eine größere Einsparung als jede beliebige von ihnen, aber natürlich keine Einsparung von 100%.
Die Berechnung muß man folgendermaßen ausführen: Es sollen vor Anwendung der Erfindungen 100 kp Brennstoff verbraucht werden. Nach der Anwendung der Erfindung, die 30% einspart, wird man nur 70 kp Brennstoff brauchen.
Die zweite Erfindung erspart 45% von 70 kp Brennstoff, das heißt, sie setzt den Verbrauch an Brennstoff herab auf $0{,}55 \cdot 70 = 38^1/_2$ kp. Die nächste Erfindung erspart 25% von $38^1/_2$ kp Brennstoff, das heißt, sie setzt den Verbrauch an Brennstoff herab auf $0{,}75 \cdot 38^1/_2 = 28^7/_8$ kp. Die gesamte Einsparung an Brennstoff ist 100 kp — $28^7/_8$ kp $= 71^1/_8$ kp, was also eine Einsparung von $71^1/_8$% bedeutet.
Man kann die Reihenfolge der Berechnung der Einsparungen ändern, indem man zum Beispiel die Berechnung mit der Erfindung beginnt, die 45% Brennstoff einspart, dann die Einsparung von 30% und dann die von 25% berechnet oder nach noch einer anderen Reihenfolge verfährt: Das Endergebnis ist das gleiche.
Überzeugt euch davon.
Wenn jedoch die Wirkung einer Erfindung auf denselben Voraussetzungen beruht wie

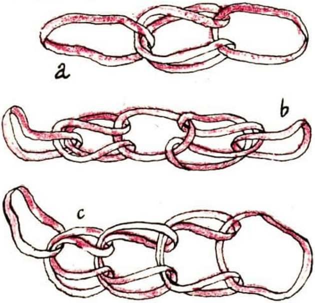
die der übrigen, dann kann sich praktisch ergeben, daß die Wirkung der Anwendung aller drei Erfindungen dieselbe ist wie die der wirksamsten Erfindung, das heißt im vorliegenden Falle 45%.

163. Man muß die Last an vier Federwaagen hängen (Abb. 312). Jeder Haken trägt ein gewisses Teil des gesamten Balkens.
Die Summe aller angezeigten Gewichte ergibt das Gewicht des Balkens. Die Abbildung zeigt, daß der Balken 16 kp wiegt.



312

164. In Abb. 313a, b, c sind die entsprechenden Lösungen der Aufgaben 1 bis 3 angegeben.

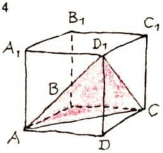


313

165. 1. Es ist unmöglich, mit einem Schnitt durch einen Würfel ein regelmäßiges Fünfeck zu bilden. Dazu müßte die Schnittfläche fünf von den sechs Flächen des Würfels schneiden. Dessen Flächen sind aber alle paarweise parallel. Folglich muß man beim Schnitt eine Figur erhalten, die parallele Seiten hat. (Wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten werden, dann sind die Schnittlinien parallel.) Das trifft aber für das regelmäßige Fünfeck nicht zu.

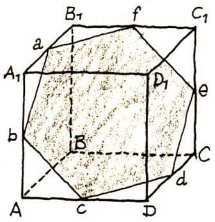
2. Wenn man einen Würfel in einer Ebene durchschneidet, die durch drei seiner Ecken geht, so wie in Abb. 314 durch D_1, A und C, dann erhält man als Schnittfläche das regelmäßige Dreieck AD_1C; es ist regelmäßig, weil seine Seiten die Diagonalen AD_1, AC und D_1C kongruenter Quadrate sind. Ein regelmäßiges Dreieck erhält man außer bei dem Schnitt AD_1C auch bei dem dazu parallelen Schnitt A_1BC_1 und bei jedem beliebigen Schnitt, der parallel zu den genannten, aber nicht zwischen ihnen liegt.

314



Erklärt, welche Figur man bei einem ebenen Schnitt durch einen Würfel zwischen den Schnittflächen AD_1C und A_1BC_1 und parallel zu ihnen erhält.
Um mit einem Schnitt ein regelmäßiges Sechseck zu bilden, ist es nötig, die Ebene durch die Punkte a, b, c, d, e, f zu legen, das sind die Mittelpunkte der Kanten A_1B_1, AA_1, AD, DC, CC_1, B_1C_1 (Abb. 315). Wenn man die Mittelpunkte der anderen Kanten verwendet, erhält man auch regelmäßige Sechsecke (insgesamt vier); sie sind alle kongruent.

3. Eine Ebene kann jede Fläche eines Würfels nur einmal schneiden; die Gesamtzahl



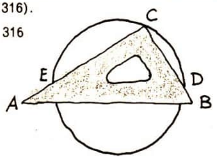
315

der Flächen des Würfels ist sechs. Folglich kann man beim Schnitt durch den Würfel in einer Ebene unmöglich ein Vieleck mit einer Anzahl von mehr als sechs Seiten erhalten.

166. Weil jeder Kasten die Gestalt eines Würfels hat, liegen in dem einen Kasten drei, in dem anderen vier Kugeln in einer Reihe. Gleiche Kästen haben gleiche Kanten. Folglich ist der Durchmesser einer großen Kugel $^4/_3$ mal so groß wie der Durchmesser einer kleinen Kugel und ihr Volumen und Gewicht ist $^{64}/_{27}$ mal so groß wie bei der kleinen Kugel (weil Volumen und Gewicht einer Kugel proportional dem Kubus ihres Durchmessers sind).
Also muß jede große Kugel $^{64}/_{27}$ mal so schwer sein wie eine kleine, aber dafür sind nur $^{64}/_{27}$ mal soviel große Kugeln in einem Kasten wie kleine.
Daraus ergibt sich, daß beide Kästen gleich viel wiegen.

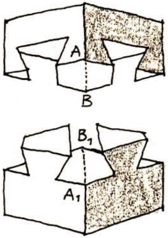
167. Wir legen das Zeichendreieck so auf den Kreis, daß die Ecke C des Dreiecks sich mit einem beliebigen Punkt des Kreises deckt, und zeichnen die Punkte D und E als Schnittpunkte der Katheten mit dem Kreis an. Die Strecke DE ist der Durchmesser (Abb. 316).

316



Auf analoge Weise konstruieren wir einen zweiten Durchmesser; der Schnittpunkt der Durchmesser ist der Mittelpunkt des Kreises.

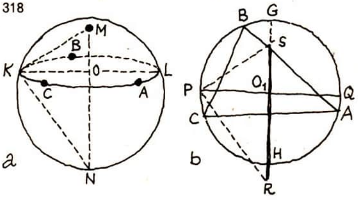
168. Die Teile des Würfels bestanden aus Formen, wie sie in Abb. 317 dargestellt sind. Zusammengefügt deckten sich die rechten Winkel A und A_1 sowie B und B_1.
Die Teile des Würfels ließen sich nur durch Verschiebung von Ecke zu Ecke entlang der Linie AB trennen.



317

169. Wir setzen die Spitze des Zirkels auf einen beliebigen Punkt M der Kugel und beschreiben mit einem beliebigen Radius auf ihrer Oberfläche einen Kreis, auf dem wir drei beliebige Punkte A, B und C angeben (Abb. 318a). Die Abstände zwischen den Punkten nehmen wir in den Zirkel und über-

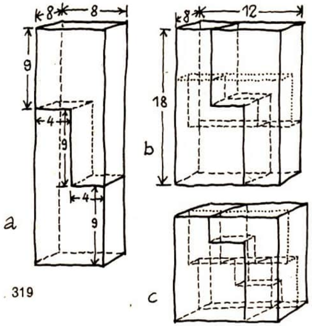
318



tragen sie auf das Papier in Gestalt eines Dreiecks ABC (Abb. 318b). Weiter umschreiben wir dem Dreieck ABC einen Kreis und ziehen durch ihn zwei senkrecht aufeinanderstehende Durchmesser PQ und GH.

Dieser Kreis ist gleich dem Kreis, den wir auf der Kugel beschrieben haben, also $PQ = KL$.
Es soll der Punkt P auf dem Kreis dem Punkt K auf der Oberfläche der Kugel entsprechen. Wir nehmen den Abstand KM in den Zirkel und tragen von P aus mit dem Radius KM auf GH den Punkt S ab. Wir errichten auf PS bis zum Schnittpunkt mit der Verlängerung von GH in R die Senkrechte PR. Die Strecke SR ist gleich dem Durchmesser der Kugel. Wenn man K mit den Endpunkten M und N des Durchmessers durch Gerade verbindet, dann ist in der Tat das entstandene rechtwinklige Dreieck MKN kongruent dem rechtwinkligen Dreieck SPR, weil $KM = PS$ und $KO = PO_1$ ist.

170. Wir schneiden den Block (das Parallelepiped) in zwei gleiche stufenförmige Körper, wie in Abb. 319a gezeigt wird, wobei wir die Höhe der Stufen 9 cm und ihre Breite 4 cm wählen.

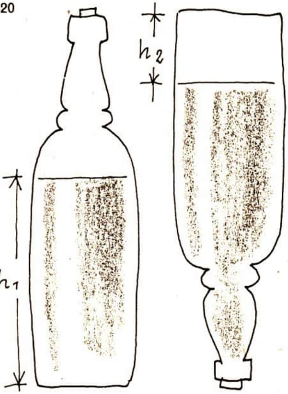


319

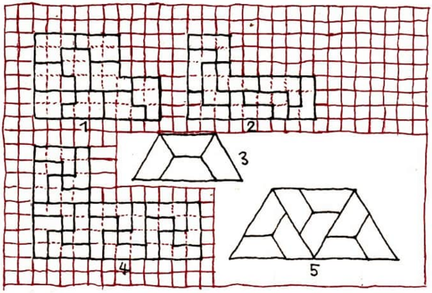
Wenn wir den oberen Teil der Blocks um eine Stufe heruntersetzen, bilden wir einen neuen Block (ein neues Parallelepiped) mit den Kanten von 12 cm, 8 cm und 18 cm Länge (Abb. 319b). Den erhaltenen Block schneiden wir wiederum in zwei stufenförmige Körper, aber jetzt in der Richtung, die auf der vorherigen senkrecht steht. Die Höhe der Stufen wählen wir 6 cm und ihre Breite 4 cm. Dabei ergeben sich insgesamt vier Körper. Wenn wir die beiden oberen Teile eine Stufe heruntersetzen, ergibt sich ein Würfel (Abb. 319c).

171. Weil der Boden der Flasche nach der Bedingung die Form eines Kreises, Quadrates oder Rechtecks hat, kann man seine Fläche mit Hilfe nur eines Lineals mit Maßeinteilung leicht bestimmen. Wir bezeichnen sie mit s.
Darauf messen wir die Höhe der Flüssigkeit in der Flasche. Dann ist das Volumen desjenigen Teils der Flasche, den die Flüssigkeit einnimmt, gleich sh_1 (Abb. 320).
Jetzt drehen wir die Flasche um und messen die Höhe h_2 des Abschnitts vom Spiegel der Flüssigkeit bis zum Flaschenboden. Das Volumen dieses Abschnitts der Flasche ist gleich sh_2. Den Rest der Flasche nimmt die Flüssigkeit ein, deren Volumen wir bereits mit sh_1 bestimmt haben.
Hieraus folgt, daß das Volumen der ganzen Flasche gleich $sh_1 + sh_2 = s(h_1 + h_2)$ ist.

320



172. Vergleiche die Lösungen in Abb. 321.



321

173. Die inneren Winkel eines Neunecks und eines Zehnecks betragen 140° und 144°. Wenn wir sie unter Zuhilfenahme des Mechanismus mit Scharnieren in einer Zeichnung mit gemeinsamem Eckpunkt A darstellen, erhalten wir einen Winkel von 4°. Wenn wir diesen Winkel mit Zirkel und Lineal halbieren und einen der halben Winkel nochmals auf diese Art halbieren, dann erhalten wir einen Winkel von 1°.

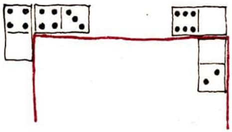
Domino und Würfel

174. Da auf den Dominosteinen jede Ziffer von 0 bis 6 achtmal vorkommt und die Quadrate paarweise mit gleicher Augenzahl aufgelegt sind, muß die Kette, die mit fünf Augen beginnt, mit der gleichen Augenzahl enden, also mit fünf Augen.

175. 1. Aus der Lösung der vorhergehenden Aufgabe folgt, daß alle 28 Dominosteine bei Einhaltung der Spielregel eine geschlossene Kette bilden. Und wenn man aus dieser Kette zum Beispiel den Stein 3–5 herausnimmt, dann ist klar, daß die Kette der übrigen 27 Steine an einem Ende mit fünf und am anderen mit drei Augen beginnt.
2. Es ist nicht schwer, sich darüber klar zu werden, warum das so ist. Die Augenzahlen der 13 Dominosteine, die ihr von links nach rechts aufgelegt habt, stellen die Zahlenfolge 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 dar. Nach rechts anschließend liegen 12 Steine in willkürlicher Reihenfolge, von denen ein Teil (nach der Bedingung nicht mehr als 12) von rechts nach links hinter den Stein 6–6 umgelegt worden ist. Vor der Umstellung der Steine lag der „leere" Stein (der Blanke) in der Mitte, das heißt 0–0.
Nehmen wir jetzt an, daß in eurer Abwesenheit ein Dominostein vom rechten Rand nach dem linken umgelegt worden ist. Welcher Stein liegt jetzt in der Mitte? Offensichtlich 0–1. Die Eins besagt euch, daß ein Stein umgelegt worden ist. Und wenn eure Freunde zwei Steine umgelegt haben, liegt der Stein mit zwei Augen in der Mitte usw. Mit einem Wort, der mittlere Stein gibt euch mit Sicherheit die Anzahl der umgelegten Steine an.

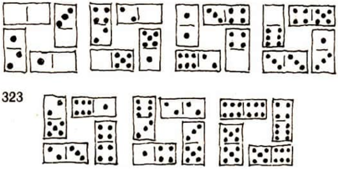
176. Verdeckt blieben die Steine 0–2, 1–2, 2–5, 6–2. Aufgelegt wurden 2–4, 3–4, 3–2, 2–2. Es ist folgende Verteilung der Steine unter die Spieler B, C und D möglich: B: 0–1, 0–3, 0–6, 0–5, 3–6, 3–5; C: 0–0, 1–1, 2–2, 3–3, 4–4 und 3–4; D: 6–6, 5–5, 6–5, 6–4, 5–4, 6–1.

177. Obere Seite (von links nach rechts): 4–3, 3–3, 3–1, 1–1, 1–4, 4–6. 6–0. Rechte Seite (von oben nach unten): 0–2, 2–4, 4–4, 4–5, 5–5, 5–1, 1–2. Untere Seite (von rechts nach links): 2–3, 3–5, 5–0, 0–3, 3–6, 6–2, 2–2. Linke Seite (von unten nach oben): 2–5, 5–6, 6–6, 6–1, 1–0, 0–0, 0–4. Der Anschluß in den oberen beiden Ecken wird in Abb. 322 gezeigt.



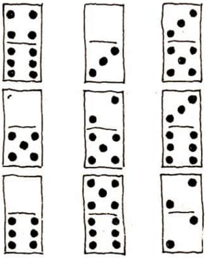
322

178. Die Lösung ist in Abb. 323 dargestellt.



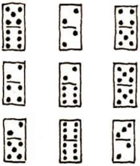
323

179. 1. Die Lösung wird in Abb. 324 gezeigt.



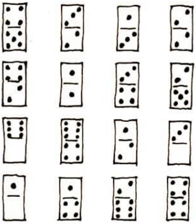
324

2. Die Lösung wird in Abb. 325 gezeigt. Die Konstante des Quadrats ist 24.



325

3. Eine Lösungsmöglichkeit zeigt Abb. 326



326

4. Die Lösung zeigt folgendes Schema:

5–3	0–3	0–6	2–2	1–5
1–1	3–2	1–6	4–5	0–4
6–2	4–6	0–0	1–2	2–4
0–1	1–3	2–5	3–6	3–3
4–4	1–4	3–4	0–2	0–5

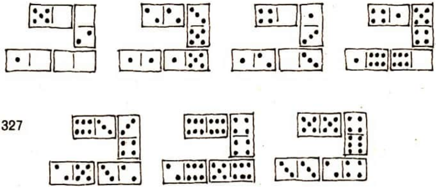
Wenn wir in diesem Quadrat die Spalten oder Zeilen vertauschen, erhalten wir wieder ein magisches Quadrat, ähnlich, wie man mit dem Quadrat mit 16 Steinen verfahren konnte (vgl. S. 82).

180. Die Lösung wird in Abb. 327 gezeigt.

181. Es soll der Stein x–y gemerkt und die Hälfte mit den x Augen ausgewählt worden sein. Wir führen die Berechnung aus: 1. $2x$; 2. $2x + m$; 3. $(2x + m) 5 = 10x + 5m$; 4. $10x + 5m + y$. Wir subtrahieren $5m$; es bleibt $10x + y$, eine zweistellige Zahl. Die Ziffern des Zehners und des Einers dieser zweistelligen Zahl stimmen überein mit den Ziffern x und y, die die Zahlen der Augen auf dem gemerkten Stein bezeichnen.

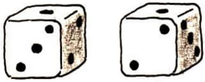
182. Nach der Bedingung der Aufgabe besteht die „erratene" Summe aus der Zahl der Augen auf den Oberflächen der Würfel in ihrer letzten Stellung plus der Summe der Augen auf einem beliebigen Paar gegenüberliegender Seitenflächen, und diese Summe ist, wie bekannt, 7.

183. a) Feststellung der verdeckten Summe nach der sichtbaren Zahl der Augen auf der oberen Fläche der Säule. Die Summe der Augen auf den verdeckten Flächen, mit denen die Würfel aufeinanderliegen, und auf der unteren Fläche ist 21 minus die Zahl der Augen, die auf der oberen Fläche der Säule sichtbar ist (vgl. Abb. 131 S. 86). Wenn also die Augen addiert werden, die sich auf allen horizontalen Flächen der drei Würfel befinden, das heißt die Augen auf drei Paar einander gegenüberliegenden Flächen, dann beträgt die Summe 21 ($3 \cdot 7 = 21$). Aber die Summe soll nach der Bedingung der Aufgabe nicht die Zahl der Augen a auf der oberen Fläche enthalten. Wenn wir diese Zahl von 21 abziehen, erhalten wir die gesuchte Summe.
b) Feststellung der verdeckten Summe nach



327

zwei sichtbaren Seitenflächen der Säule. Bei Beachtung des „Prinzips der Sieben" sind zwei Reihenfolgen für die Anordnung der Augen auf den Flächen eines Spielwürfels möglich. Die eine Reihenfolge für die Anordnung ist die spiegelbildliche Wiedergabe der anderen. Legt einen Würfel mit der 1 nach oben auf den Tisch. Dann befindet sich die 2 auf einer Fläche und die 3 auf einer benachbarten Fläche rechts oder links davon. Mit anderen Worten folgen beim Blick von oben die drei Augen den zwei Augen entweder im Uhrzeigersinn (Abb. 328a) oder entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn (Abb. 328b). Nachdem die Reihenfolge der Anordnung für 1, 2 und 3 Punkte festliegt, ist die Anordnung der 4, 5 und 6 Punkte auf den übrigen Würfelflächen eindeutig nach dem „Prinzip der Sieben" bestimmbar. Wenn wir wissen, wie die Punkte auf den Seiten des Würfels zueinander geordnet sind und das „Prinzip der Sieben" kennen, genügt es, wenn wir zwei beliebige benachbarte Seitenflächen des Würfels sehen, um die Zahl der Augen auf der oberen und dann auch auf der unteren Fläche festzustellen.



328 a b

Zum Beispiel sehen wir auf dem unteren Würfel in Abb. 131 auf einer Fläche 3 Punkte und auf der rechts benachbarten 5 Punkte. Folglich müssen auf der benachbarten Fläche nach links 2 Punkte sein, oben 1 Punkt und unten 6 Punkte (wenn es ein Würfel vom Typ b ist). Auf dem mittleren Würfel hat eine Seitenfläche 6 Augen, folglich die abgewandte 1 Auge, die rechte hat 3, folglich die obere 2 und die untere 5 Augen. Zum fehlerlosen Erraten der Augen auf den verdeckten Flächen nach der gezeigten Methode ist freilich angespannte Aufmerksamkeit und praktische Übung erforderlich.

184. Da die Summe der Augen auf zwei einander gegenüberliegenden Flächen eines jeden Spielwürfels immer gleich 7 ist, sind die drei Ziffern, die der zuerst aufgeschriebenen dreistelligen Zahl angehängt werden, Ergänzungen zu 7.

Wenn wir die anfangs aufgeschriebene Zahl mit A bezeichnen, dann ist die hinzugesetzte dreistellige Zahl $777 - A$ und die ganze sechsstellige Zahl $1000\,A + (777 - A)$ oder $999\,A + 777 = 111\,(9A + 7)$. Wie man sieht, ist die Zahl durch 111 teilbar. Man erhält $9A + 7$. Diese Zahl wird angesagt. Wenn wir von ihr 7 abziehen und die Differenz durch 9 teilen, dann erhalten wir die ursprüngliche Zahl A.

Eigentümlichkeiten der Neun

185. 1. Der Rest aus der Division einer Zahl durch 9 ist derselbe wie der aus der Division ihrer Quersumme durch 9 (Besonderheit 2 S. 89). Da sich die Quersumme um die Größe, die durch die weggestrichene Ziffer ausgedrückt wird, verringert, verkleinert sich auch der Rest um dieselbe Größe. Es wird auch klar, daß sich die Größe des Restes nicht ändert, wenn die weggestrichene Ziffer eine 9 oder eine 0 ist. (Deshalb wurde die Verwendung der Null verboten.)

2. Nach der Besonderheit 1 b (S. 89) ist die Differenz der ausgedachten Zahlen immer durch 9 teilbar. Folglich ist die Quersumme der Differenz ein Vielfaches von 9, und wenn sich die uns angesagte Zahl nicht durch 9 teilen läßt, dann nur wegen der weggestrichenen Ziffer, die durch die Ergänzung der angesagten Zahl bis zum nächsten Vielfachen von 9 ermittelt wird. Wenn die angesagte Zahl selbst ein Vielfaches von 9 ist, dann folgt daraus, daß die gestrichene Ziffer eine 9 war.

3. Man muß die Quersumme der erhaltenen Differenz ($6 + 9 + 8 = 23$) bilden.
Die Ergänzung dieser Summe bis zum nächsten Vielfachen von 9 ist die weggestrichene Ziffer.
In unserem Beispiel ist das $27 - 23 = 4$; die weggestrichene Ziffer ist die 4.

4. Zu jeder von euch niedergeschriebenen Zahl schreibe ich diejenige dazu, deren Ziffern die Ziffern eurer Zahlen zu 9 ergänzen. Dann muß die Summe ein Vielfaches von 9 sein, und sie bleibt durch 9 teilbar, wenn ihr eine 9 weggestrichen habt. Wenn ihr jedoch eine andere Ziffer gestrichen habt, dann ist die Quersumme der Summe kein Vielfaches von 9 und die weggestrichene Ziffer ist diejenige Zahl, die die angesagte Summe zu einem Vielfachen von 9 ergänzt.

5. Es wird die Zahl hinzugeschrieben, von der jede Ziffer die Summe der Ziffern der einzelnen Spalten zu 9 oder zu einem Vielfachen von 9 ergänzt. Die gesuchte Ziffer findet man nach der allgemeinen Regel.

6. Zunächst muß man eine Spalte aus solchen Zahlen hinzuschreiben, die die Quersumme jeder Zeile zu einem Vielfachen von 9 ergänzen, dann die hinzugeschriebenen Zahlen addieren (eine 9 braucht dabei nicht berücksichtigt zu werden) und an Stelle der ganzen Spalte dieser Zahlen nur den Rest aus der Division ihrer Summe durch 9 hinschreiben.

186. Ich habe zum Beispiel aufgegeben, 48 von 1313 zu subtrahieren. Das ergab 1265. Ihr habt 148 hinzugeschrieben und, sagen wir, die 6 weggestrichen. Übrig blieb die Zahl 125148. Jetzt bilden wir die Quersumme: $1 + 2 + 5 + 1 + 4 + 8 = 21$. Bis zur nächsten durch 9 teilbaren Zahl fehlen 6 ($27 - 21 = 6$); folglich ist die weggestrichene Zahl eine 6.
Warum das gerade so ist, ist nicht schwer zu verstehen. Wir wissen, daß bei der Subtraktion von Zahlen ihre Neunerreste subtrahiert und bei der Addition addiert werden (vgl. Besonderheit 3a S. 89). Wir schreiben jetzt die gleiche Zahl, die wir abziehen, vermehrt um 100 hinzu. Folglich ist der Neunerrest des Resultats um 1 größer als der Neunerrest der Ausgangszahl 1313. Und da die Quersumme dieser Zahl $1 + 3 + 1 + 3 = 8$ und ihr Neunerrest auch gleich 8 ist, ist die Zahl, die sich als Endresultat (bis zum Wegstreichen der Ziffer) ergibt, immer durch 9 teilbar. Die weggestrichene Ziffer kann man dann durch Ergänzung der Quersumme bis zum nächsten Vielfachen von 9 ermitteln.
Selbstverständlich kann man als Ausgangszahl jede beliebige andere Zahl nehmen,

deren Quersumme gleich 8 ist oder einen Neunerrest gleich 8 hat.
Man kann auch aufgeben, die Zahl, die abgezogen wurde, unmittelbar (ohne Vermehrung um 100) hinzuzuschreiben. Aber in solchem Falle muß man zur Ermittlung der weggestrichenen Ziffer zur Quersumme der übriggebliebenen Zahlen 1 addieren, wenn der Neunerrest der Ausgangszahl gleich 8 war, und dann bis zum Vielfachen von 9 ergänzen. (Ganz allgemein muß man zur Quersumme die Differenz zwischen der Zahl 9 und dem Neunerrest der Ausgangszahl hinzufügen.)

187. 1. Man muß die Summe der Zahlen, die unter dem Additionsstrich stehen, bilden und von dem dieser Summe nächstgrößeren Vielfachen von 9 subtrahieren. Die Differenz ist die gesuchte Zahl.
Es handelt sich hierbei darum, daß die Summe aller gegebenen Zahlen durch 9 teilbar ist. Wie man sieht, läßt sich die Summe $(1 + 8) + (2 + 7) + (3 + 6) + (4 + 5)$ durch 9 teilen. Wenn in der Addition alle gegebenen Zahlen enthalten wären, dann wäre die Summe der Zahlen unter dem Additionsstrich oder ihre Quersumme durch 9 teilbar; weil aber eine Zahl nicht enthalten ist, unterscheidet sich die Summe der Zahlen unter dem Additionsstrich von einer durch 9 teilbaren nur um die Zahl, die durch die fragliche Ziffer ausgedrückt wird. Die Summe der Zahlen unter dem Additionsstrich in Abb. 134 S. 92 ist gleich $1 + 4 + 1 + 4 + 1 + 2 = 13$. Bis 18 fehlen 5. Folglich ist die gesuchte Ziffer die 5.

2. Die gesuchte Ziffer ist die 3. Die Summe der Zahlen unter dem Additionsstrich in Abb. 136 S. 92 ist $1 + 4 + 1 + 3 + 2 + 5 + 1 + 1 + 3 + 1 + 2 = 24$. Bis 27 fehlen 3. Folglich ist die Ziffer 3 diejenige, die von keiner Linie berührt wird.
Der Lösungsweg gründet sich auf Überlegungen analog denen der vorhergehenden Aufgabe.

3. Es ist nunmehr klar, daß die gesuchte Zahl gleich der Ergänzung der Quersumme zum nächsten Vielfachen von 9 ist.

188. Wir sehen die Tabelle aller möglichen Resultate durch:

$$\begin{aligned} 11 \cdot 99 &= 1089 \\ 22 \cdot 99 &= 2178 \\ 33 \cdot 99 &= 3267 \\ 44 \cdot 99 &= 4356 \\ 55 \cdot 99 &= 5445 \\ 66 \cdot 99 &= 6534 \\ 77 \cdot 99 &= 7623 \\ 88 \cdot 99 &= 8712 \\ 99 \cdot 99 &= 9801 \end{aligned}$$

Es ist nicht schwer, an diesen Produkten folgende Eigenschaften festzustellen:

1. Die erste Ziffer des Resultats ergänzt immer die dritte zu 9, und die zweite ergänzt die vierte zu 9.

2. Die zweite Ziffer ist immer um 1 kleiner als die erste.

3. Die Ziffern des Multiplikanden stimmen mit der ersten Ziffer des Produkts überein.
Die Kenntnis dieser Eigenschaften gibt die Möglichkeit, ohne auf die Tabelle zu sehen, jedes Resultat zu rekonstruieren, wenn eine seiner Ziffern bekannt ist.
Nach der Bedingung der Aufgabe ist die dritte Ziffer eine 5. Folglich ist die erste eine 4 (1. Eigenschaft), die zweite Ziffer eine 3 (2. Eigenschaft), die vierte Ziffer eine 6 (1. Eigenschaft). Danach ist die gesuchte Zahl 4356.
Die dritte Eigenschaft gestattet es, auch den Multiplikanden festzustellen, ohne die Division des Produkts durch den Multiplikator durchzuführen. Hier ist er: 44.

189. Die mittelste Ziffer der Differenz ist immer 9, und die äußeren Ziffern ergänzen sich zu 9 (letzteres folgt aus der Besonderheit 1b S. 89).
Es sollen A, B und C die Ziffern einer dreistelligen Zahl sein. Wir schreiben die gegebene Zahl arithmetisch: [A] [B] [C]. Die umgekehrte Zahl ist [C] [B] [A]. Es soll ferner $A > C$ sein. Dann ist $[A]\,[B]\,[C] > [C]\,[B]\,[A]$. Wir bilden die Differenz:

$$\begin{array}{r} [A]\,[B]\,[C] \\ -\underline{[C]\,[B]\,[A]} \end{array}$$

Die letzte Ziffer der Differenz ist $10 + C - A$ (da $C < A$, nehmen wir zur Subtraktion 10 Einer aus der Anzahl der Zehner B). Die mittlere Ziffer der Differenz ist $10 + (B - 1) - B = 9$ (die Zahl der Zehner ist um 1 vermindert und für die Subtraktion nehmen wir 10 Zehner aus der Anzahl der Hunderter A). So ist tatsächlich die mittelste Ziffer der Differenz immer 9. Die erste Ziffer der Differenz ist $(A - 1) - C$. Die Summe der ersten und letzten Ziffer ist $A - 1 - C + 10 + C - A = 9$.

190. Die Differenz zwischen zwei beliebigen Zahlen mit vertauschten Ziffern ist immer 9 oder ein Vielfaches von 9. Wie nicht schwer nachzuprüfen ist, sind alle Bedingungen der Aufgabe nur dann erfüllt, wenn die Differenz der Lebensalter von A und B gleich 9 ist. Dann aber ist das Lebensalter von C die Hälfte von $9 = 4^1/_2$ Jahre. B ist zehnmal so alt wie C, folglich ist er 45 Jahre alt. Das Alter von A ist dann 54 Jahre. Also sind A 54, B 45 und C $4^1/_2$ Jahre alt.

191. Unser Freund bildete die Zahlen folgendermaßen: Die mittelste Ziffer der Zahl war eine beliebige Ziffer, mit Ausnahme der 0, und die Summe der übrigen Ziffern war durch 9 teilbar. Es genügt aber nicht, dahinterzukommen. Man muß auch beweisen, daß jede beliebige Zahl mit dieser Besonderheit ihrer Ziffern die in der Aufgabe genannte Eigenschaft besitzt. Zu diesem Zweck erinnern wir uns vor allem daran, daß dann, wenn eine beliebige Zahl S durch 9 teilbar ist, auch ihre Quersumme S_1 durch 9 teilbar ist. Wenn ferner die Zahl S_1 nicht einstellig ist, ist auch ihre Quersumme S_2 durch 9 teilbar usw. Wenn wir diese Berechnung fortsetzen, kommen wir einmal unvermeidlich zu einer einstelligen Zahl, die durch 9 teilbar ist. Die einzige einstellige Zahl, die sich durch 9 teilen läßt, ist aber die 9 selbst.

Wenden wir uns jetzt einer solchen Zahl zu:

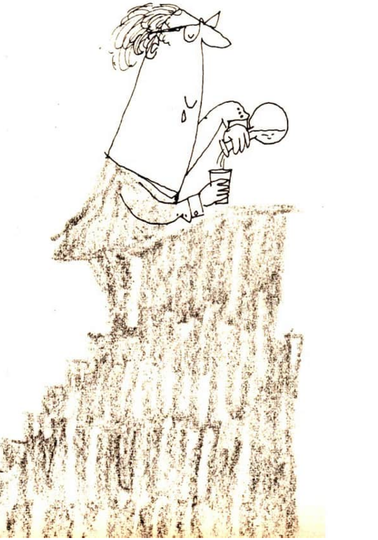
$\overline{\ldots cbaxmnp \ldots}$; die Summe aller ihrer Ziffern ohne die mittelste ist

$$S = \ldots c + b + a + m + n + p \ldots;$$

sie ist nach der Bedingung durch 9 teilbar. Wenn die Zahl S einstellig ist, dann ist sie 9. Wenn sie jedoch nicht einstellig ist, dann ist ihre Quersumme oder irgendeine der fortlaufend gebildeten Quersummen unbedingt 9. Wenn wir folglich zunächst die Quersumme der gegebenen Zahl

$$\overline{\ldots cbaxmnp \ldots}$$

und dann von dieser wieder die Quersumme bilden usw., gelangen wir unvermeidlich zu der Zahl $9 + x$, wobei x die mittelste Ziffer der gegebenen Zahl ist. Die Quersumme der Zahl $9 + x$ ist gleich x. Verleihen wir der Zahl $9 + x$ folgende Gestalt: $10 + (x - 1)$, dann zeigt sich, daß ihre Quersumme $1 + 0 + x - 1 = x$ ergibt.



Mit und ohne Algebra

192. Es ist am besten, mit der Lösung „am Ende" anzufangen. Die dritte LPG verdoppelte mit der Übergabe eines Teils ihrer Maschinen an die erste und zweite LPG den Bestand an Maschinen, über den diese in diesem Augenblick verfügten, worauf alle drei LPGs je 24 Maschinen hatten. Folglich hatte vor der Übergabe die erste LPG 12 Maschinen, die zweite auch 12 und die dritte 48 Maschinen. Diese Verteilung ergab sich, nachdem die zweite LPG der ersten und dritten geholfen hatte, ihren Maschinenpark zu verdoppeln. Demnach waren die Maschinen vordem folgendermaßen verteilt: Die erste LPG hatte 6 Maschinen, die dritte 24 und, weil die zweite LPG an die erste und dritte 30 Maschinen abgab, hatte sie 12 + 30 = 42 Maschinen. So waren die Maschinen verteilt, nachdem die erste LPG die Anzahl der Maschinen der zweiten und dritten LPG verdoppelt hatte. Folglich hatten die zweite und dritte LPG anfangs 21 und 12 Maschinen und die erste 6 + 33 = 39 Maschinen.

193. Bei der Lösung dieser Aufgabe fangen wir wieder am besten „am Ende" an und richten unser Augenmerk darauf, daß der Faulenzer nach dem dritten Gang über die Brücke noch genau 24 Pfennig hatte, die er abgeben mußte. Wenn er aber nach dem letzten Gang über die Brücke 24 Pfennig hatte, dann besaß er vorher 12 Pfennig. Aber diese 12 Pfennig hatten sich ergeben, nachdem er 24 Pfennig abgegeben hatte. Folglich besaß er insgesamt 36 Pfennig und hatte den zweiten Gang über die Brücke mit 18 Pfennig angetreten. Diese 18 Pfennig waren ihm verblieben, als er das erste Mal über die Brücke gegangen war und 24 Pfennig abgegeben hatte. Folglich hatte er nach dem ersten Gang über die Brücke 18 + 24 = 42 Pfennig. Danach ist klar, daß der Faulenzer anfangs 21 Pfennig in der Tasche hatte.

194. Am Ende des Tauschs hatte jeder Bruder 8 Äpfel. Folglich hatte der älteste Bruder, bevor er die Hälfte seiner Äpfel an seine Brüder abgab, 16 Stück; der mittelste und der jüngste hatten je 4 Stück. Bevor der mittelste Bruder seine Äpfel verteilte, hatte er 8, der älteste hatte 14 und der jüngste 2. Folglich hatte der jüngste vor der Verteilung seiner Äpfel 4; der mittelste hatte 7 und der älteste 13. Jeder erhielt anfangs soviel Äpfel, wie er vor drei Jahren Lebensjahre zählte, also war der jüngste jetzt 7 Jahre, der mittelste Bruder 10 und der älteste 16 Jahre alt.

195. Nach der Verteilung der Patronen verbrauchten die Jäger zu dritt 12 Stück. Danach verblieben allen zusammen soviel, wie jeder nach der Verteilung gehabt hatte, das heißt, die Gesamtzahl der Patronen verringerte sich auf ein Drittel. Mit anderen Worten hatten die Jäger zwei Drittel verbraucht und ein Drittel war übrig geblieben. Zwei Drittel waren 12 Stück, ein Drittel sind also 6 Stück. Folglich blieben 6 Patronen übrig. Das ist auch die Anzahl der Patronen, die jedem bei der Verteilung zugefallen war. Folglich hatten sie vor der Verteilung noch 18 brauchbare Patronen.

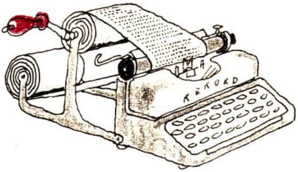
196. Im Augenblick der Begegnung der Lokführer beträgt der Abstand zwischen den Zugführern 250 m + 250 m = 500 m. Weil jeder Zug mit einer Geschwindigkeit von 45 km/h fährt, nähern sich die Zugführer einander mit einer Geschwindigkeit von 45 km/h + 45 km/h = 90 km/h oder 25 m/s. Die gesuchte Zeit ist 500 m : 25 m/s = 20 s.

197. Einfachheit und Kürze jeder Lösung hängt von der geschickten Wahl des Ausgangspunkts in der Gedankenkette ab, oder in der Sprache der Algebra ausgedrückt, von der Wahl der unbekannten Größe.
Wir stellen fest, daß Frau A die zweite

Hälfte des Manuskripts dreimal so schnell schrieb wie die erste. Wir wollen mit n die Anzahl der Tage bezeichnen, die Frau A für das Abschreiben der zweiten Hälfte des Manuskripts brauchte. Dann schrieb Frau A die erste Hälfte in 3n Tagen zu je 10 Seiten täglich. Hiernach besteht das halbe Manuskript aus $3n \cdot 10 = 30n$ Seiten, und das ganze Manuskript enthält 60 n Seiten. Das ganze Manuskript aber schrieb Frau A in $3n + n = 4n$ Tagen. Folglich schrieb Frau A im Durchschnitt $60n : 4n = 15$ Seiten täglich.

Die Kollegin B hatte recht.

Löst die Aufgabe, indem ihr eine andere Größe als Unbekannte wählt!



198. Es sei die Anzahl der Pilze, die von jedem Jungen ins Lager gebracht worden sind, x. Aus der Bedingung der Aufgabe folgt, daß A dem B $(x - 2)$ Pilze, dem C $(x + 2)$, dem D $\frac{x}{2}$ und dem E $2x$ Pilze gegeben hat, insgesamt $(x - 2) + (x + 2) + \frac{x}{2} + 2x = \frac{9}{2}x$.

Nach der Bedingung ist $\frac{9}{2}x = 45$. Hieraus folgt $x = 10$.

B hat von A 8 Pilze, C 12, D 5 und E 20 Pilze erhalten, und als sie in das Lager kamen, hatte jeder Junge 10 Pilze.

199. Mitunter antwortet man: „Beide kehren gleichzeitig zurück." Man begründet die Antwort mit der Überlegung, daß der Sportler, der mit der Strömung des Flusses rudert, seinem Konkurrenten um eine gewisse Zeitspanne zuvorkommt, er aber auf dem Rückweg gegen die Strömung gerade soviel Zeit wieder verliert.

Das ist falsch. Die Strömung verkürzt zwar die Fahrzeit, solange das Boot mit ihr fährt, und verlängert sie, solange es sich in entgegengesetzter Richtung bewegt. In dem einen Falle unterstützt der Fluß in gewissem Maße die Bewegung, im anderen hindert er sie. Aber die Unterstützung dauert eine geringere Zeitspanne als die Behinderung. Folglich ist natürlich zu erwarten, daß der Sportler, der auf dem Fluß rudert, später an den Start zurückkommt, als der Sportler, der im stehenden Wasser rudert.

Wir betrachten jetzt folgenden Grenzfall: Es sei die Eigengeschwindigkeit des Bootes (das ist die Geschwindigkeit, die das Boot bei gleichem Kraftaufwand des Ruderers im stehenden Wasser hat) gleich der Geschwindigkeit der Strömung. Dann erreicht der Sportler, der auf dem Fluß rudert, den Wendepunkt, wenn er mit der Strömung gerudert ist, doppelt so schnell wie sein Konkurrent auf dem See. Wenn aber der erste Sportler wendet, hält ihn die Strömung an, und er kann überhaupt nicht zum Start zurückkehren.

Wir gehen wieder zum allgemeinen Fall über: Es sei x die Geschwindigkeit der Strömung und v die Eigengeschwindigkeit des Bootes. Dann werden in stehendem Wasser für die Strecke s bis zum Wendepunkt $\frac{s}{v}$ Zeiteinheiten gebraucht, mit der Strömung werden für den Weg s dagegen $\frac{s}{v + x}$ Zeiteinheiten benötigt. Der Zeitgewinn ist $\frac{s}{v} - \frac{s}{v + x}$. Wenn wir die Brüche auf einen gemeinsamen Nenner bringen, ergibt sich

$$\frac{s}{v} - \frac{s}{v + x} = \frac{sx}{v(v + x)}.$$

Für den Weg s gegen die Strömung werden $\frac{s}{v - x}$ Zeiteinheiten benötigt, und ein Vergleich mit der Bewegung im stehenden Wasser ergibt den Zeitverlust

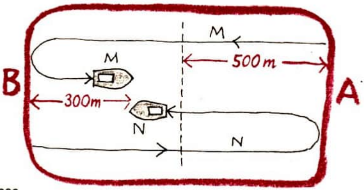
$$\frac{s}{v - x} - \frac{s}{v} = \frac{sx}{v(v - x)}.$$

Wenn wir die Brüche $\frac{sx}{v(v + x)}$ (Zeitgewinn) und $\frac{sx}{v(v - x)}$ (Zeitverlust) miteinander ver-

gleichen, stellen wir fest, daß der erste Bruch kleiner ist als der zweite, weil er einen größeren Nenner hat. Folglich benötigt das Boot auf dem Fluß mehr Zeit gegen die Strömung, als es bei der Fahrt mit der Strömung gewinnt.
Also kehrt in jedem Falle von den beiden Ruderern derjenige eher zum Start zurück, der im stehenden Wasser gefahren ist, um wieviel eher, das hängt von der Geschwindigkeit der Strömung ab, wobei eine Vergrößerung der Strömungsgeschwindigkeit nicht in jedem Falle eine Vergrößerung dieser Zeitdifferenz zur Folge hat. Überlegt euch, wie sich Strömungsgeschwindigkeit und Zeitdifferenz zueinander verhalten!

200. Die im Text der Aufgabe angestellten Überlegungen führen zu der Feststellung, daß die Zeit, die der Schwimmer von der ersten Brücke gegen die Strömung bis zum Wendepunkt braucht, gleich der Zeit ist, die er mit der Strömung vom Wendepunkt bis zur zweiten Brücke benötigt, wo er den Hut einholt. Hieraus folgt, daß sich der Schwimmer und der Hut 20 Minuten lang im Wasser bewegen. Der Hut legt in dieser Zeit mit der Geschwindigkeit der Strömung den Abstand zwischen der ersten und der zweiten Brücke zurück, das heißt 1000 m. Folglich ist die Geschwindigkeit der Strömung $1000 : 20 = 50$ m/min.
Ich führe noch eine andere Lösung an, die sich auf eine andere, sehr geistreiche Überlegung stützt. Wir betrachten die Situation „vom Standpunkt des Hutes aus".
Wir nehmen an, daß nicht der Hut, von der Strömung mitgerissen, von der ersten zur zweiten Brücke schwimmt, sondern die zweite Brücke mit der Geschwindigkeit der Strömung in Richtung zum Hut schwimmt, der unter der ersten Brücke im ruhenden Wasser liegt. An der Sache selbst ändert sich dadurch nichts. Nicht wahr? Was ergibt sich daraus? Der Hut fällt ins Wasser und bleibt an seinem Platz, und die Brücke Nr. 2 bewegt sich auf ihn zu. Und was ist mit dem Schwimmer? Er schwimmt im stehenden Wasser 10 Minuten in der einen Richtung und (weil das Wasser ruht) in der gleichen Zeit wieder zurück. Nach 20 Minuten ist er wieder zum alten Platz zurückgekehrt und trifft dort den Hut. In diesem Augenblick kommt die zweite Brücke, nachdem sie 1000 m zurückgelegt hat, bei dem Schwimmer und dem Hut an (nach der Bedingung der Aufgabe sollte doch der Schwimmer den Hut unter der zweiten Brücke erreichen). Folglich hat sich die Brücke mit einer Geschwindigkeit von $1000 : 20 = 50$ m/min bewegt. Diese stellt auch die Geschwindigkeit der Strömung dar. Auf die Geschwindigkeit des Schwimmers kommt es gar nicht an.

201. Das Gleitboot M, das vom Ufer A aus abfährt, begegnet dem Gleitboot N, nachdem es 500 m zurückgelegt hat. Zusammen haben die Boote eine Strecke zurückgelegt, die gleich der Länge des Sees ist (Abb. 329).



329

Bei der Weiterfahrt erreicht das Gleitboot M das Ufer B und begegnet auf dem Rückweg wiederum dem Gleitboot N in einem Abstand von 300 m vom Ufer B. In diesem Augenblick haben beide Gleitboote zusammen eine Strecke von der dreifachen Länge des Sees zurückgelegt (vgl. die schematische Darstellung in Abb. 329). Hieraus folgt, daß vom Beginn der Fahrt der Gleitboote an bis zu ihrer zweiten Begegnung dreimal soviel Zeit vergangen ist wie vom Beginn ihrer Fahrt bis zur ersten Begegnung.
Da aber das Boot M im Augenblick der ersten Begegnung 500 m zurückgelegt hat, hat es bis zum Augenblick der zweiten Begegnung folglich $500 \cdot 3 = 1500$ m zurückgelegt (bei gleichbleibender Geschwindigkeit ist der zurückgelegte Weg proportional

der Zeit). Die Länge des Sees ist um 300 m kürzer als der Weg, den das Boot M vom Beginn der Fahrt bis zur zweiten Begegnung zurückgelegt hat, das heißt, sie ist 1500—300 = 1200 m.

Vom Beginn der Fahrt der beiden Boote M und N bis zu ihrer ersten Begegnung ist die gleiche Zeit abgelaufen. Folglich ist das Verhältnis ihrer Geschwindigkeiten gleich dem Verhältnis der von beiden Booten in dieser Zeit zurückgelegten Strecken, das heißt

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{500}{1200 - 500} = \frac{5}{7}.$$

202. Es gibt einen Ausweg. Die ganze Gruppe soll x Bäume pflanzen. Die Brigade B versprach, soviel Bäume zu pflanzen, wie alle übrigen Pioniere der Gruppe zusammen pflanzen; folglich mußte sie die Hälfte der gesamten Anzahl Bäume pflanzen, das heißt $\frac{x}{2}$.

A versprach, mit seiner Brigade die Hälfte der Zahl der Bäume zu pflanzen, die von allen übrigen gepflanzt werden. Wenn man den Teil der Brigade A als einen Teil der Gesamtzahl der zu pflanzenden Bäume rechnet, dann beträgt der Anteil der übrigen Pioniere zwei solche Teile. Hieraus folgt, daß die Brigade A ein Drittel von x, das heißt $\frac{x}{3}$ Bäume pflanzen muß.

Die Brigaden A und B haben sich also verpflichtet $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{5x}{6}$ Bäume zu pflanzen. Die übrigen Pioniere der ganzen Gruppe pflanzten demnach $\frac{x}{6}$ Bäume, was nach der Bedingung der Aufgabe 40 Stück ausmachte. Wir haben: $\frac{x}{6} = 40$, woraus sich ergibt, daß $x = 240$ Bäume sind. Hiervon entfallen auf die Brigade A $\frac{x}{3} = 80$ und auf die Brigade B $\frac{x}{2} = 120$ Bäume.

203. Sie ist doppelt so groß. Wenn man die Hälfte der kleineren Zahl mit m bezeichnet, dann ist die Differenz aus ihr und ihrer Hälfte auch m, und die Differenz aus der größeren Zahl und der Hälfte der kleineren ist 3 m. Dann ist die kleinere Zahl $m + m = 2\,m$ und die größere $3\,m + m = 4\,m$. Die Zahlen stehen also in dem Verhältnis $4\,m : 2\,m = 2 : 1$ zueinander.

204. Algebraische Lösung. Die Geschwindigkeit des Seeschiffes sei x, die des Wasserflugzeuges 10 x. Die Strecke des Flugzeuges beträgt bis zum Zusammentreffen mit dem Seeschiff s. Während des Fluges beträgt die Fahrtstrecke des Seeschiffs s — 180. Folglich ist:

$$\frac{s}{10\,x} = \frac{s - 180}{x}.$$

Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit $10\,x$ $(x \neq 0)$ und erhalten $s = 200$ Seemeilen.

Arithmetische Lösung. In der Zeit, in der das Wasserflugzeug 10 Seemeilen zurücklegt, entfernt sich das Seeschiff um 1 Seemeile. Wenn daher das Flugzeug die ersten 180 Seemeilen zurückgelegt hat, hat sich das Seeschiff um 18 Meilen entfernt. Während das Flugzeug die nächsten 10 Meilen zurücklegt, fährt das Seeschiff die 19. Meile, und zwischen ihnen bleiben noch 9 Seemeilen. Nach der 20. Meile erreicht das Wasserflugzeug das Seeschiff. Dabei sind beide 200 Seemeilen von der Küste entfernt.

205. Da man die Geschwindigkeit der Kunstradfahrer kennt, kann man folgern, daß sie eine Streckeneinheit in $^1/_6$, $^1/_9$, $^1/_{12}$ und $^1/_{15}$ Stunde zurücklegen. Für eine Runde braucht jeder aber nur $^1/_3$ der angegebenen Zeit, das heißt $^1/_{18}$, $^1/_{27}$, $^1/_{36}$ und $^1/_{45}$ Stunde (der Umfang eines jeden Kreises beträgt $^1/_3$ Streckeneinheit). In einer Stunde legen die Fahrer 18, 27, 36 und 45 volle Umläufe zurück und nach 20 Minuten 6, 9, 12 und 15 Umläufe. Alle Zahlen sind ganze, folglich treffen die Kunstradfahrer nach 20 Minuten an den Ausgangspunkten zusammen. Grundsätzlich können die Fahrer an den Ausgangspunkten nur zusammentreffen, wenn sie eine ganze Anzahl von Umläufen (wenn auch nicht gleich viele) zurückgelegt haben. Die größtmögliche Zahl solcher Ereignisse im Laufe von 20 Minuten wird folglich durch den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen 6, 9, 12 und 15 bestimmt. Dieser ist 3. Folglich werden die Radfahrer im Verlaufe von 20 Minuten dreimal gleichzeitig die Ausgangspunkte passieren, nämlich aller $6^2/_3$ Minuten ($20 : 3 = 6^2/_3$).

206. Zwischen der Größe der Bearbeitungsgeschwindigkeit für ein Werkstück und der Zeit, die für die Bearbeitung gebraucht wird, besteht eine umgekehrt proportionale Abhängigkeit. Bezeichnet t_1 die Zeit für die Bearbeitung eines Werkstücks bei einer Schneidegeschwindigkeit v_1 und t_2 die Zeit für eine Schneidegeschwindigkeit v_2, dann ist das Verhältnis $\frac{t_2}{t_1}$ gleich dem Verhältnis $\frac{v_1}{v_2}$: $\frac{t_2}{t_1} = \frac{v_1}{v_2}$. Nach der Bedingung ist $t_2 = 2^1/_2$ min (bei einer Schneidegeschwindigkeit v_2), $t_1 = 35$ min (bei einer Geschwindigkeit $v_1 = v_2 - 1690$ m/min). Wir bilden die Verhältnisgleichung $\frac{2^1/_2}{35} = \frac{v_2 - 1690 \text{ m/min}}{v_2}$ und erhalten die Lösung $v_2 = 1820$ m/min. Der Dreher P. Bykow erreichte die Zeit von $2^1/_2$ min mit einer Schneidegeschwindigkeit von 1820 m/min.

207. Die Entfernung von Skagway bis zu dem Lager, zu dem Jack London eilte, betrug $133^1/_3$ Meilen.
Nach der Bedingung wäre Jack London um einen Tag früher in das Lager gekommen, wenn er weitere 50 Meilen mit voller Geschwindigkeit zurückgelegt hätte. Folglich wäre er um zwei Tage früher, also ohne Verspätung im Lager eingetroffen, wenn er noch 100 Meilen mit voller Geschwindigkeit zurückgelegt hätte. Hieraus kann man folgern, daß es am Schluß des ersten Tages der Fahrt noch 100 Meilen bis zum Lager waren. Wenn London die ganze Zeit mit voller Geschwindigkeit gefahren wäre, hätte er anstatt 100 Meilen $\frac{100 \cdot 5}{3}$ Meilen $= 166^2/_3$ Meilen zurückgelegt. Die überschießenden $66^2/_3$ Meilen hätten ihm 2 Tage Fahrt erspart. Hieraus folgt, daß die volle von Jack London berechnete Geschwindigkeit $33^1/_3$ Meilen je Tag betrug. In den ersten 24 Stunden legte er daher $33^1/_3$ Meilen zurück. Wenn wir hierzu die übrigen 100 Meilen hinzufügen, erhalten wir die gesamte Entfernung. Sie beträgt 100 Meilen $+ 33^1/_3$ Meilen $= 133^1/_3$ Meilen.

208. 1. Wenn sich das Monatsgehalt um 30% erhöhen würde, dann würde auch die Kaufkraft um denselben Prozentsatz steigen.

2. Wenn das Gehalt jedoch unverändert bleibt, aber die Warenpreise um 30% fallen, dann erhöht sich die Kaufkraft nicht um 30%, wie viele meinen, sondern um mehr. Wenn man vor der Preissenkung für 1 DM einen Gegenstand zum Preise von 1 DM kaufen kann, dann kann man nach der Preissenkung (um 30%) für 1 DM $\frac{100}{70} = \frac{10}{7}$ Gegenstände kaufen, das heißt um $^3/_7$ mehr, und $^3/_7$ sind ungefähr 43%.

3. Falsche Analogie führt auch hier zu fehlerhafter Antwort: 10% + 8% = 18%. In Wahrheit beträgt der anfangs beabsichtigte Gewinn 20%.
Wenn das Geschäft ein Buch mit einem Rabatt von 10% verkauft, erzielt es 8% Gewinn vom Selbstkostenpreis. Das bedeutet, daß 90% vom Ladenpreis 108% des Selbstkostenpreises des Buches betragen. Es ist nicht schwer zu bestimmen, wieviel Prozent des Selbstkostenpreises der Ladenpreis ausmacht.
Zur Lösung dieser Frage stellen wir die Verhältnisgleichung auf:

$$\frac{90}{100} = \frac{108}{x}.$$

Hieraus folgt $x = 120\%$. Also ist der ursprünglich beabsichtigte Gewinn 20% vom Selbstkostenpreis.

4. Sehr viele denken, daß die Produktivität um ebensoviel Prozent zunimmt, wie sich die Anfertigungszeit für das Werkstück verringert. Es läßt sich leicht dartun, daß das ein Irrtum ist.
Es soll anfangs für die Anfertigung eines Werkstücks 1 Stunde gebraucht werden. Nach Senkung der Arbeitszeit um P% ist diese um $\frac{P}{100}$ Stunden geringer, das heißt,

sie beträgt $1 - \frac{P}{100}$ Stunden. Folglich wird in 1 Stunde nicht nur ein Werkstück hergestellt, sondern $1 : \left(1 - \frac{P}{100}\right) = \frac{100}{100 - P}$ Werkstücke, also $\frac{100}{100 - P} - 1 = \frac{P}{100 - P}$ Werkstücke mehr als anfangs. Wenn man diese Produktionssteigerung in Prozenten ausdrückt, dann ergeben sich $\frac{100\,P}{100 - P}$ %. Wenn zum Beispiel die Zeitnorm um 50% ($P = 50$) gesenkt wird, dann nimmt die Produktivität nicht um 50%, sondern um 100% zu, das heißt, sie verdoppelt sich.

209. Durch den Mangel an Eindeutigkeit in der Formulierung des Testaments kann der Wille des Erblassers verschieden ausgelegt werden. Wenn man als wesentlichen Inhalt seines Willens das Verhältnis des Erbteils der Mutter (m) zu dem des Sohnes (s) und der Tochter (t) ansieht, dann folgt daraus, daß eine Tochter einen halb so großen Teil vom Nachlaß wie die Mutter und ein Sohn einen doppelt so großen Anteil erhalten soll. Folglich muß der Nachlaß in 7 gleiche Teile geteilt werden, von denen 2 Teile der Mutter, 4 Teile dem Sohn und 1 Teil der Tochter ausgehändigt werden ($m : s : t = 2 : 4 : 1$). So schlug auch Salvian Julian vor, den Nachlaß zu teilen. Aber diese Lösung ist für die Mutter ungünstig. Man kann doch den Willen des Erblassers auch so deuten, daß er im Auge hatte, der Mutter *wenigstens* $^1/_3$ des Nachlasses zu hinterlassen; die Lösung des römischen Juristen gesteht ihr aber nur $^2/_7$ zu. Wenn man daher die Interessen der Mutter vertritt, muß man ihr $^1/_3$ des Nachlasses übergeben und die übrigen $^2/_3$ zwischen dem Sohn und der Tochter im Verhältnis 4 : 1 teilen. Dann erhält der Sohn $\frac{2}{15} \cdot 4 = \frac{8}{15}$ und die Tochter $\frac{2}{15} \cdot 1 = \frac{2}{15}$ des gesamten Nachlasses, oder $m : s : t = 5 : 8 : 2$. Eine andere geistreiche Lösung ist folgende: Die Zwillinge erblickten doch nicht gleichzeitig das Licht der Welt. Wenn *als erstes* der Sohn geboren wurde, dann fällt ihm $^2/_3$ des gesamten Nachlasses zu; vom Rest erhalten die Tochter $^1/_3$ und die Mutter $^2/_3$. Wenn *als erstes* die Tochter geboren wurde, dann erhält sie $^1/_3$ des gesamten Nachlasses; vom Rest erhalten $^2/_3$ der Sohn und $^1/_3$ die Mutter.

210. Die gesuchte Entfernung sei $2x$ Schritte. Auf die eine Hälfte dieser Entfernung entfallen $\frac{x}{2}$ Doppelschritte, auf die andere $\frac{x}{3}$ dreifache Schritte. Nach der Bedingung waren es 250 Doppelschritte mehr als dreifache. Folglich ist $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 250$, $\frac{x}{6} = 250$, $x = 1500$ Schritte. Die ganze Entfernung betrug $2x = 3000$ Schritte.

211. Die Entfernung vom Dorf zur Stadt sei x km. Wenn der bejahrte Mann y km zurückgelegt hat, hat er noch $(x - y)$ km zu fahren. Wenn er $3y$ km zurückgelegt hätte, dann blieben ihm noch $(x - 3y)$ km. Nach der Bedingung der Aufgabe ist $x - 3y$ halb so viel wie die Entfernung $x - y$. Folglich ist $x - y = 2(x - 3y)$ oder $x - y = 2x - 6y$. Hieraus folgt $y = \frac{1}{5}x$.

Der junge Mann soll z km zurückgelegt haben; er hat noch $(x - z)$ km zu fahren. Wenn er $\frac{z}{2}$ km gefahren wäre, blieben ihm noch $\left(x - \frac{z}{2}\right)$ km. Nach der Bedingung der Aufgabe ist $(x - z)\,3 = x - \frac{z}{2}$. Hieraus folgt $z = \frac{4}{5}x$. $\frac{4}{5}x$ ist aber größer als $\frac{1}{5}x$, das heißt $z > y$, und das bedeutet, daß der junge mehr zurückgelegt hat als der bejahrte. Folglich fuhren der junge mit dem Auto und der bejahrte mit dem Pferdewagen.

212. Es soll
der erste Motorradfahrer
x Stunden gefahren sein,
$\frac{y}{3}$ Stunden ausgeruht haben;
der zweite Motorradfahrer
$\frac{x}{2}$ Stunden ausgeruht haben,
y Stunden gefahren sein.

Da die beiden Motorradfahrer ein und dieselbe Zeitlang unterwegs waren, ist $x + \frac{y}{3} = \frac{x}{2} + y$ oder $\frac{x}{2} = \frac{2}{3}y$. Hieraus folgt $x = \frac{4}{3}y$, das heißt $y < x$.
Der zweite Motorradfahrer ist schneller gefahren als der erste.

213. Wenn sich das gesuchte Flugzeug auf dem n. Platz, von links nach rechts gezählt, befindet, sind rechts von ihm $9 - n$ Flugzeuge (vgl. Abb. 141 S. 106) und links von ihm $n - 1$ Flugzeuge. Das Produkt dieser Zahlen ist $(9 - n)(n - 1)$. Wenn sich das Flugzeug 3 Plätze weiter rechts befunden hätte, dann wären rechts von ihm $6 - n$ Flugzeuge und links von ihm $n + 2$ Flugzeuge gewesen. Nach der Bedingung ist $(6 - n)(n + 2) - (9 - n)(n - 1) = 3$. Hieraus folgt $n = 3$.
Das gesuchte Flugzeug war das dritte, wenn man von links nach rechts zählt.

214. Die gesuchten Summanden sind 8, 12, 5 und 20.

215. x soll die Länge der längeren, y die der kürzeren Kerze sein. In einer Stunde brennt die erste Kerze um $x : 3\frac{1}{2} = \frac{2}{7}x$ herunter und die zweite um $y : 5 = \frac{1}{5}y$. In zwei Stunden brennen sie entsprechend um $\frac{4}{7}x$ und $\frac{2}{5}y$ herunter. Von der ersten Kerze bleibt $\frac{3}{7}x$, von der zweiten $\frac{3}{5}y$. Nach der Bedingung der Aufgabe ist $\frac{3}{7}x = \frac{3}{5}y$. Folglich war die eine Kerze $5/7$ mal so lang wie die andere.

216. Der ganze Witz besteht darin, daß die Summe der Zahlen immer durch 11 teilbar ist. Man kann die gedachte vierstellige Zahl [a] [b] [c] [d] so niederschreiben:
$1000\,a + 100\,b + 10\,c + d$.
Nach der Umstellung der ersten Ziffer an das Ende der Zahl erhält man:

$$1000\,b + 100\,c + 10\,d + a.$$

Die Summe dieser beiden Zahlen ist:
$1000\,a + 100\,b + 10\,c + d + 1000\,b + 100\,c + 10\,d + a = 1001\,a + 1100\,b + 110\,c + 11\,d$.
Es läßt sich leicht feststellen, daß jeder Summand durch 11 teilbar ist. Von den Zahlen, die A, B, C und D nannten, läßt sich nur das Resultat von C durch 11 teilen. Daraus ergibt sich, daß sich A, B und D verrechnet haben und nur das Resultat von C richtig ist.

217. Im ersten Augenblick mag es scheinen, daß das Nachgehen der Wanduhr durch das Vorgehen der Tischuhr um dieselbe Anzahl von Minuten kompensiert wird und daß das Nachgehen des Weckers durch das Vorgehen der Armbanduhr seinerseits ausgeglichen wird, so daß die Armbanduhr die genaue Zeit anzeigt. Aber das ist nicht so. Nach 1 Stunde genauer Zeit sind nach der Wanduhr 58 Minuten vergangen. 60 Minuten nach der Wanduhr sind nach der Tischuhr 62 Minuten. Folglich zeigt die Tischuhr für jede Minute der Wanduhr $\frac{62}{60}$ Minuten an, und für 58 Minuten nach der Wanduhr (das heißt auf 1 Stunde genauer Zeit) zeigt die Tischuhr $\frac{58 \cdot 62}{60}$ Minuten an.
Weiter. Für 60 Minuten an der Tischuhr zeigt der Wecker 58 Minuten an. Folglich zeigt der Wecker für jede Minute auf der Tischuhr $\frac{58}{60}$ Minuten an, und für $\frac{58 \cdot 62}{60}$ Minuten nach der Tischuhr (das heißt auf 1 Stunde genauer Zeit) zeigt er $\frac{58 \cdot 62}{60} \cdot \frac{58}{60}$ Minuten an.
Genauso zeigt für jede Minute auf dem Wecker die Armbanduhr $\frac{62}{60}$ Minuten an. Folglich zeigt sie für $\frac{58 \cdot 62 \cdot 58}{60 \cdot 60}$ Minuten nach dem Wecker (das heißt für 1 Stunde genauer Zeit) $\frac{58 \cdot 62 \cdot 58}{60 \cdot 60} \cdot \frac{62}{60}$ Minuten an.
Wenn wir die Rechnung durchführen, erhalten wir annähernd 59,86 Minuten.
Folglich geht die Armbanduhr in jeder Stunde genauer Zeit 0,14 Minuten nach. So geht sie in 7 Stunden genauer Zeit $0{,}14 \cdot 7$ Minuten $= 0{,}98$ Minuten ≈ 1 Minute nach.

Um 19 Uhr genauer Zeit zeigt die Armbanduhr 18.59 Uhr.

218. Es sollen unsere Uhren in x Stunden wieder ein und dieselbe Zeit zeigen. Das tritt dann ein, wenn meine Uhr soviel vorgeht und meines Freundes Uhr soviel nachgeht, daß es zusammen 12 Stunden (43200 Sekunden) sind. Meine Uhr differiert auf x Stunden um x Sekunden und meines Freundes Uhr um $\frac{3}{2}x$ Sekunden.

Wir erhalten die Gleichung $x + \frac{3}{2}x = 43200$.
Hieraus folgt $x = 17280$.
17280 Stunden oder 720 Tage, also fast 2 Jahre müssen wir warten, bis unsere beiden Uhren wieder ein und dieselbe Zeit anzeigen.
Noch länger müßten wir auf die Übereinstimmung unserer beiden Uhren mit der genauen Zeit warten.
Dazu muß meine Uhr 12 Stunden vorgehen und meines Freundes Uhr 12 Stunden nachgehen.
Bei meiner Uhr würde dies in 43200 Stunden oder 1800 Tagen eintreten, bei meines Freundes Uhr $\frac{3}{2}$-mal früher, das heißt in 1200 Tagen.
Gleichzeitige Übereinstimmung unserer beiden Uhren mit der genauen Zeit würde in einer Anzahl von Tagen eintreten, die durch die Zahlen 1800 und 1200 teilbar ist, das heißt in 3600 Tagen – also in knapp 10 Jahren!

219. 1. Während der Abwesenheit des Meisters beschrieben die Zeiger zusammen einen vollen Umlauf um das Zifferblatt. Da sich der Minutenzeiger 12-mal so schnell wie der Stundenzeiger bewegt, machen die von beiden Zeigern durchlaufenen Strecken $\frac{12}{13}$ und $\frac{1}{13}$ des ganzen Kreises aus. Hieraus folgt, daß der Meister $\frac{12}{13} \cdot 60 = 55\frac{5}{13}$ Minuten abwesend war. Wenn man den von den Zeigern zurückgelegten Weg in Zeitminuten rechnet und mit x die Anzahl der Minuten bezeichnet, die von der Stellung beider Zeiger auf der 12 bis zur Stellung des Minutenzeigers beim Weggang des Meisters zum Mittagessen verstrichen sind, dann ist der Stundenzeiger in diesen x Minuten nur um $\frac{1}{12}x$ vorgerückt; folglich beträgt die „Entfernung" zwischen beiden Zeigern beim Weggehen des Meisters $x - \frac{x}{12} = \frac{11}{12}x$ Minuten. Wir erhalten die Gleichung $\frac{11}{12}x = \frac{1}{13} \cdot 60$.
Hieraus folgt $x = 5\frac{5}{143}$. Folglich ging der Meister $5\frac{5}{143}$ Minuten nach 12 Uhr zum Mittagessen und blieb $55^5/_{13}$ Minuten abwesend.
Als er zurückkehrte, war es $55\frac{5}{13} + 5\frac{5}{143} = 60\frac{60}{143}$ Minuten nach 12 Uhr, das heißt $^{60}/_{143}$ Minuten nach 1 Uhr.

2. 2 Stunden, nachdem ich weggegangen bin, steht der Minutenzeiger an der gleichen Stelle, und der Stundenzeiger ist um $^2/_{12}$ einer vollen Umdrehung vorgerückt.
Damit die Zeiger ihre Stellungen in mehr als 2 Stunden tauschen, müssen sie zusammen noch $^{10}/_{12}$ des gesamten Zifferblatts oder noch 50 Minuten zurücklegen. Der Minutenzeiger bewegt sich 12-mal so schnell wie der Stundenzeiger. Folglich dauert sein Weg gleich $\frac{12}{13} \cdot 50 = 46\frac{2}{13}$ Minuten. Demnach war ich noch $46^2/_{13}$ Minuten über 2 Stunden hinaus abwesend.

3. Zwischen 4 und 5 Uhr überdecken sich die Zeiger genau $20 : \frac{11}{12} = 21\frac{9}{11}$ Minuten nach 4 Uhr. Der Minutenzeiger steht um $50 : \frac{11}{12} = 54\frac{6}{11}$ Minuten nach 4 Uhr dem Stundenzeiger genau gegenüber. Folglich löste der Schüler die Aufgabe in $54\frac{6}{11} - 21\frac{9}{11} = 32\frac{8}{11}$ Minuten. Er war um 4 Uhr $54^6/_{11}$ Minuten mit der Lösung fertig.

220. Da der erste Mann während einer Hälfte der gesamten Zeit mit der größeren der beiden ungleichen Geschwindigkeiten lief, ging er mit der größeren Geschwindigkeit offensichtlich mehr als die Hälfte des Wegs, der zweite Mann ging jedoch mit derselben Geschwindigkeit nur die Hälfte des Wegs. Also brauchte der erste Mann für den ganzen Weg weniger Zeit als der zweite. Das ist die ganze Lösung, kurz und elegant.

Es ist nicht schwer, algebraisch zu beweisen, daß der zweite Mann länger lief als der erste. Es seien m und n die beiden Geschwindigkeiten, wobei $m > n$; t sei die Hälfte der gesamten Zeit, die der erste Mann brauchte; s_1 ist der Weg, der von ihm mit der Geschwindigkeit m durchlaufen wurde, und s_2 der Weg, den er mit der Geschwindigkeit n ging.

Bei $m > n$ haben wir: $\frac{s_1}{t} > \frac{s_2}{t}$; hieraus folgt $s_1 > s_2$.

In der Sprache der Algebra kann man die Lösung folgendermaßen fortsetzen: Der ganze Weg ist $mt + nt$; der halbe Weg ist $\frac{mt + nt}{2} = \frac{(m+n)t}{2}$; bezeichnet x die gesamte Zeit des ersten Mannes, dann ist $x = 2t$; bezeichnet y die gesamte Zeit des zweiten Mannes, dann ist $y = \frac{(m+n)t}{2m} + \frac{(m+n)t}{2n}$. Wir bilden die Differenz $y - x$:

$$y - x = \frac{(m+n)t}{2m} + \frac{(m+n)t}{2n} - 2t$$
$$= \frac{(mn + n^2 + m^2 + mn - 4mn)t}{2mn}$$
$$= \frac{(m-n)^2 t}{2mn}.$$

Da alle Faktoren auf der rechten Seite größer als 0 sind, ist $y - x > 0$ oder $y > x$. Der zweite Mann lief länger als der erste.

221. Wenn an der Zweiglinie n Bahnhöfe liegen, dann muß jeder Bahnhof über $n - 1$ Fahrkartensätze verfügen, und insgesamt sind $n(n-1)$ Fahrkartensätze nötig.

Wenn an der Linie bisher x Bahnhöfe lagen und es in Zukunft y sein werden, dann werden $y(y-1) - x(x-1)$ neue Fahrkartensätze gebraucht. Wir haben die Gleichung: $y(y-1) - x(x-1) = 46$ oder
$y^2 - x^2 - (y - x) = 46$,
$(y - x)(y + x - 1) = 46$.

Beide Faktoren müssen ganze und positive Zahlen sein; das ergibt nur zwei Möglichkeiten: $46 = 2 \cdot 23$ oder $46 = 1 \cdot 46$.

Im ersten Falle ist $y - x = 2$ und $y + x - 1 = 23$. Die Lösung dieser Gleichungen ergibt $x = 11$, $y = 13$. Folglich lagen bisher an der Zweiglinie 11 Bahnhöfe und nach der Eröffnung zweier neuer Bahnhöfe werden es 13 sein.

Der zweite Fall ($46 = 1 \cdot 46$) würde bedeuten, daß die Anzahl der neuen Bahnhöfe $y - x = 1$ ist; aus der Rede des Eisenbahners folgt aber, daß die neuen Bahnhöfe mehr als einer sein müssen.

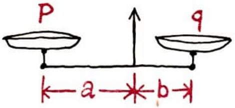
222. Wir multiplizieren die linken und die rechten Seiten der Gleichungen $a^2 = bd$ und $ad = b^2c$ und erhalten: $a^3d = b^3dc$ oder mit d gekürzt: $a^3 = b^3c$.

Hieraus folgt, daß c die dritte Potenz irgendeiner ganzen Zahl sein muß. Unter den ganzen Zahlen 2 bis 15 gibt es nur eine, die eine dritte Potenz ist, nämlich 8. Folglich ist $c = 8$. Hiernach haben wir: $a^3 = 8b^3$ oder $a = 2b$. Da nach der Bedingung $a^2 = bd$ ist, ist dann $4b^2 = bd$ oder $4b = d$. b kann aber nicht 2 sein, weil dann $d = 8$ wäre, wir haben aber schon $c = 8$, und unter den Wörtern sind nicht zwei mit je 8 Buchstaben. b kann auch nicht größer als 3 sein, weil unter den Wörtern kein Wort mit 16 Buchstaben und mehr ist. Folglich ist $b = 3$. Hieraus folgt $a = 6$ und $d = 12$. Also haben die ausgesuchten Wörter 6, 3, 8 und 12 Buchstaben. Diese Wörter sind: Ziffer, Lot, Division, Stereometrie.

223. Nein, man kann es nicht. Der abgewogene Zucker wiegt mehr als 2 kp.

Beweis: Wenn die Waage im Gleichgewicht ist, dann wird, einerlei ob gleicharmig oder ungleicharmig, die Gleichung $ap = bq$ erfüllt, wobei a und b die Längen des linken und rechten Waagebalkens sind und p und q die Gewichte der Lasten auf der linken und der rechten Waagschale (Abb. 330).

In unserem Falle ist $a \neq b$, und es soll das



330

Einkilogewicht im ersten Falle x kp Zucker und im zweiten y kp Zucker entsprechen. Dann ist $a \cdot 1 = b\,x$ und $b \cdot 1 = a\,y$. Hieraus folgt $x = \frac{a}{b}$ und $y = \frac{b}{a}$, also $x + y = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$ kp.

Aber die Summe aus einer positiven Zahl $\frac{a}{b}$ (außer 1) und der zu ihr reziproken Zahl $\frac{b}{a}$ ist immer größer als 2. Wenn $a \neq b$, dann ist $(a - b)^2 > 0$. Hieraus folgt: $a^2 - 2\,a\,b + b^2 > 0$ und daraus $a^2 + b^2 > 2\,a\,b$. Dividieren wir beide Seiten der Ungleichung durch ab, dann erhalten wir: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$.

Die Verfahren zum genauen Auswiegen auf ungenauen Waagen.

1. Die Ware durch irgend etwas, zum Beispiel Schrot, ins Gleichgewicht bringen. Die Ware wegnehmen und an ihrer Stelle die Gewichte auf die Waagschale legen, die den Schrot ins Gleichgewicht bringen. Diese Gewichte zeigen das Gewicht der Ware an.
2. Die Ware zweimal „abwiegen", indem man die Gewichte zuerst auf die eine Waagschale und dann auf die andere legt. Wenn im ersten Falle das „Gewicht" der Ware p ist und im zweiten Falle q, dann ist das richtige Gewicht gleich $\sqrt{p \cdot q}$. Ihr beweist das mit Leichtigkeit.

224. Es sei x die Länge des Zuges und y seine Geschwindigkeit. Da der Zug am Beobachter in der Zeit t_1 vorüberfährt, das heißt, da er den Weg, der gleich seiner Länge ist, in der Zeit t_1 zurücklegt, ist $y = \frac{x}{t_1}$. In der Zeit t_2 fährt er über die Brücke von der Länge a, das heißt, er legt in dieser Zeit einen Weg zurück, der gleich der Summe aus seiner eigenen Länge und der Länge der Brücke ist.

Folglich ist $y = \frac{x + a}{t_2}$. Hieraus folgt

$$x = \frac{a\,t_1}{t_2 - t_1}; \quad y = \frac{a}{t_2 - t_1}.$$

225. Als der „Mathematiker" die Quadratwurzel aus den beiden Seiten der Gleichung $(x - v)^2 = (y - v)^2$ zog, ließ er außer acht, daß es für das Resultat zwei Möglichkeiten gibt: entweder $x - v = y - v$ oder $x - v = v - y$. Richtig ist nur das zweite Resultat, und zwar aus folgenden Gründen: Da x und y positive Zahlen sind, folgt aus der Ausgangsgleichung $x + y = 2\,v$, daß dann, wenn $x > v$ ist, $y < v$ (erster Fall), und dann, wenn $x < v$ ist, $y > v$ (zweiter Fall).
Im ersten Fall ist $x - v > 0$ und $y - v < 0$, was der Gleichung $x - v = y - v$ widerspricht. Die zweite Gleichung $x - v = v - y$ jedoch widerspricht weder den Bedingungen des ersten Falles noch denen des zweiten. Aus der Gleichung $x - v = v - y$ folgt wieder die Ausgangsgleichung $x + y = 2\,v$.

226. Wenn wir die 1 vor die fünfstellige Zahl [A] setzen, vermehren wir sie um 100000, wir erhalten: $A + 100000$. Wenn wir die Eins an das Ende der Zahl A setzen, ist das gleichbedeutend mit einer Multiplikation der Zahl A mit 10 und der Addition einer Eins zu diesem Produkt; wir erhalten: $10\,A + 1$.

Aus der Bedingung folgt, daß $\frac{10\,A + 1}{A + 100000} = 3$.

Hieraus folgt: $10\,A + 1 = 3\,A + 300000$ oder $7\,A = 299999$ und schließlich $A = 42857$.

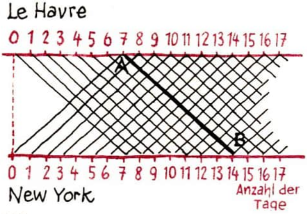
227. Wenn wir mein Lebensalter durch die Strecke AB (Abb. 331) und das Ihrige durch die Strecke CD darstellen, dann gibt die

331

Strecke KB an, vor wieviel Jahren mein Alter gleich dem Ihrigen war. Aber vor soviel Jahren war Ihr Alter um die Strecke ND = KB geringer, und es läßt sich durch

die Strecke CN ausdrücken, die halb so groß ist wie die Strecke AB. Hieraus folgt, daß auch die Strecke MB zweimal die Strecke KB enthält. Die Strecke AB enthält viermal die Strecke KB, und CD enthält sie dreimal.
Wenn Sie so alt sein werden, wie ich jetzt bin, dann wird Ihr Alter durch eine Strecke ausgedrückt, die gleich der Strecke AB ist, die aber, wie festgestellt, viermal die Strecke KB enthält. Aber auch mein Alter hat sich zu diesem Zeitpunkt um die Strecke KB vermehrt und wird durch eine Strecke ausgedrückt, die fünfmal die Strecke KB enthält.
Nach der Bedingung sind $4\,KB + 5\,KB = 63$, das heißt, der Abschnitt KB stellt 7 Jahre dar. Folglich sind Sie jetzt 21 Jahre alt, und ich bin 28 Jahre alt. Vor 7 Jahren waren Sie 14 Jahre alt, was in der Tat die Hälfte meines gegenwärtigen Alters darstellt.

228. Oft gibt man eine falsche Antwort, nämlich 7. Sie erklärt sich daraus, daß man nur diejenigen Dampfer im Auge hat, die noch auf die Reise gehen müssen. Man vergißt aber diejenigen, die schon unterwegs sind. Eine sehr einleuchtende und anschauliche Lösung kann man mit Hilfe einer grafischen Darstellung der Schiffsbewegungen erhalten (Abb. 332).

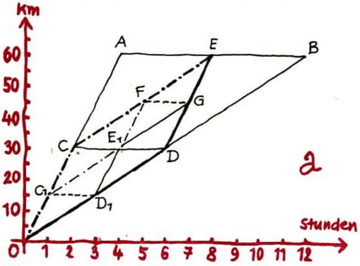


332

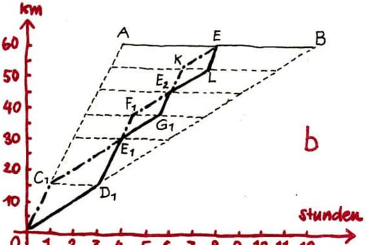
An dem Beispiel des Dampfers, der in der grafischen Darstellung durch die Strecke AB gekennzeichnet ist, kann man sehen, daß ein Dampfer auf der Fahrt von Le Havre nach New York auf See 13 Schiffen begegnet und dazu noch zweien, einem im Augenblick der Abfahrt (das von New York an-

kommt) und einem bei der Ankunft in New York (das nach Le Havre abfährt), insgesamt also 15 Schiffen.
Die grafische Darstellung zeigt auch, daß die Begegnungen täglich mittags und mitternachts stattfinden.

229. Auch hier ist für die Analyse und Lösung der Aufgabe das grafische Verfahren geeignet. Auf der vertikalen Achse (Abb. 333 a) tragen wir die Entfernungen



333



in km und auf der horizontalen die Zeiten in Stunden ab. Die Maßstäbe sind beliebig. Wenn der gesamte Weg auf dem Fahrrad (mit 15 km/h Geschwindigkeit) zurückgelegt wird, dann braucht man, wie der Endpunkt A der Strecke OA zeigt, dazu vier Stunden.

Wenn er aber zu Fuß (ohne Unterbrechung, mit 5 km/h Geschwindigkeit) zurückgelegt wird, dann braucht man, wie der Endpunkt B der Strecke OB zeigt, dazu zwölf Stunden. Beide Jungen bewegen sich aber abwechselnd zu Fuß und mit dem Rad fort und beenden ihre Reise gleichzeitig. Folglich müssen in der grafischen Darstellung ihre Bewegungen einen gemeinsamen Endpunkt haben.

In der Bedingung der Aufgabe ist nicht gesagt, wievielmal die Jungen sich abwechseln. Nehmen wir an, einmal. In diesem Falle müssen die Linien ihrer Bewegung ein Parallelogramm bilden.

An die Strecke OC für die Bewegung des Radfahrers schließt sich von einem beliebigen Punkt C die Strecke CE an, die die Bewegung zu Fuß darstellt und folglich parallel zu OB läuft. Die Linie, die, beginnend mit der Strecke OD, die Bewegung des zweiten Jungen darstellt, wird im Punkt D, der in bezug auf die horizontale Achse in einer Höhe mit dem Punkt C liegt, „gebrochen", weil der zweite Junge hier den Fußmarsch beendet und auf das Fahrrad überwechselt. Da er den übrigen Teil des Weges mit dem Rad fährt, läuft die Strecke DE parallel zu OA.

So ist die Figur OCED ein Parallelogramm. Die Figur CDBE ist auch ein Parallelogramm ($CE \parallel DB$ und $CD \parallel BE$).

Wenn wir die Seiten der Parallelogramme vergleichen, erhalten wir $OD = CE$ und $CE = DB$. Hieraus folgt $OD = DB$.

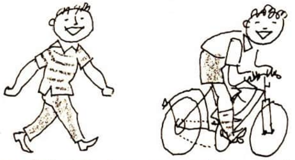
Folglich entsprechen die Punkte D und C der Mitte des gesamten Weges. In diesem Falle lösen sich die Jungen nur einmal, und zwar in einer Entfernung von 30 km vom Endziel der Reise ab. Der Punkt E ist die Mitte der Strecke AB und zeigt, daß bei dem gewählten Verfahren die Jungen für den ganzen Weg nur acht Stunden brauchen an Stelle von 12 Stunden, wenn beide den Weg zu Fuß zurückgelegt hätten. Aber die Ablösung mit dem Fahrrad braucht nicht nur einmal zu geschehen. Nach der Bedingung der Aufgabe holt der eine Junge, der auf dem Rad fährt, seinen Kameraden ein, übergibt ihm das Rad und setzt den Weg zu Fuß fort. Der Zeitpunkt einer solchen Übergabe ist in dem Diagramm dadurch gekennzeichnet, daß sich die Linien, die die Bewegungen darstellen, schneiden. Es ist klar, daß ein solcher Punkt analog dem Punkt E auch der Punkt E_1 sein kann, die Mitte der Strecke CD.

Wenn man die Überlegungen analog dem Vorhergehenden wiederholt, kann man zum Beispiel folgende grafische Darstellung der Bewegungen erhalten: OC_1E_1FE für den ersten Jungen und OD_1E_1GE für den zweiten Jungen. In diesem Falle vollzieht sich der Wechsel zwischen Fußgänger und Radfahrer zum letzten Mal 15 km vor dem Endpunkt der Fahrt (in der Abb. 333a in Höhe FG).

Man kann jetzt leicht begreifen, daß man die Linien für die Bewegungen der Jungen verschiedenartig gestalten kann.

So kann man zum Beispiel den Jungen nach ihrem Zusammentreffen im Punkt E_1 (Abb. 333b), in grafischer Darstellung ausgedrückt, folgende Bewegungen vorschlagen: dem ersten $E_1F_1E_2KE$ und dem zweiten $E_1G_1E_2LE$. In diesem Falle findet der letzte Wechsel noch näher am Ziel, nur $7^1/_2$ km vor diesem statt (in Abb. 333b in Höhe KL).

Die Bedingung der Aufgabe gestattet, wie ihr seht, zahllose Varianten. In diesem Sinne ist die Aufgabe ungenügend bestimmt. Aber eine Antwort bleibt völlig unzweifelhaft: Wie oft sie auch wechseln, für den ganzen Weg brauchen sie acht Stunden.



230. Beispiele kann man wählen, wieviel man will. Aber mit Beispielen beweist man keine allgemeine Eigenschaft. Dazu ist die Algebra mit ihren Regeln für das Rechnen mit Buchstaben unentbehrlich, wo unter jedem Buchstaben eine beliebige Zahl verstanden wird.

Es seien $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3} \dots \frac{a_n}{b_n}$ die gegebenen

Brüche, deren Zähler und Nenner beliebige positive Zahlen sind. Wir nehmen an, daß sie steigend angeordnet sind, so daß der kleinste Bruch $\frac{a_1}{b_1}$ und der größte $\frac{a_n}{b_n}$ ist. Es wird verlangt zu beweisen, daß

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} < \frac{a_n}{b_n}.$$

Wir haben:

$$\frac{a_2}{b_2} > \frac{a_1}{b_1} \text{ oder } a_2 > b_2 \frac{a_1}{b_1},$$

$$\frac{a_3}{b_3} > \frac{a_1}{b_1} \text{ oder } a_3 > b_3 \frac{a_1}{b_1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{a_n}{b_n} > \frac{a_1}{b_1} \text{ oder } a_n > b_n \frac{a_1}{a_1}.$$

Hieraus folgt: $a_2 + a_3 \ldots + a_n$

$$> (b_2 + b_3 \ldots + b_n) \frac{a_1}{b_1}.$$

Wir fügen zur linken Seite dieser Ungleichung a_1 und zur rechten $b_1 \frac{a_1}{b_1}$ hinzu, dann ist $a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n$

$$> (b_1 + b_2 + b_3 \ldots + b_n) \frac{a_1}{b_1}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 \ldots + b_n} > \frac{a_1}{b_1}.$$

Analog läßt sich auch der zweite Teil des Lehrsatzes beweisen, das heißt, daß

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 \ldots + b_n} < \frac{a_n}{b_n}.$$

Mathematik fast ohne Rechnen

231. Vier Schuhe und drei Socken. Unter 4 Schuhen, die aus dem Schrank geholt werden, sind bestimmt 2 von einer Fasson; unter 3 Socken sind 2 von einer Farbe.
Wenn man nur 2 oder 3 Schuhe herausnimmt, kann es passieren, daß alle von verschiedener Fasson sind. Und wenn man nur 2 Socken herausnimmt, dann können sie von verschiedener Farbe sein.

232. Nein, da nach 72 Stunden, das heißt nach dreimal 24 Stunden wieder Mitternacht ist und die Sonne nachts nicht scheint (wenn sich die Sache nicht jenseits des Polarkreises bei Mitternachtssonne abspielt).

233. Die Schüler der 6. Klasse übererfüllten ihre Aufgaben um fünf Bäume, und deshalb blieben die der 4. Klasse mit der Erfüllung ihrer Aufgabe um fünf Bäume zurück.
Folglich pflanzten die älteren zehn Bäume mehr als die jüngeren.

234. 1. Der Familienname Rainers ist nicht Schulze (das widerspricht der Bedingung Nr. 3).

2. Die Mutter Müllers ist eine geborene Meier (Bedingung Nr. 1). Der Großvater Rainers heißt Naumann (Bedingung Nr. 2). Folglich ist er der Vater von Rainers Mutter, nicht seines Vaters, weil der Vater Rainers entweder Müller oder Lehmann heißt (vgl. Nr. 1 der Lösung). Folglich ist die Mutter Müllers und die Mutter Rainers nicht ein und dieselbe Person.
Dadurch stellt sich heraus, daß Müller nicht Rainer heißt; aber Müller heißt auch nicht Klaus, wie das ganz am Anfang des Gesprächs zwischen dem Leiter und den Kindern klargestellt wurde.
Wenn jedoch Müller weder Rainer noch Klaus heißt, dann ist sein Vorname Dieter.

3. Wenn Müller mit Vornamen Dieter heißt, heißt folglich Schulze nicht Dieter; aber er heißt auch nicht Rainer (vgl. Nr. 1 der Lösung). Folglich ist Schulzes Vorname Klaus und Lehmanns Vorname Rainer.

4. Da Rainers Bruder mit 7 Jahren zur Schule gekommen ist und in diesem Jahre die Zehnklassenschule verläßt, ist er jetzt 17 Jahre alt, und da Rainer 5 Jahre jünger ist, ist er 12 Jahre alt (Bedingung Nr. 2).

5. Schulze und Dieter sind 1 Jahr älter als Rainer (Bedingung Nr. 3 und 4), folglich sind Schulze und Müller 13 Jahre alt.
Zusammengefaßt:

Dieter Müller,	13 Jahre alt,
Klaus Schulze,	13 ,, ,, ,
Rainer Lehmann,	12 ,, ,, .

235. Zuerst muß man die Ringzahlen aller 18 Schüsse herausschreiben. Dann muß man sie so auf 3 Zeilen (jede Zeile zu 6 Zahlen) verteilen, daß die Summe der Zahlen in jeder Zeile 71 ergibt.
Es ist nur eine Verteilung möglich, und zwar:

1. Zeile:	25, 20, 20, 3, 2, 1;	zusammen	71	Ringe,
2. Zeile:	25, 20, 10, 10, 5, 1;	,,	71	,, ,
3. Zeile:	50, 10, 5, 3, 2, 1;	,,	71	,, .

Weil A bei den ersten beiden Schüssen 22 Ringe erzielte, gilt für ihn die 1. Zeile, da nur in dieser Zeile zwei Zahlen vorhanden sind, die als Summe 22 ergeben.
C erreichte beim ersten Schuß 3 Ringe, folglich gilt für ihn die 3. Zeile (in der 2. Zeile kommt die Zahl 3 nicht vor). In dieser Zeile befindet sich auch die Zahl 50.
Folglich traf C den mittelsten Ring. Die 2. Zeile entfällt dann auf B.

236. Die Anzahl der Zeichen- und Kopierstifte wie auch die Preise für die Blei- und die Buntstifte sind ohne Rest durch 4 teilbar. Folglich muß auch der Gesamtbetrag für alle Stifte durch 4 teilbar sein. Aber 890 läßt sich nicht ohne Rest durch 4 teilen. Folglich war in der Berechnung des Gesamtbetrages ein Fehler.

237. Aufgaben dieser Art löst man nach der Aussonderungsmethode. Wir zählen die Aussagen auf:

1. A und der Moskauer sind Ärzte.
2. E und der Leningrader sind Lehrer.
3. C und der aus Tula sind Ingenieure.
4. B und F sind Teilnehmer am Großen Vaterländischen Krieg der SU, und der aus Tula hat nicht in der Armee gedient.
5. Der aus Charkow ist älter als A.
6. Der aus Odessa ist älter als C.
7. B und der Moskauer stiegen in Kiew aus.
8. C und der aus Charkow steigen in Winniza aus.

Aus diesen Aussagen ergeben sich als logische Folgerungen die noch unbekannten Tatsachen.
Zum Beispiel folgt aus der Aussage (1) und (2), daß A kein Moskauer ist (1), aber auch kein Leningrader (1 — 2); E ist kein Leningrader (2), aber E ist auch kein Moskauer (1 — 2) usw.
Wir stellen eine Tabelle aller ermittelten Tatsachen auf, die sich auf unsere Fahrgäste beziehen, und setzen in die Fächer der Tabelle die Nummern der Aussagen ein, aus denen folgt, daß die Möglichkeit für die jeweilige Verbindung ausgeschlossen ist:

	A	B	C	D	E	F
Moskau	1	7	7—8 1—3	—	1—2	*
Leningrad	1—2	*	2—3	—	2	—
Kiew	—	—	*	—	—	—
Tula	1—3	4	3	*	2—3	4
Odessa	*	—	6	—	—	—
Charkow	5	7—8	8	—	*	—

Aus der Tabelle folgt sofort, daß C aus Kiew ist (wir setzen ein Sternchen ein). Die übrigen Fahrgäste sind also keine Leute aus Kiew (wir setzen in die freien Felder der Zeile „Kiew" Minuszeichen). Sofort wird nun der Wohnort des A klar. Er ist aus Odessa. Wir setzen im entsprechenden Feld der Tabelle ein Sternchen ein; in die übrigen freien Felder dieser Zeile tragen wir Minuszeichen ein.
Wenn wir dieses Verfahren fortsetzen, ermitteln wir folgendes: A ist aus Odessa, B aus Leningrad, C aus Kiew, D aus Tula, E aus Charkow und F aus Moskau.
Jetzt kann man leicht auch den Beruf der Fahrgäste ermitteln: A und F sind Ärzte, B und E sind Lehrer, C und D Ingenieure.
Zusätzliche Bemerkung. Die Tabelle zeigt, daß aus den Aussagen insgesamt 17 Angaben entnommen worden sind. Daß diese Anzahl ausreichend war, folgt daraus, daß die Aufgabe gelöst worden ist und auf dem Lösungswege keine Widersprüche auftraten. Sind aber auch alle 17 Angaben für die Lösung notwendig? Offensichtlich nicht, weil zum Beispiel 2 Angaben belegen, daß C kein Moskauer ist.
Welche Anzahl von Angaben ist notwendig?
Da jeder Fahrgast Einwohner einer von 6 Städten ist, sind für die Bestimmung des Wohnorts des ersten Fahrgastes nach der Aussonderungsmethode Angaben notwendig, die ergeben, in welchen 5 Städten er nicht wohnt.
Danach sind zur Bestimmung des Wohnorts des zweiten Fahrgastes nur 4 Aussagen notwendig usw.
Folglich sind im ganzen bei 6 Fahrgästen nur $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ Aussagen notwendig.
In unserer Aufgabe sind also 2 Aussagen überflüssig.

238. Diese Aufgabe eignet sich zur Lösung nach dem gleichen Verfahren wie dem in der vorhergehenden angewandten. Wir stellen die Angaben zusammen:

1. In der ersten Runde spielte der Oberst mit dem Kavallerist.
2. In der ersten Runde spielte der Flieger nicht.
3. In der zweiten Runde spielte der Infanterist mit dem Gefreiten.

4. In der zweiten Runde spielte der Major mit dem Oberfeldwebel.
5. Nach der zweiten Runde schied der Hauptmann aus dem Turnier aus.
6. Deshalb blieb in der dritten Runde der Unteroffizier spielfrei.
7. Deshalb blieb in der vierten Runde der Angehörige der Panzerwaffe spielfrei.
8. Deshalb blieb in der fünften Runde der Major spielfrei.
9. In der dritten Runde spielte der Leutnant mit dem Infanterist.
10. In der dritten Runde spielte der Oberst mit dem Artillerist.
11. In der vierten Runde spielte der Pionier mit dem Leutnant.
12. In der vierten Runde spielte der Oberfeldwebel mit dem Oberst.
13. Nach der sechsten Runde endete die Partie des Kavalleristen mit dem Angehörigen der Granatwerfertruppe unentschieden.

Wir stellen nach dem gleichen Prinzip wie in der vorhergehenden Aufgabe eine Tabelle der Turnierteilnehmer und der Waffengattungen auf und füllen sie aus:

Die Sternchen in der Tabelle zeigen die Waffengattung der Turnierteilnehmer an. In die Tabelle sind 28 Aussagen eingetragen. Die Anzahl der Aussagen, die für die Lösung notwendig ist, ist auch gleich 28 ($7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$). Folglich enthält die Aufgabe keine überflüssigen Aussagen.

239. Bei dem Zersägen von 1 m langen Rundstämmen in $^1/_2$-m-Stücke muß die Menge der Abschnitte ohne Rest durch 2 teilbar sein. Beim Zersägen von $1^1/_2$ m langen Rundstämmen müssen die Abschnitte ohne Rest durch 3 und bei 2 m langen Stämmen ohne Rest durch 4 teilbar sein.

R und R_1 sägten 26 Abschnitte (ohne Rest durch 2 teilbar),

S und S_1 sägten 27 Abschnitte (ohne Rest durch 3 teilbar),

T und T_1 sägten 28 Abschnitte (ohne Rest durch 4 teilbar).

Folglich zersägten S und S_1 die $1^1/_2$ m langen Rundhölzer, und B_1 entsprach dem S_1.

	Infanterist	Flieger	Panzertruppe	Artillerist	Kavallerist	Granatwerfertruppe	Pionier	Nachrichtentruppe
Oberst	9–10	1–2	7–12	10	1	1–13	11–12	*
Major	3–4	–	7–8	*	–	–	–	–
Hauptmann	5–9	*	5–7	5–10	5–13	5–13	5–11	–
Leutnant	9	–	7–11	9–10	*	–	11	–
Oberfeldwebel	3–4	–	7–12	10–12	1–12	*	11–12	–
Unteroffizier	6–9	–	6–7	6–10	–	–	*	–
Gefreiter	3	–	*	–	–	–	–	–
Soldat	*	–	–	–	–	–	–	–

240. Der Quotient hat 5 Ziffern, und als Produkt stehen unter dem Dividenden nur 3. Folglich müssen 2 von den 5 Ziffern des Quotienten Nullen sein. Nach den Produkten zu schließen sind das weder die erste noch die letzte Ziffer des Quotienten. Folglich sind die zweite und vierte Ziffer, die durch den weißen und den schwarzen Läufer verdeckt sind, Nullen. Wenn ferner der zweistellige Divisor mit 8 multipliziert wird, dann erhält man ein zweistelliges Produkt, wenn aber der Divisor mit der Zahl multipliziert wird, die im Quotienten durch den weißen Turm verdeckt wird, dann erhält man ein dreistelliges Produkt. Folglich muß die Zahl, die vom weißen Turm verdeckt wird, größer als 8 sein, offensichtlich also 9. Die letzte Zahl des Quotienten gibt bei der Multiplikation mit dem Divisor auch ein dreistelliges Produkt; folglich ist die letzte Ziffer des Quotienten wie die erste auch gleich 9. Der Quotient ist damit vollständig bestimmt: 90 809.

Wir suchen jetzt den Divisor. Seine Multiplikation mit 8 ergibt eine zweistellige Zahl, und seine Multiplikation mit 9 ergibt eine dreistellige Zahl. Die einzige zweistellige Zahl, die dieser Forderung entspricht, ist 12, weil $12 \cdot 8 = 96$ und $12 \cdot 9 = 108$ ist. Also ist der Divisor 12. Wenn wir den Divisor (12) mit dem Quotienten (90809) multiplizieren und den Rest 1 hinzufügen, erhalten wir den Dividenden: 1089709.

241. 1. Rebus. Ich erinnere daran, daß jede Ziffer einer Zahl durch einen Buchstaben verschlüsselt ist und verschiedene Ziffern auch durch verschiedene Buchstaben verschlüsselt sind.

Wir bemerken, daß sich in der ersten Spalte bei der Subtraktion des Wertes G vom Wert U wiederum der Wert U ergibt. Das bedeutet, daß $G = 0$ ist.

Betrachten wir die Summe ATU + IAS = IITE. Die Summe zweier dreistelligen Zahlen kann nicht mehr sein als 1998, folglich ist $I = 1$.

Jetzt haben wir:

$$\begin{array}{r} \text{ATU} \\ +\ \underline{\text{1 AS}} \\ \text{11 TE.} \end{array}$$

Da wir wissen, daß $A < 10$ ist und die Summe der Zahlen in der Spalte der Hunderter 11 beträgt, finden wir, daß $A = 9$ ist (bei der Addition von zwei Zahlen ist in jeder Spalte höchstens eine Zehnerübertragung möglich).

Aus der Gleichung IITE : E = PPA folgt, daß das Produkt $A \cdot E$ auf die Ziffer E endet. Da A gleich 9 ist, kann E nur die Zahl 5 sein, folglich $E = 5$.

Da $E = 5$ ist, haben wir 11 T 5 : 5 = PP 9. Die Division von 11 Hundertern durch 5 ergibt 2 Hunderter; folglich ist $P = 2$ und demnach $T = 4$.

Aus der Gleichung 94 U — N 50 = 29 U erhalten wir $N = 6$, und aus der Gleichung 19 S — 1 O 0 = 6 S finden wir, daß $O = 3$ ist.

Aus PAU — NS = PPA folgt: $200 + 90 + U - 60 - S = 200 + 20 + 9$; hieraus ergibt sich: $S - U = 1$.

Da nur noch die Plätze für die zwei Ziffern 7 und 8 nicht festgelegt sind, ist offensichlich $S = 8$ und $U = 7$.

Wir stellen die Resultate in einer Tabelle zusammen:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
G	I	P	O	T	E	N	U	S	A

In russischen Buchstaben:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Г	И	П	О	Т	Е	Н	У	З	А

Nun ist nur noch das gebildete Wort zu lesen: Гипотенуза = Hypotenuse.

2. Rebus. Die Lösung verläuft analog der des ersten Rebus und ist kaum schwerer. Die Werte der Buchstaben sind in der Tabelle angegeben:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	E	R	U	F	S	W	A	H	L

Das deutsche Wort „Berufswahl" bedeutet in der Tat einen sehr wichtigen Schritt im Leben des Menschen.

Anmerkung. Es ist interessant, sich analoge Rebus-Mosaike auszudenken.

242. Der Motorradfahrer war 20 Minuten weniger unterwegs, als er gebraucht hätte, um den Weg zum Flugplatz und wieder zurück zum Postamt zurückzulegen. Die Zeitersparnis entstand dadurch, daß er diesmal nicht bis zum Flugplatz fuhr. Diese 20 Minuten hätte er für die Strecke vom Treffpunkt mit dem Radfahrer bis zum Flugplatz und zurück benötigt. Um den Weg nur in einer Richtung, zum Beispiel vom Treffpunkt mit dem Radfahrer bis zum Flugplatz zurückzulegen, hätte er 10 Minuten gebraucht. Wir wissen aber, daß der Motorradfahrer den Radfahrer traf, als dieser 30 Minuten unterwegs war, das heißt eine halbe Stunde nach der Ankunft des Flugzeuges. Da der Motorradfahrer zur rechten Zeit vom Postamt weggefahren war und er zu diesen 30 Minuten noch 10 Minuten bis zum Flugplatz gebraucht hätte, folgern wir, daß das Flugzeug 40 Minuten vor der fahrplanmäßigen Ankunftszeit auf dem Flugplatz eingetroffen war.

243. 1. Wir nehmen an, daß keiner der Faktoren größer als 8 ist. Dann sind 3 Fälle möglich: a) Beide Faktoren sind gleich 8, b) der eine Faktor ist gleich 8, der andere ist kleiner als 8, c) beide Faktoren sind kleiner als 8. Man erkennt sofort, daß in jedem dieser Fälle das Produkt kleiner als 75 ist; das aber widerspricht der Bedingung. Folglich ist wenigstens einer der Faktoren größer als 8.
2. Wir nehmen an, daß die erste Ziffer eine Zahl darstellt, die nicht 1 ist. Dann ist diese Zahl nicht kleiner als 2, und die zweistellige Zahl ist nicht kleiner als 20. Nun ist aber das Produkt aus 20 und 5 gleich 100; folglich ist das Produkt der zweistelligen Zahl mit 5 nicht kleiner als 100, das heißt, es ist keine zweistellige Zahl; das aber widerspricht der Bedingung. Folglich ist die erste Ziffer der zweistelligen Zahl 1.

244. 1. Wir teilen die 9 Münzen in 3 gleiche Gruppen und legen 3 Münzen auf jede Waagschale (1. Wägung); die dritte Gruppe lassen wir beiseite. Es sind 2 Fälle möglich.

1. Fall. Die Waage bleibt im Gleichgewicht. Dann ist die gesuchte Münze unter den beiseite gelegten. Wir suchen von diesen 3 Münzen 2 beliebige aus und legen eine auf jede Waagschale (2. Wägung). Wenn die Waagschalen nicht im Gleichgewicht bleiben, dann geht die Waagschale mit der falschen (leichteren) Münze nach oben; wenn jedoch die Waagschalen im Gleichgewicht bleiben, dann ist die gesuchte Münze diejenige, die nicht auf die Waage gelegt wurde.

2. Fall. Die Waagschalen bleiben nicht im Gleichgewicht. Folglich ist die gesuchte Münze auf derjenigen Waagschale, die sich gehoben hat. Damit stellt die 1. Wägung die 3 Münzen fest, unter denen die gesuchte ist. Durch die 2. Wägung sondern wir (genau wie im 1. Fall) die gesuchte Münze aus.
2. Sie wird analog der 1. Aufgabe gelöst. Die zusätzliche Schwierigkeit liegt darin, daß man darauf kommen muß, 8 Münzen in ungleiche Gruppen zu teilen: 2 Gruppen mit je 3 Münzen und eine Gruppe mit 2 Münzen. Wir legen die ersten beiden Gruppen auf die Waage, 3 Münzen auf jede Waagschale (1. Wägung). Wenn die Waage im Gleichgewicht bleibt, dann ist die gesuchte Münze unter den übrigen beiden, und wir finden sie, da sie leichter ist, sofort durch die 2. Wägung. Wenn jedoch die Waage nicht im Gleichgewicht ist, liegt die falsche Münze auf derjenigen Waagschale, die sich gehoben hat. Wir wählen jetzt aus diesen Münzen 2 beliebige aus und legen eine auf jede Waagschale (2. Wägung). Wenn die Waagschalen nicht im Gleichgewicht bleiben, dann ist wiederum die Waagschale mit der falschen Münze nach oben gegangen; wenn jedoch die Waage im Gleichgewicht bleibt, dann ist die gesuchte Münze diejenige, die nicht auf die Waage gelegt wurde.
3. Die ganze Schwierigkeit besteht darin, daß von der falschen Münze nicht bekannt ist, ob sie leichter oder schwerer als die echten ist. Daher ist es hier, wenn man die Münzen auf 3 Gruppen zu je 4 Münzen verteilt, nötig, sie einzeln zu kennzeichnen, zum Beispiel durchzunumerieren. Auf eine Waagschale legen wir die 1. Gruppe Münzen, die, sagen wir, die Nummern 1, 2, 3 und 4 haben sollen, und auf die andere Waagschale die 2. Gruppe Münzen mit den Nummern 5, 6, 7 und 8 (1. Wägung). Es sind zwei Fälle möglich.

Fall A. Die Waage ist im Gleichgewicht. Folglich befindet sich die falsche Münze in der 3. Gruppe mit den Nummern 9, 10, 11 und 12. Wir vergleichen jetzt die Gewichte von 3 von ihnen, zum Beispiel das Gewicht der Münzen mit den Nummern 9, 10 und 11 mit dem Gewicht der Münzen Nr. 1, 2 und 3 (2. Wägung). Wenn die Waage im Gleichgewicht bleibt, ist die falsche Münze die mit Nr. 12, und wenn wir sie zum Beispiel mit der Münze Nr. 1 vergleichen, von der bekannt ist, daß sie echt ist (3. Wägung), stellen wir fest, ob die falsche Münze schwerer oder leichter als die echten ist. Wenn jedoch die 2. Wägung kein Gleichgewicht ergibt, dann ist die falsche Münze entweder die mit Nr. 9, 10 oder 11, wobei nach der Stellung der Waagschale mit diesen Münzen sofort geklärt ist, ob sie schwerer oder leichter ist. Wir nehmen an, es überwiegt die Schale mit den Münzen Nr. 9, 10 und 11. Folglich ist die falsche Münze schwerer. Um sie herauszufinden, reicht noch eine (3.) Wägung. Dazu legen wir auf die Waage die Münzen Nr. 9 und 10; dann wiegt entweder die falsche über oder sie ist die mit Nr. 11.

Fall B. Die 1. Wägung führt nicht zum Gleichgewicht. Es wog über, sagen wir, die Schale mit den Münzen Nr. 1, 2, 3 und 4. Dann ist die gesuchte Münze entweder unter den Nummern 1, 2, 3 und 4 (1. Gruppe), und sie ist schwerer, oder sie ist unter den Münzen mit den Nummern 5, 6, 7 und 8 (2. Gruppe), und sie ist leichter. Es stellt sich dabei heraus, daß die Münzen der 3. Gruppe mit den Nrn. 9, 10, 11 und 12 echt sind.

Bei der 2. Wägung vergleichen wir die Münzen Nr. 1, 2 und 9 (2 Münzen aus der 1. Gruppe und 1 aus der 3.) mit den Münzen Nr. 3, 4 und 5 (noch 2 Münzen aus der 1. Gruppe und 1 aus der 2. Gruppe). Die Münzen Nr. 6, 7 und 8 aus der 2. Gruppe legen wir einstweilen beiseite.

Es sind 3 Fälle möglich:

a) Gleichgewicht. Die falsche Münze befindet sich folglich in der leichteren Gruppe unter den Münzen Nr. 6, 7 und 8. Bei der 3. Wägung vergleichen wir 2 beliebige dieser 3 Münzen und finden dabei die falsche, leichtere heraus.

b) Die Gruppe der Münzen Nr. 3, 4 und 5 ist schwerer. Bei der 3. Wägung vergleichen wir die Münzen Nr. 3 und 5. Wenn ihre Gewichte im Gleichgewicht sind, ist die falsche Münze die mit Nr. 4; sie ist schwerer als die echten. Wenn kein Gleichgewicht ist, dann wiegt die Münze Nr. 3 über und ist falsch.

c) Die Gruppe der Münzen Nr. 1, 2 und 9 ist schwerer. Bei der 3. Wägung vergleichen wir zum Beispiel die Münzen 1 und 2. Im Fall des Gleichgewichts ist die falsche Münze Nr. 5, und sie ist leichter als die echten. Wenn kein Gleichgewicht ist, dann ist die falsche Münze diejenige, die überwiegt; sie ist dann schwerer als die echten.

Die angeführte Lösung ist nicht die einzige, da man die Gruppierung der Münzen, die man für die zweite Wägung bestimmt, variieren kann.

245. A dachte so: „Die Zettel bei meinen Konkurrenten sind weiß, folglich kann ich einen weißen Zettel haben, er kann auch schwarz sein. Nehmen wir an, er ist schwarz. Dann hat B allen Anlaß, die Farbe seines Zettels richtig zu melden, weil er sich sagen kann: ‚Ich sehe, daß A einen schwarzen Zettel hat und C einen weißen, folglich kann ich entweder einen weißen oder einen schwarzen haben; er kann aber nicht schwarz sein, weil dann C, der weiß, daß nur zwei schwarze Zettel da sind und der bei mir und A schwarze Zettel sieht, sofort die Farbe seines Zettels gemeldet hätte. Aber C hat das nicht getan, er folgert also, daß er keinen schwarzen Zettel hat; aber dann muß er bei mir einen weißen Zettel sehen.' Aber B schweigt auch, folglich ist mein Zettel nicht schwarz. Wenn er aber nicht schwarz ist, dann ist er weiß."

So überlegte A, überzeugt von der Fähigkeit seiner Konkurrenten, ebenso logisch denken zu können.

Nach der Aufgabe geben alle drei gleichzeitig die richtigen Antworten. Folglich überlegten die anderen beiden Konkurrenten analog.

Jedoch können alle drei auch so gedacht haben: Man muß uns gleiche Bedingungen stellen, das heißt, uns Aufgaben von gleicher Schwierigkeit stellen. Wir hätten keine gleichen Bedingungen (und jemand von uns würde folglich protestieren), wenn einem oder zweien von uns schwarze Zettel angeklebt worden wären; folglich hat jeder von uns einen weißen Zettel.

246. 1. a) Überflüssiges Wort: „zwei"; b) überflüssige Worte: „rechtwinkliges Dreieck" und „spitzer".

2. a) Sehne; b) Dreieck; c) Durchmesser; d) gleichseitiges Dreieck; e) konzentrische Kreise.

3. Höhe, Mittellinie, Winkelhalbierende, Symmetrieachse, geometrischer Ort der Punkte, die gleich weit von den Endpunkten der Strecke AC entfernt sind.

4. Geometrische Figur — ebene Figur — Vieleck — konvexes Vieleck — Parallelogramm — Rhombus — Quadrat.

5. Die Summe aller Außenwinkel eines konvexen Vielecks ist gleich vier Rechte; folglich kann kein konvexes Vieleck mehr als drei stumpfe Außenwinkel haben. Hieraus folgt, daß kein konvexes Vieleck mehr als drei spitze Innenwinkel haben kann. Drei spitze Innenwinkel gibt es im Dreieck.

247. A überlegte so: „Jeder von uns denkt, daß sein eigenes Gesicht sauber ist. So ist B überzeugt, daß sein Gesicht sauber ist, und lacht über das beschmierte Gesicht des Weisen C. Aber wenn B sehen würde, daß mein Gesicht sauber ist, dann würde er sich wundern, warum C lacht, weil in diesem Falle C keinen Grund zum Lachen hätte. Indessen B wundert sich nicht, folglich kann er denken, daß C über mich lachen muß. Folglich ist mein Gesicht schwarz."

248. 1. Es steht fest, daß die gesuchte Zahl durch 2 und durch 9 teilbar ist, folglich ist sie durch 18 teilbar. Es steht auch fest, daß sie größer als 10, aber kleiner als 25 ist. Daraus ergibt sich, daß die gesuchte Zahl 18 ist, weil zwischen 10 und 25 die Zahl 18 die einzige ist, die sich durch 18 teilen läßt.

Probe: $18 \cdot 4\frac{1}{2} = 81$.

2. a) Unter den gesuchten Zahlen ist nicht die Zahl 10, weil sonst die letzte Ziffer des Produkts eine 0 wäre.
b) Wenn alle gesuchten Zahlen größer als 10 wären, dann wäre das Produkt größer als $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$, das heißt größer als 10000.
c) Es ist festgestellt, daß wenigstens eine der gesuchten Zahlen kleiner als 10 ist. Aber die gesuchten Zahlen unterscheiden sich nach der Bedingung voneinander um 1, und da keine von ihnen gleich 10 sein darf, sind alle 4 gesuchten Zahlen kleiner als 10 und einstellig.
d) Unter den gesuchten einstelligen Zahlen ist nicht 5, weil sonst auch die Zahl 4 oder 6 dabei sein würde und danach das Produkt aus den gesuchten Zahlen als letzte Ziffer 0 haben müßte.
e) Wir betrachten die beiden möglichen Gruppen einstelliger Zahlen, die die Bedingung der Aufgabe erfüllen können:

e_1) 1, 2, 3, 4 und e_2) 6, 7, 8, 9.

Die erste Gruppe scheidet aus, weil $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ ist; wenn die Aufgabe eine Lösung hat, dann können folglich die gesuchten Zahlen nur die Zahlen 6, 7, 8 und 9 sein.
Probe: $6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024$.

249. Der alte Maschinist überlegte folgendermaßen: Das Alter des Kindes darf nicht geringer als 3 Jahre sein (das folgt aus der Bedingung), und es darf (nach dem Sinn des Wortes „Kind") nicht höher als 15 Jahre sein. Folglich wird das Kind nach 3 Jahren nicht weniger als 6 und nicht mehr als 18 Jahre alt sein. Aber zwischen den Zahlen 6 und 18 gibt es nur zwei ganze Zahlen, aus denen sich die Quadratwurzel genau ziehen läßt: 9 und 16. Wir prüfen die 9: $\sqrt{9} = 3$; $9 - 3 = 6$; $\sqrt{9} + 3 = 6$. Mit der Zahl 16 stimmt diese Probe nicht.
Folglich beträgt das Alter des Kindes 6 Jahre.
Antworten auf die zusätzlichen Fragen:

1. Die Studentin hatte folgende Lösungen im Auge:
a) arithmetisch. Es sei a das Alter des Kindes vor 3 Jahren. Das Quadrat dieser Zahl soll um 6 größer als sie selbst sein,

das heißt $a^2 - a = 6$ oder $a(a-1) = 6$. Wenn wir annehmen, daß a eine ganze Zahl ist, dann sind a und $a - 1$ Teiler der Zahl 6. Aber $6 = 3 \cdot 2 = 6 \cdot 1$. Von diesen beiden Möglichkeiten ergibt nur die erste Teiler, die sich um 1 unterscheiden. Folglich ist $a = 3$, und das Alter des Kindes ist gleich $3 + 3 = 6$ Jahre.

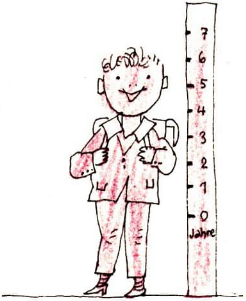
b) algebraisch. Es sei x das Alter des Kindes im gegenwärtigen Zeitpunkt. Vor drei Jahren war das Kind $x - 3$ Jahre alt, und nach 3 Jahren wird es $x + 3$ Jahre alt sein. Nach der Bedingung ist $x + 3 = (x-3)^2$. Hieraus folgt $x^2 - 7x + 6 = 0$; die Wurzeln dieser Gleichung sind $x_1 = 6$ und $x_2 = 1$. Aber nach dem Sinn der Aufgabe ist $x > 3$, folglich muß die Lösung $x = 6$ sein.

2. Es sei das Alter x. Dann ist nach der Bedingung $x + n = (x - n)^2$. Daraus ist klar, daß zur Ermittlung ganzer und positiver Zahlen für x und n eine Zahl gesucht werden muß, die eine Quadratzahl darstellt; sie ist so in zwei Summanden x und n aufzuteilen, daß deren Differenz die Quadratwurzel der gesuchten Zahl ist.

Wir nehmen zum Beispiel 9; dann ist $n = 3$, $x = 6$, $6 + 3 = 9$ und $6 - 3 = \sqrt{9}$. Es haben sich also die Zahlen der gestellten Aufgabe ergeben. Nehmen wir 16; dann ist $n = 6$, $x = 10$, $10 + 6 = 16$ und $10 - 6 = \sqrt{16}$. Wir nehmen 25; dann ist $n = 10$, $x = 15$, $15 + 10 = 25$ und $15 - 10 = \sqrt{25}$ usw.

3. Es wird verlangt, die Zahl zu finden, die die Bedingung bei einer gegebenen Zahl n erfüllt. Wir suchen die kleinste Quadratzahl, die größer als 2 n ist; ziehen aus ihr die Quadratwurzel und fügen zum Resultat n hinzu. Wenn zum Beispiel $n = 3$, dann ist $2n = 6$; die nächste größere Quadratzahl ist 9; $\sqrt{9} + 3 = 6$; in diesem Falle ist $x = 6$.

250. Das Intervall, dem die gedachte Zahl angehört, muß halbiert werden, und es muß geklärt werden, in welcher Hälfte sich die gedachte Zahl befindet. Mit dem halbierten Intervall verfährt man wiederum so, das heißt, man nimmt, wie die Artilleristen sagen, die gesuchte Zahl „in die Gabel"



und fährt fort, diese „Gabel" bis zum „Volltreffer ins Ziel" zusammenzudrücken.

Woraus ist erkennbar, daß hierfür zehn Fragen genügen?

Das liegt daran, daß man das Intervall der Zahlen von 1 bis 1000 nur neunmal nacheinander zu halbieren braucht, um zu einem Intervall zu kommen, dem nur noch zwei Zahlen angehören, von denen eine die gedachte ist. Nehmen wir ein Intervall, dem die beiden Zahlen 1 und 2 angehören. Verdoppeln wir es, dann erhalten wir das Intervall 1 bis 4. Wir verdoppeln wieder. Die obere Grenze des Intervalls wird die Zahl 8 oder 2^3. Wir verdoppeln noch einmal. Die obere Grenze rückt bis zur Zahl 16 oder 2^4.

Wenn wir fortfahren, das Intervall zu verdoppeln, werden wir es von 1 bis 2^5 ausdehnen, dann von 1 bis 2^6 usw., bis es die Zahl $2^{10} = 1024$ erreicht, die, wie ihr seht, 1000 schon überschreitet.

Wie man die Fragen stellt, erläutere ich an Beispielen.

Beispiel 1. Es soll die gedachte Zahl 1 sein. Wir fragen:

1. Ist die gedachte Zahl größer als 512 (die Hälfte des Intervalls 1 bis 1024)? – Nein.
2. Ist die gedachte Zahl größer als 256 (die Hälfte des Intervalls 1 bis 512)? – Nein.
3. Ist sie größer als 128 (die Hälfte des Intervalls, dem sie angehören soll)? – Nein.

4. Ist sie größer als 64? – Nein.
5. Ist sie größer als 32? – Nein.
6. Ist sie größer als 16? – Nein.
7. Ist sie größer als 8? – Nein.
8. Ist sie größer als 4? – Nein.
9. Ist sie größer als 2? – Nein.
10. Ist sie größer als 1?
Da die Zahl 1 gemerkt worden ist, muß man natürlich auch auf diese Frage verneinend antworten, also: Nein.
Dann ist klar, daß die gedachte Zahl 1 ist.

Beispiel 2. Es soll die gedachte Zahl 860 sein. Wir fragen:
1. Ist die gedachte Zahl größer als 512? – Ja.
Folglich gehört die gesuchte Zahl zu dem Intervall 512 bis 1000; wir werden zur Vereinfachung annehmen, daß sie zum Intervall 512 bis 1024 gehört. Wir nehmen die Hälfte dieses Intervalls, das heißt 256, fügen sie zu 512 hinzu und fragen:
2. Ist die gedachte Zahl größer als 768? – Ja.
Wir vermerken uns, daß die gesuchte Zahl zum Intervall 768 bis 1024 gehört. Wir fügen zu 768 die Hälfte dieses Intervalls, das heißt 128, hinzu, und fragen:
3. Ist die gedachte Zahl größer als 896? – Nein.
Wir merken uns, daß die gesuchte Zahl zum Intervall 768 bis 896 gehört. Wir fügen zu 768 die Hälfte dieses Intervalls, das heißt 64, hinzu (oder ziehen sie von 896 ab) und fragen:
4. Ist sie größer als 832? – Ja.
Die gesuchte Zahl gehört zum Intervall 832 bis 896. Wir fragen jetzt:
5. Ist sie größer als 864? – Nein.
Die gesuchte Zahl gehört also zum Intervall 832 bis 864.
6. Ist sie größer als 848? – Ja.
7. Ist sie größer als 856? – Ja.
8. Ist sie größer als 860? – Nein.
9. Ist sie größer als 858? – Ja.
Folglich kann die gesuchte Zahl nur 859 oder 860 sein. Wir fragen:
10. Ist sie größer als 859? – Ja.
Die gedachte Zahl ist 860.

251. Das ist möglich. Es ist günstiger, die Vorausberechnung „vom Ende aus" vorzunehmen. In der letzten Runde muß der erste Spieler für den zweiten einen Gegenstand übriglassen. Wieviel muß er dem zweiten Spieler in der vorletzten Runde übriglassen? Offensichtlich 5.

Wenn jetzt der zweite Spieler 1, 2 oder 3 Gegenstände nimmt, dann kann der erste Spieler in der Tat entsprechend 3, 2 oder 1 Gegenstand nehmen, und auf alle Fälle bleibt als Rest für den zweiten Spieler $5 - 4 = 1$ Gegenstand.

Wenn wir analog überlegen, finden wir, daß vorher der erste Spieler dem zweiten 9 Gegenstände übriglassen muß. Nimmt jetzt der zweite Spieler 1, 2 oder 3 Gegenstände, dann kann der erste Spieler entsprechend 3, 2 oder 1 Gegenstand nehmen, und auf alle Fälle bleiben für den zweiten Spieler $9 - 4 = 5$ Gegenstände.

Im ganzen sind es 11 Gegenstände. Folglich muß derjenige, der das Spiel beginnt, 2 Gegenstände nehmen, damit dem zweiten Spieler 9 bleiben. In der zweiten Runde muß er dem zweiten Spieler 5 Gegenstände übriglassen, dann kann er in der dritten Runde seinem Partner 1 Gegenstand übriglassen und das Spiel gewinnen. Die Anzahl der Gegenstände, die der erste Spieler dem zweiten übrigläßt, sind (vom Ende aus gezählt) 1, 5, 9 und sie bilden eine Zahlenfolge, in der die erste Zahl 1 ist und jede folgende um 4 größer als die vorhergehende.

Wenn wir diese Zahlenfolge fortsetzen, erhalten wir den Schlüssel zum Gewinn des Spieles im Falle von 30 Gegenständen: 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29. Folglich muß bei 30 Gegenständen der Spieler, der das Spiel beginnt, 1 Gegenstand wegnehmen, so daß seinem Partner 29 bleiben, und in jeder folgenden Runde muß er ihm dementsprechend 25, 21, 17, 13, 9, 5 und 1 Gegenstand übriglassen.

Die Verallgemeinerung des Spiels. Wenn wir analog überlegen, finden wir, daß das Spiel derjenige gewinnt, der seinem Gegner die folgende Anzahl Streichhölzer (gerechnet „vom Ende aus") übriglassen kann: 1, $p + 2$, $2p + 3$, $3p + 4$ usw. bis zu der Zahl, die n am nächsten kommt, aber kleiner als n ist. Wir bezeichnen sie mit N. Es gewinnt der erste Spieler, wenn er unter Beachtung der aufgestellten Regeln beim ersten Mal $n - N$ Streichhölzer wegnimmt.

252. Es gewinnt derjenige, der am Ende des Spiels seinem Partner 7 Streichhölzer übrigläßt.

Alle 7 Streichhölzer kann der Partner nicht nehmen, und wieviel er sich im Rahmen von 1 bis 6 Streichhölzern auch wegnimmt, er wird nicht der letzte sein, der Streichhölzer vom Tische nimmt. Um die Möglichkeit zu haben, dem Partner 7 Streichhölzer übrigzulassen, muß man ihm vorher 14 Streichhölzer übriglassen und vordem 21 und anfangs 28.

Derjenige Spieler, der das Spiel beginnt, muß also zunächst 2 Streichhölzer nehmen und gewinnt, wenn er die aufgestellte Regel einhält.

253. Wieder kommt es darauf an, wer den ersten Zug macht.

Aber den richtigen Weg zum Sieg über den „Gegner" in diesem Spiel zu finden, ist schwieriger als in den vorhergehenden Spielen.

Wer das Spiel beginnt, muß beim ersten Zug 2 Streichhölzer nehmen und dann, je nach dem, wieviel Streichhölzer der „Gegner" nimmt, sich beim Spiel an folgende Regel halten:

Wenn der „Gegner" eine gerade Anzahl Streichhölzer hat, dann muß er ihm die mögliche Anzahl Streichhölzer übriglassen, die um 1 größer ist als ein Vielfaches von 6 (19, 13, 7); wenn der „Gegner" eine ungerade Zahl von Streichhölzern hat, dann

muß er ihm die mögliche Anzahl übriglassen, die um 1 kleiner ist als ein Vielfaches von 6 (23, 17, 11, 5), und wenn das nicht geht, dann muß er ihm die mögliche Anzahl übriglassen, die ein Vielfaches von 6 ist (24, 18, 12, 6).
Ihr nehmt zum Beispiel 2 Streichhölzer und euer „Gegner" 4 oder 2 (eine gerade Zahl). Es bleiben übrig $27 - 6 = 21$ oder $27 - 4 = 23$ Streichhölzer. Nach der Regel nehmt ihr 2 oder 4 Streichhölzer, damit dem „Gegner" 19 bleiben. Wenn jedoch der „Gegner" 3 Streichhölzer genommen hat (ungerade Zahl), dann bleiben $27 - 5 = 22$ übrig. Da ihr den Rest nicht auf 17 herabdrücken könnt (5 Streichhölzer darf man nicht nehmen), müßt ihr 4 nehmen, damit der Rest 18 bleibt. Wenn der „Gegner" 1 Streichholz genommen hat, dann müßt ihr auch 1 Streichholz nehmen, damit als Rest $27 - 4 = 23$ bleiben usw. Diese Regel ergibt sich aus folgenden Überlegungen (es spielen A und B):

1. Es sollen am Ende des Spiels auf dem Tisch 5 Streichhölzer übrigbleiben. Das ist für A nur in dem Falle vorteilhaft, wenn B den folgenden Zug macht und er eine ungerade Zahl von Streichhölzern hat. (Da 22 Streichhölzer weggenommen sind, kann A auch nur eine ungerade Zahl von Streichhölzern haben.) Man muß alle Varianten für die mögliche Fortsetzung des Spiels betrachten:

	A	B	A	B	A	B	A	B
es hat	ungerade	ungerade	ungerade	ungerade	ungerade	ungerade	ungerade	ungerade
es nimmt	—	1	—	2	—	3	—	4
,, ,,	3	1	3	—	1	1	1	—
es hat	gerade	ungerade	gerade	ungerade	gerade	ungerade	gerade	ungerade

Wenn jedoch B (folglich auch A) eine gerade Zahl von Streichhölzern hat, dann ist es für A ungünstig, für den nächsten Zug von B 5 Streichhölzer übrigzulassen, und das Spiel verliert A (überzeugt euch!).

2. Es sollen am Ende des Spiels auf dem Tisch 6 Streichhölzer übrigbleiben. Das ist auch für A nur in dem Falle günstig, wenn B den folgenden Zug macht und er eine ungerade Zahl von Streichhölzern hat. (Dabei hat A natürlich eine gerade Anzahl Streichhölzer.)

	A	B	A	B	A	B	A	B
es hat	gerade	ungerade	gerade	ungerade	gerade	ungerade	gerade	ungerade
es nimmt	—	1	—	2	—	3	—	4
,, ,,	4	1	4	—	2	1	2	—
es hat	gerade	ungerade	gerade	ungerade	gerade	ungerade	gerade	ungerade

Wenn jedoch B eine gerade Anzahl Streichhölzer hat (folglich A eine ungerade), dann ist es für A ungünstig, für B's Zug 6 Streichhölzer übrigzulassen, A verliert. Sobald A nur 1 Streichholz nimmt, zeigt sich, daß A in derselben Lage ist, in welcher B ist, wenn 5 Streichhölzer übrigbleiben (vgl. unter 1.).

3. Es sollen am Ende des Spiels auf dem Tisch 7 Streichhölzer übrigbleiben. Das ist für A nur dann günstig, wenn B den folgenden Zug macht und er eine gerade Anzahl Streichhölzer hat. (Dabei hat A natürlich

	A	B	A	B	A	B	A	B
es hat	gerade	gerade	gerade	gerade	gerade	gerade	gerade	gerade
es nimmt	—	1	—	2	—	3	—	4
,, ,,	1	—	4	1	4	—	2	1
es hat	weiter wie	unter 1.	gerade	ungerade	gerade	ungerade	gerade	ungerade

auch eine gerade Anzahl Streichhölzer.) Wenn aber B (und folglich auch A) eine ungerade Anzahl Streichhölzer hat, dann ist es für A ungünstig, für B's Zug 7 Streichhölzer übrigzulassen, A verliert. Sobald B 1 Streichholz nimmt, ist A in derselben Lage, in der B war, als noch 6 Streichhölzer übrig waren (vgl. unter 2.).

4. Nach seinem Zug 8, 9 oder 10 Streichhölzer übrigzulassen, ist in allen Fällen für A ungünstig und führt zum Verlieren. Es sollen zum Beispiel nach dem Zug des A auf dem Tisch 8 Streichhölzer bleiben. Es sind zwei Fälle möglich:
a) A hat eine ungerade Zahl von Streichhölzern, B eine gerade; B nimmt 3 Streichhölzer. Jetzt hat er auch eine ungerade Zahl Streichhölzer. Es bleiben auf dem Tisch 5 Streichhölzer. In diesem Falle verliert, wie bekannt (vgl. unter 1.), derjenige, der am Zug ist. Am Zug ist A, folglich verliert er.
b) A hat eine gerade Zahl Streichhölzer, B eine ungerade; B nimmt ein Streichholz. Jetzt hat er eine gerade Zahl. Auf dem Tisch bleiben 7 Streichhölzer. In diesem Falle verliert, wie bekannt (vgl. unter 3.), derjenige, der am Zug ist. Den nächsten Zug hat A, folglich verliert er. Diese Möglichkeit jedoch, das Spiel zu seinem Vorteil zu wenden, bietet sich B auch in den Fällen, in denen A nach seinem Zug 9 oder 10 Streichhölzer auf dem Tisch läßt. Führt die Analyse dieser Fälle durch.

5. Bei weiterer Vermehrung der Zahl der Streichhölzer, die nach einem Zug von A auf dem Tisch bleiben, das heißt bei 11, 12, 13 . . . Streichhölzern, wiederholen sich die Voraussetzungen für einen Gewinn in derselben Reihenfolge wie bei 5, 6, 7 . . . übriggebliebenen Streichhölzern, was auch die oben ausgesprochene Regel, wie man das Spiel ,,zum Gewinn'' führt, bestätigt.
Es sollen zum Beispiel nach dem Zug des A auf dem Tisch 11 Streichhölzer bleiben. Es ist nicht schwierig zu zeigen, daß A gewinnt, wenn B (und folglich auch A) eine ungerade Anzahl Streichhölzer hat.

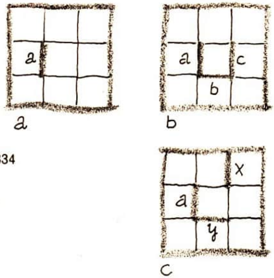
	A	B	A	B
es hat	ungerade	ungerade	ungerade	gerade
es nimmt	—	1 oder 3	—	2 oder 4
,, ,,	3 oder 1	—	4 oder 2	—
es hat	weiter wie unter 3.		weiter wie unter 1.	

Betrachtet noch einige Fälle, zum Beispiel die, in denen 12 und 13 Streichhölzer auf dem Tisch bleiben!
6. Es bleibt noch zu zeigen, warum man bei 27 Streichhölzern beim ersten Zug gerade 2 Streichhölzer nehmen muß und nicht mehr und nicht weniger. Wenn ihr 1 Streichholz nehmt, dann kann der ,,Gegner'' 2 nehmen; es bleiben 24 Streichhölzer übrig, und es gelingt euch nicht, ihm 19 Streichhölzer übrigzulassen.
Wenn ihr 3 Streichhölzer nehmt, dann kann der ,,Gegner'' 1 nehmen; es bleiben 23 Streichhölzer. Ihr seid am Zuge, und bei 23 Streichhölzern verliert derjenige, der eine ungerade Zahl hat und den nächsten Zug macht (vgl. unter 5.).
Wenn ihr 4 Streichhölzer nehmt, dann nimmt der ,,Gegner'' ebenso viele; es bleiben 19 zurück. Ihr seid am Zuge, und bei 19 Streichhölzern verliert derjenige, der eine gerade Anzahl Streichhölzer hat und den nächsten Zug macht (vgl. unter 5.).
Wenn ihr jedoch 2 Streichhölzer wegnehmt, dann könnt ihr, wieviel auch der ,,Gegner'' nehmen mag, das Spiel zu euren Gunsten wenden.

254. und **255.** entfallen

256. Wenn ihr als erster 100 erreichen wollt, dann müßt ihr als erster auch 89 erreichen. Wenn die euch genannte Zahl um 11 von 100 entfernt ist, dann findet ihr, welche Zahl (10 oder weniger) euer Partner auch hinzufügt, sofort den Summanden, der die vom Partner genannte Summe zu 100 ergänzt. Um aber 89 zu erreichen, muß man den Gegner auch um 11 von dieser Zahl fernhalten, das heißt, man muß 78 ansagen können. Wenn wir diese Überlegungen fortsetzen, erhalten wir die Reihenfolge der Zahlen, die ihr ansagen müßt, um als erster das Ziel zu erreichen. Diese Zahlenfolge beginnt mit 1: 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89. Jetzt ist klar: Wenn ihr 1 sagt, dann kann euer Partner, welche Zahl er auch ansagt (11 oder weniger), euch nicht hindern, 12 zu sagen, dann 23, 34 usw. Sich diese Zahlen zu merken, ist leicht; in jeder ist die Zahl des Einers um 1 größer als die Zahl des Zehners und jeder Zehner ist um 1 größer als der vorangehende.
(Wenn der Partner den ,,Schlüssel'' zum Spiel nicht kennt, dann wird er freilich Zahlen hinzufügen, die ihm zufällig in den Kopf kommen; daher könnt ihr es, wenn ihr das Spiel mit ihm wiederholt, riskieren, innerhalb der ersten Hälfte bis 100 ,,die Spuren zu verwischen'' und euch nicht an die ,,Schlüssel''zahlen zu halten.) Das Spiel kann man durch Änderung des höchstzulässigen Summanden und der Endsumme variieren. Es soll zum Beispiel der höchste Summand nach wie vor 10 sein, aber die Endsumme nicht 100, sondern 120. Wenn wir 11 von 120 subtrahieren, vom Ergebnis wiederum 11 subtrahieren usw., erhalten wir folgende Zahlen: 109, 98, 87, 76, 65, 54, 43, 32, 21, 10. Wer dieses ,,Geheimnis'' kennt, gewinnt, wenn er mit 10 beginnt.
Jetzt soll die Endsumme 100 bleiben, aber der höchste Summand soll nicht 10, sondern 8 sein. Dann finden wir die ,,Schlüssel''zahlen durch Subtraktion von je 9 von 100 und von jeder sich ergebenden Differenz: 91, 82, 73, 64, 55, 46, 37, 28, 19, 10, 1. Wenn man als höchsten Summanden die Zahl 9 annimmt, sind die Zahlen, die man im Auge haben muß, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90. In diesem Falle darf derjenige, der das Spiel gewinnen will, es freilich nicht beginnen, wenn dem Partner das ,,Geheimnis'' des Sieges bekannt ist.

257. Wenn das Spielfeld ein Quadrat aus 9 Feldern ist, dann muß man das Spiel mit einer beliebigen Seite des mittelsten Quadrats beginnen, zum Beispiel mit der Seite a (Abb. 334a). Wenn jetzt der ,,Gegner'' die

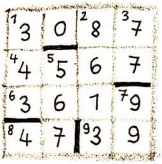


334

Seite eines beliebigen der 3 Quadrate der linken Spalte nachzieht, nehmt ihr sofort alle Felder dieser Spalte weg und macht den gewinnbringenden Zug im übriggebliebenen Rechteck (vgl. Fall 3, S. 128). Alle 9 Felder sind euer. Wenn der ,,Gegner'' als Antwort auf euern ersten Zug (Seite a) eine beliebige zweite Seite (zum Beispiel b) des mittelsten Quadrats nachzieht (Abb. 334b), zieht ihr sofort die dritte (c) nach, und dem ,,Gegner'' bleibt, um nicht alle 9 Felder zu verlieren, nichts anderes übrig, als das mittelste Feld zu nehmen und die übrigen 8 abzugeben. Wenn jedoch der ,,Gegner'' nach eurem ersten Zug (a) eine Seite eines beliebigen der drei Quadrate der rechten Spalte nachzieht, zum Beispiel x (Abb.334c), könnt ihr das Feld oben rechts nehmen, ihm mit dem Zug y antworten, und alle 9 Felder sind euer.

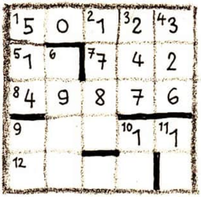
258. und **259.** entfallen

260. Aufgabe 1. Für die Zahl Nr. 5 senkrecht gibt es zwei Möglichkeiten: entweder 543 oder 567 (vgl. die Bedingung). Prüfen wir erst 543. Wenn diese Zahl richtig ist, dann sind die ersten beiden Ziffern der vierstelligen Zahl Nr. 6 waagerecht 34, und die vollständige Zahl besteht nach der Bedingung aus dem Produkt der Zahlen 77 und $\overline{x3}$ (x ist die unbekannte Ziffer des Zehners). Der einzige in Frage kommende Wert für x ist die Zahl 4, aber $77 \cdot 43 = 3311$. Die Ziffer des Hunderters ist nicht richtig.
Prüfen wir die zweite mögliche Zahl Nr. 5 senkrecht: 567. Jetzt sind die ersten Ziffern der Zahl Nr. 6 waagerecht 36; sie müssen ebenfalls die ersten Ziffern des Produkts der Zahlen 77 und $\overline{x7}$ sein. Der passende Wert für x ist die Zahl 4. Wir prüfen: $77 \cdot 47 = 3619$. Das ist die Zahl Nr. 6 waagerecht, und 47 erfüllt die Bedingung für die Zahl Nr. 8.
Bleiben noch die Zahlen Nr. 7 senkrecht und Nr. 9 waagerecht zu suchen. Wir kombinieren die Faktoren der Zahlen Nr. 1 waagerecht und Nr. 3 senkrecht; dabei stellen wir leicht fest, daß die Zahl Nr. 7 senkrecht 99 ist. Die Zahl Nr. 9 waagerecht ist 39. Alle Felder des gegebenen Quadrats sind ausgefüllt (Abb. 335).

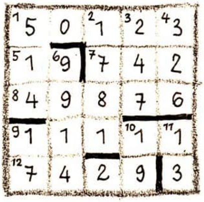


335

Aufgabe 2. Die Lösung kann man zum Beispiel auf folgendem Weg erhalten. In erster Linie muß man die Zahlen Nr. 1 und 8 waagerecht ermitteln. Für die Zusammensetzung dieser beiden fünfstelligen Zahlen muß man alle zehn Ziffern verwenden, und die Differenz der Zahlen muß eine dreistellige Zahl ergeben (vgl. Nr. 3). Das bedeutet, daß sich die ersten Ziffern der gesuchten Zahlen um 1 unterscheiden müssen. Damit stehen die ersten Ziffern der Zahlen Nr. 5 und Nr. 10 fest (vgl. Nr. 1 senkrecht).



a



336 b

Wenn der größte Teiler der Zahl Nr. 3 (vgl. Nr. 5) mit 1 beginnt, dann fängt sein kleinster zweistelliger Teiler natürlich auch mit 1 an. Damit steht die erste Ziffer der Zahl Nr. 11 fest (Abb. 336a).
Auch die Zahl Nr. 2 beginnt mit 1, und ihre zweite Ziffer ist 7. Dieselbe Ziffer drückt die Zahl der Zehner der Zahl Nr. 8 aus (vgl. Nr. 7). Da die letzten beiden Ziffern der Zahl Nr. 9 waagerecht festgestellt sind (zwei Einsen) und sie zusammen ein Neuntel der Summe der Zahlen Nr. 1 und Nr. 8 waagerecht bilden, ist die Summe der Einer dieser Zahlen gleich 9 und auch die Summe ihrer Zehner gleich 9. Folglich ist die erste Ziffer der Zahl Nr. 3 eine 2. Sie ist auch die letzte Ziffer der Zahl Nr. 7. Wenn x und y die Zahlen der Einer von Nr. 1 und Nr. 8 waagerecht sind, dann ist klar, daß erstens $x + y = 9$ und zweitens $2x = y$ ist (vgl. Nr. 4). Hieraus folgt: $x = 3$, $y = 6$. Die Zahl Nr. 4 ist damit vollständig: 326.
Die zweite Ziffer der Zahl Nr. 7 ist eine 4, denn $11 - 7 = 4$ (vgl. Nr. 3). Da wir die Zahl der Hunderter der Differenz von Nr. 1 und Nr. 8 waagerecht und die Zahl der Hunderter von Nr. 1 waagerecht kennen (1), läßt sich leicht die Zahl der Hunderter von Nr. 8

feststellen: Sie ist gleich 8. So lassen sich jetzt leicht (nach der Aussonderungsmethode) die ersten beiden Ziffern der Zahlen Nr. 1 und Nr. 8 waagerecht feststellen (Abb. 336a). Ferner ergibt sich die Zahl Nr. 9 waagerecht (11111). Die Zahl 247 hat zwei Teiler: 19 und 13. Das ergibt die Zahlen Nr. 5, Nr. 10 und Nr. 11.
Wir suchen jetzt die Zahl Nr. 6 senkrecht. Die „umgekehrte" Zahl ist eine vierstellige, sie endet auf 99 und besteht aus dem Produkt der Zahl 247 mit einer zweistelligen Primzahl. Es paßt nur 17. Folglich ist die „umgekehrte" Zahl Nr. 6 gleich 4199 und besteht aus den drei Primfaktoren 13, 17 und 19. Die Zahl Nr. 6 senkrecht ist 9914. Die Lösung wird in Abb. 336b gezeigt.
Aufgabe 3. Wenn wir in einer Tabelle der Quadrate dreistelliger Zahlen nachsehen, finden wir nur eine Zahl, die in gleicher Weise von links nach rechts und von rechts nach links gelesen werden kann: 698 896. Die Kenntnis dieser Zahl bildet den Schlüssel zur Ermittlung der Zahlen Nr. 10 und Nr. 11 senkrecht und unmittelbar hinterher auch der Zahlen Nr. 4 und Nr. 9 senkrecht, Nr. 13, Nr. 15 und Nr. 5 waagerecht.
Die Ermittlung der Zahl Nr. 1 senkrecht besteht in der Lösung einer kleinen Aufgabe: Es ist die kleinste positive ganze Zahl zu suchen, deren Division durch 2, 3, 4, 5 und 6 entsprechende Reste von 1, 2, 3, 4 und 5 ergibt. Fügen wir zur gesuchten Zahl 1 hinzu, dann ist sie teilbar durch 2, 3, 4, 5 und 6. Wenn wir alle Primfaktoren in ihren größten Potenzen, in denen sie in diesen Zahlen vorkommen, multiplizieren, erhalten wir $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$, und die gesuchte Zahl ist 59. Hieraus folgt die Zahl Nr. 1 senkrecht: $59 - 8 = 51$.
Wir suchen die Zahl Nr. 1 waagerecht. Es gibt nur zwei vierstellige Quadrate von Primzahlen: 5041 ($= 71^2$) und 5329 ($= 73^2$). Die erste Zahl paßt nicht, weil an der Spitze der Zahl Nr. 2 senkrecht keine Null stehen kann. Also ist die Zahl Nr. 8 waagerecht die 73. Die Zahl Nr. 2 senkrecht hat sich stückweise ergeben; bleibt noch, zur Kontrolle ihre Quersumme zu prüfen. Die einzige zweistellige Primzahl, die mit 9 beginnt, ist 97. Damit ergibt sich die Zahl Nr. 3 senkrecht. Das übrige ist einfach. Die vollständige Lösung ist in Abb. 337 dargestellt.

337

261. Kunststück 2. Es sollen sich euer Freund die Zahl n und ihr euch die Zahl p ausgedacht haben. Wenn wir bei jeder der beiden Zahlen nacheinander die einzelnen Multiplikationen und Divisionen durchgeführt haben, erhalten wir die Resultate in folgender Form: $n\frac{abc\dots}{xyz\dots}$; $p\frac{abc\dots}{xyz\dots}$. Diese beiden Resultate ergeben, wenn wir das erste durch n und das zweite durch p teilen, ein und dieselbe Zahl: $\frac{abc\dots}{xyz\dots}$. Da wir diese Zahl und die Summe $\frac{abc\dots}{xyz\dots} + n$ kennen, genügt es, von der letzteren die erstere abzuziehen, um die Zahl n zu erhalten.
Kunststück 3. Fall 1. Die gedachte Zahl hat die Form 4 n. Wir führen die Berechnungen durch: $4n + 2n = 6n$; $6n + 3n = 9n$; $9n : 9 = n$ (es bleibt kein Rest). Die gedachte Zahl ist 4 n.
Fall 2. Die gedachte Zahl hat die Form $4n + 1$.
Ihr größerer Teil ist $2n + 1$. Wir haben: $(4n + 1) + (2n + 1) = 6n + 2$; $(6n + 2) + (3n + 1) = 9n + 3$; $(9n + 3) : 9 = n$ Rest 3. Der Rest ist kleiner als 5. Die gedachte Zahl ist $4n + 1$.
Fall 3. Die gedachte Zahl hat die Form $4n + 2$. Wir haben: $(4n + 2) + (2n + 1) = 6n + 3$. Wenn wir zu diesem Resultat seinen größeren Teil, das heißt $3n + 2$, addieren, erhalten wir: $(6n + 3) + (3n + 2) = 9n + 5$; $(9n + 5) : 9 = n$ Rest 5. Der

Rest ist gleich 5. Die gedachte Zahl ist $4n + 2$.

Fall 4. Die gedachte Zahl hat die Form $4n + 3$. Ihr größerer Teil ist $2n + 2$. Wir haben: $(4n + 3) + (2n + 2) = 6n + 5$. Davon ist der größere Teil $3n + 3$, daher haben wir: $(6n + 5) + (3n + 3) = 9n + 8$; $(9n + 8) : 9 = n$ Rest 8. Der Rest ist größer als 5. Die gedachte Zahl ist $4n + 3$.

Kunststück 4. Es ist klar, daß dann, wenn die gedachte Zahl die Form $4n$ hat, wobei $n = 1, 2, 3 \ldots$ ist, das Endresultat der Berechnung $9n$ ergibt, das heißt eine Zahl, die durch 9 teilbar ist. Folglich muß die Quersumme dieser Zahl durch 9 teilbar sein, und das bedeutet, daß die geheimgehaltene Ziffer die Summe der übrigen zu einer durch 9 teilbaren Zahl ergänzt. Wenn die Summe der angesagten Ziffern selbst durch 9 teilbar ist, dann bedeutet das, daß die Ziffer 9 oder 0 geheimgehalten wurde; aber eine Null darf es nach der Bedingung nicht sein. Für Zahlen von der Form $4n + 1$, $4n + 2$ und $4n + 3$ ergibt das Resultat der Rechenoperationen entsprechend $9n + 3$, $9n + 5$ und $9n + 8$. Die Quersumme ist durch 9 teilbar, wenn im ersten Falle 6, im zweiten 4 und im dritten 1 addiert wird.

Folglich muß auch in diesen Fällen die geheimgehaltene Ziffer die Summe der übrigen zu einer Zahl ergänzen, die durch 9 teilbar ist.

Kunststück 5. Wir bezeichnen die gedachte Zahl mit dem Buchstaben x und die hinzuzufügende mit dem Buchstaben y. Wenn wir die Berechnungen durchführen, erhalten wir:

$$(x + y)^2 - x^2 = 2xy + y^2 = 2y\left(x + \frac{y}{2}\right) = z.$$

Hieraus wird klar, daß die gedachte Zahl (x) gleich der Hälfte des Resultats $\left(\frac{z}{2}\right)$, geteilt durch die hinzugefügte Zahl (y) minus deren Hälfte $\left(\frac{y}{2}\right)$ ist.

Kunststück 6. Wir bezeichnen die gedachte Zahl mit dem Buchstaben x, die Quotienten aus der Division von x durch 3, 4 und 5 entsprechend mit den Buchstaben a, b und c und die Reste mit den Buchstaben r_1, r_2 und r_3. Wir erhalten drei Gleichungen:

$$x = 3a + r_1,$$
$$x = 4b + r_2,$$
$$x = 5c + r_3.$$

Hieraus folgt:

$$r_1 = x - 3a; \quad r_2 = x - 4b; \quad r_3 = x - 5c.$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned} S &= 40 r_1 + 45 r_2 + 36 r_3 \\ &= 40(x - 3a) + 45(x - 4b) + 36(x - 5c) \\ &= 121x - 120a - 180b - 180c. \end{aligned}$$

Die Multiplikatoren 40, 45 und 36 waren so ausgewählt, daß alle Glieder der erhaltenen algebraischen Summe sich ohne Rest durch 60 teilen lassen außer dem ersten (121 x), das bei der Division durch 60 gerade den Rest ergibt, der gleich der gedachten Zahl x ist. Die Richtigkeit der Regel ist damit bewiesen.

262. Kunststück 1. Die Rechenoperationen, die im gegebenen Falle mit der gedachten Zahl n ausgeführt werden, kann man so ausdrücken: $\frac{na + b}{c}$, und diesen Ausdruck kann man in der Form $\frac{na}{c} + \frac{b}{c}$ darstellen. Es ist klar, daß wir bei der Subtraktion von $n\frac{a}{c}$ den Rest $\frac{b}{c}$ erhalten.

Es ist immer möglich, a, b und c so auszuwählen, daß sich kein Bruch ergibt.

Kunststück 2. Wir bezeichnen mit dem Buchstaben x die Zahl, die von euch, und mit dem Buchstaben y diejenige, die vom Teilnehmer aufgeschrieben wurde. Die erste Berechnung, die vom Teilnehmer durchgeführt wird, führt zu der Zahl $y + 99 - x$. Da nach der Bedingung x nicht größer als 50 ist und y zwischen 51 und 100 liegt, ist $y + 99 - x$ nicht kleiner als 100, aber auch nicht größer als 199, das heißt, es ist unbedingt eine dreistellige Zahl, deren erste Ziffer eine 1 ist. Die erste Ziffer dieser Zahl wegzustreichen bedeutet, von der Zahl 100 zu subtrahieren. Daher führt die zweite Berechnung, die vom Teilnehmer ausgeführt wird, zu der Zahl $y + 99 - x - 100 + 1 = y - x$. Die letzte Berechnung, $y - (y - x) = x$ führt zur Zahl x, was zu beweisen war.

Ihr könnt dem Teilnehmer auch gestatten, sich ganze Zahlen aus einem anderen Bereich auszudenken, zum Beispiel aus dem Intervall zwischen 201 und 1000. Aber dann darf die von euch geheimgehaltene Zahl nicht kleiner als 100 und nicht größer als 200 sein, und bei den weiteren Berechnungen muß man die Zahl 999 an Stelle von 99 verwenden.

263.

	der erste	der zweite	der dritte
Ursprünglich hat	4 k	7 k	13 k,
nach der 1. Übergabe hat	8 k	14 k	2 k,
,, ,, 2. ,, ,,	16 k	4 k	4 k,
,, ,, 3. ,, ,,	8 k	8 k	8 k.

Nach der dritten Übergabe hat jeder doppelt soviel, wie ursprünglich der erste hatte. Das übrige ist klar.

264. Es sollen die gedachten Zahlen a und b sein. Dann bilden wir nach der Bedingung $(a + b) + a\,b$. Nachdem wir 1 addiert haben, erhalten wir eine Zahl, die sich wie folgt darstellen läßt:

$$(a + b) + a\,b + 1 = a + 1 + b\,(a + 1) = (a + 1)\,(b + 1).$$

Wie sich zeigt, ist jeder Faktor um 1 größer als die entsprechende gedachte Zahl. Man kann auch die Summe der gedachten Zahlen von ihrem Produkt subtrahieren, der Beweis verläuft dann entsprechend.

265. Es soll A die Primzahl, B die zusammengesetzte, aber nicht durch A teilbare Zahl sein. Die beiden anderen Zahlen x und y sind beides Primzahlen, wobei y einer der Teiler der Zahl B ist. Nach den geforderten Berechnungen kann sich die Summe $A\,x + B\,y$ oder $A\,y + B\,x$ ergeben. Es ist klar, daß sich die erste Summe nicht durch y teilen läßt, wohl aber die zweite. Folglich stellen wir je nach dem, ob sich das Endresultat durch y teilen läßt oder nicht, eindeutig fest, ob die Zahl A oder die Zahl B mit y multipliziert worden war.

266. Die Summe der drei Zahlen und der durch 3 teilbaren Zahl ist: $a + (a + 1) + (a + 2) + 3\,k = 3\,a + 3\,k + 3 = 3\,(a + k + 1)$. Nach der Multiplikation dieser Summe mit 67 erhalten wir: $201\,(a + k + 1)$. Nach der Bedingung ist $a < 60$, $3\,k < 100$ oder $k < 34$. Folglich ist $a + k + 1$ nicht größer als eine zweistellige Zahl. Die letzte Stelle bzw. die letzten beiden Stellen des Produkts einer beliebigen einstelligen oder zweistelligen Zahl mit 201 bilden immer, wie leicht zu begreifen ist, dieselbe einstellige oder zweistellige Zahl, und die vorangehenden Stellen ergeben die verdoppelte Zahl. Zum Beispiel

$$\begin{array}{r} 41 \cdot 201 \\ \hline 41 \\ +\,82 \\ \hline 8241 \end{array}$$

Also gibt $a + k + 1$ die Zahl an, die aus den beiden letzten Ziffern des Produkts besteht. Wenn wir von dieser bekannten Zahl die ebenfalls bekannte Zahl $k + 1$ abziehen, erhalten wir die Zahl a, die kleinste der drei ausgedachten Zahlen.

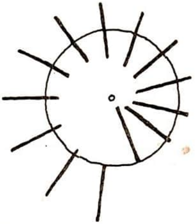
267. 1. Ausgedacht wurden die beiden Zahlen a und b. Wir führen die geforderten Berechnungen durch: $(2a + 5) \cdot 5 = 10a + 25$; $10a + 25 + 10 = 10a + 35$; $10a + 35 + b = 10a + b + 35$. Wenn wir 35 abziehen, erhalten wir die zweistellige Zahl $10\,a + b$, deren Ziffern die gedachten Zahlen darstellen.

2. Die ausgedachten drei Zahlen sind a, b und c. Wir führen die geforderten Berechnungen durch.
$(10\,a + b + 35) \cdot 10 + c = 100\,a + 10\,b + c + 350$. Wenn wir 350 abziehen, dann erhalten wir die dreistellige Zahl $100\,a + 10\,b + c$, deren Ziffern die gedachten Zahlen darstellen.
Analog prüft man auch die weiteren Fälle.

268. Wenn das gesuchte Alter x ist, dann erhält man im Resultat der geforderten Berechnungen $10\,x - 9\,k$, wobei k die beliebige einstellige Zahl ist. Wir gestalten die erhaltene Differenz um:
$10\,x - 9\,k = 10\,x - 10\,k + k = 10\,(x - k) + k$.
Unser Gesprächspartner ist doch wahrscheinlich älter als 9 Jahre $(x > 9)$, und k ist nach der Bedingung nicht größer als 9 $(k \leqq 9)$. Folglich ist $x - k$ eine positive Zahl. Die Zahl $10\,(x - k) + k$ hat in solchem Falle k Einer und, wenn man k abtrennt,

dann ändert sich gleichzeitig der Stellenwert der übrigen Ziffern, das heißt die Zehner werden Einer und die Hunderter Zehner usw., mit einem Wort, die Zahl verringert sich auf den zehnten Teil und ist gleich x — k. Wenn wir die abgetrennte Ziffer k als Zahl addieren, erhalten wir das gesuchte Alter x.

269. Der 13. Strich ist nicht verschwunden, er ist verteilt auf die übrigen zwölf und hat sie verlängert. Davon kann man sich überzeugen, entweder durch Messung der Länge der ursprünglichen 13 Striche und der erhaltenen zwölf Striche oder geometrisch.
Wir stellen uns die Gerade vor (vgl. Abb. 165 S. 140), die die oberen Endpunkte der 13 Striche verbindet. Diese Gerade und die Gerade durch M und N bilden die Schenkel eines Winkels, die von den parallelen Geraden in gleichen Abständen durchschnitten werden. Wenn wir an den entsprechenden geometrischen Lehrsatz denken, begreifen wir, daß die Gerade durch M und N von dem zweiten Strich 1/12 seiner Länge abschneidet, von dem dritten 2/12, von dem vierten 3/12 usw.
Wenn wir beide Teile des Kartonblatts verschieben, setzen wir das abgeschnittene Stück eines jeden Strichs (beginnend mit dem zweiten) an den unteren Teil des vorhergehenden.
Und da jedes abgeschnittene Stück um ein und dasselbe Stück (um 1/12) größer als das vorhergehende ist, muß sich jeder Strich infolgedessen um 1/12 seiner Größe verlängern, und es müssen sich insgesamt zwölf Striche ergeben. Mit dem Auge ist diese Verlängerung nicht zu erkennen, so daß sich das Verschwinden des 13. Strichs für den ersten Anschein als ziemlich rätselhaft darstellt.
Um die Wirkung zu steigern, kann man die Striche im Kreis anordnen, wie in Abb. 338 gezeigt wird. Wenn wir den inneren Kreis herausschneiden und ihn in seinem Mittelpunkt so befestigen, daß er gedreht werden kann, dann erreichen wir durch eine geringe Drehung des Kreises wieder, daß ein Strich „verschwindet".



338

Die Teilbarkeit der Zahlen

270. Das kleinste gemeinsame Vielfache (k.g.V.) (vgl. Seite 142, Fußnote 2) der ersten zehn Zahlen ist 2520. Man bildet das k.g.V., indem man die Zahlen in ihre Primfaktoren zerlegt und das Produkt aus den größten Anzahlen der gleichen Faktoren bildet, die in einer der Zerlegungen auftreten.
Es ist interessant, daß das k.g.V. der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 10 mit dem k.g.V. der zweiten Hälfte dieser Zahlenfolge übereinstimmt, das heißt mit dem k.g.V. der Zahlen 6, 7, 8, 9 und 10.
Dieses Beispiel veranschaulicht den allgemeinen Lehrsatz, daß das k.g.V. aller natürlichen Zahlen von 1 bis $2n$ mit dem k.g.V. der natürlichen Zahlen von $n+1$ bis $2n$ übereinstimmt.

271. Solche Zahlen gibt es eine unzählige Menge. Die kleinste ist 58. Die Differenz zwischen dem Divisor und dem Rest ist in allen Fällen gleich 2. Wenn man daher zu ihr 2 addiert, dann ist sie ohne Rest durch einen beliebigen der in der Aufgabe genannten Divisoren teilbar.
Das k.g.V. der Zahlen 2, 3, 4, 5 und 6 ist 60. Ziehen wir 2 ab, erhalten wir 58.

272. Das k.g.V. der Zahlen 2, 3, 4, 5 und 6 ist gleich 60. Man muß dasjenige Vielfache von 7 suchen, das um 1 größer ist als ein Vielfaches von 60. Wir formulieren danach: $60n + 1 = 7 \cdot 8n + 4n + 1$.
Die Zahl $60n + 1$ läßt sich durch 7 teilen, wenn sich $4n + 1$ durch 7 teilen läßt. Der kleinste der geeigneten Werte für n ist die Zahl 5. Folglich könnten in dem Korb 301 Eier sein. Bei dem folgenden geeigneten Wert für n, das ist $n = 12$, ergeben sich 721 Eier. Aber dieser Fall (und alle folgenden) ist ausgeschlossen: Eine solche Last konnte die Frau nicht tragen.

273. Offensichtlich ist die Zahl durch 7, 8 und 9 teilbar. Die kleinste mögliche positive ganze Zahl ist $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$. Andere Faktoren kann die gesuchte Zahl nicht haben, da selbst beim kleinsten, das heißt bei einer 2, die gesuchte Zahl vierstellig wäre.

274. Das k.g.V. der Zahlen 4, 8, 12 und 16 ist 48. Folglich trafen die Schiffe nach 48 Wochen wieder zusammen, das heißt am 4. Dezember 1953.

275. Der Preis für Salz und Seife ist durch 3 teilbar. Die Anzahl der Pakete Zucker und der Schachteln Streichhölzer ist auch durch 3 teilbar. Daher muß der Gesamtpreis durch 3 teilbar sein. Diese Teilbarkeit besaß aber die Summe, die auf dem Kassenzettel stand, nicht (ihre Quersumme $1 + 3 + 1 + 5 = 10$ ist nicht durch 3 teilbar). Folglich war in der Rechnung ein Fehler.

276. Die Lösung geht von der Beobachtung aus, daß die linke Seite der Gleichung durch 9 teilbar ist. Folglich muß auch die Quersumme $4 + 9 + 2 + a + 4$ durch 9 teilbar sein. Aber $4 + 9 + 2 + 4 = 19$; daher ist $a = 8$. Andere Werte für a kann es nicht geben, weil a weder eine negative noch eine mehrstellige Zahl sein darf. Wenn wir jetzt die Quadratwurzel aus 492804 ziehen, erhalten wir $3(230 + t) = 702$. Also ist $t = 4$.

277. Die linke Seite der Gleichung ist durch 11 teilbar. Folglich muß sich auch die rechte Seite durch 11 teilen lassen. Entsprechend der Teilbarkeitsregel für 11 haben wir: $1 + 2 + 1 + 7 = a + 3$. Folglich ist $a = 8$. (Andere Fälle, die nach der Teilbarkeitsregel in Betracht gezogen werden könnten, kommen hier nicht in Frage, da sie für a negative oder mehrstellige Werte ergeben würden.)
Wenn wir die Quadratwurzel aus 37810201 ziehen, erhalten wir 6149. Jetzt haben wir die

einfache Gleichung: $11(492 + x) = 6149$. Sie ergibt $x = 67$.

278. Wir wissen, daß die Zahlen $10^3 + 1$ und $10^6 - 1$ durch 1001 teilbar sind. Es ist nicht schwer, sich davon zu überzeugen, daß die Zahl $10^9 + 1$ auch durch 1001 teilbar ist und folglich auch durch 7, 11 und 13.
Jetzt nehmen wir eine beliebige Zahl, die in vier Gruppen zerlegt werden muß, zum Beispiel 31 218 001 416, und stellen sie in folgender Form dar: $31\,218\,001\,416 = 416 + 1 \cdot 10^3 + 218 \cdot 10^6 + 31 \cdot 10^9 = 416 + 1(10^3 + 1 - 1) + 218(10^6 - 1 + 1) + 31(10^9 + 1 - 1) = (416 - 1 + 218 - 31) + [(10^3 + 1) + 218(10^6 - 1) + 31(10^9 + 1)]$.
Die Zahl, die in der eckigen Klammer steht, ist durch 7, 11 und 13 teilbar. Folglich hängt die Teilbarkeit der untersuchten Zahl durch 7, 11 und 13 nur von der Teilbarkeit der Zahl ab, die in der ersten runden Klammer steht.
Die Gruppendifferenz ergibt: $(416 + 218) - (1 + 31) = 602$.
Die Zahl 602 und damit auch die untersuchte Zahl lassen sich durch 7, aber nicht durch 11 und 13 teilen.

279. Wir schreiben eine dreistellige Zahl in der üblichen algebraischen Form nieder: $100x + 10y + z$. Es soll bewiesen werden, daß sie unter der Bedingung durch 8 teilbar ist, daß die zweistellige Zahl $(10x + y)$, vermehrt um die Hälfte von z, das heißt, die Zahl $10x + y + \frac{z}{2}$, durch 4 teilbar ist.
Es sei $10x + y + \frac{z}{2} = 4k$, wobei k eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet. Wir lösen nach z auf und setzen das Ergebnis in die oben angeführte Schreibweise einer dreistelligen Zahl ein:
$20x + 2y + z = 8k$; $z = 8k - 20x - 2y$;
$100x + 10y + z = 100x + 10y + 8k - 20x - 2y = 80x + 8y + 8k$.
Es ist klar, daß der letzte Ausdruck und folglich auch die dreistellige Ausgangszahl durch 8 teilbar sind.
Und wenn nun $10x + y + \frac{z}{2}$ nicht durch 4 teilbar ist? Würde daraus folgen, daß auch die gegebene Zahl $100x + 10y + z$ nicht durch 8 teilbar ist?
Die Antwort gibt die Umkehrung des Satzes: Wenn $100x + 10y + z$ durch 8 teilbar ist, dann ist $10x + y + \frac{z}{2}$ auch durch 4 teilbar.
Es sei $100x + 10y + z = 8k$. Wir lösen nach z auf und setzen das Ergebnis in $10x + y + \frac{z}{2}$ ein. Wir erhalten:
$10x + y + \frac{z}{2} = 10x + y + \frac{1}{2}(8k - 100x - 10y) = -40x - 4y + 4k$.
Die Teilbarkeit dieses Ausdrucks durch 4 ist klar.
Damit ist die Regel für die Teilbarkeit einer dreistelligen Zahl durch 8 bewiesen. Wenn man sie mit der allbekannten Regel für die Teilbarkeit einer mehrstelligen Zahl durch 8 verbindet, ergibt sich, daß eine gegebene Zahl durch 8 teilbar ist, wenn die Zahl durch 4 teilbar ist, die aus der drittletzten und vorletzten Ziffer gebildet wird, vermehrt um die Hälfte der Zahl, die durch die letzte Ziffer ausgedrückt wird.

280. Es sei N eine aus drei Zifferngruppen bestehende Zahl. Wir stellen sie in folgender Form dar: $N = 10^6 a + 10^3 b + c$, wobei a, b und c die dreistelligen Zahlen der Gruppen bezeichnen. Es sei $a + b + c$ durch 37 teilbar, also $a + b + c = 37k$. Wir lösen nach c auf und setzen das Ergebnis in der Gleichung $N = \ldots$ ein:
$N = 10^6 a + 10^3 b + 37k - a - b = a(10^6 - 1) + b(10^3 - 1) + 37k$.
Die Zahlen $10^6 - 1$, $10^3 - 1$ und 37 sind durch 37 teilbar, folglich ist auch die Zahl N durch 37 teilbar.

281. Verwendet für den Beweis dasselbe Verfahren wie in der Lösung der vorhergehenden Aufgabe. Aus der bewiesenen Eigenschaft ergibt sich folgende Regel zur Bestimmung der Teilbarkeit einer gegebenen Zahl durch 3, 7 und 19:
Streicht von der gegebenen Zahl die letzten beiden Ziffern ab und addiert die mit 4 multiplizierte abgetrennte Zahl zur übriggebliebenen Zahl; wenn es nötig ist, wiederholt das Verfahren, bis ihr ein Resultat erhaltet, dessen Teilbarkeit durch 3, 7, 19 oder 399 offensichtlich ist. Wenn das Resultat durch

eine oder mehrere dieser Zahlen teilbar (nicht teilbar) ist, dann ist auch die gegebene Zahl durch diese Zahlen teilbar (nicht teilbar).

Wir untersuchen nach diesem Verfahren zum Beispiel die Teilbarkeit der Zahlen 138264 und 40698 durch 3, 7 und 19. Wir haben:

für die Zahl 138264:

$$64 \cdot 4 = 256$$

$$\begin{array}{r} 1382 \\ +\ 256 \\ \hline 1638 \end{array}; \quad 38 \cdot 4 = 152$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ +\ 152 \\ \hline 168 \end{array}$$

Den Prozeß weiter fortzusetzen, hat keinen Sinn. Wir folgern: 168 und folglich auch die Zahl 138264 sind durch 3 und 7, aber nicht durch 19 teilbar;

für die Zahl 40698:

$$98 \cdot 4 = 392$$

$$\begin{array}{r} 406 \\ +\ 392 \\ \hline 798 \end{array}; \quad 98 \cdot 4 = 392$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ +\ 392 \\ \hline 399 \end{array}$$

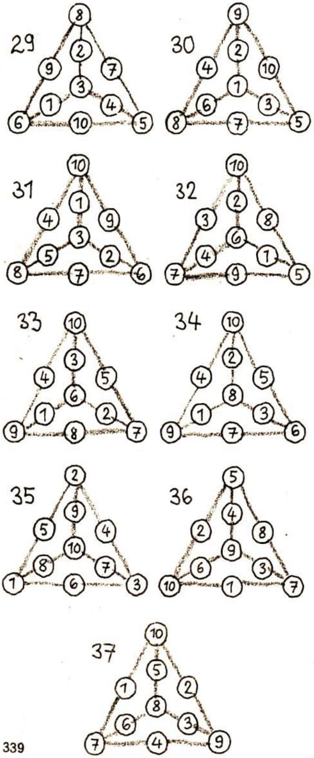
399 ist durch 3, 7 und 19 teilbar, also ist auch die Zahl 40698 durch 3, 7, 19 und daher auch durch 399 teilbar.

282. Es ist bekannt, daß $x^m - 1$ sich durch $x - 1$ teilen läßt (vgl. S. 150). Folglich ist $11^{10} - 1$ durch $11 - 1$ teilbar. Es ergibt sich $11^{10} - 1 = (11 - 1)(11^9 + 11^8 + 11^7 + 11^6 + 11^5 + 11^4 + 11^3 + 11^2 + 11 + 1)$. Der erste Faktor ist 10. Der zweite Faktor läßt sich auch durch 10 teilen, weil er aus 10 Summanden besteht, von denen jeder auf 1 endet (jede beliebige ganzzahlige Potenz von 11 endet auf 1). Wenn aber jeder von zwei Faktoren sich durch 10 teilen läßt, dann läßt sich ihr Produkt durch 100 teilen. Folglich läßt sich auch $11^{10} - 1$ durch 100 teilen.

283. und **284.** entfallen

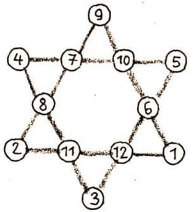
Kreuzsummen und magische Quadrate

285. Je eine der möglichen Lösungen ist in Abb. 339 dargestellt.



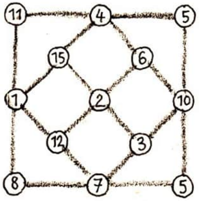
339

286. Eine Lösung wird in Abb. 340 gezeigt.



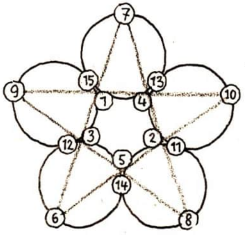
340

287. Eine Lösung wird in Abb. 341 gezeigt.



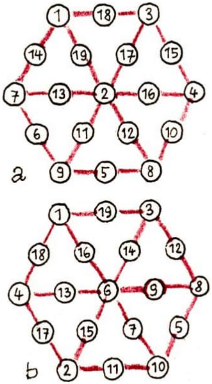
341

288. Eine Lösung wird in Abb. 342 gezeigt.



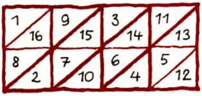
342

289. In Abb. 343 a wird ein Sechseck mit der Summe gleich 22 an jeder Seite und jedem Radius gezeigt, in Abb. 343 b ist die entsprechende Summe gleich 23.



343

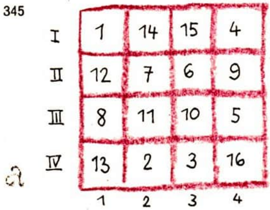
290. Eine Lösung wird in Abb. 344 gezeigt.

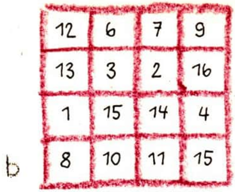


344

291. Wir numerieren die Zeilen und Spalten des gegebenen Quadrats (Abb. 345 a). Unter seinen Zahlen sind, wie wir wissen (vgl. Eigenschaft 6 b), solche, bei denen die

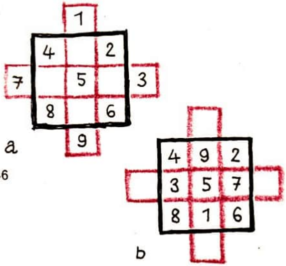
345





Summen der Quadrate und die Summen der Kuben gleich sind. Das sind 12, 14, 3, 5 und 15, 9, 8, 2. Aber im gegebenen Quadrat stehen diese Zahlen nicht in den Diagonalen. Um sie dahin zu bringen, genügen folgende Umstellungen: die Zeile II an die 1. Stelle setzen, die Zeile IV an die 2., die Zeile I an die 3. und die Zeile III an die 4. und dann die Plätze der 2. und 3. Spalte austauschen. Es ist nicht schwer nachzuprüfen, daß das auf diese Weise erhaltene neue Quadrat (Abb. 345 b) alle geforderten Eigenschaften besitzt.

292. 1. Man ergänzt ein Quadrat von 9 Feldern zu einer symmetrischen stufenförmigen Figur (Abb. 346 a) und setzt darin die 9

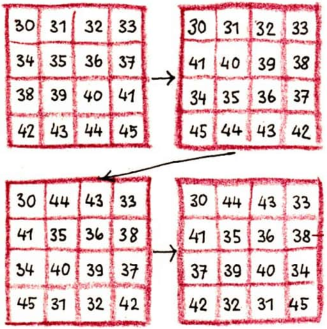


346

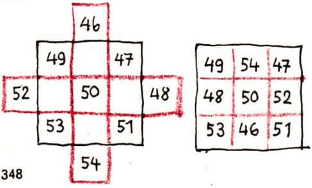
ganzen Zahlen von 1 bis 9 in schrägen Reihen ein. Alle Zahlen, die sich außerhalb des Quadrats befinden, versetzt man in das Quadrat, wobei man sich an die Regel hält, die im Text der Aufgabe dargelegt worden ist (Abb. 346 b). Die Haupteigenschaften des magischen Quadrats sind, wie man sich leicht überzeugen kann, erfüllt. Die Konstante dieses Quadrats ist 15.

2. Die Bildung eines magischen Quadrats 7. Ordnung führt selbständig aus.

293. Das gegebene Quadrat (vgl. Abb. 178 auf S. 163) enthält 4 horizontale und 4 vertikale Reihen zu je 4 weißen Feldern und 3 horizontale und 3 vertikale Reihen zu je 3 weißen Feldern, das heißt, man kann es bilden, indem man abwechselnd die Spalten und Zeilen zweier magischen Quadrate nebeneinandersetzt, und zwar eines Quadrats aus 16 Feldern und eines aus 9 Feldern. In dem Quadrat mit 9 Feldern sind weniger Felder als in dem mit 16, die Konstanten müssen aber nach der Bedingung gleich sein; folglich muß man für das Quadrat zu 9 Feldern die 9 größten der gegebenen Zahlen nehmen. Jedes Quadrat bilden wir nach dem entsprechenden Schema (Abb. 347 und 348). Beide Quadrate haben ein und dieselbe Konstante: 150.

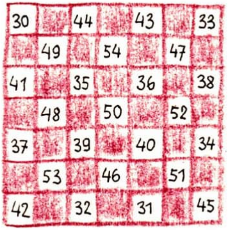


347



348

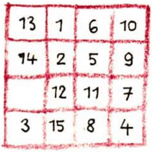
Es bleibt jetzt übrig, sie zu einem Quadrat zu verbinden, indem man die Zeilen und Spalten des zweiten Quadrats zwischen die Zeilen und Spalten des ersten setzt (Abb. 349). Die Zahlen, die in den Diagonalen



349

dieses Quadrats liegen, sind aus den Diagonalen der beiden Quadrate zusammengesetzt; daher sind ihre Summen ein und dieselbe und gleich der geforderten Zahl 300.

294. Wenn ihr die Anordnung der Steine, die in Abb. 180 (S. 164) gegeben ist, als Anfangsstellung nehmt, dann verschiebt sie in folgender Reihenfolge: 12, 8, 4, 3, 2, 6, 10, 9, 13, 15, 14, 12, 8, 4, 7, 10, 9, 14, 12, 8, 4, 7, 10, 9, 6, 2, 3, 10, 9, 6, 5, 1, 2, 3, 6, 5, 3, 2, 1, 13, 14, 3, 2, 1, 13, 14, 3, 12, 15, 3.
Die Zahlen geben an, welcher Stein auf den jeweils freien Platz geschoben werden muß. Das sind genau 50 Züge!
Die neue Anordnung der Steine ist in Abb 350 dargestellt. Es ist nicht schwer nachzu



350

prüfen, daß das erhaltene Quadrat ein magisches mit der Konstanten 30 ist. Beim Verschieben der Steine kann man, versteht sich, auch zu einer anderen Anordnung der Zahlen in Gestalt eines magischen Quadrats gelangen; aber mir ist keine Lösung bekannt, die in weniger als 50 Zügen zu erreichen ist. Wenn ihr das euch bekannte Schema für die Bildung eines magischen Quadrats verwendet, könnt ihr viele magische Quadrate aus den Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 und 15 bilden. Wenn ihr die Aufstellung eines magischen Quadrats mit der Anordnung beginnt, die in Abb. 179 (S. 163) dargestellt ist, so ist es niemals möglich, ein solches magisches Quadrat zu bilden, das man aus der Anfangsstellung erhalten kann, die in Abb. 180 (vgl. S. 164) gegeben ist. Der ganze Unterschied zwischen diesen beiden Stellungen besteht nur darin, daß die natürliche Zahlenfolge der Nummern der Steine durch die beiden letzten Steine gestört ist; es gelingt durch keinerlei Verschiebungen der Steine, eine dieser Stellungen in die andere umzuwandeln. Das ist das Hauptergebnis der Theorie des „Spiels mit 15", das von Mathematikern in der zweiten Hälfte des vergangenen Jahrhunderts (1879) ausgearbeitet worden ist.

Man erreicht aus einer beliebigen ungeordneten Anfangsstellung der 15 Steine in dem Kästchen durch Verschieben entweder die Anordnung von Abb. 179 oder die in Abb. 180 dargestellte. Es ist interessant, daß man im voraus sagen kann, welche von den beiden Stellungen durch Verschieben der Steine erreichbar ist. Dazu braucht man nur eine Probe auszuführen: Man führt die Umordnung der willkürlich im Kästchen untergebrachten Steine in die natürliche Zahlenfolge nicht auf dem Wege des Verschiebens durch, sondern durch Austausch nur der Steine, die in *einer* Zeile oder in *einer* Spalte nebeneinanderliegen, und zählt die Anzahl der erforderlichen Züge zusammen. Wenn die erhaltene Zahl *gerade* ist, dann bedeutet das, daß man die Steine im Kästchen vollständig durch *Verschieben* ordnen *kann*; umgekehrt ist es *nicht möglich*, sie zu ordnen, wenn die erhaltene Zahl *ungerade* ist.

Die Probe ist leicht ausführbar. Beim Austausch der Plätze kann das „leere" Feld im Kästchen zum Nebeneinanderlegen der Steine benutzt werden. Wenn man einen Stein, der neben dem „freien" Feld liegt, auf dieses verschiebt, wird bei der Zählung der Züge dieser nicht mitgerechnet. Wir nehmen zum Beispiel die Anordnung der Steine in der Form des magischen Quadrats, das in Abb. 350 dargestellt ist, als Ausgangsstellung. Wir untersuchen, ob man die Anordnung in natürlicher Zahlenfolge durch Verschieben erreichen kann.

Wir führen den „Austausch" aus und zählen die Anzahl der Züge. Beginnen wir mit dem Stein Nr. 1. Um ihn auf den ersten Platz zu bringen, muß man ihn mit dem Stein Nr. 13 austauschen. Dann muß der Stein Nr. 13 den Platz mit dem Stein Nr. 2 tauschen (zweiter Austausch). Um den Stein Nr. 3 auf „seinen" Platz zu bringen, müssen wir ihn nacheinander mit den Steinen 15, 8, 11, 5 und 6 tauschen oder, was wir auch tun, ihn auf den „freien" Platz rücken und mit den Steinen 14, 13, 5 und 6 tauschen (vier Austausche). Der Stein Nr. 4 kommt auf „seinen" Platz nach Austausch mit den Steinen 7, 9 und 10 (drei Austausche). Es sind bisher $1 + 1 + 4 + 3 = 9$ Austausche ausgeführt; vier Steine nehmen „ihren" Platz ein (Abb. 351).

1	2	3	4
13	5	6	10
14	12	11	9
	15	8	7

351

Die Zahl aller Züge ist ungerade. Folglich ist es nicht möglich, die Steine, wie sie in dem magischen Quadrat (Abb. 350) angeordnet sind, mit Hilfe von Verschiebungen zu ordnen.

Es ist folglich auch die Lösung der umgekehrten Aufgabe nicht möglich: die in natürlicher Zahlenfolge angeordneten Steine (in Abb. 179; vgl. S. 163) so zu verschieben, daß das magische Quadrat von Abb. 350 entsteht.

Wie man dennoch ein magisches Quadrat

aus der Stellung, die in Abb. 179 dargestellt ist, bilden kann, überlegt selbst!

295. 1. Die gesuchte Anordnung der Zahlen ist in Abb. 352 dargestellt. Es ist nicht schwer, sich davon zu überzeugen, daß alle geforderten Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind.

1	7	2	8
4	6	3	5
7	1	8	2
6	4	5	3

352

2. Wir bilden das magische Quadrat nach dem Schema, das im Text der Aufgabe 292 angeführt ist. Es wird viele der im Text der Aufgabe genannten zusätzlichen Eigenschaften besitzen, aber nicht alle. Wenn man jetzt die zweite Zeile mit der ersten und dann die zweite Spalte mit der ersten vertauscht, dann wird das erhaltene magische Quadrat alle geforderten zusätzlichen Eigenschaften besitzen. So sind zum Beispiel die Summen der Quadrate der Zahlen in den Zeilen I und III dieses Quadrats gleich, und die Summen der Quadrate in den Spalten II und IV sind auch gleich.
Das magische Quadrat in Abb. 182 (vgl. S. 164) heißt deshalb „Verwandlungsquadrat", weil es ein magisches mit derselben Konstanten bleibt, wenn man paarweise die Zeilen miteinander und die Spalten miteinander vertauscht.

296. Wir haben
$a_1 + a_4 + a_7 = S$, $\quad a_3 + a_6 + a_9 = S$,
$a_1 + a_5 + a_9 = S$, $\quad a_3 + a_5 + a_7 = S$.
Hieraus folgt
$a_4 + a_7 = S - a_1$, $\quad a_6 + a_9 = S - a_3$,
$a_5 + a_9 = S - a_1$, $\quad a_5 + a_7 = S - a_3$
und folglich $a_4 + a_7 = a_5 + a_9$, $a_6 + a_9 = a_5 + a_7$. Wenn wir die beiden letzten Gleichungen gliedweise addieren, erhalten wir: $a_4 + a_7 + a_6 + a_9 = 2a_5 + a_9 + a_7$ oder $a_4 + a_6 = 2\,a_5$. Wir fügen zu beiden Seiten dieser Gleichung a_5 hinzu: dann ist $a_4 + a_5 + a_6 = 3\,a_5$, aber $a_4 + a_5 + a_6 = S$, folglich $3\,a_5 = S$ und $a_5 = \frac{S}{3}$; bei $S = 15$ ist also $a_5 = 5$.

297., **298.**, **299.**, **300.** entfallen

Kurioses und Ernsthaftes von Zahlen

301. 1. Nach der Bedingung soll sich die eine Zahl von der anderen nur durch die Anordnung der Ziffern unterscheiden.
Nehmen wir eine Ziffer, sagen wir 1. Sie kann eine beliebige der zehn Stellen einer zehnstelligen Zahl einnehmen. Das sind schon 10 mögliche zehnstellige Zahlen. Bei jeder dieser Zahlen bleiben noch 9 Stellen frei, und auf jede kann man die zweite Ziffer, sagen wir 2, setzen. So werden schon $10 \cdot 9 = 90$ Zahlen gebildet, bei deren jeder noch 8 Stellen für die dritte Ziffer frei sind. Wenn wir die freien Stellen je einmal mit der Ziffer 3 ausfüllen, bilden wir $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ Zahlen, bei deren jeder je 7 freie Stellen für die vierte Ziffer bleiben. Alle möglichen Varianten für die Einordnung der vierten Ziffer (4) ergeben $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ Zahlen mit je sechs freien Stellen.
So finden wir, wenn wir alle Möglichkeiten für die Anordnung der Ziffern berechnen, daß man die 10 Ziffern auf
$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$
verschiedene Arten anordnen kann. Da aber unter den Ziffern die Null ist, ist nicht in allen dieser 3628800 Fälle die gebildete Zahl zehnstellig. Wenn die Null links an erster Stelle steht, wie zum Beispiel in der Zahl 0123456789, hat sie keinen Stellenwert; die Zahl ist nicht zehn-, sondern neunstellig und erfüllt die Bedingung nicht. Jede Ziffer muß die gleiche Anzahl von Malen an der ersten Stelle stehen. Insgesamt sind es 10 Ziffern. Folglich ist in $\frac{1}{10}$ Teil der 3628800 möglichen Fälle die erste Ziffer eine Null; diese Zahlen sind neunstellig. Jedoch in den übrigen Fällen (deren Anzahl man sofort erhalten kann, wenn man von der Zahl 3628800 deren zehnten Teil abzieht) ergeben sich die geforderten zehnstelligen Zahlen. Folglich kann man, wenn man jede der 10 Ziffern nur einmal verwendet, $3628800 - 362880 = 3265920$ zehnstellige Zahlen bilden.

3. Jedes Produkt aus der Zahl a und einer Zahl der ersten Gruppe besteht aus neun verschiedenen Ziffern; jedes Produkt aus der Zahl b und einer Zahl der ersten Gruppe besteht aus zehn verschiedenen Ziffern. Die Produkte aus den Zahlen a bzw. b und den Zahlen der zweiten Gruppe enthalten auch wiederkehrende Ziffern. Die Zahlen der ersten Gruppe haben keine von 1 verschiedenen Teiler mit den Zahlen a und b gemeinsam. Die Zahlen der zweiten Gruppen haben sie. Wenn man a mit 8 multipliziert und 9 hinzufügt, erhält man b: $123456789 \cdot 8 + 9 = 987654321$.
4. Der Grund der Erscheinung liegt darin, daß das Produkt aus der Zahl und der Neun ausschließlich aus Einsen besteht:
$12\,345\,679 \cdot 9 = 111\,111\,111$.

302. 1. Ich habe einfach die Tabelle der Quadratzahlen von 32 bis 99 durchgesehen und die entsprechenden Berechnungen durchgeführt. Man soll auch solche Lösungsverfahren nicht gering achten.

303. 1. Zuerst stellen wir fest, daß bei der Bildung der Differenzen aus den gegebenen Zahlen diejenigen Zahlengruppen nicht als verschiedene zu gelten brauchen, die sich aus einer Gruppe (a, b, c, d) durch zyklische Vertauschung der Zahlen ergeben: (d, a, b, c), (c, d, a, b), (b, c, d, a) oder (c, b, a, d), (b, a, c, d) usw. Es ist für das Endresultat unwesentlich, welchen Platz eine Zahl in ihrer Gruppe einnimmt, wenn sie nur dieselben Nachbarn hat. (Als Nachbar der vierten Zahl betrachten wir die erste.)
Wir sehen uns jetzt an, wieviel voneinander verschiedene Anfangsgruppen man aus vier Zahlen bilden kann, wenn man gerade und ungerade Zahlen ohne Rücksicht auf ihre Größen kombiniert.
Die erste Kombination: vier gerade Zahlen (g, g, g, g); die zweite Kombination: drei gerade und eine ungerade Zahl (g, g, g, u).

Weiter: (g, g, u, u), (g, u, u, u), (g, u, g, u), (u, u, u, u). Insgesamt sind es sechs Kombinationen. Jede andere Kombination ist eine zyklische Vertauschung einer dieser sechs.

Bei jeder dieser sechs Gruppen bestehen die vierten Differenzen ausschließlich aus geraden Zahlen. Für die erste Zahlenkombination (g, g, g, g) ist dies offensichtlich. Wir überzeugen uns von der Richtigkeit für die zweite Kombination: $A_0 = (g, g, g, u)$. Da die Differenz zweier geraden Zahlen oder zweier ungeraden Zahlen eine gerade Zahl ist und die Differenz einer geraden und einer ungeraden eine ungerade, ist $A_1 = (g, g, u, u)$, $A_2 = (g, u, g, u)$, $A_3 = (u, u, u, u)$, $A_4 = (g, g, g, g)$.

Untersucht selbst die übrigen vier möglichen Kombinationen. In allen Fällen bestehen die vierten Differenzen (A_4) nur aus geraden Zahlen (das heißt, alle Zahlen der Gruppe A_4 sind durch 2 teilbar).

Wir beweisen jetzt, daß alle Zahlen der achten Differenzengruppe (A_8) ein Vielfaches von 4 sind. Für den Beweis ersetzen wir vorübergehend die Zahlen der vierten Differenzengruppe durch ihre Hälfte und bilden die erste Differenzengruppe aus diesen Hälften. Wodurch wird sich diese Gruppe von der fünften Gruppe der ursprünglichen Differenzen unterscheiden?

Antwort. Ihre Zahlen werden auch die Hälften der Zahlen der Gruppe A_5 sein.

Wenn zum Beispiel $A_4 = (4, 6, 12, 22)$ ist, dann ist $A_5 = (2, 6, 10, 18)$. Wenn wir jedoch die Gruppe aus den Hälften bilden (2, 3, 6, 11), dann besteht die Differenzengruppe auch aus den Hälften der Zahlen der Gruppe A_5 (1, 3, 5, 9).

Dieses Verhältnis zwischen den Zahlen bleibt auch in den folgenden Differenzengruppen erhalten, das heißt, die zweite Differenzengruppe der Hälften bildet die Hälfte der Gruppe A_6, die dritte die Hälfte der Gruppe A_7, die vierte die Hälfte der Gruppe A_8. Wenn wir alle Zahlen der vierten Gruppe der Hälften verdoppeln, erhalten wir die Zahlen der Gruppe A_8. Aber die vierte Differenzengruppe der Hälften, wie jede vierte Differenzengruppe, besteht nur aus geraden Zahlen, und die Zahlen der Gruppe A_8 sind doppelt so groß. Folglich sind die Zahlen der Gruppe A_8 nicht nur durch 2, sondern auch durch 4 teilbar, was zu beweisen war. Wenn zum Beispiel $A_4 = (4, 6, 12, 22)$ durch 2 teilbare Zahlen sind, dann sind $A_5 = (2, 6, 10, 18)$, $A_6 = (4, 4, 8, 16)$, $A_7 = (0, 4, 8, 12)$ und $A_8 = (4, 4, 4, 12)$ Zahlen, die durch 4 teilbar sind.

Wenn wir den Gedankengang fortsetzen, stellen wir fest, daß wir nach weiteren vier Differenzengruppen in der zwölften Differenzengruppe A_{12} Zahlen erhalten, die durch 8 teilbar sind, das heißt durch 2^3. Die Zahlen der Gruppe a_{16} sind durch 2^4 teilbar usw. So müssen zum Beispiel die Zahlen der Differenzengruppe A_{40} durch $2^{10} = 1024$ teilbar sein. Nehmen wir an, daß alle Zahlen der Ausgangsgruppe kleiner als 1000 sind, dann sind alle Zahlen aller Differenzengruppen kleiner als 1000.

Nehmen wir an, daß aus vier Zahlen 39 Differenzen gebildet worden sind und keine von ihnen nur aus Nullen besteht, dann besteht A_{40} unbedingt nur aus Nullen, da keine Zahl dieser Differenz größer als 1000 ist und alle Zahlen A_{40} sich durch $2^{10} = 1024$ teilen lassen. Es gibt aber nur eine ganze Zahl, die kleiner als 1000 ist und sich durch 1024 teilen läßt, das ist die Null. Folglich sind alle Zahlen A_{40} Nullen. Wenn die Ausgangszahlen größer als 1000 sind, aber kleiner als 1000000, dann müssen spätestens in der 80. Differenz nur Nullen stehen, da die Zahlen der Differenz A_{80} durch $2^{20} = 1048576$ teilbar sein müssen, und die einzige ganze Zahl, die kleiner als 1000000 und durch 1048576 teilbar ist, ist die Null. So kann man die Beweisführung auf jede beliebige Vierergruppe von Zahlen ausdehnen.

Es gibt also keine Vierergruppe von Zahlen, deren Differenzengruppen nicht früher oder später nur aus Nullen bestehen.

2. Beweisen kann man diese Eigenschaft der Zahlen so:

a) Es ist nicht schwer zu beweisen, daß die Quersumme 2. Ordnung einer dreistelligen Zahl kleiner als die Zahl selbst ist.

Hieraus folgt, daß wir, mit welcher Zahl wir

auch den Versuch beginnen, nach einigen Schritten eine zweistellige Zahl erhalten.
b) Bei zweistelligen Zahlen läßt sich die beobachtete Eigenschaft einfach durchprüfen.

304. und **305.** entfallen

306. 5. Wir vermindern die nachzuprüfende Zahl N um 1 und fügen diese 1 als einzelnen Summanden hinzu. Dann nimmt die Zahl folgende Form an: $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{-mal}}\underbrace{55\ldots5}_{n\text{-mal}}+1$. Bei $n=1$ ist das $15+1=16$; bei $n=2$ ist das $1155+1=1156$ usw. Wir stellen ferner fest, daß man die Zahl $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{-mal}}$ als Summe der Potenzen der Zahl 10 plus 1 ausdrücken kann: $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{-mal}}=10^{n-1}+10^{n-2}\ldots+10+1$.
Wenn das klar ist, wenden wir uns wiederum der nachzuprüfenden Zahl N zu und gestalten sie folgendermaßen um:

$$\underbrace{11\ldots1}_{n\text{-mal}}\underbrace{55\ldots5}_{n\text{-mal}}+1=\underbrace{11\ldots1}_{n\text{-mal}}\underbrace{00\ldots0}_{n\text{-mal}}+\underbrace{55\ldots5}_{n\text{-mal}}+1=\underbrace{11\ldots1}_{n\text{-mal}}\cdot 10^n+5\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n\text{-mal}}+1=\underbrace{11\ldots1}_{n\text{-mal}}\cdot(10^n+5)+1$$

$$=(10^{n-1}+10^{n-2}\ldots+10+1)(10^n+5)+1.$$

Der Ausdruck in der ersten Klammer läßt sich auf die Form bringen: $10^{n-1}+10^{n-2}\ldots+10+1=\frac{10^n-1}{10-1}$ (wegen einiger Erklärungen zu dieser Form vgl. im Kapitel „Die Teilbarkeit der Zahlen" S. 141). Dann ist $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{-mal}}\underbrace{55\ldots5}_{n\text{-mal}}+1$

$$=\frac{(10^n-1)(10^n+5)}{10-1}+1=\frac{10^{2n}+4\cdot10^n+4}{9}=\left(\frac{10^n+2}{3}\right)^2,$$

was zu beweisen war. Wie auch das kleine „Zahlenkriställchen" (16) durch wiederholte Einschaltungen der Zahl 15 in seiner Mitte gewachsen sein mag, die Zahl $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{-mal}}\underbrace{55\ldots56}_{(n-1)\text{-mal}}$ ist immer ein Quadrat der Zahl $\frac{10^n+2}{3}$.

307.

1.

$11=22:2+2-2,$ $\quad 20=22+2-2-2,$

$12=2\cdot2\cdot2+2+2,$ $\quad 21=22-2+\frac{2}{2},$

$13=(22+2+2):2,$ $\quad 22=22\cdot2-22,$

$14=2\cdot2\cdot2\cdot2-2,$ $\quad 23=22+2-\frac{2}{2},$

$15=22:2+2+2,$ $\quad 24=22-2+2+2,$

$16=(2\cdot2+2+2)\cdot2,$ $\quad 25=22+2+\frac{2}{2},$

$17=(2\cdot2)^2+\frac{2}{2},$ $\quad 26=2\cdot\left(\frac{22}{2}+2\right).$

$18=2\cdot2\cdot2\cdot2+2,$

$19=22-2-\frac{2}{2},$

2.

$1=(4:4)\cdot(4:4),$ $\quad 6=4+(4+4):4,$

$2=(4:4)+(4:4),$ $\quad 7=4+4-4:4,$

$3=(4+4+4):4,$ $\quad 8=4+4+4-4,$

$4=4+(4-4)\cdot4;$ $\quad 9=4+4+4:4,$

$5=(4\cdot4+4):4,$ $\quad 10=(44-4):4.$

3.

$2=(n:n)+(n:n),$ $\quad 13=\frac{n}{.n}+\sqrt{\frac{n}{.\dot{n}}},$

$4=\frac{n-.\dot{n}}{.\dot{n}+.\dot{n}},$ $\quad 15=\frac{n}{.\dot{n}}+\left(\sqrt{\frac{n}{.\dot{n}}}\right)!$

$7=\frac{n-.\dot{n}-.\dot{n}}{.\dot{n}},$ $\quad 17=\frac{n+n-.\dot{n}}{.\dot{n}},$

$12=\frac{n+.n+.n}{.n},$ $\quad 21=\frac{n+n+.n}{.n}.$

Wie man die übrigen Zahlen darstellen kann, überlegt selbst.

4.

$3=\frac{17469}{5823},$ $\quad 5=\frac{13485}{2697},$ $\quad 6=\frac{17658}{2943},$

$7=\frac{16758}{2394},$ $\quad 8=\frac{25496}{3187},$ $\quad 9=\frac{57429}{6381}.$

Die 1 kann man mit neun Ziffern folgendermaßen darstellen: $1^{23456789}$. (Der Exponent der Potenz kann willkürlich aus den Ziffern 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 gebildet werden.)

5. $9=\frac{95742}{10638}=\frac{75249}{08361}=\frac{58239}{06471}.$

308. 10. Es sei n eine der gesuchten dreistelligen Zahlen. Nach der Bedingung stimmen die letzten drei Ziffern von n^2 mit den Ziffern von n überein. Folglich sind die letzten drei Ziffern der Differenz $n^2 - n$ Nullen.

Betrachten wir den Ausdruck $n^k - n$, wobei k eine beliebige positive ganze Zahl ist. Wir klammern n aus: $n^k - n = n(n^{k-1} - 1)$. Sofort ist klar, daß dieser Ausdruck durch n teilbar ist; er ist aber auch durch $n - 1$ teilbar, da $n^{k-1} - 1$ sich durch $n - 1$ teilen läßt (vgl. S. 150). Folglich ist der Ausdruck $n^k - n$ durch das Produkt aus den Zahlen n und $n - 1$, das heißt durch $n^2 - n$ teilbar. Da aber $n^2 - n$ als letzte drei Ziffern Nullen hat, müssen auch bei $n^k - n$ wenigstens die letzten drei Ziffern Nullen sein, das heißt, n^k muß bei beliebigen positiven ganzen k die gleichen drei Endziffern haben wie auch n. Zur Lösung der Aufgabe genügt es folglich, wenn man sich lediglich auf diejenigen Zahlen beschränkt, deren Quadrat die gleichen drei Endziffern hat wie die Zahl selbst.

Die Zahlen n und $n - 1$ sind zwei benachbarte natürliche Zahlen, und ihr Produkt muß, wie festgestellt, durch 1000 teilbar sein. Folglich muß eine von ihnen gerade und durch 8 teilbar und die andere ungerade und durch 125 teilbar sein. Dreistellige Zahlen, die der letzten Bedingung entsprechen, auszusuchen ist nicht schwer. Es gibt deren nur vier: 125, 375, 625 und 875. Die ihnen benachbarten Zahlen sind folgende: 124 und 126, 374 und 376, 624 und 626, 874 und 876. Aber durch 8 sind nur zwei davon teilbar: 376 und 624. Folglich sind sie die gesuchten.

309. 4. Es sei x die kleinste der gesuchten Zahlen; wir nennen sie die erste Zahl; dann ist die zweite Zahl der ersten Gruppe der Summanden $x + 1$, die dritte $x + 2$, ... die $(n + 1)$-te Zahl ist $x + n$. Die erste Zahl der zweiten Gruppe ist $x + n + 1$, die zweite $x + n + 2$, die dritte $x + n + 3$, ... die n-te Zahl $x + n + n = x + 2n$. Von der Bedingung ausgehend, bilden wir die Gleichung

$$\underbrace{x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 \ldots + (x+n)^2}_{n+1 \text{ Summanden}} = \underbrace{(x+n+1)^2 + (x+n+2)^2 \ldots + (x+2n)^2}_{n \text{ Summanden}}. \quad (*)$$

Zur Erleichterung der weiteren Umwandlungen dieser Gleichung lassen wir x^2 auf der linken Seite der Gleichung, und alle übrigen n Summanden bringen wir auf die rechte Seite und gruppieren sie in n Differenzen der Quadrate:

$$x^2 = [(x + n + 1)^2 - (x + 1)^2] + [(x + n + 2)^2 - (x + 2)^2] \ldots + [(x + 2n)^2 - (x + n)^2].$$

Jede eckige Klammer gestalten wir nach der Formel $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ um:

$$x^2 = \underbrace{n(2x + n + 2) + n(2x + n + 4) \ldots + n(2x + n + 2n)}_{n \text{ Summanden}}$$

oder

$$x^2 = n[\underbrace{(2x + 2x \ldots + 2x)}_{n \text{ Summanden}} + \underbrace{(n + n \ldots + n)}_{n \text{ Summanden}} + \underbrace{(2 + 4 \ldots + 2n)}_{n \text{ Summanden}}].$$

In der letzten runden Klammer steht die Summe von n Gliedern der arithmetischen Reihe $2 + 4 \ldots + 2n = \frac{(2 + 2n)\,n}{2} = (n + 1)\,n$. Dann ist $x^2 = n[2xn + n^2 + n(n + 1)]$ oder $x^2 - 2n^2x - n^3 - n^3 - n^2 = 0$. Wenn wir die quadratische Gleichung $x^2 - 2n^2x - n^2(2n + 1) = 0$ auflösen, erhalten wir: $x_1 = n(2n + 1)$ und $x_2 = -n$, wobei $n = 1, 2, 3 \ldots$ ist. Wir nehmen vorläufig nur $x_1 = n(2n + 1)$. Angenommen, es ist $n = 1$. Das bedeutet, daß wir uns auf der rechten Seite der Gleichung (*) auf einen und auf der linken auf zwei Summanden beschränken. Bei $n = 1$ ist $x_1 = 3$, und wir haben $3^2 + 4^2 = 5^2$. Bei $n = 2$ sind auf der rechten Seite der Gleichung (*) zwei Summanden, auf der linken drei. Dann ist $x_1 = 10$, und wir haben $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. Bei $n = 3$ sind auf der rechten Seite der Gleichung (*) drei Summanden und auf der linken vier. Dann ist $x_1 = 21$, und wir haben $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$.

Diesen Prozeß könnt ihr jetzt beliebig weit fortsetzen. Wenn man den zweiten Wert der Wurzel $x_2 = -n$ in die Gleichung (*) einsetzt, führt er zu der identischen Gleichung: $(-n)^2 + (-n + 1)^2 \ldots + (-1)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + n^2$.

8. Es ist bekannt, daß $1^3 + 2^3 + 3^3 \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 \ldots + n)^2$ ist (vgl. S. 193).

Wenn n gerade ist, also $n = 2k$, dann nimmt die linke Seite der Formel folgendes Aussehen an:

$1^3 + 2^3 + 3^3 \dots + (2k-1)^3 + (2k)^3$.

Wir gruppieren um:

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 \dots + (2k-1)^3 + (2k)^3 = [1^3 + 3^3 \dots + (2k-1)^3] + [2^3 + 4^3 \dots + (2k)^3] = [1^3 + 3^3 \dots + (2k-1)^3] + 2^3 [1^3 + 2^3 \dots + k^3]$; hieraus folgt: $1^3 + 3^3 + 5^3 \dots + (2k-1)^3 = [1^3 + 2^3 \dots + (2k)^3] - 8 [1^3 + 2^3 \dots + k^3] = (1 + 2 + 3 \dots + 2k)^2 - 8 (1 + 2 + 3 \dots + k)^2$. So hat sich eine Formel für die Summe der Kuben der ungeraden Zahlen ergeben. Sie wird gebraucht für die weitere Umwandlung des Ausdrucks

$$\frac{[1^3 + 3^3 + 5^3 \dots + (2k-1)^3] + [1 + 3 + 5 \dots + (2k-1)]}{2}.$$

Wir erhalten:

$$\frac{[1^3 + 3^3 + 5^3 \dots + (2k-1)^3] + [1 + 3 + 5 \dots + (2k-1)]}{2}$$
$$= \frac{(1+2\dots+2k)^2 - 8(1+2\dots+k)^2 + 1 + 3 \dots + (2k-1)}{2}.$$

Da in jeder Klammer die Summe der Glieder einer arithmetischen Reihe 1. Ordnung steht, schreiben wir die Summenformel

$$S_1 + S_3 \dots + S_{2k-1}$$
$$= \frac{\left[\frac{(1+2k)\,2k}{2}\right]^2 - 8\left[\frac{(1+k)\,k}{2}\right]^2 + \frac{[1+(2k-1)]\,k}{2}}{2}$$
$$= \frac{(1+2k)^2 k^2 - 2(1+k)^2 k^2 + k^2}{2}$$
$$= \frac{k^2 (1 + 4k + 4k^2 - 2 - 4k - 2k^2 + 1)}{2}$$
$$= \frac{k^2\, 2k^2}{2} = k^4.$$

10. Zuerst stellen wir, beginnend mit der zweiten Zeile, die Abhängigkeit des ersten Gliedes jeder Zeile von der Nummer der Zeile, in der es sich befindet, und vom ersten Glied der vorhergehenden Zeile fest. Es ergibt sich: $3 = 1 + 2 \cdot 1$; $7 = 3 + 2 \cdot 2$; $13 = 7 + 2 \cdot 3$; $21 = 13 + 2 \cdot 4$ usw. Entsprechend haben wir für das erste Glied der n-ten Zeile: $a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$. Für das erste Glied der $(n-1)$-ten Zeile ist $a_{n-1} = a_{n-2} + 2(n-2)$ und weiter $a_{n-2} = a_{n-3} + 2(n-3)$, ... $a_2 = a_1 + 2 \cdot 1$. So kann man die Beziehung zwischen a_n und a_1 erhalten. Dazu ersetzen wir in der ersten Gleichung a_{n-1} durch den entsprechenden Ausdruck in der zweiten Gleichung. Wir erhalten: $a_n = a_{n-2} + 2(n-1) + 2(n-2)$. Hierin ersetzen wir in derselben Weise a_{n-2}, dann in dem erhaltenen Ausdruck a_{n-3} usw. Als Ergebnis erhalten wir:

$$a_n = a_1 + 2[(n-1) + (n-2) \dots + 2 + 1]$$
$$= a_1 + 2\frac{(n-1)+1}{2}(n-1) = a_1 + n(n-1)$$

oder $a_n = 1 + n(n-1) = n^2 - n + 1$. Das ist die Abhängigkeit des ersten Gliedes jeder beliebigen Zeile im Zahlendreieck des Nikomachos von der Nummer dieser Zeile. Da ihr wißt, daß in jeder Zeile n Summanden sind und die Differenz zwischen ihnen $d = 2$

ist, könnt ihr jetzt selbst die Summe der Zahlen in der Zeile berechnen und bestätigen, daß sie tatsächlich gleich n^3 ist.

310. Es sollen a, b, c und d die Ziffern sein; dabei sei $a \geqq b \geqq c \geqq d$, aber $a > d$. Dann ist $M = [a][b][c][d]$, $m = [d][c][b][a]$. Wir suchen die Ziffern der Differenz $d = M - m$. Es sind zwei Fälle möglich:

1. wenn $b > c$:

$$\begin{array}{rccc} [a] & [b] & [c] & [d] \\ -\ [d] & [c] & [b] & [a] \\ \hline [a-d] & [b-1-c] & [10+c-1-b] & [10+d-a] \end{array}$$

2. wenn $b = c$:

$$\begin{array}{rccc} [a] & [b] & [c] & [d] \\ -\ [d] & [c] & [b] & [a] \\ \hline [a-1-d] & [10+b-1-c] & [10+c-1-b] & [10+d-a] \end{array}$$

Im ersten Falle ist die Summe der äußeren Ziffern der Differenz gleich 10 und die Summe der mittleren Ziffern gleich 8. Im zweiten Falle ist die Summe der äußeren Ziffern gleich 9 und die Summe der mittleren Ziffern gleich 18; folglich sind diese beiden mittleren Ziffern Neunen. Diese Struktur muß nicht nur die erste Differenz haben, sondern auch alle folgenden. Daher genügt es, wenn man nur solche vierstellige Zahlen überprüft, deren Ziffern die ermittelten Bedingungen erfüllen. Da es auf die Zifferngruppe ankommt und nicht auf die Stellung der Ziffern in der Zahl, werden die geforderten Bedingungen die Zahlen mit folgenden Ziffergruppen erfüllen:

9801	8802	7803	6804	5805	
9711	8712	7713	6714	5715	
9621	8622	7623	6624	5625	1. Fall;
9531	8532	7533	6534	5535	
9441	8442	7443	6444	5445	
9990	8991	7992	6993	5994.	2. Fall

Insgesamt haben sich 30 mögliche Differenzen (im Sinne der Zifferngruppen) ergeben, mit welcher vierstelligen Zahl M wir auch begonnen hätten.
Bei jeder beliebigen vierstelligen Anfangszahl M sind nicht mehr als sieben Operationen erforderlich, um zu der Differenz 6174 zu kommen. Überzeugt euch selbst davon!

311. entfällt

Alte und doch ewig junge Zahlen

312. und **313.** entfallen

314. Für den Beweis suchen wir zuerst das allgemeine Glied (a_n) einer arithmetischen Folge mit dem Anfangsglied (a_1) und der Differenz d:

$$a_n = a_1 + d\,(n - 1).$$

Wir werden mit a_{nk} das n-te Glied der k-ten Folge und mit d_k die Differenz der k-ten Folge bezeichnen.

Für die erste Folge der Tabelle ist $a_{11} = 4$, $d_1 = 3$, folglich:

$$a_{n1} = 4 + 3\,(n - 1) = 1 + 3\,n.$$

Für die zweite Folge ist $a_{12} = 7$, $d_2 = 5$, folglich

$$a_{n2} = 7 + 5\,(n - 1) = 2 + 5\,n.$$

Für die dritte Folge ist $a_{13} = 10$, $d_3 = 7$, folglich

$$a_{n3} = 10 + 7\,(n - 1) = 3 + 7\,n.$$

Für die k-te Folge ist $a_{1k} = 1 + 3\,k$, $d_k = 1 + 2\,k$, folglich

$$a_{nk} = 1 + 3\,k\,(1 + 2\,k)\,(n - 1) = k + (2\,k + 1)\,n.$$

Die Formel $a_{nk} = k + (2\,k + 1)\,n$, in der $k = 1, 2, 3, 4 \ldots$ und unabhängig davon $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$ sein kann, drückt ein beliebiges Glied der Tabelle aus.

Wenn irgendeine beliebige Zahl N in der Tabelle enthalten ist, dann ist sie gleich einer von den Zahlen a_{nk}, das heißt $N = k + (2\,k + 1)\,n$. Dann ist $2\,N + 1$ $= 2\,[k + (2\,k + 1)\,n] + 1 = 2\,k + 1 + 4\,k\,n + 2\,n$ $= 2\,k + 1 + 2\,n\,(2\,k + 1) = (2\,k + 1)\,(2\,n + 1)$, das heißt, die Zahl $2\,N + 1$ besteht aus dem Produkt von wenigstens zwei Faktoren, von denen keiner gleich 1 ist; folglich ist notwendigerweise $2\,N + 1$ eine zusammengesetzte Zahl, was zu beweisen war.

Umgekehrt sei $2\,N + 1$ eine beliebige zusammengesetzte ungerade Zahl; folglich kann sie in zwei ungerade Faktoren zerlegt werden, von denen keiner gleich 1 ist: $2\,N + 1 = (2\,k + 1)\,(2\,n + 1)$, wobei k und n irgendwelche natürliche Zahlen sind. Wenn wir die Gleichung nach N auflösen, erhalten wir:

$$N = \frac{(2\,k + 1)\,(2\,n + 1) - 1}{2} = k + (2\,k + 1)\,n$$

$= a_{nk}$, das heißt, N muß in diesem Falle eine von den Zahlen der Tabelle sein.

Wir haben auf diese Weise bewiesen, daß die Zahl $2\,N + 1$ eine zusammengesetzte Zahl ist, wenn N in der Tabelle vorkommt, und daß es für jede gegebene zusammengesetzte ungerade Zahl von der Form $2\,N + 1$ in der Tabelle eine auf sie hinführende Zahl N gibt.

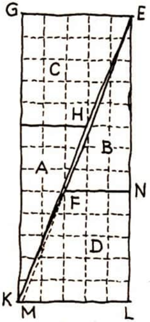
Aber alle Primzahlen (außer 2) sind ungerade, und jede ungerade Zahl (außer 1) ist entweder eine zusammengesetzte oder eine Primzahl. Hieraus folgern wir, daß eine ungerade Primzahl von der Form $2\,N + 1$ keine entsprechende auf sie hinführende Zahl N im Bereich der Tabelle hat.

315.—319. entfallen

320. Mein junger Freund verließ sich zu sehr auf seine Augen und erhärtete seine Ergebnisse nicht mit Beweisen. Das führte zu scheinbaren Widersprüchen.

Entgegen seinen Behauptungen erhielt er nicht ein einziges Mal aus den Teilen des Quadrats ein vollkommenes Rechteck; unbedingt mußten sich für das Auge vielleicht nicht erkennbare Lücken oder Überschneidungen ergeben.

Analysieren wir irgendeinen seiner „günstigen" Fälle, zum Beispiel den, als er eine Seite des Quadrats von 64 Feldern in Abschnitte von der Länge 5 und 3 teilte (Abb. 207 auf S. 206). Wenn wir das Dreieck A mit dem Trapez C und das Dreieck B mit dem Trapez D zusammenlegen, wie in Abb. 353 gezeigt wird, können wir nicht erreichen, daß die Linien EFK und EHK zu



353

der einen Diagonalen EK des Rechtecks verschmelzen, weil die Linien EFK und EHK keine Geraden, sondern mit einem sehr geringen Knick in den Punkten F und H gebrochene Linien sind. Das ist leicht zu beweisen. Es soll M der Punkt sein, in dem die Verlängerung der Seite EF des Dreiecks EFN die Seite KL des Rechtecks schneidet.

Wenn EFK eine Gerade und keine gebrochene Linie ist, dann fällt der Punkt M mit dem Punkt K zusammen. Wir prüfen durch eine Berechnung nach, ob diese Punkte zusammenfallen.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke EFN und EML erhalten wir:

$$ML : FN = EL : EN \quad \text{oder} \quad ML : 3 = 13 : 8.$$

Hiernach ist $ML = \frac{13 \cdot 3}{8} = 4{,}875$, während $KL = 5$ ist.

Der Punkt M fällt, wie ihr seht, nicht mit der Ecke K zusammen. Folglich sind EFK und EHK gebrochene Linien.

Die Fläche der rechteckigen Figur KLEG enthält tatsächlich 65 Felder, aber in ihr liegt die rhombenförmige Lücke EFKH, deren Fläche gerade ein Feld ausmacht.

Es sind noch zwei Fragen zu untersuchen:

1. Warum bildete sich bei unserem „Experimentator" in allen Fällen, die gelungen erschienen, eine Abweichung der Fläche des Quadrats von der des „Rechtecks" um genau ein Feld, und

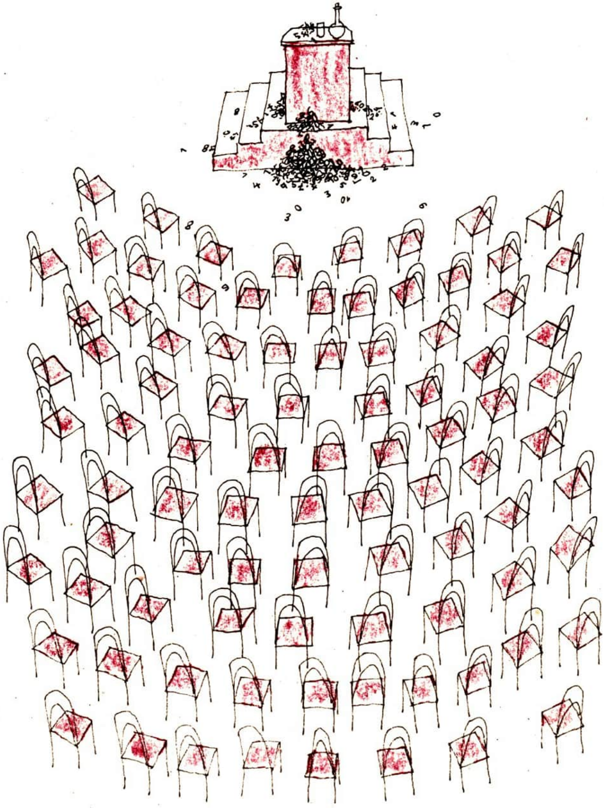
2. bei welcher Teilung der Seiten des Quadrats könnte man ein vollkommenes Rechteck und folglich auch eine völlige Übereinstimmung der Flächen erhalten?

Wir nehmen die Algebra zu Hilfe. Die Fläche des Quadrats (vgl. Abb. 207 auf S. 206) ist gleich $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Die Fläche des Rechtecks (vgl. Abb. 202) ist gleich $(2x + y)x = 2x^2 + xy$. Die Differenz R zwischen der Fläche des Rechtecks und der des Quadrats ist gleich $R = x^2 - xy - y^2$. Die Flächen des Quadrats und des Rechtecks sind gleich, wenn $x^2 - xy - y^2 = 0$ ist. Wenn wir durch y^2 teilen, erhalten wir eine quadratische Gleichung mit $\frac{x}{y}$:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right) - 1 = 0.$$

Wenn wir nur die positive Lösung berücksichtigen, haben wir: $\frac{x}{y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Nur bei einem solchen (irrationalen) Verhältnis der Seitenabschnitte x und y ist bei der Zerlegung eines Quadrats in zwei kongruente Dreiecke und zwei kongruente Trapeze die vollkommene Umwandlung eines Quadrats in ein Rechteck möglich. Bei rationalen Werten für x und y kann R nicht gleich Null sein. Bei ganzzahligen Werten für x und y ist die kleinstmögliche Differenz zwischen den Flächen $R = 1$. Diese kleinste ganzzahlige Differenz R erhielt auch mein junger Freund, als er als Werte für x und y ein Paar nebeneinanderliegender Zahlen der Zahlenreihe des Fibonacci nahm (beim ersten Versuch $x = 5$ und $y = 3$ (S. 206), beim zweiten $x = 8$ und $y = 5$), bei den beiden folgenden $x = 13$ und $y = 8$ sowie $x = 21$ und $y = 13$), weil sie eben eine der Gleichungen $x^2 - xy - y^2 = 1$ und $x^2 - xy - y^2 = -1$ erfüllen (vgl. S. 205).

321.–323. entfallen



Inhalt

Die fetten Ziffern geben die Seitenzahlen der Aufgaben,
die mageren die der Lösungen an.

2. Abschnitt

Schwierige Lagen

Geometrie mit Streichhölzern

Erst wäg's, dann wag's!

Können ist immer von Nutzen

Domino und Würfel

A. Domino

B. Würfel

Eigentümlichkeiten der Neun

Mit und ohne Algebra

Mathematik fast ohne Rechnen

Mathematische Spiele und Kunststücke

A. Spiele

B. Kunststücke

Die Teilbarkeit der Zahlen

Kreuzsummen und magische Quadrate

A. Kreuzsummen

B. Magische Quadrate

Kurioses und Ernsthaftes von Zahlen

Alte und doch ewig junge Zahlen

A. Die Primzahlen

Wo findet man weitere Bücher mit mathematischen Knobeleien?

Zur Geometrie

J. S. Dubnow: Fehler in geometrischen Beweisen. Übersetzung aus dem Russischen. Berlin 1958, DM 3,80
E. B. Dynkin – W. A. Uspenski: Mathematische Unterhaltungen, Teil I, Mehrfarbenprobleme. Übersetzung aus dem Russischen. Berlin 1955, DM 5,10
I. M. Jaglom – W. G. Boltjanski: Konvexe Figuren. Übersetzung aus dem Russischen. Berlin 1956, DM 15,—
F. v. Krbek: Geometrische Plaudereien. Leipzig 1963, DM 8,50

Zur Zahlentheorie

E. B. Dynkin – W. A. Uspenski: Mathematische Unterhaltungen, Teil II, Aufgaben aus der Zahlentheorie. Übersetzung aus dem Russischen. Berlin 1956, DM 6,10
I. M. Winogradow: Elemente der Zahlentheorie. Übersetzung aus dem Russischen. Berlin 1955, DM 10,50

Zur Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

E. B. Dynkin – W. A. Uspenski: Mathematische Unterhaltungen, Teil III, Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Übersetzung aus dem Russischen. Berlin 1956, DM 4,10

Aus mehreren Gebieten

A. A. Kolosow: Kreuz und quer durch die Mathematik. Übersetzung aus dem Russischen. Berlin 1963, DM 5,40
H. Steinhaus: Kaleidoskop der Mathematik. Übersetzung aus dem Polnischen und Englischen. Berlin 1959, DM 19,80

Es sei auch auf die von der Zentralstelle für Kinder- und Jugendliteratur herausgegebene Zusammenstellung „Wo finde ich Lesestoffe und Nachschlagewerke zur Mathematik?" hingewiesen.

LEKTOR: TRAUDE TEUBNER
GUTACHTER: DR. SIEGFRIED OBERLÄNDER, BERLIN
1. AUFLAGE, 1.–20. TAUSEND.
VERLAG FÜR POPULÄRWISSENSCHAFTLICHE LITERATUR
VLN 212-475/13/63 · ES 19 A
ILLUSTRATIONEN, EINBAND UND SCHUTZUMSCHLAG:
EBERHARD UND ELFRIEDE BINDER, STASSFURT
SATZ: VEB GRAPHISCHE WERKSTÄTTEN LEIPZIG
DRUCK UND BUCHBINDERISCHE VERARBEITUNG: VOB SACHSENDRUCK PLAUEN
PRINTED IN THE GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC


Mathematik
ganz neu
Mathematik
zum Zeitvertreib
Mathematik
als Spiel
Binder