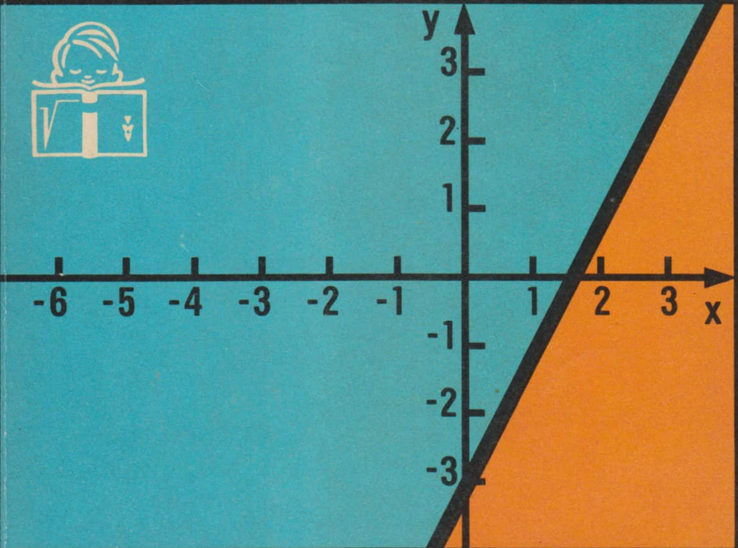
Arbeiten mit Mengen

Günter Fanghänel
Herbert Vockenberg



Günter Fanghänel, Herbert Vockenberg

Arbeiten mit Mengen

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin
1978

Autoren
Dr. Günter Fanghänel — Kapitel 1, 3, 5
Dr. Herbert Vockenberg — Kapitel 1, 2, 4

Dieses Buch wurde unter Nr. 92 in die mathematische Schülerbücherei aufgenommen und kann für Arbeitsgemeinschaften der Klassen 9 und 10 verwendet werden.

1. Auflage
Lizenz Nr. 203/1000/77 (E 00 17 10-1)
LSV 1011
Redaktion: Karlheinz Martin, Ingrid Fabian
Zeichnungen: Heinz Grothmann
Illustrationen: Manfred Bofinger
Einband und typografische Gestaltung: Atelier vwv
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer", 582 Bad Langensalza
Schrift: 10/11 Extended Monotype
Redaktionsschluß: 28. Januar 1977
Bestell-Nr.: 707 053 2
DDR 3,50 M

Erläuterungen zur Arbeit mit dem Buch

Das Buch ist in fünf Kapitel gegliedert. Die Gliederung ist aus dem Inhaltsverzeichnis am Anfang des Buches zu ersehen.
Innerhalb der einzelnen Kapitel werden Definitionen, Beispiele und Aufgaben durch folgende Zeichen besonders hervorgehoben:

▶ Definitionen
■ Beispiele
● Aufgaben

Definitionen, Beispiele und Aufgaben sind jeweils innerhalb der Kapitel fortlaufend numeriert.
Aufgaben mit einer blauen Nummer müssen unbedingt gelöst werden, da dies zum Verständnis des Folgenden erforderlich ist.
Aufgaben mit schwarzen Nummern dienen der Übung und Wiederholung. Für alle Aufgaben, die durch einen Stern gekennzeichnet sind, befinden sich am Schluß eines jeden Kapitels die Lösungen.
Durch das Register am Ende des Buches ist eine schnelle Information über wichtige Begriffe möglich.
Das Literaturverzeichnis enthält vorwiegend solche Titel, die auch für Schüler für ein vertiefendes Studium der Mengenlehre geeignet sind.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe der Mengenlehre

1.1. Bilden von Mengen

■ **B1:** In einer Klasse sind 12 Schüler aktive Fußballer in der Schulmannschaft, 18 Schüler besuchen den Zirkel „Junge Sanitäter“, 14 Schüler sind Mitglieder des Schulchores und nur 2 Schüler gehören keiner dieser Arbeitsgemeinschaften an.

Wieviel Schüler sind in dieser Klasse?

Aus diesen Angaben läßt sich die Frage nach der Anzahl der Schüler der Klasse nicht beantworten. Wenn jeder Schüler nur höchstens eine Arbeitsgemeinschaft besucht, beträgt die Klassenstärke 46 Schüler. Es ist jedoch durchaus möglich, daß sich einige Schüler für die Teilnahme an mehreren Gemeinschaften entschieden haben. Dann ist die Schülerzahl geringer.

Die Anzahl der Schüler der Klasse läßt sich genau ermitteln, wenn man zusätzlich noch folgende Angaben kennt:

8 Fußballer nehmen am Zirkel „Junge Sanitäter“ teil.
5 Fußballer sind Mitglieder des Chores.
7 Chormitglieder nehmen am Zirkel „Junge Sanitäter“ teil.
2 Schüler sind Fußballer, Chormitglieder und außerdem gehören sie auch dem Zirkel „Junge Sanitäter“ an.

Zur Ermittlung der Schülerzahl ist eine graphische Übersicht wie in Bild 1 zweckmäßig. Die dort angegebenen Zahlen sind entweder durch den Sachverhalt direkt gegeben oder aus ihm durch die folgenden Überlegungen leicht zu finden.

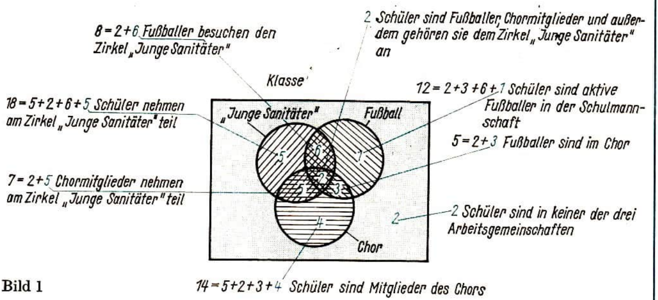


Bild 1

Addiert man die in Bild 1 blau gekennzeichneten Zahlen, so erhält man die Anzahl der Schüler der Klasse. Sie beträgt
$2 + 6 + 3 + 1 + 5 + 5 + 4 + 2 = 28$

Bei der Lösung dieser Aufgabe haben wir von einer wichtigen mathematischen Arbeitsweise — **dem Arbeiten mit Mengen** — Gebrauch gemacht.
Im obligatorischen Mathematikunterricht werden ab Klasse 6 einige Begriffe aus der Mengenlehre eingeführt, und es wird bei verschiedenen Gelegenheiten mit ihnen gearbeitet. Wir wollen zunächst diese Begriffe nochmals zusammenstellen, sie also wiederholen und vertiefen.

Als erstes ist zu klären, was wir unter **Menge** verstehen wollen. Sicher ist die umgangssprachliche Bedeutung des Wortes Menge im Sinne von viel (z. B. „Wir haben eine Menge Hausaufgaben zu erledigen"; „Der FC . . . hat eine Menge Tore geschossen") für exaktes mathematisches Arbeiten nicht brauchbar.
Der Hallenser Mathematiker Georg Cantor (1845—1918), der als Begründer der Mengenlehre gilt, gab folgende, inzwischen berühmt gewordene Beschreibung einer Menge:

> **Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens — welche Elemente der Menge genannt werden — zu einem Ganzen.**

Obwohl diese Beschreibung keine exakte Definition ist und bei unkritischer Anwendung auch zu Widersprüchen führen kann (hierauf wird später noch eingegangen), soll sie zunächst einmal als Ausgangspunkt für die Betrachtung einiger Beispiele und Aufgaben dienen.

B2: Es lassen sich z. B. folgende Mengen bilden:
a) Menge aller Schüler einer Klasse;
b) Menge aller natürlichen Zahlen;
c) Menge aller Häuser in Leipzig;
d) Menge aller Vierecke;
e) Menge aller Teiler der Zahl 60.
Überlegen Sie in jedem Fall, welches die Elemente der Menge sind!

1. Bilden Sie selbständig weitere Mengen!

Für ein rationelles Arbeiten mit Mengen ist es notwendig, entsprechende Zeichen einzuführen. Aus dem Mathematikunterricht der Klasse 6 ist Ihnen bekannt, daß Mengen im allgemeinen mit großen Buchstaben, z. B. A, B, M, N, R, und ihre Elemente mit kleinen Buchstaben, z. B. a, b, c, x, y, bezeichnet werden und daß man die Beziehung „a ist Element von M“ durch „$a \in M$“ darstellt.

2.* M sei die Menge aller Teiler der Zahl 60 (↗ B2 e)).
Untersuchen Sie, welche der folgenden Aussagen wahr sind!
a) $12 \in M$; **b)** $14 \in M$; **c)** $60 \in M$; **d)** $0 \in M$; **e)** $1 \in M$

Für den Fall, daß ein Element a nicht zu einer Menge M gehört, schreibt man $a \notin M$.
Aus dem bisherigen Mathematikunterricht ist Ihnen bekannt, daß man zwischen **endlichen** und **unendlichen Mengen** unterscheiden kann. Im ersten Fall enthält die Menge **endlich** viele und im zweiten Fall **unendlich** viele Elemente.

3.* Untersuchen Sie, welche der im Beispiel 2 angegebenen Mengen endlich sind!

Endliche Mengen kann man durch Aufzählen ihrer Elemente angeben, man schreibt diese dann in geschweifte Klammern, also z. B. $M = \{a, b, c, x, y\}$ für die endliche Menge M, die aus den fünf Elementen a, b, c, x, y besteht.

B3: Die Menge $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ besteht aus den angegebenen acht Zahlen und nur aus diesen.

4.* Überlegen Sie, welche gemeinsame Eigenschaft die im Beispiel 3 genannten Zahlen haben!

Lösen Sie unter Verwendung der bisher wiederholten Begriffe und Symbole folgende Aufgaben:

5.* M sei die Menge aller Teiler der Zahl 60; geben Sie M durch Aufzählen der Elemente an!

6.* K sei die Menge aller Punkte einer Ebene, die von einem festen Punkt O den Abstand 3 cm haben. Wählen Sie einen Punkt O und zeichnen Sie die mit K bezeichnete Punktmenge!

7.* Wie heißt die Menge aller Punkte im Raum, die von einem festen Punkt ein und denselben Abstand haben?

8.* Wie heißt die Menge aller Punkte einer Ebene, die von zwei fest vorgegebenen Punkten A und B jeweils den gleichen Abstand haben? Wählen Sie zwei Punkte A und B, und zeichnen Sie die so beschriebene Menge!

9.* Wie bezeichnet man die Menge der Punkte auf der Erdoberfläche, die von beiden Polen gleichweit entfernt sind?

10.* Wie bezeichnet man die Menge aller Vierecke, deren Diagonalen gleich lang sind und einander halbieren?

11.* Z sei die Menge aller zweistelligen, durch 3 teilbaren Zahlen. Geben Sie Z durch Aufzählen der Elemente an!

12.* H sei die zweite Hauptgruppe im Periodensystem der Elemente. Geben Sie die Elemente von H durch Aufzählen an!

(Verdeutlichen Sie sich die unterschiedliche Bedeutung des Wortes **Element** — einmal für Objekte, die zu einer Menge zusammengefaßt werden, zum anderen als chemisches Element.)

Betrachten wir noch einmal alle bisher behandelten Beispiele und Aufgaben, so können wir feststellen, daß in allen Fällen die Elemente der jeweiligen Menge — und damit die Menge selbst — durch das Zutreffen einer entsprechenden Aussage auf genau die Elemente bestimmt sind.
Eine Zahl a ist also beispielsweise Element der in Beispiel 2 e) genannten Menge M genau dann, wenn für sie die **Aussage** „a ist Teiler von 60" zutrifft.

● 13. Formulieren Sie für jede der in den Beispielen 2 und 3 gegebenen Mengen eine entsprechende Aussage!

Betrachten wir die bisher angegebenen Beispiele und Aufgaben genauer, so können wir feststellen, daß für die Auswahl der Elemente der jeweiligen Menge stets ein Grundbereich festgelegt war. In einigen Fällen wurde dieser Grundbereich ausdrücklich genannt, z. B. bei Aufgabe 6: *die Menge aller Punkte einer Ebene*; bei Aufgabe 10: *die Menge aller Vierecke.*
In anderen Fällen ergab sich dieser Grundbereich direkt aus dem Zusammenhang der Aufgabe, z. B. bei Beispiel 3: *die Menge aller natürlichen Zahlen.*
Grundsätzlich ist es bei Mengenbildungen wichtig, immer den jeweiligen Grundbereich zu kennen und zu beachten.
Die CANTORsche Beschreibung einer Menge kann nun zu folgendem Mengenbildungsprinzip präzisiert werden:

Bei vorgegebenem Grundbereich und bei einer gegebenen Aussageform[1]) gibt es eine Menge M, die genau aus denjenigen Elementen besteht, für die die Aussageform zu einer wahren Aussage wird.

Die bei endlichen Mengen verwendete Form der Darstellung

$$M = \{a, b, c, \dots, z\}$$

ist äußerst unrationell, wenn die Menge sehr viele Elemente enthält. Dies zeigt das folgende Beispiel.

■ **B4:** M sei die Menge der natürlichen Zahlen, die kleiner als eine Million sind.
Wenn für jede Grundziffer und für jedes Komma zwischen zwei Elementen 0,5 cm benötigt werden, so würde die elementweise Darstellung dieser Menge etwa 34 km lang sein.

● **14.** Überprüfen Sie die Zahlenangaben im Beispiel 4!

Es ist deshalb zweckmäßig, eine andere Darstellungsweise einzuführen, die auf der charakteristischen Aussage beruht. In die geschweifte Klammer wird zuerst die Bezeichnung des Elementes (z. B. a oder x) und nach einem Doppelpunkt die entsprechende Aussage geschrieben.

■ **B5:** $A = \{a\colon a \in N;\ 3 \leqq a < 7\}$ heißt dann: Die Menge A enthält genau die natürlichen Zahlen a, für die $3 \leqq a < 7$ gilt.

● **15.*** Geben Sie alle Elemente der Menge aus Beispiel 5 an!

16.* Geben Sie in den folgenden Fällen jeweils alle Elemente der Mengen $B_1, \dots, B_6$ an! Dabei ist N die Menge der natürlichen und R die Menge der rationalen Zahlen.

a) $B_1 = \{x\colon x \in N;\ x < 10\}$
b) $B_2 = \{n\colon n \in R;\ |n| = 7\}$
c) $B_3 = \{a\colon a \in N;\ a \mid 72\}$
d) $B_4 = \{b\colon b \in N;\ 2 < b < 13{,}5\}$
e) $B_5 = \{y\colon y \in R;\ a \in R;\ ay = a\}$
f) $B_6 = \{a\colon a \in R;\ y \in R;\ ay = a\}$
g) Nennen Sie von den Aufgaben **a)** bis **f)** die jeweilige charakteristische Aussage!

Die zuletzt erläuterte Darstellungsform, die man allgemein in der Form $M = \{x\colon \mathsf{H}(x)\}$ angibt, ist auch für unendliche Mengen verwendbar.

---

[1]) Aussageform heißt jeder Ausdruck, in dem wenigstens eine Variable frei vorkommt. Sie wird zu einer Aussage, wenn für alle freien Variablen Zeichen für wohlbestimmte Objekte eingesetzt werden. So ist $a < 2a$ eine Aussageform, setzt man z. B. $a = -2$, so erhält man eine (allerdings falsche) Aussage.

■ **B6:** Die Menge D aller durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen ist unendlich. Sie kann durch

$$D = \{n : n \in N;\ 3 \mid n\}$$

dargestellt werden.

● **17.*** Geben Sie für folgende Mengen jeweils eine entsprechende Darstellung an!

a) A sei die Menge aller natürlichen Zahlen, die größer als 10 sind.

b) B sei die Menge aller natürlichen Zahlen, die nicht durch 3 teilbar sind.

c) C sei die Menge der gebrochenen Zahlen, die kleiner als 1 sind.

d) D sei die Menge aller gebrochenen Zahlen, die kleiner als 15 und größer als 10 sind.

18.* Formulieren Sie für die nachfolgenden Mengendarstellungen eine charakteristische Aussage!

a) $D = \{d : d \in N;\ 7 \mid d\}$

b) $E = \{m : m \in R^*;\ m^2 > m\}$

c) $F = \{x : x \in R;\ x^2 > x\}$

19.* Geben Sie für die Elemente der folgenden Mengen jeweils eine Eigenschaft an, die alle Elemente bis auf eines besitzen! Welches Element besitzt diese Eigenschaft jeweils nicht?

a) $A = \{2, 8, 42, 53, 66\}$

b) $B = \{3, 5, 7, 9, 11, 13\}$

c) $C = \{1, 9, 25, 67, 121\}$

d) D = {Dreieck, Quadrat, Rechteck, Kreis, Trapez}

e) E = {Berlin, London, Prag, Moskau, Sofia}

f) F = {laufen, blau, fahren, schreiben, essen}

g) G = {Maus, Elefant, Adler, Kuh, Schwein}

20.* Untersuchen Sie, welche der jeweils angegebenen Zahlen zu der entsprechenden Menge gehören!

a) $M = \{x : x \in R;\ -3 \leqq x < \frac{7}{3}\}$, $\quad -4;\ +2;\ -3;\ +3;\ +\frac{9}{4}$

b) $M = \{a : a \in N;\ a \mid 144\}$, $\quad 6;\ 8;\ 15;\ 16;\ 36$

c) $M = \{x : x \in R;\ |x| < \frac{3}{4}\}$, $\quad -\frac{1}{2};\ \frac{5}{7};\ -\frac{3}{5};\ -0{,}8;\ 0$

d) $M = \{y : y \in R;\ y^2 < 8\}$, $\quad -2;\ \frac{4}{3};\ -\frac{7}{3};\ \frac{38}{13};\ -\frac{11}{4}$

e) $M = \{z : z \in N;\ z$ Primzahl$\}$, $\quad 17;\ 35;\ 53;\ 91;\ 97$

Im folgenden sei noch ein Problem erläutert, das bei der Mengenbildung beachtet werden muß:
In einem bestimmten Grundbereich kann man nach dem genannten Mengenbildungsprinzip beliebige Mengen bilden. Diese Mengen können nun ihrerseits wieder Elemente für neue Mengen, sogenannte **Mengen zweiter Stufe** sein. Entsprechend lassen sich Mengen dritter, vierter und weiterer Stufen bilden.

■ **B7:** Nehmen wir zum Beispiel an, daß die Einwohner eines Kreises den Grundbereich bilden, so ist eine Schulklasse eine Menge **erster** Stufe, deren Elemente Schüler sind.
Eine Menge **zweiter** Stufe ist dann die Zusammenfassung der Klassen einer Schule, die Elemente sind Klassen.
Eine Menge **dritter** Stufe ist die Zusammenfassung der Schulen eines Kreises, die Elemente sind Schulen.

■ **B8:** In der Mathematik können wir zum Beispiel die Menge aller Brüche als Grundbereich wählen. Die Zusammenfassung von solchen Brüchen, die durch Erweitern und Kürzen auseinander hervorgehen, ist dann eine Mengenbildung **erster** Stufe. Faßt man zum Beispiel nun alle gebrochenen Zahlen, die kleiner als 1 sind, zusammen, so ist das eine Mengenbildung **zweiter** Stufe.

Mit einem derartigen stufenweisen Aufbau der Mengen vermeidet man Antinomien (Widersprüche), wie sie bei unkritischer Anwendung der CANTORschen Mengenbeschreibung auftreten können.
Die wohl bekannteste Antinomie ist die von dem englischen Philosophen und Mathematiker BERTRAND RUSSEL (1872—1970) entdeckte Antinomie der Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten.
Eine scherzhafte Einkleidung dieser Antinomie ist die Geschichte von dem Schiffsbarbier, der bei Androhung einer hohen Strafe angewiesen wird, genau die Personen auf dem Schiff zu rasieren, die sich nicht selbst rasieren.
Wie muß sich der Barbier in bezug auf seine eigene Person verhalten?

1.2. Teilmengen

Nachdem wir den Begriff der *Menge* und den des *Elementes* sowie die *Menge-Element-Beziehung* wiederholt und auf einige Aufgaben angewandt haben, gilt es nun einen weiteren wichtigen Begriff zu wiederholen, den Begriff **Teilmenge** einer Menge.

Im Mathematikunterricht der Klasse 6 (↗ [13b], S. 19) hatten wir folgende Definition kennengelernt.

▶ **D1: Eine Menge A heißt *Teilmenge* einer Menge M, wenn jedes Element von A auch Element von M ist. Wir schreiben dann: $A \subseteq M$.**
Es gilt also: $A \subseteq M$ genau dann, wenn für jedes x gilt: wenn $x \in A$, so $x \in M$.
Man sagt auch: Die Menge A ist in der Menge M enthalten, oder M ist eine Obermenge von A.

■ **B9:** M sei die Menge aller zweistelligen durch 4 teilbaren natürlichen Zahlen. Dann gilt:

$$M = \{12, 16, 20, 24, 28, 32, \dots, 96\}.$$

A sei die Menge aller durch 8 teilbaren natürlichen Zahlen, die zwischen 20 und 50 liegen. Dann gilt:

$$A = \{24, 32, 40, 48\}.$$

Wie man durch Vergleich feststellen kann, gilt $A \subseteq M$.
Den Beweis, daß A Teilmenge von M ist, kann man auch wie folgt führen: Der Grundbereich ist für beide Mengen gleich N. Wenn eine Zahl durch 8 teilbar ist und zwischen 20 und 50 liegt, so ist sie auch durch 4 teilbar und zweistellig.
Daraus folgt, daß jedes Element von A auch Element der Menge M ist, also gilt $A \subseteq M$.

Die Beziehung zwischen einer Menge M und einer Teilmenge A kann man auch grafisch durch sogenannte Mengendiagramme (Venn-Diagramme) veranschaulichen.
Es gibt nun den Fall, daß die Teilmenge A alle Elemente von M enthält (↗ Bild 2a)). Trifft dies nicht zu, gibt es also Elemente von M, die nicht zu A gehören (↗ Bild 2b)), so heißt A eine **echte** Menge von M. Bild 3 veranschaulicht Beispiel 9 mit Hilfe eines Mengendiagramms.

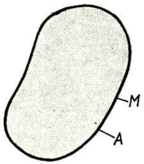


Bild 2a

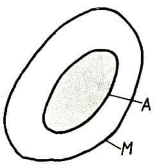


Bild 2b

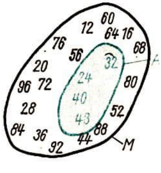


Bild 3

▶ **D2: Eine Menge A heißt *echte Teilmenge* einer Menge M, wenn gilt: Jedes Element von A ist auch Element von M, und es gibt (mindestens) ein Element in M, das nicht Element von A ist.**
Für diesen Fall schreibt man $A \subset M$.

21. Zeigen Sie, daß in Beispiel 9 sogar $A \subset M$ gilt!

22. Beweisen Sie folgenden Satz!
Für jedes A, B und C gilt: Wenn $A \subset B$ und $B \subset C$, so auch $A \subset C$.
Veranschaulichen Sie diesen Sachverhalt durch ein Mengendiagramm!

23.* Untersuchen Sie, ob für die nachfolgend angegebenen Mengen M und A die Beziehung $A \subseteqq M$ oder sogar $A \subset M$ gilt!
Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung!

a) $M = \{x : x \in N; x < 100\}$, $\quad A = \{a : a \in N; 4 \mid a\}$
b) $M = \{x : x \in N; 3 \mid x\}$, $\quad A = \{a : a \in N; 6 \mid a\}$
c) $M = \{x : x \in R^*\}$, $\quad A = \{a : a \in N\}$
d) $M = \{x : x \in N; 4 \mid x\}$, $\quad A = \{a : a \in N; a = 4n\}$

24. Beschreiben Sie die Mengen M und A und die gegebenenfalls vorhandene Beziehung zwischen ihnen in Worten!

a) M sei die Menge aller ungeraden Zahlen zwischen 40 und 45,
A sei die Menge aller Primzahlen zwischen 40 und 45.
b) M sei die Menge aller Rechtecke,
A die Menge aller Quadrate.
c) M sei die Menge aller Schüler Ihrer Schule,
N sei die Menge aller Teilnehmer an der Arbeitsgemeinschaft „Arbeiten mit Mengen“.

Die Beziehungen zwischen Menge und Teilmenge lassen sich sehr gut verwenden, um bestimmte Zusammenhänge deutlich zu machen.

B10: Für die Mengen der natürlichen Zahlen N, der gebrochenen Zahlen R^* und der rationalen Zahlen R gilt: $N \subset R^* \subset R$.

B11: Bezeichnet man mit
V: die Menge aller Vierecke,
T: die Menge aller Trapeze,
D: die Menge aller Drachenvierecke,
P: die Menge aller Parallelogramme,
R: die Menge aller Rechtecke,
Rh: die Menge aller Rhomben,
Q: die Menge aller Quadrate,

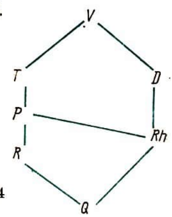


Bild 4

dann gilt:

$$Q \subset R \subset P \subset T \subset V \quad \text{und} \quad Q \subset Rh \subset D \subset V \quad \text{und} \quad Rh \subset P.$$

Veranschaulicht man die Teilmengenbeziehung durch ein Strichdiagramm, so erhält man die in Bild 4 dargestellte Übersicht über die Menge aller Vierecke.

25. Veranschaulichen Sie die in Beispiel 11 angegebenen Teilmengenbeziehungen mit Hilfe von Mengendiagrammen!

1.3. Gleichheit und Gleichmächtigkeit von Mengen

Eine weitere wichtige Beziehung zwischen Mengen, die wir aus dem Mathematikunterricht kennen, ist die Gleichheit zweier Mengen.

▶ **D3: Zwei Mengen heißen *gleich*, wenn sie dieselben Elemente enthalten. Anders ausgedrückt heißt das: Eine Menge A ist gleich einer Menge B genau dann, wenn für jedes Element $a \in A$ auch $a \in B$ gilt und für jedes Element $b \in B$ auch $b \in A$ gilt. Man schreibt dann $A = B$.**

● **26.** Zeigen Sie, daß $A = B$ gleichbedeutend mit ($A \subseteqq B$ und $B \subseteqq A$) ist!

■ **B12:** Die Mengen $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{5, 7, 3\}$, $C = \{7, 3, 5\}$,
$D = \{7, 5, 3\}$, $E = \{3, 7, 5\}$, $F = \{5, 3, 7\}$
sind alle untereinander gleich.
Bei der Angabe von Mengen spielt also die Reihenfolge (bzw. Anordnung) der Elemente keine Rolle.

● **27.** Zeigen Sie, daß für die Gleichheit von Mengen folgende Beziehungen gelten:
Für beliebige Mengen A, B und C gilt stets:
a) $A = A$ (Reflexivität);
b) wenn $A = B$, so $B = A$ (Symmetrie);
c) wenn $A = B$ **und** $B = C$, so $A = C$ (Transitivität).

28.* Untersuchen Sie, welche der in Aufgabe 27 genannten Beziehungen auch für die Teilmengenbeziehung $A \subseteqq B$ gelten!

29.* Geben Sie alle Teilmengen der folgenden Mengen an!
a) $M = \{a, b, c\}$
b) $Z = \{\bigcirc, \square, \triangle, \nabla\}$
c) $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

30.* Unter welchen Bedingungen sind die drei Mengen
$M_1 = \{a\}$, $M_2 = \{b\}$, $M_3 = \{c\}$ gleich?

Obwohl im allgemeinen die in der Aufgabe 30 genannten drei Mengen nicht gleich sind, besteht doch eine Gemeinsamkeit zwischen ihnen darin, daß sie alle nur aus einem Element bestehen, d. h. Einermengen sind. Man sagt in diesem Fall, die Mengen sind **gleichmächtig**.
Ebenso sind alle Zweiermengen, d. h. alle Mengen, die aus zwei Elementen bestehen, **gleichmächtig**.
Entsprechend sind alle Dreiermengen **gleichmächtig** usw.
Um die Gleichmächtigkeit von Mengen zu definieren, ist das oben angeführte Vorgehen wenig geeignet, da man bei der Definition ohne den Anzahlbegriff auskommen muß (wie wir in Kapitel 2 noch sehen werden). Außerdem wäre eine

Definition mit Hilfe des Anzahlbegriffes nur für endliche Mengen möglich. Wir streben aber eine allgemeingültige Definition an. Um diese zu erhalten, bezieht man sich auf die Elemente und benutzt den Begriff der **Zuordnung**.

▶ **D4: Zwei Mengen *A* und *B* heißen *gleichmächtig*, wenn jedem Element aus *A* genau ein Element aus *B* und umgekehrt jedem Element aus *B* genau ein Element aus *A* zugeordnet werden kann. Man schreibt dann $A \sim B$ und liest „*A* gleichmächtig *B*".**

Auf Zuordnungen oder Abbildungen von Mengen werden wir im Kapitel 5 noch ausführlicher eingehen. Für das Verständnis der Definition 4 genügt es, sich klar zu machen, was es heißt, daß jedem Element aus A genau eines aus B **und** jedem Element aus B genau eines aus A zugeordnet wird.
Wir wollen uns das mit Hilfe eines Bildes verdeutlichen (↗ Bild 5).

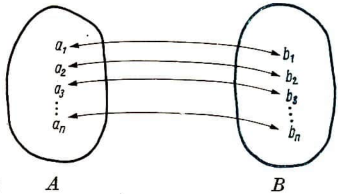


Bild 5

Es muß also jedem Element aus A ein (und nur ein) Element aus B entsprechen, und es darf keine zwei Elemente in A geben, denen das gleiche Element in B entspricht, und es darf keine Elemente in B geben, denen kein Element in A entspricht.
Das folgende Beispiel möge dies verdeutlichen.

■ **B13:** Die Mengen $A = \{\square, \triangle, \bigcirc, \bigtriangledown\}$ und $B = \{a, b, c, d\}$ sind gleichmächtig, denn man kann die folgende Zuordnung herstellen:
$a \leftrightarrow \square$, $b \leftrightarrow \triangle$; $c \leftrightarrow \bigcirc$, $d \leftrightarrow \bigtriangledown$
(Sind auch andere umkehrbar eindeutige Zuordnungen (Abbildungen) möglich?)

● **31.** Beweisen Sie, daß aus $A = B$ folgt $A \sim B$!
Gilt die Umkehrung auch?

32. Untersuchen Sie, ob die Beziehung „gleichmächtig" reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, d. h., ob für beliebige A, B und C gilt:
$A \sim A$;
$A \sim B$, so $B \sim A$;
wenn $A \sim B$ **und** $B \sim C$, so $A \sim C$. (↗ Aufgabe 27)

1.4. Die leere Menge

Alle Mengen, die wir bisher betrachtet haben, waren entweder unendlich oder hatten eine endliche Anzahl von Elementen. Dabei waren die Einermengen die Mengen mit der geringsten Anzahl von Elementen (↗ Aufgabe 30). Das Mengenbildungsprinzip ermöglicht aber auch, die Menge zu bilden, die kein Element enthält.

▶ **D5: Die Menge, die kein Element enthält, nennt man die *leere Menge*. Für sie verwendet man das Symbol „$\emptyset$“.**

● **33.** Überlegen Sie, warum man den bestimmten Artikel verwenden kann, also von **der** statt von **einer** leeren Menge spricht!

■ **B14:** Im folgenden seien einige Beschreibungen der leeren Menge über verschiedenen Grundbereichen angegeben:
a) die Menge aller sechsfüßigen Hunde;
b) die Menge aller ebenen Dreiecke, deren Winkelsumme größer als 180° ist;
c) die Menge aller Teilnehmer einer Arbeitsgemeinschaft, die größer als 3,00 m sind.

Geben Sie weitere Beispiele an!

● **34.*** Suchen Sie von den nachfolgend genannten Mengen die leere Menge heraus, und begründen Sie Ihre Entscheidung!
a) Die Menge aller Rechtecke, deren Seiten nicht alle gleich lang sind;
b) die Menge aller Rechtecke, deren Diagonalen nicht gleich lang sind;
c) die Menge aller geraden Primzahlen;
d) die Menge aller rechtwinkligen Dreiecke, für die das Hypotenusenquadrat größer ist als die Summe der Kathetenquadrate.

35.* Formulieren Sie, ausgehend von Aufgabe 34 d), den Satz des PYTHAGORAS unter Verwendung der leeren Menge!

36.* Welcher Unterschied besteht zwischen den Mengen $A = \{0\}$ und $B = \emptyset$?

Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge. Es gilt stets $\emptyset \subseteq M$.

1.5. Operationen mit Mengen

Wir haben bisher einige Grundbegriffe der Mengenlehre kennengelernt, die für unsere weitere Arbeit wichtig sind. Ebenfalls wichtig sind gewisse **Operationen mit Mengen**. Zwei der wichtigsten werden nachfolgend behandelt.

► **D6: Eine Menge V heißt die *Vereinigung* zweier Mengen A und B, wenn sie genau die Elemente enthält, die in A *oder* B enthalten sind. Man schreibt dann**
$V = A \cup B$ und liest „A vereinigt mit B".
Es gilt also: $x \in V = A \cup B$ genau dann, wenn $x \in A$ *oder* $x \in B$.

Hinweis: Daß ein Element in einer Menge A ***oder*** einer Menge B enthalten ist, schließt nicht aus, daß dieses Element in beiden Mengen enthalten ist.

■ **B15:** A sei die Menge aller einstelligen Primzahlen, also $A = \{2, 3, 5, 7\}$, und
B sei die Menge aller geraden Zahlen, die kleiner als 10 sind, also $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$,
dann ist $V = A \cup B = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
Dies kann man durch folgendes Mengendiagramm veranschaulichen (↗ Bild 6).

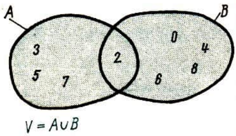


Bild 6

● **37.*** Was läßt sich aus $A \cup B = A$ und was aus $A \cup B = B$ schließen? Veranschaulichen Sie diese Sachverhalte durch Mengendiagramme!

38.* Gegeben seien die Mengen
$A = \{2, 3, 5, 7\}$; $B = \{2, 3, 4, 6\}$; $C = \{3, 6, 7, 9\}$.
Bilden Sie $V_1 = A \cup B$ und $V_2 = B \cup C$!
Bilden Sie $V_1 \cup C$ und $A \cup V_2$ und vergleichen Sie die Ergebnisse!

Aus der Definition der Vereinigung (↗ D6) folgt unmittelbar:
Für alle Mengen A, B, C gilt

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Assoziativität)

$A \cup B = B \cup A$ (Kommutativität)

Die zweite grundlegende Operation mit Mengen ist Ihnen aus dem Mathematikunterricht bekannt.

► **D7: Eine Menge D heißt *Durchschnitt* zweier Mengen A und B, wenn sie genau die Elemente enthält, die in A *und* in B enthalten sind. Man schreibt dann**
$D = A \cap B$ und liest „A geschnitten mit B".
Es gilt also: $x \in D = A \cap B$ genau dann, wenn $x \in A$ *und* $x \in B$.

■ **B16:** A sei wieder die Menge aller einstelligen Primzahlen, also
$A = \{2, 3, 5, 7\}$,
und B sei wieder die Menge aller geraden Zahlen, die kleiner als 10 sind, also
$B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$,
dann ist
$D = A \cap B = \{2\}$.

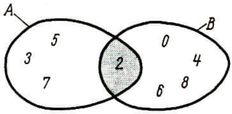


Bild 7

Dies kann man durch ein Mengendiagramm (↗ Bild 7) veranschaulichen.

● **39.*** G sei die Menge aller geraden Zahlen, U die Menge aller ungeraden Zahlen. Bilden Sie $D = G \cap U$, und stellen Sie den Sachverhalt durch ein Mengendiagramm dar!

Aus der Definition des Durchschnittes zweier Mengen folgt, daß dieser Durchschnitt genau dann die leere Menge ist, wenn die beiden Mengen kein gemeinsames Element besitzen.

▶ **D8: Mengen, die kein gemeinsames Element besitzen, heißen *elementfremd* oder *disjunkt*.**

Es gilt also: Zwei Mengen A und B sind genau dann disjunkt, wenn $A \cap B = \emptyset$.

● **40.*** Es gelte $A \subset B$. Was läßt sich über den Durchschnitt $D = A \cap B$ aussagen? Veranschaulichen Sie den Sachverhalt durch ein Mengendiagramm!

41.* Bilden Sie mit den in Aufgabe 38 gegebenen Mengen A, B und C
a) $D_1 = A \cap B$, **c)** $D_1 \cap C$,
b) $D_2 = B \cap C$, **d)** $A \cap D_2$.
Vergleichen Sie die Ergebnisse von a) und d)!

Aus der Definition des Durchschnittes (↗ D7) folgt unmittelbar:
Für alle Mengen A, B, C gilt

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Assoziativität)
$A \cap B = B \cap A$ (Kommutativität)

● **42.** Zeigen Sie, daß für die Mengen A, B und C aus Aufgabe 38 bzw. 41 folgende Beziehungen gelten:
a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Die vorstehenden Beziehungen gelten allgemein und bedeuten, daß
a) die Vereinigung **distributiv** bezüglich des Durchschnittes,
b) der Durchschnitt **distributiv** bezüglich der Vereinigung ist.

● **43.*** Es seien A und B zwei Mengen, für die gilt

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
b) $A \cap B = \{4, 6, 9\}$
c) $A \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$
d) $B \cup \{2, 4, 8\} = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Bestimmen Sie zwei Mengen A und B so, daß sie diese Bedingungen erfüllen.

1.6. Anwendungen und Aufgaben

Wir wollen uns nun einige Beispiele ansehen und dabei die bisher behandelten grundlegenden Begriffe und Operationen der Mengenlehre anwenden. Außerdem sollen weitere Aufgaben gelöst werden.
Erstens wollen wir die Menge T der Teilnehmer an dieser Arbeitsgemeinschaft in Ihrer Schule betrachten.

● **44.** Beschreiben Sie diese endliche Menge T
a) durch Angabe ihrer Elemente, **b)** in der Form $T = \{x\colon \mathsf{H}(x)\}$!

45. Bilden Sie folgende Teilmengen von T und beschreiben Sie diese durch Angabe ihrer Elemente:
a) $M = \{x\colon x$ ist ein Mädchen$\}$,
b) $F = \{x\colon x$ ist Mitglied einer Singegruppe$\}$,
c) $S = \{x\colon x$ ist Mitglied der Schulsportgemeinschaft$\}$,
d) $B = \{x\colon x$ ist Mitglied einer BSG$\}$,
e) $C = \{x\colon x$ ist Mitglied eines Sportclubs$\}$,
f) $N = \{x\colon x$ ist Nichtschwimmer$\}$,
g) $A = \{x\colon x$ ist im Monat August geboren$\}$,
h) $H = \{x\colon x$ hat eine Körperhöhe, die größer als 200 cm ist$\}$,
i) $D = \{x\colon x$ hat am Ende der Klasse 8 die Mathematiknote 2$\}$.

46. Welche der Mengen $M, F, \ldots, D$ aus Aufgabe 45 sind
a) die leere Menge, **b)** eine echte Teilmenge von T,
c) gleich der Menge T?

47. Welche dieser Mengen $M, F, \ldots, D$ sind paarweise
a) gleich, **b)** gleichmächtig, **c)** elementfremd?

48. Bestimmen Sie für die Mengen aus Aufgabe 45

a) $M \cap F$	**b)** $M \cup F$	**c)** $M \cup S$	**d)** $M \cap S$
e) $M \cup B$	**f)** $M \cap B$	**g)** $M \cap C$	**h)** $M \cup C$
i) $M \cup A$	**k)** $M \cap A$	**l)** $M \cap D$	**m)** $M \cup D$
n) $M \cup H$	**o)** $M \cap H$		

und stellen Sie Vereinigung bzw. Durchschnitt jeweils durch Aufzählen der Elemente und in der Form $M = \{x\colon \mathsf{H}(x)\}$ dar!

49.* Geben Sie die nachfolgend beschriebenen Mengen als Vereinigung bzw. Durchschnitt der Mengen $M, F, \dots, D$ aus Aufgabe 45 an:
a) alle Mädchen, die Mitglieder einer BSG sind;
b) alle Mitglieder einer Singegruppe, die Mitglieder einer BSG oder der Schulsportgemeinschaft sind;
c) alle Mitglieder einer BSG, die Mitglieder einer Singegruppe oder der Schulsportgemeinschaft sind;
d) alle Mitglieder einer Singegruppe, die sowohl einer BSG als auch der Schulsportgemeinschaft angehören.

Zweitens wollen wir nun Mengen betrachten, die wir im Grundbereich „alle natürlichen Zahlen" bilden können.
Über diesem Grundbereich lassen sich unter anderem folgende Mengen bilden:

■ **B17:**
$M_1 = \{x: n \in N; x = 2n + 1\}$;
$M_2 = \{x: x \in N; n \in N$ und $n > 1$; wenn $n \mid x$, so $n = 1$ oder $n = x\}$;
$M_3 = \{x: x \in N; 11 \mid x\}$;
M_4 sei die Menge der ungeraden Zahlen, die größer als die natürliche Zahl 10^{1000} sind;
M_5 sei die Menge der nicht durch 2 teilbaren natürlichen Zahlen;
M_6 sei die Menge der einstelligen natürlichen Zahlen;
$M_7 = \{11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97\}$;
M_8 sei die Menge der natürlichen Zahlen, die Vielfache von 11 und kleiner als 100 sind;
M_9 sei die Menge der zweistelligen natürlichen Zahlen, deren beide Grundziffern gleich sind;
M_{10} sei die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen, die kleiner als die natürliche Zahl 10^{1000} sind.

● 50.* Stellen Sie fest, welche der vorstehend gebildeten Mengen (M_1 bis M_{10})
a) endliche **b)** unendliche Mengen sind!
Begründen Sie Ihre Feststellung!

51.* Geben Sie für jede der Mengen aus Beispiel 17 noch eine andere Darstellung an!

52. Bilden Sie weitere endliche und unendliche Mengen mit den natürlichen Zahlen als Grundbereich!

53. **a)** Überlegen Sie, wie man zweckmäßigerweise vorgeht, um diejenigen Mengen M_1 bis M_{10} zu bestimmen, die einander gleich sind!
b) Begründen Sie, daß
$M_5 = M_1$; $\quad M_3 \neq M_8$
ist!

54.* Gibt es unter den endlichen Mengen M_6 bis M_{10} gleichmächtige Mengen? Begründung?

Wir wollen nun die Gleichmächtigkeit unendlicher Mengen näher untersuchen. So gelten für die im Beispiel 17 angegebenen Mengen folgende Aussagen:

a) Da $M_1 = M_5$, gilt erst recht $M_1 \sim M_5$.

b) Ferner sind M_1 bzw. M_5 auch der Menge N der natürlichen Zahlen gleichmächtig, denn man kann jeder natürlichen Zahl das um 1 vermehrte Doppelte dieser Zahl zuordnen und umgekehrt:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \ldots & 2n+1 & \ldots \end{array}$$

c) Auch zwischen den Elementen von M_2 und N kann eine umkehrbar eindeutige Zuordnung vorgenommen werden, indem man die Primzahlen der Größe nach geordnet aufschreibt:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & n & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 11 & \ldots & n\text{-te} & \ldots \\ & & & & & & \text{Primzahl} & \end{array}$$

● **55.*** Zeigen Sie, daß
$M_3 \sim N$ und $M_4 \sim N$,
und begründen Sie, daß daraus folgt $M_3 \sim M_4$.

56.* Es läßt sich nun zeigen, daß
$M_1 \sim M_2 \sim M_3 \sim M_4 \sim M_5$.
Beweisen Sie diese Aussage!

Man kann beweisen, daß alle unendlichen Teilmengen der Menge der natürlichen Zahlen mit dieser und untereinander gleichmächtig sind. Dennoch können zwischen ihnen echte Teilmengenbeziehungen bestehen.

■ **B18:** Für die Mengen M_1 und M_4 aus Beispiel 17 gilt
$M_4 \subset M_1$.

● **57.*** Beweisen Sie diese Beziehung unter Verwendung von Definition 2 (↗ S. 14)!

58.* Zeigen Sie, daß für Beispiel 17 weder $M_2 \subset M_1$ noch $M_2 \subseteqq M_1$ gilt!

59.* Gilt in Beispiel 17 **a)** $M_3 \subset M_1$, **b)** $M_3 \subseteqq M_1$?

60.* Untersuchen und begründen Sie, welche der folgenden Aussagen für Mengen aus Beispiel 17 wahr und welche falsch sind:

a) $M_7 \subset M_1$ **b)** $M_8 \subseteqq M_3$ **c)** $M_3 \subset M_9$
d) $M_9 \subset M_3$ **e)** $M_{10} \subset M_5$ **f)** $M_8 \subseteqq M_9$
g) $M_9 \subseteqq M_8$ **h)** $M_{10} \subset M_1$ **i)** $M_{10} \subset M_4$

Wir wollen nun mit einigen der Mengen M_1 bis M_{10} (↗ B17, S. 22) Vereinigungen bzw. Durchschnitte bilden.

■ **B19:**

a) $M_1 \cup M_2$

Mit Ausnahme des Elementes $2 \in M_2$ sind alle anderen Elemente von M_2 auch Elemente von M_1. Demnach ist $M_1 \cup M_2$ eine Menge, die aus dem Element 2 und allen Elementen von M_1 besteht.

b) $M_1 \cap M_2$

Da alle Primzahlen außer 2 ungerade Zahlen sind, ist die Menge aller ungeraden Primzahlen, also aller Primzahlen außer der Primzahl 2, der Durchschnitt dieser beiden Mengen.

c) $M_6 \cup M_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97\}$

d) $M_6 \cap M_7 = \emptyset$

● **61.*** Bilden Sie

a) $M_1 \cup M_3$	**b)** $M_1 \cup M_4$	**c)** $M_1 \cup M_7$
d) $M_3 \cup M_8$	**e)** $M_4 \cup M_{10}$	**f)** $M_7 \cup M_8$
g) $M_7 \cup M_{10}$	**h)** $M_1 \cap M_3$	**i)** $M_1 \cap M_4$
k) $M_1 \cap M_6$	**l)** $M_1 \cap M_7$	**m)** $M_1 \cap M_8$
n) $M_2 \cap M_3$	**o)** $M_3 \cap M_6$	**p)** $M_3 \cap M_8$
q) $M_4 \cap M_{10}$	**r)** $M_7 \cap M_8$	**s)** $M_6 \cap M_{10}$

1.7. Äquivalenzrelationen

Für die Gleichheit und für die Gleichmächtigkeit von Mengen haben wir durch Lösen von Aufgabe 27 bzw. Aufgabe 32 gezeigt, daß diese Beziehungen zwischen Mengen *reflexiv*, *symmetrisch* und *transitiv* sind. Beziehungen zwischen mathematischen Objekten werden mit dem Fachausdruck *Relation* bezeichnet. Stehen die Objekte a und b in der Relation R, so schreibt man dafür aRb.
Relationen, für welche die oben genannten drei Eigenschaften gelten, kommen in der Mathematik häufig vor. Sie heißen **Äquivalenzrelationen.**

▶ **D9: Eine Relation *aRb* heißt *Äquivalenzrelation*, wenn für jedes *a, b, c* gilt:**

(1) *aRa* **(Reflexivität);**

(2) Wenn *aRb, so bRa* **(Symmetrie);**

(3) Wenn *aRb und bRc, so aRc* **(Transitivität).**

Für Äquivalenzrelation verwendet man oft das Zeichen „∼“ und schreibt also beispielsweise $a \sim b$.

■ **B20:** Wir wollen überprüfen, ob die Teilmengenrelation eine Äquivalenzrelation ist. Es ist also für beliebige Mengen M, M_1, M_2, M_3 zu prüfen, ob gilt
(1) $M \subseteqq M$;
(2) wenn $M_1 \subseteqq M_2$, so $M_2 \subseteqq M_1$;
(3) wenn $M_1 \subseteqq M_2$ und $M_2 \subseteqq M_3$, so $M_1 \subseteqq M_3$.
Wie wir beim Lösen von Aufgabe 28 (↗ S. 16) gezeigt haben, gelten (1) und (3), während (2) nicht gilt.
Für die Teilmengenbeziehung gilt also die Eigenschaft der Symmetrie nicht, und demnach ist die Teilmengenbeziehung keine Äquivalenzrelation.

■ **B21:** Auch die Relation „M_1 ist echte Teilmenge von M_2" ist keine Äquivalenzrelation. Diese Relation besitzt nämlich weder die Eigenschaft der Symmetrie noch die Eigenschaft der Reflexivität, wie folgende Überlegung zeigt:
Nach Definition 2 (↗ S. 14) wäre die Menge M eine echte Teilmenge von sich selbst, wenn folgendes gilt: „Jedes Element von M ist Element von M, und es gibt (mindestens) ein Element in M, das nicht Element von M ist." Der zweite Teil dieser Aussage widerspricht aber dem ersten Teil. Die Annahme, M_1 wäre echte Teilmenge von sich selbst, führt also zu einem Widerspruch und kann daher nicht aufrecht erhalten werden.

● **62.*** Zeigen Sie, daß auch **nicht** gilt:
Wenn $M_1 \subset M_2$, so $M_2 \subset M_1$!

Wir wollen nunmehr Relationen, die in endlichen oder unendlichen Mengen gelten, daraufhin untersuchen, ob sie Äquivalenzrelationen sind. Dabei schließen wir die leere Menge aus.

■ **B22:** Als Grundbereich wählen wir die Menge M der Schüler Ihrer Schule. Als Variable für Elemente von M — also Schüler Ihrer Schule — benutzen wir nachfolgend s, s_1, s_2, s_3. Ist dann die Relation R „s_1 geht in dieselbe Klasse wie s_2" eine Äquivalenzrelation?
Offensichtlich gilt für jedes s, s_1, s_2, s_3:
(1) sRs, d. h.: Jeder Schüler geht in dieselbe Klasse wie er selbst.
(2) Wenn s_1Rs_2, so s_2Rs_1, d. h.: Wenn s_1 in dieselbe Klasse geht wie s_2, so geht auch s_2 in dieselbe Klasse wie s_1.
(3) Wenn s_1Rs_2 **und** s_2Rs_3, so s_1Rs_3, d. h.: Wenn s_1 in dieselbe Klasse geht wie s_2 **und** s_2 in dieselbe Klasse geht wie s_3, so geht auch s_1 in dieselbe Klasse wie s_3.
In M ist also die Relation R „s_1 geht in dieselbe Klasse wie s_2" eine Äquivalenzrelation.

■ **B23:** In der Menge M der Schüler Ihrer Schule gibt es noch weitere Äquivalenzrelationen wie etwa

a) s_1 ist am gleichen Tag geboren wie s_2.

b) s_1 hat in diesem Kalenderjahr am gleichen Wochentag Geburtstag wie s_2.[1])

c) s_1 hat in diesem Schuljahr am gleichen Wochentag Geburtstag wie s_2.[1])

d) s_1 hat den gleichen Familiennamen wie s_2.

● **63.** Weisen Sie nach, daß die in Beispiel 23 genannten Relationen in M Äquivalenzrelationen sind!

● **64.** Bilden Sie weitere Äquivalenzrelationen in M!

Natürlich lassen sich in der Menge M der Schüler Ihrer Schule auch Relationen bilden, die keine Äquivalenzrelationen sind.

■ **B24: a)** s_1 ist ein Bruder von s_2.

b) s_1 hatte im letzten Zeugnis eine bessere Mathematiknote als s_2.

c) s_1 besiegt beim Tischtennisturnier „Alle gegen alle" s_2.

● **65.*** Begründen Sie, warum die in Beispiel 24 angegebenen Relationen keine Äquivalenzrelationen in M sind!

66. Bilden Sie weitere Relationen in M, die keine Äquivalenzrelationen sind!

67.* Grundbereich sei die Menge der Kraftfahrzeuge, die zu einem bestimmten Zeitpunkt zum Fuhrpark eines volkseigenen Betriebes gehören. Welche der folgenden Relationen R_1 bis R_5 sind Äquivalenzrelationen, welche nicht? (Begründung?)

R_1: a hat dieselbe Motorleistung wie b.
R_2: a hat eine höhere Nutzlast als b.
R_3: a hat dasselbe Herstellungsjahr wie b.
R_4: a ist b im Anzugsvermögen überlegen.
R_5: a hat einen geringeren Kraftstoffverbrauch als b.

Wir wollen uns nun Aufgaben und Beispielen aus der Mathematik zuwenden.

● **68.*** Grundbereich sei die Menge N_2 der zweistelligen natürlichen Zahlen n. Welche der nachstehend genannten Relationen sind Äquivalenzrelationen in N_2? Begründen Sie ihre Entscheidungen!

---

[1]) Gibt es im betrachteten Kalender- bzw. Schuljahr keinen 29. Februar, so soll der 28. Februar für die an einem Schalttag Geborenen als Geburtstag gelten.

a) n_1 hat in der Einerstelle dieselbe Grundziffer wie n_2.
b) n_1 hat in der Zehnerstelle dieselbe Grundziffer wie n_2.
c) n_2 hat bei Division durch 11 den gleichen Rest wie n_2.
d) n_1 hat bei Division durch 16 den gleichen Rest wie n_2.
e) $n_1 > n_2$
f) $n_1 = 3 \cdot n_2$
g) n_1 ist teilerfremd zu n_2.
h) n_1 hat dieselbe Quersumme wie n_2.

Auch aus der Geometrie kennen Sie bereits zahlreiche Relationen, von denen viele ebenfalls Äquivalenzrelationen sind.

■ **B25:** In der Menge G aller Geraden $g, h, l, \ldots$ einer Ebene ist die Relation „g ist parallel h“ ($g \parallel h$) eine Äquivalenzrelation, denn es gilt für jedes g und h
(1) $g \parallel g$ (jede Gerade ist nach der Definition der Parallelität zu sich selbst parallel);
(2) wenn $g \parallel h$, so $h \parallel g$;
(3) wenn $g \parallel h$ **und** $h \parallel l$, so $g \parallel l$.

■ **B26:** Andererseits ist „$g \perp h$“ (g steht senkrecht auf h) in der Menge G aus Beispiel 25 keine Äquivalenzrelation, weil die Relation des Senkrechtstehens weder reflexiv noch transitiv, sondern lediglich symmetrisch ist.

● 69.* **a)** Machen Sie sich diese Aussagen über die Relation „$g \perp h$“ an Hand einfacher Skizzen klar!
b) Beweisen Sie, daß in G gilt: Wenn $g \perp h$ **und** $h \perp k$, so $g \parallel k$!

70.* Untersuchen Sie, ob die folgenden Relationen zwischen den Geraden einer Ebene Äquivalenzrelationen sind! Begründen Sie Ihre Ergebnisse!
a) g ist nicht parallel zu h.
b) g schneidet h.

71.* S sei die Menge aller Strecken $s, t, u, \ldots$ einer Ebene.
a) Zeigen Sie, daß „s ist kongruent t“ eine Äquivalenzrelation ist!
b) Geben Sie eine (sinnvolle) Relation zwischen Strecken an, die keine Äquivalenzrelation ist!

72.* D sei die Menge aller Dreiecke $d, e, f, \ldots$ einer Ebene. Welche der folgenden Relationen sind in D Äquivalenzrelationen?
a) d ist umfangsgleich e.
b) d ist flächeninhaltsgleich e.
c) d ist kongruent e.
d) d ist ähnlich e.
e) d hat einen größeren Flächeninhalt als e.
f) d hat einen kleineren Umfang als e.

1.8. Klasseneinteilungen

Wir wollen uns nunmehr etwas ausführlicher mit Äquivalenzrelationen beschäftigen und betrachten dazu noch einmal einige der bisher behandelten Beispiele. Wir waren in Beispiel 22 (↗ S. 25) von der Menge M der Schüler, die derzeitig Ihre Schule besuchen, ausgegangen und hatten nachgewiesen, daß in ihr die Relation „s_1 geht in dieselbe Klasse wie s_2" eine Äquivalenzrelation ist. Durch die Äquivalenzrelation in M wird die Menge M in bestimmte Teilmengen — die Schulklassen — eingeteilt. Für die Menge der Schulklassen gelten folgende Eigenschaften:

(1) Keine Schulklasse ist die leere Menge, d. h., es gibt keine Klasse, der nicht mindestens ein Schüler angehört.
(2) Jedes Paar von Schulklassen ist elementfremd, d. h., es gibt keinen Schüler, der (gleichzeitig) zwei verschiedenen Klassen angehört.
(3) Die Vereinigungsmenge aller Schulklassen ist gleich der Menge M, d. h., jeder Schüler (jedes Element aus M) gehört mindestens einer Klasse an.

Durch eine Äquivalenzrelation wird also eine nicht leere Menge M in bestimmte Teilmengen aufgeteilt. Diese Teilmengen von M werden — auch in der Mathematik ganz allgemein — **Klassen** genannt. Die durch eine Äquivalenzrelation R bewirkte Einteilung einer Menge heißt eine **Zerlegung von M nach R** oder eine **Klasseneinteilung von M.**

▶ **D10: Eine *Zerlegung* oder *Klasseneinteilung* einer Menge M nach einer Äquivalenzrelation R ist eine Einteilung von M in Teilmengen von M. Diese Teilmengen heißen *Klassen*.**
Für das System der Klassen müssen folgende Eigenschaften gelten:
(1) Keine Klasse ist die leere Menge,
und
(2) das System dieser Klassen ist elementfremd, d. h., für zwei beliebige Klassen K_i und K_j gilt $K_i \cap K_j = \emptyset$, falls $i \neq j$,
und
(3) die Vereinigung aller Klassen ist gleich der Menge M.

Wir wollen jetzt nachweisen, daß auch die in Beispiel 23 b) (↗ S. 26) genannte Äquivalenzrelation eine Zerlegung in M bewirkt.

■ **B27:** Die Äquivalenzrelation „. . . hat in diesem Kalenderjahr am gleichen Wochentag Geburtstag wie . . ." führt in der Tat zu einer Zerlegung von M in höchstens 7 Klassen, nämlich in die Klassen der „Montagsgeburtstagler", der „Dienstagsgeburtstagler" usw. bis zur Klasse der „Sonntagsgeburtstagler", wobei es jede dieser Klassen nur dann gibt, wenn mindestens ein Schüler an dem betreffenden Wochentag Geburtstag hat. (Deshalb war es oben auch notwendig, von „höchstens 7 Klassen" und nicht von „genau 7 Klassen" zu sprechen.)

Diese Einteilung in höchstens 7 Klassen hat die Eigenschaften (1) bis (3) (↗ D10, S. 28), die eine Klasseneinteilung definieren, denn:

(1) Es werden nur solche Klassen gebildet, die nicht leer sind, d. h. an denen mindestens 1 Schüler Geburtstag hat.
(2) Kein Schüler kommt in 2 oder mehr Klassen, weil er in einem Kalenderjahr nicht an 2 oder mehr verschiedenen Wochentagen Geburtstag haben kann.
(3) Jeder Schüler wird von der Klasseneinteilung erfaßt, denn jeder Schüler hat im Verlauf des Kalenderjahres an einem bestimmten Wochentag Geburtstag, wenn für Schalttaggeborene die in Beispiel 23b) (↗ S. 26) getroffene Vereinbarung gilt.

● **73.** Zeigen Sie, daß jede der in Beispiel 23 (↗ S. 26) unter a), c) und d) genannten Äquivalenzrelationen eine Klasseneinteilung von M erzeugt!

Nun soll die in Aufgabe 68a) (↗ S. 26f.) genannte Äquivalenzrelation in der Menge N_2 der zweistelligen natürlichen Zahlen n daraufhin untersucht werden, ob sie jeweils eine Klasseneinteilung in N_2 erzeugt.

■ **B28:** Die Äquivalenzrelation „n_1 hat in der Einerstelle dieselbe Grundziffer wie n_2" ist in N_2 eine Klasseneinteilung:

$$\begin{aligned} K_1 &= \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}\ , \\ K_2 &= \{11, 21, 31, \dots, 91\}\ , \\ &\ \ \vdots \\ K_{10} &= \{19, 29, 39, \dots, 99\}\ . \end{aligned}$$

Diese 10 Klassen sind durchweg Neunermengen, die den Eigenschaften (1) bis (3) der Definition der Klasseneinteilung (↗ D10, S. 28) genügen.
Es gilt nämlich offensichtlich für **alle** K_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 10$):
(1) $K_i \neq \emptyset$,
(2) $K_i \cap K_k = \emptyset$, wenn $i \neq k$,
(3) $K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 \cup K_5 \cup K_6 \cup K_7 \cup K_8 \cup K_9 \cup K_{10} = N_2$.

● **74.** Zeigen Sie, daß die unter b), c), d) und h) in Aufgabe 68 (↗ S. 27) genannten Äquivalenzrelationen ebenfalls je eine Klasseneinteilung in der Menge N_2 der zweistelligen Zahlen n erzeugen, und beschreiben Sie diese!

Durch die in Aufgabe 68 unter c) genannte Äquivalenzrelation werden Klassen erzeugt. Solche Klassen heißen **Restklassen**, weil alle in einer Klasse enthaltenen Elemente bezüglich der Division durch 11 „restgleich" sind. Wir kommen auf sie noch ausführlich in Kapitel 2 zurück.
Auch in der (unendlichen) Menge N der natürlichen Zahlen erzeugt die Äquivalenzrelation „restgleich bezüglich der Division durch 11" eine Klasseneinteilung von N in 11 Restklassen. Jede dieser Restklassen ist eine unendliche Teilmenge der natürlichen Zahlen und ihr gleichmächtig.

Es ließe sich beweisen, daß jede Äquivalenzrelation in einer nichtleeren Menge M eine Klasseneinteilung von M erzeugt. Auf diesen Beweis müssen wir hier jedoch verzichten.

● **75.** Zeigen Sie, daß jede der in Abschnitt 1.7. (↗ S.25ff.) betrachteten Äquivalenzrelationen eine Klasseneinteilung erzeugt!

Wir wollen nun untersuchen, ob die betrachteten Relationen, die keine Äquivalenzrelationen sind, ebenfalls Klasseneinteilungen erzeugen.

■ **B29:** Es sei die Relation „$n_1 > n_2$" in der Menge N_2 der zweistelligen natürlichen Zahlen n untersucht. Auch hier wird eine Einteilung von N_2 vorgenommen, d. h., es entstehen Teilmengen von N_2, nämlich

$T_{99} = \{98, 97, 96, \ldots, 11, 10\}$, denn 99 ist größer als jedes der Elemente von T_{99};

$T_{98} = \{97, 96, \ldots, 11, 10\}$, denn 98 ist größer als jedes der Elemente der Menge T_{98};

$T_{11} = \{10\}$, denn $11 > 10$;

$T_{10} = \emptyset$, denn 10 ist nicht größer als irgendein Element aus N_2.

Daß die durch die Relation „$n_1 > n_2$" bewirkte Einteilung **keine** Klasseneinteilung ist, ist bereits an T_{99} und T_{98} zu erkennen. Diese beiden Teilmengen sind nicht elementfremd, vielmehr gilt: $T_{99} \cap T_{98} = T_{98}$, und T_{98} ist nicht die leere Menge. Die Bedingung (2) aus Definition 10 (↗ S. 28) ist also nicht erfüllt.

Entsprechend läßt sich zeigen, daß alle Relationen in M, die keine Äquivalenzrelationen sind, keine Klasseneinteilung von M erzeugen.

● **76.** Führen Sie diesen Nachweis für die in den Aufgaben 67., 68., 70. und 72. vorkommenden Relationen, die keine Äquivalenzrelationen sind!

Es erhebt sich nun die Frage, ob auch umgekehrt durch eine gegebene Klasseneinteilung einer Menge M eine Äquivalenzrelation bestimmt ist. Das läßt sich beweisen, worauf wir hier allerdings verzichten müssen. Wir betrachten lediglich einige Beispiele.

■ **B30:** Die drei Mengen

$K_1 = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$,

$K_2 = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19\}$,

$K_3 = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20\}$

stellen offensichtlich eine Klasseneinteilung der Menge N_1 der natürlichen Zahlen von 0 bis 20 dar, denn es gilt

(1) $K_1 \neq \emptyset$, $K_2 \neq \emptyset$, $K_3 \neq \emptyset$,

(2) $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, $K_1 \cap K_3 = \emptyset$, $K_2 \cap K_3 = \emptyset$,

(3) $K_1 \cup K_2 \cup K_3 = N_1$.

K_1 ist offensichtlich die Restklasse „Rest Null bei Division durch 3", K_2 die Restklasse „Rest 1 bei Division durch 3" und K_3 die Restklasse „Rest 2 bei Division durch 3". Demnach lautet eine durch die gegebene Klasseneinteilung von N_1 bestimmte Äquivalenzrelation „n_1 hat bei Division durch 3 denselben Rest wie n_2".

Man kann nun zeigen, daß es keine weitere Äquivalenzrelation in N_1 gibt, die durch die gegebene Klasseneinteilung bestimmt wird. Auch auf diesen Nachweis müssen wir hier verzichten.

■ **B31:** Gegeben sei folgende Klasseneinteilung der Menge M aller Schüler Ihrer Schule

$K_1 = \{x: x$ hat im Januar Geburtstag$\}$,
$K_2 = \{x: x$ hat im Februar Geburtstag$\}$,
. . .
$K_{12} = \{x: x$ hat im Dezember Geburtstag$\}$,

wobei vorausgesetzt wird, daß keine dieser Mengen leer ist. Offensichtlich lautet dann die durch diese Klasseneinteilung bestimmte Äquivalenzrelation „. . . hat im gleichen Monat Geburtstag wie . . .".

● **77.** Die Mengen

$N_g = \{x: n \in N; x = 2n\}$,
$N_u = \{x: n \in N; x = 2n + 1\}$

sind nicht leer, aber elementfremd, und ihre Vereinigung ist die Menge N der natürlichen Zahlen. Welche Äquivalenzrelation in N wird durch diese Klasseneinteilung von N bestimmt?

Die vorstehend erhaltenen Ergebnisse lassen sich zu folgendem **Hauptsatz über Äquivalenzrelationen** zusammenfassen:

▶ **Jede Äquivalenzrelation in der nicht leeren Menge M erzeugt genau eine Zerlegung von M, und durch jede Zerlegung von M wird genau eine Äquivalenzrelation bestimmt.**

Lösungen — Kapitel 1

2. Wahre Aussagen sind **a)**, **c)**, **e)**
3. **a)**, **c)**, **e)**
4. Primzahlen
5. $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$
6. Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm
7. Kugeloberfläche
8. Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$
9. Äquator
10. Rechtecke
11. $Z = \{12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, \ldots, 99\}$
12. $H = \{\text{Be, Mg, Ca, Sr, Ba, Ra}\}$
15. $A = \{3, 4, 5, 6\}$
16. **a)** $B_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
    b) $B_2 = \{-7, 7\}$
    c) $B_3 = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$
    d) $B_4 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$
    e) $B_5 = \{1\}$
    f) $B_6 = \{0\}$
17. **a)** $A = \{n : n \in N;\ n > 10\}$
    b) $B = \{x : x \in N;\ 3 \nmid x\}$ oder $B = \{x : x = 3n \pm 1,\ n \in N\}$
    c) $C = \{a : a \in R^*;\ a < 1\}$
    d) $D = \{d : d \in R^*;\ 10 < x < 15\}$
18. **a)** D ist die Menge aller durch 7 teilbaren natürlichen Zahlen d.
    b) E ist die Menge aller gebrochenen Zahlen m, die größer als 1 sind.
    c) F ist die Menge aller rationalen Zahlen x mit $x < 0$ oder $x > 1$.
19. **a)** gerade Zahl; 53 **b)** Primzahl; 9
    c) Quadratzahl; 67 **d)** n-Eck; „Kreis“
    e) Hauptstadt eines sozialistischen Staates; „London“
    f) Verb; „blau“
    g) Säugetier; „Adler“
20. **a)** $+2, -3, +\frac{9}{4}$ **b)** 6, 8, 16, 36
    c) $-\frac{1}{2}, \frac{5}{7}, -\frac{3}{5}, 0$ **d)** $-2, \frac{4}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{11}{4}$
    e) 17, 53, 97
23. **a)** A ist nicht Teilmenge von M, $A \not\subset M$
    b) A ist Teilmenge von M, $A \subset M$
    c) A ist Teilmenge von M, $A \subset M$
    d) $A \subseteqq M$
28. Die Beziehung $A \subseteqq B$ ist
    reflexiv, denn es gilt $A \subseteqq A$,
    transitiv, denn aus $A \subseteqq B$ und $B \subseteqq C$ folgt $A \subseteqq C$,
    nicht symmetrisch, denn aus $A \subseteqq B$ folgt nicht $B \subseteqq A$.

29. a) $M = \{a, b, c\}$
$M_1 = \{a\}$
$M_2 = \{b\}$
$M_3 = \{c\}$
$M_4 = \{a, b\}$
$M_5 = \{a, c\}$
$M_6 = \{b, c\}$
($M_7 = \emptyset$)[1]

b) $Z = \{\bigcirc, \square, \triangle, \triangledown\}$
$Z_1 = \{\bigcirc\}$
$Z_2 = \{\square\}$
$Z_3 = \{\triangle\}$
$Z_4 = \{\triangledown\}$
$Z_5 = \{\bigcirc, \square\}$
$Z_6 = \{\bigcirc, \triangle\}$
$Z_7 = \{\bigcirc, \triangledown\}$
$Z_8 = \{\square, \triangle\}$
$Z_9 = \{\square, \triangledown\}$
$Z_{10} = \{\triangle, \triangledown\}$
$Z_{11} = \{\bigcirc, \square, \triangle\}$
$Z_{12} = \{\bigcirc, \triangle, \triangledown\}$
$Z_{13} = \{\bigcirc, \square, \triangledown\}$
$Z_{14} = \{\square, \triangledown, \triangle\}$
($Z_{15} = \emptyset$)[1]

c) $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
D_1 bis D_5 Einermengen
D_6 bis D_{15} Zweiermengen
D_{16} bis D_{25} Dreiermengen
D_{26} bis D_{30} Vierermengen
($D_{31} = \emptyset$)[1]

30. $a = b = c$

34. b) die Menge aller Rechtecke, deren Diagonalen nicht gleich lang sind
d) die Menge aller rechtwinkligen Dreiecke, für die das Hypothenusenquadrat größer ist als die Summe der Kathetenquadrate

35. Die Menge aller rechtwinkligen Dreiecke, für die das Hypotenusenquadrat nicht gleich der Summe der Kathetenquadrate ist, ist leer.

36. A ist eine Einermenge mit dem Element „0", B ist die leere Menge, d. h., sie enthält kein Element.

37. Aus $A \cup B = A$ folgt $B \subseteq A$ (↗ Bild 8).
Aus $A \cup B = B$ folgt $A \subseteq B$ (↗ Bild 9).

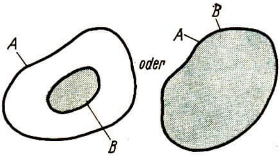


Bild 8

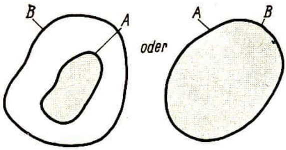
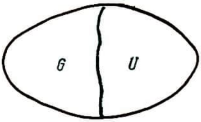


Bild 9

38. $V_1 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ $\qquad V_2 = \{2, 3, 4, 6, 7, 9\}$
$V_1 \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$; $\qquad A \cup V_2 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$
$$V_1 \cup C = A \cup V_2$$

39. $D = \emptyset$ (↗ Bild 10)



$D = G \cap U = \emptyset$

Bild 10

[1]) Die *leere Menge* ist an dieser Stelle noch nicht behandelt, sie ist eine Teilmenge jeder Menge.

40. $D = A$ (↗ Bild 11)

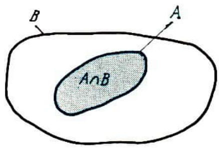


Bild 11 $D = A$

41. a) $D_1 = \{2, 3\}$, **b)** $D_2 = \{3, 6\}$
c) $D_1 \cap C = \{3\}$, **d)** $A \cap D_2 = \{3\}$, $\boldsymbol{D_1 \cap C = A \cap D_2}$

43. Aus **a)** folgt, daß 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 Elemente von A oder B (oder beiden) sind.
Aus **b)** folgt, daß genau 4, 6, 9 Elemente von A und B sind.
Aus **c)** folgt, daß 1, 6, 8, 9 Elemente von A und 2, 7 nicht Elemente von A sind.
Aus **b)** folgt, daß 5, 6, 7, 9 Elemente von B und 1, 3 nicht Elemente von B sind.
Damit ergibt sich nur eine Lösung, nämlich
$A = \{1, 3, 4, 6, 8, 9\}$;
$B = \{2, 4, 5, 6, 7, 9\}$.

49. a) $M \cap B$ **b)** $F \cap (B \cup S)$ **c)** $B \cap (F \cup S)$ **d)** $F \cap (B \cap S)$

50. a) Endliche Mengen sind: $M_6, M_7, M_8, M_9, M_{10}$
b) Unendliche Mengen sind: M_1, M_2, M_3, M_4, M_5

51. $M_1 = \{x : x \in N; 2 \nmid x\}$
oder
M_1 ist die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen;
M_2 ist die Menge aller Primzahlen;
M_3 ist die Menge der durch 11 teilbaren natürlichen Zahlen
oder
$M_3 = \{x : n \in N$ und $x = 11n\}$;
$M_4 = \{x : x \in N$ und $x > 10^{1000}$ und $n \in N$ und $x = 2n + 1\}$
oder
$M_4 = \{x : x \in N; x > 10^{1000}$ und $2 \nmid x\}$;
$M_5 = \{x : x \in N; 2 \nmid x\}$;
$M_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
M_7 ist die Menge der zweistelligen Primzahlen;
$M_8 = \{x : n \in N$ und $x = 11n$ und $x < 100\}$
oder
$M_8 = \{0, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$;
$M_9 = \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$
oder
$M_9 = \{x : n \in N$ und $n \neq 0; x < 100$ und $x = 11n\}$;
$M_{10} = \{x : x \in N$ und $x < 10^{1000}$ und $2 \nmid x\}$.

54. $M_6 \sim M_8$, denn sowohl M_6 als auch M_8 enthalten genau 10 Elemente.

55. Wegen

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 0 & 11 & 22 & 33 & 44 & \dots & 11 \cdot n & \dots \end{array}$$

ist $M_3 \sim N$.

Wegen

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & & n & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 10^{1000} + 1 & 10^{1000} + 3 & 10^{1000} + 5 & \dots & 10^{1000} + 2n + 1 & \dots \end{array}$$

ist $M_4 \sim N$.

Laut Ergebnis der Aufgabe 32 ist die Beziehung „gleichmächtig" transitiv, d. h. es gilt:

Wenn $M_3 \sim N$ und $N \sim M_4$, so $M_3 \sim M_4$.

Da die Beziehung „gleichmächtig" auch symmetrisch ist (↗ Lösung von Aufgabe 32), folgt aus $M_4 \sim N$ auch $N \sim M_4$. Demnach folgt aus $M_3 \sim N$ und $M_4 \sim N$ auch $M_3 \sim M_4$.

56. Wegen $M_1 \sim N$, $M_2 \sim N$, ..., $M_5 \sim N$ sowie der Symmetrie und der Transitivität der Beziehung „gleichmächtig" ist diese Aussage wahr.

57. Nach Definition 1 (↗ S. 14) gilt $M_4 \subseteqq M_1$. Ferner gilt $3 \in M_1$ und $3 \notin M_4$. Dann gilt nach Definition 2 (↗ S. 14) die Beziehung $M_4 \subset M_1$.

58. Wegen $2 \in M_2$ und $2 \notin M_1$ gilt nach Definition 2 bzw. Definition 1 weder $M_2 \subset M_1$ noch $M_2 \subseteqq M_1$.

59. Weil $22 \in M_3$ und $22 \notin M_1$ gilt weder $M_3 \subset M_1$ noch $M_3 \subseteqq M_1$.

60. **a), b), d), e), g), h)** sind wahre, alle anderen sind falsche Aussagen.

61. **a)** $M_1 \cup M_3 = \{x\colon n \in N \text{ und } x = 2n + 1 \text{ oder } 22 \mid x\}$
$= \{0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 22, 23, \dots\}$

b) $M_1 \cup M_4 = M_1 = \{x\colon n \in N \text{ und } x = 2n + 1\}$

c) $M_1 \cup M_7 = M_1$ **d)** $M_3 \cup M_8 = M_3$ **e)** $M_4 \cup M_{10} = M_1$

f) $M_7 \cup M_8 = \{0, 11, 13, 17, 19, 22, 23, 29, 31, 33, 37, 41, 43, 44, 47, 53, 55, 59, 61, 66, 67, 71, 73, 77, 79, 83, 88, 89, 97, 99\}$

g) $M_7 \cup M_{10} = M_{10}$ **h)** $M_1 \cap M_3 = \{x\colon x \in N \text{ und } x = 11 \cdot (2n + 1)\}$

i) $M_1 \cap M_4 = M_4$ **k)** $M_1 \cap M_6 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

l) $M_1 \cap M_7 = M_7$ **m)** $M_1 \cap M_8 = \{11, 33, 55, 77, 99\}$

n) $M_2 \cap M_3 = \{11\}$ **o)** $M_3 \cap M_6 = \{0\}$

p) $M_3 \cap M_8 = M_8$ **q)** $M_4 \cap M_{10} = \emptyset$

r) $M_7 \cap M_8 = \{11\}$ **s)** $M_6 \cap M_{10} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

62. Nach Definition 2 (↗ S. 14) bedeutet

a) $M_1 \subset M_2$: Jedes Element von M_1 ist Element von M_2, und es gibt (mindestens) ein Element in M_2, das nicht Element von M_1 ist.

b) $M_2 \subset M_1$: Jedes Element von M_2 ist Element von M_1, und es gibt (mindestens) ein Element in M_1, das nicht Element von M_2 ist.

Demnach ist $M_1 \subset M_2$ **und** $M_2 \subset M_1$ miteinander unvereinbar.

65. **a)** nicht reflexiv

b) nicht reflexiv und nicht symmetrisch

c) nicht reflexiv, nicht symmetrisch, nicht transitiv

67. R_1 und R_3 sind Äquivalenzrelationen, R_2, R_4 und R_5 nicht.

68. Äquivalenzrelationen liegen vor bei **a)**, **b)**, **c)**, **d)**, **h)**, bei **e)**, **f)** und **g)** dagegen nicht.

69. **b)** Aus Klasse 6 kennen wir den Satz:
Wenn Wechselwinkel an sich schneidenden Geraden kongruent sind, so sind die Geraden parallel. (↗ [13g])
Hier sind die Wechselwinkel kongruent, da beide 90° groß sind. Folglich sind die Geraden g und k parallel.

70. **a)** und **b)** sind keine Äquivalenzrelationen.

71. **a)** 1. $s \cong s$, denn jede Strecke ist zu sich selbst kongruent.
2. Wenn $s \cong t$, so $t \cong s$, denn zu jeder Verschiebung v, die s in t überführt, gibt es eine entgegengesetzte Verschiebung v^{-1}, die t in s überführt.
3. Wenn $s \cong t$ und $t \cong u$, so $s \cong u$, denn zu jeder Nacheinanderausführung von zwei Verschiebungen, durch die s in t und t in u überführt werden, gibt es eine *resultierende* Verschiebung, die s in u überführt.

b) $s \perp u$, denn diese Beziehung ist weder reflexiv noch transitiv (↗ B 26)

72. **a)**, **b)**, **c)**, **d)** sind Äquivalenzrelationen, **e)** und **f)** nicht.

2 Arbeiten mit Zahlenmengen

2.1. Einführung und Wiederholung

■ **B1:** Auf welchen Wochentag fällt der 1. Januar des Jahres 2000?
Beim Lösen dieser Aufgabe können wir beispielsweise davon ausgehen, daß der 1. Januar 1978 ein Sonntag ist. Da das Jahr 1978 365 Tage, also 52 Wochen und 1 Tag hat, ist der 1. Januar 1979 ein Montag. Entsprechend ergibt sich, daß der 1. Januar 1980 ein Dienstag ist. Der 1. Januar 1981 ist jedoch kein Mittwoch, sondern ein Donnerstag, denn das Jahr 1980 hat als Schaltjahr 52 Wochen und 2 Tage. Die weiteren Überlegungen schreiben wir uns folgendermaßen übersichtlich auf:

Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
						78
79	80		81	82	83	84
	85	86	87	88		89
90	91	92		93	94	95
96		97	98	99	2000	

Der 1. Januar 2000 ist also ein Sonnabend.

In diesem 2. Kapitel werden wir u. a. ein Verfahren kennenlernen, um Aufgaben wie diese wesentlich schneller lösen zu können (↗ S. 70f.).
Es sollen in folgendem vor allem Eigenschaften von Mengen untersucht werden, deren Elemente Zahlen sind. Aber wir wollen auch unsere in Kapitel 1 erworbenen Kenntnisse über Mengen verwenden, um neue Fragen aufzuwerfen und zu beantworten. Solche Fragen sind z. B.:

— *Was sind natürliche Zahlen?*
— *Wie hängen Begriffsbildungen zur Teilbarkeit natürlicher Zahlen (z. B. gemeinsame Teiler, gemeinsames Vielfaches von natürlichen Zahlen) mit den Begriffsbildungen der Mengenlehre zusammen?*

— *Welche Rolle spielen Begriffsbildungen der Mengenlehre bei den Zahlenbereichserweiterungen?*

Einige Aufgaben zur Wiederholung:
Unter den Beispielen in Kapitel 1 gibt es zahlreiche Mengen, deren Elemente Zahlen sind.

● **1.** Geben Sie einige Zahlenmengen an, die in Kapitel 1 vorkommen, und stellen Sie jede dieser Mengen mindestens in zwei verschiedenen Formen dar!

2. Bilden Sie weitere Zahlenmengen, und schreiben Sie diese in jenen Formen auf, die Sie in Kapitel 1 kennengelernt haben!

3. Aus dem Mathematikunterricht sind Ihnen zahlreiche Mengen bekannt, deren Elemente Zahlen sind. Beispielsweise kennen Sie
(1) die Menge N aller natürlichen Zahlen,
(2) die Menge R^* aller gebrochenen Zahlen,
(3) die Menge R aller rationalen Zahlen,
(4) die Menge P aller reellen Zahlen. (↗ [13 g], S. 19ff.)
Geben Sie für jede der Mengen N, R^*, R, P
a) je fünf Elemente,
b) eine unendliche, aber echte Teilmenge an!

4. Erläutern Sie, daß es sich bei der
a) Lösungsmenge (einer Gleichung bzw. Ungleichung)
b) Menge der Teiler einer natürlichen Zahl n
um Zahlenmengen handelt!

2.2. Mengen und natürliche Zahlen

Wir wollen nun genauer untersuchen, was die natürlichen Zahlen sind, und dabei unsere Kenntnisse aus Kapitel 1 anwenden. Dazu erinnern wir uns zunächst, daß uns aus dem Mathematikunterricht nicht nur die unendliche Menge aller natürlichen Zahlen bekannt ist, sondern auch die **Folge** der natürlichen Zahlen. Das führt dazu, daß wir den Begriff „natürliche Zahlen" in zwei verschiedenen Bedeutungen benutzen:
Erstens kann man mit den natürlichen Zahlen **Anzahlen** kennzeichnen, z. B. 4 Bäume, 115 an einer Übung teilnehmende Panzer, 15532 Zuschauer bei einem Fußballspiel. Eine als Anzahl verwendete natürliche Zahl wird in der Mathematik **endliche Kardinalzahl** genannt. Jedes der genannten Beispiele ist eine endliche Menge, und die jeweilige Kardinalzahl (4 bzw. 115 bzw. 15532) beschreibt deren Mächtigkeit, d. h., sie gibt die Anzahl der Elemente der betreffenden Menge an.

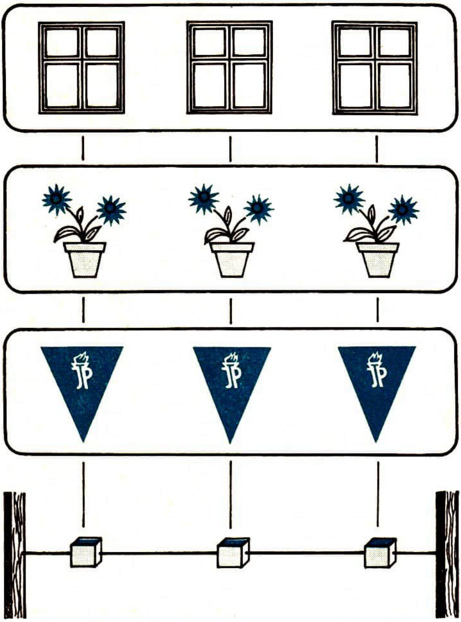
Zweitens kann man unter Verwendung der Folge der natürlichen Zahlen die Elemente jeder endlichen Menge „durchnumerieren", d. h., man ordnet jedem Element dieser Menge genau eine natürliche Zahl zu, und zwar so, daß nacheinander die Zahlen 1, 2, 3, ... als zugeordnete Zahlen verwendet werden, bis alle Elemente genau eine „Nummer" erhalten haben. Diese Nummern sind zwar auch natürliche Zahlen, kennzeichnen aber keine Anzahlen, sondern die Stellung jedes Elements in der vorgenommenen Ordnung der Elemente. Man nennt die so verwendeten natürlichen Zahlen **Ordinalzahlen** und schreibt meist — zur Unterscheidung von den Kardinalzahlen — hinter ihrer Zifferndarstellung einen Punkt.

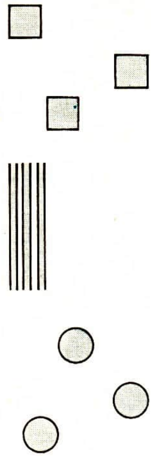
● **5.** Angenommen, der Leiter Ihrer Arbeitsgemeinschaft übergibt Ihnen ein Blatt mit 10 mathematischen Aufgaben. Erläutern Sie — unter Verwendung von *Kardinalzahl* und *Ordinalzahl* — den Unterschied zwischen den folgenden dann möglichen beiden Aufforderungen:
a) *Lösen Sie die zehn Aufgaben!*
b) *Lösen Sie die zehnte Aufgabe!*

2.3. Endliche Kardinalzahlen als Klassen gleichmächtiger Mengen

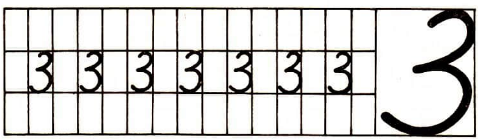
Wir wollen nun die Frage klären, was eine endliche Kardinalzahl ist. Dazu betrachten wir zunächst ein Beispiel aus dem Mathematikunterricht der 1. Klasse.

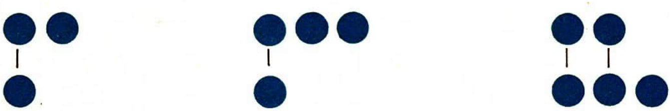
■ **B2:** Auf Seite 40 ist die Seite 8 aus dem Lehrbuch Mathematik, Klasse 1 (↗ [13a]) wiedergegeben. Auf dieser Seite wird die Kardinalzahl 3 eingeführt. Dazu wird folgendermaßen vorgegangen: Es werden Mengen von verschiedenen Objekten dargestellt, die untereinander gleichmächtig sind, nämlich lauter Dreiermengen. Von den Unterschieden in der Art der Objekte wird abgesehen, d. h., es wird **abstrahiert**. Als Gemeinsamkeit bleibt dann nur, daß diese Mengen sämtlich gleichmächtig der Menge $M = \{\bigcirc, \bullet, \odot\}$ sind. Für diese Gemeinsamkeit wird dann (in der deutschen Sprache) das Wort „drei" und (in dem von uns benutzten Ziffernsystem) das Zeichen „3" eingeführt.






3


3 3 3 3 3 3 3 3



An diesem Beispiel läßt sich im Prinzip erkennen, wie alle endlichen Kardinalzahlen gewonnen werden können bzw. was eine endliche Kardinalzahl eigentlich ist:

(1) Wir betrachten die Menge aller endlichen Mengen (1. Stufe), also ein Mengensystem.
(2) Für dieses Mengensystem führen wir die Äquivalenzrelation „gleichmächtig“ (↗ Kap. 1, S. 17) ein.
(3) Durch diese Äquivalenzrelation wird in dem betrachteten Mengensystem eine Einteilung in Klassen gleichmächtiger Mengen bewirkt (↗ Kap. 1, S. 28).

So liegen beispielsweise alle zur Menge $M_1 = \{\bigcirc\}$ gleichmächtigen Mengen in einer Klasse, und diese Klasse ist nichts anderes als die Kardinalzahl 1 Entsprechend liegen alle zur Menge $M_2 = \{\bigcirc, \bigcirc\}$ gleichmächtigen Mengen in einer Klasse, und diese Klasse ist die Kardinalzahl 2 usw.

▶ **D1: Eine *endliche Kardinalzahl* ist eine Klasse endlicher Mengen, nämlich aller derjenigen Mengen, die zu einer gegebenen Menge gleichmächtig sind.**

Durch diese Definition wird für unendlich viele, aber untereinander gleichmächtige Mengen ein einziger Begriff, nämlich „endliche Kardinalzahl“ eingeführt. Dieser Begriff ist also das Ergebnis eines Abstraktionsprozesses, dem die beschriebene Klassenbildung für das betrachtete System endlicher Mengen 1. Stufe zugrunde liegt. Dabei ist zu beachten, daß zur Definition der endlichen Kardinalzahl (↗ D1) *nicht* der Begriff *der Anzahl* benötigt, sondern der Begriff *der Gleichmächtigkeit endlicher Mengen* verwendet wurde. Die Kardinalzahl 0 können wir als Abstraktionsklasse der leeren Menge auffassen. Jede andere endliche Kardinalzahl ist dagegen eine Klasse, zu der unendlich viele Mengen gehören. Jede dieser Mengen heißt ein **Vertreter** oder **Repräsentant** dieser Klasse, also der betreffenden endlichen Kardinalzahl. Unter bestimmten Bedingungen ist es möglich, statt mit endlichen Kardinalzahlen mit je einem ausgewählten Vertreter für jede dieser Kardinalzahlen zu „operieren“, also statt mit den Kardinalzahlen mit den sie repräsentierenden Mengen. Davon werden wir nachfolgend noch Gebrauch machen.

2.4. Einige Bemerkungen zur historischen Entwicklung des Zahlbegriffs

Über das Wesen der natürlichen Zahlen hat es in der historischen Entwicklung der Mathematik unterschiedliche Auffassungen gegeben. So äußerte ein Mathematiker des vorigen Jahrhunderts, daß die natürlichen Zahlen der liebe Gott geschaffen habe, alles andere in der Mathematik aber Menschenwerk sei. Dagegen hielt ein anderer Mathematiker die natürlichen Zahlen für eine freie Schöpfung des menschlichen Geistes. Beiden Auffassungen können wir heute entschieden entgegentreten.

● **6.*** Widerlegen Sie beide Auffassungen, und verwenden Sie dabei Kenntnisse aus dem vorigen Abschnitt!

Wir vertreten folgende Auffassung:
Die Mathematik und damit auch die Mengenlehre erfaßt bestimmte Seiten und Beziehungen in der objektiv und unabhängig von unserem Bewußtsein existierenden Welt. Alle mathematischen Begriffsbildungen sind zwar Ergebnisse menschlicher Erkenntnis, sie sind aber deshalb keineswegs willkürliche Konstruktionen menschlichen Denkens, sondern fußen auf der Erkenntnis der Wirklichkeit. Das bestätigen auch die Ergebnisse von Forschungen zur historischen Entwicklung des Zahlbegriffs. So konnte nachgewiesen werden, daß auf sehr frühen Entwicklungsstufen der Menschheit in ein und derselben Sprache für die Bezeichnung derselben Anzahl verschiedener Gegenstände verschiedene Zahlwörter benutzt wurden (↗ [14]). Zum Beispiel gab es für „fünf Töpfe" bzw. „fünf Fische" zwei verschiedene Zahlwörter. Die Menschen haben also zuerst mit Anzahlen konkreter Mengen operiert. Der **Abstraktionsprozeß** der Bildung endlicher Kardinalzahlen wurde erst **wesentlich** später vollzogen.

2.5. Die mengentheoretische Grundlage der Kleiner-Relation für natürliche Zahlen

Nachdem wir den Zusammenhang zwischen natürlichen Zahlen und endlichen Mengen kennen, können wir die Kleiner-Relation für natürliche Zahlen auch mit Hilfe der Begriffsbildungen der Mengenlehre untersuchen.

■ **B3:** Wir betrachten das Beispiel $3 < 5$ und gehen dazu von den endlichen Kardinalzahlen 3 und 5 zu je einem Repräsentanten aus diesen beiden Klassen über (↗ Bild 1).
Offensichtlich ist $M_2 \nsim M_1$, aber $M_2' \sim M_1$, denn sowohl M_2' als auch M_1 sind Dreiermengen. Ferner ist $M_2' \subset M_2$. In der Menge, die die größere Kardinalzahl repräsentiert, gibt es eine echte Teilmenge, die mit der Menge, die die kleinere Kardinalzahl repräsentiert, gleichmächtig ist.

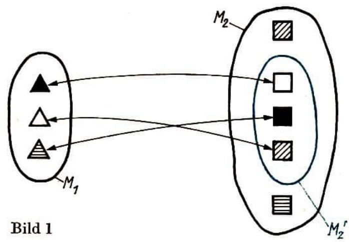


Bild 1

Dieses Ergebnis legt folgende Definition der Kleiner-Relation für natürliche Zahlen nahe.

▶ **D2: Die Menge A sei ein Repräsentant der Kardinalzahl a, die Menge B ein Repräsentant der Kardinalzahl b. $a < b$ bedeutet, daß es eine Menge B' gibt mit $B' \subset B$ und $B' \sim A$.**

Diese Definition ist jedoch nur dann sinnvoll, wenn sie **unabhängig** von der Wahl der Repräsentanten A und B gilt. Dies ist tatsächlich der Fall, wie sich durch folgende Überlegung zeigen läßt:
Für a sei der beliebige Repräsentant X, für b der beliebige Repräsentant Y gewählt.
Dann gilt $X \sim A$ und $Y \sim B$.
Wegen $X \sim A$ und $A \sim B'$ gilt auch $X \sim B'$ (Transitivität der Äquivalenzrelation „gleichmächtig").
Wegen $Y \sim B$ und $B' \subset B$ gibt es auch ein $Y' \subset Y$ mit $Y' \sim B'$.
Wegen $X \sim B'$ und $Y' \sim B'$ (bzw. $B' \sim Y'$) gilt dann auch $X \sim Y'$ (Transitivität der Äquivalenzrelation „gleichmächtig").
Statt der Mengen A und B können wir also die beliebigen Mengen $X \sim A$ und $Y \sim B$ als Repräsentanten für die Kardinalzahlen a und b wählen, d. h., Definition 2 ist tatsächlich repräsentantenunabhängig.
Aus Definition 2 ist kein rationelles Verfahren zu gewinnen, um zu entscheiden, ob zwei gegebene natürliche Zahlen in der Kleiner-Relation stehen. Dies leistet dagegen die folgende Definition.

▶ **D3: $a < b$ $(a, b \in N)$ genau dann, wenn es eine natürliche Zahl $x \neq 0$ gibt, so daß $a + x = b$.**

Beachten Sie aber, daß Sie in Klasse 1 nur auf die in Beispiel 3 dargestellte und durch Definition 2 festgelegte Art und Weise entscheiden bzw. begründen konnten, ob bzw. warum zwei gegebene natürliche Zahlen in der Kleiner-Relation stehen. Dieses anschauliche, repräsentantenweise Vorgehen ist durch die vorstehenden Überlegungen mengentheoretischer Art nachträglich mathematisch voll gerechtfertigt worden, und dies war hier zu zeigen.

2.6. Zur mengentheoretischen Grundlage der Addition natürlicher Zahlen

Die Addition natürlicher Zahlen läßt sich auf eine Operation mit Mengen zurückführen.

■ **B4:** Wir wollen für die Additionsaufgabe $4 + 3 = x$ eine mengentheoretische Deutung vornehmen.
Für die beiden Kardinalzahlen 4 und 3 wählen wir je einen Vertreter M_1 und M_2, und zwar so, daß $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ ist. Dann bilden wir $M_1 \cup M_2$ (↗ Bild 2).

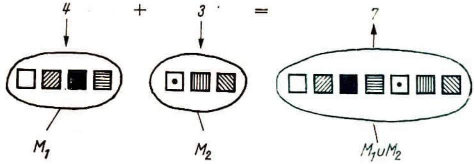


Bild 2

Die Vereinigung $M_1 \cup M_2$ ist dann ein Repräsentant für diejenige Zahl, die gleich der Summe von 4 und 3 ist.

● 7. Begründen Sie, warum die Repräsentanten für die zu addierenden Kardinalzahlen so gewählt werden müssen, daß sie elementfremd sind!

Auf dem in Beispiel 4 dargestellten Weg haben Sie in Klasse 1 die ersten Aufgaben der Addition natürlicher Zahlen gelöst. Das geschilderte Vorgehen legt folgende Definition für die Summe zweier natürlicher Zahlen nahe.

▶ **D4: a und b seien Kardinalzahlen, die durch die Mengen A bzw. B mit $A \cap B = \emptyset$ repräsentiert werden. Die *Summe* $a + b$ ist dann die Kardinalzahl, die durch die Menge $A \cup B$ repräsentiert wird.**

Auch von Definition 4 läßt sich zeigen, daß sie unabhängig von den gewählten Repräsentanten für die beiden Kardinalzahlen ist. Unter Benutzung von Definition 4 und von Eigenschaften der Vereinigung elementfremder Mengen können u. a. folgende Rechengesetze der Addition natürlicher Zahlen begründet werden:

(1) Da aus der Definition der Vereinigung zweier Mengen M_1 und M_2 (↗ S. 19) unmittelbar folgt
$M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$ (Kommutativität der Vereinigung von Mengen),
gilt für die Summen zweier Kardinalzahlen a und b:
$a + b = b + a$ (Kommutativität der Addition natürlicher Zahlen).

(2) Aus der Definition der Vereinigung von Mengen ergab sich auch für alle Mengen M_1, M_2, M_3 die Beziehung
$(M_1 \cup M_2) \cup M_3 = M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = M_1 \cup M_2 \cup M_3$.
Daraus erhält man für die Kardinalzahlen a, b, c entsprechend
$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$ (Assoziativität der Addition der natürlichen Zahlen).

● 8.* Begründen Sie die Aussagen in (1) und (2) unter Verwendung von Definition 4!

2.7. Die Differenzmenge zweier endlicher Mengen und die Subtraktion natürlicher Zahlen

Zur Subtraktion natürlicher Zahlen (Differenzbildung von Kardinalzahlen) kennen wir bisher noch keine entsprechende Mengenoperation. Diese wollen wir jetzt einführen.

▶ **D5: Eine Menge D heißt die *Differenz* zweier Mengen A und B, wenn sie genau die Elemente enthält, die in A *und nicht* in B enthalten sind. Man schreibt dann $D = A \setminus B$ und liest „D gleich Differenz aus A und B" oder „D gleich A minus B".**

Wir wollen uns die neue Mengenoperation zunächst an einigen Beispielen klarmachen.

■ **B5:** $A = \{2, 3, 5, 7\}$ $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$
Nach Definition 5 ist hier
$D_1 = A \setminus B = \{3, 5, 7\}$, $D_2 = B \setminus A = \{0, 4, 6, 8\}$.
Die Mengendiagramme im Bild 3 veranschaulichen das Beispiel.

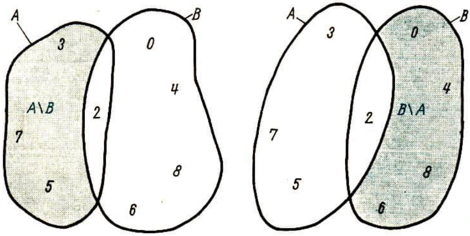


Bild 3

● 9.* **a)** Bestimmen Sie $A \setminus B$ und $B \setminus A$ für
$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.
b) Veranschaulichen Sie **a)** durch Mengendiagramme!
c) Überlegen und begründen Sie, unter welcher Bedingung $A \setminus B = A$ ist!

10*. **a)** Bestimmen Sie $M_1 \setminus M_2$ und $M_2 \setminus M_1$ für
$M_1 = \{2, 3, 5, 7\}$; $M_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
b) Veranschaulichen Sie **a)** durch Mengendiagramme!
c) Überlegen und begründen Sie, unter welchen Bedingungen $M_1 \setminus M_2 = \emptyset$ ist!
d) Gibt es Mengen M_1 und M_2, für die $M_1 \setminus M_2 = M_2 \setminus M_1$ gilt?

11.* Geben Sie für die folgenden Paare von Mengen jeweils $A \setminus B$ und $B \setminus A$ an!

a) $A = \{x\colon x \in N;\ x < 30 \text{ und } 3 \mid x\}$
$B = \{x\colon x \in N;\ x < 30 \text{ und } 6 \mid x\}$

b) $A = \{a\colon a \in N;\ a < 100 \text{ und } 3 \mid a\}$
$B = \{a\colon a \in N;\ a < 50 \text{ und } 4 \mid a\}$

c) $A = \{c\colon c \in N;\ 5 \mid c\}$
$B = \{c\colon c \in N;\ 7 \mid c\}$

d) $A = \{e\colon e \in N;\ 3 \mid e\}$
$B = \{e\colon e \in N;\ 3 \nmid e\}$

e) A sei die Menge aller Primzahlen.
B sei die Menge aller ungeraden Zahlen.

f) A sei die Menge aller Primzahlen.
B sei die Menge aller geraden Zahlen.

g) A sei die Menge aller Rechtecke.
B sei die Menge aller Quadrate.

h) A sei die Menge aller Drachenvierecke.
B sei die Menge aller Trapeze.

i) $A = \{a, p, f, e_1, l, m, u, s\}$
$B = \{a, p, f, e_1, l, s, i, n, e_2\}$

Nun können wir für die Subtraktion natürlicher Zahlen eine mengentheoretische Deutung angeben, wobei wir von einem Beispiel ausgehen.

■ **B6:** Wir betrachten die Subtraktionsaufgabe $5 - 3 = 2$ und gehen von den Kardinalzahlen 5 und 3 zunächst zu je einer beliebigen Fünfer- bzw. Dreiermenge, Repräsentanten dieser Kardinalzahlen, über:

$M_1 = \{$△, ▲, ⧋, ◬, ◭$\}$, $\quad M_2 = \{$□, ■, ⊡$\}$

Nach Definition 5 gilt dann

$M_1 \setminus M_2 = \{$△, ▲, ⧋, ◬, ◭$\}$,

und dies ist offensichtlich kein Vertreter für die Kardinalzahl 2 (dem uns bekannten Ergebnis für diese Subtraktionsaufgabe).

Würde man dagegen für M_2 Teilmengen von M_1 wählen, also etwa

$M_2 = \{$△, ▲, ⧋$\}$, so ist $M_1 \setminus M_2 = \{$◬, ◭$\}$

$M_2 = \{$△, ▲, ◬$\}$, so ist $M_1 \setminus M_2 = \{$⧋, ◭$\}$

. . . . usw.

Die in allen sechs verschiedenen möglichen Fällen (welche sind das?) erhaltenen Differenzmengen sind Zweiermengen. Sie repräsentieren sämtlich die Kardinalzahl 2, also das Ergebnis der betrachteten Subtraktionsaufgabe.

Offensichtlich ist die mengentheoretische Grundlage der Subtraktion natürlicher Zahlen nicht die Mengenoperation $M_1 \setminus M_2$ schlechthin, sondern ein *Spezialfall*, nämlich $M_1 \setminus M_2$ und $M_2 \subseteq M_1$, d. h., als Vertreter des Subtrahen-

den ist eine Teilmenge des Vertreters des Minuenden zu wählen. Von einer gegebenen Menge wird also eine Teilmenge „weggenommen".
Wichtig sind nun folgende Konsequenzen, die sich aus der mengentheoretischen Deutung der Subtraktion ergeben:

(1) Da $M_1 \setminus M_2 = M_2 \setminus M_1$ nur gilt, wenn $M_2 = M_1$, gilt für die Differenz zweier natürlicher Zahlen a und b auch
$a - b = b - a$ genau dann, wenn $b = a$.
(2) Für $M_2 = M_1$ gilt ferner $M_1 \setminus M_2 = M_2 \setminus M_1 = \emptyset$ und entsprechend, wenn $b = a$, dann $a - b = b - a = 0$.
(3) Ist dagegen $M_2 \neq M_1$, so gilt auch $M_1 \setminus M_2 \neq M_2 \setminus M_1$ und entsprechend für $a \neq b$ die Beziehung $a - b \neq b - a$, d. h., die Subtraktion natürlicher Zahlen ist nicht kommutativ.

2.8. Eine mengentheoretische Deutung der Multiplikation natürlicher Zahlen, Produktmengen

Will man eine mengentheoretische Deutung der Multiplikation zweier natürlicher Zahlen a und b vornehmen, so ist diese für die meisten Aufgaben so möglich, wie das folgende Beispiel zeigt.

■ **B7:** Die Multiplikationsaufgabe $3 \cdot 2 = 6$ soll mengentheoretisch gedeutet werden.

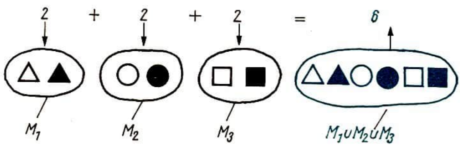


Bild 4

Da der Term $3 \cdot 2$ gleichbedeutend ist mit $2 + 2 + 2$, gehen wir von diesen natürlichen Zahlen zu sie repräsentierenden elementfremden Mengen M_1, M_2 und M_3 über und erhalten dann die Darstellung in Bild 4.

Auf diese Weise lassen sich jedoch die Multiplikationsaufgaben $1 \cdot 1$, $a \cdot 0$ und $0 \cdot a$ nicht interpretieren. Um auch für sie eine mengentheoretische Interpretation vornehmen zu können, ist es notwendig, eine weitere Mengenoperation einzuführen. Wir wollen diese Mengenoperation zunächst an einem Beispiel erläutern.

■ **B8:** Die Tischtennismannschaft einer Schulklasse will gegen die Tischtennismannschaft ihrer Patenbrigade einen Wettkampf im Tischtenniseinzel austragen. Dabei soll jedes der vier Mitglieder s_1, s_2, s_3, s_4 der Schülermannschaft gegen jedes der drei Mitglieder w_1, w_2, w_3 der Mannschaft der Patenbrigade antreten.
Mit Hilfe geordneter Paare $[s; w]$ können wir die dann durchzuführenden Spiele übersichtlich aufschreiben, wobei wir noch festlegen, daß der Spieler mit Heimvorteil im geordneten Paar an erster Stelle stehen soll. Für die Spiele in der Schule erhält man folgenden Spielplan:

$[s_1; w_1]$, $[s_1; w_2]$, $[s_1; w_3]$
$[s_2; w_1]$, $[s_2; w_2]$, $[s_2; w_3]$
$[s_3; w_1]$, $[s_3; w_2]$, $[s_3; w_3]$
$[s_4; w_1]$, $[s_4; w_2]$, $[s_4; w_3]$.

Dieser Sachverhalt läßt sich unter Verwendung von Begriffsbildungen aus der Mengenlehre folgendermaßen darstellen:
Gegeben sind zwei Mengen S und W durch

$$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \quad \text{und} \quad W = \{w_1, w_2, w_3\} .$$

Aus den Elementen dieser Mengen werden nach folgender Vorschrift **geordnete Paare** gebildet: Jedem Element aus der einen Menge werden **nacheinander** alle Elemente aus der anderen Menge zugeordnet, wobei die Elemente aus der zuerst genannten Menge im geordneten Paar auch an erster Stelle stehen sollen. Auf diese Weise erhält man die oben angegebene **Menge geordneter Paare.**

Die Menge der geordneten Paare aus den Mengen S und W im Beispiel 8 nennt man die **Produktmenge von S und W.**
Man schreibt

$$P = S \times W = \{[s_1; w_1], [s_1; w_2], \dots, [s_4; w_2], [s_4; w_3]\}$$

und liest: „P gleich S kreuz W gleich ...“.

● 12.* Zwischen denselben Mannschaften wie in Beispiel 8 wird ein zweiter Wettkampf, und zwar diesmal im Betrieb, vereinbart.
a) Stellen Sie den Spielplan für diesen Wettkampf auf!
b) Bestimmen Sie $W \times S$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit $S \times W$!

Für die Produktmenge P der Mengen M_1 und M_2 gilt folgende Definition.

▶ **D6: Die *Produktmenge* $P = M_1 \times M_2$ ist die Menge aller geordneten Paare $[x; y]$ mit $x \in M_1$ und $y \in M_2$.**
In Zeichen: $M_1 \times M_2 = \{[x; y] : x \in M_1 \text{ und } y \in M_2\}$.

Statt *Produktmenge* sind auch die Bezeichnungen *Kreuzprodukt* und *Kreuzmenge* gebräuchlich.

● **13.** Es sei $M_1 = \{a, b, c\}$ und $M_2 = \{x, y\}$.
a) Ermitteln Sie $M_1 \times M_2$ und $M_2 \times M_1$!
b) Begründen Sie $M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1$ und $M_1 \times M_2 \cap M_2 \times M_1 = \emptyset$!
c) Ermitteln Sie $M_1 \times M_1$ und $M_2 \times M_2$!

Die Mengenoperation der Produktbildung hat u. a. folgende Eigenschaften:

(1) Sie ist nicht kommutativ, d. h., es gilt **nicht** für jedes M_1 und M_2 die Beziehung $M_1 \times M_2 = M_2 \times M_1$.

● **14.*** **a)** Beweisen Sie diese Aussage!
b) Überlegen Sie, ob es überhaupt Mengen M_1 und M_2 gibt, für die $M_1 \times M_2 = M_2 \times M_1$ gilt!

(2) Sie ist nicht assoziativ.

Um dies nachweisen zu können, müssen wir zunächst den Begriff des **geordneten Tripels** erklären und sodann definieren, was unter der Produktmenge der Mengen M_1, M_2, M_3 zu verstehen ist. Mit Hilfe von *geordnetes Paar* läßt sich das **geordnete Tripel** $[a; b; c]$ definieren:

▶ **D7: $[a; b; c] = [[a; b]; c]$, d. h., das *geordnete* Tripel ist ein geordnetes Paar, dessen erstes Element ebenfalls ein geordnetes Paar ist.**

▶ **D8: Die *Produktmenge* $P = M_1 \times M_2 \times M_3$ ist die Menge aller geordneten Tripel $[x; y; z] = [[x; y]; z]$ mit $x \in M_1$, $y \in M_2$ und $z \in M_3$.
In Zeichen: $M_1 \times M_2 \times M_3 = \{[x; y; z]: x \in M_1 \text{ und } y \in M_2 \text{ und } z \in M_3\}$.**

● **15.** Bilden Sie für
$M_1 = \{a, b, c\}$; $M_2 = \{m, n\}$; $M_3 = \{x, y\}$
sowohl $(M_1 \times M_2) \times M_3$ als auch $M_1 \times (M_2 \times M_3)$!

Man erhält hier
$$(M_1 \times M_2) \times M_3 \neq M_1 \times (M_2 \times M_3),$$
denn bei der Produktmenge $(M_1 \times M_2) \times M_3$ steht ein geordnetes Paar an erster Stelle. Es ergeben sich also nach Definition 7 (↗ S. 49) 12 Tripel, während bei den Elementen von $M_1 \times (M_2 \times M_3)$ ein geordnetes Paar an letzter Stelle steht, also **keine** Tripel entstehen.
Das heißt: Die in $(M_1 \times M_2) \times M_3$ vorkommenden geordneten Paare stimmen nicht mit denen, die in $M_1 \times (M_2 \times M_3)$ vorkommen, überein.

(3) Für alle Mengen M_1, M_2, M_3 gelten u. a. folgende vier Beziehungen:
a) $(M_1 \cap M_2) \times M_3 = (M_1 \times M_3) \cap (M_2 \times M_3)$,
b) $M_3 \times (M_1 \cap M_2) = (M_3 \times M_1) \cap (M_3 \times M_2)$,
c) $(M_1 \cup M_2) \times M_3 = (M_1 \times M_3) \cup (M_2 \times M_3)$,
d) $M_3 \times (M_1 \cup M_2) = (M_3 \times M_1) \cup (M_3 \times M_2)$.
Auf die Beweise müssen wir hier verzichten.

● **16.** Es sei

$M_1 = \{r; s; t\}$, $\quad M_2 = \{p; q; r; s\}$, $\quad M_3 = \{\alpha; \beta; \gamma\}$.

Zeigen Sie, daß für diesen Fall die in (3) dargestellten Beziehungen gelten!

(4) Wir wollen jetzt die Frage untersuchen, wie viele geordnete Paare bzw. Tripel zur Produktmenge von zwei bzw. drei endlichen Mengen gehören. Dazu betrachten wir noch einmal Beispiel 8 und das Ergebnis von Aufgabe 12.

■ **B9:** Obwohl wir in Beispiel 8 bzw. Aufgabe 12 gefunden haben, daß $S \times W \neq W \times S$, ist die **Anzahl** der geordneten Paare in beiden Produktmengen gleich groß, denn es ergab sich für $S \times W$:

$3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3 = 12$ (geordnete Paare)

und für $W \times S$:

$4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4 = 12$ (geordnete Paare).

Man kann nun beweisen, daß sowohl die Produktmenge $M_1 \times M_2$ als auch die Produktmenge $M_2 \times M_1$ aus $m \cdot n$ geordneten Paaren bestehen, wenn M_1 m Elemente und M_2 n Elemente enthält. (Wir müssen hier auf diesen Beweis verzichten, weil dafür ein Ihnen noch unbekanntes Beweisverfahren benötigt wird.)

Die im allgemeinen voneinander verschiedenen Produktmengen $M_1 \times M_2$ und $M_2 \times M_1$ sind immer **gleichmächtig**. Davon werden wir nachfolgend noch Gebrauch machen.

Die **Multiplikation natürlicher Zahlen** kann unter Verwendung von Produktmengen folgendermaßen mengentheoretisch gedeutet werden: Von den Faktoren a und b ($a, b \in N$) geht man zu den sie repräsentierenden Mengen M_1 und M_2 über, bildet $M_1 \times M_2$ und ermittelt die Anzahl der geordneten Paare in $M_1 \times M_2$. Diese Anzahl ist das gesuchte Produkt $a \cdot b$.

● **17.*** Ermitteln Sie auf diese Weise folgende Produkte:

a) $1 \cdot 1$ **b)** $1 \cdot 0$ **c)** $0 \cdot 1$ **d)** $a \cdot 1$ **e)** $a \cdot 0$!

18. Begründen Sie, warum die Multiplikation natürlicher Zahlen **a)** kommutativ, **b)** assoziativ, **c)** bezüglich der Addition natürlicher Zahlen distributiv ist!

2.9. Teiler und Vielfache einer natürlichen Zahl, Teilbarkeitsbeziehungen

Aus Klasse 6 kennen Sie die **Teilbarkeitsbeziehung** für geordnete Paare natürlicher Zahlen. Sie wurde dort folgendermaßen formuliert:

▶ **D9: „Die natürliche Zahl a heißt *Teiler* der natürlichen Zahl b, wenn es eine natürliche Zahl x gibt, so daß gilt: $a \cdot x = b$.“** (↗ [13g], S. 26)
Die Zahl b heißt Vielfaches von a.

Ist die Zahl a Teiler der Zahl b, so schreibt man: $a \mid b$ (gelesen: „a teilt b“); ist a kein Teiler der Zahl b, schreibt man: $a \nmid b$ (gelesen: „a teilt nicht b“).

● **19.*** Es gilt **a)** $3 \mid 18$ **b)** $5 \mid 0$ **c)** $3 \nmid 16$ **d)** $84 \nmid 12$
Begründen Sie diese Aussagen unter Verwendung von Definition 9!

20.* Untersuchen Sie, ob in den folgenden geordneten Paaren $[a; b]$ die Zahl a ein Teiler der Zahl b ist!
a) [4; 18] **b)** [4; 28] **c)** [15; 105] **d)** [105; 15]
e) [15; 15] **f)** [18; 9] **g)** [201; 1407] **h)** [140; 210] **i)** [0; 0]

21.* Untersuchen Sie, ob in den folgenden geordneten Paaren $[a; b]$ die Zahl a ein Vielfaches der Zahl b ist!
a) [132; 12] **b)** [132; 11] **c)** [132; 13] **d)** [45; 15]
e) [15; 45] **f)** [210; 35] **g)** [154; 11] **h)** [155; 11]

22.* Zeigen Sie:
a) Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $n \mid 0$,
b) für alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen n gilt: $0 \nmid n$.

Ebenfalls aus Klasse 6 kennen Sie die Begriffe
a) **Menge der Teiler** einer natürlichen Zahl n, nachfolgend mit T_n bezeichnet,
b) **Menge der Vielfachen** einer natürlichen Zahl n, nachfolgend mit V_n bezeichnet.

■ **B10: a)** $T_{105} = \{x\colon x \mid 105; x \in N\} = \{1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105\}$
b) $V_{105} = \{x\colon 105 \mid x; x \in N\} = \{0, 105, 210, \ldots, 1050, \ldots\}$
oder: $V_{105} = \{x\colon x = 105n; n \in N\}$

● **23.*** Ermitteln Sie für jede der folgenden Zahlen die Menge ihrer Teiler, und stellen Sie die Menge ihrer Vielfachen dar!
a) 10 **b)** 1 **c)** 100 **d)** 22 **e)** 23 **f)** 1000
g) 625 **h)** 101 **i)** 97 **k)** 120 **l)** 12000

Wir können nun leicht zeigen, daß die Menge der Teiler einer natürlichen Zahl $n \neq 0$ eine endliche Menge ist:

Wegen Definition 9 gilt nämlich für alle Elemente $x \in T_n$ mit $n \neq 0$, daß $x \leqq n$, d. h., es können höchstens n Elemente in T_n vorkommen, denn $0 \nmid n$ für alle $n \neq 0$.
Dagegen ist V_n für $n \neq 0$ eine unendliche Menge, wie folgende Überlegung zeigt: Wäre V_n eine endliche Menge, so gäbe es in ihr ein größtes Element, denn bei jeder endlichen Menge natürlicher Zahlen kann man die Elemente der Größe nach ordnen. Angenommen, $m = a \cdot n$ $(a \in N)$ sei das größte Element dieser Menge. Dann ist aber auch $2m$ Element dieser Menge, denn $2m = 2 \cdot an$ ist ebenfalls Vielfaches von n, und es gilt $2m > m$.
Das heißt, die Annahme eines größten Elements führt auf einen Widerspruch, und folglich ist sie falsch.
Unter den Mengen der Teiler der natürlichen Zahl $n \geqq 2$ treten zweielementige Mengen auf, und diese enthalten dann die Elemente 1 und n. Natürliche Zahlen mit dieser Eigenschaft heißen bekanntlich **Primzahlen**.

● **24.** Definieren Sie „Primzahl" unter Verwendung der Begriffsbildungen der Mengenlehre!

Unter den T_n gibt es aber auch Mengen, die mehr als zwei Elemente enthalten. Natürliche Zahlen mit dieser Eigenschaft heißen bekanntlich **zusammengesetzte Zahlen.**

● **25.*** Definieren Sie „zusammengesetzte Zahl" unter Verwendung der Begriffsbildungen der Mengenlehre!

26.* Begründen Sie, warum es keine natürliche Zahl n gibt, welche die leere Menge als Menge ihrer Teiler hat!

27.* Für welche zusammengesetzten Zahlen sind die Anzahlen der Elemente in den Mengen ihrer Teiler
a) geradzahlig,
b) ungeradzahlig?

28.* Zeigen Sie, daß $a \mid b$ $(a, b \in N)$ keine Äquivalenzrelation (↗ S. 24) ist!

Wir wollen uns jetzt mit Verfahren zur Ermittlung der Menge der Teiler einer gegebenen natürlichen Zahl n beschäftigen. Einige solcher Verfahren sind Ihnen bereits bekannt. Sie sollen jetzt kurz wiederholt werden, wobei auch einige ergänzende Bemerkungen, hauptsächlich vom Standpunkt der Mengenlehre aus, gemacht werden sollen.

(1) Teiler einer gegebenen natürlichen Zahl n lassen sich zunächst ganz einfach dadurch ermitteln, daß man die natürliche Zahl a nacheinander durch die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, ... zu dividieren versucht. Dabei ist folgendes wesentlich: Ist a durch eine dieser Zahlen b teilbar, gibt es also eine Zahl $x \in N$ mit $b \cdot x = a$, so sind mit **einer** Division **zwei** Teiler von a, nämlich b und x, ermittelt, wenn $b \neq x$. Ist dagegen $b = x$, so ist nur **ein** Teiler ermittelt.

■ **B11: a)** Aus $24:3 = 8$ folgt **nicht nur** $3 \mid 24$, **sondern auch** $8 \mid 24$, also $3 \in T_{24}$ und $8 \in T_{24}$.

b) T_{24} läßt sich also folgendermaßen schrittweise ermitteln:

1. $T_{24} = \{1, \ldots, \qquad\qquad 24\}$ (wegen $24 = 1 \cdot 24$)
2. $T_{24} = \{1, 2, \ldots, \qquad\quad 12, 24\}$ (wegen $24 = 2 \cdot 12$)
3. $T_{24} = \{1, 2, 3, \ldots, 8, \; 12, 24\}$ (wegen $24 = 3 \cdot 8$)
4. $T_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ (wegen $24 = 4 \cdot 6$)

Natürlich braucht man nur die Zeile (4) aufzuschreiben, wenn man zwischen den geschweiften Klammern genügend Platz zum schrittweisen Eintragen aller „Teilerpaare" läßt.

An dem vorstehenden Beispiel können wir noch eine andere wichtige Einsicht gewinnen: Es ist die Antwort auf die Frage, wie „weit" (d. h. für welche Zahlen) wir die Teilbarkeitsüberprüfung durchführen müssen, um alle Teiler einer Zahl a zu ermitteln.
Aus $a:b = x$ ($x \in N$) folgt nicht nur $b \mid a$, sondern auch $x \mid a$.
Es gilt dann $b \cdot x = a$, und daraus folgt für $x = b$, daß $x^2 = b^2 = a$ und $x = b = \sqrt{a}$ ist. Demzufolge gilt für $x < b$, daß $x < \sqrt{a}$, für $x > b$, daß $b < \sqrt{a}$ ist. Einer der beiden Faktoren b und x ist also kleiner oder höchstens gleich $\sqrt{a}$. Folglich braucht man in Beispiel 11 für die Bestimmung von T_{24} nur zu überprüfen, ob 24 durch 2, durch 3 und durch 4 teilbar ist (denn $\sqrt{24} < 5$), wenn man zu diesen Teilern b immer jene Teiler x ermittelt und aufschreibt, für die $b \cdot x = 24$.

(2) Wir können das in (1) beschriebene Verfahren weiter verbessern, indem wir die uns aus Klasse 6 bekannten Teilbarkeitssätze für die Zahlen 10, 5, 2, 4, 8, 3, 9 und 6 nutzen, um „unnötige" Versuche der Division zu vermeiden. (Unnötig ist der Versuch dann, wenn die Zahl, durch die dividiert werden soll, kein Teiler der betrachteten Zahl ist.)

■ **B12:** T_{91} ist zu ermitteln.
Statt 91 nacheinander durch die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 (denn $\sqrt{91} < 10$) zu dividieren, gehen wir hier folgendermaßen vor:

1. Wegen $2 \nmid 91$ (Begründung: Teilbarkeitssatz für 2), ist 91 auch nicht durch alle Vielfachen von 2, insbesondere auch nicht durch 4, 6 und 8 teilbar.
2. Wegen $3 \nmid 91$ (Begründung ?) ist 91 auch nicht durch alle Vielfachen von 3, insbesondere auch nicht durch 9 teilbar.
3. $5 \nmid 91$ (Begründung ?).
4. Demnach ist nur noch Teilbarkeit durch 7 zu überprüfen, wofür Ihnen allerdings kein Teilbarkeitssatz zur Verfügung steht. Wegen $91:7 = 13$ gilt $7 \mid 91$ **und** $13 \mid 91$.
   Demnach ist $T_{91} = \{1, 7, 13, 91\}$.

● **29.** Wie lauten die Begründungen für 2. und 3. in Beispiel 12?

30.* Ermitteln Sie nach dem in Beispiel 12 dargestellten Verfahren die Mengen der Teiler folgender natürlicher Zahlen:

a) 720	**b)** 51	**c)** 61
d) 71	**e)** 81	**f)** 120
g) 125	**h)** 130	**i)** 135

(3) Ein anderes Verfahren zur Bestimmung der Menge der Teiler einer natürlichen Zahl a geht von deren Darstellung als Produkt von Primfaktoren aus.

Nach einem wichtigen Satz der Zahlentheorie gibt es für jede natürliche Zahl $n > 1$ **genau eine** Primfaktorendarstellung. (Das ist in dem Sinne gemeint, daß sich die Primfaktorendarstellungen für eine Zahl höchstens in der Reihenfolge der Primfaktoren, nicht aber in den vorkommenden Faktoren selbst unterscheiden können.) Angenommen, die Primfaktorendarstellung der Zahl a lautet $a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4$, wobei wir zunächst einschränkend annehmen wollen, daß es sich um vier verschiedene Primfaktoren handelt. Dann ist die Menge P_a der Primfaktoren der Zahl a durch $P_a = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ gegeben. Zwischen den Mengen T_a und P_a besteht dann folgender Zusammenhang:

Zu T_a gehören	Das sind bzw. ist zugleich
a) die Zahl 1;	
b) jeder der Faktoren $p_1, \ldots, p_4$;	die Zahlen, die als Elemente in sämtlichen einelementigen Teilmengen von P_a vorkommen;
c) jedes der sechs Produkte aus zwei der vier Faktoren $p_1, \ldots, p_4$;	die Produkte der Zahlen, die als Elemente in den zweielementigen Teilmengen von P_a vorkommen;
d) jedes der vier Produkte aus drei der vier Faktoren $p_1, \ldots, p_4$;	die Produkte der Zahlen, die als Elemente in den dreielementigen Teilmengen von P_a vorkommen;
e) das Produkt aus den vier Faktoren $p_1, \ldots, p_4$.	das Produkt der Zahlen, die Elemente von P_a sind.

Zu T_a gehören also – außer der Zahl 1 – sowohl die einelementigen Teilmengen von P_a als auch die Produkte der Elemente aus allen anderen Teilmengen von P_a.

Dies gilt ganz allgemein für Zahlen, deren Primfaktorendarstellungen aus n verschiedenen Primfaktoren besteht, und das ermöglicht, die Menge der Teiler einer solchen Zahl so zu bestimmen, wie das folgende Beispiel zeigt.

■ **B13:** T_{2310} ist zu bestimmen.
Lösung: Wegen $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ ist die Menge der Primfaktoren $P_{2310} = \{2, 3, 5, 7, 11\}$.
Nach den vorstehenden Überlegungen gehören dann zu T_{2310} — außer der Zahl 1 — noch folgende Zahlen:

Teilmengen von P_{2310}:	Teiler von 2310:
$M_1 = \{2\}, M_2 = \{3\}, \ldots, \quad M_5 = \{11\}$	2, 3, 5, 7, 11
$M_6 = \{2, 3\}, \ldots, M_9 = \{2, 11\}$	6, 10, 14, 22
$M_{10} = \{3, 5\}, M_{11} = \{3, 7\}, \quad M_{12} = \{3, 11\}$	15, 21, 33
$M_{13} = \{5, 7\}, M_{14} = \{5, 11\}, M_{15} = \{7, 11\}$	35, 55, 77
$M_{16} = \{2, 3, 5\}, \ldots, M_{21} = \{2, 7, 11\}$	30, 42, 66, 70, 110, 154
$M_{22} = \{3, 5, 7\}, \ldots, M_{25} = \{5, 7, 11\}$	105, 165, 231, 385
$M_{26} = \{2, 3, 5, 7\}, \ldots, M_{28} = \{2, 3, 7, 11\}$	210, 330, 462
$M_{29} = \{2, 5, 7, 11\}, M_{30} = \{3, 5, 7, 11\}$	770, 1155
$M_{31} = \{2, 3, 5, 7, 11\}$	2310

Auf das Aufschreiben der Teilmengen kann man verzichten, da ja nicht die Teilmengen, sondern die Produkte ihrer Elemente benötigt werden.

Bemerkung: Die Anzahl der Teilmengen einer n-elementigen Menge ist 2^n (einschließlich der leeren Menge „$\emptyset$“).

Das vorstehend beschriebene Verfahren ist grundsätzlich auch dann anwendbar, wenn die Primfaktorendarstellung der betreffenden Zahl auch gleiche Primfaktoren enthält. Diese müssen dann zunächst im Gegensatz zum Prinzip der Mengenbildung als verschiedene Elemente der Menge der Primfaktoren angesehen werden. Beispielsweise ist die Menge der Primfaktoren der Zahl $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ durch $P_{360} = \{2, 2, 2, 3, 3, 5\}$ gegeben. Bildet man dann die Produkte der Elemente der Teilmengen, so erhält man wiederholt dasselbe Ergebnis, also durch mehrere Produktbildungen denselben Teiler.

● **31.*** Ermitteln Sie nach den vorstehend dargestellten Verfahren T_{360}!

2.10. Gemeinsame Teiler und gemeinsame Vielfache von natürlichen Zahlen

Unter den gemeinsamen Teilern der natürlichen Zahlen $a, b, c, \ldots, x$ versteht man diejenigen Teiler von a, die sowohl Teiler von b, von c, ... und von x sind. Bezeichnet man die Menge der gemeinsamen Teiler von $a, b, c, \ldots, x$ mit $T_{(a,b,c,\ldots,x)}$, so gilt in Anwendung von Definition 7 (↗ S. 49) für $T_{(a,b,c,\ldots,x)}$ folgende Definition.

▶ **D10:** $T_{(a,b,c,\ldots,x)} = T_a \cap T_b \cap T_c \cap \ldots \cap T_x$.

In Worten: Die Menge der gemeinsamen Teiler der natürlichen Zahlen $a, b, c, \ldots, x$ ist gleich dem **Durchschnitt** der Mengen der Teiler der natürlichen Zahlen $a, b, c, \ldots, x$.
Wichtig ist auch noch die folgende Begriffsbildung.

▶ **D11: Wenn $T_{(a,b,c,\ldots,x)} = \{1\}$, so nennt man die natürlichen Zahlen $a, b, c, \ldots, x$ *teilerfremd*.**

Aus Definition 10 ergibt sich unmittelbar ein Verfahren zur Bestimmung der Menge der gemeinsamen Teiler von zwei oder mehr als zwei natürlichen Zahlen:

(a) Man bestimmt die Menge der Teiler für jede der betrachteten natürlichen Zahlen.
(b) Man bestimmt den Durchschnitt der nach (a) erhaltenen Mengen.

■ **B14:** $T_{(273,315,350)}$ ist zu bestimmen.
Lösung:

$$T_{273} = \{\mathbf{1}, 3, \mathbf{7}, 13, 21, 39, 91, 273\}$$
$$T_{315} = \{\mathbf{1}, 3, 5, \mathbf{7}, 9, 15, 21, 35, 45, 63, 105, 315\}$$
$$T_{350} = \{\mathbf{1}, 2, 5, \mathbf{7}, 10, 14, 25, 35, 50, 70, 175, 350\}$$
$$T_{(273,315,350)} = T_{273} \cap T_{315} \cap T_{350} = \{\mathbf{1}, \mathbf{7}\}$$

Das in Beispiel 14 erläuterte Verfahren zur Bestimmung der Menge der gemeinsamen Teiler natürlicher Zahlen ist wenig rationell. Die Menge der gemeinsamen Teiler von zwei oder mehr als zwei natürlichen Zahlen kann wesentlich schneller aus der Primfaktorendarstellung dieser natürlichen Zahlen ermittelt werden, wie die folgende Überlegung zeigt:
Nur wenn ein Primfaktor in der Zerlegung **jeder** der untersuchten Zahlen vorkommt (gemeinsamer Primfaktor), ist er ein gemeinsamer Teiler. Aber auch alle Produkte aus gemeinsamen Primfaktoren sind gemeinsame Teiler: Angenommen, es gibt in den Primfaktorendarstellungen von a, b und c die gemeinsamen Primfaktoren p_1, p_2, p_3 und sonst keine weiteren, also

$$\left.\begin{aligned} a &= p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot n_1 \ (n_1 \in N) \\ b &= p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot n_2 \ (n_2 \in N) \\ c &= p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot n_3 \ (n_3 \in N) \end{aligned}\right\} \quad \text{und} \quad T_{(n_1,n_2,n_3)} = \{1\}\,.$$

Dann gilt nach Definition 9 nicht nur

$$\begin{array}{lll} p_1 \mid a\,, & p_1 \mid b\,, & p_1 \mid c\,, \\ p_2 \mid a\,, & p_2 \mid b\,, & p_2 \mid c\,, \\ p_3 \mid a\,, & p_3 \mid b\,, & p_3 \mid c\,, \end{array}$$

sondern auch

$$\begin{array}{lll} p_1 \cdot p_2 \mid a\,, & p_1 \cdot p_2 \mid b\,, & p_1 \cdot p_2 \mid c\,, \\ p_1 \cdot p_3 \mid a\,, & p_1 \cdot p_3 \mid b\,, & p_1 \cdot p_3 \mid c\,, \\ p_2 \cdot p_3 \mid a\,, & p_2 \cdot p_3 \mid b\,, & p_2 \cdot p_3 \mid c \end{array}$$

und auch

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \mid a\,, \qquad p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \mid b\,, \qquad p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \mid c\,.$$

Dabei ist noch zu beachten, daß wir **nicht** vorausgesetzt haben, daß $p_1 \neq p_2 \neq$ $\neq p_3$, d. h., derselbe Primfaktor kann mehrfach als gemeinsamer Faktor vorkommen.

Wenn $T_{(n_1,n_2,n_3)} = \{1\}$, so ist das Produkt $g = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ zugleich der **größte gemeinsame Teiler** der Zahlen a, b und c, geschrieben:

$$\text{g. g. T.}_{(a,b,c)} = g = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3\,.$$

Wie wir im vorherigen Abschnitt unter (3) (↗ S. 54) gezeigt haben, ist die Menge der Teiler von g gegeben durch

$$T_g = \{1, p_1, p_2, p_3, p_1p_2, p_1p_3, p_2p_3, p_1p_2p_3\}\,,$$

und das sind dieselben Teiler, die wir oben erhielten, wenn man dort noch den Teiler 1 hinzufügt.

Es gilt also

$$T_{(a,b,c)} = T_g\,, \qquad \text{wobei } g = \text{g. g. T.}_{(a,b,c)} \text{ ist.}$$

In Worten: Die Menge der gemeinsamen Teiler der natürlichen Zahlen a, b, c ist gleich der Menge der Teiler des g. g. T. der Zahlen a, b, c. Diese Beziehung gilt auch für zwei und für mehr als drei natürliche Zahlen, d. h.:

$$T_{(a,b,c,\ldots,x)} = T_g \qquad \text{mit } g = \text{g. g. T.}_{(a,b,c,\ldots,x)}$$

Das ermöglicht folgendes einfache Verfahren zur Ermittlung der gemeinsamen Teiler von $a, b, c, \ldots, x$:

a) Man bestimmt den g. g. T.$_{(a,b,c,\ldots,x)} = g$
b) Man bestimmt die Menge T_g der Teiler von g.

Für a) ist Ihnen aus dem Unterricht ein Verfahren bekannt, für b) haben Sie in Abschnitt 2.9. (↗ S. 53ff.) verschiedene Verfahren kennengelernt.

■ **B15:** $T_{(100,200,240,360)}$ ist zu ermitteln!
Lösung:

$$\begin{array}{rcl}
100 &=& 2 \cdot 2 \qquad\qquad\qquad\quad \cdot 5 \cdot 5 \\
200 &=& 2 \cdot 2 \cdot 2 \qquad\qquad\quad\; \cdot 5 \cdot 5 \\
240 &=& 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \quad\;\; \cdot 5 \\
360 &=& 2 \cdot 2 \cdot 2 \qquad \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \\
\hline
\text{g. g. T.} &=& 2 \cdot 2 \qquad\qquad\qquad\quad \cdot 5 = 2^2 \cdot 5 = 20
\end{array}$$

$$T_{(100,200,240,360)} = T_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

● **32.*** Bestimmen Sie

a) $T_{(20,25,60,75)}$ **b)** $T_{(210,330,150,60)}$
c) $T_{(300,60,420,660)}$ **d)** $T_{(330,550,110,1210)}$
e) $T_{(15,55,77)}$ **f)** $T_{(540,450,54,45)}$

33. Beweisen Sie folgenden Satz: Ist $a \neq 0$ die kleinste der natürlichen Zahlen $a, b, c, \ldots, x$, so gilt

$$1 \leqq \text{g. g. T.}_{(a,b,c,\ldots,x)} \leqq a\,.$$

Unter der **Menge der gemeinsamen Vielfachen** der natürlichen Zahlen $a, b, c, \ldots, x$, die wir mit $V_{(a,b,c,\ldots,x)}$ bezeichnen wollen, verstehen wir bekanntlich diejenigen Zahlen z, die **sowohl** zur Menge V_a der Vielfachen von a **als auch** zur Menge V_b der Vielfachen von b **als auch** zur Menge V_c der Vielfachen von c ... **als auch** zur Menge V_x der Vielfachen von x gehören. In Anwendung von Definition 7 (↗ S. 49) gilt also folgende Definition:

▶ **D11:** $\boldsymbol{V_{(a,b,c,\ldots,x)} = V_a \cap V_b \cap V_c \cap \ldots \cap V_x}$.

Da die Mengen der Vielfachen der von Null verschiedenen natürlichen Zahlen unendliche Mengen sind, können diese nicht durch Angabe ihrer Elemente, sondern nur durch

$V_a = \{0 \cdot a, 1 \cdot a, 2 \cdot a, \ldots, n \cdot a, \ldots\}$ oder

$V_a = \{x\colon x = n \cdot a, n \in N\}$ oder $V_a = \{x\colon a \mid x\}$

dargestellt werden. Mit solchen Mengendarstellungen müssen wir operieren, wenn wir das gemeinsame Vielfache gegebener natürlicher Zahlen zu bestimmen haben.

Wie man die Menge der gemeinsamen Vielfachen von gegebenen natürlichen Zahlen ermitteln kann, sei an einem Beispiel erläutert.

■ **B16:** $V_{(20,25,30)}$ ist zu bestimmen.

Lösung:

$$V_{20} = \{x\colon x = 20 \cdot n;\ n \in N\}\,,$$
$$V_{25} = \{x\colon x = 25 \cdot n;\ n \in N\}\,,$$
$$V_{30} = \{x\colon x = 30 \cdot n;\ n \in N\}\,.$$

Nach den vorstehenden Überlegungen müssen die Elemente w von $V_{(20,25,30)} = \{w\colon w = f \cdot n;\ n \in N\}$ zugleich folgende Eigenschaften haben:

(1) $w = 20n_1 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot n_1 = 2^2 \cdot 5 \cdot n_1$ **und**

(2) $w = 25n_2 = 5 \cdot 5 \cdot n_2 = 5^2 \cdot n_2$ **und**

(3) $w = 30n_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot n_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot n_3$.

Damit w die Eigenschaft (2) hat, ist notwendig und hinreichend, daß w ein Vielfaches von $25 = 5 \cdot 5 = 5^2$ ist. Damit w zugleich die Eigenschaften (2) **und** (1) hat, ist außer der Eigenschaft, Vielfaches von 25 zu sein, noch notwendig, auch Vielfaches von $20 = 4 \cdot 5$ zu sein. Dafür ist aber hinreichend, daß es sowohl Vielfaches von 25 als auch von 4 ist, was durch $4 \cdot 25n = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5n$ erfüllt ist, denn jedes Vielfache von $5 \cdot 5$ ist erst recht Vielfaches von 5.

Das Erfülltsein der Eigenschaften (1), (2) und (3) erfordert nun außer der Eigenschaft, Vielfaches von $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$ zu sein, auch Vielfaches von $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ zu sein. Dafür ist aber bereits hinreichend, daß alle w die Eigenschaft haben, Vielfache von $3 \cdot 100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ zu sein, denn Vielfache von 2^2 bzw. 5^2 sind erst recht Vielfache von 2 bzw. 5.

Wir erhalten also

$$V_{(20,25,30)} = \{w\colon w = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot n;\ n \in N\} = \{w\colon w = 300n;\ n \in N\}\,.$$

● **34.** **a)** Wiederholen Sie die Definition des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen (k. g. V.) von natürlichen Zahlen!

b) Zeigen Sie, daß im Beispiel 16 der gefundene Wert $f = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ das k. g. V. der Zahlen 20, 25 und 30 ist!

Das im betrachteten Beispiel 16 gefundene Ergebnis gilt — wie hier nicht bewiesen werden soll — ganz allgemein, das heißt:
Die Menge $V_{(a,b,c,\ldots,x)}$ der gemeinsamen Vielfachen der natürlichen Zahlen $a, b, c, \ldots, x$ ist gleich der Menge der Vielfachen des k. g. V. dieser Zahlen.

● **35.** Wiederholen Sie das Ihnen aus dem Unterricht der Klasse 6 bekannte Verfahren zur Bestimmung des k. g. V. gegebener natürlicher Zahlen!

36.* Geben Sie ein rationelles Verfahren zur Ermittlung der Menge der gemeinsamen Vielfachen gegebener natürlicher Zahlen an, bei dem das k. g. V. dieser Zahlen benutzt wird!

37.* Wenden Sie dieses Verfahren bei der Bestimmung der Mengen der gemeinsamen Vielfachen folgender Zahlen an!

a) 2, 3, 4, 5 **b)** 20, 30, 40, 50
c) 12, 15, 18 **d)** 45, 60, 75, 90
e) 210, 49, 350 **f)** 78, 143, 221

38. Wozu haben Sie beim Arbeiten mit gebrochenen Zahlen
a) den g. g. T., **b)** das k. g. V.
zweier natürlicher Zahlen benötigt?

39.* Zeigen Sie, daß

a) $V_8 \subset V_4 \subset V_2$ **b)** $V_9 \subset V_3$ **c)** $V_{10} \subset V_5$
d) $V_{10} = V_2 \cap V_5$ **e)** $V_6 = V_2 \cap V_3$ **f)** $V_{420} = V_{15} \cap V_{28}$
g) $V_{12} = V_6 \cap V_4$ **h)** $V_{25} = V_{25} \cap V_5$ **i)** $V_{48} = V_{12} \cap V_{16}$
k) $V_6 \cap V_4 = V_3 \cap V_4$
l) $V_{24} \cap V_{20} = V_{15} \cap V_8 = V_3 \cap V_{40}$

2.11. Der Euklidische Algorithmus

Wir betrachten das geordnete Paar natürlicher Zahlen $[a; b]$. Dann gilt
entweder $b \mid a$, das heißt, es gibt ein $q \in N$ mit $a = b \cdot q$,
oder $b \nmid a$, das heißt, es gibt **kein** $q \in N$ mit $a = b \cdot q$.
Im Fall $b \nmid a$ gibt es jedoch ein $q \in N$ und ein $r \in N$ mit $0 < r < b$, so daß $a = b \cdot q + r$.

■ **B17: a)** $5 \nmid 13$, aber $13 = 5 \cdot 2 + 3$
b) $12 \nmid 77$, aber $77 = 12 \cdot 6 + 5$

Die beiden Fälle „entweder $b \mid a$ oder $b \nmid a$" können wir folgendermaßen zusammenfassen:

> **Für zwei beliebige natürliche Zahlen a und b mit $b \neq 0$ gibt es stets natürliche Zahlen q und r, so daß gilt: $a = b \cdot q + r$ mit $q \in N$, $r \in N$ und $0 \leqq r < b$.**

Durch die Bedingung $r < b$ ist die Zahl q und damit auch die Zahl r eindeutig bestimmt. Die Berechnung dieser Zahlen q und r zu zwei vorgegebenen natürlichen Zahlen a und $b \neq 0$ heißt **Division mit Rest**. Bei dieser Rechenoperation wird also zu einem Zahlenpaar $[a; b]$ ein Zahlenpaar $[q; r]$ als Ergebnis ermittelt. Die Division mit Rest für $a:b$ ist demnach im Bereich der natürlichen Zahlen stets ausführbar, und ihr Ergebnis $[q; r]$ ist stets eindeutig bestimmt.

■ **B18:**

$[a; b]$	$a = b \cdot q + r$	$[q; r]$
$[82; 17]$	$82 = 17 \cdot 4 + 14$	$[4; 14]$
$[26; 35]$	$26 = 35 \cdot 0 + 26$	$[0; 26]$
$[0; 8]$	$0 = 8 \cdot 0 + 0$	$[0; 0]$
$[20; 20]$	$20 = 20 \cdot 1 + 0$	$[1; 0]$

EUKLID (etwa 365 bis etwa 300 v. u. Z.) hat ein Rechenverfahren angegeben, das in der wiederholten Anwendung der Division mit Rest besteht. Wir nennen es den **EUKLIDischen Algorithmus**. Dabei wird von den gegebenen Zahlen a und $b \neq 0$ ausgegangen und auf sie die Division mit Rest folgendermaßen angewendet:

$$
\begin{array}{lll}
(1) & a = b \cdot q + r & 0 \leqq r < b \\
(2) & b = r \cdot q_1 + r_1 & 0 \leqq r_1 < r \\
(3) & r = r_1 \cdot q_2 + r_2 & 0 \leqq r_2 < r_1 \\
(4) & r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3 & 0 \leqq r_3 < r_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
(n) & r_{n-3} = r_{n-2} \cdot q_{n-1} + r_{n-1} & 0 \leqq r_{n-1} < r_{n-2}
\end{array}
$$

Da $b > r > r_1 > r_2 > \ldots > r_{n-1}$ (d. h., die nacheinander als Reste auftretenden natürlichen Zahlen r_i werden immer kleiner), muß nach endlich vielen Schritten immer der Rest Null auftreten. Damit bricht dann der EUKLIDische Algorithmus ab. Ist r_n der kleinste von Null verschiedene Rest, so gilt demnach

$$
\begin{array}{ll}
(n+1) & r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_n + r_n , \\
(n+2) & r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1} + 0 .
\end{array}
$$

■ **B19:** Der EUKLIDische Algorithmus lautet für

a) $[135; 12]$
$135 = 12 \cdot 11 + 3$
$12 = 3 \cdot 4 + 0$

b) $[135; 9]$
$135 = 9 \cdot 15 + 0$

c) $[135; 10]$
$135 = 10 \cdot 13 + 5$
$10 = 5 \cdot 2 + 0$

d) $[135; 200]$

$$\begin{aligned} 135 &= 200 \cdot 0 + 135 \\ 200 &= 135 \cdot 1 + 65 \\ 135 &= 65 \cdot 2 + 5 \\ 65 &= 5 \cdot 13 + 0 \end{aligned}$$

e) $[17; 21]$

$$\begin{aligned} 17 &= 21 \cdot 0 + 17 \\ 21 &= 17 \cdot 1 + 4 \\ 17 &= 4 \cdot 4 + 1 \\ 4 &= 1 \cdot 4 + 0 \end{aligned}$$

f) $[6213; 555]$

$$\begin{aligned} 6213 &= 555 \cdot 11 + 108 \\ 555 &= 108 \cdot 5 + 15 \\ 108 &= 15 \cdot 7 + 3 \\ 15 &= 3 \cdot 5 + 0 \end{aligned}$$

● **40.** Geben Sie für die Beispiele 20 a) bis f) an, wie groß jeweils r_n bzw. n sind!

41.* Wenden Sie den Euklidischen Algorithmus auf folgende Zahlenpaare an!
a) $[135; 21]$ **b)** $[135; 22]$ **c)** $[135; 23]$ **d)** $[135; 24]$
e) $[135; 25]$ **f)** $[135; 28]$ **g)** $[987; 610]$ **h)** $[610; 377]$
i) $[2\,225\,328; 23\,535]$

42. **a)** Vergleichen Sie den Euklidischen Algorithmus für die Aufgaben 41. g) und 41. h)!
b) Warum ist es wenig sinnvoll, in Aufgabe 41. neben der Aufgabe g) $[987; 610]$ auch noch die Aufgabe $[610; 987]$ zu stellen?

Wir wollen nun zwei **Anwendungsmöglichkeiten** des Euklidischen Algorithmus betrachten.

(1) Mit dem Euklidischen Algorithmus für ein geordnetes Paar $[a; b]$ natürlicher Zahlen läßt sich der g.g.T.$_{[a;b]}$ ermitteln, ohne die Primfaktorenzerlegung zu verwenden.
Es gilt nämlich:
a) Ist $a > b$ und $a = b \cdot q$ mit $q \in N$, $q \neq 0$, so ist g.g.T.$_{[a;b]} = b$, denn $a = b \cdot q$ ist unter den angegebenen Bedingungen nur eine andere Schreibweise für $b \mid a$. Da aber b der größte Teiler von b ist, kann das Paar $[a; b]$ keinen größeren gemeinsamen Teiler als b haben.
b) Ist $a = b \cdot q + r$ mit $q \in N$ und $0 < r < b$, so ist der im Euklidischen Algorithmus vorkommende letzte von Null verschiedene Rest r_n gleich dem g.g.T.$_{[a;b]}$.

● **43.** Versuchen Sie das für den speziellen Fall, daß r_3 der letzte von Null verschiedene Rest ist, zu beweisen!

Die Verwendung des Euklidischen Algorithmus zur Ermittlung des g. g. T. zweier natürlicher Zahlen ist vor allem dann zweckmäßig, wenn es schwierig ist, die Primfaktorendarstellung der beiden Zahlen zu ermitteln.

44.* Berechnen Sie unter Verwendung des Euklidischen Algorithmus
a) g.g.T.$_{[13\,505\,407;\ 555\,427]}$
b) g.g.T.$_{[4\,316\,161;\ 555\,427]}$!

(2) Als zweite Anwendung des EUKLIDischen Algorithmus wollen wir noch eine recht überraschende Darstellungsmöglichkeit für den g. g. T. der beiden natürlichen Zahlen a und b betrachten. Der g.g.T.$_{[a;b]} = r_n$ kann auch in der Form

$$r_n = a \cdot g_1 + b \cdot g_2 \qquad g_1 \in G, g_2 \in G$$

dargestellt werden **(Hauptsatz über den g. g. T.)**.

● **45.** Versuchen Sie das für den speziellen Fall, daß r_3 der letzte von Null verschiedene Rest ist, zu beweisen!

Für r_n sind g_1 bzw. g_2 keineswegs eindeutig bestimmt, wie das folgende Beispiel zeigt.

■ **B20:** Es gilt g.g.T.$_{[45;\,30]} = 15$, und man erhält für
a) $g_1 = +1$, $g_2 = -1$ die Gleichung $45 \cdot 1 + 30 \cdot (-1) = 15$
b) $g_1 = -1$, $g_2 = +2$ die Gleichung $45 \cdot (-1) + 30 \cdot 2 = 15$

● **46.* a)** Geben Sie weitere geordnete Paare ganzer Zahlen $[g_1; g_2]$ an, für die gilt $15 = 45 \cdot g_1 + 30 \cdot g_2$!
b) Überlegen Sie, wie Sie durch Umformen der Gleichung $15 = 45g_1 + 30g_2$ eine Beziehung erhalten können, aus der Sie weitere Paare bestimmen können!

2.12. Restklassen

Die Gleichung $a = b \cdot q + r$ mit $n \in N$, $b \in N$, $r \in N$, $q \in N$ und $0 \leqq r < b$ findet auch Anwendung bei der Untersuchung der Menge der natürlichen Zahlen bezüglich der Teilbarkeit durch irgendeine (von Null oder 1 verschiedene) natürliche Zahl. Wir wollen zunächst ein Beispiel betrachten.

■ **B21:** Die Menge der natürlichen Zahlen N soll bezüglich der bei Division durch 5 auftretenden Reste untersucht werden.
Nach $a = b \cdot q + r$ mit $q \in N$ und $0 \leqq r < b$ erhalten wir folgende 5 Teilmengen K_0 bis K_4:

Für $r = 0$; $K_0 = \{0, 5, 10, 15, \ldots, 5n, \ldots\}$
$r = 1$; $K_1 = \{1, 6, 11, 16, \ldots, 5n + 1, \ldots\}$
$r = 2$; $K_2 = \{2, 7, 12, 17, \ldots, 5n + 2, \ldots\}$
$r = 3$; $K_3 = \{3, 8, 13, 18, \ldots, 5n + 3, \ldots\}$
$r = 4$; $K_4 = \{4, 9, 14, 19, \ldots, 5n + 4, \ldots\}$

Diese in Beispiel 21 vorgenommene Aufspaltung der Menge der natürlichen Zahlen ist eine **Klasseneinteilung** (↗ S. 28)!

● **47. a)** Weisen Sie nach, daß in Beispiel 21 tatsächlich eine Klasseneinteilung vorgenommen wurde!
b) Wie würden Sie die dabei verwendete Äquivalenzrelation bezeichnen?

Jede der in Beispiel 21 vorkommenden Klassen heißt eine **Restklasse modulo 5.** Wählt man aus jeder der Restklassen modulo 5 genau einen (beliebigen) Vertreter aus, so entsteht ein **vollständiges Restsystem modulo 5.**

■ **B22:** Die Menge $R = \{15, 6, 22, 3, 29\}$ ist ein vollständiges Restsystem modulo 5.

● **48.** Geben Sie weitere vollständige Restsysteme modulo 5 an!

Wählt man aus jeder der Klassen K_0 bis K_4 jeweils die kleinste Zahl als Vertreter aus, so erhält man das **System der kleinsten Reste** $R' = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

● **49.** Geben Sie **a)** die Restklassen, **b)** ein Restsystem, **c)** das System der kleinsten Reste an für die Restklassen modulo 4, modulo 7, modulo 12!

Es ist nützlich (↗ S. 64ff.) und auch in der Mathematik üblich, als Grundbereich für Teilbarkeitsuntersuchungen und deshalb auch für Restklassen **nicht** die Menge der **natürlichen, sondern** die der **ganzen** Zahlen zu verwenden. Das führt u. a. zu folgenden Konsequenzen:

a) Die **Definition** für die **Teilbarkeit** ganzer Zahlen $[a; b]$ lautet:

▶ **D12: a ist durch b *teilbar* genau dann, wenn es eine ganze Zahl g gibt, so daß $a = b \cdot g$.**

■ **B23:**
a) $-3 \mid 15$, denn $15 = (-5) \cdot (-3)$
b) $-3 \mid -15$, denn $-15 = 5 \cdot (-3)$
c) $3 \mid -15$, denn $-15 = (-5) \cdot 3$

b) Die Beziehung $a = b \cdot q + r$ mit $q \in N$ und $0 \leqq r < b$ gilt für ganze Zahlen a, b, q und r in der Form

$$a = b \cdot q + r \quad \text{mit} \quad 0 \leqq |r| < |b| .$$

Trotz der Forderung $0 \leqq |r| < |b|$ sind dann q und r nicht mehr eindeutig bestimmt, wie das folgende Beispiel zeigt.

■ **B24:** Wegen
$-20 = 7 \cdot (-3) + 1$ bzw. $-20 = 7 \cdot (-2) + (-6)$
gilt sowohl
$q_1 = -3$ und $r_1 = +1$ als auch $q_2 = -2$ und $r_2 = -6$.

c) Auch für die Menge G der ganzen Zahlen können wir Restklassen bilden.

■ **B25:** In G erhalten wir modulo 5 die Restklassen

$$K_0 = \{\dots, -5n, \quad \dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots, 5n, \dots\}$$
$$K_1 = \{\dots, -5n+1, \dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots, 5n+1, \dots\}$$
$$K_2 = \{\dots, -5n+2, \dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots, 5n+2, \dots\}$$
$$K_3 = \{\dots, -5n+3, \dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots, 5n+3, \dots\}$$
$$K_4 = \{\dots, -5n+4, \dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots, 5n+4, \dots\}$$

Nun können auch negative ganze Zahlen als Vertreter der Restklassen gewählt werden.

● **50.** Geben Sie ein vollständiges Restsystem modulo 5 an, das
a) nur aus negativen ganzen Zahlen besteht,
b) sowohl negative als auch positive ganze Zahlen enthält!

Das System der kleinsten Reste (↗ S. 63) muß nunmehr als System der kleinsten **positiven** Reste bezeichnet werden.

● **51*.** **a)** Ist $S = \{-7, 2, 7, -2, -3, 6\}$ ein vollständiges Restsystem modulo 6?
b) Geben Sie das System der kleinsten positiven Reste modulo 6 an!
c) Welche Elemente gehören zum System der größten negativen Reste modulo 6?

Mitunter wird das System der **Reste mit den kleinsten absoluten** Beträgen verwendet, beispielsweise
$S_1 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ als Restsystem modulo 5 und
$S_2 = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ als Restsystem modulo 6.

2.13. Kongruenzen von Zahlen

Für die ganzen Zahlen a_1 und a_2, die derselben Restklasse modulo b angehören, also bezüglich der Division durch b gleichrestig sind (den gleichen Rest lassen), wird folgende Schreibweise verwendet:
$a_1 \equiv a_2 \bmod b$. Gelesen: „a_1 kongruent a_2 modulo b".

Entsprechend bedeutet $a_3 \not\equiv a_4 \bmod b$, daß a_3 und a_4 zu verschiedenen Restklassen modulo b gehören.

▶ **D13: Zwei ganze Zahlen a_1 und a_2 heißen nach dem Modul b *kongruent*, wenn sie bei Division durch b gleichrestig sind, also zur selben Restklasse modulo b gehören.**

■ **B26:**

a) $-12 \equiv 13 \bmod 5$, denn: $-12 = 5 \cdot (-3) + \boxed{3}$,
$13 = 5 \cdot 2 + \boxed{3}$,
also gleiche Reste.

b) $-12 \not\equiv 13 \bmod 6$, denn: $-12 = 6 \cdot (-2) + \boxed{0}$,
$13 = 6 \cdot 2 + \boxed{1}$,
also verschiedene Reste.

● **52.*** Jemand behauptet, daß auch
$-12 \not\equiv 13 \bmod 5$, denn $-12 = 5 \cdot (-2) + \boxed{(-2)}$,
$13 = 5 \cdot 2 + \boxed{3}$,
also verschiedene Reste.
Widerlegen Sie diese Auffassung!

53. Versuchen Sie folgenden Satz zu beweisen:
$a_1 \equiv a_2 \bmod b$ genau dann, wenn $b \mid (a_1 - a_2)$.

Mit Kongruenzen kann man rechnen. Neben anderen gelten für alle $a_1 \in G$, $a_2 \in G$, $r_1 \in G$, $r_2 \in G$, $b \in G$, $b \neq 0$ folgende Sätze:

Wenn $a_1 \equiv r_1 \bmod b$ und $a_2 \equiv r_2 \bmod b$, so
(1) $a_1 + a_2 \equiv r_1 + r_2 \bmod b$,
(2) $a_1 - a_2 \equiv r_1 - r_2 \bmod b$,
(3) $a_1 \cdot a_2 \equiv r_1 \cdot r_2 \bmod b$.

Satz (1) können wir folgendermaßen beweisen:
$a_1 \equiv r_1 \bmod b$ kann dargestellt werden durch $a_1 = bq_1 + r_1$,
$a_2 \equiv r_2 \bmod b$ entsprechend durch $a_2 = bq_2 + r_2$.
Dann ist

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= bq_1 + r_1 + bq_2 + r_2 \\ &= b(q_1 + q_2) + r_1 + r_2 . \end{aligned}$$

Das ist gleichbedeutend mit
$a_1 + a_2 \equiv r_1 + r_2 \bmod b$ w. z. b. w.

Satz (1) läßt sich auch auf mehr als zwei Kongruenzen ausdehnen:

(4) Wenn $a_1 \equiv r_1 \bmod b$ und $a_2 \equiv r_2 \bmod b$ und ... und $a_n \equiv r_n \bmod b$, so
$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \equiv r_1 + r_2 + \ldots + r_n \bmod b$.

● **54.** Beweisen Sie die Sätze (2), (3) und den Satz (4) für den speziellen Fall $n = 4$.

Diese Sätze können wir u. a. verwenden, um bekannte Teilbarkeitssätze zu beweisen bzw. neue Teilbarkeitssätze zu gewinnen.

■ **B27:** Wir untersuchen die natürliche Zahl
$z = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0$,
mit $0 \leqq a_i \leqq 9$ für $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ und $a_n \neq 0$ auf ihre Teilbarkeit durch 9 und kommen zu folgenden Ergebnissen:

$$a_0 \equiv a_0 \bmod 9$$
$$a_1 \cdot 10^1 \equiv a_1 \bmod 9, \text{ denn } 9 \mid (10a_1 - a_1), \text{ d. h. } 9 \mid 9a_1$$
$$a_2 \cdot 10^2 \equiv a_2 \bmod 9, \text{ denn } 9 \mid (100a_2 - a_2), \text{ d. h. } 9 \mid 99a_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n-1} \cdot 10^{n-1} \equiv a_{n-1} \bmod 9, \text{ denn } 9 \mid (10^{n-1} - 1) \cdot a_{n-1}$$
$$a_n \cdot 10^n \equiv a_n \bmod 9, \text{ denn } 9 \mid (10^n - 1) \cdot a_n$$

Wegen Satz (4) gilt dann
$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \equiv a_n + a_{n-1} + + \ldots + a_2 + a_1 + a_0 \bmod 9 .$$

In Worten: Jede natürliche Zahl läßt bei Division durch 9 denselben Rest wie ihre Quersumme.
Das heißt: Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

● **55.*** **a)** Welches ist die kleinste fünfstellige Zahl, die durch 9 teilbar ist?
b) Geben Sie die Menge aller dreistelligen Zahlen an, die sowohl durch 9 als auch durch 5 teilbar sind!

56. **a)** Zeigen Sie, daß für die natürliche Zahl
$z = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0$
mit $0 \leqq a_i \leqq 9$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ und $a_n \neq 0$ gilt
$z \equiv (a_0 + a_2 + \ldots + a_{2m}) - (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2m+1}) \bmod 11$.
b) Formulieren Sie den in a) angegebenen Teilbarkeitssatz für die Zahl 11.

■ **B28:** Wegen $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$ gilt
$1000^0 \equiv +1 \bmod 7$, $1000^0 \equiv +1 \bmod 11$, $1000^0 \equiv +1 \bmod 13$;
$1000^1 \equiv -1 \bmod 7$, $1000^1 \equiv -1 \bmod 11$, $1000^1 \equiv -1 \bmod 13$.
Und wegen Satz (3) (↗ S. 64) folgt aus der letzten Zeile:
$1000^2 \equiv +1 \bmod 7$, $1000^2 \equiv +1 \bmod 11$, $1000^2 \equiv +1 \bmod 13$;
. . . .
$1000^{2m} \equiv +1 \bmod 7$, $1000^{2m} \equiv +1 \bmod 11$, $1000^{2m} \equiv +1 \bmod 13$;
$1000^{2m+1} \equiv -1 \bmod 7$, $1000^{2m+1} \equiv -1 \bmod 11$, $1000^{2m+1} \equiv -1 \bmod 13$.
Folglich gilt für $b = 7$ und für $b = 11$ und für $b = 13$ für die Zahl
$z = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$:
$(a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0) \equiv a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \bmod b$,
$(a_5 \cdot 10^5 + a_4 \cdot 10^4 + a_3 \cdot 10^3) \equiv -(a_5 \cdot 10^2 + a_4 \cdot 10 + a_3) \bmod b$,
$(a_8 \cdot 10^8 + a_7 \cdot 10^7 + a_6 \cdot 10^6) \equiv +(a_8 \cdot 10^2 + a_7 \cdot 10 + a_6) \bmod b$,
. . . .

Also ist

$$z \equiv (a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a) - (a_5 \cdot 10^2 + a_4 \cdot 10 + a_3) +$$
$$+ (a_8 \cdot 10^2 + a_7 \cdot 10 + a_6) - \dots \bmod b$$

mit $b = 7$, $b = 11$, $b = 13$.

● 57. Formulieren Sie Teilbarkeitssätze für die Zahlen 7, 11 und 13 unter Verwendung der Ergebnisse von Beispiel 28!

58. Wählen Sie sich selbst natürliche Zahlen unterschiedlicher Stellenzahl und untersuchen Sie diese auf Teilbarkeit durch 7, 11 und 13.

59.* Begründen Sie, warum eine Zahl, die durch 1001 teilbar ist, auch durch 77, 91 und 143 teilbar ist!

60.* Eine Zahl hat die Eigenschaft, durch 77 und 91 teilbar zu sein. Begründen Sie, warum sie dann auch durch 1001 teilbar ist!

61.* Ermitteln Sie die Menge der Teiler für die Zahlen
a) 1002001   b) 16159

2.14. Lineare Kongruenzen

Wir betrachten zunächst ein Beispiel:

■ **B29:** Welche ganzen Zahlen x sind modulo 7 der Zahl 2000 kongruent, also $x \equiv 2000 \bmod 7$?
Nach den in den Abschnitten 2.12. und 2.13. dargestellten Überlegungen ist diese Kongruenz für alle ganzen Zahlen x erfüllt, die zur selben Restklasse modulo 7 gehören wie 2000, aber auch nur für diese. Wegen $2000 \equiv -2 \bmod 7$ bzw. $2000 \equiv 5 \bmod 7$ ist dies die Restklasse
$R_5 = \{\dots, -7n + 5, \dots, -9, -2, 5, 12, \dots, 7n + 5, \dots\}$ mit $n \in N \bmod 7$.
Diese Restklasse R_5 heißt die *Lösung* der Kongruenz $x \equiv 2000 \bmod 7$.
Es ist üblich, diese Lösung in der Form $x \equiv 5 \bmod 7$ bzw. $x \equiv -2 \bmod 7$ anzugeben.

▶ **D14: Unter der *Lösung der Kongruenz $x \equiv a \bmod b$* verstehen wir diejenige Restklasse $R_a \bmod b$, die a enthält.**

Die Lösung der Kongruenz $x \equiv a \bmod b$ ist also eine unendliche Menge. Sie wird meist in der Form $x \equiv a' \bmod b$ dargestellt, wobei a' das Element aus dem System der kleinsten positiven Reste mod b ist, für das $a' \equiv a \bmod b$ gilt.
Als nächstes wollen wir die Frage untersuchen, welche Lösungen die Kongruenzen $x + c \equiv a \bmod b$ bzw. $x - c \equiv a \bmod b$ haben.

Da

$x + c \equiv a \bmod b \qquad x - c \equiv a \bmod b$

gleichbedeutend sind mit

$x + c = b \cdot q + a\ (q \in G)$ bzw. $x - c = b \cdot q + a\ (q \in G)$,

gilt auch

$x = b \cdot q + a - c \qquad x = b \cdot q + a + c$

und das ist gleichbedeutend mit

$x \equiv a - c \bmod b \qquad x \equiv a + c \bmod b$,

womit wir die Lösungen erhalten haben.

■ **B30:** Die Lösungen der Kongruenzen

a) $x + 200 \equiv 31 \bmod 13$ **b)** $x - 4 \equiv 7 \bmod 8$

sind zu ermitteln:

a)
$$\begin{aligned} x + 200 &\equiv 31 &&\bmod 13\\ x &\equiv 31 - 200 &&\bmod 13\\ x &\equiv -169 &&\bmod 13\\ x &\equiv 0 &&\bmod 13\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x - 4 &\equiv 7 &&\bmod 8\\ x &\equiv 7 + 4 &&\bmod 8\\ x &\equiv 11 &&\bmod 8\\ x &\equiv 3 &&\bmod 8\end{aligned}$$

● **62.*** Ermitteln Sie die Lösungen folgender Kongruenzen

a) $x \equiv 300 \bmod 17$ **b)** $x \equiv -300 \bmod 17$

c) $x \equiv -12 \bmod 50$ **d)** $x + 55 \equiv 21 \bmod 13$

e) $x - 21 \equiv 21 \bmod 21$ **f)** $x - 55 \equiv -21 \bmod 15$

g) $x - 72 \equiv 255 \bmod 100$

Schließlich sei noch die Frage untersucht, welche Lösungen die Kongruenz $cx \equiv a \bmod b$ hat.
Da $cx \equiv a \bmod b$ gleichbedeutend ist mit $cx = b \cdot q + a\ (q \in G)$, erhält man $x = \frac{b \cdot q + a}{c}$. Nach Voraussetzung ist $x \in G$. Demnach hat die Kongruenz $cx \equiv a \bmod b$ nur dann eine Lösung, wenn $c \mid (bq + a)$.

■ **B31:** Die Kongruenz $4x \equiv 3 \bmod 6$ hat keine Lösung, denn für alle $q \in G$ ist $6 \cdot q$ geradzahlig und folglich $6 \cdot q + 3$ ungeradzahlig. Es gibt aber keine ungerade Zahl u, für die $4 \mid u$ gilt.

Anderseits kann die Kongruenz $cx \equiv a \bmod b$ aber auch mehrere Lösungen haben, wie das folgende Beispiel zeigt.

■ **B32:** Die Kongruenz $4x \equiv 2 \bmod 6$ hat die Lösungen

$x \equiv 2 \bmod 6$ und $x \equiv 5 \bmod 6$.

Nach Satz (3) (↗ S. 65) gilt nämlich für

$$
\begin{array}{llll}
x \equiv 2 & \text{und} & x \equiv 5 & \\
4x \equiv 4 \cdot 2 \bmod 6 & & 4x \equiv 4 \cdot 5 \bmod 6 \\
4x \equiv 8 \quad \bmod 6 & & 4x \equiv 20 \quad \bmod 6 \\
4x \equiv 2 \quad \bmod 6 & & 4x \equiv 2 \quad \bmod 6
\end{array}
$$

Nach demselben Satz ergibt sich für

$x \equiv 0 \bmod 6$, daß $4x \equiv 0 \bmod 6$
$x \equiv 1 \bmod 6$, daß $4x \equiv 4 \bmod 6$
$x \equiv 3 \bmod 6$, daß $4x \equiv 12 \bmod 6$ und damit $4x \equiv 0 \bmod 6$
$x \equiv 4 \bmod 6$, daß $4x \equiv 16 \bmod 6$ und damit $4x \equiv 4 \bmod 6$.

In keinem der zuletzt betrachteten vier Fälle ist $4x \equiv 2 \bmod 6$. Da vorstehend alle Restklassen mod 6 betrachtet wurden, gibt es also keine weiteren Lösungen der Kongruenz $4x \equiv 2 \bmod 6$.

Um mit Sicherheit alle Lösungen der Kongruenz $cx \equiv a \bmod b$ zu erhalten, ist es nützlich, folgende Multiplikationstabellen modulo b aufzustellen.
In einer Spalte schreibt man untereinander und in einer Zeile schreibt man nebeneinander jeweils alle Elemente aus dem System der kleinsten positiven Reste mod b, also die Zahlen $0, 1, 2, \ldots, b-1$.
An den Schnittstellen von je einer Spalte und einer Zeile trägt man jeweils diejenige Zahl aus dem System der kleinsten Reste ein, die dem Produkt aus der betreffenden Spalten- und Zeilenzahl modulo b kongruent ist.

■ **B33:** Multiplikationstabellen mod 6 und mod 7

mod 6	x: 0	1	2	3	4	5
c 0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Beachten Sie, daß in den Zeilen 0, 2, 3 und 4 keine vollständigen Restsysteme modulo 6 vorkommen.

mod 7	x: 0	1	2	3	4	5	6
c 0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

Hier kommen überall vollständige Restsysteme modulo 7 vor.

Aus diesen Tabellen sind die *Lösungen* aller Kongruenzen

$cx \equiv a \bmod 6$ bzw. $cx \equiv a \bmod 7$

aus den entsprechenden Zeilen und Spalten ablesbar:

$3x \equiv 1 \bmod 6$: *keine Lösung*, da 1 in der Zeile 3 nicht vorkommt;
$2x \equiv 4 \bmod 6$: *Lösungen* $x \equiv 2 \bmod 6$ und $x \equiv 5 \bmod 6$;

$3x \equiv 5 \bmod 7$: *Lösung* $x \equiv 4 \bmod 7$;
$55x \equiv 100 \bmod 6$ ist wegen $55 \equiv 1 \bmod 6$ und $100 \equiv 4 \bmod 6$ gleichbedeutend mit $1 \cdot x \equiv 4 \bmod 6$; *Lösung* $x \equiv 4 \bmod 6$;
$31x \equiv -45 \bmod 7$ ist wegen $31 \equiv 3 \bmod 7$ und $-45 \equiv 4 \bmod 7$ gleichbedeutend mit $3x \equiv 4 \bmod 7$; *Lösung* $x \equiv 6 \bmod 7$.

● **63.** Bilden Sie selbst weitere Aufgaben, bei denen Kongruenzen vom Typ $cx \equiv a \bmod 6$ bzw. $cx \equiv a \bmod 7$ zu lösen sind, und lösen Sie diese Aufgaben!

Man kann folgendes zeigen:
Die Kongruenz $cx \equiv a \bmod b$ hat
keine Lösungen, wenn der $\text{g.g.T.}_{[c;\,b]}$ die Zahl a nicht teilt,
genau eine Lösung, wenn $\text{g.g.T.}_{[c;\,b]} = 1$ ist,
mehr als eine Lösung, wenn der $\text{g.g.T.}_{[c;\,b]}$ die Zahl a teilt.
Im letzten Fall hat die Kongruenz so viele Lösungen, wie der $\text{g.g.T.}_{[c;\,b]}$ angibt.

■ **B34:** Es sind alle Lösungen der Kongruenz
$24x \equiv 18 \bmod 30$ zu ermitteln.
Wegen $\text{g.g.T.}_{[24;\,30]} = 6$ und $6 \mid 18$ hat diese Kongruenz 6 Lösungen, die man folgendermaßen findet:
Man füllt nur die Zeile 24 der Multiplikationstabelle modulo 30 aus und erhält

mod 30	0	1	2	3	4	5	6	7 ...	12 ...	17 ...	22 ...	27 ...
24	0	24	18	12	6	0	24	18 ...	18 ...	18 ...	18 ...	18 ...

also
$x \equiv 2 \bmod 30$, $x \equiv 7 \bmod 30$, $x \equiv 12 \bmod 30$, $x \equiv 17 \bmod 30$,
$x \equiv 22 \bmod 30$, $x \equiv 27 \bmod 30$.

Die Kongruenz $cx \equiv a \bmod b$ kann auch noch unter folgendem Gesichtspunkt betrachtet werden:
$cx \equiv a \bmod b$ ist laut Definition gleichbedeutend mit $b \mid (cx - a)$, und das ist gleichbedeutend mit $cx - a = by$, wobei $a \in G$, $b \in G$, $c \in G$, $x \in G$, $y \in G$.
Dies kann als eine lineare Gleichung mit den beiden Variablen $x \in G$ und $y \in G$ aufgefaßt werden.
Ist eine solche lineare Gleichung gegeben und werden deren ganzzahlige Lösungen gesucht, so können diese durch Rückführung auf die entsprechende Kongruenz leicht gefunden werden.
Darauf werden wir in Kapitel 3 zurückkommen. Hier wollen wir uns lediglich noch einmal mit der in Beispiel 1 (↗ S. 37) gestellten Aufgabe beschäftigen.
Die in diesem Kapitel gewonnenen Einsichten ermöglichen uns nunmehr folgenden Lösungsweg:

a) Für jedes der 17 Nichtschaltjahre bis 2000 gilt $365 \equiv 1 \mod 7$.
b) Für jedes der 5 Schaltjahre bis 2000 gilt $366 \equiv 2 \mod 7$.
c) Demnach gilt für den 1. 1. 2000:

$$17 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 27 \text{ und } 27 \equiv 6 \mod 7.$$

d) Also ist der 1. 1. 2000 gegenüber dem 1. 1. 78 um 6 Wochentage (d. h. vom Sonntag bis Sonnabend) „weitergerückt", er ist demnach ein Sonnabend.

2.15. Arbeiten mit Mengen beim Aufbau weiterer Zahlenbereiche

Wir wollen nun kurz darstellen, wie man — ausgehend von der Menge der natürlichen Zahlen — weitere Zahlenbereiche aufbauen kann. Im Unterschied zum Mathematikunterricht beginnen wir mit dem **Bereich der ganzen Zahlen.**
Im Bereich der natürlichen Zahlen sind die Rechenoperationen Addition und Multiplikation **unbeschränkt ausführbar**, während das für die Subtraktion und die Division nicht zutrifft.
Beispielsweise ist die Subtraktionsaufgabe $4 - 5$ im Bereich der natürlichen Zahlen *nicht* lösbar, d. h., es gibt *keine* natürliche Zahl x, für die $x = 4 - 5$, d.h. $x + 5 = 4$ gilt.
Nun soll — unter Verwendung der Menge der natürlichen Zahlen — ein Zahlenbereich aufgebaut werden, bei dem die Subtraktion unbeschränkt ausführbar ist. Dabei gehen wir folgendermaßen vor:

(1) Wir betrachten **geordnete Paare** natürlicher Zahlen und untersuchen sie auf **Differenzengleichheit.**

▶ **D15: Zwei geordnete Paare natürlicher Zahlen $[a; b]$ und $[c; d]$ heißen *differenzengleich* genau dann, wenn $a + d = b + c$.**

■ **B35:** [5; 3] und [9; 7] sind differenzengleich, denn $5 + 7 = 3 + 9$.
[2; 7] und [0; 4] sind **nicht** differenzengleich, denn $2 + 4 \neq 0 + 7$.
[5; 3] und [3; 5] sind **nicht** differenzengleich, denn $5 + 5 \neq 3 + 3$.

(2) Die Differenzengleichheit geordneter Paare natürlicher Zahlen $[a; b]$, $[c; d]$ und $[e; f]$ ist eine **Äquivalenzrelation.**

● **64.** Weisen Sie (2) nach!

(3) Durch die Differenzengleichheit geordneter Paare natürlicher Zahlen als Äquivalenzrelation wird in der Produktmenge $N \times N$ eine Zerlegung (Klasseneinteilung) erzeugt. Jede so erzeugte Klasse heißt **ganze Zahl.**

▶ **D16: Eine *ganze Zahl* ist eine Klasse differenzengleicher geordneter Paare natürlicher Zahlen.**

■ **B36:**

a) Die geordneten Paare [8; 5], [9; 6], [23; 20], [3; 0], ... gehören zur selben Klasse differenzengleicher Paare natürlicher Zahlen, und diese Klasse ist die **ganze Zahl + 3.**

b) Die **ganze Zahl − 3** ist dagegen die Klasse, zu der u. a. die geordneten Paare [5; 8], [6; 9], [20; 23], [0; 3], ... gehören.

c) die **ganze Zahl 0** ist die Klasse, zu der die geordneten Paare $[a; a]$, $a \in N$ gehören.

(4) Es ist nun notwendig, die Ordnung und die Rechenoperationen für diese ganzen Zahlen zu **definieren**. Das geschieht einerseits „repräsentantenweise", d. h. unter Verwendung eines Repräsentanten für die ganze Zahl (geordnetes Zahlenpaar natürlicher Zahlen), andererseits so, daß „Repräsentantenunabhängigkeit" vorliegt.

▶ **D17: Die ganze Zahl g_1 sei durch $[a; b]$, die ganze Zahl g_2 durch $[c; d]$ repräsentiert. Dann soll gelten:**

(a) $g_1 < g_2$ **genau dann, wenn** $a + d < b + c$,

(b) $g_1 + g_2 = [a; b] + [c; d] \underset{\text{Df}}{=} [a + c; b + d]$,

(c) $g_1 - g_2 = [a; b] - [c; d] \underset{\text{Df}}{=} [a - c; b - d]$,

(d) $g_1 \cdot g_2 = [a; b] \cdot [c; d] \underset{\text{Df}}{=} [ac + bd; ad + bc]$.

● **65.** Es sei **a)** $g_1 = -3$, $g_2 = +7$; **b)** $g_1 = -3$, $g_2 = -7$;
c) $g_1 = +3$, $g_2 = -7$.

Ordnen Sie jeweils die beiden Zahlen der drei Paare nach der Größe und berechnen Sie jeweils Summe, Differenz und Produkt der beiden Zahlen unter Verwendung von Definition 17!

(5) Die ganze Zahl Null und die positiven ganzen Zahlen sind eine echte Teilmenge der ganzen Zahlen. Sie lassen sich den natürlichen Zahlen eineindeutig zuordnen. Nun gilt

$+a < +b$ genau dann, wenn $a < b$; $+a \in G$, $+b \in G$, $a \in N$, $b \in N$,
$(+a) + (+b) = +c$ genau dann, wenn $a + b = c$; $+a \in G$, $+b \in G$, $a \in N$, $b \in N$,

und Entsprechendes gilt für die Subtraktion und Multiplikation. Bezüglich der Ordnung nach der Größe und den Rechenoperationen Addition, Subtraktion und Multiplikation ist die Teilmenge der ganzen Zahlen, bestehend aus der ganzen Zahl Null und den positiven ganzen Zahlen gegen die Menge der natürlichen Zahlen austauschbar. In diesem Sinne ist der Ausgangsbereich (hier die Menge der *natürlichen Zahlen*) in dem neuen Bereich (hier die Menge der *ganzen Zahlen*) gewissermaßen mit enthalten.

Der Bereich der ganzen Zahlen kann nun benutzt werden, um den Bereich der **rationalen Zahlen** aufzubauen. Dabei geht man analog zum Aufbau des Bereichs der ganzen Zahlen aus dem der natürlichen Zahlen vor.

Ziel dieser Erweiterung ist ein Zahlenbereich, in dem auch die Division — jedoch mit Ausnahme der Division durch Null — unbeschränkt ausführbar ist.

● **66.** **a)** Führen Sie diesen Aufbau durch, indem Sie von der Äquivalenzrelation der Quotientengleichheit zwischen geordneten Paaren ganzer Zahlen ausgehen!
b) Definieren Sie auch die Division rationaler Zahlen als Umkehroperation der Multiplikation!

67. Wählen Sie sich Beispiele für Aufgaben der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division rationaler Zahlen und lösen Sie diese Aufgaben
a) unter Verwendung der im Ergebnis von Aufgabe 66 erhaltenen Definitionen
b) unter Verwendung der Rechenregeln für die Rechenoperationen mit rationalen Zahlen, die Sie aus dem Unterricht kennen!

68. Überlegen Sie, welche Teilmenge der Menge der rationalen Zahlen sich bezüglich der behandelten Relationen und Operationen ebenso verhält wie die Menge der ganzen Zahlen, aus denen wir die rationalen Zahlen aufgebaut haben!

Im Bereich der rationalen Zahlen sind nicht nur die vier Grundrechenoperationen (mit Ausnahme der Division durch die rationale Zahl Null) unbeschränkt ausführbar. Dieser Bereich hat auch die Eigenschaft, daß seine Zahlen **dicht** liegen. Darunter versteht man folgendes: Gilt für zwei rationale Zahlen a und b die Beziehung $a < b$, so gibt es (mindestens) eine weitere rationale Zahl x mit der Eigenschaft $a < x < b$. Wie wir aber aus dem Mathematikunterricht der Klasse 7 wissen, ist dennoch nicht jedem Punkt der Zahlengeraden eine rationale Zahl zugeordnet (↗ [13c] S. 79). Es gibt auf der Zahlengeraden nämlich Punkte, denen solche Zahlen wie $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$ usw. zugeordnet sind, also Zahlen, von denen Sie wissen, daß sie keine rationalen, sondern **irrationale Zahlen** sind. Die Vereinigung der Menge der rationalen Zahlen und die der irrationalen Zahlen heißt die **Menge P der reellen Zahlen**.

2.16. Abzählbarkeit und Nichtabzählbarkeit unendlicher Mengen

Aus Kapitel 1 wissen wir bereits,
- was man unter **gleichmächtigen Mengen** versteht,
- daß die Gleichmächtigkeit von Mengen eine Äquivalenzrelation ist,
- daß unendliche Teilmengen der Menge der natürlichen Zahlen dieser gleichmächtig sind.

Bei den unendlichen Mengen sind abzählbare und nichtabzählbare unendliche Mengen zu unterscheiden. (↗[15] S. 62ff.)

▶ **D18: Eine unendliche Menge heißt genau dann *abzählbar*, wenn sie der Menge der natürlichen Zahlen gleichmächtig ist. Ist dies nicht der Fall, so heißt sie *nicht-abzählbar*.**

Nach dieser Definition sind z. B. alle unendlichen Teilmengen der Menge der natürlichen Zahlen abzählbar. Beispielsweise haben wir für die Menge der ungeraden Zahlen und die Menge der Primzahlen in Kapitel 1 gezeigt, daß sie der Menge der natürlichen Zahlen gleichmächtig sind, folglich sind diese Mengen auch abzählbar.

● **69.** Geben Sie weitere Beispiele für abzählbare Mengen an, die zugleich echte Teilmengen der Menge der natürlichen Zahlen sind!

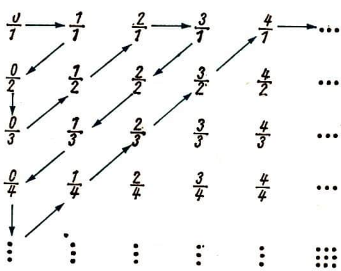
Aber auch für bestimmte weitere unendliche Mengen, die keine Teilmengen der Menge der natürlichen Zahlen sind, läßt sich zeigen, daß sie abzählbar sind.

■ **B37:** Wir wollen zunächst zeigen, daß die Menge G der ganzen Zahlen abzählbar ist. Dazu brauchen wir nur zu zeigen, daß die Menge G gleichmächtig zur Menge N der natürlichen Zahlen ist, d. h., daß es eine eineindeutige Abbildung gibt, die G auf N abbildet.
Offensichtlich leistet dies die nachstehend vorgenommene Zuordnung.

$$\begin{array}{lccccccccc}
N: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \;\ldots & 2n & 2n+1 & \ldots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
G: & 0 & +1 & -1 & +2 & -2 & +3 \;\ldots & -n & +(n+1) & \ldots
\end{array}$$

● **70.** Begründen Sie, warum die natürlichen Zahlen gewissermaßen „ausreichen", um jedem Element aus G eine natürliche Zahl zuzuordnen!

■ **B38:** Nun soll gezeigt werden, daß auch die Menge der Brüche *abzählbar* ist. Dazu denken wir uns diese Menge zunächst in einer Form aufgeschrieben, die garantiert, daß bei der Abzählung in Pfeilrichtung kein Bruch ausgelassen wird. Das ist z. B. folgendermaßen möglich:



Die umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen jedem Element der Menge N der *natürlichen Zahlen* und jedem Element der Menge B der *Brüche* läßt sich nun in der Weise herstellen, wie durch die oben eingezeichneten Pfeile angedeutet wird. Man erhält die folgende Zuordnung:

$$\begin{array}{lcccccccccc} N: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ B: & \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{0}{2} & \frac{0}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{2}{2} & \frac{1}{3} & \dots \end{array}$$

Damit ist gezeigt, daß die Menge B der Brüche abzählbar ist.

Daß nicht jede unendliche Menge die Eigenschaft hat, *abzählbar* zu sein, zeigt das folgende Beispiel.

■ **B39:** Die Menge der reellen Zahlen P' im Intervall $0 < r < 1$ ist *nichtabzählbar*.

Beweis:

Bekanntlich können wir die reellen Zahlen durch unendliche Dezimalbrüche darstellen und damit alle reellen Zahlen r im Intervall $0 < r < 1$ in der Form

$r = 0, z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 z_7 \dots$, wobei die z_i $(i = 1; 2; 3; \dots)$ jeweils eine der Grundziffern $0, 1, 2, \dots, 9$ sind.

Damit die Darstellung eindeutig wird, schließen wir den Fall, daß von einer Stelle an alle z_i gleich 9 sind, aus. Wegen $0 < r$ sind auch nicht alle z_i gleich 0.

Nun nehmen wir an, daß die Menge P' abzählbar und damit in folgender Form darstellbar ist:

$$\begin{array}{lllllll} r_1 & = & 0, & z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} & \cdots \\ r_2 & = & 0, & z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} & \cdots \\ r_3 & = & 0, & z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} & \cdots \\ r_4 & = & 0, & z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

d. h., in der Folge $r_1, r_2, \dots$ kommen **alle** reellen Zahlen r mit $0 < r < 1$ vor.

Wir bilden nunmehr eine Zahl r', indem wir die Ziffern längs der „Diagonalen" (oben durch Pfeile angedeutet) dafür auswählen, nämlich

$r' = 0, z_{11} z_{22} z_{33} z_{44} \dots$

Ersetzen wir in dieser Darstellung z_{11} durch eine Ziffer $q_1 \neq z_{11}$, z_{22} durch eine Ziffer $q_2 \neq z_{22}$ usw., so erhalten wir eine Zahl

$r'' = 0, q_1 q_2 q_3 q_4 \dots$,

die zwar eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 ist, aber in der Folge $r_1, r_2, \dots$ nicht vorkommt. Die Annahme, daß die Menge der reellen Zahlen im

Intervall abzählbar ist, führt also zu einem **Widerspruch** und kann daher nicht mehr aufrechterhalten werden. Dies gilt, wie noch zu beweisen wäre, auch für die Menge aller reellen Zahlen.

● **71.** Nennen Sie weitere Beispiele für nichtabzählbare Mengen!

Lösungen — Kapitel 2

6. In ihrer praktischen Tätigkeit mußten die Menschen von Anfang an mit Mengen operieren. Indem die Menschen diese Tätigkeiten vorbedachten und über sie nachdachten, haben Sie durch Abstraktion die natürlichen Zahlen beim Operieren mit Mengen gewonnen. Auch hieran sieht man, daß Begriffe der Mathematik „nirgends anders herkommen als aus der wirklichen Welt“ (Engels), und zwar in dem Sinne, daß dort objektiv Vorhandenes durch die menschliche Tätigkeit zu Erkanntem wird und damit gegenüber dem objektiv Vorhandenen eine neue Qualität darstellt. Selbst wenn die Auffassung, die natürlichen Zahlen seien von Gott geschaffen keinen Glauben an Gott, sondern die Meinung zum Ausdruck bringen soll, der Mensch habe sie vorgefunden, stimmt dies also nicht. Er mußte selbst etwas tun, also seinen Verstand oder „Geist“ anstrengen. Ebensowenig hat der Mensch die natürlichen Zahlen in seinem „Geist“ frei erfunden, denn die natürliche Zahl ist ein abstrakter Begriff, durch den objektiv existierende Sachverhalte (Mengen bestimmter Mächtigkeiten) abgebildet werden.

8. a) Begründung für die Kommutativität der Addition natürlicher Zahlen:
$a + b$ sei repräsentiert durch $M_1 \cup M_2$ mit $M_1 \cap M_2 = \emptyset$.
$b + a$ ist dann repräsentiert durch $M_2 \cup M_1$ mit $M_1 \cap M_2 = \emptyset$.
Wegen $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$ gilt erst recht $M_1 \cup M_2 \sim M_2 \cup M_1$.
Das heißt: Beide Vereinigungen sind gleichmächtig, repräsentieren also dieselbe Kardinalzahl. Demnach ist $a + b = b + a$.

b) Entsprechend läßt sich auch die Assoziativität der Addition natürlicher Zahlen begründen.

9. a) $A \setminus B = \{1, 3, 5, 7, 9\} = A$; $\quad B \setminus A = \{0, 2, 4, 6, 8\} = B$

c) Aus Definition 5 folgt für alle Mengen A und B die Beziehung $A \setminus B = A$ genau dann, wenn $A \cap B = \emptyset$.

10. a) $M_1 \setminus M_2 = \emptyset$; $\quad M_2 \setminus M_1 = \{0, 1, 4, 6, 8, 9\}$

c) $M_1 \setminus M_2 = \emptyset$ genau dann, wenn $M_1 \subseteq M_2$ [nach D5].

d) $M_1 \setminus M_2 = M_2 \setminus M_1$ genau dann, wenn $M_1 = M_2$.

11. a) $A \setminus B = \{3, 9, 15, 21, 27\} = \{x: x = 3 \cdot (2n + 1); n \in N \text{ und } x < 30\}$, $B \setminus A = \emptyset$

b) $A \setminus B = \{a: (3 \mid a \text{ und } 4 \nmid a;\ a \in N) \text{ und } a < 50\} \cup \{a: 3 \mid a;\ a \in N;\ 50 < a < 100\}$

$B \setminus A = \{a: (4 \mid a \text{ und } 3 \nmid a;\ a \in N) \text{ und } a < 50\}$

c) $A \setminus B = \{c : 5 \mid c \text{ und } 7 \nmid c;\ c \in N\}$
$B \setminus A = \{c : 7 \mid c \text{ und } 5 \nmid c;\ c \in N\}$

d) $A \setminus B = \{e : 3 \mid e,\ e \in N\} = A$; $B \setminus A = \{e : 3 \nmid e;\ e \in N\} = B$

e) $A \setminus B = \{2\}$; $B \setminus A$ ist die Menge aller zusammengesetzten ungeraden Zahlen.

f) $A \setminus B$ ist die Menge aller ungeraden Primzahlen.
$B \setminus A$ ist die Menge aller geraden Zahlen mit Ausnahme der Zahl 2.

g) $A \setminus B$ ist die Menge aller Rechtecke, die keine Quadrate sind.
$B \setminus A = \emptyset$

h) $A \setminus B$ ist die Menge aller Drachenvierecke, die keine Rhomben sind.
$B \setminus A$ ist die Menge aller Trapeze, die keine Rhomben sind.

i) $A \setminus B = \{m, u\}$; $B \setminus A = \{i, n, e_2\}$

12. a) $[w_1; s_1]$, $[w_1; s_2]$, $[w_1; s_3]$ $[w_1; s_4]$
$[w_2; s_1]$, $[w_2; s_2]$, $[w_2; s_3]$ $[w_2; s_4]$
$[w_3; s_1]$, $[w_3; s_2]$, $[w_3; s_3]$ $[w_3; s_4]$

b) $W \times S = \{[w_1; s_1], [w_1; s_2], \ldots, [w_3; s_3], [w_3; s_4]\}$
Es gilt $W \times S \neq S \times W$, denn beide Produktmengen bestehen aus verschiedenen geordneten Paaren.

14. a) Dies ist schon durch Aufg. 12. b) bewiesen (Angabe eines Gegenbeispiels).

b) Nur wenn $M_1 = M_2$, so gilt $M_1 \times M_2 = M_2 \times M_1$.

17. a) $M_1 = \{a\}$ sei Repräsentant für 1 und $M_2 = \{b\}$ Repräsentant für 1.
Dann ist $M_1 \times M_2 = \{[a; b]\}$, also erhält man 1 geordnetes Paar, also ist $1 \cdot 1 = 1$.

b) $M_1 = \{a\}$ sei Repräsentant für 1, und M_2 ist die leere Menge.
Daraus läßt sich kein geordnetes Paar bilden, denn es gibt kein Element, das an zweiter Stelle steht. Die Anzahl der geordneten Paare ist gleich 0, also $1 \cdot 0 = 0$.

19. a) $3 \mid 18$, denn für $x = 6$ gilt $3 \cdot x = 18$.

b) $5 \mid 0$, denn für $x = 0$ gilt $5 \cdot x = 0$.

c) $3 \nmid 16$, denn es gibt keine natürliche Zahl x, so daß gilt $3 \cdot x = 16$.

d) $84 \nmid 12$, denn es gibt keine natürliche Zahl x, so daß gilt $84 \cdot x = 12$.

20. $a \mid b$ gilt für **b), c), e), g)**.

21. $b \mid a$ gilt für **a), b), d), f), g)**.

22. a) $n \mid 0$ für alle natürlichen Zahlen n, denn $n \cdot 0 = 0$.

b) $0 \nmid n$ für alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen n, denn es gibt keine natürliche Zahl x, so daß gilt $0 \cdot x = n$, wenn $n \neq 0$.

23. a) $T_{10} = \{1, 2, 5, 10\}$ $V_{10} = \{x : x = 10n;\ n \in N\}$

b) $T = \{1\}$ $V_1 = N$

c) $T_{100} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$ $V_{100} = \{x : x = 100n;\ n \in N\}$

f) $T_{1000} = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 125, 200, 250, 500, 1000\}$

l) $T_{12000} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 25, 30, 32, 40, 48, 50, 60, 75, 80, 96, 100, 120, 125, 150, 160, 200, 240, 250, 300, 375, 400, 480, 500, 600, 750, 800, 1000, 1200, 1500, 2000, 2400, 3000, 4000, 6000, 12000\}$

25. Natürliche Zahl, deren Menge der Teiler mindestens 3 Elemente enthält.
26. Jede von Null verschiedene natürliche Zahl ist mindestens durch 1 und sich selbst teilbar; 0 ist durch jede von Null verschiedene natürliche Zahl teilbar.
27. Die Anzahl der Elemente ist nur bei Quadratzahlen ungerade, sonst ist sie — wegen der vorkommenden Teilerpaare — geradzahlig.
28. Die Teilbarkeitsrelation ist nicht symmetrisch.
30. a) $T_{720} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 48, 60, 72, 80, 90, 120, 144, 180, 240, 360, 720\}$
b) $T_{51} = \{1, 3, 17, 51\}$
c) $T_{61} = \{1, 61\}$
d) $T_{71} = \{1, 71\}$
e) $T_{81} = \{1, 3, 9, 27, 81\}$
f) $T_{120} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}$
g) $T_{125} = \{1, 5, 25, 125\}$
h) $T_{130} = \{1, 2, 5, 10, 13, 26, 65, 130\}$
i) $T_{135} = \{1, 3, 5, 9, 15, 27, 45, 135\}$
31. $T_{360} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360\}$
32. a) $T_5 = \{1, 5\}$
b) $T_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
c) $T_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$
d) $T_{110} = \{1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110\}$
e) $T_1 = \{1\}$
f) $T_9 = \{1, 3, 9\}$
36. Angenommen, die natürlichen Zahlen $a, b, c, \ldots, x$ haben als k. g. V. die Zahl z. Dann sind auch alle Vielfachen von z gemeinsame Vielfache dieser Zahlen, während alle anderen natürlichen Zahlen keine gemeinsamen Vielfachen dieser Zahlen sind. Demnach ist die Menge der gemeinsamen Vielfachen der gegebenen natürlichen Zahlen gleich der Menge der Vielfachen des k. g. V. dieser Zahlen.
37. a) V_{60} b) V_{600} c) V_{180} d) V_{900} e) V_{7350} f) V_{14586}
39. a) Für alle Elemente $x \in V_8$ gilt $8 \mid x$ und damit erst recht $4 \mid x$. Andererseits gilt beispielsweise $4 \in V_4$ und $4 \notin V_8$. Somit gilt $V_8 \subset V_4$. Entsprechend läßt sich auch zeigen $V_4 \subset V_2$ sowie $V_9 \subset V_3$ (b) und $V_{10} \subset V_5$ (c).
d) bis l) ergeben sich aus dem Satz, daß $V_{(a,b,c,\ldots,x)} = V_a \cap V_b \cap V_c \ldots \cap V_x$ gleich der Menge der Vielfachen des k. g. V. dieser natürlichen Zahlen sind.

41. i) $$\begin{aligned}
2225328 &= 23535 \cdot 94 + 13038\\
23535 &= 13038 \cdot 1 + 10497\\
13038 &= 10497 \cdot 1 + 2541\\
10497 &= 2541 \cdot 4 + 333\\
2541 &= 333 \cdot 7 + 210\\
333 &= 210 \cdot 1 + 123\\
210 &= 123 \cdot 1 + 87\\
123 &= 87 \cdot 1 + 36\\
87 &= 36 \cdot 2 + 15\\
36 &= 15 \cdot 2 + 6\\
15 &= 6 \cdot 2 + 3\\
6 &= 3 \cdot 2
\end{aligned}$$

44. a) 1 b) 31

46. b) $15 = 45g_1 + 30g_2 \mid : 15$

$1 = 3g_1 + 2g_2$

$g_2 = \frac{1-3g_1}{2}$

Für alle ungeraden g_1 ist $\frac{1-3g_1}{2}$ ganzzahlig, also z. B. $[-3;\ 5]$, $[-1;\ 2]$, $[+1;\ -1]$, $[+3;\ -4]$ usw.

51. a) ja, denn $-7 \in K_5 \bmod 6$; $2 \in K_2 \bmod 6$; $7 \in K_1 \bmod 6$; $-2 \in K_4 \bmod 6$; $-3 \in K_3 \bmod 6$, $6 \in K_0 \bmod 6$, also sind alle Restklassen mod 6 genau einmal vertreten.

52. $-2 \equiv 3 \bmod 5$, also doch gleichrestig

55. a) 10008

b) Dazu gehören alle auf 0 endenden dreistelligen Zahlen, deren Quersumme 9 oder 18 ist (d. h. 900, 810, 180, 720, 270, 630, 360, 540, 450, 990) sowie alle auf 5 endenden Zahlen, deren Quersumme 9 oder 18 ist, d. h. 135, 315, 225, 405, 495, 945, 585, 855, 675, 765.

59. Weil $7 \mid 1001$ und $11 \mid 1001$ und $13 \mid 1001$, gilt auch
$(77 =)\ 7 \cdot 11 \mid 1001$, $(91 =)\ 7 \cdot 13 \mid 1001$ $(143 =)\ 11 \cdot 13 \mid 1001$.

60. Aus $77 \mid a$ und $91 \mid a$ folgt $7 \mid a$ und $11 \mid a$ und $13 \mid a$.
Dann gilt auch $(1001 =)\ 7 \cdot 11 \cdot 13 \mid a$.

61. a) $T_{1002001} = \{1, 7, 11, 13, 49, 77, 91, 121, 143, 169, 539, 637, 847, 1001, 1183, 1573, 1859, 5929, 7007, 8281, 11011, 13013, 20449, 77077, 91091, 143143, 1002001\}$

b) $T_{16159} = \{1, 11, 13, 113, 143, 1243, 1469, 16159\}$

62. a) $x \equiv 11 \bmod 17$ b) $x \equiv 6 \bmod 17$ c) $x \equiv 38 \bmod 50$
d) $x \equiv 5 \bmod 13$ e) $x \equiv 0 \bmod 21$ f) $x \equiv 4 \bmod 15$
g) $x \equiv 27 \bmod 100$

3 Arbeiten mit Mengen beim Lösen von Gleichungen und Ungleichungen

3.1. Einführung

Die Begriffe *Gleichung* und *Ungleichung* sowie das Arbeiten mit ihnen spielen im Mathematikunterricht von Anfang an eine wesentliche Rolle. Dies liegt vor allem daran, daß zahlreiche praktische Problemstellungen mit Hilfe von Gleichungen bzw. Ungleichungen mathematisch bearbeitet werden können.

■ **B1:** Ein Dreher braucht zur Anfertigung eines Werkstückes eine halbe Stunde. Da mehrere gleiche Teile anzufertigen sind, wäre eine Vorrichtung zweckmäßig. Mit einer solchen Vorrichtung könnte ein Teil in 20 Minuten hergestellt werden. Der Bau der Vorrichtung dauert 4 Stunden.
Wieviel Teile müßten mindestens hergestellt werden, damit durch den Bau der Vorrichtung Zeit eingespart wird? (Olympiadeaufgabe 1965, Kl. 9)

Die *Lösung* kann man folgendermaßen erhalten:
- Bei einem Werkstück werden 10 Minuten eingespart.
- Um 4 Stunden, d. h. 240 Minuten einzusparen, müssen also 24 Werkstücke hergestellt werden. Damit wäre die Zeit für das Anfertigen der Vorrichtung gewonnen.
- Zweckmäßig wird diese, wenn mehr als 24 Werkstücke herzustellen sind.

Nicht immer wird man aber durch derart einfache Überlegungen zum Ziel kommen, deshalb ist oftmals ein Einsatz einer **mathematischen Theorie** (z. B. der Gleichungslehre) zweckmäßig. Dazu könnte man so vorgehen:

- n sei die Anzahl der herzustellenden Werkstücke ($n > 0$, $n \in N$).
- Ohne Vorrichtung wird dafür die Zeit $t_1 = n \cdot \frac{1}{2}$ benötigt (Angabe in Std.)
- Mit Vorrichtung wird dafür die Zeit $t_2 = n \cdot \frac{1}{3} + 4$ benötigt.
- Es soll $t_2 < t_1$, also $\frac{n}{3} + 4 < \frac{n}{2}$ sein.

Diese Ungleichung wird für alle $n > 24$ zu einer *wahren*, für alle $n \leqq 24$ zu einer *falschen* Aussage. Dies könnte man durch Probieren ermitteln. Das geht aber nur bei einfachen Aufgaben. Deshalb sind Verfahren zum Lösen von Gleichungen und Ungleichungen entwickelt worden, die Sie zum Teil aus Ihrem Mathematikunterricht kennen.

Wir wollen im folgenden zeigen, wie beim Lösen von Gleichungen bzw. Ungleichungen Begriffe und Arbeitsweisen der Mengenlehre vorteilhaft verwendet werden können. Dabei werden wir zunächst einige Grundbegriffe wiederholen und dann das Lösen von Gleichungen bzw. Ungleichungen unterschiedlicher Typen betrachten. Dabei geht es nicht um eine systematische Behandlung der Gleichungslehre, sondern um das Demonstrieren und Erläutern mengentheoretischen Arbeitens an einigen wichtigen Beispielen.

3.2. Gleichungen und Ungleichungen mit einer (freien) Variablen

3.2.1. *Zusammenstellung wichtiger Grundbegriffe*

▶ **D1: Ausdrücke, in denen zwei Terme[1]) durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind, heißen *Gleichungen*.**

▶ **D2: Ausdrücke in denen zwei Terme durch eines der Zeichen „$<$“, „$>$“, „$\leqq$“, „$\geqq$“, „$\neq$“ verbunden sind, heißen *Ungleichungen*.**

Im folgenden werden hauptsächlich Ungleichungen, in denen das Zeichen „$<$“ oder das Zeichen „$>$“ vorkommt, eine Rolle spielen.

▶ **D3: Die Terme heißen jeweils *linke* bzw. *rechte Seite* der Gleichung oder Ungleichung.**

Bei Gleichungen und Ungleichungen ist zu unterscheiden, ob Variable vorkommen oder nicht. Enthält keine der beiden Seiten eine Variable, so sind die Gleichungen bzw. Ungleichungen (wahre oder falsche) **Aussagen**.

● **1.*** Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind!

a) $7 + 5 = 13$ **b)** $2{,}4 - 1{,}8 \leqq 1$

c) $\frac{68}{12} = \frac{85}{15}$ **d)** $\frac{3}{8} : \frac{7}{4} > 3$

[1]) Unter einem Term versteht man eine Ziffer oder eine Variable oder eine sinnvolle Zusammensetzung aus ihnen mit Hilfe von Operationszeichen (z. B. „+“, „−“, „·“, „:“) und Klammern. Eine Zeichenreihe, die ein Relationszeichen enthält, ist kein Term.

2.* Setzen Sie zwischen die folgenden Terme an der durch $\cdots$ gekennzeichneten Stelle eines der Zeichen „=“, „<“ oder „>“, so daß wahre Aussagen entstehen!

a) $3 + 4 \ldots\ 2 + 8$

b) $\frac{3}{2} + \frac{4}{3} \ldots \frac{34}{12}$

c) $3{,}76 - 1{,}55 \ldots 1{,}14 + 1{,}00$

d) $\frac{17}{5} \cdot \frac{3}{7} \ldots \frac{36}{7} - \frac{16}{5}$

Für das Lösen praktischer Probleme sind aber Gleichungen und Ungleichungen, in denen Variable vorkommen, wichtiger. Dabei ist allerdings noch zu unterscheiden, ob die Variablen *frei* oder *gebunden* sind. Eine Variable ist *frei*, wenn für sie beliebige Elemente aus einem vorgegebenen Grundbereich eingesetzt werden dürfen, ohne daß weitere einengende Vorschriften bestehen. Eine Variable ist *gebunden*, wenn in Zusammenhang mit dieser Variablen bestimmte Formulierungen, z. B. „es gibt ein x“ oder „für alle x gilt“ auftreten. Die folgenden Beispiele enthalten gebundene Variable.

■ **B2:**

a) Es gibt eine natürliche Zahl n, so daß $3 + n = 7$.

b) Für alle reellen Zahlen a und b gilt:
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

c) Es gibt eine natürliche Zahl m, so daß $10 + m < 8$.

d) Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $n + n < n^2$.

e) Für alle reellen Zahlen a, b und c gilt: $(a + b) \cdot c > a + b$.

Gleichungen und Ungleichungen, in denen alle vorkommenden Variablen gebunden sind, sind ebenfalls (wahre oder falsche) Aussagen.

● 3.* Welche der Aussagen im Beispiel 2 sind wahr, und welche sind falsch?

Gleichungen bzw. Ungleichungen mit mindestens einer freien Variablen gehören zu den **Aussageformen**. Aus ihnen entstehen Aussagen, wenn für alle Variablen Elemente aus dem jeweiligen **Grundbereich** eingesetzt werden.
Die Variablengrundbereiche müssen jeweils angegeben werden. In der Regel sind es Mengen von Zahlen oder Größen. Bei Anwendungsaufgaben werden die Grundbereiche meist durch den praktischen Sachverhalt bestimmt.
Beim Überführen von Gleichungen bzw. Ungleichungen mit (mindestens einer) freien Variablen durch Einsetzen von Elementen aus dem jeweiligen Grundbereich für alle Variablen (Belegen aller Variablen) sind besonders die Fälle interessant, bei denen wahre Aussagen entstehen. Dabei gibt es folgende Möglichkeiten:

▶ **D4: Eine Gleichung bzw. Ungleichung mit (mindestens einer) freien Variablen heißt in einem Grundbereich**
a) *unerfüllbar* genau dann, wenn es nicht möglich ist, die vorkommenden Variablen durch Elemente aus den Grundbereichen so zu ersetzen, daß eine wahre Aussage entsteht.

b) *erfüllbar* genau dann, wenn es möglich ist, die vorhandenen Variablen durch Elemente aus den Grundbereichen so zu ersetzen, daß eine wahre Aussage entsteht. Sie heißt in diesem Grundbereich *allgemeingültig* genau dann, wenn durch Ersetzung der vorkommenden Variablen durch jedes Element aus den jeweiligen Grundbereichen eine wahre Aussage entsteht.

■ **B3:** Die Gleichung $x + 3 = 5$ ist erfüllbar in N, G, R und P.[1])
Die Gleichung $3 - x = 5$ ist unerfüllbar in N und R^*,
aber erfüllbar in G, R und P.
Die Ungleichung $3 + x \geqq 3$ ist allgemeingültig in N und R^*,
sie ist nicht mehr allgemeingültig in G, R und P.

● **4.*** Entscheiden Sie, ob die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen im angegebenen Grundbereich erfüllbar oder sogar allgemeingültig sind!

a) $3x + 7 = x - 4;\quad x \in N$
b) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;\quad a \in P;\, b \in P$
c) $2x + 4y < 7;\quad x \in R;\, y \in R$
d) $\frac{1}{x} + x = -2;\quad x \in R$
e) $5{,}4b - 3{,}7 > 1{,}6;\quad b \in N$

5.* Stellen Sie Gleichungen auf, die in N bzw. R
a) unerfüllbar, **b)** erfüllbar, **c)** allgemeingültig sind!

Eine Gleichung, die in einem Grundbereich allgemeingültig ist, ist in diesem natürlich erst recht erfüllbar. Die Umkehrung gilt aber nicht.
G_r sei Menge aller Gleichungen über einem Grundbereich, E die Menge der erfüllbaren, U die Menge der unerfüllbaren und A die Menge der allgemeingültigen Gleichungen über diesem Grundbereich. Die Beziehungen zwischen diesen Mengen ist aus dem Diagramm in Bild 1 ersichtlich.

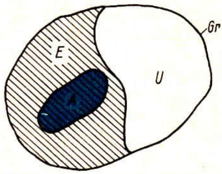


Bild 1

● **6.** Sind die Mengen G_r, E, U, A endlich oder unendlich? Begründen Sie Ihre Entscheidung!

7.* Stellen Sie die Zusammenhänge zwischen G_r, E, U, A unter Verwendung der Teilmengenbeziehungen bzw. des Durchschnittes dar!

Gleichungen, die über einen gewissen Grundbereich allgemeingültig sind, heißen auch **Identitäten** über diesem Grundbereich.

Im folgenden wollen wir zunächst Gleichungen und Ungleichungen betrachten, in denen ***genau eine*** *(freie) Variable vorkommt.*

[1]) Die Symbole werden in gleicher Weise wie in Kap. 2 (↗ S. 38) gebraucht.

▶ **D5: Es sei eine Gleichung bzw. Ungleichung mit einer Variablen gegeben. Jedes Element aus dem Variablengrundbereich, das diese Gleichung bzw. Ungleichung erfüllt, d. h. zu einer wahren Aussage macht, heißt *Lösung* dieser Gleichung bzw. Ungleichung.**

▶ **D6: Die Gesamtheit aller Lösungen aus einem Grundbereich ist die *Lösungsmenge* der Gleichung bzw. Ungleichung über diesem Grundbereich.**

Eine Gleichung bzw. Ungleichung lösen, heißt **alle** Lösungen — also die Lösungsmenge — zu finden. Dabei wissen wir, daß die Lösungsmenge einer Gleichung bzw. Ungleichung vom Grundbereich abhängt.

■ **B4:**

a) Die Gleichung $2x + 3 = 4$ ist in N unerfüllbar, man schreibt $L_1 = \emptyset$ (die Lösungsmenge ist die leere Menge).
In R^* hingegen gilt: $x = \frac{1}{2}$, also $L_2 = \{\frac{1}{2}\}$.
b) Die Ungleichung $3x - 4 < 5$ hat in N die Lösungen 0, 1 und 2, also $L_1 = \{0, 1, 2\}$ (L_1 ist eine endliche Menge).
In P hingegen gibt es unendlich viele Lösungen, die die Bedingung $x < 3$ erfüllen. Die Lösungsmenge $L_2 = \{x; x \in P; x < 3\}$ ist unendlich.
c) Die Gleichung $x^2 + x = 2$ hat in N nur die Lösung 1, also $L_1 = \{1\}$.
In G hingegen hat sie die Lösungen 1 und -2, also $L_2 = \{1; -2\}$.
In keinem der Fälle **a)** bis **c)** gilt $L_1 = L_2$!
d) Die Gleichung $2x + 1 = 5$ hat in N und P die gleiche Lösung, nämlich 2, also gilt $L_1 = \{2\}$ und $L_2 = \{2\}$.

● 8.* Ermitteln Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen jeweils in N, R^* und R!
(Bezeichnen Sie diese mit L_1, L_2 und L_3!)
a) $4 - x = 3$ **b)** $x^2 - x = 2$ **c)** $3x - 1 = 4$ **d)** $2x + 1 < 8$

9.* Im Beispiel 4 gilt stets $L_1 \subseteqq L_2$. Zeigen Sie, daß bei Aufgabe 8 für die Lösungsmengen L_1, L_2 und L_3 stets die Beziehung $L_1 \subseteqq L_2 \subseteqq L_3$ gilt! Begründen Sie diesen Zusammenhang!

▶ **D7: Zwei Gleichungen bzw. Ungleichungen, deren Lösungsmengen im gleichen Grundbereich gleich sind, heißen *äquivalent bezüglich dieses Grundbereichs.***

■ **B5:**

a) Die Gleichungen $2x - 3 = 1$ und $x = 2$ sind äquivalent bezüglich P.
b) Die Gleichungen $x^2 + x = 6$ und $x = 2$ sind äquivalent bezüglich N aber **nicht** äquivalent bezüglich G oder R oder P.
c) Die Ungleichungen $2x - 4 < 6$ und $x - 2 < 3$ sind äquivalent bezüglich P.

d) Die Ungleichungen $2x < 5$ und $x < 2$ sind äquivalent bezüglich N und G, sie sind aber **nicht** äquivalent bezüglich R^* oder einem größeren Bereich.

Beim Lösen von Gleichungen bzw. Ungleichungen versucht man, von der vorgegebenen zu einer äquivalenten Gleichung bzw. Ungleichung überzugehen, aus der die Lösungen leichter bestimmbar sind. Man formt die Ausgangsgleichung bzw. -ungleichung so um, daß eine einfachere — aber bezüglich des gewählten Grundbereichs äquivalente — Gleichung bzw. Ungleichung entsteht.

▶ **D8: Eine Umformung einer Gleichung bzw. Ungleichung, die nicht zu einer Veränderung der Lösungsmenge dieser Gleichung bzw. Ungleichung bezüglich des vorgegebenen Grundbereichs führt, heißt eine *äquivalente Umformung* dieser Gleichung bzw. Ungleichung.**

Im folgenden werden die wesentlichsten äquivalenten Umformungen, die zum Lösen von Gleichungen und Ungleichungen benötigt werden, kurz genannt:

1. *Umformungen, die auf einzelnen Seiten vorgenommen werden* ***können***

a) Auflösen von Klammern
Beispiel:
$2(x - 3) - 4(2 - x) = 5$
$2x - 6 - 8 + 4x = 5$

b) Ausklammern
Beispiel:
$7 < 2x - 4$
$7 < 2(x - 2)$

c) Kürzen von Brüchen
Beispiel:
$\frac{2x + 4}{2} < 1$
$x + 2 < 1$

d) Erweitern von Brüchen
Beispiel:
$\frac{x + 4}{6} = \frac{2x - 1}{3}$
$\frac{x + 4}{6} = \frac{4x - 2}{6}$

(außer Erweitern bzw. Kürzen mit x)

e) Ordnen (durch Anwendung der Kommutativgesetze der Addition bzw. Multiplikation in den verschiedenen Zahlenbereichen)
Beispiel:
$2x + 3 - x + 6 + 3x = 7$
$2x - x + 3x + 3 + 6 = 7$

f) Zusammenfassen
Beispiel:
$2x - x + 3x + 3 + 6 < 7$
$4x + 9 < 7$

2. *Umformungen, die an beiden Seiten gleichzeitig vorgenommen werden* ***müssen***

a) Vertauschen der beiden Seiten einer Gleichung
Beispiel:
$4 - \frac{1}{2} = 2 + x$
$2 + x = 4 - \frac{1}{2}$

b) Vertauschen der beiden Seiten einer Ungleichung bei Umkehrung des Relationszeichens
Beispiel:
$3 + x < 2x - 1$
$2x - 1 > 3 + x$

c) Addieren bzw. Subtrahieren der gleichen Zahl (bzw. Größe) auf beiden Seiten einer Gleichung bzw. Ungleichung
Beispiel:
$$\begin{aligned} 4x + 9 &< 7 \quad |-9 \\ 4x + 9 - 9 &< 7 - 9 \\ 4x &< -2 \end{aligned}$$

d) Multiplizieren bzw. Dividieren beider Seiten einer Gleichung mit bzw. durch die gleiche (von Null verschiedene) Zahl (bzw. Größe)
Beispiel:
$$\begin{aligned} 4x &= -2 \quad |:4 \\ \tfrac{4}{4}x &= -\tfrac{2}{4} \\ x &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

e) Multiplizieren bzw. Dividieren beider Seiten einer Ungleichung mit bzw. durch die gleiche positive Zahl (bzw. Größe)
Beispiel:
$$\frac{x}{3} < 4 \quad |\cdot 3$$
$$x < 12$$

f) Multiplizieren bzw. Dividieren beider Seiten einer Ungleichung mit bzw. durch die gleiche negative Zahl und Ersetzen des Relationszeichens durch das entgegengesetzte
Beispiel:
$$-3x < 2 \quad |:(-3)$$
$$\frac{-3x}{-3} > \frac{2}{-3}$$
$$x > -\frac{2}{3}$$

Bei den Umformungen d), e) und f) ist zu beachten, daß die Multiplikation mit der Variablen bzw. die Division durch die Variable (oder einen Term, der die Variable enthält) im allgemeinen keine äquivalente Umformung ist.

■ **B6:** So hat die Gleichung $x = 2$ die Lösungsmenge $L_1 = \{2\}$, die Gleichung $x \cdot x = 2x$ aber die Lösungsmenge $L_2 = \{0, 2\}$.
Die Gleichung $(x - 3)(x + 2) = 7(x - 3)$ hat die Lösungsmenge $L_1 = \{3, 5\}$. Dividiert man durch $(x - 3)$, so erhält man die Gleichung $x + 2 = 7$, diese hat die Lösungsmenge $L_2 = \{5\}$.
In beiden Fällen ist $L_1 \neq L_2$, es wurden also nichtäquivalente Umformungen vorgenommen.

Muß man beim Lösen einer Gleichung oder Ungleichung beide Seiten mit einem Term, der die Variable enthält, multiplizieren bzw. durch einen solchen Term dividieren, so ist durch gesonderte Überlegungen eine Veränderung der Lösungsmenge auszuschließen. So darf z. B. die Gleichung $\frac{x + 2}{2x + 3} = 1 \left(x \in P,\, x \neq -\frac{3}{2}\right)$ mit dem Term $(2x + 3)$ multipliziert werden, da ja wegen $x \neq -\frac{3}{2}$ dieser Term entweder eine positive oder eine negative Zahl ist (↗ B9, S. 90).

3.2.2. *Lösen linearer Gleichungen bzw. Ungleichungen mit einer (freien) Variablen*

▶ **D9: Eine Gleichung (Ungleichung) heißt *lineare Gleichung (Ungleichung)* mit genau einer (freien) Variablen x, wenn sie durch äquivalente Umformungen auf die Form $ax + b = 0$ ($ax + b \gtrless 0$) mit fest vorgegebenen a ($a \neq 0$) und b gebracht werden kann.**

Beim Lösen linearer Gleichungen bzw. Ungleichungen mit einer Variablen besteht das Ziel darin, durch äquivalente Umformungen auf die Form $x = c$ bzw. $x < c$ oder $x > c$ zu kommen, weil aus dieser die Lösungen direkt abgelesen werden können. Dabei ist die Reihenfolge, in der die äquivalenten Umformungen vorzunehmen sind, **nicht** festgelegt. Man muß sich also nach jedem Schritt davon überzeugen, daß man dem gestellten Ziel auch tatsächlich näher gekommen ist. Ein solches System von Regeln, bei dem die Reihenfolge der Anwendung nicht genau festgelegt ist, heißt ein **Kalkül.**

Aus dem Mathematikunterricht kennen Sie die Anwendung dieses Kalküls. Im folgenden soll die Anwendung der einzelnen Regeln zur Lösung einer Gleichung und einer Ungleichung nochmals kurz gezeigt werden, dabei gelte $x \in P$.

■ **B7:**

Gleichung		**Ungleichung**	
$\frac{x - 18}{5} = 7(3x - 2)$	$\mid\cdot 5$ (2d)	$3(4x - 5) < 18x + 3 \mid : 3$	(2d)
$x - 18 = 35(3x - 2)$	$\mid$r.S. (1a)	$4x - 5 > 6x + 1 \mid$	(2b)
$x - 18 = 105x - 70$	$\mid$(2a)	$6x + 1 > 4x - 5 \mid -4x - 1$	(2c)
$105x - 70 = x - 18$	$\mid -x + 70$ (2c)	$2x > -6 \mid :2$	(2d)
$104x = 52$	$\mid : 104$(2d)	$x > -3$	
$x = \frac{1}{2}$			
$L = \{\frac{1}{2}\}$		$L = \{x : x \in P, x > -3\}$	

Da nur äquivalente Umformungen vorgenommen werden, ist eine Probe **mathematisch** nicht erforderlich. Um aber die eigene Arbeit kritisch beurteilen zu können und evtl. vorhandene Fehler zu finden, wollen wir die Probe möglichst immer durchführen.

Probe: $x = \frac{1}{2}$	*Probe*: $x = -3 + p,\ p > 0$
Linke Seite:	Linke Seite:
$\frac{\frac{1}{2} - 18}{5} = -\frac{7}{2}$	$3(-12 + 4p - 5) = 12p - 51$
Rechte Seite:	Rechte Seite:
$7\left(\frac{3}{2} - 2\right) = -\frac{7}{2}$	$18(-3 + p) + 3 = 18p - 51$

Vergleich:
$-\frac{7}{2} = -\frac{7}{2}$

Vergleich:
$12p - 51 < 18p - 51$, da $p > 0$

● **10.*** Lösen Sie folgende Aufgaben!

(Der Variablengrundbereich ist — wenn nichts anderes angegeben — stets die Menge der reellen Zahlen P)

a) $8x - 25 + 2x - 2 = 2 - x$
b) $4(2x + 3) < x - 3(3 - 2x)$
c) $\frac{x + 3}{2} < \frac{2x - 4}{6}$
d) $4(17x + 8) + 3(9 - 6x) = 5x - 6(4x - 6)$
e) $\frac{x + 1}{x - 1} = \frac{x - 5}{x - 3}$ $(x \neq 1, x \neq 3)$

Betrachten wir nun eine Ungleichung, in der die Variable im Nenner auftritt.

■ **B8:** $\frac{x + 2}{2x + 3} < 1 \qquad (x \in P; x \neq -\frac{3}{2})$

Da $x = -\frac{3}{2}$ ausgeschlossen wurde, ist der Nenner entweder positiv oder negativ. Es sind 2 Fälle zu unterscheiden.

1. Fall

$2x + 3 > 0$, daraus ergibt sich als Lösungsmenge für die Voraussetzung

$V_1 = \{x : x > -\frac{3}{2}\}$.[1])

Unter dieser Voraussetzung erhält man nach 2.c) (↗ S. 86)

$x + 2 < 2x + 3$
$-1 < x$

und $L_1^* = \{x : x > -1\}$.

Da die Bedingungen $2x + 3 > 0$ und $x + 2 < 2x + 3$ gelten, ist die Lösungsmenge L_1 der Durchschnitt von V_1 und L_1^*.

$L_1 = V_1 \cap L_1^* = \{x : x > -1\}$

2. Fall

$2x + 3 < 0$, daraus ergibt sich als Lösungsmenge für die Voraussetzung

$V_2 = \{x : x < -\frac{3}{2}\}$.

Unter dieser Voraussetzung erhält man nach 2.f) (↗ S. 86)

$x + 2 > 2x + 3$
$-1 > x$

und $L_2^* = \{x : x < -1\}$.

Da die Bedingungen $2x + 3 < 0$ und $x + 2 > 2x + 3$ gelten, ist die Lösungsmenge L_2 der Durchschnitt von V_2 und L_2^*.

$L_2 = V_2 \cap L_2^* = \{x : x < -\frac{3}{2}\}$

---

[1]) Zur Vereinfachung und auf Grund der allgemeinen Voraussetzung $x \in P$ wird auf diese Angabe hier und bei anderen Angaben von Lösungsmengen verzichtet.

Für die Ungleichung gilt $2x + 3 > 0$ **oder** $2x + 3 < 0$, daher ist die Lösungsmenge L die Vereinigung von L_1 und L_2.

$$L = L_1 \cup L_2 = \{x : x > -1 \text{ oder } x < -\tfrac{3}{2}\}$$

Bild 2 zeigt die Darstellung von L auf der Zahlengeraden.

Bild 2

Außer den reellen Zahlen a mit $-\frac{3}{2} \leqq a \leqq -1$ erfüllen alle anderen die vorgegebene Ungleichung.

● 11.* Lösen Sie folgende Ungleichungen!

a) $\dfrac{x+2}{x} < 2 \qquad (x \in P;\ x \neq 0)$

b) $\dfrac{3x+1}{5x+2} > 1 \qquad (x \in P;\ x \neq -\frac{2}{5})$

c) $\dfrac{1-x}{2x-1} < -1 \qquad (x \in P;\ x \neq \frac{1}{2})$

12.* Ermitteln Sie die reellen Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen!
a) Das Dreifache einer Zahl, vermindert um 5, ist gleich der Hälfte dieser Zahl, vermehrt um 3.
b) Die Differenz aus dem Fünffachen und dem Doppelten einer Zahl ist kleiner als die um $\frac{1}{2}$ verminderte Zahl.
Bilden Sie selbst weitere derartige Aufgaben, und lösen Sie diese!

13.* Ein Rechteck ist 3 cm länger als breit. Vergrößert man beide Seiten um 2 cm, so wächst der Flächeninhalt um 30 cm². Wie lang sind die Rechteckseiten?

14.* Ein Stahlseil mit einem Querschnitt von 25 mm² darf auf Zug mit höchstens 70 kp/mm² belastet werden. An ihm sei ein Bauaufzug mit einem Eigengewicht von 200 kp befestigt. Wieviel Bauteile, von denen jedes 700 kp wiegt, dürfen maximal zusammen befördert werden?

15.* Bei Erntearbeiten erzielte ein Mähdrescher vom Typ E 512 eine Durchschnittsleistung von 1,2 ha pro Stunde. Wieviel Mähdrescher müssen eingesetzt werden, wenn eine Fläche von 80 ha in einer Zeit zwischen 10 und 16 Stunden abgeerntet werden soll? (Setzen Sie zwei Ungleichungen an!)

3.2.3. *Lösen von einfachen Gleichungen bzw. Ungleichungen mit Beträgen*

Im folgenden wollen wir Gleichungen bzw. Ungleichungen lösen, die den bisher gelösten linearen Gleichungen bzw. linearen Ungleichungen sehr ähnlich sind, sich von diesen aber durch das Vorhandensein absoluter Beträge unterscheiden, wie z. B. die Gleichung

$|2x + 3| = 4 \quad (x \in P)$ oder die Ungleichung $|2x + 3| < 4 \quad (x \in P)$.

Um diese Gleichungen bzw. Ungleichungen lösen zu können, muß man wissen, was unter dem absoluten Betrag $|a|$ einer Zahl a zu verstehen ist.

Es gilt bekanntlich: $|a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geqq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$ (↗ [13g], S. 43)

B9: Unter Verwendung dieser Definition wollen wir nun die Gleichung $|2x + 3| = 4$ lösen. Dabei haben wir genau 2 Fälle zu unterscheiden.

1. Fall

$2x + 3 \geqq 0$, daraus folgt

$V_1 = \{x : x \geqq -\frac{3}{2}\}$.

Unter dieser Voraussetzung gilt $2x + 3 = 4$, woraus folgt

$x = \frac{1}{2}$, also $L_1^* = \{\frac{1}{2}\}$.

Es gilt nun $L_1 = L_1^* \cap V_1$, also

$L_1 = \{\frac{1}{2}\}$.

2. Fall

$2x + 3 < 0$, daraus folgt

$V_2 = \{x : x < -\frac{3}{2}\}$.

Unter dieser Voraussetzung gilt $-(2x + 3) = 4$, woraus folgt

$x = -3{,}5$ also $L_2^* = \{-3{,}5\}$.

Es gilt nun $L_2 = L_2^* \cap V_2$, also

$L_2 = \{-3{,}5\}$.

Da für die Gleichung $|2x + 3| = 4$ Fall 1 **oder** Fall 2 zutrifft, ergibt sich die Lösungsmenge L als **Vereinigung** von L_1 und L_2

$$L = L_1 \cup L_2 = \{\tfrac{1}{2}; -3{,}5\}.$$

Es läßt sich nunmehr allgemein feststellen:

Die Lösungsmenge einer Gleichung der Form $|ax + b| = c$ erhält man, indem man diese durch Fallunterscheidung auf die beiden Gleichungen $ax + b = c$ und $-(ax + b) = c$ zurückführt, diese unter Beachtung der Voraussetzung löst und die Vereinigung der beiden Lösungsmengen bildet. Auch hier hängt die Lösungsmenge vom Variablengrundbereich ab.

● 16.* Wählen Sie bei der im Beispiel 9 dargestellten Gleichung $|2x + 3| = 4$ als Grundbereich die Menge der gebrochenen Zahlen R^*, und ermitteln Sie L_1, L_2 und L!

17.* Lösen Sie folgende Gleichungen (der Grundbereich sei stets P)!

a) $\left|4x - \frac{1}{3}\right| = 1$ **b)** $\left|\frac{x}{2} + 4\right| = 0$

c) $\left|\frac{2x - 6}{5}\right| = 2$ **d)** $|x + 3| - 4 = \frac{1}{2}$

Bei der Lösung von Ungleichungen mit Beträgen geht man nach dem gleichen Prinzip vor, es gibt wieder genau 2 Fälle.

■ **B10:** $|2x + 3| < 4 \qquad (x \in P)$

1. Fall

Es sei $2x + 3 \geqq 0$, also

$$V_1 = \{x : x \geqq -\tfrac{3}{2}\}.$$

Dann gilt

$$2x + 3 < 4$$
$$2x < 1$$
$$x < \tfrac{1}{2},$$
$$L_1^* = \{x : x < \tfrac{1}{2}\}.$$

Aus $2x + 3 \geqq 0$ **und** $2x + 3 < 4$ folgt $L_1 = V_1 \cap L_1^*$

$$L_1 = \{x : -\tfrac{3}{2} \leqq x < \tfrac{1}{2}\}.$$

2. Fall

Es sei $2x + 3 < 0$, also

$$V_2 = \{x : x < -\tfrac{3}{2}\}.$$

Dann gilt

$$-(2x + 3) < 4$$

nach Regel 2f) folgt

$$2x + 3 > -4$$
$$x > -\tfrac{7}{2},$$
$$L_1^* = \{x : x > -\tfrac{7}{2}\}.$$

Aus $2x + 3 < 0$ **und** $-(2x + 3) < 4$ folgt $L_2 = V_2 \cap L_2^*$

$$L_2 = \{x : -\tfrac{7}{2} < x < -\tfrac{3}{2}\}.$$

Da für die Ungleichung $|2x + 3| < 4$ Fall 1 **oder** Fall 2 zutrifft, gilt

$$L = L_1 \cup L_2, \text{ also } L = \{x : -\tfrac{7}{2} < x < \tfrac{1}{2}\}.$$

Veranschaulicht man die Lösungsmenge L an der Zahlengeraden, erhält man die Darstellung in Bild 3.

Bild 3

● 18.* Lösen Sie die Ungleichung $|2x + 3| > 4$ $(x \in P)$, veranschaulichen Sie die Lösungsmenge L an der Zahlengeraden, und vergleichen Sie mit den Ergebnissen von Beispiel 10!

19.* Lösen Sie folgende Ungleichungen, und veranschaulichen Sie die Lösungsmenge an der Zahlengeraden!

a) $|3x + 1| < 7 \quad (x \in P)$ **b)** $|3x + 1| < 7 \quad (x \in N)$

c) $\left|\frac{2x + 1}{3}\right| < \frac{1}{2} \quad (x \in P)$ **d)** $\left|\frac{x}{2} - 2\right| > \frac{3}{4} \quad (x \in P)$

e) $|-2x + 1| < 3 \quad (x \in P)$ **f)** $\left|-\frac{1}{2}x + 2\right| > 1 \quad (x \in P)$

20.* Welche der folgenden Ungleichungen sind in P allgemeingültig, welche sind erfüllbar, welche sind unerfüllbar?

a) $|2x - 1| < \frac{1}{2}$ **b)** $\left|\frac{x - 3}{2}\right| < 0$ **c)** $|4x + 1| < -3$

d) $\left|\frac{2x - 5}{3}\right| > 1$ **e)** $\left|\frac{x}{6} - \frac{1}{4}\right| > 0$ **f)** $\left|\frac{2x - 4}{3}\right| > -1$

3.2.4. *Lösen von quadratischen Gleichungen*

▶ **D10: Eine Gleichung heißt *quadratische Gleichung mit* genau *einer (freien) Variablen*, wenn sie durch äquivalente Umformungen auf die Form $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ gebracht werden kann. Dabei sind a, b und c fest vorgegebene reelle Zahlen.**

▶ **D11: Die Form $x^2 + px + c = 0$ heißt *Normalform* einer quadratischen Gleichung.**

● **21.*** Zeigen Sie, wie eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ in die Normalform überführt werden kann!

Aus der Normalform $x^2 + px + q = 0$ läßt sich unter Verwendung der quadratischen Ergänzung $\frac{p^2}{4}$ die Lösungsformel

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ herleiten.

● **22.** Führen Sie die Herleitung dieser Lösungsformel durch!

(Falls Sie nicht selbständig die Herleitung bewältigen, orientieren Sie sich in [13g], S. 91, oder in [13e], S. 122!)

23. Welchen Einfluß hat die Diskriminante $D = \frac{p^2}{4} - q$ auf die Lösungsmenge?

24.* Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen ($x \in P$)!

a) $x^2 + 2x - 3 = 0$ **b)** $2x^2 - 6x + 1 = 0$

c) $x^2 - 2x = 0$ **d)** $2x^2 + x - 2 = 0$

e) $x^2 - 9 = 0$ **f)** $\frac{x^2}{3} + 2x + 3 = 0$

g) $\frac{4}{x} - \frac{x}{4} = \frac{8}{x} - \frac{3x}{4}$ $(x \neq 0)$ **h)** $\frac{2x-4}{x+6} = \frac{x-4}{x+3}$ $(x \neq -6, x \neq -3)$

i) $x^2 + 2x + 5 = 0$

Beachten Sie, daß sich die Aufgaben **c)** und **e)** durch die Zerlegungen $x(x-2) = 0$ bzw. $(x+3)(x-3) = 0$ leichter lösen lassen.

Sind x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + c = 0$, so gilt:

I $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 + px + q$ (Zerlegung in Linearfaktoren)

II $x_1 \cdot x_2 = q$; $x_1 + x_2 = -p$ (Satz von Vieta)

25. Beweisen Sie diese Behauptung!

26.* Welche Bedingungen müssen a, b und c erfüllen, damit die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

a) genau zwei Lösungen hat?
b) genau eine Lösung hat?

(Es sei nochmals daran erinnert, daß wir als Grundbereich stets die Menge der reellen Zahlen P wählen, sofern nichts anderes angegeben.)

27. Begründen Sie, daß die Lösungsmenge der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ stets zwei Elemente hat, wenn a und c verschiedene Vorzeichen haben! Gilt die Umkehrung dieses Satzes auch?

28.* In einem rechtwinkligen Dreieck sei eine Kathete doppelt so lang wie die andere. Die Länge der Hypotenuse sei 20 cm. Berechnen Sie die Längen der Katheten!

3.2.5. *Lösen von quadratischen Ungleichungen*

▶ **D12: Eine Ungleichung, die durch äquivalente Umformungen auf die Form $ax^2 + bx + c < 0$ $(a \neq 0)$ gebracht werden kann, heißt *quadratische Ungleichung mit einer (freien) Variablen.***
$x^2 + px + q \gtrless 0$ heißt Normalform einer quadratischen Ungleichung.

● 29. Zeigen Sie, daß der Fall $ax^2 + bx + c > 0$ auch in der Definition 12 enthalten ist.

Das Vorgehen zur Ermittlung der Lösungsmenge einer quadratischen Ungleichung wird zunächst an einem Beispiel erläutert.

■ **B11:** Es sei die Ungleichung

$$x^2 - 2x - 3 < 0 \quad (x \in P) \quad \text{gegeben.}$$

Zur Ermittlung der Lösung sind zwei Wege möglich.

1. *Lösen durch Bilden der quadratischen Ergänzung:*

$$x^2 - 2x + 1 - 3 - 1 < 0$$
$$(x - 1)^2 \quad -4 < 0, \text{ da } a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \text{ folgt}$$
$$[(x - 1) + 2]\,[(x - 1) - 2] < 0$$
$$(x + 1)(x - 3) < 0$$

Nun ist eine Fallunterscheidung erforderlich: Ein Produkt von zwei Faktoren ist negativ, wenn genau einer der Faktoren negativ ist.

1. Fall	**2. Fall**
$x + 1 > 0$ **und** $x - 3 < 0$	$x + 1 < 0$ **und** $x - 3 > 0$
$V_1 = \{x: x > -1\}$;	$V_3 = \{x: x < -1\}$;
$V_2 = \{x: x < 3\}$	$V_4 = \{x: x > 3\}$

Da jeweils beide Voraussetzungen erfüllt sein müssen, gilt

$L_1 = V_1 \cap V_2$	$L_2 = V_3 \cap V_4$
$L_1 = \{x: -1 < x < 3\}$	$L_2 = \emptyset$

Da für die Ungleichung Fall 1 **oder** Fall 2 zutrifft, gilt

$L = L_1 \cup L_2$, also $L = L_1 \cup \emptyset = L_1$.

Zur Veranschaulichung kann man die Funktion $y = x^2 - 2x - 3$ graphisch darstellen (↗ Bild 4).

Man erkennt, daß im Intervall $-1 < x < 3$ die y-Werte negativ sind.

2. *Lösen durch Zerlegen in Linearfaktoren*

Man löst zunächst die Gleichung

$x^2 - 2x - 3 = 0$

und erhält $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Nach der in Aufgabe 25 bewiesenen Behauptung gilt

$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$.

Man erhält also

$(x + 1)(x - 3) < 0$

und kann wie oben (bei 1.) vorgehen.

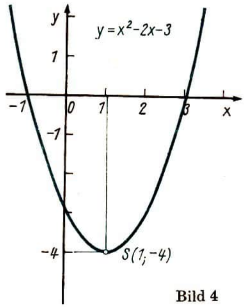


Bild 4

● **30.** Zeigen Sie, daß sich die Lösungsmenge L der Ungleichung $x^2 - 2x - 3 > 0$ als Vereinigung der beiden Mengen $L_1 = \{x : x \in P; x > 3\}$ und $L_2 = \{x : x \in P; x < -1\}$ ergibt!

31.* Lösen Sie analog zum Beispiel 11 die Ungleichung $-x^2 + x + 6 > 0$!

32.* Wie lautet die Lösungsmenge der Ungleichung $x^2 + px + q < 0$, wenn die Diskriminante $D = \frac{p^2}{4} - q = 0$ ist?

33.* Welche der beiden folgenden Ungleichungen ist in P allgemeingültig, wenn $D = \frac{p^2}{4} - q < 0$ ist?

a) $x^2 + px + q < 0$

b) $x^2 + px + q > 0$

34. Wählen Sie für den allgemeingültigen Fall in Aufgabe 32 ein Zahlenbeispiel und veranschaulichen Sie die Lösungsmenge!

35.* Die Zahl 28 soll so in zwei Summanden (natürliche Zahlen) zerlegt werden, daß deren Produkt kleiner als 160 ist. Geben Sie alle Werte an, die der kleinere der beiden Summanden annehmen kann.

3.2.6. *Lösen einiger Gleichungen bzw. Ungleichungen höheren als zweiten Grades*

Das bei der Ermittlung der Lösungsmenge einer quadratischen Ungleichung verwendete Verfahren der Fallunterscheidung läßt sich auch zur Lösung von Gleichungen bzw. Ungleichungen höheren als zweiten Grades verwenden, falls diese in einer geeigneten Produktdarstellung gegeben sind.[1])

■ **B12** $(x + \frac{1}{2})(2x^2 - 5x + 2) = 0 \qquad (x \in P)$

Da ein Produkt Null ist, wenn einer der Faktoren Null ist, gibt es hier genau 2 Fälle.

1. Fall

$$x + \frac{1}{2} = 0$$
$$x = -\frac{1}{2}$$
$$L_1 = \{-\frac{1}{2}\}$$

2. Fall

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$
$$x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$$
$$x_1 = 2; \quad x_2 = \frac{1}{2}$$
$$L_2 = \{2, \frac{1}{2}\}$$

Da Fall 1 **oder** Fall 2 zutrifft, gilt

$$L = L_1 \cup L_2 = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\}.$$

● **36.*** Lösen Sie die Ungleichung $(x - \frac{1}{2})(x^2 - x - 2) < 0$!

(Zerlegen Sie die Ungleichung in 3 Linearfaktoren, und führen Sie eine vollständige Fallunterscheidung durch!)

37.* Vervollständigen Sie für die Funktion $y = (x - \frac{1}{2})(x^2 - x - 2)$ die angegebene Wertetabelle, und skizzieren Sie das Bild dieser Funktion!

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	4
y											

38.* Lösen Sie folgende Gleichungen! $(x \in P)$

a) $(3x^2 - x - 2)(x + \frac{3}{4}) = 0$

b) $(x + 3)(2x^2 + 3x + 5) = 0$

---

[1]) An dieser Stelle sei erwähnt, daß für das Lösen der allgemeinen Gleichung dritten Grades und der allgemeinen Gleichung vierten Grades (also für $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ und $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$) Formeln (die sog. CARDANOschen Formeln) existieren. Gleichungen höheren als 4. Grades sind — wie der norwegische Mathematiker ABEL gezeigt hat — nicht allgemein lösbar. Eine allgemeine Gleichung dritten Grades kann man auch lösen, wenn man eine Lösung x_1 kennt (durch Probieren findet). Dann ist die Polynomdivision durch den Linearfaktor $(x - x_1)$ möglich, und man erhält $x^3 + ax^2 + bx + c = (x - x_1)(mx^2 + ux + r)$.
Da im vorliegenden Buch das Arbeiten mit Mengen im Vordergrund steht, wird weder auf die CARDANOschen Formeln, noch auf die Polynomdivision eingegangen.

c) $(2x^2 + 3x - 2)(3x^2 - 8x + 9) = 0$
d) $(x^2 + 2x + 5)(2x^2 - x + 1) = 0$

39.* Lösen Sie folgende Ungleichungen! ($x \in P$)
a) $(6x^2 + x - 1)(x - \frac{5}{2}) < 0$ b) $(2x^2 + x + 1)(x - 2) > 0$

3.3. Lösen von Gleichungen und Ungleichungen mit mehr als einer Variablen

3.3.1. *Erweiterung der Definitionen für einige grundlegende Begriffe*

Im Abschnitt 3.1. wurden die zentralen Begriffe „Lösung“ und „Lösungsmenge“ einer Gleichung bzw. Ungleichung zunächst nur für Gleichungen bzw. Ungleichungen mit genau einer (freien) Variablen definiert.

● **40.** Wiederholen Sie die Definitionen 5 und 6 (↗ S. 84)!

Diese Definitionen sollen nun so erweitert werden, daß sie auch für Gleichungen bzw. Ungleichungen mit zwei Variablen gelten.
Gegeben sei eine Gleichung bzw. Ungleichung mit zwei (freien) Variablen. Wir schreiben allgemein
(*) $\mathsf{H}(x; y) \leqq r$, mit $x \in A$, $y \in B$ und $r \in P$.
Dabei sind A und B Zahlenmengen. In den nachfolgenden Beispielen und Aufgaben gilt sogar $A = B = P$.

▶ **D13: Ein geordnetes Paar $[a; b]$ mit $a \in A$ und $b \in B$ heißt *Lösung* der Gleichung bzw. Ungleichung (*) genau dann, wenn es die Gleichung bzw. Ungleichung (*) in eine wahre Aussage überführt.**

Wir erkennen, daß die Lösung nicht mehr Element eines Variablengrundbereichs (also A oder B) sein kann, denn sie ist ja als geordnetes Paar von den Elementen der Grundbereiche grundsätzlich verschieden.
Deshalb kann die Definition 6 (↗ S. 84) der Lösungsmenge nicht einfach übernommen, sondern muß erweitert werden.
Dazu benötigt man zunächst den Begriff des Lösungsgrundbereichs.

▶ **D14: Jede Menge geordneter Zahlenpaare $[a; b]$ ($a \in A$, $b \in B$) heißt *Lösungsgrundbereich* L_G der Gleichung bzw. Ungleichung (*).**

Jedes Element von L_G überführt die Gleichung bzw. Ungleichung (*) in eine wahre oder falsche Aussage.
Man erkennt außerdem, daß $L_G \subseteqq A \times B$ gilt und kann nun wie folgt definieren.

▶ **D15: Die Gesamtheit aller Zahlenpaare $[a; b]$ mit $[a; b] \in L_G$, die die Gleichung bzw. Ungleichung (*) in eine wahre Aussage überführt, heißt *Lösungsmenge L* dieser Gleichung bzw. Ungleichung bezüglich des Lösungsgrundbereichs L_G.**

Es gilt also stets $L \subseteq L_G$

● **41.*** Wie heißen Gleichungen bzw. Ungleichungen, für die $L = L_G$ gilt?

Die Definitionen 7 (↗ S. 84) und 8 (↗ S. 85) sowie die Regeln für äquivalente Umformungen von Gleichungen bzw. Ungleichungen mit genau einer Variablen gelten auch für solche mit mehreren Variablen.
(Für Gleichungen bzw. Ungleichungen mit mehr als zwei Variablen müssen die Begriffe Lösung, Lösungsmenge und Lösungsbereich analog zu Definitionen 13, 14 und 15 erweitert werden.)
Nach diesen Begriffsklärungen können wir uns nun dem Lösen von Gleichungen bzw. Ungleichungen mit mehreren (freien) Variablen zuwenden.

3.3.2. *Lösen von Gleichungen bzw. Ungleichungen des Typs $ax + by = c$ bzw. $ax + by < c$*

■ **B13:** Gegeben sei die Gleichung $3x - 2y = 1$ mit $x \in P$, $y \in P$. Da die Gleichung für alle reellen Werte von x bzw. y zu einer (wahren oder falschen) Aussage wird, enthält der Lösungsgrundbereich alle Zahlenpaare $[a; b]$ mit $a \in P$ und $b \in P$.
Lösungen der Gleichung kann man durch Probieren erhalten, z. B. erkennt man sofort, daß $[1; 1]$ eine Lösung ist. Weitere Lösungen erhält man, indem man für x (oder y) eine beliebige reelle Zahl einsetzt und den zugehörigen Wert für y (oder x) ausrechnet. Setzt man $x = 2$, so folgt daraus $y = 2{,}5$ (nachprüfen!), $[2; 2{,}5]$ ist also auch eine Lösung. Man erkennt, daß die Lösungsmenge $L \subseteq L_G$ unendlich ist.

● **42.*** Beweisen Sie, daß die Gleichung $3x - 2y = 1$ nicht allgemeingültig ist.

43.* Gegeben sei die Gleichung $2x + 3y = 1$ mit $x \in P$, $y \in P$.
a) Ermitteln Sie mindestens fünf Lösungen!
b) Entscheiden Sie, welche der folgenden geordneten Zahlenpaare Elemente der Lösungsmenge sind!
$[0; 0]$, $[\frac{1}{2}; 0]$, $[0; 1]$, $[-1; 1]$, $[\frac{4}{3}; -\frac{1}{9}]$
$[-6; 4]$, $[-5; 3]$, $[5; -3]$, $[\frac{3}{4}; \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{5}; \frac{1}{5}]$

Die Lösungsmenge einer Gleichung des Typs $ax + by = c$ ($x \in P$, $y \in P$) besteht aus geordneten Zahlenpaaren $[a; b]$. Aus dem Mathematikunterricht (↗ [13d], [13e]) ist bekannt, daß jedes geordnete Zahlenpaar als Punkt in der x-y-Ebene dargestellt werden kann. Damit können wir die Lösungsmenge L der Gleichung $ax + by = c$ als Menge von Punkten in der x-y-Ebene darstellen.

■ **B14:** Die Lösungsmenge der Gleichung $3x - 2y = 1$ (↗ B13) ergibt die Darstellung in Bild 5.
Dabei ist jedem Punkt der Geraden umkehrbar eindeutig ein Element der Lösungsmenge zugeordnet (weil $a \in P$ und $b \in P$). Allerdings kann die Gerade (Lösungsmenge) nur in einem Ausschnitt dargestellt werden.

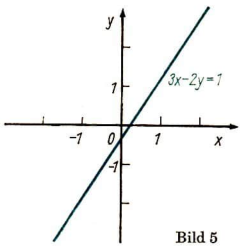


Bild 5

● **44.** Stellen Sie ausschnittsweise die Lösungsmenge der Gleichung $3x - 2y = 1$ graphisch dar, wenn
a) $x \in N$ und $y \in N$,
b) $x \in P$ und $y \in N$.

Der Zusammenhang zwischen Gleichungen des Typs $ax + by = c$ und linearen Funktionen wird auch deutlich, wenn man diese Gleichung äquivalent umformt zu $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, wobei natürlich $b \neq 0$ vorausgesetzt werden muß.
(Hierauf wird im Kapitel 5 noch näher eingegangen.)

● **45.** Stellen Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungen ausschnittsweise graphisch dar!

a)	$2x + 3y = 1 \quad (x \in P, y \in P)$	**b)**	$x + 3y = 4 \quad (x \in P, y \in P)$
c)	$-2x + y = 6 \quad (x \in P, y \in P)$	**d)**	$-2x + y = 6 \quad (x \in N, y \in N)$
e)	$6x - 2y = 4 \quad (x \in R, y \in R^*)$	**f)**	$x + y = 1 \quad (x \in N, y \in P)$

Beim Lösen von Ungleichungen des Typs $ax + by < c$ kann man analog zum Lösen entsprechender Gleichungen vorgehen.

● **46.** Gegeben sei die Ungleichung $3x - 4y < 2$ mit $x \in P$, $y \in P$.
a) Ermitteln Sie mindestens fünf Lösungen dieser Ungleichung!
b) Entscheiden Sie, welche der folgenden geordneten Zahlenpaare Lösung dieser Ungleichung sind!
$[0; 0]$, $[2; 1]$, $[3; 1]$, $[\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}]$, $[3; 5]$
$[0; 1]$, $[1; 0]$, $[\frac{3}{4}; -\frac{1}{4}]$, $[2; 1]$, $[\pi; -1]$

Die Lösungsmenge einer Ungleichung vom Typ $ax + by < c$ kann man ebenfalls durch eine Menge von Punkten in der x-y-Ebene veranschaulichen. Unter der Voraussetzung $x \in P$ und $y \in P$ erhält man eine Halbebene.

■ **B15:** Die Veranschaulichung der Lösungsmenge der Ungleichung $3x - 2y < 1$ $(x \in P,\ y \in P)$ ergibt die Darstellung in Bild 6.

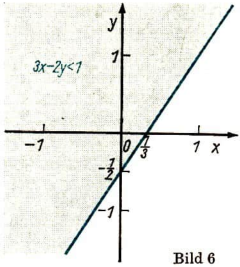


Bild 6

Es sei hier nur kurz bemerkt (ohne daß ein näheres Eingehen hierauf möglich ist), daß derartige lineare Ungleichungen bei der „linearen Optimierung" eine große Rolle spielen (↗ [12]).

3.3.3. *Lösen (linearer) diophantischer Gleichungen*

Im vorhergehenden Abschnitt wurden Gleichungen vom Typ $ax + by = c$ betrachtet. Werden dabei als Lösungen nur Paare aus ganzen Zahlen zugelassen und wird der Variablengrundbereich für a, b und c auf den Bereich der ganzen Zahlen eingeschränkt, so spricht man von **diophantischen** Gleichungen.[1])

▶ **D16 Eine lineare Gleichung $ax + by = c$ mit $a \in G$, $a \neq 0$, $b \in G$, $b \neq 0$, $c \in G$ heißt *diophantische Gleichung,* wenn für den Lösungsgrundbereich $L_G = G \times G$ gilt.**

(Entsprechend kann man auch diophantische Gleichungen bzw. Ungleichungen definieren, die mehr als zwei (freie) Variable enthalten oder von höherem Grad sind. Im folgenden sollen nur diophantische Gleichungen mit genau zwei Variablen betrachtet werden.)

---

[1]) Diese Gleichungen sind nach dem griechischen Mathematiker DIOPHANTOS von Alexandria (um 250 u. Z.) benannt, der sich ausführlich mit ihrer Lösung beschäftigte, dabei aber auch Lösungen mit $x \in R^*$ zuließ.

■ **B16:** Zu lösen ist die Gleichung
$3x + 2y = 5$ mit $x \in G$, $y \in G$, also $L_G = G \times G$.
Mit Hilfe der in Kapitel 2 dargestellten Zahlenkongruenzen (↗ S. 64ff.) ist das folgendermaßen möglich:
Von $3x + 2y = 5$ wird übergegangen zu
$3x + 2y \equiv 5 \bmod 3$, durch die Wahl des Moduls 3 entfällt die Variable x und man erhält
$2y \equiv 2 \bmod 3$, daraus folgt
$y \equiv 1 \bmod 3$ als einzige Lösung.

Das heißt:
Zur Lösungsmenge der Gleichung gehören alle y, mit $y = 3g + 1$ $(g \in G)$.
Aus $3x + 2y = 5$ erhält man dann

$$3x + 2(3g + 1) = 5$$
$$3x + 6g + 2 = 5$$
$$3x + 6g = 3$$
$$x = 1 - 2g\,.$$

Die Lösungsmenge der Gleichung $3x + 2y = 5$ ist also die Menge aller geordneten Paare $[x; y]$ mit $x = 1 - 2g$ und $y = 3g + 1$, d. h.

$$L = \{[x; y], x = 1 - 2g; y = 3g + 1; g \in G\}, \text{ also}$$
$$L = \{\ldots, [5; -5], [3; -2], [1; 1], [-1; 4], [-3; 7], \ldots\}\,.$$

Man kann die Lösungen der Gleichung $3x + 2y = 5$ graphisch darstellen, indem man zur Funktion $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ übergeht, diese zeichnet und die auf dem Bild der Funktion liegenden Punkte mit ganzzahligen Koordinaten angibt (↗ Bild 7). Wegen des Näherungscharakters der graphischen Darstellung ist eine rechnerische Überprüfung unerläßlich.)
Die Lösungsmenge dieser diophantischen Gleichung $3x + 2y = 5$ ist unendlich.

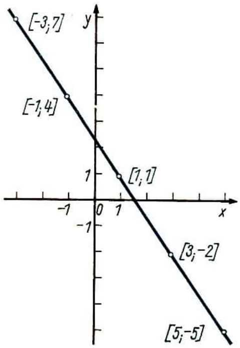


Bild 7

Es gilt: Die Lösungsmenge einer diophantischen Gleichung $ax + by = c$ ist entweder unendlich oder leer. Sie ist genau dann nicht leer, wenn der größte gemeinsame Teiler von a und b (g.g.T.$_{(a,\,b)}$) ein Teiler von c ist. Dabei wird vorausgesetzt, daß a, b und c ganze Zahlen sind, die keinen gemeinsamen Faktor g $(g \in G, g \neq 1)$ mehr enthalten. Jede beliebige diophantische Gleichung läßt sich auf diese Form bringen.
(Auf den Beweis dieses Satzes muß hier verzichtet werden.)

● 47. Geben Sie außer den dargestellten Lösungen der Gleichung $3x + 2y = 5$ noch mindestens fünf weitere an!

48.* Lösen Sie folgende diophantischen Gleichungen!

a) $3x - 7y = 2$ **b)** $2x - 4y = 6$ **c)** $4x + 2y = 1$ **d)** $-x + y = 3$

Diophantische Gleichungen ergeben sich auch bei Anwendungsaufgaben, wobei oftmals die Variablengrundbereiche noch weiter eingeschränkt werden, z. B. auf die Menge der natürlichen Zahlen N.

■ **B17:** Ein Betrag von 50 Mark soll aus Zwei- und Fünfmarkstücken zusammengesetzt werden. Welche Möglichkeiten gibt es?

Diese Aufgabe führt auf die diophantische Gleichung

$$2x + 5y = 50 \text{ mit } x \in N,\ y \in N,\ x > 0,\ y > 0$$

Man geht über zu $2x + 5y \equiv 50 \bmod 5$

und erhält $2x \equiv 0 \bmod 5$

$x \equiv 0 \bmod 5.$

Also gehören alle x mit $x = 5n$ ($n \in N$ und $0 < n < 5$, da $2x < 50$) zur Lösung. Für y erhält man

$2 \cdot 5n + 5y = 50$

$y = 10 - 2n$ ($n \in N$, $n \neq 0$), also die *Lösungsmenge*

$L = \{[5; 8], [10; 6], [15; 4], [20; 2]\}$.

In diesem Fall folgt aus der Bedingung $L_G = N \times N$, daß die Lösungsmenge endlich ist.

● 49.* Überlegen Sie, ob für jede diophantische Gleichung aus einer Einschränkung des Lösungsgrundbereichs auf $L_G = N \times N$ folgt, daß die Lösungsmenge endlich ist!

50.* Für 1,70 M sollen 10-Pfennig- und 25-Pfennig-Briefmarken gekauft werden. Wieviel Marken von jeder Sorte können gekauft werden? Ermitteln Sie alle Möglichkeiten!

51. Für ein Kinderferienlager sollen für 83,— Mark Tomaten und Bananen gekauft werden. Ein Kilogramm Bananen kostet 5,— Mark; ein Kilogramm Tomaten 1,30 Mark. Wieviel Kilogramm Tomaten und wieviel Kilogramm Bananen können gekauft werden?

52. Eine bestimmte Anzahl von Hasen und Gänsen haben zusammen 62 Beine. Die Anzahl der Hasen ist größer als die Anzahl der Gänse, aber nicht größer als das Doppelte dieser Zahl. Wie viele Tiere von jeder Art können es sein?

53.* 730 t Braunkohlenbriketts sollen transportiert werden. Dazu stehen Güterwagen von 15 t und 20 t Ladefähigkeit zur Verfügung.
Wie kann der Zug zusammengestellt werden, wenn er nicht mehr als 40 Wagen haben soll, aber nur 30 Wagen mit einer Tragfähigkeit von 20 t zur Verfügung stehen?

3.4. Lösen von Gleichungs- und Ungleichungssystemen

Im Abschnitt 3.3. wurde das Lösen von Gleichungen und Ungleichungen mit mehreren Variablen behandelt.
Oftmals werden nun mehrere dieser Gleichungen bzw. Ungleichungen betrachtet, d. h., man interessiert sich für diejenigen Zahlen bzw. Zahlenpaare (Zahlentripel usw.), die alle vorgegebenen Gleichungen bzw. Ungleichungen gleichzeitig erfüllen.
In einem derartigen Fall spricht man vom Lösen eines Gleichungs- bzw. Ungleichungssystems.

▶ **D17: Ein *System von Gleichungen bzw. Ungleichungen* besteht aus mehreren Gleichungen bzw. Ungleichungen, die durch die Frage nach gemeinsamen Lösungen verbunden sind.**

▶ **D18: Eine gemeinsame Lösung aller Gleichungen bzw. Ungleichungen eines Systems heißt *Lösung dieses Systems.* Die Gesamtheit aller dieser gemeinsamen Lösungen ist die Lösungsmenge des Systems.**

Die Elemente der Lösungsmenge des Systems sind also genau diejenigen, die in jeder Lösungsmenge jeder Gleichung bzw. Ungleichung dieses Systems enthalten sind. Die Lösungsmenge eines Systems ist also der **Durchschnitt** der Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen bzw. Ungleichungen dieses Systems.
Aus dem Mathematikunterricht ist Ihnen ein Verfahren zur Lösung von Gleichungssystemen aus 2 Gleichungen mit 2 Variablen bekannt. Zur Wiederholung soll das folgende Beispiel dienen.

■ **B18:** Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll}(\mathrm{I}) & 2x - y = 1 \\ (\mathrm{II}) & x + 2y = 8\end{array} \qquad (x \in P, y \in P)$$

Der Lösungsgrundbereich für jede einzelne Gleichung — und damit auch für das System — ist $L_G = P \times P$.
Die Lösungsmenge jeder einzelnen Gleichung besteht aus unendlich vielen Zahlenpaaren. Beide Lösungsmengen können graphisch dargestellt werden (↗ Bild 8).
Man erkennt, daß sich beide Geraden im Punkt S (2; 3) schneiden. Vermutlich ist also $L_1 \cap L_2 = [2; 3]$. Dies muß aber wegen möglicher Zeichenungenauigkeiten noch rechnerisch überprüft werden.
Es gilt: $2 \cdot 2 - 3 = 1$, also $[2; 3] \in L_1$
und $2 + 2 \cdot 3 = 8$, also $[2; 3] \in L_2$
Hieraus folgt $[2; 3] \in L_1 \cap L_2$. Weitere Elemente kann der Durchschnitt nicht enthalten.

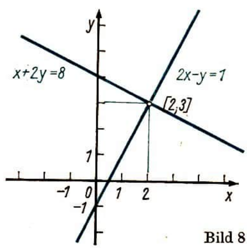


Bild 8

Will man die Lösung eines Gleichungssystems ohne graphische Veranschaulichung gewinnen, so kann man das Substitutionsverfahren anwenden.

■ **B19:** $\left.\begin{array}{lr} \text{(I)} & 2x - y = 1 \\ \text{(II)} & x + 2y = 8 \end{array}\right\}$ aus I folgt: $y = 2x - 1$, dies wird in II eingesetzt,

man erhält: $x + 2(2x - 1) = 8$

$x = 2$ und aus I: $y = 3$

Zur Probe setzt man beide Werte in beide Gleichungen ein.
Es gilt also $L = \{[2; 3]\}$.

● **54.*** Lösen Sie folgende Gleichungssysteme, ($x \in P$, $y \in P$).

a) (I) $2x + \frac{1}{2}y = -1$
(II) $x + 3y = 5$

b) (I) $x + 5y = -8$
(II) $2x - 7y = 1$

c) (I) $y + 2x = 1$
(II) $-y + 3x = \frac{1}{4}$

d) (I) $3x + 4y = 26$
(II) $3x + 4y = -14$

e) (I) $3x + y = 1$
(II) $6x + 2y = 2$

f) (I) $2x - 3y = 18$
(II) $2x + 3y = -6$

55. Veranschaulichen Sie die Lösungsmengen L_1 und L_2 der Aufgaben 54. a) bis f) graphisch!

Ziel der rechnerischen Lösung eines Gleichungssystems aus mehreren Gleichungen mit mehreren Variablen ist immer, eine Gleichung zu erhalten, bei der die Koeffizienten fast aller Variablen — möglichst nur mit Ausnahme einer einzigen — gleich Null sind. Eine Voraussetzung zur Erreichung dieses Zieles ist, daß die Anzahl der Gleichungen mit der Anzahl der Variablen übereinstimmt und die Gleichungen unabhängig sind.
Außer dem *Substitutionsverfahren*, das zwar bei linearen Gleichungssystemen stets zum Ziel führt, unter Umständen aber etwas langwierig ist, lassen sich manchmal andere Verfahren anwenden. So werden beim *Additionsverfahren* beide Gleichungen — evtl. nach vorheriger Multiplikation mit geeigneten Faktoren — addiert. Dieses Verfahren ist anwendbar, wenn dadurch eine Variable herausfällt, wie z. B. bei Aufgabe 54. f).

● **56.*** **a)** Zeigen Sie, daß bei Aufgabe 54. e) die Lösungsmenge des Systems $L = L_1 \cap L_2 = L_1 = L_2$ ist!
Wie heißen solche Gleichungen?

b) Zeigen Sie, daß bei Aufgabe 54. d) die Lösungsmenge des Systems $L = L_1 \cap L_2 = \emptyset$ ist.
Wie heißen solche Gleichungen?

Hinweis: Stellen Sie die Lösungsmengen jeweils graphisch dar!

Die bisher gewonnenen Erkenntnisse über das Lösen von Gleichungssystemen lassen sich auch anwenden, um Systeme aus Ungleichungen sowie Gleichungen und Ungleichungen zu lösen.
Im folgenden sollen zunächst Systeme aus zwei linearen Ungleichungen betrachtet werden.

B20: Gegeben seien die folgenden Ungleichungen.

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & -2x + y < -1 \\ \text{(II)} & x + 2y < 8 \end{array} \qquad (x \in P,\ y \in P)$$

Aus Abschnitt 3.3. ist bekannt, daß die Lösungsmengen L_1 und L_2 der Ungleichungen (I) und (II) als Punktmengen dargestellt werden können und dabei jeweils Halbebenen sind. Die Lösungsmenge des Ungleichungssystems ist dann wie folgt als Durchschnitt der beiden Halbebenen darstellbar (↗ Bild 9)

$$L = L_1 \cap L_2\,.$$

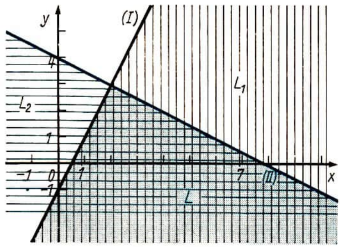


Bild 9

Die Lösungsmenge L ist also unendlich.
Schränkt man den Variablengrundbereich auf die Menge der natürlichen Zahlen ein ($x \in N$, $y \in N$), so ergibt sich eine endliche Lösungsmenge. Man kann sie folgendermaßen ermitteln:
Aus (II) $x + 2y < 8$ folgt $y < 3$, da aus (I) $x > 0$ folgt.
Analog erhält man aus (II) $x < 8$.

Man betrachtet nun die 3 möglichen Fälle $y = 0$, $y = 1$ und $y = 2$.

$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$
Die Ungleichungen (I) und (II) werden erfüllt von allen x mit		
$1 \leqq x \leqq 7$	$2 \leqq x \leqq 5$	$2 \leqq x \leqq 3$
Es ergeben sich folgende Lösungsmengen		
$L_1 = \{[1;0], [2;0], [3;0], [4;0], [5;0], [6;0], [7;0]\}$	$L_2 = \{[2;1], [3;1], [4;1], [5;1]\}$	$L_3 = \{[2;2], [3;2]\}$

Die Lösungsmenge L ergibt sich als Vereinigung von L_1, L_2 und L_3.
$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ besteht also aus 13 Elementen.

● **57.** Stellen Sie die Lösungsmengen folgender Ungleichungssysteme graphisch dar ($x \in P$, $y \in P$),

a) $\begin{array}{ll} \text{(I)} & -2x + y > -1 \\ \text{(II)} & x + 2y > 8 \end{array}$ **b)** $\begin{array}{ll} \text{(I)} & -2x + y < -1 \\ \text{(II)} & x + 2y > 8 \end{array}$

c) (I) $-2x + y > -1$
(II) $x + 2y < 8$

Analog zum Beispiel 20 kann man ein System aus einer linearen Gleichung und einer linearen Ungleichung lösen.

● **58.** Lösen Sie das folgende System und veranschaulichen Sie die Lösungsmenge.

(I) $-2x + y = 1$
(II) $x + y < 1$

Im folgenden sollen Systeme betrachtet werden, die aus einer quadratischen und einer linearen Gleichung bzw. Ungleichung bestehen.

■ **B21:** Gegeben sei folgendes System

(I) $x - y = 3$
(II) $y = x^2 - 2x - 3$ $\quad (x \in P, y \in P)$,

die Lösungsgrundmenge ist also $L_G = P \times P$.

Die Lösungsmenge der Gleichung (I) ergibt bei der graphischen Veranschaulichung die Punkte einer Geraden.

Veranschaulicht man die Lösungsmenge der Gleichung (II) in gleicher Weise, erhält man eine Parabel.

Der Durchschnitt beider Lösungsmengen wird nun durch die Schnittpunkte von Gerade und Parabel dargestellt (↗ Bild 10).

$L = L_1 \cap L_2 = \{[0; -3], [3; 0]\}$

Natürlich vermag man aus einer graphischen Darstellung die Lösungen nur näherungsweise zu ermitteln, so daß eine rechnerische Lösung — zumindest aber eine rechnerische Kontrolle durch Einsetzen der erhaltenen Werte in das System — unbedingt erfolgen sollte.

Für das vorgegebene System ist folgende rechnerische Lösung möglich.

(I) $x - y = 3$
(II) $y = x^2 - 2x - 3$

Die Umformung von (I) nach y und Einsetzen in (II) liefert

$x - 3 = x^2 - 2x - 3$.

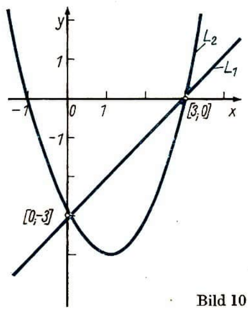


Bild 10

Diese Gleichung kann nun gelöst werden. Man erhält:

$x^2 - 3x = 0$

$x(x - 3) = 0$

also $x_1 = 0$,

$x_2 = 3$ und $[0; y]$ bzw. $[3; y]$ mit noch zu bestimmendem y.

Durch Einsetzen in (I) erhält man die zugehörigen y-Werte, $y_1 = -3$ und $y_2 = 0$.
Die Zahlenpaare $[0;\,-3]$ und $[3;\,0]$ sind also Lösungen des Gleichungssystems.
Die Durchführung der Probe ist zweckmäßig, um evtl. begangene Fehler zu erkennen.

Probe:

1. Für die Lösung $[0;\,-3]$

Linke Seite	Rechte Seite
(I) $0 - (-3) = 3$	3
(II) -3	$0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3$

Vergleich
(I) $3 = 3$
(II) $-3 = -3$

2. Für die Lösung $[3;\,0]$

Linke Seite	Rechte Seite
(I) $3 - 0 = 3$	3
(II) 0	$9 - 6 - 3 = 0$

Vergleich
(I) $3 = 3$
(II) $0 = 0$

Beide Proben bestätigen die Richtigkeit der Lösungen.

● **59.*** Lösen Sie folgende Systeme!

a) (I) $2x + y = 3$
(II) $y = x^2 - 4x + 3$

b) (I) $2x + y = -1$
(II) $y = -x^2 + 2x + 5$

c) (I) $x - y = 1$
(II) $y = x^2 - 2x + 2$

d) (I) $x - y = 1$
(II) $y = x^2 - 2x - 5$

60. Veranschaulichen Sie die Lösungsmengen der in Aufgabe 59. gegebenen Gleichungen graphisch!

61.* Die Summe zweier Zahlen beträgt 20, ihre Differenz -24. Ermitteln Sie die beiden Zahlen!

62.* Die Differenz zweier natürlicher Zahlen ist 6, ihr Produkt 216. Wie heißen die Zahlen?

63.* Von einem Ort A fährt ein LKW nach einem Ort B, seine Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt 50 km/h. Gleichzeitig fährt von B nach A ein PKW mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 70 km/h.
Nach welcher Zeit treffen sich beide Fahrzeuge, wenn die Entfernung von A nach B 144 km beträgt?

64.* Zwei Widerstände ergeben bei Reihenschaltung einen Gesamtwiderstand von 25 Ω, bei Parallelschaltung einen von 6 Ω.
Wie groß sind die Widerstände?

Lösungen — Kapitel 3

1. wahre Aussagen sind **b)** und **c)**; falsche Aussagen sind **a)** und **d)**
2. **a)** „<" **b)** „=" **c)** „>" **d)** „<"
3. wahre Aussagen: **a)**, **b)**
4. erfüllbar: **b)**, **c)**, **d)**, **e)**
   allgemeingültig: **b)**
5. Beispiele für Lösungen sind:

	in N	in R
unerfüllbar:	$2x + 3 = 1$	$2x^2 = 4$
erfüllbar:	$2x - 3 = 1$	$2x^2 = 8$
allgemeingültig:	$2 + \lvert x\rvert = x + 2$	$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + a \cdot b$

7. $U \subset G_r$; $A \subset E \subset G_r$; $E \cap U = \emptyset$; $E \cup U = G_r$
8.

	L_1 für $x \in N$	L_2 für $x \in R^*$	L_3 für $x \in R$
a)	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
b)	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{2; -1\}$
c)	$\emptyset$	$\{\frac{5}{3}\}$	$\{\frac{5}{3}\}$
d)	$\{0, 1, 2, 3\}$	$\{x: x < \frac{7}{2}\}$	$\{x: x < \frac{7}{2}\}$

9. L_1 sei die Lösungsmenge in N. Aus $N \subset R$ folgt, daß jedes Element von L_1 auch Lösung in R, also Element von L_2 ist, d. h., es gilt: $L_1 \subseteqq L_2$. Analog schließt man, daß $L_2 \subseteqq L_3$.
10. **a)** $x = \frac{29}{11}$ **b)** $x < -21$ **c)** $x < -13$ **d)** $x = -\frac{1}{3}$ **e)** $x = 2$
11. **a)** $L = \{x: x > 2 \text{ oder } x < 0\}$
    b) $L = L_1 \cup L_2$, $L_1 = \emptyset$, $L_2 = \{x: -\frac{1}{2} < x < -\frac{2}{5}\}$
    c) $L_1 = \emptyset$, $L_2 = \{x: 0 < x < \frac{1}{2}\}$, $L = L_1 \cup L_2 = L_2$
12. **a)** $x = \frac{16}{5}$ **b)** $x < -\frac{1}{4}$
13. $a = 8$ cm, $b = 5$ cm
14. $x \leqq 2$
15. 5 oder 6
16. $L_1 = \{\frac{1}{2}\}$, $L_2 = \emptyset$, $L = L_1$
17. **a)** $L = \{\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\}$ **b)** $L = \{-8\}$ **c)** $L = \{-2, 8\}$ **d)** $L = \{-7{,}5; 1{,}5\}$
18. $L = \{x: x < -\frac{7}{2} \text{ oder } x > \frac{1}{2}\}$
19. **a)** $L = \{x: < -\frac{8}{3} < x < 2\}$ **b)** $L = \{0, 1\}$ **c)** $L = \{x: -\frac{5}{4} < x < \frac{1}{4}\}$
    d) $L = \{x: x < \frac{5}{2} \text{ oder } x > \frac{11}{2}\}$ **e)** $L = \{x: -1 < x < 2\}$
    f) $L = \{x: x < 2 \text{ oder } x > 6\}$
20. allgemeingültig: **f)**; unerfüllbar: **b)**, **c)**
21. $ax^2 + bx + c = x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0$ ($a \neq 0$ nach D10)
24. **a)** $L = \{-3, 1\}$ **b)** $L = \{1{,}5 + 0{,}5\sqrt{7}; 1{,}5 - 0{,}5\sqrt{7}\}$ **c)** $L = \{0, 2\}$
    d) $L = \left\{-\dfrac{1 - \sqrt{17}}{4}, -\dfrac{1 + \sqrt{17}}{4}\right\}$ **e)** $L = \{-3, 3\}$ **f)** $L = \{-3\}$
    g) $L = \{-\sqrt{8}, \sqrt{8}\}$ **h)** $L = \emptyset$ **i)** $L = \emptyset$

26. genau zwei Lösungen, wenn $b^2 - 4ac > 0$
genau eine Lösung, wenn $b^2 - 4ac = 0$

28. $a^2 + (2a)^2 = c^2 \qquad a = 2$

31. $L = \{x - 2 < x < 3\}$

32. $L = \emptyset$

33. allgemeingültig ist Ungleichung **b)**

35. $L = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

36. $L = \{x : x < -1 \text{ oder } \frac{1}{2} < x < 2\}$

37.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	4
y	-8	-10	0	2	$+1$	0	-1	$-1{,}25$	0	10	35

38. **a)** $L = \{-\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, 1\}$
b) $L = \{-3\}$
c) $L = \{-2, \frac{1}{2}\}$
d) $L = \emptyset$

39. **a)** $L = \{x : x < -\frac{1}{2} \text{ oder } \frac{1}{3} < x < \frac{5}{2}\}$
b) $L = \{x : x < 2\}$

41. allgemeingültig

42. Angabe eines Zahlenpaares (z. B. [1; 2]), das die Gleichung nicht erfüllt.

43. **b)** Zur Lösungsmenge gehören: $[\frac{1}{2}; 0]$, $[-1; 1]$, $[5; -3]$, $[\frac{1}{5}; \frac{1}{5}]$

48. **a)** $L = \{[x; y] : x = 3 + 7g,\ y = 1 + 3g,\ g \in G\}$
b) $L = \{[x; y] : x = 3 + 2g,\ y = g,\ g \in G\}$
c) $L = \emptyset$
d) $L = \{[x; y] : x = g,\ y = 3 + g,\ g \in G\}$

49. nein, vgl. z. B. Aufgabe 48. a)

50. $L = \{[2; 6], [7; 4], [12; 2]\}$

53.

Anzahl der Wagen mit 15 t	10	14
Anzahl der Wagen mit 20 t	29	26

54. **a)** $L = \{[-1; 2]\}$ **b)** $L = \{[-3; -1]\}$ **c)** $L = \{[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}]\}$
d) $L = \emptyset$ **e)** $L = \{x : x \in P\}$ **f)** $L = \{[3; -4]\}$

56. **a)** Beide Gleichungen sind identisch.
b) Beide Gleichungen widersprechen einander.

59. **a)** $L = \{[0; 3], [2; -1]\}$ **b)** $L = \{[2 + 2\sqrt{2}; -5 - 4\sqrt{2}], [2 - 2\sqrt{2}; -5 + 4\sqrt{2}]\}$
c) $L = \emptyset$ **d)** $L = \{[4; 3], [-1; -2]\}$

61. 22; −2

62. 18; 12

63. $\frac{6}{5}$ h $\triangleq$ 72 min

64. 10 Ω, 15 Ω

4 Arbeiten mit Mengen in der Geometrie

4.1. Einführung

B1: Bei Geländespielen ist es häufig notwendig, den eigenen Standort in eine Karte des Geländes einzutragen. Wer Karten gut lesen kann, wird dies nach Orientierung im Gelände und auf der Karte mit mehr oder minder großer Genauigkeit tun können. Sicherer ist jedoch das folgende einfache Verfahren, zu dem man lediglich einen *Kompaß*, einen *Winkelmesser* und ein *Blatt durchsichtiges Papier* benötigt:

Vom eigenen Standort S aus peilt man drei auffällige Punkte A, B, C im Gelände an (↗ Bild 1), die auch in der Karte eingetragen sind (Punkte A', B', C'). Man mißt dabei die Winkel $ASB = \alpha$ und $BSC = \beta$ und zeichnet diese so auf das durchsichtige Blatt Papier, wie Bild 2 zeigt. Dann wird dieses so auf die Karte

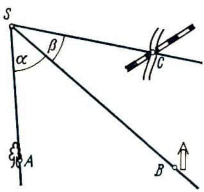


Bild 1

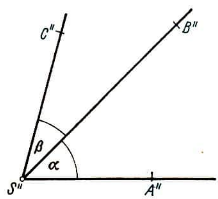


Bild 2

gelegt, daß $S''B''$ durch B' **und** $S''A''$ durch A' **und** SC'' durch C' verlaufen. Durch Verschieben und Drehen des Papierblattes auf der Karte ist das immer erreichbar. Die Lage von S'' gibt den gesuchten Punkt S' auf der Karte an.

Warum dieses Verfahren für $\alpha \neq 0°$ und $\beta \neq 0°$ immer funktioniert und bei richtiger Anwendung den gesuchten Kartenpunkt S' liefert, läßt sich durch Anwendung von Begriffsbildungen und Operationen der Mengenlehre exakt begründen (↗ S. 128f.).

Schon im Kapitel 1 gibt es zahlreiche Beispiele und Aufgaben, in denen Begriffe und Symbole aus der Mengenlehre auf Sachverhalte aus der Geometrie angewendet werden. Die **Elemente** dieser Mengen sind meistens **Punkte**, wobei als Grundbereich vor allem Punkte einer Ebene, aber auch Punkte im Raum oder auf einer Geraden auftreten können. Auch geometrische Figuren wie Dreiecke, Vierecke usw. sowie geometrische Körper können Grundbereiche der Mengenbildung in der Geometrie sein. Da diese geometrischen Objekte ihrerseits wieder als **Mengen von Punkten** aufgefaßt werden können, sind Mengen solcher Objekte Punktmengen zweiter Stufe. Beispielsweise ist die Menge aller Dreiecke in einer Ebene eine Menge zweiter Stufe, wenn man als Grundbereich die Punkte dieser Ebene wählt und jedes Dreieck als Punktmenge auffaßt. Wir werden uns nachfolgend fast nur mit Punktmengen 1. Stufe beschäftigen.
Beim Verwenden von Begriffen und Symbolen aus der Mengenlehre in der Geometrie müssen wir folgendes beachten:
Im Geometrieunterricht der Schule ist es üblich, Punkte mit Großbuchstaben zu bezeichnen. Das wollen wir nachfolgend auch beibehalten, d. h., wir werden die **Elemente** der betrachteten Punktmengen mit Großbuchstaben bezeichnen. Dagegen sollen die aus diesen Elementen (Punkte) gebildeten **Mengen** nicht mehr – wie bisher in diesem Buch – mit einem Großbuchstaben, sondern meistens mit einem **Kleinbuchstaben** bezeichnet werden.
Nachfolgend werden wir immer ein **beliebiges** Element der jeweils betrachteten Punktmenge m mit „P“ bezeichnen. Kommen in der betreffenden Betrachtung mehrere Punktmengen m_1, m_2, m_3, ... vor, so wollen wir zur Kennzeichnung eines beliebigen Elementes der Punktmenge m_1 das Zeichen „P'“, der Punktmenge m_2 das Zeichen „P''“ usw. verwenden. Genau wie bei der bisher verwendeten Darstellungsweise einer Menge M, deren Elemente x den Ausdruck $\mathsf{H}(x)$ erfüllen, nämlich $M = \{x\colon \mathsf{H}(x)\}$, benutzen wir für die Punktmenge m, für deren Elemente der Ausdruck $\mathsf{H}(P)$ wahr ist, die Darstellungsweise
$m = \{P\colon \mathsf{H}(P)\}$.
Einzelne Elemente aus m werden dagegen mit P_0, P_1, P_2 usw., aber auch mit anderen Großbuchstaben wie A, B, ... bezeichnet werden.

● 1.* Was bedeutet demnach

a) $n = \{P\colon \overline{AP} \cong \overline{BP}\}$, **b)** $k = \{P\colon \overline{MP} = r\}$?

4.2. Geometrische Elemente als Punktmengen

Bevor wir weiter mit Punktmengen arbeiten, wollen wir die wichtigsten **geometrischen Objekte** wie **Punkte, Geraden, Strecken, Strahlen und Winkel** und einige zwischen ihnen bestehende Beziehungen vom Standpunkt der Mengenlehre aus betrachten.

(1) Die in Bild 3 dargestellten Lagebeziehungen
a) der Punkt A **liegt auf** der Geraden g,
b) die Gerade g **geht durch** den Punkt A
können wir unter Verwendung der Symbolik der Mengenlehre durch

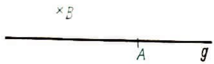


Bild 3

$A \in g$

beschreiben. *Das heißt*: die Gerade g ist eine (unendliche) Punktmenge, und der Punkt A gehört zu dieser Punktmenge.

● 2.* Begründen Sie, warum g eine unendliche Punktmenge ist!

3.* In Bild 3 ist ferner $B \notin g$. Wie lauten die entsprechenden Lagebeziehungen zwischen B und g?

(2) In Bild 4 ist durch die (voneinander verschiedenen) Punkte A und B **die** Gerade g gezeichnet. Hier gilt $A \in g$ **und** $B \in g$ **und** $A \not\equiv B$ (Kennzeichnung als verschiedene Punkte).

Bild 4

Aus dem Geometrieunterricht ist Ihnen auch die Schreibweise „$g = AB$" bekannt. Wir können sie nur noch verwenden (↗ D3, S. 16), wenn wir auch „AB" als die Bezeichnung einer Punktmenge (Gerade durch die Punkte A und B) auffassen. Das wollen wir nachfolgend tun, also auch die Schreibweisen $A \in AB$, $B \in AB$ und $P \in AB$ zulassen. Hier wird also eine Punktmenge, die Gerade AB, durch zwei Großbuchstaben gekennzeichnet.

● 4.* Was ist falsch, wenn man den in (2) betrachteten Sachverhalt durch $g = AB = \{A, B\}$ darstellt?

(3) Auch die **Strecke** $\overline{AB}$ in Bild 4 können wir als Punktmenge s auffassen. Obwohl $s \subset g$ (bzw. $\overline{AB} \subset g$), ist sie ebenfalls eine unendliche Punktmenge.

● 5.* Begründen Sie, warum die Strecke $s = \overline{AB}$ eine unendliche Punktmenge ist!

Im Geometrieunterricht haben Sie nicht nur die Strecke $s = \overline{AB}$, sondern auch deren **Länge** mit s bzw. $\overline{AB}$ bezeichnet. Eine Länge ist aber eine **Größe** (bestehend aus Maßzahl und Einheit) und läßt sich **nicht** als Punktmenge auffassen.
Deshalb ist es notwendig, zwischen der Strecke $\overline{AB}$ als **Punktmenge** und der **Länge** der Strecke $\overline{AB}$ zu unterscheiden.

■ **B2: a)** In $B \in \overline{AB}$ bzw. $B \in s$ bezeichnen $\overline{AB}$ bzw. s eine Punktmenge.
b) In $\overline{AB} = s = 2{,}7$ cm bezeichnen $\overline{AB}$ bzw. s eine Größe.

● **6.*** A, B und C seien Punkte einer Ebene. Was bedeuten dann die folgenden Beziehungen geometrisch?
a) $A \in AB$ **b)** $A \in \overline{AB}$ **c)** $\overline{AB} \subset AB$ **d)** $C \notin AB$ **e)** $C \notin \overline{AB}$

(4) Wir haben vorstehend schon mehrfach die Ebene e als Punktmenge aufgefaßt, d. h., für alle Punkte P dieser Ebene gilt $P \in e$. Andererseits soll die Schreibweise $Q \notin e$ bedeuten, daß der Punkt Q **nicht** in der Ebene e liegt.

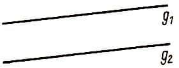


Bild 5.a

Bild 5.b

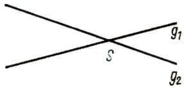


Bild 5.c

(5) In Bild 5 sind je zwei Geraden g_1 und g_2 dargestellt, wobei in
a) $g_1 \parallel g_2$ **b)** $g_1 \parallel g_2$ und $g_1 = g_2$ **c)** $g_1 \nparallel g_2$
sein sollen. Diese Beziehungen lassen sich unter Verwendung von Begriffen und Symbolen aus der Mengenlehre folgendermaßen darstellen:
a) $g_1 \cap g_2 = \emptyset$ b) $g_1 \cap g_2 = g_1 = g_2$ c) $g_1 \cap g_2 = \{S\}$

(6) In Bild 6 ist der im sog. **Parallelenaxiom**[1]) **des Euklid** formulierte geometrische Sachverhalt dargestellt. Unter Verwendung von Begriffen und Symbolen der Mengenlehre kann dieses Parallelenaxiom folgendermaßen formuliert werden:

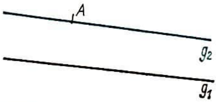


Bild 6

Wenn $A \notin g_1$, dann gibt es höchstens eine Gerade g_2 mit $A \in g_2$ und $g_1 \cap g_2 = \emptyset$.

● **7.*** Formulieren Sie das Parallelenaxiom des Euklid ohne Verwendung von Begriffen und Symbolen der Mengenlehre!

(7) Wichtig ist auch folgende geometrische Aussage:
Es sei $A \in g$, $B \in g$, $C \in g$ und $A \neq B$, $A \neq C$, $B \neq C$ (d. h., es sind drei verschiedene Punkte A, B, C auf einer Geraden g gegeben).
Dann gilt: **entweder** $A \in \overline{BC}$ **oder** $B \in \overline{AC}$ **oder** $C \in \overline{AB}$.

● **8.*** Formulieren Sie diese Aussage auch ohne Verwendung von Begriffen und Symbolen aus der Mengenlehre!
Fertigen Sie dazu auch entsprechende Zeichnungen an!

---

[1]) Ein Axiom ist eine Aussage, die als wahr angenommen wird, ohne daß man sie innerhalb der betreffenden Theorie (hier: Geometrie der Ebene) beweisen kann.

(8) In Bild 7 ist $A \in g$. Der Punkt A zerlegt die Gerade g in zwei **Strahlen** h und k, die wir ebenfalls als Punktmengen auffassen können. Für sie gilt:

Bild 7

$A \in h$ und $h \subset g$ bzw. $A \in k$ und $k \subset g$
bzw. $h \cap k = \{A\}$.

Der Punkt A heißt auch gemeinsamer **Anfangspunkt** der Strahlen h und k. Bezeichnet man einen beliebigen Punkt des Strahls h mit P' und des Strahls k mit P'', so kann man auch schreiben:

$h = \overrightarrow{AP'}$ bzw. $k = \overrightarrow{AP''}$.

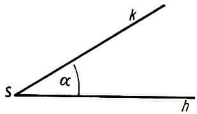


Bild 8

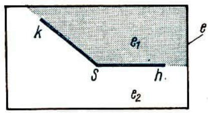


Bild 9

(9) Auch den Winkel α kann man als Punktmenge auffassen (↗ Bild 8). Faßt man den Winkel α als die Menge w_1 aller Punkte auf, die auf seinen Schenkeln h oder k liegen, so gilt $w_1 = k \cup h$.
Man kann aber auch den Winkel α als eine Punktmenge w_2 auffassen (↗ Bild 9), zu der alle Punkte P des Ebenenteils e_1 gehören: $w = \{P\colon P \in e_1\}$. Hier ist der Grundbereich die Menge aller Punkte der Ebene e. Auch bei Winkeln hat man zu unterscheiden, ob die Punktmenge (geometrisches Objekt) oder seine Größe (Maßzahl und Einheit) gemeint ist.

● **9.*** Gegeben sind drei Geraden g_1, g_2, g_3 in einer Ebene e. Bestimmen Sie $d = g_1 \cap g_2 \cap g_3$, wenn

a) $g_1 \parallel g_2$ und $g_2 \parallel g_3$
b) $g_1 \parallel g_2$ und $g_2 \nparallel g_3$
c) $g_1 \nparallel g_2$ und $g_2 \nparallel g_3$.

Hinweise: Beachten Sie, daß Sie nach (5) für $g_1 \parallel g_2$ zwei Fälle zu unterscheiden haben! Auch bei Aufgabe 9. c) ist eine Fallunterscheidung erforderlich!

10.* Gegeben sind in einer Ebene e eine Gerade g und ein Kreis k, die
a) keinen Punkt, **b)** einen Punkt, **c)** zwei Punkte
gemeinsam haben. Fertigen Sie eine Zeichnung für diese drei Fälle an, und beschreiben Sie die vorliegenden Sachverhalte unter Verwendung von Symbolen der Mengenlehre!

4.3. Weitere geometrische Objekte als Punktmengen

Wir wollen nun weitere Beispiele für Punktmengen betrachten, und zwar geometrische Objekte, die Ihnen aus dem Unterricht bereits bekannt sind.

■ **B3:**

a) Die Menge d der Eckpunkte A, B, C eines Dreiecks ist eine endliche Punktmenge, nämlich $d = \{A, B, C\}$. Dem Grundbereich in diesem Beispiel gehören alle Punkte einer durch sie bestimmten Ebene e an.

b) Die Menge c der Punkte P, die auf der Seite $\overline{AB}$ des Dreiecks ABC aus Beispiel 3 a) liegen, ist eine unendliche Punktmenge, die durch $c = \{P\colon P \in \overline{AB}\}$ dargestellt werden kann.

c) Die Menge m aller Punkte P, die auf den Seiten des Dreiecks ABC liegen, kann durch

$m = \{P\colon P \in \overline{AB} \text{ oder } P \in \overline{BC} \text{ oder } P \in \overline{AC}\} = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$

dargestellt werden.

● **11.*** Bestimmen Sie für das Dreieck ABC aus Beispiel 3

a) $\overline{AB} \cap \overline{BC} \cap \overline{AC}$, **b)** $m = (\overline{AB} \cap \overline{BC}) \cup (\overline{AB} \cap \overline{AC}) \cup (\overline{BC} \cap \overline{AC})$!

■ **B4:** Als Grundbereich verwenden wir nunmehr die Punkte im **Raum.** Dann können wir u. a. folgende Mengen bilden:

a) Die Menge w aller Eckpunkte des in Bild 10 dargestellten Würfels ist eine endliche Menge. Sie wird beschrieben durch

$w = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.

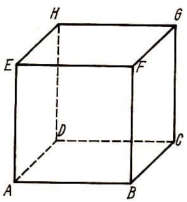


Bild 10

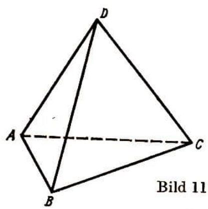


Bild 11

b) Für die Menge k der Punkte P, die auf den Kanten des in Bild 11 dargestellten Tetraeders liegen, gilt

$k = \{P\colon P \in \overline{AB} \text{ oder } P \in \overline{AC} \text{ oder } P \in \overline{BC} \text{ oder } P \in \overline{AD} \text{ oder }$
$P \in \overline{BD} \text{ oder } P \in \overline{CD}\} = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC} \cup \overline{AD} \cup \overline{BD} \cup \overline{CD}$.

● **12.*** Bestimmen Sie für Beispiel 4b) auch
$e = \overline{AB} \cap \overline{AC} \cap \overline{BC} \cap \overline{AD} \cap \overline{BD} \cap \overline{CD}$!

Während bei den in 4.4. betrachteten geometrischen Objekten und Beziehungen Begriffe und Symbole der Mengenlehre meist eine knappe und übersichtliche Darstellung geometrischer Sachverhalte ermöglichen, trifft dies für die Beispiele in diesem Abschnitt kaum bzw. nicht mehr zu. Hier wäre eine Nutzung der Symbolik der Mengenlehre nur dann gerechtfertigt, wenn sich daraus anderweitige Vorteile, z. B. beim Beweisen geometrischer Aussagen ergäben. Darauf können wir hier jedoch nicht näher eingehen.
Wir wollen lediglich noch an einigen Beispielen zeigen, wie man geometrische Objekte „mengentheoretisch" **definieren** kann. Im Geometrieunterricht unserer Schule bleiben solche Objekte wie „Punkt", „Gerade", „Strahl", „Strecke" usw. undefiniert, ja selbst für den so häufig verwendeten Begriff des Dreiecks wird keine Definition angegeben, während z. B. der Begriff „Viereck" definiert wird (↗ [13b], S. 129).
Wir wollen nachfolgend unter Verwendung von Begriffen und Symbolen der Mengenlehre eine Definition für „Dreieck" erarbeiten. Dazu müssen wir zunächst festlegen, ob wir unter dem Dreieck die Menge der Punkte verstehen wollen, die auf seinen drei Seiten liegen, oder ob außerdem auch diejenigen Punkte zum Dreieck gehören sollen, die in seinem Innern liegen. Wir wollen hier unter „Dreieck" die Menge verstehen, die von den Punkten seiner Seiten gebildet wird. Dann erhalten wir:
Das Dreieck ABC (d. h. mit den Eckpunkten A, B und C) ist die Menge aller Punkte P, die folgende Eigenschaften haben:

a) Punkt C liegt nicht auf der Geraden AB.
b) Punkt P liegt auf der Strecke $\overline{AB}$ oder der Strecke $\overline{BC}$ oder der Strecke $\overline{CA}$.
Dafür kann man kurz schreiben:

$$\triangle ABC = \{P\colon (P \in \overline{AB} \text{ oder } P \in \overline{BC} \text{ oder } P \in \overline{CA}) \text{ und } C \notin AB\}$$

Dazu ist noch folgendes anzumerken:

a) Als Grundbereich wählen wir (bei dieser ebenen Figur) die Punkte einer Ebene ε. Man kann zeigen, daß es für $A \neq B$ und $A \neq C$ und $B \neq C$ immer genau eine Ebene ε gibt, in der diese Punkte (und damit das Dreieck) liegen.
b) Die Eigenschaft $C \notin AB$ ist eine **notwendige Bedingung** dafür, daß ein Dreieck vorliegt. Denn wäre $C \in AB$, so läge kein Dreieck, sondern eine Gerade vor, die durch die Punkte A, B und C geht. Zugleich ist die Bedingung $A \notin BC$ aber auch **hinreichend** dafür, daß ein Dreieck vorliegt, denn aus $C \notin AB$ folgt $A \notin CB$ und $B \notin AC$.

● **13.*** Im Lehrbuch für Klasse 6 (↗ [13b], S. 129) befindet sich folgende Definition für „Viereck".
„Unter einem Viereck $ABCD$ versteht man eine Punktmenge mit folgenden Eigenschaften:
(1) Von den Punkten A, B, C, D liegen je drei nicht auf ein und derselben Geraden.

(2) Der Punktmenge gehören genau die Punkte der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ an. Diese Strecken heißen „Seiten des Vierecks".

Lösen Sie dazu folgende Aufgaben:

a) Stellen Sie die Eigenschaft (1) unter Verwendung von Begriffen und Symbolen aus der Mengenlehre dar!

b) Stellen Sie die Eigenschaft (2) unter Verwendung von Begriffen und Symbolen aus der Mengenlehre dar!

Zu der in Aufgabe 13 angegebenen Definition für das Viereck $ABCD$ ist jedoch noch eine wesentliche Bemerkung erforderlich. Das Lehrbuchkapitel, dem die Definition entnommen ist, heißt „Planimetrie" (Geometrie der Ebene), d. h., in diesem Kapitel werden nur Punkte einer Ebene e als Grundbereich benutzt. Es wird also stillschweigend vorausgesetzt, daß $A \in e$, $B \in e$, $C \in e$, $D \in e$. Während nun drei (voneinander verschiedene) Punkte immer in genau einer Ebene liegen, ist dies für vier Punkte keineswegs immer so. In Beispiel 4 b), wo als Grundbereich die Punkte im Raum r verwendet wurden, gilt zwar $A \in r$, $B \in r$, $C \in r$, $D \in r$. Aber es gilt **nicht** $D \in e$, wenn wir mit e die Ebene bezeichnen, in der die Punkte A, B und C liegen. Wir müssen deshalb bei der Definition für das Viereck noch als dritte Eigenschaft hinzufügen: $A \in e$, $B \in e$, $C \in e$, $D \in e$.

● **14.*** Wie lautet demnach [im Ergebnis der vorstehenden Überlegung und von Aufgabe 13] eine Definition des Vierecks $ABCD$ im Raum unter Verwendung von Begriffen und Symbolen der Mengenlehre?

15. Definieren Sie unter Verwendung von Begriffen und Symbolen der Mengenlehre

a) das gleichseitige Dreieck RST,
b) das Drachenviereck $ABCD$,
c) das Parallelogramm $QRST$,
d) das Rechteck $EFGH$!

Wenn Sie innerhalb Ihrer Arbeitsgemeinschaft die Lösungen der Aufgabe 15 miteinander vergleichen, werden Sie eventuell folgendes feststellen:
Zwei Lösungen für dieselbe Aufgabe können — zumindest teilweise — voneinander abweichen und trotzdem beide richtig sein.

■ **B5:** Bei Aufgabe 15. c) können Sie zur Definition des Parallelogramms $QRST$ neben seiner Kennzeichnung als allgemeines Viereck sowohl die beiden Eigenschaften

a) $QR \cap ST = \emptyset$ **und** $RS \cap TQ = \emptyset$

als auch die beiden Eigenschaften

b) $\overline{QR} \cong \overline{ST}$ **und** $\overline{RS} \cong \overline{TQ}$ verwenden.

Nun besteht zwischen den Eigenschaften bei **a)** und denen bei **b)** folgender Zusammenhang: Werden die Eigenschaften bei **a)** zur Definition des Parallelogramms $QRST$ benutzt, so sind die Eigenschaften bei **b)** **beweisbar** und umgekehrt.

● **16.*** Führen Sie diese Beweise!

4.4. Punktmengen als Bestimmungslinien

Punktmengen wie $m = \{P\colon \mathsf{H}(P)\}$ oder $m = \{P\colon \mathsf{H}_1(P)$ und bzw. oder $\mathsf{H}_2(P), \ldots, \mathsf{H}_n(P)\}$ erfassen **alle** Punkte P, für die $\mathsf{H}(P)$ bzw. $\mathsf{H}_1(P)$ und bzw. oder $\mathsf{H}_2(P), \ldots, \mathsf{H}_n(P)$ zu einer wahren Aussage wird. Sie erfassen aber auch nur diese, d. h., zur Menge m gehört kein Punkt, dem die mengenbildende Eigenschaft $\mathsf{H}(P)$ bzw. $\mathsf{H}_1(P)$ und bzw. oder $\mathsf{H}_2(P), \ldots, \mathsf{H}_n(P)$ **nicht** zukommt. Liegen die Punkte einer betrachteten Punktmenge auf einer Linie, z. B. auf einer Geraden, einer Strecke, einem Strahl, einem Kreis, einem Kreisbogen usw., so wird diese Punktmenge auch **Bestimmungslinie** für alle Punkte der betrachteten Menge genannt. Bestimmungslinien sind für das Lösen geometrischer Aufgaben, insbesondere von Konstruktionsaufgaben, bedeutsam. Sie unterstützen das **Finden** eines Lösungsweges für solche Aufgaben und damit die **Planung** der Lösung, bevor man diese ausführt. Wir wollen nachfolgend *sechs* typische **Bestimmungslinien** betrachten.

(1) Gesucht ist die Menge k aller Punkte P einer Ebene e, die von einem Punkt $A \in e$ die Entfernung r haben.
Offensichtlich ist der Kreis k um A mit dem Radius r die gesuchte Bestimmungslinie, denn für alle Punkte P des Kreises k gilt $\overline{PA} = r$, und es gibt andererseits keinen Punkt $Q \notin k$ mit der Eigenschaft $\overline{QA} = r$.
Liegt nämlich Q im Innern des Kreises k, so gilt $\overline{QA} < r$, und liegt Q außerhalb des Kreises k, so gilt $\overline{QA} > r$. Man kann diesen Sachverhalt auch folgendermaßen formulieren:
Die Bestimmungslinie für alle Punkte P einer Ebene e, die vom Punkt $A \in e$ eine gegebene Entfernung r haben, ist der **Kreis** k um A mit dem Radius r.
Die vorstehende Betrachtung zeigt aber auch, daß es keine Bestimmungslinie für alle Punkte P einer Ebene e gibt, die von einem Punkt $A \in e$ weniger oder mehr als r entfernt sind. Im ersten Fall gehören nämlich **alle** Punkte P, die im **Innern des Kreises** k in der Ebene e liegen, zu der Punktmenge $m_1 = \{P'\colon \overline{AP'} < r\}$, und diese liegen eben nicht auf einer Linie, sondern auf einem flächenhaften Teil der Ebene e.

● **17.*** **a)** Zeigen Sie, daß die Menge s aller Punkte einer Ebene e, die von $A \in e$ die Entfernung r_1 **und** von $B \in e$ (mit $B \neq A$) die Entfernung r^2 haben, gegeben ist durch

$$s = k_1 \cap k_2 \quad \text{mit } k_1 = \{P'\colon \overline{AP'} = r_1\} \text{ und } k_2 = \{P''\colon \overline{AP''} = r_2\}!$$

b) Zeigen Sie, daß die Menge s für $A \neq B$ höchstens 2 Elemente hat!

c) Konstruieren Sie alle Punkte S, die zu dieser Menge s gehören, für

1. $\overline{AB} = 42$ mm, $r_1 = 37$ mm, $r_2 = 15$ mm
2. $\overline{AB} = 42$ mm, $r_1 = 17$ mm, $r_2 = 15$ mm
3. $\overline{AB} = 42$ mm, $r_1 = 27$ mm, $r_2 = 15$ mm
4. $\overline{AB} = 42$ mm, $r_1 = 57$ mm, $r_2 = 15$ mm
5. $\overline{AB} = 42$ mm, $r_1 = 65$ mm, $r_2 = 15$ mm!

(2) Die Bestimmungslinie m für alle Punkte P der Ebene e, die von zwei Punkten $A \in e$ und $B \in e$ bei $A \neq B$ gleich weit entfernt sind, ist die **Mittelsenkrechte** der Strecke $\overline{AB}$.

Beweis:

Wenn $M \in \overline{AB}$ und $\overline{AM} = \overline{MB}$, so ist $M \in m$ (↗ Bild 12)

Ferner gilt für die Menge m dieser Punkte P: $m = \{P: \overline{AP} = \overline{BP}\}$.

Nun haben wir noch zu zeigen, daß alle Punkte $P \in m$ auf einer Linie liegen.

Das weisen wir folgendermaßen nach:

Wir wählen einen beliebigen Punkt $P \in m$.

Für ihn gilt nach Voraussetzung

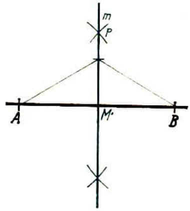


Bild 12

$$\overline{PA} \cong \overline{PB}.$$

Ferner gilt

$$\overline{AM} \cong \overline{MB} \text{ (siehe oben!)}$$

und

$$\overline{MP} \cong \overline{MP}.$$

Daraus folgt

$\triangle\, AMP \cong \triangle\, MBP$ (nach Kongruenzsatz sss)

und weiter

$\sphericalangle\, AMP \cong \sphericalangle\, BMP$ (als gleichliegende Stücke in kongruenten Dreiecken).

Wegen $\sphericalangle\, AMP + \sphericalangle\, BMP = 180°$ folgt dann

$\sphericalangle\, AMP = \sphericalangle\, BMP = 90°$, also

$\overline{PM} \perp \overline{AB}$.

Wir haben damit für einen **beliebigen** Punkt $P \in m$ gezeigt, daß er auf der Mittelsenkrechten (Symmetrieachse) der Strecke $\overline{AB}$ liegt. Damit haben wir zugleich gezeigt, daß **alle** Punkte $P \in m$ auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ liegen.

● **18.* a)** Bestimmen Sie die Menge m aller Punkte P der Ebene c, die von drei nicht auf einer Geraden liegenden Punkten A, B und C gleich weit entfernt sind!

b) Begründen Sie, daß diese Menge m genau ein Element enthält, und geben Sie seine Bedeutung für das durch die Punkte gegebene Dreieck ABC an!

(3) Die Bestimmungslinien s_1 und s_2 für alle Punkte P, die mit einem gegebenen Punkt $A \neq P$ der Geraden $g = AB$ verbunden einen gegebenen Winkel $PAB = \alpha$ bilden, sind die beiden Strahlen s_1 und s_2 mit dem gemeinsamen Anfangspunkt A, die die Gerade $g = AB$ unter dem Winkel α schneiden.

Beweis:

Für alle Punkte $P \in s_1$ gilt nämlich $\sphericalangle\, PAB = \alpha$ und für alle Punkte $P \in s_2$ gilt ebenso $\sphericalangle\, PAB = \alpha$.

Ferner gilt für einen Punkt $Q \notin s_1$ und $Q \notin s_2$, daß $\sphericalangle QAB \gtrless \sphericalangle PAB$, denn $\sphericalangle QAP \neq 0°$.
Diese Bestimmungslinie wird auch **freier Schenkel des Winkels α** genannt.

(4) Die Bestimmungslinien für die Menge aller Punkte P, die von einer Geraden g den Abstand $d \neq 0$ haben, ist das **Parallelenpaar** zu g im Abstand d.
Beweis:
Nach Voraussetzung muß für alle Punkte $P \in p_1$ bzw. $P' \in p_2$ gelten

$$\overline{PF} = d \quad \text{bzw.} \quad \overline{P'F'} = d\,,$$

wenn F bzw. F' die Fußpunkte der Lote von P bzw. P' auf g sind. Für $d \neq 0$ ist also $p_1 \cap g = \emptyset$ und $p_2 \cap g = \emptyset$, d. h., es gilt $p_1 \parallel g$ und $p_2 \parallel g$.

(5) Die Bestimmungslinie für die Menge aller Punkte P, die von zwei Strahlen s_1 und s_2 mit gemeinsamem Anfangspunkt S und verschiedener Richtung jeweils den gleichen Abstand d haben, ist die **Winkelhalbierende** des von s_1 und s_2 gebildeten Winkels.

● **19.*** Beweisen Sie die Aussage (5)!

20. Ermitteln Sie die Menge aller Punkte P, die von zwei einander schneidenden Geraden g_1 und g_2 jeweils gleichen Abstand haben!

21. Als Lösung der Aufgabe 20 erhalten Sie zwei Bestimmungslinien, nämlich die Geraden s_1 und s_2. Beweisen Sie, daß $s_1 \perp s_2$.

(6) Die Bestimmungslinie für die Menge aller Punkte P einer Ebene e, von denen eine gegebene Strecke $\overline{AB} \in e$ unter einem gegebenen Winkel $\gamma < 90°$ erscheint, sind die **Kreisbögen** k_1 und k_2 über der Sehne $\overline{AB}$ mit dem Radius $\overline{M_1A} = \overline{M_2B}$ (↗ Bild 13), wobei M_1 bzw. M_2 folgendermaßen bestimmt sind:

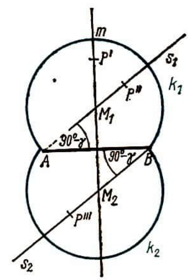


Bild 13

$M_1 \in m$ und $M_2 \in m$ mit $m = \{P' : \overline{P'A} = \overline{P'B}\}$ (Mittelsenkrechte auf $\overline{AB}$) und
$M_1 \in s_1$ mit $s_1 = \{P'' : \sphericalangle P''AB = 90° - \gamma$ und $A \in s_1\}$
$M_2 \in s_2$ mit $s_2 = \{P''' : \sphericalangle P'''BA = 90° - \gamma$ und $B \in s_2\}$

● **22.** Beweisen Sie die Aussage (6)!

23.* Gibt es eine Bestimmungslinie für die Menge aller Punkte P einer Ebene e, von denen eine gegebene Strecke $\overline{AB} \in e$ unter einem Winkel von $90°$ erscheint?

24.* Untersuchen Sie für (6) auch den Fall, daß $\gamma > 90°$ ist!

25. Bestimmen Sie durch Konstruktion die Menge aller Dreiecke ABC, wenn

$\overline{AB} = 52$ mm und $\sphericalangle ACB = 72°$ ist!

26.* Eine Strecke $\overline{AB}$ sei 4,2 cm lang.

a) Bestimmen Sie durch Konstruktion alle Punkte, von denen $\overline{AB}$ unter einem Winkel von 90° erscheint.

b) Überprüfen Sie, ob es in dieser Punktmenge Punkte gibt, die von AB den Abstand

b$_1$) $d_1 = 0{,}2$ cm; b$_2$) $d_2 = 2{,}0$ cm;
b$_3$) $d_3 = 2{,}1$ cm; b$_4$) $d_4 = 2{,}2$ cm;
b$_5$) $d_5 = 4{,}2$ cm haben!

4.5. Anwendungen von Bestimmungslinien beim Lösen von planimetrischen Konstruktionsaufgaben

Beim Lösen von Konstruktionsaufgaben (z. B. Dreiecks- oder Viereckskonstruktionen) ist es häufig nützlich, sich vor der eigentlichen Konstruktion einen **Lösungsplan** zu erarbeiten. Dafür kann man Bestimmungslinien sehr gut verwenden.

Ein Dreieck oder Viereck aus gegebenen Stücken (Seiten, Winkeln, Höhen, Seitenhalbierenden, Winkelhalbierenden, Radius des In- oder Umkreises, Umfang des Dreiecks usw. bzw. Seiten, Innenwinkel, Diagonalen des Vierecks usw.) konstruieren heißt, die Menge aller Dreiecke bzw. Vierecke zu bestimmen, die diese gegebenen Stücke enthalten. Jedes Element aus dieser Menge heißt dann eine **Lösung** dieser Konstruktionsaufgabe. Dabei ist es üblich, daß alle Lösungen, die paarweise kongruent sind, als **eine** Lösung angesehen werden.

Wir wollen zunächst Dreieckskonstruktionen betrachten.

Ein Dreieck ist bekanntlich dann konstruiert, wenn man seine drei Eckpunkte so konstruiert hat, daß die gegebenen Stücke im konstruierten Dreieck in der vorgeschriebenen Größe vorkommen. Dabei ist es meist so, daß man einen oder zwei Eckpunkte sofort erhält, wenn man eines der gegebenen Stücke zeichnet. Ist z. B. eine Seite gegeben, so erhält man zwei Eckpunkte durch Zeichnen dieser Seite, ist dagegen keine Seite, aber ein Innenwinkel gegeben, so erhält man durch das Zeichnen dieses Winkels nur einen Eckpunkt des Dreiecks. Letzteres gilt auch für eine Höhe, eine Seiten- oder Winkelhalbierende. Das Problem besteht nun darin, den oder die Eckpunkte zu bestimmen, die durch das zuerst gezeichnete Stück noch nicht bestimmt sind.

Ob und wie dies möglich ist, hängt davon ab, wie viele Stücke überhaupt gegeben sind und wie die anderen gegebenen Stücke zum zuerst gezeichneten liegen.

■ **B6:** Die Aufgabe, ein Dreieck ABC zu konstruieren, in dem $\overline{AB} = 42$ mm ist, hat *unendlich viele Lösungen.*
Jedes der in Bild 14 gezeichneten Dreiecke ABC_1, ABC_2, ABC_3, ... erfüllt nämlich die Bedingung $\overline{AB} = 42$ mm der Aufgabenstellung, ist also *eine Lösung* der Aufgabe. Da dies für jeden Punkt P der Ebene mit $P \notin AB$ gilt, hat die Aufgabe unendlich viele Lösungen. Allerdings folgt aus $C_1 \neq C_2$ nicht, daß es sich um verschiedene Lösungen handelt, wie wir in Bild 14 erkennen können. Dort sind die Punkte C_1, C_2, C_3 und C_4 folgendermaßen festgelegt worden:

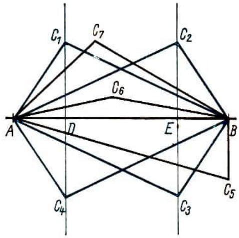


Bild 14

$$\overline{AD} = \overline{EB};\ C_1C_4 \perp AB;\ C_2C_3 \perp AB;\ \overline{C_1D} = \overline{C_4D},\ \overline{C_2E} = \overline{C_3E}$$
und $\overline{C_1D} = \overline{C_2E}$.

Es läßt sich dann zeigen, daß
$$\triangle ABC_1 \cong \triangle ABC_4 \quad \text{und} \quad \triangle ABC_2 \cong \triangle ABC_3$$
ist.
Schließlich gilt auch $\triangle ABC_1 \cong \triangle ABC_2$, d. h., alle vier Dreiecke ABC_1, ABC_2, ABC_3 und ABC_4 sind paarweise kongruent. Wir haben sie also als *genau eine Lösung* zu betrachten. Dies ändert jedoch nichts daran, daß es für die betrachtete Aufgabe *unendlich viele Lösungen* gibt. Durch die Bedingungen der Aufgabe ist die Lage von C nicht näher bestimmt, insbesondere können wir auch keine Bestimmungslinie für C angeben.

● **27.** Beweisen Sie, daß die in Bild 14 dargestellten vier Dreiecke ABC_1, ABC_2, ABC_3, ABC_4 unter den in Beispiel 6 angegebenen Voraussetzungen paarweise kongruent sind!

■ **B7:** Auch die Aufgabe, ein Dreieck ABC zu konstruieren, in dem $\overline{AB} = 42$ mm und $\sphericalangle CAB = 36°$ ist, hat *unendlich viele Lösungen.* Jedes der in Bild 15 gezeichneten Dreiecke ABC_1, ABC_2, ... erfüllt die Bedingungen der Aufgabe, ist also *eine Lösung.*
Im Unterschied zum Beispiel 6 gibt es hier aber eine Bestimmungslinie für den Eckpunkt C. Es ist der freie Schenkel des in A an AB angetragenen Winkels CAB, also der Strahl s mit dem Anfangspunkt A.

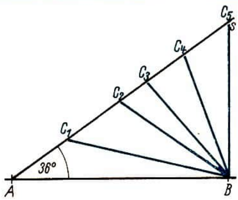


Bild 15

● 28.* a) Konstruieren Sie Dreiecke, in denen $\overline{AB} = 42$ mm und $\overline{BC} = 35$ mm!

b) Wie viele Lösungen hat die Aufgabe?

c) Ermitteln Sie eine Bestimmungslinie für C, wenn sie zuerst $\overline{AB} = 42$ mm zeichnen!

■ **B8:** Es sollen alle Dreiecke ABC konstruiert werden, für die $\overline{AB} = 4{,}3$ cm, $\overline{AC} = 3{,}8$ cm, $\sphericalangle CAB = 77°$ ist.
Wir wollen nun zunächst mögliche **Lösungspläne** für diese Konstruktionsaufgabe betrachten und diese in einer Kurzform aufschreiben.

a) Zeichnen von $\overline{AB}$ legt die Eckpunkte A und B fest.
Kurzform: $(\overline{AB}) \rightarrow A, B$
Erste Bestimmungslinie für den noch fehlenden Eckpunkt C [*Kurzform*: $b_1(C)$] ist der freie Schenkel s des im Punkt A angetragenen Winkels CAB [*Kurzform*: $s = \{P: \sphericalangle P_1AB = 77°\}$], also

$b_1(C)\ : s = \{P: \sphericalangle P_1AB = 77° \text{ und } A \in s\}$.

Zweite Bestimmungslinie für den noch fehlenden Eckpunkt C ist der Kreis k um A mit dem Radius $\overline{AC}$, in *Kurzform*:

$b_2(C)$: $k = \{P': \overline{P'A} = \overline{AC} \text{ und } M_k \equiv A\}$
(M_k bedeutet: Mittelpunkt des Kreises k).

In *Kurzform* lautet also der *Lösungsplan*:

$(\overline{AB}) \rightarrow A, B$
$b_1(C)$: $s = \{P: \sphericalangle PAB = 77° \text{ und } A \in s\}$
$b_2(C)$: $k = \{P': \overline{P'A} = \overline{AC} \text{ und } M_k \equiv A\}$

b) *Lösungsplan* für den Fall, daß zuerst $\sphericalangle CAB$ gezeichnet wird:

$(\sphericalangle CAB) \rightarrow A$ und $s_1 \cap s_2 = \{A\}$
$b_1(B)$: $s_1 = \overrightarrow{AP}$
$b_2(B)$: $k_1 = \{P': \overline{P'A} = \overline{AB} \text{ und } M_{k1} \equiv A\}$
$b_1(C)$: $s_2 = \overrightarrow{AP''}$
$b_2(C)$: $k_2 = \{P''': \overline{P'''A} = \overline{AC} \text{ und } M_{k2} \equiv A\}$

Nun wollen wir überlegen, **wie viele Lösungen** diese Aufgabe hat: Die Menge c der **gemeinsamen** Punkte von $b_1(C)$ und $b_2(C)$, also $c = s \cap k$, ist hier eine Einermenge, d. h. $c = s \cap k = \{C\}$, denn der von A ausgehende Strahl s hat mit dem Kreis k um A mit dem Radius $\overline{AC}$ genau einen Schnittpunkt. Demnach hat die Aufgabe *genau eine Lösung*.
Zum gleichen Ergebnis müssen wir auch bei b) kommen. Das ist in der Tat der Fall, denn $s_1 \cap k_1 = \{B\}$, d. h., der Strahl s_1 mit dem Anfangspunkt A und der Kreis k_1 um A mit dem Radius $\overline{AB}$ schneiden sich in *genau einem Punkt* B und (ganz entsprechend) $s_2 \cap k_2 = \{C\}$.

Lösungspläne und die darauf aufbauenden Überlegungen zur Anzahl der Lösungen ermöglichen Aussagen über die **Konstruierbarkeit** geometrischer Figuren aus gegebenen Stücken, ohne die Konstruktion selbst auszuführen. Für die Konstruierbarkeit von Dreiecken gelten u. a. folgende Sätze:

(1) Aus einem oder mehreren gegebenen Stücken ist ein Dreieck
   a) **konstruierbar**, wenn die Größe der gegebenen Stücke zu keinem Satz über Dreiecke im Widerspruch steht,
   b) **nicht konstruierbar,** wenn die Größe der gegebenen Stücke zu einem Satz über Dreiecke im Widerspruch steht. Es gibt dann **keine** Lösung.

(2) Für die **Anzahl** der Lösungen bei konstruierbaren Dreiecken gilt in Abhängigkeit von der Anzahl der gegebenen Stücke:
   a) bei *einem* und bei *zwei* gegebenen Stücken gibt es *unendlich* viele Lösungen,
   b) bei *drei voneinander unabhängigen* gegebenen Stücken gibt es *endlich* viele Lösungen. Die Anzahl der Lösungen läßt sich dann aus einem Lösungsplan für die betreffende Aufgabe bestimmen.

■ **B9:** Nicht konstruierbar ist das Dreieck ABC, wenn beispielsweise
a) $\sphericalangle ABC = 180°$ gegeben ist,
b) zwei Innenwinkel dieses Dreiecks gegeben sind, deren Summe gleich oder größer als 180° ist,
c) $\overline{AB} = 55$ mm und $\overline{BC} = 20$ mm und $\overline{AC} = 34$ mm gegeben sind,
d) $\overline{AB} = 55$ mm und $\overline{BC} = 20$ mm und $\sphericalangle ACB = 33°$ und $\sphericalangle CAB = 100°$ gegeben sind.

● **29.*** **a)** Begründen Sie die Nichtkonstruierbarkeit der Dreiecke aus Beispiel 9, indem Sie jeweils einen Satz über Dreiecke angeben, der im Widerspruch zu den jeweils gegebenen Stücken steht!
b) Geben Sie weitere Beispiele für nicht konstruierbare Dreiecke an!

30.* Es sollen alle Dreiecke ABC konstruiert werden, für die
a) zwei Seiten,
b) eine Seite und der gegenüberliegende Innenwinkel,
c) zwei Innenwinkel
gegeben sind!
1. Bei welchen der drei Aufgaben a), b), c) gibt es Bedingungen für die Größen der gegebenen Stücke, die erfüllt sein müssen, damit überhaupt ein Dreieck konstruierbar ist?
2. Wie lauten diese Bedingungen?
3. Zeigen Sie, daß alle Aufgaben im Falle der Konstruierbarkeit unendlich viele Lösungen haben!

Hinweis: Stellen Sie dazu Lösungspläne für selbstgewählte Beispiele auf und zeigen Sie, daß es zumindest für einen Eckpunkt des Dreiecks nicht zwei Bestimmungslinien gibt!

31. Bei den drei Konstruktionsaufgaben in Aufgabe 30 hätte man die Konstruktion auch jeweils mit dem anderen gegebenen Stück beginnen können. Stellen Sie dafür Lösungspläne auf und zeigen Sie, daß es — wenn überhaupt — dann unendlich viele Lösungen gibt!

■ **B10:** Es sollen alle Dreiecke ABC konstruiert werden, für die zwei Seiten und ein von ihnen nicht eingeschlossener Winkel gegeben sind.

Lösung:

Gegeben seien $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ und $\sphericalangle CAB < 180°$.

Lösungsplan (↗ Bild 16):

$(\sphericalangle CAB) \to A$ und $s_1 \cap s_2 = \{A\}$

$b_1(C)$: $s_1 = \overrightarrow{AP}$ mit $\sphericalangle PAP'' = \sphericalangle CAB$

$b_2(C)$: $k_1 = \{P' : \overline{AP'} = \overline{AC}$ und $M_{k_1} \equiv A\}$

$b_1(B)$: $s_2 = \overrightarrow{AP''}$ mit $\sphericalangle PAP'' = \sphericalangle CAB$

$b_2(B)$: $k_2 = \{P''' : \overline{CP'''} = \overline{BC}$ und $M_{k_2} \equiv C\}$

Anzahl der Lösungen:

a) Für $\sphericalangle CAB < 90°$ (↗ Bild 16) gilt:

$s_1 \cap k_1 = \{C\}$.

Es sind folgende Fallunterscheidungen erforderlich:

$f_1)$ $s_2 \cap k_2 = \emptyset$ keine Lösung (↗ Bild 16. a)

oder

$f_2)$ $s_2 \cap k_2 = \{B\}$ genau eine Lösung (↗ Bild 16. b)

oder

$f_3)$ $s_2 \cap k_2 = \{B_1, B_2\}$ zwei Lösungen (↗ Bild 16. c).

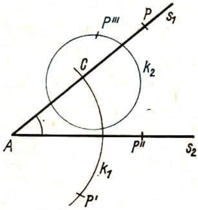


Bild 16.a

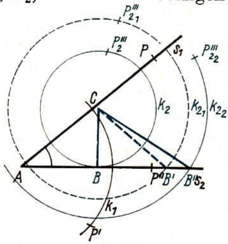


Bild 16.b

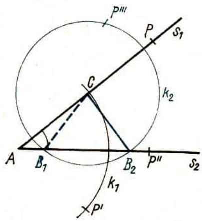


Bild 16.c

$f_1)$ (↗ Bild 16. a) gilt genau dann, wenn $\overline{CB} < \overline{CA} \cdot \sin \sphericalangle CAB$.

$f_2)$ (↗ Bild 16. b) gilt erstens dann, wenn $CB \perp AB$ (B ist Berührungspunkt von k_2 mit s_2), zweitens dann, wenn $\overline{CB} \geq \overline{CA}$.

$f_3)$ (↗ Bild 16. c) gilt genau dann, wenn $\overline{CA} \cdot \sin \sphericalangle CAB < \overline{CB} < \overline{CA}$ ist. Wie Bild 16. c zeigt, sind dann die beiden Dreiecke AB_1C und AB_2C — wegen $B_1 \neq B_2$ — **nicht** kongruent, es gibt also tatsächlich zwei Lösungen.

b) Für $\sphericalangle CAB \geqq 90°$ (↗ Bilder 17 und 18) gilt:
$s_1 \cap k_1 = \{C\}$
und
$f_1)$ $s_2 \cap k_2 = \emptyset$
oder
$f_2)$ $s_2 \cap k_2 = \{B\}$.

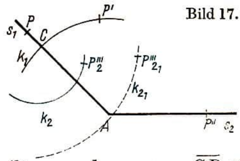


Bild 17. a

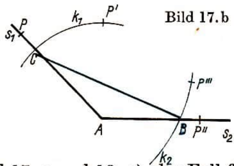


Bild 17. b

$f_1)$ gilt genau dann, wenn $\overline{CB} \leqq \overline{CA}$ (↗ Bild 17. a und 18. a), der Fall $f_2)$ genau dann, wenn $\overline{CB} > \overline{CA}$ (↗ Bild 17. b und 18. b).

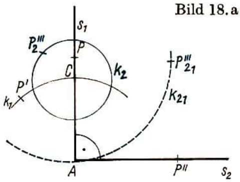


Bild 18. a

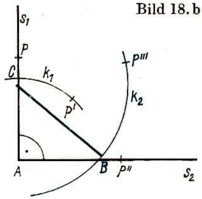


Bild 18. b

Zusammenfassend kann man feststellen, daß diese Aufgabe unabhängig von der Größe des gegebenen Winkels genau eine Lösung hat, wenn der gegebene Winkel der größeren der gegebenen Seiten gegenüberliegt.

● **32.** Begründen Sie anhand der Ergebnisse zu Beispiel 10, warum die besondere Bedingung im Kongruenzsatz (ssw) nicht weggelassen werden darf!

33. Warum gibt es keinen Kongruenzsatz (www) für Dreiecke?

Nun sollen einige Beispiele für Dreieckskonstruktionsaufgaben auf Konstruierbarkeit und Anzahl der Lösungen untersucht werden, bei denen sich unter den gegebenen drei Stücken auch Linien und Winkel im Dreieck wie Höhen, Winkelhalbierende usw. und Winkel zwischen Seiten und diesen Linien befinden.
In manchen Fällen führt dies zu folgenden Schwierigkeiten:
Erstens kann es vorkommen, daß zunächst nur ein **Teildreieck** des zu konstruierenden Dreiecks konstruierbar ist, so daß im Lösungsplan außer den drei Eckpunkten mindestens ein weiterer Punkt vorkommt.
Zweitens finden wir in manchen Fällen die Lösung der Aufgabe nur dann, wenn wir die Konstruktion mit einem bestimmten der gegebenen Stücke beginnen.

■ **B11:** Es sollen alle Dreiecke ABC konstruiert werden, für die $\overline{CB}$, die Höhe $h_{AB} = \overline{CF}$ (mit $F \in \overline{AB}$) und $\sphericalangle ACF < 90°$ gegeben sind.
Lösungsplan (↗ Bild 19):

$(\overline{CF}) \to C, F$
$b_1(A)$: $s_1 = \{P\colon \sphericalangle PFC = 90°\}$ (denn $FP \perp FC$)
$b_2(A)$: $s_2 = \{P'\colon \sphericalangle P'CF = \sphericalangle ACF\}$

Wegen der Voraussetzungen $F \in \overline{AB}$ und $\sphericalangle ACF < 90°$ gilt dann $s_1 \cap s_2 = \{A\}$, d. h., es gibt genau eine Lösung. Damit ist zunächst nur das Teildreieck AFC bestimmt, aber noch nicht das gesuchte Dreieck ABC. Nun gilt aber ferner

$b_1(B)$: $s_3 = \{P\colon P \in AF\}$,
$b_2(B)$: $k = \{P''\colon \overline{P''C} = \overline{CB}$ und $M_k \equiv C\}$.

Für die Bestimmung der *Anzahl der Lösungen* sind unter den gemachten einschränkenden Voraussetzungen nur noch folgende Fallunterscheidungen erforderlich (in Bild 19 durch k_1 bis k_5 dargestellt):

f_1) $s_3 \cap k = \emptyset$ genau dann, wenn $\overline{CB} < \overline{CF}$ (keine Lösung). (In Bild 19 durch k_1 dargestellt.)

f_2) $s_3 \cap k = \{B\}$ genau dann, wenn $\overline{CB} \geqq \overline{CF}$ (genau eine Lösung). (In Bild 19 durch k_2 bis k_5 dargestellt.)

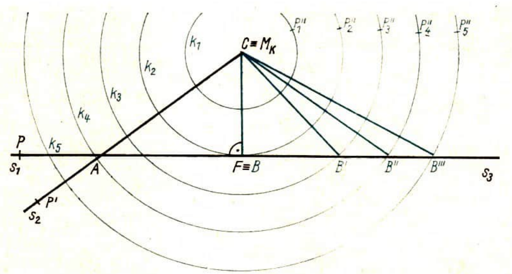


Bild 19

● **34.** Stellen Sie Lösungspläne für die Aufgabe in Beispiel 11 auf, wenn
a) $\overline{BC}$,
b) $\sphericalangle ACF$ zuerst gezeichnet wird!

35.* **a)** Es sollen alle Dreiecke konstruiert werden, für die $\overline{AB}$, $\sphericalangle ACB$ und die Seitenhalbierende von $\overline{AB}$ durch $s_{\overline{AB}} = \overline{CS}$ gegeben sind.
b) Führen Sie für $\overline{AB} = 42$ mm, $\sphericalangle ACB = 68°$ und $s_{\overline{AB}} = \overline{CS} = 30$ mm diese Konstruktion aus!

36.* Beweisen Sie, daß die beim Lösen von Aufgabe 35. b) entstehenden beiden Dreiecke ABC_1 und ABC_2 kongruent sind!

37. Versuchen Sie für die Aufgabe in 35. a) einen Lösungsplan aufzustellen, indem Sie davon ausgehen, daß $\overline{CS} = s_{\overline{AB}}$ zuerst gezeichnet wird.

38.* Untersuchen Sie Konstruierbarkeit und Anzahl der Lösungen von Dreiecken, wenn
a) zwei Seiten und die Höhe auf einer dieser Seiten,
b) zwei Seiten und die Höhe auf der dritten Seite,
c) eine Seite, ein dieser Seite anliegender Innenwinkel ($< 180°$) und die Höhe auf der gegebenen Seite,
d) eine Seite, der dieser Seite gegenüberliegende Innenwinkel ($\neq 90°$) und die Höhe auf der gegebenen Seite,
e) die Höhe auf einer Seite und beide an dieser Seite anliegende Innenwinkel
gegeben sind!

● **39.*** Untersuchen Sie die Konstruierbarkeit von Dreiecken, wenn
a) eine Seite, deren Seitenhalbierende und die Höhe auf dieser Seite,
b) eine Seite, deren Seitenhalbierende und der dieser Seite gegenüberliegende Innenwinkel,
c) die Höhe auf einer Seite, die Seitenhalbierende derselben Seite sowie ein ihr anliegender Winkel
gegeben sind!

40.* Untersuchen Sie die Konstruierbarkeit rechtwinkliger Dreiecke, wenn
a) die Hypotenuse und ein anliegender Winkel,
b) eine Kathete und der ihr gegenüberliegende Winkel,
c) die Hypotenuse und die Seitenhalbierende der Hypotenuse,
d) eine Kathete und die Seitenhalbierende dieser Kathete,
e) eine Kathete und die Seitenhalbierende der anderen Kathete,
f) eine Kathete und die Seitenhalbierende der Hypotenuse,
g) zwei Höhen
gegeben sind!

41.* Untersuchen Sie die Konstruierbarkeit gleichschenkliger Dreiecke, wenn
a) zwei verschieden lange Seiten, **b)** die Basis und ein Innenwinkel,
c) ein Schenkel und ein Innenwinkel,
d) ein Schenkel und die Höhe auf diesem Schenkel
gegeben sind!

42.* Untersuchen Sie die Konstruierbarkeit gleichschenklig-rechtwinkliger Dreiecke, wenn
a) die Basis, **c)** die Höhe auf der Basis,
b) ein Schenkel, **d)** die Seitenhalbierende eines Schenkels
gegeben ist!

43.* Untersuchen Sie die Konstruierbarkeit gleichseitiger Dreiecke, wenn
a) eine Seite, **c)** eine Seitenhalbierende,
b) eine Höhe, **d)** der Umfang
gegeben ist!

Die Konstruierbarkeitsuntersuchungen lassen sich auch für Vierecke und andere Vielecke durchführen.

● **44.*** Untersuchen Sie die Konstruierbarkeit von Vierecken, wenn
a) drei Seiten und zwei Diagonalen,
b) eine Seite, drei Winkel, deren Summe kleiner als 360° ist, und eine Diagonale
gegeben sind!

45.* Untersuchen Sie die Konstruktion eines Trapezes aus
a) einer der beiden parallelen Seiten, den beiden ihr anliegenden Innenwinkeln und dem Abstand der beiden parallelen Seiten,
b) den beiden parallelen Seiten, ihrem Abstand und einer Diagonalen,
c) den beiden parallelen Seiten und den beiden an einer von ihnen anliegenden Innenwinkeln,
d) den vier Seiten!

46.* Konstruieren Sie ein Parallelogramm aus
a) zwei benachbarten Seiten und einer Diagonalen,
b) einer Seite, einem Innenwinkel und einer Diagonalen,
c) den beiden Diagonalen und einer Seite!

47.* Konstruieren Sie ein Rechteck aus
a) einer Seite und einer Diagonalen,
b) einer Diagonalen und einem der Winkel zwischen den beiden Diagonalen!

48.* Konstruieren Sie ein Quadrat aus einer seiner beiden Diagonalen!

■ **B12:** Abschließend wollen wir noch einmal Beispiel 1 betrachten und zeigen, daß das dort erläuterte Verfahren der Standortbestimmung unter den angegebenen Bedingungen genau eine Lösung liefert und dies der gesuchte Kartenpunkt des Standortes ist. In Bild 20 ist der Punkt S konstruiert. Dort gilt

a) $\mathrm{b}_1(M_1)$: $m_1 = \{P: \overline{PA} = \overline{PB}\}$,
$\mathrm{b}_2(M_1)$: $s_1 = \{P': \sphericalangle P'AB = 90° - \alpha \text{ und } A \in s_1\}$
sowie $m_1 \cap s_1 = \{M_1\}$;

b) $\mathrm{b}_1(M_2)$: $m_2 = \{P'': \overline{P''B} = \overline{P''C}\}$,
$\mathrm{b}_2(M_2)$: $s_2 = \{P''': \sphericalangle P'''CB = 90° - \beta \text{ und } C \in s_2\}$
sowie $m_2 \cap s_2 = \{M_2\}$;

c) $\mathrm{b}_1(S)$: $k_1 = \{P_1: \overline{P_1M_1} = \overline{M_1B} \text{ und } M_{k_1} \equiv M_1\}$,
$\mathrm{b}_2(S)$: $k_2 = \{P_2: \overline{P_2M_2} = \overline{M_2B} \text{ und } M_{k_2} \equiv M_2\}$
sowie $k_1 \cap k_2 = \{S; B\}$ und $B \in \overline{AB}$ sowie $B \in \overline{BC}$.

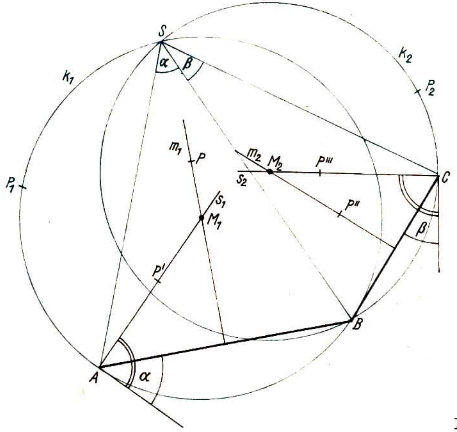


Bild 20

Demnach ist S der einzige Punkt, von dem aus die Strecke $\overline{AB}$ unter dem Winkel α **und zugleich** die Strecke $\overline{BC}$ unter dem Winkel β erscheint.

● **49.** Begründen Sie, daß in Beispiel 12

a) $m_1 \cap s_1 = \{M_1\}$ (also *genau ein* Schnittpunkt),

b) $m_2 \cap s_2 = \{M_2\}$ (also *genau ein* Schnittpunkt),

c) $k_1 \cap k_2 = \{S; B\}$ und folglich S der einzige Punkt ist, der den Bedingungen der Aufgabe genügt!

Lösungen — Kapitel 4

1. a) n ist die Menge aller Punkte P, die vom Punkt A und vom Punkt B jeweils gleichweit entfernt sind.

b) k ist die Menge aller Punkte P, die vom Punkt M die Entfernung r haben. (Das ist der Kreis um M mit dem Radius r, wenn die Punkte einer Ebene Grundbereich sind und M ein Punkt dieser Ebene ist. Sind dagegen die Punkte eines Raumes Grundbereich, so ist das die Oberfläche einer Kugel mit M als Mittelpunkt und r als Radius.)

2. Zu einer Geraden gehören unendlich viele Punkte, denn bereits zwischen zwei verschiedenen Punkten A und B einer Geraden g gibt es mindestens einen weiteren Punkt $C \in g$, z. B. den Punkt C, der die Strecke $\overline{AB}$ halbiert. Aber auch zwischen A und C gibt es mindestens einen weiteren Punkt D usw. Da man dies beliebig fortsetzen kann, gibt es bereits zwischen den Punkten A und B einer Geraden unendlich viele Punkte.

3. B liegt nicht auf g, bzw. g geht nicht durch B.

4. Die Gerade g ist keine Zweiermenge, denn zu g gehören außer A und B noch unendlich viele andere Punkte.

5. Zwischen zwei Punkten S_1 und S_2 einer Strecke gibt es mindestens einen weiteren Punkt S_3, also gibt es auch beispielsweise zwischen S_1 und S_3 einen weiteren Punkt S_4 und zwischen S_1 und S_4 einen weiteren Punkt S_5 usw. Das heißt, eine Strecke besteht aus unendlich vielen voneinander verschiedenen Punkten.

6. **a)** A liegt auf der Geraden AB.
b) A liegt auf der Strecke $\overline{AB}$.
c) Die Strecke $\overline{AB}$ ist eine Teilmenge der Geraden AB.
d) C ist kein Punkt der Geraden AB.
e) C ist kein Punkt der Strecke $\overline{AB}$.

7. Durch einen Punkt A außerhalb der Geraden g_1 gibt es höchstens eine Gerade g_2, die zu g_1 parallel ist.

8. Von drei gegebenen Punkten einer Geraden, die paarweise nicht zusammenfallen, liegt genau einer zwischen den beiden anderen.

9. **a)** Wenn $g_1 = g_2$ und $g_2 \cap g_3 = \emptyset$, dann $d = \emptyset$.
Wenn $g_1 = g_2$ und $g_2 = g_3$, dann $d = g_1 = g_2 = g_3$.
Wenn $g_1 \cap g_2 = \emptyset$ und $g_2 \cap g_3 = \emptyset$, dann $d = \emptyset$.
b) Wenn $g_1 = g_2$ und $g_2 \cap g_3 = \{S\}$, dann $d = \{S\}$.
Wenn $g_1 \cap g_2 = \emptyset$ und $g_2 \cap g_3 = \{S\}$, dann $d = \emptyset$.
c) Wenn $g_1 \cap g_2 = \{S_1\}$ und $g_2 \cap g_3 = \{S_2\}$, dann $d = \emptyset$, für $S_1 \not\equiv S_2$
$d = \{S_1\}$, für $S_1 \equiv S_2$.
Wenn $g_1 \cap g_2 = \{S_1\}$ und $g_2 \cap g_3 = \{S_2\}$, dann
$d = \emptyset$, für $g_1 \cap g_3 = \emptyset$
$d = \emptyset$, für $g_1 \cap g_3 = \{S_3\}$ und $S_1 \not\equiv S_2$ oder $S_2 \not\equiv S_3$.

10. **a)** $g \cap k = \emptyset$ **b)** $g \cap k = \{B\}$ (Berührungspunkt) **c)** $g \cap k = \{S_1, S_2\}$

11. **a)** $\overline{AB} \cap \overline{BC} \cap \overline{AC} = \emptyset$ **b)** $m = \{A, B, C\}$, also die Eckpunkte des Dreiecks

12. $e = \emptyset$

13. **a)** $A \notin BC$, $B \notin CD$, $C \notin DA$, $D \notin AB$
b) $P \in \overline{AB}$ oder $P \in \overline{BC}$ oder $P \in \overline{CD}$ oder $P \in \overline{DA}$

14. $v = \{P: P \in \overline{AB}$ oder $P \in \overline{BC}$ oder $P \in \overline{CD}$ oder $P \in \overline{DA}$ und $A \in e$, $B \in e$, $C \in e$, $D \in e$ und $A \notin BC$, $B \notin CD$, $C \notin DA$, $D \notin AB\}$

16. **a)** Aus $QR \cap ST = \emptyset$ und $RS \cap TQ = \emptyset$ (vgl. Bild 21) folgt
$\overline{QS} \cong \overline{QS}$
$\beta \cong \gamma$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen QR und TS)

$\alpha \cong \delta$ (Wechselwinkel an RS und QT)

$\triangle QRS \cong \triangle QST$ (wsw)

$\overline{QR} \cong \overline{ST}$

$\overline{RS} \cong \overline{TQ}$ w.z.b.w.

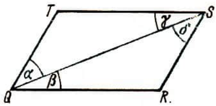


Bild 21

b) $\overline{QR} \cong \overline{ST}$ (Vor.)

$\overline{RS} \cong \overline{TQ}$ (Vor.)

$\overline{QS} \cong \overline{QS}$

$\triangle QRS \cong \triangle QST$ (sss)

$\alpha \cong \delta$

$QT \cap RS = \emptyset$ (Satz über kongruente Wechselwinkel an geschnittenen Geraden)

$\beta = \gamma$

$QR \cap ST = \emptyset$ w. z. b. w.

17. a) Nach (1) (↗ S. 117) gilt

$k_1 = \{P': \overline{AP'} = r_1\}$ bzw. $k_2 = \{P'' = \overline{BP''} = r_2\}$

und weiter (↗ D 7, S. 19)

$s = k_1 \cap k_2$.

b) Es können nur folgende Fälle auftreten:

$k_1 \cap k_2 = \emptyset$, wenn $r_1 + r_2 < \overline{AB}$.

$k_1 \cap k_2 = \{S_1\}$, wenn $r_1 + r_2 = \overline{AB}$.

$k_1 \cap k_2 = \{S_1, S_2\}$, wenn $r_1 - r_2 < \overline{AB} < r_1 + r_2$ bzw.

$r_2 - r_1 < \overline{AB} < r_1 + r_2$.

$k_1 \cap k_2 = \{S_1\}$, wenn $r_1 - r_2 = \overline{AB}$ bzw. $r_2 - r_1 = \overline{AB}$.

$k_1 \cap k_2 = \emptyset$, wenn $r_1 - r_2 > \overline{AB}$ bzw. $r_2 - r_1 > \overline{AB}$.

Also hat s höchstens zwei Elemente.

18. a) Es gilt nach (2) (↗ S. 118)

$m_1 = \{P': \overline{AP'} = \overline{P'B}\}$ und $m_2 = \{P'': \overline{P''B} = \overline{P''C}\}$.

Da die Geraden m_1 und m_2 weder zusammenfallen noch parallel sind, gilt $m = m_1 \cap m_2 = \{S\}$ (↗ S. 112).

b) Es gibt also genau einen Punkt S; das ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC, denn $\overline{AS} = \overline{BS} = \overline{CS}$.

19. *Beweis* (vgl. Bild 22):

$\overline{F_2P} \cong \overline{PF_1}$ (nach Vor.)

$\sphericalangle PF_2S \cong \sphericalangle PF_1S$ (= 90° nach Vor.)

$\overline{SP} \cong \overline{SP}$

$\triangle SF_2P \cong \triangle SF_1P$ (ssw)

$\sphericalangle F_2SP \cong \sphericalangle F_1SP$ (entspr. Stücke)

SP ist Winkelhalbierende von $\sphericalangle F_1SF_2$, w. z. b. w.

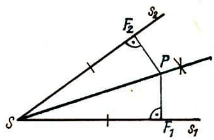


Bild 22

23. Ja, nämlich den Kreis mit $\overline{AB}$ als Durchmesser, jedoch mit Ausnahme der Punkte A und B selbst.

24. Die gesuchte Bestimmungslinie b ist die Vereinigung zweier Kreisbögen k_1 und k_2 mit folgenden Eigenschaften:
$k_1 = k_5/k_3$ und $k_2 = k_6/k_4$ sowie
$A \notin k_1$, $B \notin k_1$, $A \notin k_2$, $B \notin k_2$,
wobei
k_5 und k_4 Bestimmungslinien für alle Punkte sind, von denen aus die Strecke $\overline{AB}$ unter dem Winkel $180° - \gamma$ erscheint und
k_5 bzw. k_6 Vollkreise mit $k_3 \subset k_5$ und $k_4 \subset k_6$ sind.

26. **a)** Kreis um den Mittelpunkt M von $\overline{AB}$ mit $\overline{MA} = 2{,}1$ cm als Radius
b_1) 4 Punkte b_2) 4 Punkte b_3) 2 Punkte b_4) $\emptyset$ b_5) $\emptyset$

28. **b)** unendlich viele **c)** Kreis um B mit $r = \overline{BC} = 35$ mm

29. **a)** und **b)** Satz über die Summe der Innenwinkel
c) Dreiecksseitenungleichung:
$\overline{AB} < \overline{BC} + \overline{AC}$, in der Aufgabe ist $\overline{AB} > \overline{BC} + \overline{AC}$.
d) Wenn $\overline{AB} > \overline{BC}$, so $\sphericalangle ACB > \sphericalangle CAB$.

30. 1. und 2. bei **b)**: Innenwinkel $< 180°$; bei **c)**: Summe der Innenwinkel $< 180°$

35. *Lösungsplan für* **b)**:
$(\overline{AB}) \to A, B$
b_1 (C): $k_1 = \{P\colon \ \overline{PM} \cong \overline{MA}$ und $M_{k_1} \equiv M\}$
b_2 (C): $k_2 = \{P'\colon \ \overline{P'S} = 30$ mm und $M_{k_2} \equiv S\}$
b_1 (M): $m = \{P''\colon \ \overline{P''A} \cong \overline{P''B}\}$
b_2 (M): $s = \{P'''\colon \sphericalangle P'''AB = 90° - 68° = 22°\}$ und $A \in s$
$s \cap m = \{M\}$, $k_1 \cap k_2 = \{C_1; C_2\}$

36. $\triangle ABC_1 \cong \triangle ABC_2$, denn das eine entsteht durch Spiegelung an der Geraden SM aus dem anderen.

38. **a)** *keine* Lösung, wenn die Länge der Höhe auf der einen Seite größer ist als die Länge der anderen Seite;
genau eine Lösung, wenn Höhe und andere Seite gleichlang sind;
genau zwei Lösungen, wenn die Länge der Höhe kleiner ist als die Länge der anderen Seite
b) *genau zwei* Lösungen, wenn $h_s < s_1$ und $h_s < s_2$, *genau eine* Lösung, wenn $h_s = s_1$ und $h_s < s_2$ oder $h_s < s_1$ und $h_s = s_2$, wobei h_s die Länge der gegebenen Höhe und s_1 bzw. s_2 die Länge der gegebenen Seiten bezeichnen; *keine* Lösung in allen anderen Fällen
c) immer *genau eine* Lösung
d) Angenommen, es sind die Seite c, Winkel γ und Höhe h_c gegeben. Dann gilt

– *keine* Lösung, wenn $h_c > \dfrac{c}{2 \sin \gamma} + \dfrac{c}{2 \tan \gamma}$,

– *genau eine* Lösung, wenn $h_c \leqq \dfrac{c}{2 \cdot \sin \gamma} + \dfrac{c}{2 \cdot \tan \gamma}$, d. h., es entsteht entweder genau ein Dreieck oder es entstehen zwei kongruente Dreiecke.

e) *Genau eine* Lösung, wenn die Summe der beiden gegebenen Innenwinkel $< 180°$ ist.

39. a) Angenommen die Seite s, die Höhe h_s und die Seitenhalbierende s_s sind gegeben. Dann gilt:
keine Lösung, wenn $s_s < h_s$,
genau eine Lösung, wenn $s_s \geqq h_s$ (höchstens zwei kongruente Dreiecke).

b) Angenommen die Seite s, der Winkel $\varphi < 90°$ und die Seitenhalbierende s_s sind gegeben. Dann gilt:
keine Lösung, wenn $s_s \leqq \frac{1}{2} s$ oder $s_s > \frac{s(1 + \cos\varphi)}{2 \sin\varphi}$,
genau eine Lösung, wenn $\frac{1}{2} s < s_s < \frac{s(1 + \cos\varphi)}{2 \sin\varphi}$
(höchstens zwei kongruente Dreiecke).

c) Angenommen der Winkel $\varphi < 90°$, die Höhe h_s und die Seitenhalbierende s_s sind gegeben. Dann gilt: *keine* Lösung, wenn $s_s < h_s$,
genau eine Lösung, wenn $s_s = h_s$ oder $s_s \geqq \frac{h_s}{\sin\varphi}$,
genau zwei Lösungen, wenn $h_s < s_s < \frac{h_s}{\sin\varphi}$.
Für $\varphi \geqq 90°$ sind weitere Untersuchungen erforderlich.

40. a) *keine* Lösung, wenn der anliegende Winkel $\geqq 90°$,
genau eine Lösung, wenn der anliegende Winkel $< 90°$

b) wie **a)**

c) Fallunterscheidungen:
Die Länge der Seitenhalbierenden ist von der *halben* Länge der Hypotenuse verschieden: *keine* Lösung.
Bei Gleichheit: unendlich viele Lösungen.

d) *keine* Lösung, wenn $s_k \leqq \frac{1}{2} k$ (s_k = Länge der Seitenhalbierenden)
genau eine Lösung, wenn $s_k > \frac{1}{2} k$ (k = Länge der gegebenen Kathete)

e) *keine* Lösung, wenn $s_{k'} \leqq k$ (k = Länge der gegebenen Kathete)
genau eine Lösung, wenn $s_{k'} < k$ ($s_{k'}$ = Länge der Seitenhalbierenden der anderen Kathete)

f) Wegen $s_h = \frac{1}{2} h$ gilt: (s_h = Länge der Seitenhalbierenden der Hypotenuse),
keine Lösung, wenn $k \geqq 2s_h$ (h = Länge der Hypotenuse),
genau eine Lösung, wenn $k < 2s_h$ (k = Länge der Kathete).

g) Fallunterscheidungen:
(1) die Höhen auf den beiden Katheten, also die Katheten:
genau eine Lösung
(2) die Höhe h_h auf der Hypotenuse und die Höhe h_k auf einer Kathete, also die andere Kathete k':
keine Lösung, wenn $h_k \leqq h_h$
genau eine Lösung, wenn $h_k > h_h$

41. a) immer *genau eine* Lösung

b) Fallunterscheidungen:

b_1) Basis b und Basiswinkel φ

$\varphi \geqq 90°$: *keine* Lösung

$\varphi < 90°$: *genau eine* Lösung

b_2) Basis b und Winkel ω an der Spitze

$\omega \geqq 180°$: *keine* Lösung

$\omega < 180°$: *genau eine* Lösung

c) Fallunterscheidungen:

c_1) Schenkel s und der Basiswinkel φ: wie b_1

c_2) Schenkel s und der Winkel ω an der Spitze: wie b_2

d) *keine* Lösung, wenn $h_s > s$

genau eine Lösung, wenn $h_s = s$

genau zwei Lösungen, wenn $h_s < s$

42. a) bis **d)**: immer *genau eine* Lösung

43. a) bis **d)** immer *genau eine* Lösung

44. a) Ist die Ungleichung für die Dreiecksseiten erfüllt, so ist aus zwei gegebenen Seiten und einer Diagonale genau ein Teildreieck konstruierbar. Für den vierten Eckpunkt gibt es folgende Bestimmungslinien: Kreisbögen um zwei der Eckpunkte des Teildreiecks mit der dritten Seite bzw. der anderen Diagonalen als Radius. Ist auch für dieses Teildreieck die Ungleichung für die Dreiecksseiten erfüllt, so gibt es genau eine Lösung.

b) Durch drei gegebene Winkel, deren Summe $< 360°$, ist auch der vierte Innenwinkel des Vierecks gegeben. Aus der gegebenen Seite, einem Winkel und der gegebenen Diagonalen läßt sich unter bestimmten Voraussetzungen mindestens ein Teildreieck konstruieren. Ist die gegebene Diagonale länger als die gegebene Seite, so gibt es *genau eine* Lösung, ist sie gleichlang oder kürzer, sind weitere Fallunterscheidungen erforderlich (*keine, genau eine, genau zwei* Lösungen). Für den vierten Eckpunkt sind die freien Schenkel zweier bekannter Winkel Bestimmungslinien. Danach hat die Aufgabe verschieden viele Lösungen in Abhängigkeit von der Größe der gegebenen Stücke.

45. a) immer *genau eine* Lösung, wenn die Summe der gegebenen Innenwinkel $< 360°$ ist

b) *keine* Lösung, wenn Abstand $a >$ Diagonale d

genau eine Lösung, wenn Abstand $a =$ Diagonale d

genau zwei Lösungen, wenn Abstand $a <$ Diagonale d

c) und **d)**: immer *genau eine* Lösung, wenn bei **c)** die Summe der gegebenen Winkel $< 360°$ und bei **d)** die Summe der Schenkellängen größer als die Differenz der Längen der beiden parallelen Seiten ist.

46. a) *genau eine* Lösung, wenn die Ungleichung für die Seiten des Teildreiecks erfüllt ist

b) Fallunterscheidungen:

Ist der gegebene Winkel $\geqq 180°$, so gibt es *keine* Lösung.

Ist er kleiner als $180°$, so gibt es

(1) *genau eine* Lösung, wenn der zum Konstruieren eines Teildreiecks benutzte Winkel (d. h. der gegebene Winkel φ oder der Winkel $180° - \varphi$) der größeren der gegebenen Strecken gegenüberliegt;

(2) anderenfalls *keine*, *genau eine* oder *genau zwei* Lösungen.

c) *genau eine* Lösung, wenn die Summe der Längen der beiden Diagonalen größer ist als das Doppelte der Länge der gegebenen Seite,
anderenfalls *keine* Lösung

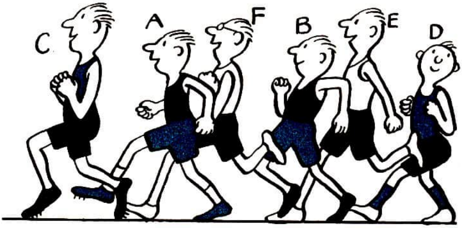
47. **a)** *keine* Lösung, wenn die gegebene Diagonale nicht länger als die gegebene Seite ist,
anderenfalls *genau eine* Lösung

b) *genau eine* Lösung, wenn der Winkel kleiner als $180°$ ist

48. immer *genau eine* Lösung

5 Abbildungen und Funktionen

B1: Bei einem Schulsportfest bestreiten das Finale des 100-m-Laufes 6 Schüler. Wir nehmen an, sie heißen Anton, Bernd, Carsten, Dieter, Erich und Fritz.



Das Resultat des Laufes zeigt die folgende Tabelle:

Läufer	A	B	C	D	E	F
Platz	2	4	1	6	5	3

Tabelle 1

Von den Läufern wissen wir

Anton ist am 5. Mai geboren, er ist 1,62 m groß,
Bernd ist am 11. Januar geboren, er ist 1,64 m groß,
Carsten ist am 3. August geboren, er ist 1,61 m groß,
Dieter ist am 8. Mai geboren, er ist 1,56 m groß,
Erich ist am 5. Dezember geboren, er ist 1,70 m groß,
Fritz ist am 28. April geboren, er ist 1,67 m groß.

Ordnet man die Schüler nach ihrer Größe, so erhält man die in Tabelle 2 dargestellte Rangfolge, ordnet man sie nach ihren Geburtstagen, so erhält man die Rangfolge der Tabelle 3.

Schüler	A	B	C	D	E	F
Platz	4	3	5	6	1	2

Tabelle 2

Schüler	A	B	C	D	E	F
Platz	3	1	5	4	6	2

Tabelle 3

In allen 3 Tabellen ist eine Beziehung zwischen der Menge der 6 Schüler $S = \{A, B, C, D, E, F\}$ und der Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 6 $\overline{N} = \{n: n \in N;\ 0 < n < 7\}$ hergestellt.
Solche Beziehungen sind **Abbildungen von Mengen.** Sie spielen in der Mathematik und im Mathematikunterricht eine wichtige Rolle.

Sie haben Abbildungen bereits in den geometrischen Stoffgebieten (z. B. Planimetrie in Klasse 6 (↗ [13b]), Darstellende Geometrie in Klasse 7 (↗ [13c]) oder Ähnlichkeit in Klasse 8 (↗ [13d]), vor allem aber auch in den Stoffgebieten Lineare Funktionen in Klasse 8 und Potenzen und Potenzfunktionen in Klasse 9 (↗ [13e]) kennengelernt.
Im folgenden sollen die aus den vorangehenden Kapiteln bekannten Begriffe und Beziehungen der Mengenlehre dazu dienen, ein tieferes Verständnis für den Begriff „Abbildung" und den darauf aufbauenden Begriff „Funktion" sowie für das Arbeiten mit diesen wichtigen Begriffen zu erreichen. Wie aus dem anfangs gezeigten Beispiel deutlich wird, ist dabei die Produktmenge von Bedeutung. Die Tabelle 1 ist ja nur eine andere Darstellung der Menge

$T_1 = \{[A; 2], [B; 4], [C; 1], [D; 6], [E; 5], [F; 3]\}$

und es gilt:

$T_1 \subset S \times \overline{N}$.

● **1.** Wiederholen Sie die Definition 6 (↗ S. 48), und geben Sie Beispiele für Produktmengen an!

2.* Beweisen Sie die oben aufgestellte Behauptung: $T_1 \subset S \times \overline{N}$!

3.* Schreiben Sie die Tabelle 2 als T_2 und die Tabelle 3 als T_3 in Mengenschreibweise und ermitteln Sie
$T_1 \cap T_2$, $\quad T_1 \cap T_3$, $\quad T_2 \cap T_3$!

(Beachten Sie dabei, daß zwei geordnete Paare $[a; b]$ und $[c; d]$ dann und nur dann gleich sind, wenn $a = c$ und $b = d$.)

4. Bilden Sie $A \times B$ und $B \times A$ aus
$A = \{1, 3, 5, 7\}$ und $B = \{2, 5, 8\}$!

5.* Bilden Sie den Durchschnitt von $A \times B$ und $B \times A$ der Mengen aus Aufgabe 4!

Mit Hilfe des Mengenproduktes $A \times B$ läßt sich nun der Begriff Abbildung von Mengen definieren.

▶ **D1: Jede nichtleere Teilmenge von $A \times B$ heißt eine *Abbildung aus A in B*.**

■ **B2:** Die Mengen A und B seien wie folgt gegeben:
$A = \{1, 2, 3\}$; $\quad B = \{a, b\}$.
Die Produktmenge $A \times B$ besteht aus allen geordneten Paaren, deren erstes Glied aus A und deren zweites Glied aus B stammt. Es gilt also:

$A \times B = \{[1;a], [1;b], [2;a], [2;b], [3;a], [3;b]\}$.
Jede Teilmenge von $A \times B$ ist nun eine Abbildung aus A in B. Abbildungen sind also

$T_1 = \{[1;a]\}$ oder $T_2 = \{[1;b]\}$
$T_3 = \{[1;a], [2;b]\}$ oder $T_4 = \{[1;a], [3;a]\}$
$T_5 = \{[1;a], [2;a], [3;a]\}$ oder $T_6 = \{[1;a], [1;b], [2;a]\}$ oder
$T_7 = \{[1;b], [2;a], [3;a]\}$

Natürlich ist auch $A \times B$ insgesamt eine Abbildung aus A in B, denn es gilt $A \times B \subseteqq A \times B$.

● **6.*** Überlegen Sie, wieviel verschiedene Teilmengen von $A \times B$ im Beispiel 2 existieren. Ermitteln Sie dazu die Anzahl der Teilmengen mit einem, zwei, drei, vier, fünf und sechs Elementen. Beachten Sie, daß auch $\emptyset \subset A \times B$ gilt.

Betrachten wir die im Beispiel 2 gegebenen Abbildungen T_1 bis T_7, so können wir 4 verschiedene Fälle unterscheiden.

1. Bei den Abbildungen T_1, T_2 und T_4 gibt es jeweils Elemente von A, die nicht als erstes Glied eines geordneten Paares vorkommen, und es gibt jeweils Elemente von B, die nicht als zweites Glied eines geordneten Paares vorkommen.
Entsprechend der Definition 1 sprechen wir in diesem Fall von einer Abbildung **aus** A **in** B. (↗ Bild 1)

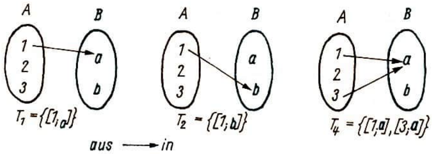


Bild 1

2. Bei der Abbildung T_5 tauchen zwar alle Elemente von A als erstes Glied eines geordneten Paares, nicht aber alle Elemente von B als zweites Glied auf. Man kann in diesem Fall die Definition 1 verschärfen (↗ D2), und man spricht von einer Abbildung **von** A **in** B. (↗ Bild 2)

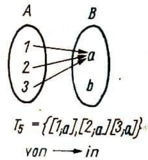


Bild 2

3. Bei den Abbildungen T_3 und T_6 tauchen zwar alle Elemente von B als zweites Glied eines geordneten Paares auf, nicht aber alle Elemente von A als erstes Glied. Auch in diesem Fall kann man die Definition 1 verschärfen (↗ D3), und man spricht von einer Abbildung **aus** A **auf** B. (↗ Bild 3)

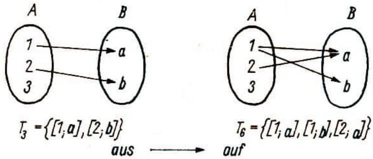


Bild 3

4. Bei der Abbildung T_7 treten alle Elemente von A als erstes Glied **und** alle Elemente von B als zweites Glied eines geordneten Paares auf. Hier kann man eine erneute Verschärfung der Definition vornehmen (↗ D4), und man spricht von einer Abbildung von A **auf** B. (↗ Bild 4)

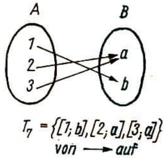


Bild 4

Neben der allgemeinen Definition einer Abbildung **aus** A **in** B (↗ D1) sind also noch folgende Spezialfälle möglich.

► **D2: Ist eine Teilmenge von $A \times B$ so beschaffen, daß jedes Element von A mindestens einmal als erstes Glied eines der geordneten Paare vorkommt, so heißt sie *Abbildung von A in B*.**

► **D3: Ist eine Teilmenge von $A \times B$ so beschaffen, daß jedes Element von B mindestens einmal als zweites Glied eines der geordneten Paare vorkommt, so heißt sie *Abbildung aus A auf B*.**

► **D4: Erfüllt eine Teilmenge von $A \times B$ *sowohl* die Forderungen der Definition 2 *als auch* die der Definition 3 (ist sie also so beschaffen, daß jedes Element von A mindestens einmal als erstes Glied eines geordneten Paares *und* jedes Element von B mindestens einmal als zweites Glied eines geordneten Paares vorkommt), so heißt diese Teilmenge eine *Abbildung von A auf B*.**

● 7.* **a)** Bilden Sie mit den Mengen A und B aus Beispiel 2 Abbildungen *von A in B*!
b) Wieviel verschiedene derartige Abbildungen mit genau 3 Elementen können Sie bilden?

8.* **a)** Bilden Sie mit den Mengen A und B aus Beispiel 2 Abbildungen *aus A auf B*!
b) Wieviel verschiedene derartige Abbildungen mit genau 2 Elementen können Sie bilden?

9. Bilden Sie mit den Mengen des Beispiels 2 Abbildungen *von A auf B*!

10.* Wie viele Elemente muß eine Abbildung *von A auf B* (mit den Mengen A und B des Beispiels 2) mindestens haben?

11.* Entscheiden Sie, welcher Art die nachfolgend genannten Abbildungen sind!

a) $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ $\quad$ $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
$T = \{[3; 4], [5; 6], [7; 8], [11, 12]\}$
Nach welchen Gesichtspunkten wurde T gebildet?
b) $A = \{x : x \in N; x < 10\}$ $\quad$ $B = \{n : n \in N\}$
$T = \{[x; n] : n = 2x\}$
Geben Sie diese Abbildung T durch Aufzählen aller Elemente an!
c) $A = \{n : n \in N\}$ $\quad$ $B = \{\text{gerade, ungerade}\}$
Die Abbildung T sei die Menge aller geordneten Paare, deren erstes Element eine natürliche Zahl und deren zweites Element die zugehörige Eigenschaft (gerade oder ungerade) ist; dabei wird keine natürliche Zahl ausgelassen.
d) A sei die Menge aller Schüler Ihrer Klasse, B die Menge aller vorkommenden Körperhöhen dieser Schüler. Die Abbildung T entstehe, indem von jedem Schüler die Körpergröße angegeben wird.
Geben Sie die Menge T an!

Entsprechend den Definitionen 1 bis 4 können wir bei Abbildungen von Mengen (Teilmengen von $A \times B$) vier Fälle unterscheiden:

1. Abbildungen **aus** A **in** B
2. Abbildungen **von** A **in** B
3. Abbildungen **aus** A **auf** B
4. Abbildungen **von** A **auf** B

Den Zusammenhang kann man sich folgendermaßen verdeutlichen:
Wenn $\mathfrak{M}$ die Menge aller Abbildungen **aus** A **in** B und
$\mathfrak{N}$ die Menge aller Abbildungen **von** A **in** B und
$\mathfrak{P}$ die Menge aller Abbildungen **aus** A **auf** B und
$\mathfrak{R}$ die Menge aller Abbildungen **von** A **auf** B ist,
so gelten folgende Beziehungen:

$$\mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{M} \qquad \mathfrak{P} \subseteqq \mathfrak{M}$$
$$\mathfrak{N} \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{R}$$

● **12.** Machen Sie sich diese Beziehungen an Beispielen klar, und veranschaulichen Sie diese Beziehungen mit Hilfe eines Mengendiagramms.

Abbildungen **von** A **auf** B sind also spezielle Fälle der anderen genannten Abbildungen. Da sie von besonderer Bedeutung in der Mathematik sind, werden wir im folgenden hauptsächlich solche Abbildungen betrachten und nur in Ausnahmefällen auch Abbildungen **von** A **in** B untersuchen.

Anmerkung: Diese Einschränkung ist auch deshalb gerechtfertigt, weil man von einer Abbildung **aus** A **in** B stets zu einer Abbildung **von** A_1 **auf** B_1 übergehen kann, wenn man die Teilmengen $A_1 \subseteqq A$ und $B_1 \subseteqq B$ richtig auswählt.

● **13.*** Gegeben sei $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{6, 7, 8, 9\}$ und $T_1 = \{[1; 7], [3; 8], [5; 9]\}$.
Bestimmen Sie A_1 und B_1 so, daß T_1 eine Abbildung *von* A_1 *auf* B_1 ist.

14.* Gegeben seien $A = N$ und $B = \{n : n \in N;\ n < 10\}$ und die Abbildung T derart, daß allen durch 3 teilbaren Zahlen genau die Zahl 3, allen durch 4 teilbaren Zahlen genau die Zahl 4 und allen durch 5 teilbaren Zahlen genau die Zahl 5 zugeordnet wird.

a) Zeigen Sie, daß eine Abbildung *aus A in B* vorliegt.

b) Geben Sie A_1 und B_1 so an, daß T eine Abbildung *von A_1 auf B_1* ist.

Ein weiterer wichtiger Begriff ist der der **Eindeutigkeit** einer Abbildung.

▶ **D5: Eine Teilmenge von $A \times B$ heißt eine *eindeutige Abbildung*, wenn jedes Element von A höchstens einmal als erstes Element eines geordneten Paares vorkommt.**

Ein Vergleich mit den Definitionen 2 und 3 zeigt, daß eine eindeutige Abbildung **von** A **auf** B dann vorliegt, wenn die Teilmenge von $A \times B$ so beschaffen ist, daß jedes Element von A **genau** einmal als erstes Element eines geordneten Paares und jedes Element von B **mindestens** einmal als zweites Element vorkommt.

● **15.*** Welche der folgenden Abbildungen sind eindeutig?
Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung!

$A = \{x, y, z\}$ $\qquad B = \{1, 2, 3, 4\}$

a) $T_1 = \{[x; 1], [y; 4], [z; 4]\}$
b) $T_2 = \{[x; 2], [y; 1], [y; 4], [z; 3]\}$
c) $T_3 = \{[y; 1], [z; 1]\}$
d) $T_4 = \{[x; 4], [y; 4], [z; 4]\}$
e) $T_5 = \{[x; 4], [y; 2], [z; 1]\}$
f) $T_6 = \{[x; 2], [y; 3], [z; 4], [x; 1]\}$
g) $T_7 = \{[x; 1], [z; 3], [z; 4]\}$

Betrachten wir noch 2 Beispiele für eindeutige Abbildungen.

■ **B3:** Die Abbildung bestehe darin, daß jeder rationalen Zahl ihr Betrag zugeordnet wird.
Diese Abbildung ist eindeutig, denn jedes Element von a kommt genau einmal als erstes Glied eines geordneten Paares vor, d. h., jeder rationalen Zahl wird **genau eine** rationale Zahl zugeordnet. Daß dabei zwei verschiedenen Zahlen (entgegengesetzten Zahlen) der gleiche Betrag zugeordnet wird, widerspricht nicht der Forderung der Eindeutigkeit.

■ **B4:** Die Abbildung bestehe darin, daß jeder rationalen Zahl ihr Doppeltes zugeordnet wird, auch diese Abbildung ist eindeutig.

● **16.*** Geben Sie für die Abbildungen in den Beispielen 3 und 4 eine Mengenschreibweise an.

In beiden Beispielen handelt es sich um eine Abbildung **von** A **auf** B. Vertauscht man jeweils in jedem Beispiel die Glieder aller geordneten Paare, so erhält man eine Abbildung **von** B **auf** A als Teilmenge von $B \times A$.

● **17.** Zeigen Sie, daß die Vertauschung der Glieder der Zahlenpaare bei T_2 in Aufgabe 15. wieder eine eindeutige Abbildung liefert.

▶ **D6: Eine Abbildung von A auf B heißt *umkehrbar eindeutig* (eineindeutig), wenn die Teilmenge von $A \times B$ so beschaffen ist, daß jedes Element von A *genau einmal* als erstes Glied und jedes Element von B *genau einmal* als zweites Glied eines geordneten Paares vorkommt.**

● **18.** Vergleichen Sie die Definitionen 5 und 6 und zeigen Sie, an welchen Stellen Gemeinsamkeiten bestehen und worin sich beide unterscheiden.

Eindeutige Abbildungen von einer Menge auf eine andere spielen in der Mathematik eine große Rolle und haben deshalb einen gesonderten Namen. Sie heißen — wie Sie aus dem obligatorischen Unterricht wissen — **Funktionen.**

▶ **D7: Eine *Funktion* ist eine eindeutige Abbildung von einer Menge A auf eine Menge B. Dabei heißt die Menge A *Definitionsbereich* und die Menge B *Wertebereich* dieser Funktion.**

Auf folgendes sei ausdrücklich aufmerksam gemacht:
Die Definitionen 1 bis 7 enthalten keinerlei Einschränkungen hinsichtlich der Mengen A und B. Zwar spielen Zahlenmengen bei Betrachtungen von Funktionen eine wichtige Rolle — im obligatorischen Unterricht werden fast ausschließlich Funktionen über Zahlenmengen betrachtet — die Definitionen sind aber umfassender.
Außerdem wurde an keiner Stelle vorausgesetzt, daß die Mengen A und B verschieden sein müssen. Bei einigen Beispielen war bereits $A = B$.
Bevor wir auf Funktionen, wie sie aus dem obligatorischen Mathematikunterricht bekannt sind, näher eingehen, sollen einige Abbildungen betrachtet werden, für die $A = B$ gilt.

■ **B5:** Es sei $A = \{1, 2, 3\}$. Wir betrachten alle möglichen eindeutigen Abbildungen von A auf sich selbst, dabei gibt es sechs Möglichkeiten. Eine davon ist z. B.

$$T_2 = \{[1;1], [2;3], [3;2]\}$$

Hierfür wollen wir die einfachere Schreibweise

$$T_2 = \begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix} \text{ verwenden.}$$

Die sechs Möglichkeiten der eindeutigen Abbildungen von A auf sich selbst sind nun:

$$T_1 = \begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}$$

$$T_4 = \begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}, \quad T_5 = \begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix}, \quad T_6 = \begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}.$$

Bei der Abbildung T_1 wurde jedes Element auf sich selbst abgebildet, eine solche Abbildung nennt man **identische Abbildung.**

▶ **D8: Eine Abbildung T einer Menge A auf sich selbst heißt *identische Abbildung*, wenn gilt:**
$T = \{[a; a];\ a \in A\}$, d. h. wenn jedes Element von A auf sich selbst abgebildet wird.

Abbildungen können nun miteinander verknüpft werden, indem man die durch die Abbildungen entstehenden Zuordnungen nacheinander ausführt. Wir wollen dies auf die oben genannten Abbildungen T_1 bis T_6 anwenden.

■ **B6:** Die Abbildung T_2 in Beispiel 5 bedeutet, daß den Zahlen 1, 2, 3 die Zahlen 1, 3, 2 zugeordnet werden.

$$T_2\colon \begin{array}{l} 1 \to 1 \\ 2 \to 3 \\ 3 \to 2 \end{array} \qquad T_3 \text{ bedeutet:} \quad \begin{array}{l} 1 \to 2 \\ 2 \to 1 \\ 3 \to 3 \end{array}$$

Führt man die Zuordnung nacheinander aus, so erhält man

$$T_2 \circ T_3\colon \quad \begin{array}{l} 1 \to 1 \to 2 \\ 2 \to 3 \to 3 \\ 3 \to 2 \to 1 \end{array} \quad \text{die Abbildung } T_4.$$

(Bei T_2 wird der „1" die „1" zugeordnet, dieser bei T_3 die „2". Analog geht man bei den anderen Zahlen vor. Das gleiche Ergebnis hätte man durch T_4 erhalten.)

Es gilt also $T_2 \circ T_3 = T_4$ (gelesen: T_2 verknüpft mit T_3 ist gleich T_4).

● **19.** Zeigen Sie, daß $T_3 \circ T_2 = T_5$ gilt!

■ **B7:** Die Verknüpfung der Abbildungen aus Beispiel 6 ist also nicht kommutativ. Es gilt: $T_2 \circ T_3 \neq T_3 \circ T_2$.
Es läßt sich aber zeigen, daß eine Verknüpfung zweier beliebiger Abbildungen T_1 bis T_6 stets gleich einer dieser Abbildung ist.
Um eine Übersicht zu erhalten, ist eine Verknüpfungstafel zweckmäßig.
Sie kann wie folgt angelegt werden:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
T_1						
T_2			T_4			
T_3		T_5				
T_4						
T_5						
T_6						

Das Ergebnis von Beispiel 6 ($T_2 \circ T_3 = T_4$) wurde in Zeile 2 und das Ergebnis von Aufgabe 19 ($T_3 \circ T_2 = T_5$) in Zeile 3 eingetragen.

● **20.*** Vervollständigen Sie die Verknüpfungstafel!

21. Zeigen Sie, daß $T_1 \circ T_n = T_n \circ T_1 = T_n$ (für alle $n = 1, 2, 3, \dots, 6$) gilt!

▶ **D9: Abbildungen, für die $T_n \circ T_m = T_1$ (T_1: identische Abbildung) gilt, heißen *zueinander invers.***

● **22.*** Ermitteln Sie zu jedem T_n ($n = 1, 2, \dots, 6$) die inverse Abbildung.

23.* Zeigen Sie unter Verwendung der Verknüpfungstafel, daß
$(T_2 \circ T_3) \circ T_4 = T_2 \circ (T_3 \circ T_4)$
ist!
Wie heißt diese Gesetzmäßigkeit?

Anmerkungen: Für die Menge $\mathfrak{M}$ der in Beispiel 5 genannten Abbildungen T_n ($n = 1, 2, \dots, 6$) gilt:

- Die Verknüpfung zweier dieser Abbildungen ist gleich einer dieser Abbildungen.
- Die Verknüpfung ist assoziativ.[1])
- Die Menge $\mathfrak{M}$ enthält die identische Abbildung T_1.
- Zu jeder Abbildung T_n existiert eine inverse Abbildung T_n^{-1}, so daß $T_n \circ T_n^{-1} = T_n^{-1} \circ T_n = T_1$ gilt.

Eine Menge, in der eine Verknüpfung mit diesen Eigenschaften erklärt ist, nennt man eine **Gruppe**. Ein näheres Eingehen auf Fragen der Gruppentheorie ist hier nicht möglich, Interessenten seien auf einschlägige Literatur (z. B. [1]) verwiesen.

Andere Abbildungen einer Menge auf sich haben Sie im Geometrieunterricht kennengelernt. So ist jede Verschiebung, jede Drehung und jede Spiegelung – und natürlich jede daraus zusammengesetzte Bewegung (↗ [13b], S. 94ff.) eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Menge aller Punkte der Ebene auf sich.
Jede zentrische Streckung und — daraus folgt — auch jede Ähnlichkeitsabbildung (↗[13 d], S. 29ff.) ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Menge aller Punkte der Ebene auf sich. (↗ [13c], S. 89ff.)
Die in der Darstellenden Geometrie verwendete Parallelprojektion ist hingegen eine eindeutige Abbildung der Menge aller Punkte des Raumes auf die Menge aller Punkte der Ebene.

● **24.*** Wieso ist die Parallelprojektion keine umkehrbar eindeutige Abbildung?

Sowohl die in Beispiel 5 betrachteten als auch die aus dem Geometrieunterricht bekannten Abbildungen sind eindeutig und damit Funktionen.
Weitere Beispiele für Funktionen können aus dem Alltagsleben entnommen werden.

---

[1]) Das wurde nicht allgemein bewiesen.

■ **B8:** Die Abbildung der Menge der Schüler einer Klasse auf die Menge der Plätze, durch die jedem Schüler sein Platz zugeordnet wird, ist eine (umkehrbar eindeutige) Funktion.

● **25.*** Welche Mengen werden abgebildet, wenn für das Feld eines 10000 m-Laufes die Platzierungen angegeben werden? Ist diese Abbildung eindeutig? Unter welchen Bedingungen ist sie umkehrbar eindeutig?

26. Nennen Sie weitere Beispiele für Funktionen aus dem täglichen Leben!

Bei den meisten Funktionen, die im obligatorischen Unterricht behandelt werden, handelt es sich um Abbildungen von Zahlenmengen. Dies ist dadurch begründet, daß derartige Funktionen für die Widerspiegelung wichtiger Seiten der objektiven Realität außerordentlich bedeutsam sind und zu den fundamentalen Elementen der gesamten Mathematik gehören.
Für die Behandlung der Funktionen ist es wichtig, eine zweckmäßige Form der Darstellung zu finden.
Betrachten wir einige Beispiele.

■ **B9:** Es sei $A = B = P$, durch

$$F \subseteq A \times B, \qquad F = \{[a; b]: a \in A, b \in B; b = 2a + 3\}$$

ist die Funktion F eindeutig, wenn auch vielleicht etwas umständlich, beschrieben.
Üblicherweise bezeichnet man nun den Definitionsbereich mit D, den Wertebereich mit W und verwendet die Variablen x und y. Da sich bei festgelegtem Definitionsbereich und bekannter Gleichung der Wertebereich ergibt, schreibt man kürzer:

$$y = 2x + 3; \qquad x \in D,$$

wobei man allerdings D anzugeben hat.
Eine solche Form nennt man analytische Darstellung der Funktion. Ist der Definitionsbereich die Menge aller reellen Zahlen, wird vereinbarungsgemäß auf seine Angabe oftmals verzichtet.
Dennoch ist es wichtig, zu wissen: Die analytische Darstellung $y = f(x)$, $x \in D$, bedeutet, daß die Funktion F die Menge der geordneten Paare $[x; y]$ mit $x \in D$ und $y = f(x)$ ist.
W ergibt sich dann als $W = \{y: y = f(x) \text{ und } x \in D\}$.
Insbesondere ist zu unterscheiden zwischen Funktion und Funktionswert. Letzterer bezeichnet ein Element der Menge W.

● **27.** Schreiben Sie folgende Funktionen in vollständiger Mengenschreibweise!

a) $y = x^2 \qquad (x \in P)$
b) $y = -x + 7 \qquad (x \in N)$
c) $y = \sin x \qquad (x \in P)$
d) $y = x^2 - 2 \qquad (x \in P)$
e) $y = \dfrac{1}{x} \qquad (x \in P; x \neq 0)$

28. Geben Sie von jeder Funktion drei verschiedene Funktionswerte an!

Nicht alle Funktionen können auf relativ einfache Weise **analytisch** dargestellt werden. Dafür folgendes Beispiel:

■ **B10:** $A = N$, $B =$ Menge der Primzahlen
Man bildet die Abbildung $F \subset A \times B$, indem den natürlichen Zahlen der Reihe nach die nach der Größe geordneten Primzahlen zugeordnet werden. Man erhält also $F = \{[0; 2], [1; 3], [2; 5], \ldots\}$. Die Abbildung F ist eindeutig, also eine Funktion.
Es gibt aber keinen einfachen analytischen Ausdruck für diesen Sachverhalt. Deshalb muß man für diese Funktion die oben genannte — oder eine ähnliche — **Wortdarstellung** verwenden.

● **29.** Stellen Sie die in Aufgabe 27. gegebenen Funktionen in Worten dar!

Eine andere Möglichkeit, eine Funktion darzustellen, besteht darin, **einige** geordnete Paare anzugeben. (Bei endlichen Abbildungen — also endlichen Teilmengen von $A \times B$ — kann man sogar **alle** geordneten Paare angeben.) Dies geschieht in Form von Tabellen, man spricht deshalb von **tabellarischer Darstellung** einer Funktion.

■ **B11:** Es sei $A = \{x: x \in N; x < 5\}$, $B = N$ und
$F = \{[x; y], x \in A, y \in B; y = 2x + 1\}$.
Die tabellarische Darstellung (Wertetabelle) hat folgendes Aussehen:

x	0	1	2	3	4
y	1	3	5	7	9

● **30.** Stellen Sie die in Aufgabe 27. gegebenen Funktionen tabellarisch dar!

Eine besonders übersichtliche Darstellung einer Funktion ist die **geometrische Darstellung,** auch Bild (Graph) der Funktion genannt.

Bei der geometrischen Darstellung einer Funktion verwendet man die Abbildung der Menge $P \times P$ auf die Menge aller Punkte einer Ebene. Durch ein Koordinatensystem wird jedem Element von $P \times P$, also jedem geordneten Zahlenpaar $[x; y]$ (mit $x \in P$ und $y \in P$) umkehrbar eindeutig ein Punkt A der Ebene zugeordnet. Man nennt bekanntlich x die Abszisse und y die Ordinate (beide zusammen die Koordinaten) des Punktes A.
Üblicherweise verwendet man ein spezielles Koordinatensystem, bei dem die Achsen gleichgeteilt sind und bei dem die y-Achse um $+90°$ (also mathematisch positiv) gegenüber der x-Achse gedreht ist.

■ **B12:** Die geometrische Darstellung der Funktion aus Beispiel 11 besteht dann aus 5 Punkten (↗ Bild 5).

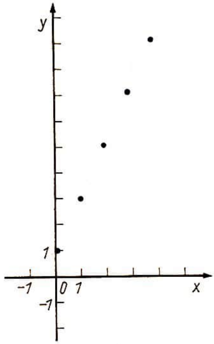


Bild 5

● **31.*** Gegeben sei die Funktion $F = \{[x; y]: x \in A, y \in P; y = 2x\}$. Welche Bedingung muß die Menge A erfüllen, damit die *graphische Darstellung* von F (das Bild von F) ein Teil einer Geraden g ist?

32. Stellen Sie die in Aufgabe 27. gegebenen Funktionen graphisch dar!

33. Stellen Sie folgende Funktionen in Worten sowie tabellarisch und geometrisch dar! (Es sei stets $D = P$)

a) $y = x^2$ **b)** $y = \frac{1}{3}x^3 - x$

c) $y = 2^x$ **d)** $y = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$

e) $y = \log_2 x$ $(x > 0)$ **f)** $y = \sin x$

g) $y = 1 - \cos x$ **h)** $y = \frac{\sin x}{x}$ $(x \neq 0)$

i) $y = \sqrt{x}$ $(x > 0)$ **k)** $y = 3x - 4$

Die in Aufgabe 33. gegebenen Funktionen gehören unterschiedlichen Funktionenklassen an. So sind in a), b), d) und k) **rationale** Funktionen gegeben, die man in ganzrationale und gebrochenrationale Funktionen unterteilen kann. Sonderfälle von ganzrationalen Funktionen sind lineare Funktionen, quadratische Funktionen und Potenzfunktionen der Form $y = x^n$ $(n \in N)$.

● **34.*** Bilden Sie den Durchschnitt von der Menge aller Potenzfunktionen der Form $y = x^n$ $(n \in N)$ und der Menge aller quadratischen Funktionen!

Den rationalen Funktionen kann man nun solche Funktionen gegenüberstellen, deren analytischer Ausdruck zwar auch eine Gleichung in x und y mit rationalen

Koeffizienten und Exponenten ist, bei denen aber y nicht nur linear auftritt. Solche Funktionen sind z. B.

$$x^2 + 2xy + y^2 = 4 \text{ oder } 3x^2y^2 - 4xy^3 + 5x^3y + 6 = 0 \text{ oder}$$

$$y^2 - 2x + 4 = 0 \text{ oder Potenzfunktionen } y = x^n \text{ mit } n = \frac{p}{q},$$

wobei $p \in G, q \in G$ und $\text{g.g.T.}_{[p;q[} = 1$ gilt. Diese Funktionen nennt man irrationale Funktionen, bekannt sind Ihnen davon die Wurzelfunktionen.
Rationale und irrationale Funktionen bilden zusammen die algebraischen Funktionen. Ihnen kann man die transzendenten Funktionen, zu denen Winkel-, Logarithmus- und Exponentialfunktionen gehören, gegenüberstellen.
Man kann für Funktionen folgendes Einteilungsschema angeben (Bild 6):

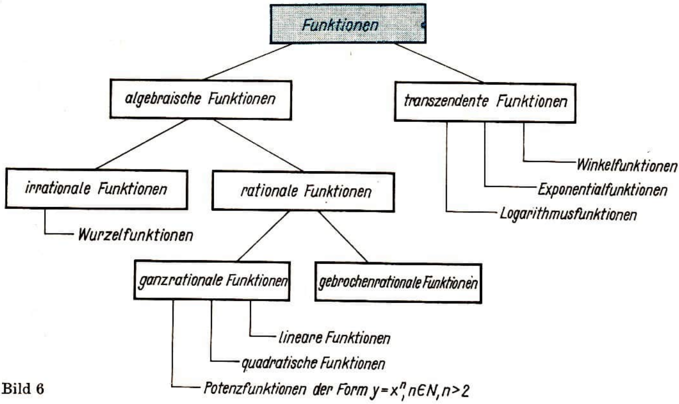


Bild 6

● **35.** Geben Sie für jede Funktionsklasse zwei Vertreter an!

36. Geben Sie eine Übersicht über die verschiedenen Funktionsklassen mit Hilfe der Mengen-Teilmengenbeziehung.

Lösungen — Kapitel 5

2. $S \times N = \{[x; y] : x \in S, y \in \bar{N}\}$, alle Elemente von T_1 haben diese Eigenschaft, also gilt $T_1 \subseteqq A \times \bar{N}$. Außerdem gibt es mindestens ein Element, das zu $S \times \bar{N}$ und nicht zu T_1 gehört. Z. B. gilt:
   $[A; 1] \in S \times \bar{N}$ und $[A; 1] \notin T_1$, also gilt $T_1 \subset A \times \bar{N}$.
3. $T_1 \cap T_2 = \{[D; 6]\}$, $T_1 \cap T_3 = \emptyset$, $T_2 \cap T_3 = \{[C; 5], [F; 2]\}$
5. $A \times B \cap B \times A = \{[5; 5]\}$
6. 64 Teilmengen, $(1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64)$
7. b) 8
8. b) 6
10. 3
11. a) aus A in B, aus A wurden die Primzahlen ausgewählt,
    b) von A in B,
    c) von A auf B,
    d) von A auf B
13. $A_1 = \{1, 3, 5\}$, $B_1 = \{7, 8, 9\}$
14. b) $A_1 = \{x : x = 3n$ oder $x = 4n$ oder $x = 5n$ und $n \in N\}$
    $B_1 = \{3, 4, 5\}$
15. eindeutig sind T_1, T_3, T_4 und T_5
16. B3: $T_1 = \{[a; b] : a \in R, b \in R; b = |a|\}$
    B4: $T_2 = \{[a; b] : a \in R, b \in R; b = 2a\}$
20.

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
T_1	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
T_2	T_2	T_1	T_4	T_3	T_6	T_5
T_3	T_3	T_5	T_1	T_6	T_2	T_4
T_4	T_4	T_6	T_2	T_5	T_1	T_3
T_5	T_5	T_3	T_6	T_1	T_4	T_2
T_6	T_6	T_4	T_5	T_2	T_3	T_1

22. vgl. Lösung der Aufgabe 20.
23. vgl. Lösung der Aufgabe 20. Assoziativität
24. Verschiedene Punkte haben das gleiche Bild, wenn sie auf einer Projektionsgeraden liegen.
25. Menge der Läufer in die Menge der natürlichen Zahlen. Die Abbildung ist umkehrbar eindeutig, wenn nicht mehrere Läufer den gleichen Platz belegt haben.
31. $A \subseteqq P$
34. $D = \{y = x^2\}$, die Menge enthält nur ein Element, die Funktion $y = x^2$.

Literaturverzeichnis

[1] ALEXANDROFF, P. S.: *Einführung in die Gruppentheorie.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1974. Mathematische Schülerbücherei, Band 1
[2] ASSER, G.: *Grundbegriffe der Mathematik.* Mathematik für Lehrer, Band 1. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973.
[3] AUTORENKOLLEKTIV: *Rund um die Mathematik.* Kinderbuchverlag, Berlin 1968 Mathematische Schülerbücherei, Band 34
[4] AUTORENKOLLEKTIV: *Kleine Enzyklopädie Mathematik.* VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1974.
[5] CHOQUET, GUSTAVE: *Neue Elementargeometrie.* VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1969
[6] DYNKIN, E. B./USPENSKI, W. A.: *Mathematische Unterhaltungen,* Band 2, *Aufgaben aus der Zahlentheorie.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967. Mathematische Schülerbücherei, Band 20
[7] GELFOND, A. O.: *Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1966. Mathematische Schülerbücherei, Band 22
[8] GÖRKE, L.: *Mengen, Relationen, Funktionen.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1973 (stark bearbeitete und erweiterte Nachauflage).
[9] HASSE, M.: *Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik.* BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1970. Mathematische Schülerbücherei, Band 2
[10] KLOTZEK, B.: *Geometrie.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1971.
[11] KOROWKIN, P. P.: *Ungleichungen.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1966. Mathematische Schülerbücherei, Band 9
[12] LEHMANN, E.: *Optimierung für junge Mathematiker.* BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1970. Mathematische Schülerbücherei, Band 47
[13a] *Mathematik, Lehrbuch für Klasse 1,* Ausgabe 1968.
[13b] *Mathematik, Lehrbuch für Klasse 6,* Ausgabe 1969.
[13c] *Mathematik, Lehrbuch für Klasse 7,* Ausgabe 1970.
[13d] *Mathematik, Lehrbuch für Klasse 8,* Ausgabe 1971.
[13e] *Mathematik, Lehrbuch für Klasse 9,* Ausgabe 1970.
[13f] *Mathematik, Lehrbuch für Klasse 10,* Ausgabe 1971.
[13g] *Mathematik in Übersichten,* Ausgabe 1973.
sämtlich: Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin.
[14] STRUIK, D. J.: *Abriß der Geschichte der Mathematik.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972.
[15] WILENKIN, N. J.: *Unterhaltsame Mengenlehre.* BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1972. Mathematische Schülerbücherei, Band 64
[16] WISLICENY, J.: *Grundbegriffe der Mathematik.* Mathematik für Lehrer, Band 2. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1974.
[17] WOROBJOW, N. N.: *Teilbarkeitskriterien.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972. Mathematische Schülerbücherei, Band 52
[18] WUSSING, H./W. ARNOLD: *Biographien bedeutender Mathematiker.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1975.
[19] ZICH, O./KOLMAN, A.: *Unterhaltsame Logik.* BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1971. Mathematische Schülerbücherei, Band 51

Sachwortverzeichnis