Studienbücherei



J. Wisliceny
Grundbegriffe der Mathematik

II. Rationale, reelle und komplexe Zahlen



Mathematik für Lehrer
Band 2

Herausgegeben von:
W. Engel, S. Brehmer, M. Schneider, H. Wussing

Unter Mitarbeit von:
G. Asser, J. Böhm, J. Flachsmeyer, G. Geise, T. Glocke,
K. Härtig, G. Kasdorf, O. Krötenheerdt, H. Lugowski,
P.-H. Müller, G. Porath

Studienbücherei

Grundbegriffe der Mathematik

J. Wisliceny

II. Rationale, reelle und komplexe Zahlen

Mit 19 Abbildungen

Mit einem historischen Anhang
von H. Wussing

VEB Deutscher Verlag
der Wissenschaften
Berlin 1974

Verlagslektor: Dipl.-Math. E. Arndt
Umschlaggestaltung: R. Wendt
Copyright 1974 by VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin
Printed in the German Democratic Republic
Lizenz-Nr. 206 · 435/196/74
Gesamtherstellung: VEB Druckhaus „Maxim Gorki", Altenburg
LSV 1014
EVP 9,80

Vorwort

Im vorliegenden Teil II der „Grundbegriffe der Mathematik" wird die Behandlung der Zahlenbereiche fortgesetzt. Es werden der Reihe nach die gebrochenen, die rationalen, die reellen und die komplexen Zahlen eingeführt. Den Ausgangspunkt bildet die im Teil I ausführlich dargelegte Theorie der natürlichen Zahlen.

Die Konstruktion der gebrochenen, der rationalen und der komplexen Zahlen wird wie allgemein üblich mit Hilfe geordneter Paare vollzogen. Die ganzen Zahlen werden als spezielle rationale Zahlen definiert. Bei der Behandlung der gebrochenen Zahlen wurde auf Vorschlag von Herrn Prof. Dr. G. Asser eine konsequente Unterscheidung zwischen Brüchen und gebrochenen Zahlen angestrebt. Demgemäß erscheinen Brüche stets in der für geordnete Paare üblichen Schreibweise. Von den bekannten Varianten zur Konstruktion der reellen Zahlen habe ich eine ausgewählt, die der Definition der reellen Zahlen im Lehrbuch der 9. Klasse entspricht. Die reellen Zahlen werden als unendliche Dezimalbrüche definiert. Für den Nachweis der Körpereigenschaften des Bereichs der reellen Zahlen wurden die von Prof. Dr. J. Flachsmeyer und Prof. Dr. F. Terpe in den Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft der DDR, Heft 1 (1968), dargelegten Gedanken zugrunde gelegt. Die Abschnitte 4.10., 5.8., 6.3.3. und 7.6. haben ergänzenden Charakter.

Die Ausführungen über die Theorie der Zahlenbereiche werden durch die von Herrn Prof. Dr. H. Wussing verfaßten Abschnitte über die historische Entwicklung des Zahlbegriffs wesentlich ergänzt.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. G. Asser für zahlreiche wertvolle Hinweise, insbesondere bei der Gestaltung der Abschnitte 4 und 6.3. Herrn Schneider möchte ich für die Hilfe danken, die er mir beim Lesen der Korrekturen gewährte.

Güstrow, im Herbst 1973 Jürgen Wisliceny

Inhalt

4.	**Der Bereich der gebrochenen Zahlen**	**9**
4.1.	Einleitung	9
4.2.	Gebrochene Zahlen	11
4.3.	Anordnung gebrochener Zahlen	13
4.4.	Addition gebrochener Zahlen	16
4.5.	Multiplikation gebrochener Zahlen	20
4.6.	Die natürlichen Zahlen als gebrochene Zahlen	23
4.7.	Rechnen mit Quotienten (Bruchrechnung), Potenzen	25
4.8.	Darstellung gebrochener Zahlen durch periodische Dezimalbrüche	28
4.9.	Periodenlänge und Vorperiodenlänge	38
4.10.	Kettenbrüche	43
4.11.	Algebraische Charakterisierung des Bereiches der gebrochenen Zahlen	55
5.	**Der Bereich der rationalen Zahlen**	**59**
5.1.	Einleitung	59
5.2.	Konstruktion und algebraische Charakterisierung des Bereiches der rationalen Zahlen	60
5.3.	Positive und negative rationale Zahlen, Rechnen mit Ungleichungen	69
5.4.	Beschränkte und unbeschränkte Mengen (Schranken, Maximum, Minimum, Supremum, Infimum)	71
5.5.	Der absolute Betrag einer rationalen Zahl	75
5.6.	Der Bereich der ganzen Zahlen	76
5.7.	Diophantische Gleichungen und lineare Kongruenzen mit einer Unbekannten	81
5.8.	Der Weg: Natürliche Zahlen — ganze Zahlen — rationale Zahlen	86
6.	**Der Bereich der reellen Zahlen**	**88**
6.1.	Einleitung	88
6.2.	Konstruktion des Bereiches der reellen Zahlen mit Hilfe von Dezimalbrüchen	90

6.2.1. Anordnung der Dezimalbrüche 90
6.2.2. Konvergenz in der Menge R_+ 92
6.2.3. Algebraische Operationen in der Menge R_+ 98
6.2.4. Der Körper der reellen Zahlen 100
6.3. Verschiedene Charakterisierungen und Konstruktionsmöglichkeiten des Körpers der reellen Zahlen 104
6.3.1. Der Bereich der reellen Zahlen als einziger stetiger Körper 104
6.3.2. Weitere Charakterisierungen des Körpers der reellen Zahlen 109
6.3.3. Konstruktionsmöglichkeiten für den Bereich der reellen Zahlen 114

7. Der Bereich der komplexen Zahlen 118

7.1. Einleitung 118
7.2. Konstruktion des Bereiches der komplexen Zahlen 120
7.3. Veranschaulichung der komplexen Zahlen und der Rechenoperationen in der Gaußschen Zahlenebene 123
7.4. Gleichungen n-ten Grades im Bereich der komplexen Zahlen 129
7.5. Auflösung von Gleichungen zweiten und dritten Grades 135
7.6. Gleichungen vierten Grades 143

Anhang. Zur Geschichte der Zahlzeichen und des Zahlbegriffes (H. Wussing) 146

Namen- und Sachverzeichnis 166

4. Der Bereich der gebrochenen Zahlen

4.1. Einleitung

Die natürlichen Zahlen entstanden durch den Zählprozeß. Als Kardinalzahlen werden sie zur Angabe der Anzahl der Elemente einer endlichen Menge und als Ordinalzahlen zum Durchnumerieren der Elemente einer endlichen Menge benutzt. Zur Herausbildung weiterer Zahlenbereiche führte insbesondere die Tätigkeit des Messens. Beim Meßprozeß wird die zu messende Größe (Meßgröße) mit einer festen Vergleichsgröße (Maßeinheit) verglichen. Wir wollen uns an der Längenmessung orientieren und diese schrittweise wie folgt vornehmen: Im ersten Schritt stellen wir fest, wie oft die Maßeinheit hintereinandergelegt werden kann, ohne die Meßgröße zu übertreffen. Die erhaltene natürliche Zahl ist im allgemeinen nur ein Näherungswert, denn eine geringfügige Änderung der Meßgröße beeinflußt unser Ergebnis nicht. Für den n-ten Meßschritt ($n \geqq 2$) denken wir uns die Maßeinheit in n gleichlange Teile zerlegt und wählen eine zu diesen Teilen gleichlange Größe — den n-ten Teil der Maßeinheit — als neue Vergleichsgröße. Wir stellen im n-ten Meßschritt fest, wie oft der n-te Teil der Maßeinheit hintereinandergelegt werden kann, ohne die Meßgröße zu übertreffen. Bezeichnet man diese Anzahl mit m, so beschreibt das geordnete Paar (m, n) mit einer bestimmten Genauigkeit das Verhältnis der Meßgröße zur Maßeinheit. Es kann der Fall eintreten, daß für ein n die Meßgröße durch das Hintereinanderlegen des n-ten Teiles der Maßeinheit vollständig ausgeschöpft wird. Wir nennen dann die Meßgröße bezüglich der Maßeinheit *kommensurabel*. Für eine derartige Meßgröße gibt es also geordnete Paare natürlicher Zahlen, die ihr Verhältnis zur Maßeinheit genau bestimmen. Ist (m, n) ein solches geordnetes Paar natürlicher Zahlen und k eine beliebige von Null verschiedene natürliche Zahl, so trifft das auch für das geordnete Paar (km, kn) zu (vgl. Abb. 1).

Aus einfachen zahlentheoretischen Überlegungen erhalten wir, daß zwei geordnete Paare (m_1, n_1), (m_2, n_2) die gleiche Größe beschreiben, wenn $m_1 n_2 = m_2 n_1$ gilt.

Die Längenmessung macht von der anschaulich plausiblen Tatsache Gebrauch, daß die Vergleichsgröße in beliebig viele gleichlange Stücke geteilt werden kann. Die Mög-

lichkeit der Teilung einer gegebenen Größe in gleiche Teile spielt auch bei alltäglichen Verteilungsaufgaben eine große Rolle. Um etwa m gleiche Torten unter n Personen aufzuteilen, so daß keine Person benachteiligt wird, kann jede Torte in n gleiche Stücke geteilt werden. Jede Person erhält dann m Stücke. Gilt $mn_1 = nm_1$, so wird diese Verteilungsaufgabe auch durch Teilung jeder Torte in n_1 gleiche Stücke gelöst, wobei dann jede Person m_1 Stücke erhält. Das Ergebnis einer solchen Verteilungsaufgabe wird ebenfalls durch geordnete Paare aus $\mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$ beschrieben. Zwei geordnete Paare (m_1, n_1), (m_2, n_2) legen dabei das Ergebnis ein und derselben Verteilungsaufgabe dieser Art fest, wenn $m_1 n_2 = m_2 n_1$ gilt. Es handelt sich hier also um die gleiche Beziehung zwischen geordneten Paaren wie bei der Beschreibung der Länge einer kommensurablen Größe.

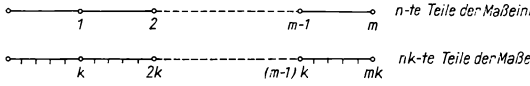


Abb. 1

Wir stellen uns in diesem Kapitel das Ziel, den Zahlenbereich der natürlichen Zahlen so zu erweitern, daß einerseits jede bezüglich einer gegebenen Maßeinheit kommensurable Länge durch eine Maßzahl aus diesem Zahlenbereich erfaßt wird und andererseits das Ergebnis einer Verteilungsaufgabe der oben genannten Art durch eine Zahl dieses Zahlenbereiches beschrieben werden kann. Die bisherigen Überlegungen machen deutlich, daß die gesuchten Zahlen etwas mit geordneten Paaren natürlicher Zahlen zu tun haben müssen. Wir werden die geordneten Paare natürlicher Zahlen zur Konstruktion der gesuchten Zahlen heranziehen.

An einen Bereich, der eine Erweiterung eines bereits bekannten Zahlenbereiches darstellen soll, müssen bestimmte Forderungen gestellt werden. Für Zahlenbereiche ist charakteristisch, daß in ihnen zwei algebraische Operationen, eine Addition und eine Multiplikation, definiert sind. Die wesentlichen Eigenschaften dieser Operationen werden durch *Strukturgesetze* (auch *Grundgesetze* oder *Axiome* genannt) beschrieben, aus denen andere Rechengesetze abgeleitet werden können. Im Bereich der natürlichen Zahlen ist weiterhin eine Ordnungsrelation erklärt, die in bestimmter Weise mit der Addition und Multiplikation zusammenhängt und deren Eigenschaften ebenfalls durch Strukturgesetze bestimmt werden. Für den Bereich der natürlichen Zahlen formulieren wir die folgenden bekannten Eigenschaften (vgl. MfL Bd. 1, 3.) als Strukturgesetze:

(A0) Die Addition ist eine algebraische Operation in $\mathbf{N}$.

(A1) Die Addition ist assoziativ: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

($A2_1$) Bezüglich der Addition existiert (genau) ein neutrales Element 0 (Nullelement) mit $a + 0 = 0 + a = a$.

(A3) Die Addition ist kommutativ: $a + b = b + a$.

(M0) Die Multiplikation ist eine algebraische Operation in $\mathbb{N}$.

(M1) Die Multiplikation ist assoziativ: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

($M2_1$) Bezüglich der Multiplikation existiert (genau) ein neutrales Element 1 (Einselement) mit $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

(M3) Die Muliplikation ist kommutativ: $a \cdot b = b \cdot a$.

(M4) Die Multiplikation ist bezüglich der Addition distributiv:
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \qquad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a.$

(O1) Die Relation „$<$“ ist eine irreflexive totale Ordnung.

(O2) Die Addition ist bezüglich der Ordnung „$<$“ monoton:
$a < b \Rightarrow a + c < b + c$.

(O3) Die Multiplikation ist bezüglich der Ordnung „$<$“ monoton:
$a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$.

Auf Grund dieser Strukturgesetze bildet der Bereich der natürlichen Zahlen als algebraische Struktur einen sogenannten geordneten Halbring mit Null- und Einselement. Wir werden daher auch vom *Halbring der natürlichen Zahlen* sprechen. Von einer Zahlenbereichserweiterung des Bereichs der natürlichen Zahlen fordern wir, daß die genannten Strukturgesetze auch im neuen Zahlenbereich weitgehend gültig bleiben.

Im Bereich der natürlichen Zahlen können Gleichungen der Form

$$a + x = b, \qquad a \cdot x = b \quad \text{bzw.} \quad x^n = b$$

im allgemeinen nicht gelöst werden. Mit der Schaffung neuer Zahlenbereiche sollen diese algebraischen Unvollständigkeiten nach Möglichkeit behoben werden.

4.2. Gebrochene Zahlen

Die Überlegungen in 4.1. legen es nahe, in der Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ folgende Relation „$=_q$“ zu betrachten:

(1) $\qquad (m_1, n_1) =_q (m_2, n_2) :\Leftrightarrow m_1 n_2 = m_2 n_1$.

Diese Relation ist offenbar reflexiv und symmetrisch. Ferner folgen aus $(m_1, n_1) =_q (m_2, n_2)$ und $(m_2, n_2) =_q (m_3, n_3)$ die Beziehungen $m_1 n_2 = m_2 n_1$ und $m_2 n_3 = m_3 n_2$, also auch $m_1 n_2 n_3 = m_3 n_1 n_2$; wegen $n_2 \neq 0$ ergibt sich daraus $m_1 n_3 = m_3 n_1$, also $(m_1, n_1) =_q (m_3, n_3)$. Die Relation „$=_q$“ ist somit auch transitiv und daher eine Äquivalenzrelation, die wir die *Quotientengleichheit* nennen.

Die Elemente aus $\mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$, d. h. die geordneten Paare (m, n) mit $m, n \in \mathbf{N}$ und $n \neq 0$, nennen wir *Brüche*, wobei die Zahl m der *Zähler* und die Zahl n der *Nenner* des Bruches (m, n) heißt. Die Äquivalenzklassen von $\mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$ nach der Quotientengleichheit (vgl. MfL Bd. 1, 2.5.) nennen wir demgegenüber *gebrochene Zahlen*, und wir bezeichnen die durch den Bruch (m, n) bestimmte Äquivalenzklasse mit $\frac{m}{n}$. Definitionsgemäß ist also $\frac{m}{n}$ die Menge aller Brüche (m', n'), die zum Bruch (m, n) quotientengleich sind:

$$(2) \qquad \frac{m}{n} := \{(m', n') : (m', n') \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^* \wedge m'n = mn'\}.$$

Während die Brüche (m_1, n_1) und $m_2, n_2)$ genau dann gleich sind, wenn ihre Zähler m_1, m_2 sowie ihre Nenner n_1, n_2 übereinstimmen,

$$(3) \qquad (m_1, n_1) = (m_2, n_2) \Leftrightarrow m_1 = m_2 \wedge n_1 = n_2,$$

sind die gebrochenen Zahlen $\frac{m_1}{n_1}$ und $\frac{m_2}{n_2}$ genau dann gleich, wenn die Brüche m_1, $n_1)$ und (m_2, n_2) quotientengleich sind:

$$(4) \qquad \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \Leftrightarrow m_1 n_2 = m_2 n_1.$$

Die Menge aller gebrochenen Zahlen, d. h. das Restsystem von $\mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$ modulo $=_q$, bezeichnen wir mit $\mathbf{Q}_+$, also

$$(5) \qquad \mathbf{Q}_+ := \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbf{N} \wedge n \neq 0\right\}.$$

In der Menge $\mathbf{Q}_+$ werden wir im folgenden eine Ordnung, eine Addition und eine Multiplikation definieren. Nach der Herleitung entsprechender Strukturgesetze werden wir berechtigt sein, die Menge $\mathbf{Q}_+$ als einen Zahlenbereich anzusehen, den wir den *Bereich der gebrochenen Zahlen* nennen werden. Insbesondere wird dieser Zahlenbereich die in 4.1. genannte Zielstellung erfüllen, also als Maßbereich für die bezüglich einer Maßeinheit kommensurablen Größen ausreichend sein. Wir wollen aber schon jetzt die Elemente von $\mathbf{Q}_+$ *gebrochene Zahlen* nennen.

Ist $a \in \mathbf{Q}_+$, $a = \frac{m}{n}$, so nennen wir den Bruch (m, n) einen *Repräsentanten* und $\frac{m}{n}$ eine *Bruchdarstellung* der gebrochenen Zahl a. Für jede natürliche Zahl $k > 1$ ist auf Grund von (1) mit (m, n) stets auch (mk, nk) ein Repräsentant von a und umgekehrt. Den Übergang von (m, n) zu (mk, nk) bezeichnet man als *Erweitern* (mit der Zahl $k > 1$), den Übergang von (mk, nk) zu (m, n) als *Kürzen* (durch die Zahl k). Dann gilt: Brüche, die durch Erweitern oder Kürzen aus einem gegebenen Bruch entstehen, repräsentieren die gleiche gebrochene Zahl. Ist $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{m'}{n'}$, so können wir

insbesondere (m,n) mit n' und (m',n') mit n erweitern und erhalten

$$a = \frac{mn'}{nn'}, \quad b = \frac{m'n}{nn'}.$$

Zu beliebigen gebrochenen Zahlen a, b existieren also natürliche Zahlen m_1, m_2 und $k \neq 0$, so daß

$$a = \frac{m_1}{k}, \quad b = \frac{m_2}{k}$$

ist, wobei man im Fall $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{m'}{n'}$ als gemeinsamen Nenner k das Produkt nn' oder auch (Beweis!) das kleinste gemeinsame Vielfache $n \sqcup n'$ nehmen kann. Brüche (m_1, k), (m_2, k) mit dem gleichen Nenner k heißen *gleichnamig*.

Ein Bruch heißt *reduziert*, wenn sein Zähler und sein Nenner teilerfremd sind:

(6) $\quad (m,n)$ reduziert $:\Leftrightarrow m \sqcap n = 1$.

Man zeigt leicht (Übungsaufgabe), daß es zu jeder gebrochenen Zahl a genau einen reduzierten Bruch (m,n) gibt, der a repräsentiert. In diesem Fall heißt $\frac{m}{n}$ die *reduzierte Bruchdarstellung* von a.

Bemerkung. Häufig werden auch die Brüche durch die Bezeichnung $\frac{m}{n}$ wiedergegeben, was aber wegen der unterschiedlichen Gleichheit (vgl. (3) bzw. (4)) unzweckmäßig ist, so daß wir im Interesse einer begrifflichen Klarheit im folgenden die hier entwickelte Terminologie verwenden. Man beachte: Die Brüche (1, 3) und (2, 6) sind verschieden, die gebrochenen Zahlen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{6}$ sind gleich!

4.3. Anordnung gebrochener Zahlen

Unter Verwendung der Anordnung natürlicher Zahlen wollen wir in $\mathbb{Q}$, eine irreflexive totale Ordnung definieren und damit der Vergleichbarkeit von Meßgrößen Rechnung tragen.

In 4.2. wurde gezeigt, daß zwei gebrochene Zahlen a, b durch gleichnamige Brüche repräsentiert werden können. Es gelte nun $a = \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}$ und $b = \frac{m_1'}{n_1} = \frac{m_2'}{n_2}$,

wobei n_1, n_2 von Null verschiedene natürliche Zahlen sind. Die Beziehungen $m_1 < m_1'$ und $m_2 < m_2'$ sind dann gleichwertig mit $m_1 n_2 < m_1' n_2$ bzw. $m_2 n_1 < m_2' n_1$ (vgl. MfL Bd. 1, 3.4. (19), (21)). Benutzen wir noch $m_1 n_2 = m_2 n_1$ und $m_1' n_2 = m_2' n_1$, so erhalten wir die Gleichwertigkeit der Beziehungen $m_1 < m_1'$ und $m_2 < m_2'$. Dieses Ergebnis ermöglicht die folgende

Definition (Anordnung gebrochener Zahlen).

$$(1) \qquad \frac{m}{n} < \frac{m'}{n} :\Leftrightarrow m < m'.$$

Bemerkungen.

1. Die Erklärung der Anordnung gebrochener Zahlen wurde mit Hilfe von Repräsentanten, d. h. durch nicht eindeutig bestimmte Darstellungen von a bzw. b, vorgenommen. Derartige Definitionen unter Verwendung von Repräsentanten kommen in der Mathematik häufig vor. Um mit einer solchen Definition zu einer eindeutigen Festlegung zu gelangen, ist es erforderlich, daß alle für die Definition möglichen Darstellungen zur gleichen Aussage führen. In Verbindung mit einer solchen Definition ist also die Unabhängigkeit von den Repräsentanten nachzuweisen. Die Rechnungen vor der Definition beinhalten gerade den Nachweis der Unabhängigkeit von den Repräsentanten für diese Definition.

2. Das Zeichen „$<$“ wird in der Definition (1) in zweierlei Bedeutung benutzt. Es bezeichnet einerseits (rechts) die irreflexive totale Ordnung im Bereich der natürlichen Zahlen und andererseits (links) eine Relation in $\mathbb{Q}_+$, die durch diese Definition erklärt wird. Entsprechendes werden wir auch bei weiteren Definitionen vorfinden. Eine Unterscheidung in der Bezeichnung nach den unterschiedlichen Bedeutungen wäre jeweils konsequent; wir wollen jedoch darauf verzichten, da sich die unterschiedliche Bedeutung später als belanglos erweisen wird.

Um zwei gebrochene Zahlen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m'}{n'}$ hinsichtlich der Relation „$<$“ zu vergleichen, sind gemäß der Definition dieser Relation die Brüche (m, n) und (m', n') zunächst gleichnamig zu machen. Insbesondere können wir zu den Bruchdarstellungen $\frac{mn'}{nn'}$ bzw. $\frac{m'n}{nn'}$ übergehen. Die Anordnung der Zahlen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m'}{n'}$ wird damit durch

$$(2) \qquad \frac{m}{n} < \frac{m'}{n'} \Leftrightarrow mn' < m'n$$

beschrieben.

Für die in $\mathbb{Q}_+$ definierte Anordnung gilt der folgende

Satz 1 (Eigenschaften der Anordnung gebrochener Zahlen).

(O1) *Die Relation „$<$“ ist eine irreflexive totale Ordnung in $\mathbb{Q}_+$, d. h., es gelten:*

$$\neg \bigvee_{a \in \mathbf{Q}_+} a < a \qquad \text{(Irreflexivität)},$$

$$\bigwedge_{a,b,\, c \in \mathbf{Q}_+} (a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c) \qquad \text{(Transitivität)},$$

$$\bigwedge_{a,b \in \mathbf{Q}_+} (a \neq b \Rightarrow a < b \vee b < a) \qquad \text{(Konnexität)}.$$

Beweis. Repräsentieren wir die auftretenden Zahlen jeweils durch Brüche mit gleichem Nenner, so ergeben sich diese Eigenschaften unmittelbar aus der Definition der Anordnung gebrochener Zahlen und den entsprechenden Eigenschaften der Anordnung natürlicher Zahlen.

Von der irreflexiven totalen Ordnung „$<$“ gelangen wir durch die Festlegung

$$(3) \qquad a \leqq b : \Leftrightarrow a < b \vee a = b$$

zu einer reflexiven totalen Ordnung in $\mathbf{Q}_+$ (vgl. MfL Bd. 1, 2.5. (28), (43)). Man zeigt leicht, daß folgendes gilt:

$$(1') \qquad \frac{m}{n} \leqq \frac{m'}{n} \Leftrightarrow m \leqq m';$$

$$(2') \qquad \frac{m}{n} \leqq \frac{m'}{n'} \Leftrightarrow mn' \leqq m'n.$$

Die irreflexive totale Ordnung kann aus der reflexiven totalen Ordnung durch

$$(4) \qquad a < b \Leftrightarrow a \leqq b \wedge a \neq b$$

zurückgewonnen werden (vgl. MfL Bd. 1, 2.5. (26), (34)).

Gilt $a < c < b$ oder $b < c < a$, so sagen wir, daß c zwischen a und b liegt.

Im Bereich der natürlichen Zahlen gibt es keine Zahl, die zwischen einer natürlichen Zahl n und ihrem Nachfolger $n + 1$ liegt. Dagegen gilt

Satz 2.

$$\bigwedge_{a,b \in \mathbf{Q}_+} (a < b \Rightarrow \bigvee_{c \in \mathbf{Q}_+} (a < c \wedge c < b)).$$

Man sagt hierfür auch, daß $\mathbf{Q}_+$ bezüglich der Relation „$<$“ *dicht* ist.

Beweis. Wir repräsentieren a und b durch gleichnamige Brüche (m, n) und (m', n). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $m < m'$. Dann ist $\dfrac{2m+1}{2n}$ eine gebrochene Zahl c mit $a < c < b$; denn wegen $m < m'$ ist $2m < 2m + 1 < 2m'$ und daher nach (1)

$$\frac{2m}{2n} < \frac{2m+1}{2n} < \frac{2m'}{2n}.$$

Die gebrochenen Zahlen können wir auf einer gegebenen Geraden veranschaulichen. Dazu legen wir auf dieser Geraden zwei Punkte P_0 und P_1 fest, wobei bei einem Verlauf der Geraden von links nach rechts der Punkt P_1 rechts von P_0 liegen möge. Wir

betrachten die Strecke P_0P_1 als Maßeinheit (Einheitsstrecke) und ordnen dann der gebrochenen Zahl $a = \frac{m}{n}$ denjenigen Punkt P_a zu, der durch m-maliges Abtragen des n-ten Teiles der Einheitsstrecke vom Punkt P_0 ausgehend nach rechts erreicht wird (Abb. 2).

Die Veranschaulichung der gebrochenen Zahlen hängt mit der in der Einleitung beschriebenen Längenmessung zusammen und ist Ausdruck dafür, daß die gebrochenen Zahlen als Maßzahlen für bezüglich einer Maßeinheit kommensurable Längen dienen. Da $a < b$ genau dann gilt, wenn P_b rechts von P_a liegt, wird deutlich, daß die definierte Anordnung gebrochener Zahlen die Vergleichbarkeit von Meßgrößen widerspiegelt.

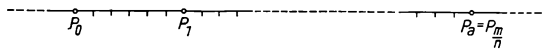


Abb. 2

4.4. Addition gebrochener Zahlen

Um die Addition gebrochener Zahlen a, b zu erklären, benutzen wir wieder Darstellungen dieser Zahlen mit gleichem Nenner. Ist $a = \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}$ und $b = \frac{m_1'}{n_1} = \frac{m_2'}{n_2}$, so ist $\frac{m_1 + m_1'}{n_1} = \frac{m_2 + m_2'}{n_2}$, da

$$n_2(m_1 + m_1') = n_2m_1 + n_2m_1' = n_1m_2 + n_1m_2' = n_1(m_2 + m_2')$$

gilt. Für die folgende Definition der Addition gebrochener Zahlen ist damit die Unabhängigkeit von den Repräsentanten nachgewiesen.

Definition (Addition gebrochener Zahlen).[1])

$$(1) \qquad \frac{m}{n} + \frac{m'}{n} := \frac{m + m'}{n}.$$

Die Definition der Addition gebrochener Zahlen wird durch die Längenmessung motiviert, wenn die Addition gebrochener Zahlen mit dem Hintereinanderlegen zweier Längen in Beziehung gesetzt wird.

[1]) Vgl. 4.3. Bemerkung 2.

Zur Beschreibung der Addition gebrochener Zahlen mit den Darstellungen $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$ können wir wieder nn' als gemeinsamen Nenner benutzen und erhalten dann

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = \frac{mn' + m'n}{nn'}. \tag{2}$$

Beim praktischen Rechnen wird allerdings vielfach nicht nn', sondern das kleinste gemeinsame Vielfache $n \sqcup n'$ — der sogenannte *Hauptnenner* der Brüche (m, n) und (m,n') — als gemeinsamer Nenner genommen.

Wir wenden uns nun den Eigenschaften der Addition zu. Zunächst sei bemerkt, daß alle Brüche der Form $(0, n)$ quotientengleich sind. Bezeichnen[1]) wir mit 0 die zugehörige Äquivalenzklasse

$$0 := \{(0, n) : n \in \mathbb{N}^*\}, \tag{3}$$

so wird damit eine gebrochene Zahl definiert, für die

$$\frac{m}{n} = 0 \Leftrightarrow m = 0, \tag{4}$$

$$\bigwedge_{a \in \mathbb{Q}_+} (a \neq 0 \Rightarrow a > 0) \tag{5}$$

gelten.

Satz 1 (Eigenschaften der Addition in $\mathbb{Q}_+$).

$$\text{(A0)} \quad \bigwedge_{a,\,b} (a \in \mathbb{Q}_+ \wedge b \in \mathbb{Q}_+ \Rightarrow a + b \in \mathbb{Q}_+),$$

$$\text{(A1)} \quad \bigwedge_{a,b,c \in \mathbb{Q}_+} (a + b) + c = a + (b + c) \quad (\textit{Assoziativgesetz}),$$

$$\text{(A2}_1\text{)} \quad \bigwedge_{a \in \mathbb{Q}_+} a + 0 = a \quad (\textit{Eigenschaft des Nullelementes}),$$

$$\text{(A3)} \quad \bigwedge_{a,b \in \mathbb{Q}_+} a + b = b + a \quad (\textit{Kommutativgesetz}).$$

Beweis.

(A0) folgt unmittelbar aus der Definition der Summe gebrochener Zahlen.

(A1) Es seien $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{m'}{n}$, $c = \frac{m''}{n}$. Die Addition natürlicher Zahlen ist assoziativ, und daher ist

[1]) Vgl. 4.3. Bemerkung 2.

$$(a+b)+c=\left(\frac{m}{n}+\frac{m'}{n}\right)+\frac{m''}{n}=\frac{m+m'}{n}+\frac{m''}{n}$$
$$=\frac{(m+m')+m''}{n}=\frac{m+(m'+m'')}{n}=\frac{m}{n}+\frac{m'+m''}{n}$$
$$=\frac{m}{n}+\left(\frac{m'}{n}+\frac{m''}{n}\right)=a+(b+c).$$

$(A2_1)$. $a+0=\frac{m}{n}+\frac{0}{n}=\frac{m+0}{n}=\frac{m}{n}=a$.

(A3). Die Addition natürlicher Zahlen ist kommutativ, woraus

$$a+b=\frac{m}{n}+\frac{m'}{n}=\frac{m+m'}{n}=\frac{m'+m}{n}=\frac{m'}{n}+\frac{m}{n}=b+a$$

folgt.

Zwischen der Anordnung und der Addition gebrochener Zahlen besteht ein Zusammenhang, den wir durch den folgenden Satz beschreiben.

Satz 2 (Monotonie der Addition bezüglich der Ordnung).
(O2) $\bigwedge_{a,b,c\in\mathbf{Q}_+}$ $(a<b\Leftrightarrow a+c<b+c)$;
(O2') $\bigwedge_{a,b,c\in\mathbf{Q}_+}$ $(a\leqq b\Leftrightarrow a+c\leqq b+c)$.

Beweis. Benutzen wir gleichnamige Brüche zur Darstellung der Zahlen a, b, c, so folgen (O2) und (O2') unmittelbar aus den entsprechenden Gesetzen in $\mathbf{N}$.

Als Folgerung aus Satz 2 erhalten wir die wichtige Regel über die Addition gleichgerichteter Ungleichungen:

(6) $\quad a\leqq b\wedge c\leqq d\Rightarrow a+c\leqq b+d.$

Beweis. Indem wir zweimal das Monotoniegesetz (O2') benutzen, erhalten wir $a+c\leqq b+c$ und $c+b\leqq d+b$. Kommutativität der Addition und Transitivität der Ordnung liefern dann $a+c\leqq b+d$. Steht zwischen a, b oder c, d in (6) statt „$\leqq$" das Zeichen „$<$", so kann in $a+c\leqq b+d$ das Zeichen „$\leqq$" durch das Zeichen „$<$" ersetzt werden (Übungsaufgabe).

Wir wollen uns nun den Gleichungen der Form $a+x=b$ zuwenden. Es gilt

(7) $\quad a+x=a+y\Rightarrow x=y.$

Aus $x\neq y$ folgt nämlich $x<y$ oder $y<x$ und daher $a+x\neq a+y$ nach Satz 2. Eine Gleichung der Form $a+x=b$ kann also höchstens eine Lösung besitzen.

Satz 3 (Lösbarkeit der Gleichung $a+x=b$ in $\mathbf{Q}_+$). *Sind a, b gebrochene Zahlen, so existiert genau dann eine (eindeutig bestimmte) Lösung der Gleichung $a+x=b$ in $\mathbf{Q}_+$, wenn $a\leqq b$ gilt.*

Beweis. Wegen $x \geqq 0$ für $x \in \mathbb{Q}_+$ gilt nach (6) stets $a + x \geqq a$. Eine Lösung der Gleichung $a + x = b$ kann also nur im Fall $a \leqq b$ existieren. Bei Verwendung gleichnamiger Brüche (m, n), (m', n) als Darstellungen für a bzw. b erhalten wir für $a \leqq b$ die Beziehung $m \leqq m'$. Es existiert dann eine natürliche Zahl k mit $m + k = m'$, und die gebrochene Zahl $\frac{k}{n}$ ist Lösung der Gleichung $a + x = b$.

Die für $a \leqq b$ eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $a + x = b$ bezeichnen wir mit $b - a$ und nennen sie die *Differenz* der Zahlen b und a. Es gilt also

(8) $\qquad a + c = b \Leftrightarrow c = b - a.$

Es sei noch ausdrücklich betont, daß das Minuszeichen hier nur zur Bezeichnung der gebrochenen Zahl $b - a$ benutzt wird. (Bis jetzt haben Bildungen wie $-a$, $a + (-b)$ noch keinen Sinn.)

Wann sind zwei Differenzen $a - b$, $a' - b'$ gleich? Aus $b + (a - b) = a$ und $a' = b' + (a' - b')$ erhalten wir

$$b + (a - b) + a' = a + b' + (a' - b')$$

und unter Verwendung von (7)

(9) $\qquad a - b = a' - b' \Leftrightarrow a + b' = b + a'.$

Die Bildung der Differenz von Bruchdarstellungen erfolgt nach der Regel

(10) $\qquad \frac{m}{n} - \frac{l}{k} = \frac{mk - nl}{nk} \qquad \left(\frac{m}{n} \geqq \frac{l}{k}\right).$

Es gilt nämlich

$$\frac{l}{k} + \frac{mk - nl}{nk} = \frac{nl + (mk - nl)}{nk} = \frac{mk}{nk} = \frac{m}{n}.$$

Ferner gelten

(11) $\qquad a - b \leqq c - d \Leftrightarrow a + d \leqq c + b$ (Vergleich von Differenzen)

und

(12) $\qquad (a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$ (Addition von Differenzen).

Die Regel (11) ergibt sich aus dem Monotoniegesetz der Addition, indem wir von der Ungleichung $a - b \leqq c - d$ zur Ungleichung

$$(a - b) + (n + d) \leqq (c - d) + (b + d)$$

übergehen. Die Regel (12) erhalten wir durch den Nachweis der Gültigkeit der Beziehung $(b + d) + ((a - b) + (c - d)) = a + c$ (Übungsaufgabe).

4.5. Multiplikation gebrochener Zahlen

Die Multiplikation gebrochener Zahlen soll nun so definiert werden, daß $\frac{m}{1} \cdot \frac{k}{l}$ das m-fache $\frac{k}{l} + \cdots + \frac{k}{l}$ (m Summanden) von $\frac{k}{l}$, hingegen $\frac{1}{n} \cdot \frac{k}{l}$ den n-ten Teil von $\frac{k}{l}$, d. h. eine gebrochene Zahl r mit $\frac{n}{1} \cdot r = \frac{k}{l}$, ergibt. Unter Berücksichtigung der Definition der Addition gebrochener Zahlen bedeutet das

$$\frac{m}{1} \cdot \frac{k}{l} = \frac{mk}{l}, \qquad \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{l} = \frac{k}{nl}.$$

Fordern wir für die Multiplikation noch das Assoziativgesetz, so ergibt sich für das Produkt beliebiger gebrochener Zahlen

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l} = \left(\frac{m}{1} \cdot \frac{1}{n}\right) \frac{k}{l} = \frac{m}{1}\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{k}{l}\right) = \frac{m}{1} \cdot \frac{k}{nl} = \frac{mk}{nl}.$$

Die genannten Wünsche führen damit zur

Definition (Multiplikation gebrochener Zahlen)[1]).

$$(1) \qquad \frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l} := \frac{mk}{nl}.$$

Zur Rechtfertigung dieser Definition ist wieder der Nachweis der Unabhängigkeit von den Repräsentanten erforderlich (Übungsaufgabe).

Bevor wir nun Eigenschaften der Multiplikation gebrochener Zahlen nennen, wollen wir noch bemerken, daß alle Brüche der Form (n, n) quotientengleich sind und die zugehörige Äquivalenzklasse mit 1 bezeichnet[1]) wird,

$$(2) \qquad 1 := \{(n,n) : n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Satz 1 (Eigenschaften der Multiplikation in $\mathbb{Q}_+$).[2])

(M0) $\bigwedge_{a,b} (a \in \mathbb{Q}_+ \wedge b \in \mathbb{Q}_+ = a \cdot b \in \mathbb{Q}_+)$,

(M1) $\bigwedge_{a,b,c \in \mathbb{Q}_+} (a \cdot b) \cdot c \Rightarrow a \cdot (b \cdot c)$ (*Assoziativgesetz*),

(M2$_1$) $\bigwedge_{a \in \mathbb{Q}_+} a \cdot 1 = a$ (*Eigenschaft des Einselementes*),

[1]) Vgl. 4.3. Bemerkung 2.

[2]) Das Zeichen „·" für die Multiplikation wird vielfach weggelassen, wenn dadurch kein Mißverständnis entstehen kann. Bei Definitionen sowie bei der Formulierung von Multiplikationsgesetzen wollen wir aber der Deutlichkeit halber stets das Operationszeichen setzen.

$(M2_2)$ $\bigwedge_{a\in\mathbb{Q}_+} (a \neq 0 \Rightarrow \bigvee_{b\in\mathbb{Q}_+} a \cdot b = 1)$ (*Existenz inverser Elemente*),

(M3) $\bigwedge_{a,b\in\mathbb{Q}_+} a \cdot b = b \cdot a$ (*Kommutativgesetz*).

Beweis. Die Eigenschaften (M0), (M1), $(M2_1)$ und (M3) ergeben sich unmittelbar aus der Definition des Produktes gebrochener Zahlen sowie aus entsprechenden Gesetzen für das Rechnen mit natürlichen Zahlen. Beim Beweis der Eigenschaft $(M2_2)$ gehen wir von einer beliebigen von Null verschiedenen gebrochenen Zahl $a = \frac{m}{n}$ aus. Dann ist $m \neq 0$ und daher $b = \frac{n}{m}$ eine gebrochene Zahl. Nach der Definition der gebrochenen Zahl 1 gilt $a \cdot b = \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = \frac{mn}{nm} = 1$. Damit ist auch $(M2_2)$ bewiesen.

Das Strukturgesetz $(M2_2)$ besagt, daß für jede von Null verschiedene gebrochene Zahl a die Gleichung $a \cdot x = 1$ wenigstens eine Lösung besitzt. Neben dieser Existenzaussage gilt auch die folgende Eindeutigkeitsaussage: Die Gleichung $a \cdot x = 1$ besitzt höchstens eine Lösung, d. h.

(3) $a \cdot b_1 = 1 \wedge a \cdot b_2 = 1 \Rightarrow b_1 = b_2$.

Beweis. $b_2 = b_2 \cdot 1 = b_2 \cdot (a \cdot b_1) = (b_2 \cdot a) \cdot b_1 = b_1 \cdot (a \cdot b_2) = b_1 \cdot 1 = b_1$.
(Bei diesem Beweis haben wir nur die Strukturgesetze (M1), $(M2_1)$ und (M3) benutzt.)

Nach $(M2_2)$ und (3) besitzt die Gleichung $a \cdot x = 1$ für $a \neq 0$ genau eine Lösung. Diese eindeutige Lösung wird mit a^{-1} bezeichnet und die zu a *inverse* (auch *reziproke*) gebrochene Zahl genannt:

(4) $b = a^{-1} :\Leftrightarrow a \cdot b = 1$.

Die beiden folgenden Sätze zeigen, daß Multiplikation und Addition sowie Multiplikation und Anordnung im Bereich der gebrochenen Zahlen miteinander zusammenhängen.

Satz 2 (Distributivität der Multiplikation bezüglich der Addition).

(M4) $\bigwedge_{a,b,c\in\mathbb{Q}_+} a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Beweis. Mit $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{m'}{n'}$, $c = \frac{m''}{n''}$ erhalten wir

$$a \cdot (b + c) = \frac{m}{n} \cdot \left(\frac{m'}{n'} + \frac{m''}{n''}\right) = \frac{m}{n} \cdot \frac{m'n'' + m''n'}{n'n''}$$

$$= \frac{m(m'n'' + m''n')}{nn'n''} = \frac{mm'n'' + mm''n'}{nn'n''}$$

$$= \frac{mm'n''}{nn'n''} + \frac{mm''n'}{nn'n''}$$

$$= \frac{mm'}{nn'} + \frac{mm''}{nn''} := a \cdot b + a \cdot c.$$

Satz 3 (Monotonie der Multiplikation bezüglich der Ordnung).

(O3) $\bigwedge_{a,b,c \in \mathbf{Q}_+} (a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c),$

(O3′) $\bigwedge_{a,b,c \in \mathbf{Q}_+} (a \leqq b \Rightarrow a \cdot c \leqq b \cdot c).$

Beweis. Bei Verwendung gleichnamiger Brüche zur Darstellung von a und b ergeben sich (O3) und (O3′) unmittelbar aus den Monotoniegesetzen in $\mathbf{N}$.

Analog zur Regel über die Addition gleichgerichteter Ungleichungen (vgl. 4.4. (6)) erhalten wir für die Multiplikation gleichgerichteter Ungleichungen in $\mathbf{Q}_+$:

(5) $a \leqq b \wedge c \leqq d \Rightarrow a \cdot c \leqq b \cdot d.$

Der Beweis hierfür verläuft in gleicher Weise wie der von (6) aus 4.4. (Übungsaufgabe).

Wir wollen jetzt die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von Gleichungen der Form $a \cdot x = b$ untersuchen. Im Unterschied zur Gleichung $a + x = b$ wird sich die eindeutige Lösbarkeit der Gleichung $a \cdot x = b$ für $a \neq 0$ stets ergeben. Wir betrachten zunächst den Fall $a = 0$. Unter Verwendung des Distributivgesetzes (M4) erhalten wir

$$0 \cdot x + 0 = 0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x.$$

Wegen (7) aus 4.4. folgt daraus

(6) $\bigwedge_{x \in \mathbf{Q}_+} 0 \cdot x = 0.$

Für $a = 0$ besitzt die Gleichung $a \cdot x = b$ also nur dann Lösungen, wenn b ebenfalls 0 ist. In diesem Fall ist jede gebrochene Zahl Lösung der Gleichung $a \cdot x = b$. Für $a \neq 0$ erhalten wir den zu (7) aus 4.4. analogen Satz

(7) $ax = ay \wedge a \neq 0 \Rightarrow x = y.$

Beweis. Aus $ax = ay$ folgt $a^{-1}ax = a^{-1}ay$ und daher $x = y$. (Dieser Beweis unterscheidet sich von dem der Aussage (7) aus 4.4. Während dort die Anordnung der gebrochenen Zahlen herangezogen werden mußte, erhalten wir hier das analoge Ergebnis unmittelbar aus ($M2_2$).)

Als einfache Folgerung (Übungsaufgabe) aus (6) und (7) ergibt sich

(8) $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0.$

Satz 4 (Lösbarkeit der Gleichung $a \cdot x = b$ in $\mathbf{Q}_+$). *Sind a, b gebrochene Zahlen und ist $a \neq 0$, so besitzt die Gleichung $a \cdot x = b$ genau eine Lösung in $\mathbf{Q}_+$.*

Beweis. Wegen (7) brauchen wir nur noch die Existenz einer Lösung der Gleichung $a \cdot x = b$ für $a \neq 0$ nachzuweisen. Es gilt $a(a^{-1} \cdot b) = (a \cdot a^{-1})\, b = 1 \cdot b = b$, und daher ist $a^{-1} \cdot b$ für $a \neq 0$ eine Lösung der Gleichung $a \cdot x = b$.

Die für $a \neq 0$ eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $a \cdot x = b$ bezeichnen wir mit $b{:}a$ und nennen sie den *Quotienten* der gebrochenen Zahlen b und a. Der Beweis von Satz 4 liefert

(9) $\qquad b{:}a = a^{-1} \cdot b.$

In 4.7. werden wir auf das Rechnen mit Quotienten ausführlich eingehen. Zuvor wollen wir jedoch den Bereich der natürlichen Zahlen in den Bereich der gebrochenen Zahlen einbetten und damit $\mathbf{Q}_+$ als eine Erweiterung von $\mathbf{N}$ ansehen.

4.6. Die natürlichen Zahlen als gebrochene Zahlen

Eine gebrochene Zahl der Form $\frac{m}{1}$ betrachten wir als Maßzahl für die durch m-maliges Hintereinanderlegen der Maßeinheit entstehende Länge, das m-fache der Maßeinheit. Dieser Meßgröße können wir allerdings einfacher die natürliche Zahl m selbst als Maßzahl zuordnen. Bei der Auffassung der gebrochenen Zahlen als Maßzahlen ist es daher vernünftig, die natürlichen Zahlen mit den gebrochenen Zahlen der Form $\frac{m}{1}$ zu identifizieren. Eine derartige Identifizierung ist nun auch unter Berücksichtigung der Anordnung, der Addition und der Multiplikation in $\mathbf{N}$ bzw. $\mathbf{Q}_+$ gerechtfertigt; denn das Rechnen mit gebrochenen Zahlen der Form $\frac{m}{1}$ erfolgt in gleicher Weise wie das Rechnen mit natürlichen Zahlen. Eine genaue Formulierung dieses Sachverhaltes beinhaltet der folgende

Satz 1 (isomorphe Einbettung von $\mathbf{N}$ in $\mathbf{Q}_+$). *Durch die Zuordnung* $f(m) = \frac{m}{1}$ *für* $m \in \mathbf{N}$ *wird ein Isomorphismus* f *von* $\mathbf{N}$ *auf eine Teilmenge von* $\mathbf{Q}_+$ *definiert:* f *ist eine eineindeutige Abbildung von* $\mathbf{N}$ *in* $\mathbf{Q}_+$ *mit*

a) $\qquad m < n \Leftrightarrow f(m) < f(n),$

b) $\qquad f(m + n) = f(m) + f(n),$

c) $\qquad f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n).$

Beweis. Die Abbildung f ist eineindeutig, da $\frac{m}{1}$ und $\frac{n}{1}$ genau dann die gleiche gebrochene Zahl beschreiben, wenn $m = n$ gilt. Die Aussagen a), b), c) ergeben sich unmittelbar aus der Definition der Anordnung, Addition bzw. Multiplikation gebrochener Zahlen.

Im folgenden wollen wir die natürliche Zahl m von der gebrochenen Zahl $\frac{m}{1}$ nicht mehr unterscheiden. Die Menge der natürlichen Zahlen wird damit eine Teilmenge der Menge der gebrochenen Zahlen, wobei sich die in N definierte Anordnung, Addition und Multiplikation jeweils als Einschränkung der für gebrochene Zahlen definierten Anordnung, Addition bzw. Multiplikation ergibt (vgl. auch Bemerkung 2 in 4.3.). Insbesondere brauchen wir nicht mehr die gebrochene Zahl 1 von der natürlichen Zahl 1 sowie die gebrochene Zahl 0 von der natürlichen Zahl 0 begrifflich zu unterscheiden.

Auch nach dieser Einbettung der natürlichen Zahlen in den Bereich der gebrochenen Zahlen soll $m|n$ („m teilt n") bedeuten, daß eine *natürliche* Zahl k mit $mk = n$ existiert.

Für die Summe bzw. das Produkt einer natürlichen Zahl m und einer beliebigen gebrochenen Zahl $\frac{k}{l}$ erhalten wir (Übungsaufgabe)

$$(1) \qquad m + \frac{k}{l} = \frac{ml + k}{l};$$

$$(2) \qquad m \cdot \frac{k}{l} = \frac{mk}{l}.$$

Der folgende für viele Betrachtungen grundlegende Satz sagt etwas über die Verteilung der natürlichen Zahlen im Bereich der gebrochenen Zahlen aus.

Satz 2 (Archimedisches Axiom). *Zu jeder gebrochenen Zahl a existiert eine (von a abhängige) natürliche Zahl n mit $a < n$:*

$$(3) \qquad \bigwedge_{a \in \mathsf{Q}_+} \bigvee_{n \in \mathsf{N}} a < n.$$

Beweis. Gilt $a = \frac{k}{l}$, so besitzt $n + k = 1$ (im Fall $l \geqq 2$, $k \geqq 1$ kann sogar $n = k$ gesetzt werden) die im Satz genannte Eigenschaft.

Dem Satz 2 gleichwertig ist die folgende Aussage:

$$(4) \qquad \bigwedge_{a, b \in \mathsf{Q}_+} (b > 0 \Rightarrow \bigvee_{n \in \mathsf{N}} n \cdot b > a).$$

4.7. Rechnen mit Quotienten (Bruchrechnung); Potenzen

Wir werden in diesem Abschnitt Regeln zusammenstellen und begründen, auf denen die sogenannte Bruchrechnung basiert. In 4.5. haben wir gezeigt, daß für gebrochene Zahlen a, b jede Gleichung der Form $a \cdot x = b$ für $a \neq 0$ genau eine Lösung in $\mathbb{Q}_+$ besitzt. Die gebrochene Zahl $\frac{m}{n}$ ist wegen $n \cdot \frac{m}{n} = \frac{n \cdot m}{n} = \frac{m}{1} = m$ Lösung der Gleichung $nx = m$ für $n \neq 0$. Für natürliche Zahlen m, n mit $n \neq 0$ gilt also $\frac{m}{n} = m:n$. In Übereinstimmung hiermit werden wir auch einen beliebigen Quotienten $b:a$ $(a \neq 0)$ in der Form $\frac{b}{a}$ schreiben, also

$$(1) \qquad \frac{b}{a} := b:a \qquad (a \neq 0)$$

setzen. Das Ergebnis (9) aus 4.5. besagt dann, daß $a^{-1} \cdot b = \frac{b}{a}$ sowie $a^{-1} = \frac{1}{a}$ ist und daher gilt

$$(2) \qquad \frac{b}{a} = \frac{1}{a} \cdot b.$$

Den Übergang von gebrochenen Zahlen a, b $(a \neq 0)$ zum Quotienten $b:a$ können wir als eine zweistellige Operation ansehen. Obwohl wir für die Bildung von $b:a$ nur $a \neq 0$ zu fordern brauchen, wollen wir, um in Übereinstimmung mit der in Mfl Bd. 1 gegebenen Definition 2.6. (2) einer Operation zu bleiben, dabei auch $b \neq 0$ fordern Es handelt sich dann nämlich um eine Operation in der Menge $\mathbb{Q}_+^*$ der von 0 verschiedenen gebrochenen Zahlen. Diese Operation nennen wir *Division*.

Jede gebrochene Zahl a ist offensichtlich die Lösung der Gleichung $bx = ba (= ab)$, woraus $a = (ab):b$ folgt. Ferner gilt auch $(a:b) \cdot b = a$. Die Gleichungen $a = (ab):b = (a:b) \cdot b$ geben Anlaß zu der Sprechweise: Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation. Im Unterschied zur Multiplikation ist die Division weder kommutativ noch assoziativ.

Eigenschaften der Division kommen in den nachfolgenden Regeln für den Umgang mit Quotienten zum Ausdruck.

Es seien a, b, c, d beliebige, soweit erforderlich, von 0 verschiedene gebrochene Zahlen. Dann gelten die Beziehungen:

$$(3) \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \qquad \text{(Gleichheit von Quotienten);}$$

$$(4) \qquad \frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \qquad \text{(Kürzen, Erweitern);}$$

(5) $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$ (Vergleich von Quotienten);

(6) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ (Addition von Quotienten);

(7) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$ für $\frac{a}{b} \geqq \frac{c}{d}$ (Subtraktion von Quotienten);

(8) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ (Multiplikation von Quotienten);

(9) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ (Division von Quotienten bzw. Beseitigung eines „Doppelbruches").

Sind a, b, c, d natürliche Zahlen, so gehen die Regeln (3) bis (8) in bereits bekannte Regeln über, während (9) die Umrechnung eines Quotienten gebrochener Zahlen auf die Bruchdarstellung $\frac{m}{n}$ beschreibt. Unter Verwendung von (9) können insbesondere auch Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten von Quotienten gebrochener Zahlen auf die Form $\frac{m}{n}$ umgerechnet werden. Solche Umwandlungen bilden den Hauptinhalt der sogenannten Bruchrechnung.

Wir wollen uns auf die Beweise der Regeln (5) und (6) beschränken und die Beweise der übrigen Regeln dem Leser als Übungsaufgaben stellen.

Beweis von (5). Nach dem Monotoniegesetz der Multiplikation gilt

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot (bd) < \frac{c}{d} \cdot (bd)$$

und daher wegen $\frac{a}{b} \cdot (bd) = \left(\frac{a}{b} \cdot b\right) d = ad$ bzw. $\frac{c}{d} \cdot (bd) = bc$ schließlich

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow ad < bc.$$

Entsprechend ergibt sich

$$ad < bc \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d},$$

wenn wir nach dem Monotoniegesetz der Multiplikation von $ad < bc$ zur Ungleichung $(ad) \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d}\right) < (bc) \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d}\right)$ übergehen und (2) anwenden.

Beweis von (6). Der Quotient $\frac{ad + bc}{bd}$ ist die eindeutige Lösung der Gleichung $(bd)\, x = ad + bc$. Wir zeigen, daß auch $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ diese Gleichung löst:

$$(bd) \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = d\left(b \cdot \frac{a}{b}\right) + b\left(d \cdot \frac{c}{d}\right) = da + bc = ad + bc.$$

Für das Rechnen mit Ungleichungen beweisen wir:

(10) $$0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}.$$

Aus $0 < a < b$ ergibt sich nach dem Monotoniegesetz der Multiplikation

$$0 < a \cdot \frac{1}{ab} < b \cdot \frac{1}{ab}$$

und daraus

$$0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}.$$

Mit Hilfe der Regel (10) gewinnen wir die folgende Fassung des Archimedischen Axioms (vgl. 4.6. Satz 2):

(11) $$\left(a \in \mathbf{Q}_+ \wedge \bigwedge_{n \in \mathbf{N}^*} a < \frac{1}{n}\right) \Rightarrow a = 0.$$

Aus $a > 0$ und $\bigwedge_{n \in \mathbf{N}^*} a < \frac{1}{n}$ folgt wegen (10) nämlich $\bigwedge_{n \in \mathbf{N}^*} n < \frac{1}{a}$ und damit ein Widerspruch zum Archimedischen Axiom.

Wir wollen jetzt noch Potenzen der Form a^n ($a \in \mathbf{Q}_+$, $n \in \mathbf{N}$) betrachten, die wie im Fall $a \in \mathbf{N}$ durch

(12) $$a^0 = 1, \quad a^{n+1} = a^n \cdot a$$

induktiv erklärt werden.

Es gelten dann ebenfalls die Potenzgesetze (vgl. MfL Bd. 1, 3.5.):

(13) $$a^{n+m} = a^n a^m;$$

(14) $$(a^n)^m = a^{nm};$$

(15) $$(ab)^n = a^n b^n$$

sowie die Monotoniegesetze

(16) $a < b \wedge n \neq 0 \Rightarrow a^n < b^n$;

(17) $a \leqq b \Rightarrow a^n \leqq b^n$;

(18) $n < m \wedge a > 1 \Rightarrow a^n < a^m$;

(19) $n \leqq m \wedge a \geqq 1 \Rightarrow a^n \leqq a^m$.

Die Beweise seien dem Leser als Übungsaufgaben überlassen.

4.8. Darstellung gebrochener Zahlen durch periodische Dezimalbrüche

Bisher haben wir für die Darstellung (Bezeichnung) gebrochener Zahlen Brüche (m, n) mit $m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ benutzt und die Arithmetik in $\mathbb{Q}_+$ über die Bruchdarstellung der gebrochenen Zahlen aufgebaut. Die Bruchdarstellung einer gebrochenen Zahl hat den Vorteil, daß damit jede gebrochene Zahl durch endlich viele Ziffern beschrieben werden kann, wenn wir für Zähler und Nenner eines darstellenden Bruches etwa die Dezimaldarstellung (vgl. MfL Bd. 1, 3.8) benutzen. Ein wesentlicher Nachteil der Bruchdarstellung gebrochener Zahlen besteht allerdings in der Mehrdeutigkeit dieser Darstellung. Zähler und Nenner eines darstellenden Bruches sind durch die zu benennende gebrochene Zahl nicht eindeutig festgelegt. Für den Nachweis der Gleichheit zweier gebrochener Zahlen in der Bruchdarstellung ist ein gewisser Rechenaufwand erforderlich.

Wir wollen jetzt eine der Dezimaldarstellung natürlicher Zahlen analoge Schreibweise für gebrochene Zahlen entwickeln. Dazu werden wir jeder gebrochenen Zahl eine eindeutig bestimmte Ziffernfolge — einen sogenannten *Dezimalbruch* — zuordnen. Die Verwendung von Dezimalbrüchen zur Darstellung gebrochener Zahlen wird einerseits für das praktische Rechnen sehr zweckmäßig sein, andererseits die in 6.2. dargelegte Methode zur Einführung der reellen Zahlen vorbereiten. Zur Gewinnung der Dezimalbruchdarstellung einer gebrochenen Zahl werden wir einen speziellen Meßprozeß erklären und als Ergebnis seiner arithmetischen Beschreibung einen Algorithmus erhalten, durch den zu jeder gebrochenen Zahl eine eindeutig bestimmte Ziffernfolge gebildet werden kann.

Um die Länge einer Meßgröße zu bestimmen, vergleichen wir diese nacheinander mit Größen der Längen $1; \frac{1}{10}; \frac{1}{100}; \ldots$ (bezogen auf die zugrunde gelegte Maßeinheit) und stellen jeweils fest, wie oft die einzelnen Vergleichsgrößen hintereinandergelegt

werden können, ohne die Meßgröße zu übertreffen. Beim Übergang vom Meßschritt mit der Vergleichsgröße $\frac{1}{10^n}$ zum Meßschritt mit der Vergleichsgröße $\frac{1}{10^{n+1}}$ genügt es dabei festzustellen, wie oft die Vergleichsgröße der Länge $\frac{1}{10^{n+1}}$ auf dem Rest abgetragen werden kann, der beim Meßschritt mit der Vergleichsgröße $\frac{1}{10^n}$ übrigblieb. Wir nehmen an, daß die gegebene Meßgröße bezüglich der Maßeinheit kommensurabel ist. Ihre Länge wird dann durch eine gebrochene Zahl $\frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{N}, q \neq 0)$ erfaßt, die wir zur arithmetischen Beschreibung des genannten Meßprozesses schrittweise mit Brüchen mit den Nennern 1, 10, 10^2, ... vergleichen:

1. Schritt:

Auf Grund des Archimedischen Axioms (vgl. 4.6. Satz 2) und des Prinzips der kleinsten Zahl (vgl. MfL Bd. 1, 3.4. (31)) existiert eine natürliche Zahl a_0 mit $a_0 \leqq \frac{p}{q} < a_0 + 1$. Bezeichnen wir die Differenz $\frac{p}{q} - a_0$ mit b_0, so erhalten wir $p = a_0 q + b_0 q$. (Die Zahl a_0 gibt an, wie oft die Vergleichsgröße mit der Länge 1 auf der Meßgröße der Länge $\frac{p}{q}$ abgetragen werden kann; die Zahl b_0 entspricht der Länge des übrigbleibenden Teiles.) Da b_0 kleiner als 1 ist, gilt für die natürliche Zahl $r_1 = b_0 q$ die Beziehung $0 \leqq r_1 < q$, und die zuvor genannte Gleichung geht in $p = a_0 q + r_1$ über. Es handelt sich hier also um die eindeutig bestimmte Darstellung, die aus dem Satz über die Division mit Rest (vgl. MfL Bd. 1, 3.7. (11)) bekannt ist.

Ergebnis nach dem ersten Schritt:

Zu jeder gebrochenen Zahl $\frac{p}{q}$ existiert eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl a_0, so daß

$$p = a_0 q + r_1 \text{ mit } 0 \leqq r_1 < q$$

gilt. Gleichwertig damit ist die Aussage $\frac{p}{q} = a_0 + b_0$ mit $0 \leqq b_0 < 1$ (Abb. 3).

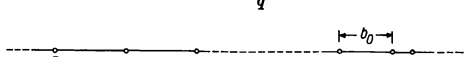


Abb. 3

2. Schritt:

Die Differenz $b_0 = \frac{p}{q} - a_0$ vergleichen wir mit den Vielfachen der Zahl $\frac{1}{10}$. Es

sei nun a_1 die eindeutig bestimmte natürliche Zahl, für die

$$a_1 \cdot \frac{1}{10} \leqq b_0 < (a_1 + 1) \cdot \frac{1}{10}$$

gilt. Die Differenz $b_0 - \frac{a_1}{10}$ bezeichnen wir mit b_1. (Die Zahl a_1 gibt an, wie oft die Vergleichsgröße der Länge $\frac{1}{10}$ auf dem im ersten Schritt übriggebliebenen Teil der Länge b_0 abgetragen werden kann; die Zahl b_1 entspricht der Länge des dabei übriggebliebenen Teiles.) Dann gilt

$$b_0 = \frac{a_1}{10} + b_1 \text{ und } 0 \leqq b_1 < \frac{1}{10}.$$

Daraus folgt

$$10 b_0 q = a_1 q + 10 q b_1 \text{ und } 0 \leqq 10 q b_1 < q.$$

Setzen wir $r_2 = 10 q b_1$ und benutzen wir $r_1 = b_0 q$, so erhalten wir

$$10 r_1 = a_1 q + r_2 \text{ mit } 0 \leqq r_2 < q.$$

Damit ist a_1 der Koeffizient von q bei der Division von $10 r_1$ durch q. Wegen $r_1 < q$ gilt für die natürliche Zahl a_1 außerdem $a_1 \leqq 9$.

Ergebnis nach dem zweiten Schritt:

Für die natürlichen Zahlen a_0, a_1, die sich eindeutig aus

$$p = a_0 q + r_1, \qquad 0 \leqq r_1 < q;$$
$$10 r_1 = a_1 q + r_2, \qquad 0 \leqq r_2 < q$$

ergeben, gilt

$$\frac{p}{q} = a_0 + b_0 = a_0 + \frac{a_1}{10} + b_1 \text{ mit } 0 \leqq b_1 < \frac{1}{10} \text{ und } a_1 \leqq 9.$$

3. Schritt:

Die Differenz $b_1 = b_0 - \frac{a_1}{10}$ vergleichen wir mit den Vielfachen der Zahl $\frac{1}{100}$. Mit a_2 bezeichnen wir die eindeutig bestimmte natürliche Zahl, für die

$$a_2 \cdot \frac{1}{100} \leqq b_1 < (a_2 + 1) \cdot \frac{1}{100}$$

gilt. Die Differenz $b_1 - \frac{a_2}{100}$ bezeichnen wir mit b_2. (Die Zahl a_2 gibt an, wie oft die Vergleichsgröße der Länge $\frac{1}{100}$ auf dem im zweiten Schritt übriggebliebenen Teil der

Länge b_1 abgetragen werden kann; die Zahl b_2 entspricht der Länge des dabei übrigbleibenden Teiles.) Dann gilt

$$b_1 = \frac{a_2}{100} + b_2 \text{ und } 0 \leqq b_2 < \frac{1}{100}.$$

Daraus folgt

$$100qb_1 = a_2q + 100qb_2 \text{ und } 0 \leqq 100qb_2 < q.$$

Setzen wir $r_3 = 100qb_2$ und benutzen $r_2 = 10qb_1$, so erhalten wir

$$10r_2 = a_2q + r_3 \text{ mit } 0 \leqq r_3 < q.$$

Damit ist a_2 der Koeffizient von q bei der Division von $10r_2$ durch q. Wegen $r_2 < q$ gilt für die natürliche Zahl a_2 außerdem $a_2 \leqq 9$.

Ergebnis nach dem dritten Schritt:

Für die natürlichen Zahlen a_0, a_1, a_2, die sich eindeutig aus

$$p = a_0q + r_1, \quad 0 \leqq r_1 < q;$$
$$10r_1 = a_1q + r_2, \quad 0 \leqq r_2 < q;$$
$$10r_2 = a_2q + r_3, \quad 0 \leqq r_3 < q$$

mit $0 \leqq b_2 < \frac{1}{100}$ und $0 \leqq a_i \leqq 9$ für $i = 1, 2$

ergeben, gilt

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{a_1}{10} + b_1 = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + b_2.$$

Die Fortsetzung dieses Verfahrens ergibt den

Satz 1 (Divisionsalgorithmus). *Ist $\frac{p}{q}$ eine gebrochene Zahl und n eine beliebige natürliche Zahl, so gilt für die natürlichen Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$, die sich eindeutig aus*

(1)
$$p = a_0q + r_1, \quad 0 \leqq r_1 < q;$$
$$10r_1 = a_1q + r_2, \quad 0 \leqq r_2 < q;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$10r_n = a_nq + r_{n+1}, \quad 0 \leqq r_{n+1} < q$$

ergeben, die Beziehung

(2)
$$\frac{p}{q} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_\nu}{10^\nu} + b_n$$

mit $0 \leqq b_n < \frac{1}{10^n}$ und $a_i \leqq 0$ für $i = 1, 2, \ldots, n$. Dabei sind b_k und r_{k+1} durch die Gleichung $r_{k+1} = 10^kqb_k$ verknüpft ($k = 0, \ldots, n$).

Umgekehrt folgt aus einer Darstellung der Zahl $\frac{p}{q}$ *in der Form*

$$\frac{p}{q} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_\nu'}{10^\nu} + b_n',$$

wobei a_i' *natürliche Zahlen mit* $0 \leqq a_i' \leqq 9$ *für* $i = 1, 2, \ldots, n$ *sind und* $0 \leqq b_n' < \frac{1}{10^n}$ *gilt,* $a_i' = a_i$ *für* $i = 0, 1, \ldots, n$.

Beweis. Es braucht nur noch der letzte Teil des Satzes — die Eindeutigkeit der Darstellung (2) — bewiesen zu werden. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion.

Für $n = 0$ ergibt sich $\frac{p}{q} = a_0' + b_0'$ mit $0 \leqq b_0' < 1$. Daraus folgt $p = a_0'q + b_0'q$. Wegen $0 \leqq b_0'q < q$ gilt daher $a_0' = a_0$. Es gelte die Eindeutigkeit der Darstellung für $n = k$. Wir zeigen, daß daraus die Eindeutigkeit der Darstellung für $n = k + 1$ folgt.

Es sei

$$\frac{p}{q} = a_0' + \frac{a_1'}{10} + \cdots + \frac{a_k'}{10^k} + \frac{a'_{k+1}}{10^{k+1}} + b'_{k+1}.$$

Aus $a'_{k+1} \leqq 9$ und $b'_{k+1} < \frac{1}{10^{k+1}}$ ergibt sich

$$\frac{a'_{k+1}}{10^{k+1}} + b'_{k+1} < \frac{9}{10^{k+1}} + \frac{1}{10^{k+1}} = \frac{1}{10^k}.$$

Indem wir $\frac{a'_{k+1}}{10^{k+1}} + b'_{k+1} = b_k'$ setzen, erhalten wir auf Grund der Induktionsvoraussetzung $a_0' = a_0, \ldots, a_n' = a_k$ und damit

$$\frac{p}{q} - \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_k}{10^k}\right) = \frac{a_{k+1}}{10^{k+1}} + b_{k+1} = \frac{a'_{k+1}}{10^{k+1}} + b'_{k+1}.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a_{k+1} \geqq a'_{k+1}$. Dann ist

$$0 \leqq (a_{k+1} - a'_{k+1}) \frac{1}{10^{k+1}} = b'_{k+1} - b_{k+1} < \frac{1}{10^{k+1}}.$$

Das ist aber nur für $a_{k+1} = a'_{k+1}$ möglich. Damit ist der Satz bewiesen.

Durch den im Satz 1 erklärten Divisionsalgorithmus (1) kann zu einer gegebenen Zahl $\frac{p}{q}$ eine Folge natürlicher Zahlen $a_0, a_1, \ldots$ schrittweise berechnet werden. Aus der

im Satz 1 dargelegten Eindeutigkeit der Darstellung (2) schließen wir, daß die Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ nicht von der gewählten Bruchdarstellung der gebrochenen Zahl abhängt. Der Divisionsalgorithmus ordnet daher jeder gebrochenen Zahl eindeutig eine Folge aus natürlichen Zahlen zu. Die dadurch definierte Funktion DA ist sogar eine eineindeutige Abbildung von der Menge $\mathbf{Q}_+$ in die Menge der Folgen aus natürlichen Zahlen. Für $a, a' \in \mathbf{Q}_+$, $a \geqq a'$ und $DA(a) = DA(a')$ folgt nämlich aus (2) für jedes $n \in \mathbf{N}$ die Ungleichung $a - a' < \frac{1}{10^n}$ und daher nach dem Archimedischen Axiom (vgl. 4.7. (11)) $a = a'$. Von einer Folge $(a_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}}$, die als Bild bei dieser Funktion auftritt, wissen wir bereits, daß a_0 eine beliebige natürliche Zahl sein kann, während alle übrigen Folgenglieder a_i die Bedingung $0 \leqq a_i \leqq 9$ erfüllen. Das veranlaßt uns zu folgender

Definition 1. Unter einem *Dezimalbruch* verstehen wir eine Folge $(a_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}}$ aus natürlichen Zahlen mit $a_\nu \leqq 9$ für alle $\nu \geqq 1$.

Nach dieser Definition sind die Dezimalbrüche Objekte begrifflicher Natur. Das in 3.8. (vgl. MfL, Bd. 1) begründete Dezimalsystem zur Bezeichnung der natürlichen Zahlen wollen wir nun zu einer zweckmäßigen Bezeichnung der Dezimalbrüche benutzen. Zu diesem Zweck bilden wir aus den Dezimaldarstellungen der Folgenglieder eines Dezimalbruches $(a_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}}$ eine Zeichenreihe (ein „unendliches Wort"), indem wir die Dezimaldarstellungen der Zahlen a_ν nebeneinandersetzen und den durch a_0 bestimmten Teil durch ein Komma vom restlichen Teil dieser Zeichenreihe abtrennen. Aus $a_0 \triangleq_{10} \boldsymbol{b}_m \boldsymbol{b}_{m-1} \ldots \boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{b}_0$, $a_1 \triangleq_{10} \boldsymbol{a}_1$, $a_2 \triangleq_{10} \boldsymbol{a}_2, \ldots$ ergibt sich dann für den Dezimalbruch $(a_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}}$ die Bezeichnung $\boldsymbol{b}_m \boldsymbol{b}_{m-1} \ldots \boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2 \ldots$. Im folgenden werden wir $b_m b_{m-1} \ldots b_1 b_0$, $a_1 a_2 \ldots$ oder auch $a_0, a_1 a_2, \ldots$ statt $\boldsymbol{b}_m \boldsymbol{b}_{m-1} \ldots \boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2 \ldots$ schreiben. Durch $a_0, a_1 a_2 \ldots$ (aufzufassen als Zeichenreihe aus Ziffern $0, \ldots, 9$) wird damit der Dezimalbruch $(a_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}}$ bezeichnet.

Mit $\tilde{\mathbf{R}}_+$ bezeichnen wir die Menge aller Dezimalbrüche. Dann ist DA eine eineindeutige Abbildung von $\mathbf{Q}_+$ in die Menge $\tilde{\mathbf{R}}_+$. Wir wollen die Funktionswerte von DA, d. h. die Dezimalbrüche, die den gebrochenen Zahlen durch den Divisionsalgorithmus zugeordnet werden, genauer beschreiben. Dazu führen wir den Begriff des periodischen Dezimalbruches ein:

Definition 2. Ein Dezimalbruch $a_0, a_1 a_2 \ldots$ heißt *periodisch*, wenn natürliche Zahlen l und k ($k \geqq l$) existieren, so daß $a_\nu = a_{\nu+k}$ für alle $\nu > 1$. gilt. Für $a_0, a_1 a_2 \ldots$ schreiben wir dann auch $a_0, a_1 a_2 \ldots a_l \overline{a_{l+1} \ldots a_{l+k}}$ und nennen $(a_{l+1}, \ldots, a_{l+k})$ eine *Periode* des Dezimalbruches.

Mit $\tilde{\mathbf{R}}_+^{(p)}$ bezeichnen wir die Menge der periodischen Dezimalbrüche. Im Fall $k = 1$ nnd $a_{l+1} = 0$ schreiben wir statt $a_0, a_1 a_2 \ldots a_l \overline{0}$ auch $a_0, a_1 a_2 \ldots a_l$. Solche Dezimalbrüche nennen wir *endlich* und bezeichnen mit $\tilde{\mathbf{R}}_+^{(e)}$ die Menge aller endlichen Dezimalbrüche.

Die Menge der Bilder der Abbildung DA wird durch die beiden folgenden Sätze charakterisiert.

Satz 2. *Für jede gebrochene Zahl a ist $DA(a)$ ein Dezimalbruch ohne Neunerperiode, d. h., es gibt keinen Folgenindex l, so daß $a_\nu = 9$ für alle $\nu > l$ gilt.*

Beweis. In (1) erhalten wir aus $10r_\nu = 9q + r_{\nu+1}$ und $0 \leqq r_\nu < q$ unmittelbar $r_{\nu+1} < r_\nu$; denn aus $r_{\nu+1} \geqq r_\nu$ folgt

$$9q + r_{\nu+1} \geqq 9q + r_\nu > 9r_\nu + r_\nu = 10r_\nu.$$

Würde also ein l mit der im Satz genannten Eigenschaft existieren, so wäre $r_{l+1} > r_{l+2} > r_{l+3} > \cdots$. Da die Reste r_ν natürliche Zahlen sind, ist das nicht möglich.

Für die weiteren Betrachtungen werden also die Dezimalbrüche mit Neunerperiode ohne Bedeutung sein. Wir bezeichnen mit R_+ die Menge aller Dezimalbrüche ohne Neunerperiode und mit $\mathsf{R}_+^{(p)}$ die Menge aller periodischen Dezimalbrüche ohne Neunerperiode.

Satz 3. *Die Abbildung DA ist eine eineindeutige Abbildung von Q_+ auf die Menge $\mathsf{R}_+^{(p)}$.*

Beweis. Es sei $a = \frac{p}{q} \in \mathsf{Q}_+$ und $DA(a) = a_0,a_1a_2\ldots$. Wir zeigen, daß $a_0,a_1a_2\ldots$ periodisch ist. Die beim Divisionsalgorithmus auftretenden Reste r_i sind natürliche Zahlen kleiner als q. Nach spätestens q Schritten muß sich daher ein Rest wiederholen. Aus einer Gleichung $r_{l+1} = r_{l+k+1}$ $(k \geqq 1)$ folgt nach dem Divisionsalgorithmus $a_{l+1} = a_{l+k+1}$, $a_{l+2} = a_{l+2+k}$, ... Für jedes $\nu > 1$ gilt also $a_\nu = a_{\nu+k}$.

Wir zeigen, daß $DA\colon \mathsf{Q}_+ \to \mathsf{R}_+^{(p)}$ surjektiv ist. Für die gebrochene Zahl $a = \sum_{\lambda=0}^{l} \frac{a_\lambda}{10^\lambda}$ $(a_\lambda \in \mathsf{N}, a_{\lambda+1} \leqq 9)$ erhalten wir nach Satz 1 bei Anwendung des Divisionsalgorithmus den Dezimalbruch $a_0,a_1a_2\ldots a_l$. Damit besitzt jeder Dezimalbruch aus $\mathsf{R}_+^{(e)}$ ein Urbild. Als nächstes zeigen wir, daß

$$a = \frac{\sum_{\varkappa=1}^{k} a_\varkappa \cdot 10^{k-\varkappa}}{10^k - 1} = \frac{\boldsymbol{a_1a_2\ldots a_k}^{1)}}{99\ldots9}$$

Urbild von $0,\overline{a_1a_2\ldots a_k}$ ist.

Die Anwendung des Divisionsalgorithmus auf a ergibt

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a_1a_2\ldots a_k} = 0(10^k - 1) + \boldsymbol{a_1a_2\ldots a_k},\\
&\boldsymbol{a_1a_2\ldots a_k}0 = a_1(10^k - 1) + \boldsymbol{a_2\ldots a_k}0 + a_1 = a_1(10^k - 1) + \boldsymbol{a_2\ldots a_ka_1},\\
&\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\boldsymbol{a_ka_1\ldots a_{k-1}}0 = a_k(10^k - 1) + \boldsymbol{a_1a_2\ldots a_k}.
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir $DA(a) = 0,\overline{a_1a_2\ldots a_k}$.

---

[1]) Der Fettdruck soll darauf hinweisen, daß jeweils die Dezimaldarstellung und nicht das Produkt der durch die Ziffern bezeichneten Zahlen gemeint sind.

Schließlich ist $a = b + \frac{c}{10^l}$ ein Urbild von $a_0,a_1...a_l\overline{a_{l+1}...a_{l+k}}$, wenn wir b als Urbild von $a_0,a_1...a_l$ und c als Urbild von $0,a_{l+1}...a_{l+k}$ bestimmen. Um das einzusehen, wählen wir für a, b, c Bruchdarstellungen mit gleichem Nenner: $a = \frac{p}{q}$, $b = \frac{p_1}{q}$, $c = \frac{p_2}{q}$. Nach dem Vorhergehenden gilt

$$b = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_l}{10^l},$$

und es ist $c < 1$. Wir erhalten also

$$a = b + \frac{c}{10^l} = \sum_{\lambda=0}^{l} \frac{a_\lambda}{10^\lambda} + \frac{c}{10^l} \quad \text{mit} \quad \frac{c}{10^l} < \frac{1}{10^l}.$$

Bezeichnet $a_0',a_1'a_2'...$ den Dezimalbruch $DA(a)$, so gilt daher nach Satz 1 zunächst $a_0' = a_0, \ldots, a_l' = a_l$ sowie

$$r_{l+1} = (10^l \cdot q) \cdot \frac{c}{10^l} = q \cdot c = p_2$$

für den bei der Berechnung von $DA(a)$ auftretenden Rest r_{l+1}. Andererseits ist p_2 der erste Rest, der bei der Anwendung des Divisionsalgorithmus auf $c = \frac{p_2}{q}$ auftritt. Das bedeutet $a'_{l+i} = a_{l+i}$ für $i \geqq 1$. Damit ist der Satz bewiesen.

Das in Satz 3 ausgesprochene Ergebnis gibt uns die Möglichkeit, die Dezimalbrüche aus $R_+^{(p)}$ als Darstellungen für gebrochene Zahlen zu benutzen, d. h. auch mit $a_0,a_1a_2...a_l\overline{a_{l+1}...a_{l+k}}$ bezeichnen wir hinfort diejenige gebrochene Zahl a, die bei der Anwendung des Divisionsalgorithmus zu diesem Dezimalbruch führt.

Die Umwandlung einer gebrochenen Zahl aus der Bruchdarstellung $\frac{p}{q}$ in die Dezimalbruchdarstellung erfolgt durch den Divisionsalgorithmus (1). Aus dem Beweis von Satz 3 ist ersichtlich, wie umgekehrt aus der Dezimalbruchdarstellung eine Bruchdarstellung gewonnen werden kann. Dazu merken wir uns:

$$(3) \qquad a_0,a_1...a_n = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_\nu}{10^\nu},$$

$$(4) \qquad 0,\overline{a_1...a_k} = \frac{\sum_{\varkappa=1}^{k} a_\varkappa \cdot 10^{k-\varkappa}}{10^k - 1} = \frac{a_1a_2...a_k}{99...9}.$$

(Diese Gleichungen bedeuten die Gleichheit der entsprechenden gebrochenen Zahlen.)

Beispiel. Die durch $0,\overline{747}$ dargestellte gebrochene Zahl besitzt nach (4) die Bruchdarstellung $\frac{747}{999}$. Durch Kürzen erhalten wir $\frac{83}{111}$.

Für die praktische Handhabung der Dezimalbruchdarstellungen gebrochener Zahlen ist eine Beschreibung der Anordnung, der Addition und der Multiplikation gebrochener Zahlen in der Dezimalbruchdarstellung erforderlich. Besonders einfach können gebrochene Zahlen in der Dezimalbruchdarstellung hinsichtlich der Relation „$<$“ verglichen werden. Es gilt der

Satz 4. *Sind a, a' gebrochene Zahlen und $a_0,a_1a_2\ldots$ bzw. $a_0',a_1'a_2'\ldots$ ihre Dezimalbruchdarstellungen, so gilt $a < a'$ dann und nur dann, wenn für den kleinsten Index i_0 ($i_0 \geqq 0$) mit $a_{i_0} \neq a'_{i_0}$ die Beziehung $a_{i_0} < a'_{i_0}$ besteht.*

Beweis. Es gelte $a_{i_0} < a'_{i_0}$ für den kleinsten Index i_0 mit $a_0 \neq a'_{i_0}$. Aus (2) folgt

$$a = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_{i_0-1}}{10^{i_0-1}} + \frac{a_{i_0}}{10^{i_0}} + b_{i_0},$$

$$a' = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_{i_0-1}}{10^{i_0-1}} + \frac{a'_{i_0}}{10^{i_0}} + b'_{i_0}$$

mit $0 \leqq b_{i_0} < \frac{1}{10^{i_0}}$, $0 \leqq b'_{i_0} < \frac{1}{10^{i_0}}$. Wegen $a_{i_0} < a'_{i_0}$ ergibt sich daraus

$$\frac{a'_{i_0}}{10^{i_0}} - \frac{a_{i_0}}{10^{i_0}} \geqq \frac{1}{10^{i_0}} > b_{i_0},$$

also

$$\frac{a_{i_0}}{10^{i_0}} + b_{i_0} < \frac{a'_{i_0}}{10^{i_0}} \leqq \frac{a'_{i_0}}{10^{i_0}} + b'_{i_0}$$

und damit $a < a'$.

Umgekehrt muß aus $a < a'$ dann notwendigerweise $a_{i_0} < a'_{i_0}$ für den kleinsten Index i_0 mit $a_{i_0} \neq a'_{i_0}$ folgen.

Die Addition und Multiplikation endlicher Dezimalbrüche erfolgt im wesentlichen nach den gleichen Verfahren wie die Addition und Multiplikation natürlicher Zahlen in der Dezimaldarstellung. Um das einzusehen, beweisen wir zunächst den

Satz 5. *Es sei $b_mb_{m-1}\ldots b_0$ die Dezimaldarstellung der natürlichen Zahl a_0 und $a_0,a_1\ldots a_n = b_mb_{m-1}\ldots b_0,a_1\ldots a_n$ die Dezimalbruchdarstellung der gebrochenen Zahl a. Die Dezimalbruchdarstellung von $10^k a$ erhalten wir aus der Dezimalbruchdarstellung von a, indem wir das Komma um k Stellen nach rechts verschieben. Entsprechend wird bei der Multiplikation mit $\frac{1}{10^k}$ das Komma um k Stellen nach links verschoben. (Gegebenenfalls sind fehlende Stellen durch entsprechend viele Nullen zu schaffen.)*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß bei der Multiplikation von a mit 10^k das Komma um k Stellen nach rechts verschoben wird. Wir können $n \geqq k$ voraussetzen; andernfalls denken wir uns die Dezimalbruchdarstellung von a um entsprechend viele Nullen verlängert. Aus

$$a = b_m 10^m + \cdots + b_0 10^0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$

erhalten wir

$$10^k a = b_m 10^{m+k} + \cdots + b_0 10^k + a_1 10^{k-1} + \cdots + a_k 10^0 + \frac{a_{k+1}}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^{n-k}}.$$

Also hat $10^k a$ die Dezimalbruchdarstellung

$$b_m \ldots b_0 a_1 \ldots a_k, a_{k+1} \ldots a_n .$$

Addition und Multiplikation endlicher Dezimalbrüche (aufgefaßt als gebrochene Zahlen) werden durch die beiden folgenden Sätze beschrieben.

Satz 6. *Sind* $b_m \ldots b_0, a_1 \ldots a_n$ *bzw.* $b'_{m'} \ldots b_0', a_1' \ldots a_n'$ *die Dezimalbruchdarstellungen von* a *und* a', *so erhalten wir die Dezimalbruchdarstellung von* $a + a'$ *aus der Dezimaldarstellung der Summe der beiden natürlichen Zahlen mit den Dezimaldarstellungen* $b_m \ldots b_0 a_1 \ldots a_n$ *bzw.* $b'_{m'} \ldots b_0' a_1' \ldots a_n'$, *indem wir vor die letzten* n *Ziffern ein Komma setzen.*

Beweis. Nach Satz 5 bedeutet das im Satz dargelegte Vorgehen den Übergang von a, a' zu $10^n a + 10^n a' = 10^n (a + a')$ und von dieser Zahl zur Zahl $a + a'$.

Satz 7. *Sind* $b_m \ldots b_0, a_1 \ldots a_n$ *bzw.* $b'_{m'} \ldots b_0', a_1' \ldots a'_{n'}$, *die Dezimalbruchdarstellungen von* a *und* a', *so erhalten wir die Dezimalbruchdarstellung von* aa' *aus der Dezimalbruchdarstellung des Produktes der beiden natürlichen Zahlen mit den Dezimaldarstellungen* $b_m \ldots a_n$ *bzw.* $b'_{m'} \ldots a'_{n'}$, *indem wir vor die letzten* $n + n'$ *Ziffern ein Komma setzen.*

Beweis. Nach Satz 5 beschreibt dieser Satz den Übergang von a, a' zu $10^n a \cdot 10^{n'} a' = 10^{n+n'} \cdot aa'$ und von dieser Zahl zu aa'.

Die Beschreibung der Addition und Multiplikation beliebiger gebrochener Zahlen unter Verwendung der Dezimalbruchdarstellung erfolgt durch eine praktischen Anforderungen genügende Näherungsrechnung. Für eine beliebige gebrochene Zahl $a = a_0, a_1 a_2 \ldots$ gilt wegen (2) und (3) für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$(5) \qquad a_0, a_1 \ldots a_n \leqq a < a_0, a_1 \ldots a_n + \frac{1}{10^n}.$$

Wenn wir noch abkürzend $a^{(n)} := a_0, a_1 \ldots a_n$ setzen, geht (5) über in

$$(5') \qquad a^{(n)} \leqq a < a^{(n)} + \frac{1}{10^n}.$$

Daraus erhalten wir für die Summe bzw. das Produkt der gebrochenen Zahlen $a = a_0, a_1 a_2 \ldots$ und $b = b_0, b_1 b_2 \ldots$ die Abschätzungen

$$(6) \qquad a^{(n)} + b^{(n)} \leqq a + b < a^{(n)} + b^{(n)} + \frac{2}{10^n};$$

$$(7) \qquad a^{(n)} \cdot b^{(n)} \leqq ab < a^{(n)} \cdot b^{(n)} + \left(a^{(n)} \frac{1}{10^n} + b^{(n)} \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}}\right)$$

$$< a^{(n)} \cdot b^{(n)} + \frac{1}{10^n}\left(a_0 + 1 + b_0 + 1 + \frac{1}{10^n}\right).$$

Die Differenzen $a + b - (a^{(n)} + b^{(n)})$ und $a \cdot b - a^{(n)} \cdot b^{(n)}$ werden also beliebig klein (kleiner als jede beliebig vorgegebene positive Zahl), wenn n hineichend groß gewählt wird, und der Fehler, den wir machen, wenn wir $a + b$ durch $a^{(n)} + b^{(n)}$ bzw. $a \cdot b$ durch $a^{(n)} \cdot b^{(n)}$ ersetzen, wird durch die Ungleichungen (6) bzw. (7) abgeschätzt.

Wenn wir Rechenfehler im Rahmen einer vorgegebenen Fehlergrenze zulassen, können wir somit das Rechnen mit gebrochenen Zahlen in der Dezimalbruchdarstellung auf das Rechnen mit endlichen Dezimalbrüchen zurückführen. Das Rechnen mit gebrochenen Zahlen in der Dezimalbruchdarstellung erfolgt damit nach den Rechenschemata, die wir für das Rechnen mit natürlichen Zahlen in der Dezimaldarstellung benutzen. Zusätzlich ist i.allg. allerdings eine Fehlerabschätzung erforderlich.

4.9. Periodenlänge und Vorperiodenlänge

Die Periodizität der unendlichen Dezimalbrüche, die den gebrochenen Zahlen durch den Divisionsalgorithmus zugeordnet und zur Darstellung gebrochener Zahlen benutzt werden, führt naturgemäß zur Frage nach der Länge einer Periode bzw. nach der Anzahl der Ziffern nach dem Komma, die vor einer Periode stehen (Länge einer Vorperiode). Der Divisionsalgorithmus (vgl. Beweis von Satz 3 aus 4.8.) gibt uns die Möglichkeit, eine Vorperiode und eine zugehörige Periode der Dezimalbruchdarstellung $a_0,a_1a_2\ldots$ einer gebrochenen Zahl $\frac{p}{q}$ in Verbindung mit der schrittweisen Berechnung der Ziffern zu bestimmen. Es ist interessant und für verschiedene Betrachtungen (insbesondere im Schulunterricht) sehr nützlich, daß man unter Verwendung einfacher zahlentheoretischer Überlegungen bereits aus der Bruchdarstellung über Periodenlänge und Vorperiodenlänge der Dezimalbruchdarstellung einen vollständigen Überblick gewinnen kann.

Die Dezimalbruchdarstellung einer gebrochenen Zahl benutzt wie die Dezimaldarstellung einer natürlichen Zahl die Zahl 10 als Grundzahl, wobei die besondere Rolle der Grundzahl deutlich im Satz 1 aus 4.8. zum Ausdruck kommt. Verwendet man

an Stelle der Zahl 10 eine beliebige natürliche Zahl $g \geqq 2$, so erhält man analog dem Vorgehen in 4.8. periodische g-adische Brüche, die ebenfalls als Darstellungen für gebrochene Zahlen benutzt werden können.

Ein g-adischer Bruch wird durch eine Zeichenreihe $b_m b_{m-1} \ldots b_1 b_0 a_1 a_2 \ldots$ beschrieben, die aus Ziffern (Zeichen) für die natürlichen Zahlen $0, 1, \ldots, g-1$ besteht, wobei der die gebrochene Zahl $\frac{p}{q}$ darstellende g-adische Bruch durch die für jedes $n \in \mathbb{N}$ gültige Bedingung

$$(1) \qquad \frac{p}{q} - \left(b_m g^m + \cdots + b_0 g^0 + \frac{a_1}{g} + \cdots + \frac{a_n}{g^n} \right) < \frac{1}{g^n}$$

charakterisiert wird.

Wir werden die zahlentheoretischen Überlegungen zur Bestimmung der Vorperioden- und Periodenlängen gleich für den allgemeinen Fall g-adischer Brüche vornehmen, wodurch das Wesentliche dieser Überlegungen noch deutlicher wird. Wir können uns allerdings auf echte Brüche, d. h. auf gebrochene Zahlen kleiner 1, beschränken.

Es sei $0,a_1 a_2 \ldots a_l \overline{a_{l+1} \ldots a_{l+k}}$ die g-adische Darstellung einer gebrochenen Zahl $a = \frac{p}{q} < 1$. Wir nennen die Ziffernfolge $(a_1, \ldots, a_l)$ eine *Vorperiode* und die Ziffernfolge $(a_{l+1}, \ldots, a_{l+k})$ eine zugehörige *Periode* dieses g-adischen Bruches. Die Zahlen l und k heißen die *Längen* dieser Vorperiode bzw. Periode. Es gibt für einen periodischen g-adischen Bruch offensichtlich beliebig lange Vorperioden und ebenfalls beliebig lange Perioden. Von Interesse sind die Längen einer Periode kleinster Länge sowie der Vorperiode kleinster Länge. (Falls eine Periode unmittelbar nach dem Komma beginnt, sprechen wir von der Vorperiode mit der Länge 0.) Die Länge l_0 der Vorperiode kleinster Länge nennen wir *primitive Vorperiodenlänge*, die Länge k_0 einer Periode kleinster Länge *primitive Periodenlänge*. Ein periodischer g-adischer Bruch heißt *reinperiodisch*, wenn $l_0 = 0$, *gemischtperiodisch*, wenn $l_0 > 0$ gilt.

Die Ziffern $0, a_1, a_2, \ldots$ der g-adischen Darstellung von $\frac{p}{q}$ ergeben sich aus den Gleichungen (Divisionsalgorithmus):

$$(2) \qquad \begin{aligned} p &= 0 \cdot q + r_1, && 0 \leqq r_1 < q; \\ g \cdot r_1 &= a_1 \cdot q + r_2, && 0 \leqq r_2 < q; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g \cdot r_\nu &= a_\nu \cdot q + r_{\nu+1}, && 0 \leqq r_{\nu+1} < q; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Gilt $r_{l+1} = r_{l+1+k}$, so bilden $a_{l+1}, \ldots, a_{l+k}$ eine Periode der Länge k. Wenn umgekehrt die Ziffern $a_{l+1}, \ldots, a_{l+k}$ eine Periode der Länge k bilden, gilt $DA(g \cdot r_{l+1}) = DA(g \cdot r_{l+1+k})$, und aus der Eineindeutigkeit von DA folgt daher $r_{l+1} = r_{l+1+k}$.

Die primitive Vorperiodenlänge l_0 ist daher die kleinste der natürlichen Zahlen l, zu denen es eine natürliche Zahl $k \geqq 1$ mit $r_{l+1} = r_{l+1+k}$ gibt (r_{l_0+1} ist also der erste Rest, der sich im Verlauf der Rechnung wiederholt). Ferner ergibt sich die primitive Periodenlänge k_0 als kleinste der natürlichen Zahlen $k \geqq 1$, für die $r_{l_0+1} = r_{l_0+1+k}$ ist.

Die Reste r_ν können wir recht einfach durch Kongruenzen modulo q ausdrücken. Aus (2) folgen die Kongruenzen

$$
\begin{aligned}
(3) \qquad & r_1 \equiv p && \mod q;\\
& r_2 \equiv g \cdot r_1 && \mod q;\\
& \dots\dots\dots\dots\\
& r_{\nu+1} \equiv g \cdot r_\nu && \mod q;\\
& \dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Daraus erhalten wir für jede natürliche Zahl n die Kongruenz

$$(4) \qquad r_{n+1} \equiv g^n \cdot p \mod q.$$

Wegen $0 \leqq r_\nu < q$ für jeden Rest r_ν folgt aus der Kongruenz modulo q zweier Reste ihre Gleichheit. Also gilt:

$$(5) \qquad r_{n+1} = r_{m+1} \Leftrightarrow g^n \cdot p \equiv g^m \cdot p \mod q.$$

Wir wollen jetzt noch voraussetzen, daß p und q teilerfremd sind, d. h., wir benutzen die reduzierte Bruchdarstellung. Dann ist (5) mit

$$(6) \qquad r_{n+1} = r_{m+1} \Leftrightarrow g^n \equiv g^m \mod q$$

gleichwertig (vgl. MfL Bd. 1, 3.7. (72)). Damit sind l_0 und k_0 die kleinsten natürlichen Zahlen, die die Kongruenz

$$g^l \equiv g^{l+k} \mod q \qquad (l \geqq 0, \quad k \geqq 1)$$

erfüllen.

Den Modul q zerlegen wir in zwei Faktoren q', q'' derart, daß q'' der größte Teiler von q ist, der zu g teilerfremd ist. Die Zahl q' ist dann gleich 1 oder ihre Primzerlegung besteht genau aus den Primzahlpotenzen der Primzerlegung von q, die zu Primzahlen der Primzerlegung von g gehören. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
g^l \equiv g^{l+k} \mod q &\Leftrightarrow q'q'' \mid (g^{l+k} - g^l)\\
&\Leftrightarrow \bigvee_{s \in \mathbb{N}} g^l(g^k - 1) = sq'q''.
\end{aligned}
$$

Die Gleichung $g^l(g^k - 1) = sq'q''$ ist auf Grund der Festlegung von q' und q'' genau dann erfüllt, wenn $q' \mid g^l$ und $q'' \mid (g^k - 1)$ gelten. Ferner ist $q' \mid g^l$ mit $g^l \equiv 0 \mod q'$ und $q'' \mid (g^k - 1)$ mit $g^k \equiv 1 \mod q''$ gleichbedeutend. Somit ist l_0 die kleinste natürliche Zahl l mit $g^l \equiv 0 \mod q'$ und k_0 die kleinste natürliche Zahl $k \geqq 1$ mit $g^k \equiv 1 \mod q''$.

Wir fassen die bisherigen Überlegungen zusammen:

Satz 1. *Es sei* $\frac{p}{q}$ *die reduzierte Bruchdarstellung einer gebrochenen Zahl* a, g *eine natürliche Zahl* $\geqq 2$, q'' *der größte Teiler von* q, *der zu* g *teilerfremd ist und* q' *der zu* q'' *komplementäre Teiler von* q. *Bei der* g*-adischen Darstellung von* a *ergibt sich die primitive Vorperiodenlänge* l_0 *als kleinste natürliche Zahl* l *mit* $g^l \equiv 0 \bmod q'$, *die primitive Periodenlänge* k_0 *als kleinste natürliche Zahl* k *mit* $g^k \equiv 1 \bmod q''$.

Die g*-adische Darstellung von* a *ist*

a) *reinperiodisch genau dann, wenn* g *und* q *teilerfremd sind,*

b) *endlich genau dann, wenn jeder Primteiler von* q *auch ein Primteiler von* g *ist.*

Beweis. Den ersten Teil des Satzes haben wir bereits bewiesen. Die g-adische Darstellung von a ist genau dann reinperiodisch, wenn $l_0 = 0$ und daher $q' | 1$ gilt. Das ist gleichwertig mit $q' = 1$ bzw. $q'' = q$. Damit ist a) bewiesen. Die Endlichkeit der g-adischen Darstellung von a ist mit $r_{l_0+1} = 0$ und daher wegen (4) mit $g^{l_0} \cdot p \equiv 0 \bmod q$ gleichwertig. Da p und q teilerfremd sind, ist das mit $q | g^{l_0}$ gleichbedeutend. Damit ist auch b) bewiesen.

Wir wollen noch die aus Satz 1 folgende Tatsache hervorheben, daß die Zahlen k_0 und l_0 nicht vom Zähler der reduzierten Bruchdarstellung abhängen. Satz 1 zeigt ferner, daß die Beantwortung der Frage nach der Endlichkeit der g-adischen Darstellung einer gebrochenen Zahl von der gewählten Grundzahl g abhängt. (Demgegenüber ist die g-adische Darstellung einer gebrochenen Zahl stets periodisch.)

Nach dem Satz von Euler (vgl. MfL Bd. 1, 3.7. (78)) ist $k_0 \leqq \varphi(q'')$. Es gilt sogar der

Satz 2. *Die primitive Periodenlänge* k_0 *ist ein Teiler der Anzahl* $\varphi(q'')$ *der zu* q'' *teilerfremden natürlichen Zahlen* $< q''$.

Beweis. Die Division von $\varphi(q'')$ durch k_0 liefert $\varphi(q'') = h \cdot k_0 + r$, $0 \leqq r < k_0$ $(h, r \in \mathbb{N})$. Daraus folgt

$$1 \equiv g^{\varphi(q'')} \equiv g^{hk_0+r} \equiv (g^{k_0})^h \cdot g^r \equiv g^r \mod q''.$$

Da k_0 die kleinste Zahl $k \geqq 1$ mit $g^k \equiv 1 \bmod q''$ ist, muß $r = 0$ gelten, d. h. $k_0 | \varphi(q'')$.

Beispiele.

1. $g = 10$;

a) $a = \frac{7}{92}$.

Die Zahlen 7 und 92 sind teilerfremd, und $2^2 \cdot 23$ ist die Primzerlegung von 92. Es ist also $q' = 2^2$, $q'' = 23$. Aus $10^1 \equiv 2 \bmod 4$, $10^2 \equiv 0 \bmod 4$ erhalten wir $l_0 = 2$.

Bei der Bestimmung von k_0 beachten wir, daß $k_0 | \varphi(23)$ gelten muß. Wegen $\varphi(23) = 22$ kommen daher für k_0 nur die Zahlen 1, 2, 11, 22 in Frage:

$$10^1 \equiv 10 \bmod 23,$$

$$10^2 \equiv 8 \bmod 23,$$

$$10^4 \equiv 8 \cdot 8 \equiv 64 \equiv 18 \bmod 23,$$

$$10^8 \equiv 18 \cdot 18 \equiv 324 \equiv 2 \bmod 23,$$

$$10^{10} \equiv 2 \cdot 8 \equiv 16 \bmod 23,$$

$$10^{11} \equiv 10 \cdot 16 \equiv 160 \equiv 22 \bmod 23,$$

$$10^{22} \equiv 1 \bmod 23.$$

Also ist 22 die primitive Periodenlänge.

b) $a = \dfrac{4}{21}$.

Die Zahlen 4 und 21 sind teilerfremd. Da 10 und 21 teilerfremd sind, ist der Dezimalbruch von a reinperiodisch. Es ist $\varphi(21) = 21\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)\left(1 - \dfrac{1}{7}\right) = 12$ (vgl. MfL Bd. 1, 3.7.). Für k_0 kommen also nur die Zahlen 1, 2, 3, 4, 6, 12 in Frage:

$$10^1 \equiv 10 \bmod 21,$$

$$10^2 \equiv 16 \bmod 21,$$

$$10^3 \equiv 13 \bmod 21,$$

$$10^4 \equiv 4 \bmod 21,$$

$$10^6 \equiv 1 \bmod 21.$$

Damit ist 6 die primitive Periodenlänge.

c) $a = \dfrac{9}{600}$.

Zunächst müssen wir zur reduzierten Bruchdarstellung übergehen: $a = \dfrac{3}{200}$. Die Primzerlegung von $q = 200$ lautet $200 = 2^3 \cdot 5^2$. Der Dezimalbruch von a ist endlich, da jeder Primteiler von 200 Primteiler von 10 ist. Da 10 die Primteiler 2 und 5 nur in erster Potenz enthält, ergibt der höchste Primzahlexponent von $2^3 \cdot 5^2$ die primitive Vorperiodenlänge, also $l_0 = 3$.

2. $g = 2$.

a) $a = \dfrac{3}{20}$.

Die Zahlen 3 und 20 sind teilerfremd, und $2^2 \cdot 5$ ist die Primzerlegung von 20. Es ist daher $q' = 2^2$, $q'' = 5$. Aus $2^1 \equiv 2 \bmod 4$, $2^2 \equiv 0 \bmod 4$ erhalten wir $l_0 = 2$. Wegen $\varphi(5) = 4$ kommen für k_0 nur die Zahlen 1, 2, 4 in Frage:

$$2^1 \equiv 2 \bmod 5, \quad 2^2 \equiv 4 \bmod 5, \quad 2^4 \equiv 1 \bmod 5.$$

Also ist 4 die primitive Periodenlänge.

Mit Hilfe von (2) gewinnen wir $\frac{3}{20} = 0{,}00\overline{1001}$ als 2-adische Bruchdarstellung von $\frac{3}{20}$, womit das Ergebnis $l_0 = 2$, $k_0 = 4$ bestätigt wird.

b) $a = \frac{1}{5}$.

Da 2 und 5 teilerfremd sind, ist die 2-adische Bruchdarstellung reinperiodisch. Als primitive Periodenlänge erhalten wir wieder $k_0 = 4$. Die 2-adische Bruchdarstellung von $\frac{1}{5}$ lautet $0{,}\overline{0011}$.

c) $a = \frac{1}{16}$.

Wegen $16 = 2^4$ ist jeder Primteiler von 16 auch Primteiler von 2. Die 2-adische Bruchdarstellung von $\frac{1}{16}$ ist daher endlich, und es gilt $l_0 = 4$. Die 2-adische Bruchdarstellung von $\frac{1}{16}$ lautet 0,0001.

Aufgabe. Wann ist die Dezimalbruchdarstellung a) reinperiodisch, b) endlich? Wann ist die 2-adische Bruchdarstellung a) reinperiodisch, b) endlich?

4.10. Kettenbrüche

In 4.8. haben wir jeder gebrochenen Zahl $a = \frac{p}{q}$ einen periodischen Dezimalbruch $a_0,a_1a_2\ldots$ zugeordnet. Die Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ lassen sich mit Hilfe des Divisionsalgorithmus berechnen. Indem wir die Gleichungen (1) von Satz 1 aus 4.8. mit $\frac{1}{q}$ multiplizieren und $b_i = \frac{r_{i+1}}{q}$ setzen, erhalten wir

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
a &= a_0 + b_0, && 0 \leqq b_0 < 1, && a_0 \in \mathsf{N};\\
10b_0 &= a_1 + b_1, && 0 \leqq b_1 < 1, && a_1 \in \mathsf{N};\\
10b_1 &= a_2 + b_2, && 0 \leqq b_2 < 1, && a_2 \in \mathsf{N};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Aus der $(i+1)$-ten Gleichung ergibt sich also a_i als größte natürliche Zahl, welche die auf der linken Seite dieser Gleichung stehende Zahl nicht übertrifft. Der jeweils auftretende Rest b_i wird mit 10 multipliziert, wodurch eine nichttriviale Fortsetzung des durch (1) erklärten Verfahrens ermöglicht wird, solange der Rest b_i von 0 verschieden ist. Es wird dann nämlich durch die Multiplikation mit der Basiszahl 10 erreicht, daß nach endlich vielen Schritten auf der linken Seite eine Zahl größer oder gleich 1 entsteht.

Wenn wir die auftretenden von 0 verschiedenen Reste b_i durch eine geeignete von der Basiszahl unabhängige Umformung in Zahlen größer oder gleich 1 überführen, können wir hoffen, durch ein ähnliches Verfahren zu einer sinnvollen von einer Basiszahl unabhängigen Darstellung einer gebrochenen Zahl zu gelangen.

Für eine gebrochene Zahl b mit $0 < b < 1$ kann $\frac{1}{b}$ gebildet werden, und es gilt dann $1 < \frac{1}{b}$. Ist a eine von 0 verschiedene gebrochene Zahl, so läßt sich daher das durch

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
a &= a_0 + b_0, && 0 \leqq b_0 < 1, && a_0 \in \mathsf{N};\\
\frac{1}{b_0} &= a_1 + b_1, && 0 \leqq b_1 < 1, && a_1 \in \mathsf{N};\\
\frac{1}{b_1} &= a_2 + b_2, && 0 \leqq b_2 < 1, && a_2 \in \mathsf{N};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

zur Bestimmung der natürlichen Zahlen a_i gegebene Verfahren entweder beliebig lange fortsetzen (wenn niemals $b_i = 0$) oder bis zu einer Gleichung, bei der als Rest b_n die Zahl 0 erscheint. Die natürlichen Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sind durch a eindeutig bestimmt. Unter Verwendung der Schreibweise $\frac{p}{q}$ für die gebrochene Zahl a wollen wir zunächst die unter (2) genannten Bedingungen zur Bestimmung der Zahlen a_i schrittweise umformen.

Aus $a = a_0 + b_0$, $0 \leqq b_0 < 1$ ergibt sich zunächst

$$p = a_0 q + b_0 q, \qquad 0 \leqq b_0 q < q.$$

Wir setzen $r_1 = b_0 q$ und erhalten dann

$$p = a_0 q + r_1, \qquad 0 \leqq r_1 < q.$$

Aus der zweiten Gleichung unter (2) folgt dann, falls $r_1 \neq 0$ ist,

$$\frac{q}{r_1} = a_1 + b_1, \qquad 0 \leqq b_1 < 1$$

und daher mit $r_2 = b_1 r_1$ die Beziehung

$$q = a_1 r_1 + r_2, \qquad 0 \leqq r_2 < r_1.$$

Genauso ergibt sich für den Fall $r_2 \neq 0$ die Beziehung $r_1 = a_2 r_2 + r_3$, $0 \leqq r_3 < r_2$ aus der dritten Gleichung unter (2) mit $r_3 = b_2 r_2$.
Durch Fortsetzung dieser Umformungen erhalten wir insgesamt das zur Bestimmung der Zahlen a_i zu (2) gleichwertige Schema:

$$\begin{array}{llll}
 & p = a_0 q + r_1 & 0 \leqq r_1 < q, & a_0 \in \mathbb{N}; \\
(3) & q = a_1 r_1 + r_2, & 0 \leqq r_2 < r_1, & a_1 \in \mathbb{N}; \\
 & r_1 = a_2 r_2 + r_3, & 0 \leqq r_3 < r_2, & a_2 \in \mathbb{N}; \\
 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\
 & r_{i-1} = a_i r_i + r_{i+1}, & 0 \leqq r_{i+1} < r_i, & a_i \in \mathbb{N}; \\
 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & &
\end{array}$$

Das durch (3) beschriebene Verfahren ist der uns bereits bekannte euklidische Algorithmus (vgl. MfL Bd. 1, 3.7. (25)). Dieser bricht nach endlich vielen Schritten ab, wobei der letzte von Null verschiedene Rest r_n der größte gemeinsame Teiler von p und q ist. Damit haben wir folgendes Ergebnis:

Satz 1. *Zu jeder gebrochenen Zahl a existieren eine natürliche Zahl $n \geqq 0$ und natürliche Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_n$*[1]) *mit*

$$\begin{array}{llll}
 & a = a_0 + b_0, & 0 < b_0 < 1; \\
 & \frac{1}{b_0} = a_1 + b_1, & 0 < b_1 < 1; \\
(2') & \frac{1}{b_1} = a_2 + b_2, & 0 < b_2 < 1; \\
 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
 & \frac{1}{b_{n-2}} = a_{n-1} + b_{n-1}, & 0 < b_{n-1} < 1; \\
 & \frac{1}{b_{n-1}} = a_n. &
\end{array}$$

Dabei sind n und $a_0, \dots, a_n$ eindeutig bestimmt, und es gilt $a_i \geqq 1$ für $1 \leqq i \leqq n-1$ sowie $a_n > 1$, falls $n \geqq 1$ ist. Die natürlichen Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_n$ können aus einer Bruchdarstellung $\frac{p}{q}$ von a mit Hilfe des euklidischen Algorithmus nach dem Schema (3) berechnet werden.

[1]) Für $n = 0$ besteht (2') nur aus der Gleichung $a = a_0$.

Aus den unter (2') genannten Gleichungen können wir durch entsprechendes Einsetzen die gebrochene Zahl a durch die Zahlen $a_0, \ldots, a_n$ ausdrücken. Es ergibt sich

$$a = a_0 + b_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + b_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + b_2}} = \cdots$$

$$= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{\quad}{\quad \ddots \quad + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

Den zuletzt entstandenen Ausdruck nennen wir einen *Kettenbruch* mit den Gliedern oder *Teilnennern* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Wir schreiben für ihn abkürzend $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Dabei ist a_0 der ganzzahlige Teil von $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

Satz 2. *Jede gebrochene Zahl a besitzt genau eine Darstellung als Kettenbruch $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$, bei dem für $n \geqq 1$ sämtliche Teilnenner natürliche Zahlen größer oder gleich 1 sind und $a_n > 1$ gilt.*

(Für den Fall, daß a eine natürliche Zahl ist, wollen wir $a = a_0 = [a_0]$ als einen Kettenbruch ohne Teilnenner ansehen.)

Beweis. Wir brauchen nur noch die Eindeutigkeit der Darstellung nachzuweisen. Es sei $[c_0; c_1, \ldots, c_m]$ irgendein Kettenbruch mit der im Satz 2 genannten Eigenschaft. Wir setzen

$$d_0 = \frac{1}{[c_1; c_2, \ldots, c_m]}, \qquad d_1 = \frac{1}{[c_2; c_3, \ldots, c_m]}, \ldots,$$

$$d_{m-2} = \frac{1}{[c_{m-1}; c_m]}, \qquad d_{m-1} = \frac{1}{[c_m]}.$$

Für die Zahlen d_i $(0 \leqq i \leqq m-1)$ gilt offensichtlich $0 < d_i < 1$, und wir können ohne Schwierigkeiten die Gültigkeit der folgenden Gleichungen feststellen:

$$a = c_0 + d_0, \quad \frac{1}{d_0} = c_1 + d_1, \ldots, \quad \frac{1}{d_{m-2}} = c_{m-1} + d_{m-1}, \quad \frac{1}{d_{m-1}} = c_m.$$

Nach Satz 1 gilt dann aber $m = n$ und $c_0 = a_0$, $c_1 = a_1, \ldots, c_m = a_m$.

Die Kettenbruchdarstellung gebrochener Zahlen wollen wir im folgenden dazu benutzen, Näherungswerte für diese Zahlen zu bestimmen. Für das praktische Rechnen spielen die Näherungswerte $a^{(n)} = a_0,a_1 \ldots a_n$ einer gebrochenen Zahl $a = a_0,a_1a_2\ldots$

eine große Rolle (vgl. 4.8.). Wenn wir allerdings einen Näherungswert von a in der Form $\frac{p}{q}$ angeben wollen, sind dazu die gebrochenen Zahlen $a^{(n)}$ vielfach unzweckmäßig, da die reduzierte Bruchdarstellung einer solchen Zahl $a^{(n)}$ i. allg. einen verhältnismäßig großen Nenner besitzt. Das ist nicht verwunderlich, da wir uns mit den Zahlen $a^{(n)}$ von vornherein auf Nenner beschränken, die eine Zehnerpotenz bilden. Die Kettenbruchdarstellung wird hingegen die Bestimmung von Näherungswerten $\frac{p}{q}$ einer Zahl a ermöglichen, bei denen der benutzte Nenner q mit der Güte der durch $\frac{p}{q}$ erzielten Annäherung minimal ausfällt. Mit den folgenden Betrachtungen werden wir uns dieser Problematik — der sogenannten *besten Approximation* — zuwenden.

Für die Gewinnung bester Approximationen spielen für eine Zahl $a = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$ die gebrochenen Zahlen $s_0 = a_0, s_1 = [a_0; a_1], \ldots, s_n = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$ eine entscheidende Rolle. Die gebrochene Zahl s_k nennen wir den k-ten *Näherungsbruch* von $[a_0 a_1, \ldots, a_n]$. Der folgende Satz zeigt eine Möglichkeit, die Näherungsbrüche rekursiv zu gewinnen.

Satz 3. *Ist* $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ *ein beliebiger Kettenbruch* (*wir fordern hier nur, daß die Teilnenner positive gebrochene Zahlen sind*), *so gilt*

$$s_i = \frac{p_i}{q_i} \tag{4}$$

für die Näherungsbrüche s_i *von* $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, *wenn die Zahlen* p_i, q_i *durch das folgende Bildungsgesetz bestimmt werden:*

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0, & q_0 &= 1, \\ p_1 &= a_0 a_1 + 1, & q_1 &= a_1, \end{aligned} \tag{5}$$

$$p_k = p_{k-1} a_k + p_{k-2}, \quad q_k = q_{k-1} a_k + q_{k-2} \qquad (2 \leqq k \leqq n). \tag{6}$$

Beweis. Die Gleichungen $s_0 = \frac{p_0}{q_0}$, $s_1 = \frac{p_1}{q_1}$ ergeben sich leicht durch Ausrechnen. Die Gültigkeit von $s_i = \frac{p_i}{q_i}$ für $i = 2, \ldots, n$ beweisen wir durch vollständige Induktion über $n \geqq 2$.

Für $n = 2$ ist nur die Gültigkeit von $s_2 = \frac{p_2}{q_2}$ nachzuweisen. Es ist

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 a_2 + p_0}{q_1 a_2 + q_0} = \frac{(a_0 a_1 + 1) a_2 + a_0}{a_1 a_2 + 1}.$$

Andererseits gilt

$$a_2 = [a_0; a_1, a_2] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1}$$

$$= \frac{a_0(a_1 a_2 + 1) + a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{(a_0 a_1 + 1)\, a_2 + a_0}{a_1 a_2 + 1}.$$

Wir nehmen an, daß die Beziehungen (4) für einen beliebigen Kettenbruch mit $l \geqq 2$ Teilnennern schon bewiesen seien, und zeigen die Gültigkeit dieser Beziehungen für einen Kettenbruch $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_l, a_{l+1}]$ mit $l+1$ Teilnennern. Die Näherungsbrüche $s_0, s_1, \ldots, s_l$ sind sämtliche Näherungsbrüche des Kettenbruches $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_l]$, und aus (5) und (6) folgt, daß die Zahlen $p_0, p_1, \ldots, p_l; q_0, q_1, \ldots, q_l$ für die beiden Kettenbrüche $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{l+1}]$, $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_l]$ jeweils übereinstimmen. Nach Induktionsvoraussetzung gilt daher für $[a_0; a_2, \ldots, a_{l+1}]$ zunächst $s_i = \dfrac{p_i}{q_i}$ für $i = 1, \ldots, l$. Der Kettenbruch $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{l+1}]$ entsteht aus $[a_0; a_1, \ldots, a_l]$, indem a_l durch $a_l' = a_l + \dfrac{1}{a_{l+1}}$ ersetzt wird, also

$$[a_0; a_1, \ldots, a_{l+1}] = \left[a_0; a_1, \ldots, a_{l-1}, a_l + \frac{1}{a_{l+1}}\right].$$

Die Zahlen $p_0, p_1, \ldots, p_{l-1}; q_0, q_1, \ldots, q_{l-1}$ von $[a_0; a_1, \ldots, a_{l+1}]$ stimmen mit den entsprechenden Zahlen $p_0', p_1', \ldots, p_{l-1}'; q_0', q_1', \ldots, q_{l-1}'$ von $[a_0, a_1, \ldots, a_{l-1}, a_l']$ überein, und die Zahlen p_l' und q_l' ergeben sich aus

$$p_l' = p_{l-1}\left(a_l + \frac{1}{a_{l+1}}\right) + p_{l-2}, \qquad q_l' = q_{l-1}\left(a_l + \frac{1}{a_{l+1}}\right) + q_{l-2}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $s_{l+1} = s_l' = \dfrac{p_l'}{q_l'}$ und daher

$$s_{l+1} = \frac{p_{l-1}\left(a_l + \dfrac{1}{a_{l+1}}\right) + p_{l-2}}{q_{l-1}\left(a_l + \dfrac{1}{a_{l+1}}\right) + q_{l-2}}$$

$$= \frac{(p_{l-1}a_l + p_{l-2})a_{l+1} + p_{l-1}}{(q_{l-1}a_l + q_{l-2})\, a_{l+1} + q_{l-1}}$$

$$= \frac{p_l a_{l+1} + p_{l-1}}{q_l a_{l+1} + q_{l-1}} = \frac{p_{l+1}}{q_{l+1}}.$$

Damit ist Satz 3 bewiesen.

Mit Hilfe von Satz 3 leiten wir wichtige Eigenschaften der Näherungsbrüche $s_i = \frac{p_i}{q_i}$ eines Kettenbruches her:

(7) $q_i p_{i+1} - p_i q_{i+1} = 1$ für gerades i.

(8) $p_i q_{i+1} - q_i p_{i+1} = 1$ für ungerades i.

Um die Beweise dieser beiden Formeln nicht unnötig kompliziert zu gestalten, werden wir an dieser Stelle von den ganzen Zahlen Gebrauch machen. Statt (7) und (8) können wir dann zusammenfassend

(9) $q_i p_{i+1} - p_i q_{i+1} = (-1)^i \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$

schreiben.

Beweis von (9). Für $i = 0$ erhalten wir aus (5)

$$q_0 p_1 - p_0 q_1 = (a_0 a_1 + 1) - a_0 a_1 = 1,$$

für $i \geqq 1$ ergibt sich unter Verwendung der Rekursionsformeln (6)

$$\begin{aligned} q_i p_{i+1} - p_i q_{i+1} &= q_i(p_i a_{i+1} + p_{i-1}) - p_i(q_i a_{i+1} + q_{i-1}) \\ &= q_i p_{i-1} - p_i q_{i-1} = -(q_{i-1} p_i - p_{i-1} q_i). \end{aligned}$$

Aus $q_0 p_1 - p_0 q_1 = 1$ und $q_i p_{i+1} - p_i q_{i+1} = -(q_{i-1} p_i - p_{i-1} q_i)$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ erhält man leicht die Formel (9).

Als Ergänzung zu Satz 3 ergibt sich aus den Formeln (7) und (8), daß $\frac{p_i}{q_i}$ die reduzierte Bruchdarstellung von s_i ist.

Bezeichnet d den größten gemeinsamen Teiler von p_i und q_i, so gilt nämlich wegen (7) bzw. (8) $d \mid 1$ und daher $d = 1$.

Wir können nun Aussagen über die Lage der Näherungsbrüche s_i in bezug auf die Zahl $a = [a_0; a_1, \ldots, a_n] = s_n$ gewinnen. Der folgende Satz gibt uns einen vollständigen Überblick über die Anordnung der Näherungsbrüche.

Satz 4. *Ist n eine gerade natürliche Zahl ($n = 2 \cdot l$), so erfüllen die Näherungsbrüche s_i von $a = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$ die Ungleichungskette*

$$s_0 < s_2 < s_4 < \cdots < s_{2l} = a < s_{2l-1} < \cdots < s_3 < s_1.$$

Ist n eine ungerade natürliche Zahl ($n = 2l + 1$), so gilt entsprechend

$$s_0 < s_2 < \cdots < s_{2l} < a = s_{2l+1} < \cdots < s_3 < s_1$$

(Abb. 4).

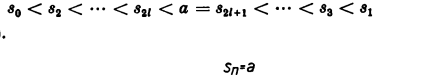


Abb. 4

Beweis. Wir zeigen die Gültigkeit der Ungleichungen

$$s_{2i+2} - s_{2i} > 0, \qquad s_{2i+1} - s_{2i+3} > 0, \qquad s_{2l\pm1} - s_{2l} > 0.$$

Aus

$$\begin{aligned} s_{2i+2} - s_{2i} &= \frac{p_{2i+2}}{q_{2i+2}} - \frac{p_{2i}}{q_{2i}} = \frac{p_{2i+2}q_{2i} - p_{2i}q_{2i+2}}{q_{2i}q_{2i+2}} \\ &= \frac{(p_{2i+1}a_{2i+2} + p_{2i})\,q_{2i} - p_{2i}(q_{2i+1}a_{2i+2} + q_{2i})}{q_{2i}q_{2i+2}} \\ &= \frac{(p_{2i+1}q_{2i} - p_{2i}q_{2i+1})\,a_{2i+2}}{q_{2i}q_{2i+2}} = \frac{a_{2i+2}}{q_{2i}q_{2i+2}} \end{aligned}$$

folgt

$$s_{2i+2} - s_{2i} = \frac{a_{2i+2}}{q_{2i}q_{2i+2}} \tag{10}$$

und daher $s_{2i+2} - s_{2i} > 0$. Entsprechend ergibt sich

$$s_{2i+1} - s_{2i+3} = \frac{a_{2i+3}}{q_{2i+1}q_{2i+3}} \tag{11}$$

und daraus $s_{2i+1} - s_{2i+3} > 0$. Schließlich folgt $s_{2l\pm1} - s_{2l} > 0$ aus der Gleichung

$$s_{2i\pm1} - s_{2i} = \frac{1}{q_{2i}q_{2i\pm1}}, \tag{12}$$

die für jedes i gültig ist. Nach (7) und (8) ergibt sich nämlich

$$s_{2i\pm1} - s_{2i} = \frac{p_{2i\pm1}}{q_{2i\pm1}} - \frac{p_{2i}}{q_{2i}} = \frac{p_{2i\pm1}q_{2i} - p_{2i}q_{2i\pm1}}{q_{2i}q_{2i\pm1}} = \frac{1}{q_{2i}q_{2i\pm1}}.$$

Über die Güte der Approximation einer Zahl a durch einen Näherungsbruch erhalten wir aus der Formel (12) unmittelbar den

Satz 5. *Es gilt*

$$0 \leqq s_{2i+1} - a < \frac{1}{q_{2i+1}q_{2i+2}}, \qquad 0 \leqq a - s_{2i} < \frac{1}{q_{2i}q_{2i+1}}.$$

Beispiel.

$$a = \frac{4938}{1497}.$$

Die Kettenbruchentwicklung von a erhalten wir durch Anwendung des euklidischen Algorithmus:

$$
\begin{aligned}
4938 &= 3 \cdot 1497 + 447,\\
1497 &= 3 \cdot 447 + 156,\\
447 &= 2 \cdot 156 + 135,\\
156 &= 1 \cdot 135 + 21,\\
135 &= 6 \cdot 21 + 9,\\
21 &= 2 \cdot 9 + 3,\\
9 &= 3 \cdot 3 + 0.
\end{aligned}
$$

Es gilt also $\dfrac{4938}{1497} = [3; 3, 2, 1, 6, 2, 3]$.

Die Zahlen p_i und q_i gewinnen wir aus (5) und (6):

$$
\begin{aligned}
p_0 &= 3, & q_0 &= 1,\\
p_1 &= 3 \cdot 3 + 1 = 10, & q_1 &= 3,\\
p_2 &= 10 \cdot 2 + 3 = 23, & q_2 &= 3 \cdot 2 + 1 = 7,\\
p_3 &= 23 \cdot 1 + 10 = 33, & q_3 &= 7 \cdot 1 + 3 = 10,\\
p_4 &= 33 \cdot 6 + 23 = 221, & q_4 &= 10 \cdot 6 + 7 = 67,\\
p_5 &= 221 \cdot 2 + 33 = 475, & q_5 &= 67 \cdot 2 + 10 = 144,\\
p_6 &= 475 \cdot 3 + 221 = 1646, & q_6 &= 144 \cdot 3 + 67 = 499.
\end{aligned}
$$

Daraus ergeben sich die Näherungsbrüche

$$
s_0 = 3, \quad s_1 = \frac{10}{3}, \quad s_2 = \frac{23}{7}, \quad s_3 = \frac{33}{10}, \quad s_4 = \frac{221}{67}, \quad s_5 = \frac{475}{144}, \quad s_6 = \frac{1646}{499} = a.
$$

Wenn wir a durch $\dfrac{23}{7}$ ersetzen, wird durch $0 \leqq a - \dfrac{23}{7} < \dfrac{1}{q_2 q_3} = \dfrac{1}{70}$ der Fehler abgeschätzt.

Die Qualität der Approximation einer Zahl a durch einen Näherungsbruch wollen wir jetzt durch den bereits genannten Begriff der besten Approximation charakterisieren, wodurch die Bedeutung der Näherungsbrüche offensichtlich wird. Eine gebrochene Zahl mit der reduzierten Bruchdarstellung $\dfrac{p}{q}$ nennen wir eine *beste Approximation* der Zahl a, wenn für jede gebrochene Zahl $\dfrac{r}{s}$ mit $s < q$ die Zahl $\dfrac{p}{q}$ näher bei der Zahl a liegt als $\dfrac{r}{s}$.

Satz 6. *Ist $a = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ eine beliebige gebrochene Zahl, so ist jeder Näherungsbruch eine beste Approximation von a.*

Beweis. Zunächst gelten die Ungleichungen

$$
(13) \qquad 0 \leqq \frac{p_{2i+1}}{q_{2i+1}} - a < a - \frac{p_{2i}}{q_{2i}} \qquad (1 \leqq 2i + 1 \leqq n),
$$

$$(14) \qquad 0 \leqq a - \frac{p_{2i}}{q_{2i}} < \frac{p_{2i-1}}{q_{2i-1}} - a \qquad (0 \leqq 2i \leqq n).$$

Für $2i + 1 = n$ bei der ersten bzw. $2i = n$ bei der zweiten Ungleichung folgt das unmittelbar aus Satz 4. Es sei $1 \leqq 2i + 1 < n$. Wir erhalten dann nach Satz 4, Formel (10) und Satz 5

$$\begin{aligned} a - \frac{p_{2i}}{q_{2i}} &\geqq \frac{p_{2i+2}}{q_{2i+2}} - \frac{p_{2i}}{q_{2i}} = \frac{a_{2i+2}}{q_{2i}q_{2i+2}} \\ &\geqq \frac{1}{q_{2i}q_{2i+2}} > \frac{1}{q_{2i+1}q_{2i+2}} \\ &> \frac{p_{2i+1}}{q_{2i+1}} - a \geqq 0. \end{aligned}$$

Entsprechend wird die Ungleichung (14) bewiesen.

Die Ungleichungen (13) und (14) besagen, daß $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ stets näher als $\frac{p_k}{q_k}$ bei a liegt $(0 \leqq k < n)$. Wäre $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ keine beste Approximation, so müßte eine gebrochene Zahl $\frac{p}{q}$ mit $q < q_{k+1}$ existieren, die näher als $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ bei a liegt. Für gerades k bedeutet das

$$\frac{p_k}{q_k} < \frac{p}{q} < \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}.$$

Daraus folgt

$$0 < \frac{p}{q} - \frac{p_k}{q_k} < \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k}.$$

Weiterhin ergibt sich aus $0 < \frac{p}{q} < \frac{p_k}{q_k}$ die Abschätzung

$$\frac{p}{q} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{pq_k - qp_k}{qq_k} \geqq \frac{1}{qq_k} > \frac{1}{q_{k+1}q_k} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k}$$

und damit ein Widerspruch zu

$$\frac{p}{q} - \frac{p_k}{q_k} < \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k}.$$

Entsprechend verfährt man für ungerades k.

Satz 6 beinhaltet, daß es zu einem Näherungsbruch $s_k = \frac{p_k}{q_k}$ von a keine gebrochene Zahl mit kleinerem Nenner als q_k geben kann, die näher als s_k bei a liegt.

Nach diesem Ergebnis ergibt sich die folgende interessante Fragestellung: Wie groß muß der Nenner von $\frac{p}{q}$ wenigstens gewählt werden, damit $\frac{p}{q}$ näher als $\frac{p_k}{q_k}$ bei a liegt? Damit gleichwertig ist die Frage nach der besten Approximation von a mit dem nächstgrößeren Nenner. (Das braucht durchaus nicht $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ zu sein.) Bei der Beantwortung der gestellten Frage wollen wir uns auf einseitige Approximationen beschränken. Wir werden im folgenden nur Näherungswerte von a berücksichtigen, die größer oder gleich a sind, wir werden also nur den Fall der rechtsseitigen Approximation untersuchen. Die Ergebnisse lassen sich auf den Fall der linksseitigen Approximation übertragen. Für den Fall der gleichzeitigen Approximation von rechts und links werden wir die oben gestellte Frage allerdings nicht vollständig beantworten.

Die Näherungsbrüche ungerader Ordnung sind nach Satz 4 Näherungswerte für die rechtsseitige Approximation. Ferner wissen wir, daß $a < s_{2l+1} < s_{2l-1}$ für $3 \leqq 2l+1 < n$ gilt und s_{2l+1}, s_{2l-1} sogar beste Approximationen im Sinne einer beiderseitigen Approximation sind. Wir wollen feststellen, ob zwischen s_{2l-1} und s_{2l+1} noch beste Approximationen im Sinne einer rechtsseitigen Approximation liegen, und uns gegebenenfalls einen Überblick über diese verschaffen.

Wir benötigen den folgenden einfachen Hilfssatz:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Den Beweis überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe. $\frac{a+c}{b+d}$ heißt auch *Medianwert* von $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$.

Durch Medianwertbildungen erhalten wir von $\frac{p_{2l-1}}{q_{2l-1}} > \frac{p_{2l}}{q_{2l}}$ ausgehend:

$$\frac{p_{2l-1}}{q_{2l-1}} > \frac{p_{2l-1}+p_{2l}}{q_{2l-1}+q_{2l}} > \frac{p_{2l}}{q_{2l}},$$

$$\frac{p_{2l-1}}{q_{2l-1}} > \frac{p_{2l-1}+p_{2l}}{q_{2l-1}+q_{2l}} > \frac{p_{2l-1}+2p_{2l}}{q_{2l-1}+2q_{2l}} > \frac{p_{2l}}{q_{2l}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{p_{2l-1}}{q_{2l-1}} > \frac{p_{2l-1}+p_{2l}}{q_{2l-1}+q_{2l}} > \frac{p_{2l-1}+2p_{2l}}{q_{2l-1}+2q_{2l}} > \cdots > \frac{p_{2l-1}+a_{2l+1}p_{2l}}{q_{2l-1}+a_{2l+1}q_{2l}} = \frac{p_{2l+1}}{q_{2l+1}}.$$

Die hier für $a_{2l+1} > 1$ zwischen $\frac{p_{2l-1}}{q_{2l-1}}$ und $\frac{p_{2l+1}}{q_{2l+1}}$ stehenden gebrochenen Zahlen heißen *Zwischenbrüche*. Die Zwischenbrüche sind Zahlen, die näher als s_{2l-1} bei a liegen. Sie kommen also durchaus als beste Approximationen in Frage. Die Bedeutung der Zwischenbrüche ergibt sich aus dem

Satz 7. *Jede beste Approximation* $\frac{p}{q}$ *von* a *mit* $q_{2\nu} \leqq q \leqq q_{2\nu+2}$ *oder* $q_{2\nu-1} \leqq q \leqq q_{2\nu+1}$, *d. h.,* $\frac{p}{q}$ *soll zwischen zwei rechtsseitigen bzw. zwei linksseitigen Näherungsbrüchen von* a *eingeschlossen sein, ist entweder ein Näherungsbruch oder ein Zwischenbruch.*

Aus diesem Satz erhalten wir, daß jeder zwischen $\frac{p_{2l-1}}{q_{2l-1}}$ und $\frac{p_{2l+1}}{q_{2l+1}}$ gelegene Zwischenbruch bezüglich der rechtsseitigen Approximation eine beste Approximation darstellt. Das gilt zunächst für den Zwischenbruch $\frac{p_{2l-1}+p_{2l}}{q_{2l-1}+q_{2l}}$. Er ist nämlich ein besserer Näherungswert von a als $\frac{p_{2l-1}}{q_{2l-1}}$; zwischen ihm und $\frac{p_{2l-1}}{q_{2l-1}}$ kann aber nach Satz 7 keine gebrochene Zahl liegen, die eine beste Approximation darstellt. Das bedeutet, daß dieser Zwischenbruch selbst eine beste Approximation bezüglich der rechtsseitigen Approximation sein muß.

Entsprechend ergibt sich das für die weiteren Zwischenbrüche. (Ein Zwischenbruch braucht allerdings keine beste Approximation im Sinne der beiderseitigen Approximation zu sein.) Zusammenfassend erhalten wir folgenden *Approximationssatz über die rechtsseitige Approximation*:

Satz 8. *Eine gebrochene Zahl* $\frac{p}{q}$ *mit* $q_{2\nu-1} \leqq q \leqq q_{2\nu+1}$ *ist genau dann eine beste Approximation bezüglich der rechtsseitigen Approximation, wenn* $\frac{p}{q}$ *ein Näherungsbruch oder ein Zwischenbruch ist.* (Eine entsprechende Aussage gilt für die linksseitige, aber nicht für die zweiseitige Approximation.)

Wir wollen die Bedeutung von Satz 8 an dem bereits behandelten Beispiel erläutern:

$$a = \frac{4938}{1497} = [3; 3, 2, 1, 6, 2, 3].$$

Die Zahlen $s_1 = \frac{10}{3}$, $s_3 = \frac{33}{10}$, $s_5 = \frac{475}{144}$ sind als Näherungsbrüche beste Approximationen von a. Wegen $a_3 = 1$ liegt zwischen s_1 und s_3 kein Zwischenbruch, wegen $a_5 = 2$ liegt hingegen zwischen s_3 und s_5 genau ein Zwischenbruch. Dieser lautet $\frac{33+221}{10+67} = \frac{254}{77}$. Die Zahlen $\frac{10}{3}, \frac{33}{10}, \frac{254}{77}, \frac{475}{144}$ sind also die sämtlichen besten Approximationen $\frac{p}{q}$ bezüglich der rechtsseitigen Approximation, für die $3 \leqq q \leqq 144$ gilt.

Beweis von Satz 7. Es sei $\frac{p}{q}$ eine beste Approximation bezüglich der rechtsseitigen Approximation. Wir nehmen an, daß $\frac{p}{q}$ weder ein Näherungsbruch noch ein Zwischenbruch ist, und leiten daraus einen Widerspruch ab. Für geeignete l und i $(0 \leqq i < a_{2l+1})$ muß nach der Annahme

$$\frac{p_{2l-1} + ip_{2l}}{q_{2l-1} + iq_{2l}} > \frac{p}{q} > \frac{p_{2l-1} + (i+1)\,p_{2l}}{q_{2l-1} + (i+1)\,q_{2l}} \geqq a$$

gelten. Daraus folgt

$$\frac{p_{2l-1} + ip_{2l}}{q_{2l-1} + iq_{2l}} - \frac{p_{2l-1} + (i+1)\,p_{2l}}{q_{2l-1} + (i+1)\,q_{2l}} > \frac{p_{2l-1} + ip_{2l}}{q_{2l-1} + iq_{2l}} - \frac{p}{q} > 0.$$

Durch Anwendung der Formeln (7) und (8) erhalten wir für die linke Seite der Ungleichung

$$\frac{1}{(q_{2l-1} + iq_{2l})\,(q_{2l-1} + (i+1)\,q_{2l})}.$$

Für den mittleren Teil der Ungleichung gilt die Abschätzung

$$\frac{p_{2l-1} + ip_{2l}}{q_{2l-1} + iq_{2l}} - \frac{p}{q} \geqq \frac{1}{(q_{2l-1} + iq_{2l})\,q}.$$

Damit erhalten wir aus der obigen Ungleichung

$$\frac{1}{q_{2l-1} + (i+1)\,q_{2l}} > \frac{1}{q} \quad \text{bzw.} \quad q > q_{2l-1} + (i+1)\,q_{2l}.$$

Da $\frac{p_{2l-1} + (i+1)\,p_{2l}}{q_{2l-1} + (i+1)\,q_{2l}}$ näher als $\frac{p}{q}$ bei a liegt, kann somit $\frac{p}{q}$ keine beste Approximation sein.

4.11. Algebraische Charakterisierung des Bereiches der gebrochenen Zahlen

Wir fassen noch einmal die wesentlichen Merkmale des Zahlenbereiches $\mathbf{Q}_+$ zusammen. In $\mathbf{Q}_+$ sind eine Ordnungsrelation „$<$“, eine Addition „$+$“ und eine Multiplikation „$\cdot$“ erklärt, wobei die bereits in $\mathbf{N}$ gültigen Strukturgesetze (vgl. 4.1.) (A0), (A1), ($A2_1$), (A3), (M0), (M1), ($M2_1$), (M3), (M4), (O1), (O2), (O3) gelten. Die gebrochenen

Zahlen bilden also ebenfalls einen geordneten Halbring mit Null- und Einselement (vgl. 4.1.). Zu diesen auch in $\mathbf{N}$ gültigen Strukturgesetzen kommt für den Bereich $\mathbf{Q}_+$ das Gesetz ($\mathrm{M}2_2$) (vgl. 4.5. Satz 1) als weiteres Strukturgesetz hinzu. Auf Grund der genannten Strukturgesetze bildet der Bereich der gebrochenen Zahlen als algebraische Struktur einen sogenannten geordneten *Halbkörper*. Über den Bereich $\mathbf{Q}_+(<, +, \cdot)$ der gebrochenen Zahlen wissen wir weiterhin, daß er den Bereich $\mathbf{N}(<, +, \cdot)$ der natürlichen Zahlen als Teilstruktur enthält: $\mathbf{N}(<, +, \cdot) \subseteq \mathbf{Q}_+(<, +, \cdot)$. (Diese Schreibweise soll neben $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Q}_+$ auch zum Ausdruck bringen, daß „$<$“, „$+$“, „$\cdot$“ in $\mathbf{N}$ die Einschränkungen von „$<$“, „$+$“, „$\cdot$“ in $\mathbf{Q}_+$ sind, also

$$\begin{aligned} m < n \text{ in } \mathbf{N} \quad &\Leftrightarrow \quad m < n \text{ in } \mathbf{Q}_+, \\ m + n = k \text{ in } \mathbf{N} \quad &\Leftrightarrow \quad m + n = k \text{ in } \mathbf{Q}_+, \\ m \cdot n = k \text{ in } \mathbf{N} \quad &\Leftrightarrow \quad m \cdot n = k \text{ in } \mathbf{Q}_+.) \end{aligned}$$

Der folgende Satz zeigt, daß der Bereich der gebrochenen Zahlen hinsichtlich der genannten Eigenschaften minimal ist.

Satz (algebraische Charakterisierung von $\mathbf{Q}_+$). *Der Bereich $\mathbf{Q}_+(<, +, \cdot)$ der gebrochenen Zahlen ist bis auf Isomorphie der kleinste geordnete Halbkörper, der den Bereich $\mathbf{N}(<, +, \cdot)$ der natürlichen Zahlen als Teilstruktur enthält.*

Beweis. Wir haben noch zu zeigen, daß ein Bereich $\mathbf{M}$, in dem eine Relation „$\lessdot$“ und zwei Operationen „$\oplus$“, „$\otimes$“ erklärt sind, so daß die genannten Strukturgesetze sowie $\mathbf{N}(<, +, \cdot) \subseteq \mathbf{M}(\lessdot, \oplus, \otimes)$ gelten, einen zu $\mathbf{Q}_+(<, +, \cdot)$ isomorphen Teilbereich $\mathbf{M}'(\lessdot, \oplus, \otimes)$ enthält. Aus MfL Bd. 1, 2.6. folgt, daß $\mathbf{M}$ genau ein Nullelement — bezeichnet mit $\underline{0}$ — und genau ein Einselement — bezeichnet mit $\underline{1}$ — besitzt. $\underline{0}$ stimmt dabei mit der natürlichen Zahl 0 und $\underline{1}$ mit der natürlichen Zahl 1 überein. Aus $0 \oplus 0 = 0 + 0 = 0 = 0 \oplus \underline{0}$ folgt nämlich nach (O1) und (O2), daß $0 = \underline{0}$ gelten muß. Entsprechend zeigt man $1 = \underline{1}$. Nach($\mathrm{M}2_2$) existiert zu jedem $a \in \mathbf{M}$ mit $a \neq 0$ ein $b \in \mathbf{M}$ mit $a \otimes b = b \otimes a = 1$. Aus $b_1 \otimes a = a \otimes b_1 = a \otimes b_2 = b_2 \otimes a = 1$ folgt

$$b_1 = b_1 \otimes 1 = b_1 \otimes (a \otimes b_2) = (b_1 \otimes a) \otimes b_2 = 1 \otimes b_2 = b_2.$$

Zu $a \neq 0$ existiert bezüglich „$\otimes$“ also genau ein Inverses, das wir mit a^* bezeichnen. Wir setzen

$$\mathbf{M}' = \{n^* \otimes m : n, m \in \mathbf{N} \wedge n \neq 0\}.$$

Dabei ist $n^* \otimes m$ die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $n \otimes x = m$. Mit $n_1 \neq 0$ und $n_2 \neq 0$ ist auch $n_1 \otimes n_2 = n_1 \cdot n_2 \neq 0$ und daher

$$\begin{aligned} n_1^* \otimes m_1 \lessdot n_2^* \otimes m_2 &\Leftrightarrow (n_1^* \otimes m_1) \otimes (n_1 \otimes n_2) \lessdot (n_2^* \otimes m_2) \otimes (n_1 \otimes n_2) \\ &\Leftrightarrow m_1 \otimes n_2 \lessdot m_2 \otimes n_1 \Leftrightarrow m_1 \cdot n_2 < m_2 \cdot n_1. \end{aligned}$$

Hierbei wurden (M1), (M3), (O3) sowie $\mathsf{N}(<,+,\cdot) \subseteq \mathsf{M}(<,\oplus,\otimes)$ benutzt. Es gilt also insbesondere

$$n_1^* \otimes m_1 = n_2^* \otimes m_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1 \Leftrightarrow \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}.$$

Durch $f: \frac{m}{n} \mapsto n^* \otimes m$ wird daher eine eineindeutige Abbildung von $\mathbf{Q}_+$ auf M' definiert. Wir zeigen nun:

a) $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$,

b) $f(a+b) = f(a) \oplus f(b)$,

c) $f(a \cdot b) = f(a) \otimes f(b)$.

Zu a): Aus der schon bewiesenen Beziehung

$$\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2} \Leftrightarrow m_1 \cdot n_2 < m_2 \cdot n_1 \Leftrightarrow n_1^* \otimes m_1 < n_2^* \otimes m_2$$

folgt sofort a).

Zu b): Wir setzen $a = \frac{m_1}{n_1}$, $b = \frac{m_2}{n_2}$, womit $a + b = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}$ und daher

$$f(a+b) = (n_1 n_2)^* \otimes (m_1 n_2 + m_2 n_1)$$

wird, $f(a+b)$ ist die eindeutig bestimmte Lösung von

$$(n_1 n_2) \otimes x = m_1 n_2 + m_2 n_1.$$

Wir zeigen, daß

$$f(a) \oplus f(b) = (n_1^* \otimes m_1) \oplus (n_2^* \otimes m_2)$$

diese Gleichung löst:

$$\begin{aligned}(n_1 n_2) \otimes x &= (n_1 \otimes n_2) \otimes ((n_1^* \otimes m_1) \oplus (n_2^* \otimes m_2)) \\ &= (n_1 \otimes n_2 \otimes n_1^* \otimes m_1) \oplus (n_1 \otimes n_2 \otimes n_2^* \otimes m_2) \\ &= (m_1 \otimes n_2) \oplus (m_2 \otimes n_1) = m_1 n_2 + m_2 n_1.\end{aligned}$$

Zu c): Mit den obigen Bezeichnungen für a und b erhalten wir

$$f(a \cdot b) = (n_1 n_2)^* \otimes (m_1 m_2),$$

d. h., $f(a \cdot b)$ ist die eindeutige Lösung von $(n_1 n_2) \otimes x = m_1 m_2$. Es gilt

$$\begin{aligned}(n_1 n_2) \otimes (f(a) \otimes f(b)) &= (n_1 \otimes n_2) \otimes ((n_1^* \otimes m_1) \otimes (n_2^* \otimes m_2)) \\ &= m_1 \otimes m_2 = m_1 m_2,\end{aligned}$$

womit $f(a \cdot b) = f(a) \otimes f(b)$ gezeigt ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Als Folgerung aus den Strukturgesetzen (M0), (M1), ($M2_1$), ($M2_2$), (M3) erhielten wir (vgl. 4.5. Satz 4), daß für $a \neq 0$ jede Gleichung $a \cdot x = b$ genau eine Lösung be-

sitzt. Daher gilt erst recht:

$$(M2) \quad \bigwedge_{a,b\in\mathbb{Q}_+} (a \neq 0 \Rightarrow \bigvee_{c\in\mathbb{Q}_+} a \cdot c = b).$$

Wir wollen jetzt noch zeigen, daß man umgekehrt aus (M0), (M1), (M2) und (M3) die Strukturgesetze ($M2_1$) und ($M2_2$) zurückgewinnen, also auf die Existenz eines bezüglich der Multiplikation neutralen Elementes sowie auf die Existenz inverser Elemente (für von Null verschiedene Zahlen) schließen kann. Dazu betrachten wir für irgendein $a \neq 0$ eine Lösung e der Gleichung $a \cdot x = a$. Es gilt dann $a \cdot e = e \cdot a = a$. Ist b ein beliebiges Element und c eine Lösung von $a \cdot x = b$, so erhalten wir

$$b \cdot e = e \cdot b = e \cdot (a \cdot c) = (e \cdot a) \cdot c = a \cdot c = b.$$

Damit ist ($M2_1$) gezeigt. Ferner ergibt sich nun ($M2_2$) als Spezialfall von (M2), indem dort für b das neutrale Element e eingesetzt wird.

Bei der algebraischen Beschreibung der gebrochenen Zahlen durch Strukturgesetze können somit die Gesetze ($M2_1$) und ($M2_2$) gegen das eine Gesetz (M2) ausgetauscht werden. Insbesondere folgt aus (M0), (M1), (M2) und (M3), daß für $a \neq 0$ jede Gleichung $a \cdot x = b$ *eindeutig* lösbar ist.

5. Der Bereich der rationalen Zahlen

5.1. Einleitung

Mit dem Bereich $\mathbf{Q}_+$ der gebrochenen Zahlen haben wir einen Zahlenbereich erhalten, in dem jeder bezüglich einer gewählten Maßeinheit kommensurablen Länge eine Maßzahl zugeordnet werden kann. Bei der Veranschaulichung der gebrochenen Zahlen auf einer Geraden g konnten wir zunächst die beiden Basispunkte P_0 und P_1, die den Zahlen 0 und 1 entsprechen, willkürlich festlegen. Nach dieser Festlegung ist dann für jede gebrochene Zahl a derjenige Punkt P_a, der diese Zahl repräsentiert, eindeutig bestimmt, und die Gesamtheit dieser Punkte ist in der durch die Basispunkte bestimmten von P_0 ausgehenden Halbgeraden enthalten. Die gebrochenen Zahlen liegen also nur auf einer Halbgeraden der gewählten Geraden g.

Bei verschiedenen praktischen Aufgaben ist eine Messung in zwei „entgegengesetzte Richtungen" vorzunehmen. Beispielsweise wird beim üblichen Quecksilberthermometer die Temperatur nicht allein durch den Abstand des Endpunktes der Quecksilbersäule von der 0-Markierung, sondern darüber hinaus durch die Richtung bestimmt, in der sich dieser Endpunkt befindet (oberhalb oder unterhalb der 0-Markierung). Mit der Konstruktion eines neuen Zahlenbereiches soll der Bereich der gebrochenen Zahlen so erweitert werden, daß dem Messen in zwei Richtungen Rechnung getragen wird, indem durch die Maßzahl auch die Richtung mit zum Ausdruck gebracht wird.

Aus dieser Zielstellung wird erkennbar, daß sich ein solcher Zahlenbereich bezüglich einer vernünftigen Anordnung unbegrenzt in zwei Richtungen ausdehnen muß. Ferner wird in naheliegender Weise ein Ansatz zur Konstruktion des gesuchten neuen Zahlenbereiches motiviert. Zu jeder gebrochenen Zahl a muß eine „entgegengesetzte Zahl" $-a$ in dem neuen Zahlenbereich vorhanden sein, die bezüglich der Zahl 0 zu a „symmetrisch" liegt. Die Konstruktion eines neuen Zahlenbereiches kann entsprechend durch „Symmetrisierung", d. h. durch Hinzunahme der Elemente einer geeigneten Menge als zu den gebrochenen Zahlen „entgegengesetzte Zahlen", vollzogen werden.

Eine Erweiterung des Zahlenbereiches $\mathbf{Q}_+$ wird auch durch rein algebraische Überlegungen motiviert. Wenn man nämlich die Rechengesetze der Addition und Multiplikation miteinander vergleicht, so fällt auf, daß $\mathbf{Q}_+$ hinsichtlich der Multiplikation vollständiger als hinsichtlich der Addition ist. Eine Gleichung der Form $ax = b$ ist für alle $a \neq 0$ eindeutig lösbar, eine Gleichung der Form $a + x = b$ dagegen nur unter der recht einschränkenden Voraussetzung $a \leqq b$. In 4.11. haben wir $\mathbf{Q}_+$ als kleinsten Zahlenbereich charakterisiert, der die natürlichen Zahlen enthält und in dem jede Gleichung der Form $a \cdot x = b$ $(a \neq 0)$ eindeutig lösbar ist. Die Gleichungen der Form $a + x = b$ führen zur Frage nach einem kleinsten Zahlenbereich, der $\mathbf{Q}_+$ enthält und in dem jede solche Gleichung eindeutig lösbar ist.

Aus der Annahme der Existenz eines solchen Zahlenbereiches wird ein Konstruktionsweg mit Hilfe von Äquivalenzklassen geordneter Paare gebrochener Zahlen nahegelegt, wenn man ein geordnetes Paar (a, b) mit der Lösung von $b + x = a$ in Beziehung setzt.

Wir haben zwei Gesichtspunkte genannt, die zeigen, daß der Zahlenbereich $\mathbf{Q}_+$ Unzulänglichkeiten besitzt, und aus denen die Aufgabe erwächst, den Bereich $\mathbf{Q}_+$ zu einem umfassenderen Zahlenbereich zu erweitern. Beide Gesichtspunkte legen außerdem Wege zur Konstruktion einer entsprechenden Erweiterung nahe. Diese Wege unterscheiden sich zunächst wesentlich, führen jedoch beide (bis auf Isomorphie) zum gleichen Zahlenbereich. Diesen Zahlenbereich $\mathbf{Q}$ werden wir den *Bereich der rationalen Zahlen* nennen.

Für eine Konstruktion von $\mathbf{Q}$ durch Symmetrisierung von $\mathbf{Q}_+$ spricht eine große Anschaulichkeit und begriffliche Einfachheit der einzelnen erforderlichen Konstruktionsschritte, wodurch dieser Weg als der für die Schule gegebene erscheint. Nachteilig erweist sich allerdings die durch fortlaufende Fallunterscheidung bedingte langwierige Beweisführung für die einzelnen Strukturgesetze. Aus diesem Grunde werden wir die Konstruktion der rationalen Zahlen zunächst über Äquivalenzklassen geordneter Paare gebrochener Zahlen vornehmen. Die Konstruktion von $\mathbf{Q}$ durch Symmetrisierung von $\mathbf{Q}_+$ erfolgt anschließend. Um die dazu notwendigen Beweise abzukürzen, werden wir die Darstellbarkeit einer beliebigen Zahl aus $\mathbf{Q}$ als „Differenz" zweier gebrochener Zahlen gleich zu Beginn nachweisen, wodurch dann der Anschluß an das bereits dargelegte Konstruktionsverfahren hergestellt wird.

5.2. Konstruktion und algebraische Charakterisierung des Bereiches der rationalen Zahlen

Der Bereich $\mathbf{Q}_+ = \mathbf{Q}_+(<, +, \cdot)$ soll zu einem Zahlenbereich $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(<, +, \cdot)$ erweitert werden. Dabei stellen wir folgende Forderungen:

a) Die in $\mathbf{Q}_+$ gültigen Strukturgesetze (vgl. 4.11.) sollen auch in $\mathbf{Q}$ gelten.

b) Jede Gleichung der Form $a + x = b$ soll lösbar sein, d. h., es gelte

(A2) $\bigwedge_{a,b\in\mathbb{Q}} \bigvee_{c\in\mathbb{Q}} a + c = b.$

c) $\mathbb{Q}$ soll minimal hinsichtlich der Forderungen a) und b) sein, d. h., es soll keine echte Teilmenge von $\mathbb{Q}$ existieren, die a) und b) erfüllt und die die Menge der gebrochenen Zahlen als Teilstruktur enthält.

Analog den Betrachtungen am Schluß von 4.11. ergibt sich aus den Strukturgesetzen (A0), (A1), (A2), (A3) die folgende Aussage:

b') Jede Gleichung der Form $a + x = b$ besitzt genau eine Lösung. Die Forderungen a), b) und c) sind somit insgesamt den Forderungen a), b') und c) gleichwertig.

Wir wollen zunächst weitere Aussagen über einen derartigen Zahlenbereich $\mathbb{Q}$ aus den genannten Forderungen folgern — wir wissen allerdings zur Zeit noch nicht, ob ein solcher Zahlenbereich überhaupt existiert. Bezeichnen wir mit $0'$ das Nullelement aus $\mathbb{Q}$, so muß $0 + 0' = 0$ gelten. Andererseits gilt auch $0 + 0 = 0$. Aus der eindeutigen Lösbarkeit[1]) der Gleichung $0 + x = 0$ in $\mathbb{Q}$ folgt daher $0' = 0$. Ganz entsprechend ergibt sich aus der eindeutigen Lösbarkeit einer Gleichung der Form $a \cdot x = b$ $(a \neq 0)$, daß die gebrochene Zahl 1 das Einselement in $\mathbb{Q}$ sein muß (Übungsaufgabe).

In Übereinstimmung mit der Erklärung der Differenzen in 4.4. bezeichnen wir in $\mathbb{Q}$ mit $b - a$ die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $a + x = b$ $(a, b \in \mathbb{Q})$ und nennen diese Zahl die *Differenz* der Zahlen b, a.

Für diese Differenzen gelten:

(1) $a - b = a' - b' \Leftrightarrow a + b' = a' + b,$

(2) $a - b < c - d \Leftrightarrow a + d < c + b,$

(3) $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d).$

Diese Beziehungen lassen sich wie im Fall der in 4.4. behandelten Differenzen aus der Definition der Differenz gewinnen.

Für die Differenz $0 - a$ schreiben wir auch $-a$ und nennen $-a$ die zu a entgegengesetzte Zahl. Definitionsgemäß ist also $a + (-a) = 0$.

Da $a + (-b)$ Lösung der Gleichung $b + x = a$ ist, gilt

(4) $a - b = a + (-b).$

Wir beweisen noch:

(5) $-(-a) = a,$

(6) $-a = (-1)\, a,$

(7) $-(ab) = (-a)\, b = a(-b),$

(8) $(-a)\,(-b) = ab,$

(9) $-(a + b) = -a - b.$

[1]) Man kann $0 = 0'$ auch aus (O1) und (O2) gewinnen (vgl. den Beweis des Satzes aus 4.11.).

Beweise.

Zu (5). Wegen $-a + a = 0$ und $-a + (-(-a)) = 0$ gilt $a = -(-a)$.

Zu (6). Aus $a + ((-1)\,a) = (1 + (-1))\,a = 0 \cdot a = 0$ folgt $-a = (-1)\,a$.

Zu (7). $-(ab) = (-1)\,ab = ((-1)\,a)\,b = (-a)\,b$, entsprechend erhalten wir $-(ab) = a(-b)$.

Zu (8). $(-a)\,(-b) = ((-1)\,a)\,((-1)\,b) = (-1)\,(-1)\,ab = -(-1)\,ab = ab$.

Zu (9). $-(a + b) = (-1)\,(a + b) = (-1)\,a + (-1)\,b = -a - b$.

Unter Verwendung von (4) ergeben sich damit auch leicht die folgenden Regeln für das Rechnen mit Differenzen:

(10) $\quad (a - b) - (c - d) = (a + d) - (b + c)$,

(11) $\quad (a - b)\,(c - d) = (ac + bd) - (ad + bc)$.

Wir betrachten in $\mathbb{Q}$ die Menge $\tilde{\mathbb{Q}} = \{a - b : a, b \in \mathbb{Q}_+\}$. Wegen $a - 0 = a$ ist $\mathbb{Q}_+$ eine Teilmenge von $\tilde{\mathbb{Q}}$. Aus (3) und (11) ergibt sich, daß Addition und Multiplikation aus $\tilde{\mathbb{Q}}$ nicht herausführen und daher zweistellige Operationen in $\tilde{\mathbb{Q}}$ sind. Darüber hinaus erfüllt $\tilde{\mathbb{Q}} = \tilde{\mathbb{Q}}\ (<, +, \cdot)$ die Bedingungen a) und b).

Zum Nachweis von a) genügt es zu zeigen, daß jede Gleichung der Form $(a - b) \cdot x = 1$ $(a, b \in \mathbb{Q}_+,\ a - b \neq 0)$ eine Lösung in $\tilde{\mathbb{Q}}$ besitzt; denn die übrigen Strukturgesetze übertragen sich unmittelbar von $\mathbb{Q}$ auf $\tilde{\mathbb{Q}}$. Gilt $a > b$, so ist $a - b$ eine gebrochene Zahl und $(a - b) \cdot x = 1$ sogar in $\mathbb{Q}_+$ lösbar. Für $a < b$ betrachten wir zunächst die Gleichung $(b - a) \cdot y = 1$, die eine gebrochene Zahl c als Lösung besitzt. Wegen

$$(a - b) \cdot (0 - c) = bc - ac = (b - a)\,c = 1 \quad \text{und} \quad 0 - c \in \tilde{\mathbb{Q}}$$

ist auch für $a < b$ die Gleichung $(a - b) \cdot x = 1$ in $\mathbb{Q}$ lösbar.

Die Gültigkeit der Bedingung b) folgt unmittelbar aus (10). Da $\mathbb{Q}$ die Bedingung c) erfüllt, muß $\tilde{\mathbb{Q}}$ mit $\mathbb{Q}$ übereinstimmen.

Jedes Element c aus $\mathbb{Q}$ besitzt also eine Darstellung der Form $c = a - b$ mit a, $b \in \mathbb{Q}_+$. Gilt dabei $a \geqq b$, so ist c eine gebrochene Zahl. Für den Fall $a < b$ erhalten wir

$$c = a - b = (a + (-a)) - (b + (-a)) = 0 - (b - a) = -(b - a).$$

Also ist c eine gebrochene Zahl oder entgegengesetzte Zahl einer gebrochenen Zahl, d. h.,

(12) $\quad \mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \{-a : a \in \mathbb{Q}_+\}$.

Wir wollen jetzt die *Existenz* eines Zahlenbereiches $\mathbb{Q}$ mit den geforderten Eigenschaften nachweisen, indem wir einen derartigen Zahlenbereich konstruieren. Dabei werden die einzelnen Konstruktionsschritte durch die aus der Annahme der Existenz von $\mathbb{Q}$ gefolgerten Eigenschaften dieses Zahlenbereiches weitgehend motiviert.

Jedes Element aus $\mathbb{Q}$ müßte sich als Differenz zweier gebrochener Zahlen a, b darstellen lassen, könnte also durch ein geordnetes Paar gebrochener Zahlen repräsentiert werden.

Zwei geordnete Paare (a, b), (c, d) müßten dabei nach (1) genau dann zur gleichen Zahl aus $\mathbb{Q}$ gehören, wenn $a + d = b + c$ gilt. Durch

$$(13) \qquad (a, b) \sim (c, d) : \Leftrightarrow a + d = b + c$$

wird nun in $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$ eine Äquivalenzrelation definiert. Reflexivität und Symmetrie dieser Relation ergeben sich unmittelbar aus der Definition dieser Relation. Zum Nachweis der Transitivität betrachten wir drei geordnete Paare (a, b), (c, d), (e, f) mit $(a, b) \sim (c, d)$ und $(c, d) \sim (e, f)$, d. h. $a + d = b + c$, $c + f = d + e$. Indem wir zur ersten Gleichung f und zur zweiten Gleichung b addieren, erhalten wir $a + d + f = b + c + f$ bzw. $c + f + b = d + e + b$. Daraus folgt $a + d + f = d + e + b$ und daher $a + f = e + b$, also $(a, b) \sim (e, f)$.

Es bezeichnet $\overline{\mathbb{Q}}$ die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich dieser Äquivalenzrelation und $a \ominus b$ diejenige Äquivalenzklasse, die das geordnete Paar (a, b) enthält. Dann gilt

$$(14) \qquad a \ominus b = c \ominus d \Leftrightarrow a + d = b + c.$$

Falls ein Zahlenbereich $\mathbb{Q}$ mit den geforderten Eigenschaften existiert, würde damit durch $a \ominus b \mapsto a - b$ eine eineindeutige Abbildung von $\overline{\mathbb{Q}}$ auf $\mathbb{Q}$ erklärt werden.

In der Menge $\overline{\mathbb{Q}}$ wollen wir nun eine Ordnung, eine Addition und eine Multiplikation definieren, die — entsprechend der Darstellung der Elemente von $\overline{\mathbb{Q}}$ in der Form $a \ominus b$ — dem Rechnen mit Differenzen in $\mathbb{Q}$ entsprechen soll. Dazu benutzen wir die Beziehungen (2), (3) und (11) als Definitionen:

I. $\quad a \ominus b < c \ominus d : \Leftrightarrow a + d < b + c,$

II. $\quad (a \ominus b) + (c \ominus d) := (a + c) \ominus (b + d),$

III. $\quad (a \ominus b) \cdot (c \ominus d) := (ac + bd) \ominus (ad + bc).$

Zur Rechtfertigung müssen wir die Unabhängigkeit von den Repräsentanten nachweisen. Wir beschränken uns dabei auf die Definitionsgleichung für die Multiplikation: Es gelte $a \ominus b = a' \ominus b'$, also $a + b' = a' + b$. Um zu zeigen, daß dann

$$(a \ominus b) \cdot (c \ominus d) = (a' \ominus b') \cdot (c \ominus d)$$

gilt, müssen wir

$$(ac + bd) \ominus (ad + bc) = (a'c + b'd) \ominus (a'd + b'c),$$

d. h.

$$ac + bd + a'd + b'c = a'c + b'd + ad + bc,$$

nachweisen. Diese Gleichung ergibt sich aber durch Addition der Gleichungen

$$(a + b') \cdot c = (a' + b) \cdot c, \quad (a' + b) \cdot d = (a + b') \cdot d.$$

Gilt darüber hinaus noch $c \ominus d = c' \ominus d'$, so erhalten wir entsprechend

$$(a' \ominus b') \cdot (c \ominus d) = (a' \ominus b') \cdot (c' \ominus d')$$

und insgesamt

$$(a \ominus b) \cdot (c \ominus d) = (a' \ominus b') \cdot (c' \ominus d').$$

Wir beweisen jetzt die in 4.11. für $\mathbf{Q}_+$ genannten Strukturgesetze für den Bereich $\bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{Q}}(<, +, \cdot)$.

Die Gültigkeit der Gesetze (A0), (A1), (A3), (M0), (M3) folgt unmittelbar aus der Definition der Addition bzw. Multiplikation in $\bar{\mathbf{Q}}$. Ferner sind ($A2_1$) und ($M2_1$) erfüllt, da mit $0 \ominus 0$ ein Nullelement und mit $1 \ominus 0$ ein Einselement vorhanden sind. Die Gesetze (M3) und (M4) ergeben sich sehr einfach durch Ausrechnen. Um ($M2_2$) einzusehen, betrachten wir ein von $0 \ominus 0$ verschiedenes Element $a \ominus b$ aus $\bar{\mathbf{Q}}$. Es sind die beiden Fälle $a > b$ und $b > a$ möglich. Für $a > b$ erhalten wir

$$(a \ominus b)\left(\frac{1}{a-b} \ominus 0\right) = \left(\frac{a}{a-b} \ominus \frac{b}{a-b}\right) = 1 \ominus 0$$

(letzteres nach (14)) und für $a < b$ entsprechend

$$(a \ominus b)\left(0 \ominus \frac{1}{b-a}\right) = (1 \ominus 0).$$

Aus der Definition der Relation „$<$“ in $\bar{\mathbf{Q}}$ und den Eigenschaften der Relation „$<$“ in $\mathbf{Q}_+$ ergibt sich sofort, daß „$<$“ in $\bar{\mathbf{Q}}$ irreflexiv und konnex ist.

Wenn $a \ominus b < c \ominus d$, $c \ominus d < e \ominus f$ und daher $a + d < c + b$, $c + f < e + d$ gelten, folgt unter Verwendung des Monotoniegesetzes der Addition in $\mathbf{Q}_+$

$$a + d + f = c + b + f, \quad c + f + b < e + d + b,$$

d. h. $a + d + f < e + d + b$, und daraus $a + f < e + b$, also $a \ominus b \leqq e \ominus f$. Damit ist „$<$“ in $\bar{\mathbf{Q}}$ auch transitiv und (O1) bewiesen. (O2) ergibt sich sehr einfach aus dem Monotoniegesetz der Addition in $\mathbf{Q}_+$.

Jetzt haben wir noch die Gültigkeit von (O3) festzustellen. Es gelte $a \ominus b < c \ominus d$ und $e \ominus f > 0 \ominus 0$. Es ist dann $e > f$ und daher

$$(a \ominus b)(e \ominus f) = (a \ominus b)(e - f \ominus 0) = a(e - f) \ominus b(e - f)$$

bzw.

$$(c \ominus d)(e \ominus f) = c(e - f) \ominus (de - f).$$

Aus $a + d < c + b$ und dem Monotoniegesetz der Multiplikation in $\mathbf{Q}_+$ erhalten wir

$$(a + d)(e - f) < (c + b)(e - f).$$

Das ist aber gleichbedeutend mit

$$a(e-f) \ominus b(e-f) < c(e-f) \ominus d\,(e-f),$$

also

$$(a \ominus b)\,(e \ominus f) < (c \ominus d)\,(e \ominus f).$$

In $\bar{\mathbf{Q}}$ ist jede Gleichung der Form $(a \ominus b) + x = c \ominus d$ lösbar, da

$$a \ominus b + ((b+c) \ominus (a+d)) = (a+b+c) \ominus (b+a+d) = c \ominus d$$

gilt.

Um eine Zahlenbereichserweiterung von $\mathbf{Q}_+$ mit Hilfe von $\bar{\mathbf{Q}}$ zu gewinnen, werden wir zeigen, daß $\bar{\mathbf{Q}}$ einen zu $\mathbf{Q}_+$ isomorphen Teilbereich enthält. Dazu betrachten wir die Menge $\bar{\mathbf{Q}}_+ = \{a \ominus 0\colon a \in \mathbf{Q}_+\}$. Wegen

$$a \ominus 0 = b \ominus 0 \Leftrightarrow a = b,$$

$$a \ominus 0 < b \ominus 0 \Leftrightarrow a < b,$$

$$(a \ominus 0) + (b \ominus 0) = (a+b) \ominus 0,$$

$$(a \ominus 0)\,(b \ominus 0) = (ab) \ominus 0$$

wird durch $a \mapsto a \ominus 0$ ein Isomorphismus f von $\mathbf{Q}_+$ auf $\bar{\mathbf{Q}}_+$ definiert. Wenn wir daher ein Element der Form $a \ominus 0$ mit der gebrochenen Zahl a identifizieren, erhalten wir aus $\bar{\mathbf{Q}}$ eine Zahlenbereichserweiterung von $\mathbf{Q}_+$, die wir mit $\mathbf{Q}$ bezeichnen.

Um den Übergang von $\bar{\mathbf{Q}}(<, +, \cdot)$ zu $\mathbf{Q}(<, +, \cdot)$ exakt vorzunehmen, setzen wir

$$\mathbf{Q} = (\bar{\mathbf{Q}} \setminus \bar{\mathbf{Q}}_+) \cup \mathbf{Q}_+$$

und definieren durch

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{wenn } x \in \bar{\mathbf{Q}} \setminus \mathbf{Q}_+, \\ f^{-1}(x), & \text{wenn } x \in \bar{\mathbf{Q}}_+ \end{cases}$$

eine eineindeutige Abbildung g von $\bar{\mathbf{Q}}$ auf $\mathbf{Q}$.

Addition, Multiplikation und Anordnung werden dann in $\mathbf{Q}$ durch

$$x + y := g(g^{-1}(x) + g^{-1}(y)),$$

$$x \cdot y := g(g^{-1}(x) \cdot g^{-1}(y)),$$

$$x < y :\Leftrightarrow g(x) < g(y)$$

definiert.

Der konstruierte Zahlenbereich $\mathbf{Q}$ erfüllt auch die Forderung c), da wegen der für jedes $a \ominus b$ aus $\bar{\mathbf{Q}}$ gültigen Gleichung $(b \ominus 0) + (a \ominus b) = a \ominus 0$ jedes Element aus $\mathbf{Q}$ als Differenz zweier Zahlen aus $\mathbf{Q}_+$ dargestellt werden kann.

Wir zeigen jetzt, daß $\mathbf{Q}(<, +, \cdot)$ bis auf Isomorphie *eindeutig bestimmt* ist. Als Erweiterung von $\mathbf{Q}_+$ mit den Eigenschaften a), b) und c) stimmt $\mathbf{Q}$ mit $\tilde{\mathbf{Q}}$ überein, d. h., jedes Element aus $\mathbf{Q}$ kann als Differenz von Elementen aus $\mathbf{Q}_+$ dargestellt

werden . Auf Grund von (1), (3) und (11) ist daher $\mathfrak{Q}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Wir haben folgenden Satz bewiesen:

Satz 1. *Für den Bereich* $\mathfrak{Q}_+(<, +, \cdot)$ *der gebrochenen Zahlen existiert eine (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmte Zahlenbereichserweiterung* $\mathfrak{Q}(<, +, \cdot)$, *die die Bedingungen* a), b), c) *erfüllt.*

Den Zahlenbereich $\mathfrak{Q}(<, +, \cdot)$ nennen wir den *Bereich der rationalen Zahlen.*

Wir wollen jetzt noch die Konstruktion von $\mathfrak{Q}(<, +, \cdot)$ durch Symmetrisierung vornehmen. Dazu wählen wir eine zu $\mathfrak{Q}_+$ gleichmächtige Menge $\mathfrak{Q}_-$ mit $\mathfrak{Q}_+ \cap \mathfrak{Q}_- = \{0\}$ und eine eineindeutige Abbildung f von $\mathfrak{Q}_+$ auf $\mathfrak{Q}_-$ mit $f(0) = 0$ aus. Auf $\mathfrak{Q} := \mathfrak{Q}_+ \cup \mathfrak{Q}_-$ erweitern wir zunächst die Addition von $\mathfrak{Q}_+$ durch folgende Festlegungen für beliebige a, b aus $\mathfrak{Q}_+$:

$$a + f(b) := \begin{cases} a - b, & \text{wenn } a \geqq b, \\ f(b - a), & \text{wenn } a < b, \end{cases}$$

$$f(a) + f(b) := f(a + b).$$

(Für $a = 0$ oder $b = 0$ beinhalten beide Festlegungen das gleiche.) Wegen $a = a + f(0)$, $f(a) = 0 + f(a)$ besitzt jedes Element aus $\mathfrak{Q}$ eine Darstellung der Form $a + f(b)$ $(a, b \in \mathfrak{Q}_+)$. Dabei gilt

(1′) $\quad a + f(b) = a' + f(b') \Leftrightarrow a + b' = a' + b.$

Beweis. Wegen $\mathfrak{Q}_+ \cap \mathfrak{Q}_- = \{0\}$ folgt aus $a + f(b) = a' + f(b')$

$$(a \geqq b \wedge a' \geqq b') \vee (a < b \wedge a' < b').$$

Im ersten Fall ist $a - b = a' - b'$ und daher $a + b' = b + a'$, im zweiten Fall $f(b - a) = f(b' - a')$ und daher $b - a = b' - a'$, also ebenfalls $a + b' = b + a'$. Ähnlich zeigt man, daß aus $a + b' = b + a'$ die Gleichung $a + f(b) = a' + f(b')$ folgt.

Wenn wir $a \ominus b$ für $a + f(b)$ schreiben, können wir in gleicher Weise fortfahren wie beim bereits dargelegten Konstruktionsverfahren, wobei als Vereinfachung $a \ominus 0$ schon mit der gebrochenen Zahl a übereinstimmt.

Durch den Satz 1 wird der Bereich der rationalen Zahlen auch algebraisch charakterisiert. Zu den bereits in $\mathfrak{Q}_+$ gültigen Strukturgesetzen kommt für den Bereich der rationalen Zahlen

(A2) $\quad \bigwedge_{a,b \in \mathfrak{Q}} \bigvee_{c \in \mathfrak{Q}} a + c = b$

als weiteres Strukturgesetz hinzu.

Eine Folgerung aus (A2) ist:

($A2_3$) $\quad \bigwedge_{a \in \mathfrak{Q}} \bigvee_{b \in \mathfrak{Q}} a + b = 0.$

Mit den gleichen Überlegungen wie am Schluß von 4.11. kann gezeigt werden, daß die beiden Gesetze $(A2_1)$, $(A2_2)$ dem Gesetz (A2) in dem Sinne gleichwertig sind, daß ein gegenseitiger Austausch in den Strukturgesetzen von $\mathbf{Q}$ erfolgen kann.

Ein Bereich, der die Strukturgesetze (A0), (A1), (A2), (A3); (M0), (M1), (M2), (M3); (M4); (O1), (O2), (O3) erfüllt, wird als algebraische Struktur ein *geordneter Körper* genannt. Den Satz 1 können wir auch in der folgenden Form aussprechen:

Satz 2 (algebraische Charakterisierung von $\mathbf{Q}$). *Der Bereich der rationalen Zahlen ist der kleinste geordnete Körper, der den Bereich der gebrochenen Zahlen als Teilstruktur enthält.*

Ist $K(<, +, \cdot)$ ein beliebiger geordneter Körper, der den Bereich der natürlichen Zahlen als Teilstruktur enthält, so bildet $K_+ = \{x : x \in K_1 \wedge x \geqq 0\}$ einen geordneten Halbkörper, der die natürlichen Zahlen enthält. Andererseits ist K durch K_+ genauso wie $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{Q}_+$ eindeutig bestimmt. Aus Satz 2 und dem Satz aus 4.11. erhalten wir daher:

Satz 3. *Der Bereich $\mathbf{Q}(<, +, \cdot)$ der rationalen Zahlen ist der kleinste geordnete Körper, der den Bereich $\mathbf{N}(<, +, \cdot)$ der natürlichen Zahlen enthält.*

Wir wollen nun noch eine Charakterisierung des Bereiches der rationalen Zahlen geben, bei der keine weiteren Zahlenbereiche herangezogen werden.

Satz 4. *Jeder geordnete Körper $K = K(<, +, \cdot)$ enthält einen zu $\mathbf{Q}(<, +, \cdot)$ isomorphen Teilbereich.*

Beweis. Mit o bezeichnen wir das Nullelement und mit e das Einselement von K. Es gilt $o < e$; denn aus $e < o$ würde $o < -e$ nach (O2) und daraus $e(-e) < o \cdot (-e)$ nach (O3) folgen, womit gleichzeitig $o < -e$ und $-e < o$ im Widerspruch zu (O1) gelten würde. Für jede natürliche Zahl n soll nun ne einen Sinn erhalten, indem ne durch $0e = o$ und $(n + 1)e = ne + e$ induktiv definiert wird. Damit ist $ne \in K$, und nach (O2) gilt $ne < (n + 1)e$ für alle n.

Nach (M2) besitzt für $n > 0$ jede Gleichung der Form $(ne) \cdot x = me$ in K genau eine Lösung, die wir mit $\frac{me}{ne}$ bezeichnen.

Für diese Quotienten gelten:

$$\frac{me}{ne} = \frac{m'e}{n'e} \Leftrightarrow mn' = m'n, \tag{15}$$

$$\frac{me}{ne} + \frac{m'e}{n'e} = \frac{(mn' + m'n)e}{(nn')e}, \tag{16}$$

$$\frac{me}{ne} \cdot \frac{m'e}{n'e} = \frac{(mm')e}{(nn')e}, \tag{17}$$

$$\frac{me}{ne} < \frac{m'e}{n'e} \Leftrightarrow mn' < m'n. \tag{18}$$

Diese Regeln können genauso bewiesen werden wie die entsprechenden Regeln für das Rechnen mit Quotienten in $\mathbf{Q}_+$ (vgl. 4.7., 4.1.). Aus den genannten Regeln folgt, daß durch die Zuordnung

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{me}{ne}, \qquad f\left(-\frac{m}{n}\right) = -\frac{me}{ne}$$

ein Isomorphismus von $\mathbf{Q}_+(<, +, \cdot)$ in $K(<, +, \cdot)$ definiert wird.

Durch den Satz 4 wird der geordnete Körper der rationalen Zahlen als der kleinste geordnete Körper charakterisiert.

Jeder geordnete Körper kann auch als Körper angesehen werden. Der Bereich $K = K(+, \cdot)$ wird ein *Körper* genannt, wenn für die Addition und Multiplikation von K die Strukturgesetze (A0), (A1), (A2), (A3), (M0), (M1), (M2), (M3) und (M4) gelten. Während jeder geordnete Körper aus unendlich vielen Elementen besteht, gibt es auch endliche Körper (vgl. 5.6., S. 79). Insbesondere gibt es daher auch Körper, in denen keine irreflexive totale Ordnung definiert werden kann, so daß damit ein geordneter Körper entsteht.

Eine Teilmenge K' eines Körpers K heißt *Teilkörper* von K, wenn K' ein Körper hinsichtlich der in K definierten Addition und Multiplikation ist. Man kann leicht zeigen, daß jeder Teilkörper von K das Nullelement von K als Nullelement und das Einselement von K als Einselement enthält und daß der Durchschnitt beliebig vieler Teilkörper eines Körpers K selbst wieder ein Teilkörper von K ist. Der Durchschnitt aller Teilkörper von K wird der *Primkörper* von K genannt.

Mit o bezeichnen wir wieder das Nullelement und mit e das Einselement von K. Man nennt K einen *Körper der Charakteristik* 0, wenn $ne \neq o$ für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 1$ gilt. Im Beweis von Satz 4 wurde gezeigt, daß jeder geordnete Körper ein Körper der Charakteristik 0 ist. Eine Verschärfung von Satz 4 ist der folgende

Satz 5. *Der Primkörper K_0 eines Körpers K der Charakteristik* 0 *ist isomorph zum Körper der rationalen Zahlen.*

Beweis. Der Primkörper K_0 enthält das Einselement e und daher auch alle Vielfachen ne. Da K ein Körper der Charakteristik 0 ist, gilt $ne \neq o$ für alle $n \in \mathbf{N}^*$. Bezeichnen wir wieder für $n \in \mathbf{N}^*$ mit $\frac{me}{ne}$ die Lösung der Gleichung $(ne)x = me$, so müssen diese Quotienten und die dazu entgegengesetzten Elemente $-\frac{me}{ne}$ ebenfalls zu K_0 gehören. Aus (15), (16) und (17) folgt nun (vgl. Beweis von Satz 4), daß

$$K' = \left\{\frac{me}{ne} : m,\ n \in \mathbf{N},\ n \neq 0\right\} \cup \left\{-\frac{me}{ne} : m,\ n \in \mathbf{N},\ n \neq 0\right\}$$

zu $\mathbf{Q}(+, \cdot)$ isomorph und daher ein Teilkörper von K ist. Wegen $K' \subseteq K_0$ und der Definition des Primkörpers muß $K' = K_0$ gelten. Der Primkörper K_0 ist also isomorph zum Körper der rationalen Zahlen.

5.3. Positive und negative rationale Zahlen, Rechnen mit Ungleichungen

Nach (12) aus 5.2. besteht $\mathbb{Q}$ aus den gebrochenen Zahlen und den zu den gebrochenen Zahlen entgegengesetzten Zahlen:

(1) $\quad \mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- = \mathbb{Q}_+ \cup \{-a : a \in \mathbb{Q}_+\}.$

Die von Null verschiedenen Zahlen aus $\mathbb{Q}_+$ heißen auch *positive rationale Zahlen*, die von Null verschiedenen Zahlen aus $\mathbb{Q}_-$ entsprechend *negative rationale Zahlen*. Jede positive rationale Zahl ist größer als Null (vgl. 4.4. (5)).

Wir zeigen, daß jede negative rationale Zahl kleiner als Null ist:

(2) $\quad a \in \mathbb{Q}_- \wedge a \neq 0 \Rightarrow a < 0.$

Nach (5) aus 5.2. folgt aus $a \in \mathbb{Q}_-$ nämlich $-a \in \mathbb{Q}_+$ und daher $0 < -a$. Nach (O2) ergibt sich daraus $a < a + (-a)$ und daher $a < 0$.

Auf Grund von (1) kann eine Bezeichnungsweise für gebrochene Zahlen sofort zu einer Bezeichnungsweise der rationalen Zahlen erweitert werden, indem für eine negative Zahl das Zeichen „$-$“ als Vorzeichen benutzt wird, d. h., vor das Zeichen für eine gebrochene Zahl a wird das Zeichen „$-$“ gesetzt. So bezeichnet $-\frac{3}{2}$ die zur gebrochenen Zahl $\frac{3}{2}$ entgegengesetzte Zahl bzw. $-0{,}53$ die zur gebrochenen Zahl $0{,}53$ entgegengesetzte Zahl. Vielfach wird für die positiven rationalen Zahlen das Zeichen „$+$“ als Vorzeichen benutzt, d. h., man schreibt auch $+\frac{3}{2}$ statt $\frac{3}{2}$ bzw. $+0{,}53$ statt $0{,}53$.

Es ist zu beachten, daß das Zeichen „$-$“ in verschiedenen Bedeutungen benutzt wird:

a) Als Vorzeichen zur Bezeichnung der negativen rationalen Zahlen.

b) Zur Bezeichnung der zu einer beliebigen (rationalen) Zahl entgegengesetzten Zahl.

c) Zur Bezeichnung der Differenz zweier (rationaler) Zahlen.

Alle Rechengesetze für das Rechnen mit gebrochenen Zahlen, die ohne Benutzung von (O3) aus den in $\mathbb{Q}_+$ gültigen Strukturgesetzen hergeleitet werden können, gelten in gleicher Weise auch in $\mathbb{Q}$. Dazu gehören insbesondere die Rechenregeln für Quotienten (2), (3), (4), (6), (8), (9) und (7) ohne die Einschränkung $\frac{a}{b} \geqq \frac{c}{d}$ aus 4.7.

Potenzen der Form a^n mit $a \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}$ werden wieder durch $a^0 := 1$, $a^{n+1} := a^n \cdot a$ induktiv definiert. Es gelten dann ebenfalls die Potenzgesetze (13), (14), (15), aus 4.7.

Beim Rechnen mit Ungleichungen muß beachtet werden, daß die Bedingung $c > 0$ in (O3) für $\mathbb{Q}$ eine Einschränkung bedeutet, während hingegen in $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{Q}_+$ alle von Null verschiedenen Elemente diese Bedingung erfüllen. Es gelten folgende Rechenregeln für Ungleichungen:

(3) $0 < a \Leftrightarrow -a < 0$;

(4) $a < b \Leftrightarrow a - b < 0 \Leftrightarrow -b < -a \Leftrightarrow 0 < b - a$;

(5) $a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d$;

(6) $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow bc < ac$;

(7) $a < b \wedge 0 \leqq c < d \wedge 0 < b \Rightarrow ac < bd$;

(8) $0 < a \wedge 0 < b \Rightarrow 0 < ab$,
$a < 0 \wedge b < 0 \Rightarrow 0 < ab$,
$a < 0 \wedge 0 < b \Rightarrow ab < 0$;

(9) $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$;

(10) $0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$,

$a < b < 0 \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$;

(11) $a < b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$.

Beweise.

Zu (3). $0 < a \Rightarrow 0 + (-a) < a + (-a) \Rightarrow -a < 0$.

Zu (4). $a < b \Leftrightarrow a + (-b) < b + (-b) \Leftrightarrow a - b < 0$
$\Leftrightarrow -a + (a - b) < -a \Leftrightarrow -b < -a$
$\Leftrightarrow -b + b < -a + b \Leftrightarrow 0 < b - a$.

Zu (5). Vergleiche (6) aus 4.4.

Zu (6). $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow a < b \wedge -c > 0$
$\Rightarrow a(-c) < b(-c) \Rightarrow -ac < -bc \Rightarrow bc < ac$.

Zu (7). $a < b \wedge 0 \leqq c < d \wedge 0 < b \Rightarrow ac \leqq bc \wedge bc < bd \Rightarrow ac < bd$.

Zu (8). Für den Fall $a > 0$ und $b > 0$ ist das ein Spezialfall von (O3).
$a < 0 \wedge b < 0 \Rightarrow 0 < -a \wedge 0 < -b \Rightarrow 0 < (-a)(-b) \Rightarrow 0 < ab$.
$a < 0 \wedge 0 < b \Rightarrow 0 < (-a)b \Rightarrow ab < 0$.

Zu (9). Durch Fallunterscheidung folgt (9) unmittelbar aus (8).

Zu (10). Die erste Aussage stimmt mit (10) aus 4.7. überein;

$$a < b < 0 \Rightarrow 0 < -b < -a \Rightarrow 0 < \frac{1}{-a} < \frac{1}{-b} \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0.$$

Zu (11). $a < b \Rightarrow a + b < 2b \wedge 2a < a + b$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{2} < b \wedge a < \frac{a+b}{2} \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b.$$

Wir wollen jetzt noch die Veranschaulichung der gebrochenen Zahlen auf einer Geraden g in naheliegender Weise zu einer Veranschaulichung der rationalen Zahlen auf g erweitern. Aus der Zielstellung heraus, Ergebnisse von Messungen in zwei entgegengesetzte Richtungen durch Maßzahlen auszudrücken, wird einer negativen Zahl $-a$ ($a \in \mathbb{Q}_+$) auf der Geraden g der Punkt P_{-a} zugeordnet, der zu P_a bezüglich P_0 symmetrisch liegt. Wegen (1) werden auf diese Weise sämtliche rationalen Zahlen auf g durch Punkte veranschaulicht. Aus (4) ist ersichtlich, daß durch diese Veranschaulichung die Anordnung der rationalen Zahlen berücksichtigt wird. Durch die zum Nullpunkt P_0 symmetrische Lage von P_a und P_{-a} wird der Tatsache Rechnung getragen, daß die Länge einer Meßgröße nicht von der Richtung abhängt, in die sie gelegt wird. Die Punkte der Geraden g, die eine rationale Zahl repräsentieren, nennen wir *rationale Punkte*. Wir werden später zeigen (vgl. den Schluß von 5.6.), daß es auf der Geraden g auch nichtrationale Punkte, sogenannte irrationale Punkte, gibt. Eine zur Veranschaulichung der rationalen Zahlen gewählte Gerade g wird *Zahlengerade* genannt.

5.4. Beschränkte und unbeschränkte Mengen (Schranken, Maximum, Minimum, Supremum, Infimum)

Durch die folgenden Begriffsbildungen werden die Teilmengen einer geordneten Menge hinsichtlich ihrer Lage in der gesamten Menge charakterisiert.

Definition 1. Es sei X eine beliebige Menge und „$\leqq$" eine reflexive totale Ordnung in X. Es sei ferner A eine (nichtleere) Teilmenge von X und s ein Element von X. Wir definieren:

s *obere Schranke* von A in X: $\Leftrightarrow \bigwedge_a (a \in A \Rightarrow a \leqq s)$,

s *untere Schranke* von A in X: $\Leftrightarrow \bigwedge_a (a \in A \Rightarrow a \geqq s)$,

A *nach oben beschränkt* in X: $\Leftrightarrow \bigvee_{s \in X} (s$ obere Schranke von A in $X)$,

A *nach unten beschränkt* in X: $\Leftrightarrow \bigvee_{s \in X} (s$ untere Schranke von A in $X)$,

A beschränkt in X: $\Leftrightarrow$ A nach oben beschränkt in $X \wedge A$ nach unten beschränkt in X.

Beispiele.

1. $X = \mathbf{Q}$, $A_1 = \{x : x \in X \wedge 0 \leqq x < 1\}$;
2. $X = \mathbf{Q}_+$, $A_2 = \{x : x \in X \wedge 0 < x \leqq 1\}$;
3. $X = \mathbf{Q}$, $A_3 = \mathbf{N}$;
4. $X = \mathbf{Q}_+$, $A_4 = \{x : x \in X \wedge x^2 < 2\}$;
5. $X = \mathbf{Q}$, $A_5 = \mathbf{Q}$.

In Beispiel 1 ist 1 eine obere und 0 eine untere Schranke von A_1. Jede größere Zahl als 1 ist ebenfalls eine obere, jede kleinere Zahl als 0 ebenfalls eine untere Schranke.

In Beispiel 2 ist wiederum 1 eine obere und 0 eine untere Schranke von A_2. Im Unterschied zum Beispiel 1 ist hier 0 die einzige untere Schranke.

In Beispiel 3 ist A_3 nach unten, aber nicht nach oben beschränkt. Die Menge der natürlichen Zahlen ist in $\mathbf{Q}$ also nicht beschränkt.

In Beispiel 4 ist A_4 nach oben und nach unten beschränkt.

In Beispiel 5 ist A_5 weder nach oben noch nach unten beschränkt.

Im Bereich der rationalen Zahlen besitzt jede nach oben beschränkte Teilmenge unendlich viele obere, jede nach unten beschränkte Teilmenge unendlich viele untere Schranken (Übungsaufgabe).

Definition 2. Es sei A eine nichtleere Teilmenge von X. Wir definieren:

$$m \textit{ Maximum} \text{ von } A : \Leftrightarrow m \in A \wedge \bigwedge_a (a \in A \Rightarrow a \leqq m),$$

$$m \textit{ Minimum} \text{ von } A : \Leftrightarrow m \in A \wedge \bigwedge_a (a \in A \Rightarrow m \leqq a).$$

Aus der Antisymmetrie der reflexiven totalen Ordnung ergibt sich sofort, daß eine Menge höchstens ein Maximum bzw. höchstens ein Minimum besitzen kann. Eine Menge braucht kein Maximum bzw. Minimum zu besitzen. Im Falle der Existenz ist das Maximum (Minimum) einer Menge eine obere (untere) Schranke dieser Menge. Es ist definitionsgemäß dann das „größte" (bzw. „kleinste") Element der Menge. Mit $\max A$ bezeichnen wir das Maximum, mit $\min A$ das Minimum der Menge A.

Wir betrachten als Beispiele die oben genannten Teilmengen A_1 bis A_5:

A_1 besitzt 0 als Minimum und kein Maximum. Für $a' = \max A_1$ müßte nämlich wegen $a' \in A_1$ die Beziehung $0 \leqq a' < 1$ und daher $0 \leqq \frac{a'+1}{2} < 1$ gelten. Also würde $\frac{a'+1}{2}$ ebenfalls zu A_1 gehören und $a' < \frac{a'+1}{2}$ erfüllen. Damit kann a' kein Maximum sein.

A_2 besitzt 1 als Maximum und kein Minimum (Übungsaufgabe).

A_3 besitzt 0 als Minimum und kein Maximum (Übungsaufgabe).

A_4 besitzt 0 als Minimum und kein Maximum.

A_5 besitzt weder ein Minimum noch ein Maximum (Übungsaufgabe).

Definition 3. Es sei A eine nichtleere Teilmenge von X und $g \in X$. Wir definieren:

g obere Grenze (Supremum) von A in X
$:\Leftrightarrow g$ Minimum von $\{s: s$ obere Schranke von A in $X\}$,

g untere Grenze (Infimum) von A in X
$:\Leftrightarrow g$ Maximum von $\{s: s$ untere Schranke von A in $X\}$.

Als Minimum der Menge der oberen Schranken bzw. Maximum der Menge der unteren Schranken sind das Supremum bzw. Infimum einer Menge eindeutig bestimmt. Eine Menge A kann höchstens dann ein Supremum (Infimum) besitzen, wenn A nach oben (unten) beschränkt ist. Im Falle der Existenz ist das Supremum (Infimum) definitionsgemäß die „kleinste" obere Schranke („größte" untere Schranke). Mit $\sup A$ bezeichnen wir das Supremum, mit $\inf A$ das Infimum der Menge A.

Die im Beispiel 1 genannte Menge A_1 besitzt 0 als Infimum und 1 als Supremum (Übungsaufgabe). Das Infimum stimmt also mit dem Minimum überein. Diese Menge hat zwar ein Supremum, aber kein Maximum.

Die Menge A_2 in Beispiel 2 besitzt ebenfalls 0 als Infimum und 1 als Supremum. Hier existiert weiterhin ein Maximum, das mit dem Supremum übereinstimmt, aber kein Minimum.

Im Beispiel 4 ist A_4 zwar nach oben beschränkt, besitzt aber kein Supremum. Den Nachweis führen wir indirekt, indem wir aus der Annahme der Existenz von $x' = \sup A$ einen Widerspruch herleiten. Wegen $X = \mathbb{Q}_+$ muß x' eine gebrochene Zahl sein. Da bekanntlich keine (vgl. Folgerung aus Satz 3 in 5.6.) gebrochene Zahl existiert, deren Quadrat 2 ist, muß $x'^2 < 2$ oder $x'^2 > 2$ gelten. $x'^2 < 2$: Es sei n eine von 0 verschiedene natürliche Zahl, die wir noch genauer festlegen. Wir setzen jetzt $x_0 = x' + \frac{1}{n}$. Es gilt

$$\left(x' + \frac{1}{n}\right)^2 = x'^2 + \frac{2x'}{n} + \frac{1}{n^2} < x'^2 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n} = x'^2 + \frac{5}{n}.$$

Wir wählen n so groß, daß $n > \frac{5}{2 - x'^2}$ und daher $\frac{5}{n} < 2 - x'^2$ gilt. Damit wird $\left(x' + \frac{1}{n}\right)^2 < x'^2 + 2 - x' = 2$, d. h., $x' + \frac{1}{n}$ ist eine gebrochene Zahl, die zur Menge A gehört. Also kann x' keine obere Schranke von A sein.

$x'^2 > 2$: Wir werden jetzt eine noch kleinere obere Schranke von A konstruieren, die wir in der Form $x' - \frac{1}{n}$ ansetzen. Es ist $\left(x' - \frac{1}{n}\right)^2 = x'^2 - \frac{2x'}{n} + \frac{1}{n^2} > x'^2 - \frac{2x'}{n}$. Wir wählen n jetzt so groß, daß $\frac{2x'}{n} < x'^2 - 2$ und daher $-\frac{2x'}{n} > 2 - x'^2$ wird. Daraus folgt

$$\left(x' - \frac{1}{n}\right)^2 > x'^2 - \frac{2x'}{n} > x'^2 + 2 - x'^2 = 2.$$

Damit ist $x' - \frac{1}{n}$ eine gebrochene Zahl und obere Schranke von A, die kleiner als x' ist.

Den in den Beispielen festgestellten Zusammenhang zwischen Maximum, Minimum einerseits und Supremum, Infimum andererseits formulieren wir allgemein in dem

Satz 1.

m Maximum von $A \Rightarrow m$ Supremum von A,
m Minimum von $A \Rightarrow m$ Infimum von A.

Beweis. Wir beschränken uns auf den Nachweis der Aussagen über Maximum und Supremum. Ist nun m Maximum von A, so ist m eine obere Schranke. Da m ein Element von A ist, muß m kleiner oder gleich sein als jede obere Schranke von A. Also ist m Minimum der Menge der oberen Schranken.

Wir bemerken, daß die Umkehrungen von Satz 1 im allgemeinen nicht gelten, d. h., eine nach oben (unten) beschränkte Menge, die kein Maximum (Minimum) hat, kann ein Supremum (Infimum) besitzen.

Für endliche Teilmengen einer geordneten Menge gilt:

Satz 2. *Jede endliche nichtleere Teilmenge einer geordneten Menge hat ein Maximum und ein Minimum.*

Beweis. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion über die Anzahl der Elemente. Jede einelementige Teilmenge besitzt offensichtlich ein Maximum und ein Minimum. Wir nehmen nun an, daß für die natürliche Zahl $k \geqq 1$ alle k-elementigen Teilmengen einer geordneten Menge ein Maximum und ein Minimum haben. Bezeichnet dann A eine $(k+1)$-elementige Teilmenge und a irgendein Element von A so ist $A \setminus \{a\}$ ein k-elementige Teilmenge. Diese besitzt nach Induktionsvoraussetzung ein Maximum m_1 und ein Minimum m_2. Wegen der Linearität der reflexiven totalen Ordnung sind m_1 und m_2 mit a vergleichbar. Also existieren $m' = \max\{a, m_1\}$ und $m'' = \min\{a, m_2\}$. Es gilt dann $m' = \max A$ und $m'' = \min A$.

5.5. Der absolute Betrag einer rationalen Zahl

Für eine von Null verschiedene rationale Zahl ist von den beiden Zahlen a und $-a$ genau eine positiv. Bei zahlreichen Betrachtungen wird es darauf ankommen, a durch diese positive Zahl zu ersetzen bzw. diese positive Zahl abzuschätzen.

Definition. Für jede rationale Zahl a setzen wir

$$(1) \qquad |a| := \begin{cases} a \text{ für } a \geqq 0, \\ -a \text{ für } a < 0 \end{cases}$$

und nennen $|a|$ den (*absoluten*) *Betrag* von a.

Offensichtlich ist für $a \neq 0$ der Betrag von a die positive der beiden Zahlen a und $-a$ und folglich auch die größere dieser beiden Zahlen. Es gilt also:

$$(2) \qquad |a| = \max\{a, -a\}.$$

Bei der Veranschaulichung der rationalen Zahlen auf einer Zahlengeraden beschreibt $|a|$ den Abstand des Punktes P_a vom Nullpunkt P_0 und $|a - b|$ den Abstand der Punkte P_a und P_b voneinander.

Für Rechnungen, in denen der absolute Betrag eine Rolle spielt, sind folgende Regeln grundlegend:

$$(3) \qquad |a| \geqq 0, \qquad |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0;$$

$$(4) \qquad |-a| = |a|, \qquad |b - a| = |a - b|;$$

$$(5) \qquad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \qquad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0), \qquad |a^n| = |a|^n;$$

$$(6) \qquad |a| < c \Leftrightarrow -c < a < c, \qquad |a| \leqq c \Leftrightarrow -c \leqq a \leqq c;$$

$$(7) \qquad |a + b| \leqq |a| + |b|, \qquad |a - b| \leqq |a - c| + |c - b| \text{ (Dreiecksungleichung)}$$

$$(8) \qquad \left|\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right| \leqq \sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu|;$$

$$(9) \qquad \big||a| - |b|\big| \leqq |a - b|;$$

$$(10) \qquad \bigwedge_c (c \in \mathbb{Q} \wedge c > 0 \Rightarrow |a| < c) \Rightarrow a = 0,$$

d. h., gilt $|a| < c$ für jede positive rationale Zahl c, so ist $a = 0$.

Beweise. Die Aussagen (3) und (4) sind unmittelbare Folgerungen aus der Definition des absoluten Betrages.

Die Aussage $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ ergibt sich einfach durch Unterscheidung der Fälle $a \cdot b = 0$, $a \cdot b > 0$, $a \cdot b < 0$ (Übungsaufgabe). Die Gleichung $|a^n| = |a|^n$ kann dann mit Hilfe vollständiger Induktion bewiesen werden. Für $b \neq 0$ erhalten wir $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

aus $\left|\frac{a}{b}\right| = \left|a\,\frac{1}{b}\right| = |a|\left|\frac{1}{b}\right|$, da wegen $|b|\left|\frac{1}{b}\right| = \left|b\,\frac{1}{b}\right| = |1| = 1$ die Gleichung $\left|\frac{1}{b}\right| = \frac{1}{|b|}$ gilt. Damit ist (5) bewiesen. Die Aussage (6) erhalten wir aus (2), da $\max\{a, -a\} < c$ den Aussagen $a < c$, $-a < c$ und daher zu $-c < a < c$ gleichwertig ist. Hierbei kann „$<$“ durch „$\leqq$“ ersetzt werden.

Um die Dreiecksungleichung in der Form $|a + b| \leqq |a| + |b|$ zu erhalten, betrachten wir die Ungleichungen

$$a \leqq |a|, \quad -a \leqq |a|; \qquad b \leqq |b|, \quad -b \leqq |b|,$$

aus denen $a + b \leqq |a| + |b|$ und $-(a + b) \leqq |a| + |b|$ folgen. Wegen (2) gilt daher $|a + b| \leqq |a| + |b|$. Die Dreiecksungleichung in der Form $|a - b| \leqq |a - c| + |c - b|$ erhalten wir aus der soeben bewiesenen, indem wir dort a durch $a - c$ und b durch $c - b$ ersetzen. Die Aussage (8) ergibt sich aus (7) durch vollständige Induktion (Übungsaufgabe).

Zum Nachweis von (9) betrachten wir die Abschätzungen

$$|a| = |(a - b) + b| \leqq |a - b| + |b|,$$

$$|b| = |(b - a) + a| \leqq |b - a| + |a| = |a - b| + |a|,$$

aus denen

$$-|a - b| \leqq |a| - |b| \leqq |a - b|$$

und nach (6) daher

$$\big||a| - |b|\big| \leqq |a - b|$$

folgt.

Den Beweis von (10) führen wir indirekt. Aus der Annahme $a \neq 0$ ergibt sich $|a| > 0$. Mit $c = \frac{|a|}{2}$ haben wir der Voraussetzung widersprechend eine positive rationale Zahl gefunden, für die $c < |a|$ gilt.

5.6. Der Bereich der ganzen Zahlen

Die natürlichen Zahlen nehmen im Bereich der gebrochenen Zahlen eine Sonderstellung ein. Jede gebrochene Zahl läßt sich als Quotient zweier natürlicher Zahlen darstellen. Der Zahlenbereich $\mathbf{Q}_+$ wird also durch die Umkehrung der Multiplikation natürlicher Zahlen in $\mathbf{Q}$ erzeugt.

Wir wollen jetzt den Zahlenbereich betrachten, der durch die Umkehrung der Addition natürlicher Zahlen in $\mathbf{Q}$ entsteht.

Eine Differenz $m - n$ natürlicher Zahlen m, n ist für $m \geqq n$ eine natürliche, für $m < n$ eine zu einer natürlichen Zahl entgegengesetzte Zahl. Andererseits kann jede natürliche Zahl und jede zu einer natürlichen Zahl entgegengesetzte Zahl als Differenz natürlicher Zahlen dargestellt werden. Es gilt daher

$$(1) \qquad \{m - n : m, n \in \mathbf{N}\} = \mathbf{N} \cup \{-m : m \in \mathbf{N}\}.$$

Wir setzen $\mathbf{Z} := \mathbf{N} \cup \{-m : m \in \mathbf{N}\}$ und nennen die Zahlen aus $\mathbf{Z}$ *ganze Zahlen* bzw. $\mathbf{Z}$ den *Bereich der ganzen Zahlen*. Die besondere Stellung der ganzen Zahlen im Bereich der rationalen Zahlen resultiert daraus, daß $\mathbf{Z}$ einen geordneten Halbring bildet, in dem darüber hinaus noch das Strukturgesetz (A2) gilt. In $\mathbf{Z}$ gelten also die Strukturgesetze (A0), (A1), (A2), (A3); (M0), (M1), ($M2_1$), (M3); (M4); (O1), (O2), (O3). Als algebraische Struktur bildet $\mathbf{Z}$ damit einen geordneten Ring.

Satz 1 (algebraische Charakterisierung von $\mathbf{Z}$). *Der Bereich* $\mathbf{Z}\,(<, +, \cdot)$ *der ganzen Zahlen ist bis auf Isomorphie der kleinste geordnete Ring, der den Bereich* $\mathbf{N}(<, +, \cdot)$ *der natürlichen Zahlen als Teilstruktur enthält.*

Beweis. Daß $\mathbf{Z}$ ein geordneter Ring ist, folgt wegen (1) aus den in 5.2. genannten Regeln (3), (10) und (11) für das Rechnen mit Differenzen sowie aus den Strukturgesetzen von $\mathbf{Q}$. Da jeder geordnete Ring, der die natürlichen Zahlen enthält, wegen (A2) auch die Differenzen natürlicher Zahlen enthalten muß, ist $\mathbf{Z}$ der kleinste geordnete Ring, der $\mathbf{N}(<, +, \cdot)$ enthält.

Ein Vergleich von $\mathbf{Z}$ und $\mathbf{Q}_+^*$ als Erweiterungen von $\mathbf{N}$ bzw. $\mathbf{N}^*$ zeigt, daß die ganzen Zahlen hinsichtlich der Addition das gleiche leisten wie die gebrochenen Zahlen hinsichtlich der Multiplikation. Die Aussage (1) bringt aber eine bevorzugte Stellung der Addition in $\mathbf{N}$ gegenüber der Multiplikation in $\mathbf{N}^*$ zum Ausdruck. Während $\mathbf{Z}$ aus $\mathbf{N}$ durch Symmetrisierung, d. h. durch Hinzunahme der zu den natürlichen Zahlen entgegengesetzten Zahlen entsteht, wird der Übergang von $\mathbf{N}^*$ zu $\mathbf{Q}_+^*$ nicht allein durch Hinzunahme der zu den natürlichen Zahlen reziproken Zahlen verwirklicht. In der Zahlenmenge $\mathbf{N}^* \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}^*\right\}$ sind Addition und Multiplikation keine Operationen.

Eine rationale Zahl a ist offensichtlich genau dann eine ganze Zahl, wenn $|a|$ eine natürliche Zahl ist. Sind a, b ganze Zahlen und $a \neq 0$, so können wir daher die Frage nach der Lösbarkeit von $a \cdot x = b$ in $\mathbf{Z}$ auf eine entsprechende Frage in $\mathbf{N}$ zurückführen:

$$(2) \qquad a \cdot x = b \text{ ist in } \mathbf{Z} \text{ genau dann lösbar, wenn } |a| \cdot x = |b| \text{ in } \mathbf{N} \text{ lösbar ist.}$$

Beweis. Ist $c \in \mathbf{Z}$ eine Lösung von $a \cdot x = b$, so gilt $|a| \cdot |c| = |b|$, d. h., $|c|$ ist eine Lösung von $|a| \cdot x = |b|$ in $\mathbf{N}$. Wenn umgekehrt $|a| \cdot x = |b|$ eine Lösung in $\mathbf{N}$ besitzt, folgt $a \cdot n = b$ oder $-(a \cdot n) = b$. Eine der beiden ganzen Zahlen n, $-n$ ist daher eine Lösung von $a \cdot x = b$.

Unter Verwendung der Teilbarkeitsrelation[1])

$$(3) \qquad a|b :\Leftrightarrow \bigvee_{c\in\mathbf{Z}} ac = b$$

können wir für (2) auch schreiben:

$$(4) \qquad a|b \Leftrightarrow |a| \mid |b| \qquad (a, b \in \mathbf{Z}).$$

Die Teilbarkeitstheorie in Z weist geringfügige Unterschiede zur Teilbarkeitstheorie in N auf. Diese lassen sich darauf zurückführen, daß in einer Teilbarkeitsbeziehung $a|b$ die Zahlen a oder b durch $-a$ bzw. $-b$ ersetzt werden können. Die Zahl 1 besitzt daher 1 und -1 und jede von 0, 1 und -1 verschiedene ganze Zahl a die vier Zahlen a, $-a$, 1, -1 als „triviale" Teiler. Die Teilbarkeitsrelation in Z ist keine reflexive teilweise Ordnung, da aus $a|b$ und $b|a$ nur auf $|a| = |b|$ geschlossen werden kann.

Die Aussage (4) gibt uns die Möglichkeit, Teilbarkeitseigenschaften ganzer Zahlen aus Teilbarkeitseigenschaften natürlicher Zahlen zu gewinnen. Den dazu erforderlichen Übergang von a zu $|a|$ werden wir in der folgenden Definition des größten gemeinsamen Teilers und des kleinsten gemeinsamen Vielfachen ganzer Zahlen berücksichtigen.

Wir definieren für beliebige a, b aus Z:

$$(5) \qquad a \sqcap b := |a| \sqcap |b|,$$

$$(6) \qquad a \sqcup b := |a| \sqcup |b|,$$

wobei auf der rechten Seite dieser Gleichungen die für den Zahlenbereich N erklärten Bildungen gemeint sind. Die beiden ganzen Zahlen a und b heißen zueinander *teilerfremd*, wenn $a \sqcap b = 1$ gilt.

Die für den größten gemeinsamen Teiler, das kleinste gemeinsame Vielfache und die Teilerfremdheit im Bereich N gewonnenen Aussagen lassen sich sinngemäß auf diese Begriffsbildungen für ganze Zahlen übertragen. Dabei ist zu beachten, daß in diesen Aussagen ganze Zahlen, die nicht durch die Zeichen „|", „$\sqcap$", „$\sqcup$" gebunden sind, durch ihre Beträge zu ersetzen sind. So ergibt sich beispielsweise aus der Regel $a(b \sqcap c) = (ab) \sqcap (ac)$ (vgl. MfL Bd. 1, 3.7. (23)) für den Bereich der ganzen Zahlen $|a|(b \sqcap c) = (ab) \sqcap (ac)$. Durch die Forderungen (14a), (14b) bzw. (32a), (32b), aus MfL Bd. 1, 3.7. werden der größte gemeinsame Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache im Bereich der ganzen Zahlen nur dem Betrage nach bestimmt. Die für den Bereich Z gegebene Definition bedeutet gegenüber (14a), (14b) bzw. (32a), (32b) eine zusätzliche Normierung durch Auswahl der positiven Repräsentanten.

Da jede negative ganze Zahl in eindeutiger Weise als Produkt einer natürlichen Zahl und der Zahl -1 dargestellt werden kann, können wir die Ergebnisse über Primzahlen und die Primzahlzerlegung natürlicher Zahlen unmittelbar für die Teilbarkeits-

[1]) Die in N erklärte Teilbarkeitsrelation ist offensichtlich die Einschränkung der hiermit in Z definierten Teilbarkeitsrelation.

lehre in Z nutzen. Insbesondere erhalten wir aus dem Hauptsatz über die eindeutige Primzahlzerlegung (vgl. MfL Bd. 1, 3.7. (56')) für ganze Zahlen den

Satz 2 (Primzahlzerlegung ganzer Zahlen). *Jede von Null verschiedene ganze Zahl a besitzt genau eine Darstellung der Form* $a = \varepsilon \prod_{p \in P} p^{\exp_p(a)}$, *wobei ε eine der beiden Zahlen* $1, -1$ *und* $\exp_p(a)$ *durch* $\exp_p(a) = \max\{\nu: \nu \in \mathbb{N} \wedge p^\nu | a\}$ *bestimmt ist.*

Kongruenzen modulo m, wobei m wieder eine von 0 verschiedene natürliche Zahl sein soll (vgl. MfL Bd. 1, 3.7.), lassen sich durch

$$a \equiv b \bmod m :\Leftrightarrow m \mid a - b \tag{7}$$

auf Z erweitern. Das Rechnen mit Kongruenzen in Z führt gegenüber dem Rechnen mit Kongruenzen in N zu Vereinfachungen. Bei konkreten Aufgaben, die mit Hilfe von Kongruenzen zu lösen sind, kommt es vielfach darauf an, für eine Kongruenz der Form $x \equiv a \bmod m$ eine dem Betrage nach möglichst kleine Lösung zu finden. Wie das Beispiel $x \equiv 19 \bmod 10$ zeigt, ist das in Z oft besser erfüllbar als in N. Kongruenzen in Z mit gleichem Modul können addiert, multipliziert und darüber hinaus auch subtrahiert werden.

Die Kongruenz modulo m ist auch in Z eine Äquivalenzrelation R_m und führt zu einer Zerlegung von Z in m Restklassen, die wir mit $k_i^{(m)}$ $(i = 0, \ldots, m-1)$ bezeichnen:

$$k_i^{(m)} := \{a: a \in \mathbb{Z} \text{ und } a \equiv i \bmod m\}. \tag{8}$$

Die Restklasse $k_i^{(m)}$ enthält also die in MfL Bd. 1, 3.7. erklärte Restklasse $K_i^{(m)}$ als Teilmenge und entsteht aus dieser durch Hinzunahme der zu i modulo m kongruenten negativen ganzen Zahlen. Es gilt z. B.

$$K_3^{(7)} = \{3, 10, 17, 24, \ldots\},$$
$$k_3^{(7)} = \{\ldots, -25, -18, -11, -4, 3, 10, 17, 24, \ldots\}.$$

In der Menge $\mathbb{Z}/R_m = \{k_0^{(m)}, \ldots, k_{m-1}^{(m)}\}$ können wir genauso eine Addition „$\tilde{+}$" und eine Multiplikation „$\tilde{\cdot}$" wie in $\mathbb{N}/R_m$ erklären. Die Bereiche $(\mathbb{N}/R_m, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ und $(\mathbb{Z}R_m, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ sind dann zueinander isomorph, da durch $K_i^{(m)} \mapsto k_i^{(m)}$ ein Isomorphismus zwischen diesen beiden Bereichen erklärt wird. Für diese Bereiche gelten die Strukturgesetze (A0), (A1), (A2), (A3); (M0), (M1), $(M2_1)$, (M3), (M4).

Bezüglich der Addition, Multiplikation und Subtraktion kann man also mit den Restklassen modulo m genauso rechnen wie mit ganzen Zahlen. Der Bereich $(\mathbb{Z}/R_m, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ bildet für $m > 1$ als algebraische Struktur einen Ring. Wir nennen $(\mathbb{Z}/R_m, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ daher auch den *Restklassenring* modulo m.

Eine Kongruenz der Form $a \cdot x \equiv b \bmod m$ mit $a \not\equiv 0 \bmod m$ braucht nicht lösbar und im Falle der Lösbarkeit nicht eindeutig lösbar zu sein. In 5.7. wird gezeigt, daß $ax \equiv b \bmod m$ genau dann eindeutig lösbar ist, wenn a und m teilerfremd sind. Daraus folgt, daß der Restklassenring modulo m genau dann (M2) erfüllt und daher als algebraische Struktur einen Körper bildet, wenn m eine Primzahl ist.

Gilt $a \in k_i^{(m)}$, so wollen wir für $k_i^{(m)}$ auch die Bezeichnung $[a]_m$ benutzen. Für diese Darstellung der Restklassen ergibt sich:

(9) $\quad [a]_m = [b]_m \Leftrightarrow a \equiv b \bmod m,$

(10) $\quad [a]_m \mathbin{\tilde{+}} [b]_m = [a \pm b]_m,$

(11) $\quad [a]_m \mathbin{\tilde{\cdot}} [b]_m = [ab]_m.$

Im Unterschied zu $(\mathsf{N}/R_m, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ kann die Subtraktion in $(\mathsf{Z}/R_m, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ genauso wie die Addition und Multiplikation repräsentantenweise vorgenommen werden.

Für die von Null verschiedene (rationale) Zahl a wollen wir jetzt noch den Begriff der Potenz auf ganzzahlige Exponenten erweitern. Wir definieren dazu für $n \in \mathsf{N}^*$

(12) $\quad a^{-n} := \dfrac{1}{a^n}.$

Die bereits benutzte Schreibweise a^{-1} für die zu a inverse Zahl steht mit dieser Definition in Übereinstimmung. Es gelten wieder die Potenzgesetze:

(13) $\quad a^{m+n} = a^m \cdot a^n \qquad (a \neq 0; m, n \in \mathsf{Z});$

(14) $\quad (a^m)^n = a^{m \cdot n} \qquad (a \neq 0; m, n \in \mathsf{Z});$

(15) $\quad (a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m \qquad (a, b \neq 0, m \in \mathsf{Z}).$

Die Beweise ergeben sich sehr leicht aus der Definition (12) und den entsprechenden Potenzgesetzen für natürliche Exponenten.

Als Anwendung dieser Potenzen wollen wir den Hauptsatz über die Primzahlzerlegung auf den Null verschiedene rationale Zahlen erweitern. Jede gebrochene Zahl a besitzt eine eindeutig bestimmte reduzierte Bruchdarstellung $\frac{s}{t}$. Mit $s = \prod_{p \in P} p^{\exp_p(s)}$ und $t = \prod_{p \in P} p^{\exp_p(t)}$ erhalten wir $a = \prod_{p \in P} p^{\exp_p(s) - \exp_p(t)}$. Wir setzen $\exp_p(a) := \exp_p(s) - \exp_p(t)$ und erhalten damit

(16) $\quad a = \prod_{p \in P} p^{\exp_p(a)}.$

Dabei sind die Zahlen $\exp_p(a)$ ganze Zahlen, wobei nur endlich viele dieser Zahlen von Null verschieden sind. Die Darstellung (16) ist eindeutig, da sie durch Trennung der positiven und negativen Exponenten zur eindeutig bestimmten reduzierten Bruchdarstellung von a führt. Damit gilt der

Satz 3 (Primzahlzerlegung rationaler Zahlen). *Jede von Null verschiedene rationale Zahl a besitzt genau eine Darstellung der Form $a = \varepsilon \prod_{p \in P} p^{\exp_p(a)}$, wobei ε eine der beiden Zahlen 1, -1 ist und die Zahlen $\exp_p(a)$ ganze Zahlen sind, von denen nur endlich viele*

von Null verschieden sind. Dabei ist a genau dann eine von Null verschiedene ganze Zahl, wenn $\exp_p(a) \geqq 0$ *für alle Primzahlen p gilt.*

Mit Hilfe dieses Satzes zeigen wir, daß für natürliche Zahlen $m > 1$ und $n \geqq 2$ die Gleichung $x^n = m$ in $\mathbf{Q}$ nur dann lösbar sein kann, wenn sie bereits in $\mathbf{Z}$ lösbar ist. Für eine Lösung $x = \prod_{p \in \mathfrak{p}} p^{\exp_p(x)}$ muß nämlich $x^n = \prod_{p \in P} p^{n \exp_p(x)}$ eine ganze Zahl sein. Nach Satz 3 gilt für alle Primzahlen p daher $n \cdot \exp_p(x) \geqq 0$. Daraus folgt $\exp_p(x) \geqq 0$ für alle p, und daher ist x nach Satz 3 auch eine ganze Zahl. Als Beispiel betrachten wir den Fall $n = 2$ und $m = 2$, also die Gleichung $x^2 = 2$. Da diese Gleichung offensichtlich keine ganzzahlige Lösung besitzt, existiert auch keine Lösung im Bereich der rationalen Zahlen. Wenn wir auf der Zahlengeraden die Länge der Diagonalen des Einheitsquadrates vom Punkt P_0 aus abtragen, kommen wir zu einem irrationalen Punkt der Zahlengeraden.

5.7. Diophantische[1]) Gleichungen und lineare Kongruenzen mit einer Unbekannten

Verschiedene Aufgaben führen auf eine Gleichung der Form

$$(1) \qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b,$$

bei der $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ gegebene ganze Zahlen sind und für die ganze Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als Lösung gesucht werden.

Wir betrachten folgende Aufgaben als Beispiele:

a) Von drei Sorten Kuchen mit einem Stückpreis von 0,12 M; 0,28 M bzw. 0,42 M soll für genau zwei Mark Kuchen gekauft werden, wobei nach Möglichkeit von jeder Kuchensorte wenigstens ein Stück gewählt werden soll.

b) Man zerlege $\frac{71}{135}$ in Partialbrüche mit den Nennern 15 und 27.

c) Welche ganzen Zahlen lassen durch 4 geteilt den Rest 1 und zugleich durch 7 geteilt den Rest 6?

Diese Aufgaben führen (Übungsaufgabe) auf die Gleichungen

a) $12x_1 + 28x_2 + 42x_3 = 200$,

b) $9x_1 + 5x_2 = 71$,

c) $4x_1 - 7x_2 = 5$.

[1]) Diophant von Alexandria (um 250 u. Z.).

Eine Gleichung der Form (1) nennen wir eine (lineare) diophantische Gleichung mit n Unbekannten. (Beachte: $a_i \in \mathbf{Z}$, $x_i \in \mathbf{Z}$ für $i = 1, \ldots, n$).

Wir werden zunächst die Frage nach der Existenz von Lösungen einer diophantischen Gleichung beantworten. Danach wollen wir uns einen Überblick über die Gesamtheit der Lösungen einer diophantischen Gleichung mit zwei Unbekannten verschaffen und Methoden zur Lösung einer solchen Gleichung kennenlernen.

Die diophantische Gleichung $4x_1 + 6x_2 = 5$ ist offensichtlich nicht lösbar. Denn für eine Lösung (x_1, x_2) wäre die linke Seite durch 2, die rechte Seite der Gleichung aber nicht durch 2 teilbar. Über die Existenz von Lösungen einer diophantischen Gleichung gibt der folgende Satz Auskunft.

Satz 1 (Lösbarkeit einer diophantischen Gleichung). *Die diophantische Gleichung* $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ *ist dann und nur dann lösbar, wenn der größte gemeinsame Teiler* $d = a_1 \sqcap a_2 \sqcap \cdots \sqcap a_n$ *ein Teiler von* b *ist.*

Beweis. Falls (1) lösbar ist, muß nach dem Einsetzen einer Lösung jeder Summand der linken Seite durch d und daher auch die Summe, d. h. die Zahl b, durch d teilbar sein. Es gelte nun $d|b$. Aus MfL Bd. 1, 3.7. (15′) wissen wir, daß ganze Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ mit der Eigenschaft $c_1a_1 + c_2a_2 + \cdots + c_na_n = d$ existieren. Bezeichnet c den zu d komplementären Teiler von b, so folgt $a_1c_1c + a_2c_2c + \cdots + a_nc_nc = dc = b$. Die ganzen Zahlen $c_1c, c_2c, \ldots, c_nc$ bilden damit eine Lösung von (1).

Nach Satz 1 sind die unter a), b), c) genannten diophantischen Gleichungen lösbar.

Bei der Untersuchung der Gesamtheit aller Lösungen einer lösbaren diophantischen Gleichung beschränken wir uns auf die diophantische Gleichung mit zwei Unbekannten

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b. \tag{2}$$

Dabei wollen wir voraussetzen, daß diese Gleichung bereits durch den größten gemeinsamen Teiler der Koeffizienten der linken Seite geteilt wurde, also $a_1 \sqcap a_2 = 1$ gilt. Es sei $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ irgendeine Lösung von (2). Wir setzen $m = |a_2|$ und erhalten aus $a_1x_1^{(0)} - b = -x_2^{(0)}a_2$ die Kongruenz $a_1x_1^{(0)} \equiv b \bmod m$. Ist (x_1', x_2') eine weitere Lösung von (2), so muß ebenfalls $a_1x_1' \equiv b \bmod m$ gelten. Wegen $a_1 \sqcap m = a_1 \sqcap a_2 = 1$ folgt dann $x_1^{(0)} \equiv x_1' \bmod m$. Die möglichen x_1-Werte für Lösungen von (2) liegen also alle in ein und derselben Restklasse modulo m. Schließlich sei x_1'' eine beliebige zu $x_1^{(0)}$ modulo m kongruente ganze Zahl. Wir erhalten dann $a_1x_1'' \equiv b \bmod m$ und daher $a_2|a_1x_1'' - b$. Bezeichnen wir den zu a_2 komplementären Teiler von $a_1x_1'' - b$ mit $-x_2''$, so erhalten wir $a_1x_1'' + a_2x_2'' = b$. Damit ist (x_1'', x_2'') eine Lösung von (2). Wir haben folgendes Ergebnis gewonnen:

Satz 2. *Die* x_1*-Werte für Lösungen der diophantischen Gleichung* (2) *bilden mit* $m = |a_2|$ *eine Restklasse modulo* m. *Diese Restklasse wird durch die lineare Kongruenz* $a_1x \equiv b \bmod m$ *bestimmt.*

Da wir eine Lösung (x_1, x_2) von (2) wegen $x_2 = \frac{b}{a_2} - \frac{a_1}{a_2} x_1$ bereits durch die Angabe des x_1-Wertes kennen, beinhaltet Satz 2 eine Zurückführung der diophantischen Gleichung (2) auf eine lineare Kongruenz mit einer Unbekannten:

$$(3) \qquad a_1 x_1 \equiv b \bmod m, \qquad a_1 \sqcap m = 1.$$

Insbesondere ist auf Grund der Lösbarkeit von (2) auch (3) lösbar und wegen $a_1 \sqcap m = 1$ sogar eindeutig lösbar. Als Folgerung aus Satz 1 ist eine beliebige lineare Kongruenz mit einer Unbekannten:

$$(4) \qquad ax \equiv b \bmod m, \qquad a \sqcap m = d$$

genau dann lösbar, wenn $d|b$ gilt. Sie ist aber nur dann eindeutig lösbar, wenn die Beziehung $a \sqcap m = 1$ gilt (vgl. MfL Bd. 1, 3.7.).

Aus Satz 2 erhalten wir unmittelbar den

Satz 3 (Gesamtheit der Lösungen einer diophantischen Gleichung). *Es sei* $a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$ *eine diophantische Gleichung mit* $a_1 \sqcap a_2 = 1$. *Die Gesamtheit der Lösungen dieser Gleichung erhält man aus einer speziellen Lösung* $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ *in der Form* $x_1 = x_1^{(0)} + ca_2$, $x_2 = x_2^{(0)} - ca_1$, *wobei c alle ganzen Zahlen durchläuft.*

Beweis. Nach Satz 2 sind $x_1^{(0)} + ca_2$ die möglichen x_1-Werte für Lösungen der genannten diophantischen Gleichung. Aus

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = b, \quad x_1 = x_1^{(0)} + ca_2, \quad a_1 x_1^{(0)} + a_2 x_2^{(0)} = b$$

folgt

$$a_2 x_2 = b - a_1 x_1 = a_1 x_1^{(0)} + a_2 x_2^{(0)} - a_1 x_1^{(0)} - a_1 c a_2 = a_2 x_2^{(0)} - a_2 a_1 c.$$

Also ist $x_2 = x_2^{(0)} - a_1 c$ der zu $x_1^{(0)} + ca_2$ gehörige x_2-Wert.

Nach Satz 3 kennen wir also die Gesamtheit der Lösungen einer diophantischen Gleichung mit zwei Unbekannten, sobald uns eine spezielle Lösung bekannt ist. Das Aufsuchen einer speziellen Lösung von

$$(2) \qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 = b, \qquad a_1 \sqcap a_2 = 1$$

kann nach verschiedenen Methoden erfolgen. Wir wollen hier drei behandeln.

1. *Bestimmung einer speziellen Lösung mit Hilfe des euklidischen Algorithmus*

In MfL Bd. 1, 3.7. wurde bereits gezeigt, wie man mit Hilfe des euklidischen Algorithmus für den größten gemeinsamen Teiler d zweier Zahlen a, b eine Darstellung der Form $a \cdot c_1 + b \cdot c_2 = d$ gewinnen kann. Für die gegebene diophantische Gleichung kann also eine Darstellung der Form $a_1 c_1 + a_2 c_2 = 1$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus berechnet werden. Dann bilden $x_1^{(0)} = c_1 b$, $x_2^{(0)} = c_2 b$ eine spezielle Lösung von (2).

3. *Bestimmung einer speziellen Lösung unter Verwendung von Kettenbrüchen*

Zur Berechnung einer Lösung von (2) können wir die Kettenbruchdarstellung von $\frac{a_1}{a_2}$ benutzen. Für die Näherungsbrüche (vgl. 4.10.) $\frac{p_n}{q_n}$, $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ gilt dann $p_n = a_1$, $q_n = a_2$ sowie $q_{n-1}a_1 - p_{n-1}a_2 = (-1)^{1-n}$ (vgl. 4.10. (9)). Mit $x_1^{(0)} = (-1)^{n-1} q_{n-1}$, $x_2^{(0)} = (-1)^n p_{n-1}$ haben wir daher eine spezielle Lösung von $a_1x_1 + a_2x_2 = 1$ gewonnen, aus der wir durch Multiplikation mit b eine spezielle Lösung von (2) erhalten.

Um nach dieser Methode die diophantische Gleichung $136x_1 + 300x_2 = 20$ zu lösen, gehen wir zunächst wieder zur Gleichung $34x_1 + 75x_2 = 5$ über und entwickeln $\frac{34}{75}$ in einen Kettenbruch

$$\frac{34}{75} = 0 + \frac{1}{\frac{75}{34}} = \frac{1}{2 + \frac{7}{34}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{34}{7}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{6}{7}}}$$

$$= \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6}}}} = \frac{p_4}{q_4}.$$

Daraus erhalten wir

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + 1}} = \frac{5}{11}.$$

$x_1^{(0)} = (-1)^{4-1} \cdot 11 \cdot 5 = -55$, $x_2^{(0)} = (-1)^4 \cdot 5 \cdot 5 = 25$ bilden somit eine spezielle Lösung der gegebenen diophantischen Gleichung.

Wir wollen abschließend noch kurz auf die diophantische Gleichung mit drei Unbekannten

$$(5) \qquad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b, \qquad a_1 \sqcap a_2 \sqcap a_3 = 1$$

eingehen. Zunächst bestimmen wir diejenigen x_3, für die (5) lösbar ist, indem wir statt (5) $a_1x_1 + a_2x_2 = b - a_3x_3$ schreiben. Diese Gleichung ist genau dann lösbar, wenn $a_1 \sqcap a_2 \mid b - a_3x_3$, also $a_3x_3 \equiv b \bmod a_1 \sqcap a_2$ gilt. Die sämtlichen für Lösungen von (5) möglichen x_3-Werte können wir wegen $a_3 \sqcap (a_1 \sqcap a_2) = 1$ nach einem der genannten Verfahren berechnen. Für jeden möglichen Wert x_3 ergibt sich danach eine diophantische Gleichung mit zwei Unbekannten.

Als Beispiel betrachten wir die eingangs genannte Aufgabe $12x_1 + 28x_2 + 42x_3 = 200$. Wir können diese Gleichung durch 2 dividieren und erhalten danach die dio-

Als Beispiel betrachten wir die diophantische Gleichung $136x_1 + 300x_2 = 20$. Wir bestimmen zunächst $136 \sqcap 300$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus:

$$\begin{aligned} 300 &= 2 \cdot 136 + 28, \\ 136 &= 4 \cdot 28 + 24, \\ 28 &= 1 \cdot 24 + 4, \\ 24 &= 6 \cdot 4 + 0; \quad \text{also} \quad 136 \sqcap 300 = 4. \end{aligned}$$

Wegen $4|20$ ist die gegebene diophantische Gleichung lösbar und gleichbedeutend mit der diophantischen Gleichung $34x_1 + 75x_2 = 5$, wobei $34 \sqcap 75 = 1$ gilt. Bei der Anwendung des euklidischen Algorithmus auf 75 und 34 erhalten wir $75 = 2 \cdot 34 + 7$, $34 = 4 \cdot 7 + 6$, $7 = 1 \cdot 6 + 1$, und daraus $1 = 7 - 1 \cdot 6 = 7 - (34 - 4 \cdot 7) = -34 + 5 \cdot 7 = -34 + 5(75 - 2 \cdot 34) = 5 \cdot 75 - 11 \cdot 34$. Somit bilden $x_1^{(0)} = -11 \cdot 5 = -55$, $x_2^{(0)} = 5 \cdot 5 = 25$ eine Lösung der gegebenen Gleichung.

2. *Bestimmung einer speziellen Lösung mit Hilfe der Eulerschen Funktion*

Wir benutzen die Zurückführung einer diophantischen Gleichung (2) auf die lineare Kongruenz (3). Nach dem Satz von EULER (vgl. MfL Bd. 1, 3.7.) gilt $a_1^{\varphi(m)} \equiv 1 \bmod m$ Wegen $a_1 a_1^{\varphi(m)-1} b = b \bmod m$ ist somit

$$x_1^{(0)} = a_1^{\varphi(m-1)} b,$$

$$x_2^{(0)} = \frac{b}{a_2} - \frac{a_1}{a_2} a_1^{\varphi(m)-1} b = \frac{b}{a_2} (1 - a_1^{\varphi(m)})$$

eine Lösung von (2). Da $\varphi(m)$ nach der Formel

$$\varphi(m) = m \cdot \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

berechnet werden kann, haben wir eine explizite Darstellung einer speziellen Lösung erhalten.

Als Beispiel betrachten wir wieder die diophantische Gleichung $136x_1 + 300x_2 = 20$. Wir müssen diese zunächst auf die Form $34x_1 + 75x_2 = 5$ bringen. Wir setzen $m = 75$ und bestimmen $\varphi(75)$:

$$\varphi(75) = 75 \cdot \prod_{p|75} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 75 \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 75 \frac{6}{15} = 30.$$

Danach ist

$$x_1^{(0)} = 34^{29} \cdot 5, \quad x_2^{(0)} = \frac{5}{75} (1 - 34^{30}) = \frac{1}{15} (1 - 34^{30})$$

eine spezielle Lösung. Der Nachteil dieser Lösungsmethode wird deutlich auf Grund der i. allg. betragsmäßig großen Zahlen, die als Lösungswerte auftreten.

phantische Gleichung $6x_1 + 14x_2 + 21x_3 = 100$, wobei $6 \sqcap 14 \sqcap 21 = 1$ gilt. Es ist $6 \sqcap 14 = 2$. Für die möglichen x_3-Werte erhalten wir $21x_3 \equiv 100 \bmod 2$. Offensichtlich ist $x_3^{(0)} = 2$ eine Lösung dieser Kongruenz. Die möglichen x_3-Werte sind daher durch $x_3 = 2 + c \cdot 2\,(c \in \mathbf{Z})$ gegeben. Für $x_3^{(0)} = 2$ wollen wir die sämtlichen Lösungen x_1, x_2 bestimmen: $6x_1 + 14x_2 = 100 - 21 \cdot 2 = 58$ führt auf $3x_1 + 7x_2 = 29$. Mit Hilfe des euklidischen Algorithmus gewinnen wir $x_1' = -58$, $x_2' = 29$ als spezielle Lösung dieser Gleichung. Damit ist $x_1 = -58 + c \cdot 7$, $x_2 = 29 - c \cdot 3$, $x_3 = 2$ die Gesamtheit der Lösungen von $12x_1 + 28x_2 + 42x_3 = 200$, bei denen $x_3 = 2$ gilt.

Für die unter a) eingangs genannte Aufgabenstellung benötigen wir natürliche Zahlen als Lösungswerte. Wir setzen dazu $c = 9$ und erhalten $x_1^{(0)} = 5$, $x_2^{(0)} = 2$, $x_3^{(0)} = 2$ als eine brauchbare Lösung.

5.8. Der Weg: Natürliche Zahlen — ganze Zahlen — rationale Zahlen

Ausgehend von den natürlichen Zahlen haben wir den Bereich der rationalen Zahlen durch eine zweimalige Erweiterung gewonnen. Zunächst wurde der Bereich $\mathbf{Q}_+$ der gebrochenen Zahlen und danach der Bereich $\mathbf{Q}$ der rationalen Zahlen konstruiert. Dabei erwies sich $\mathbf{Q}_+$ als der kleinste geordnete Halbkörper, der $\mathbf{N}$, und $\mathbf{Q}$ als der kleinste geordnete Körper, der $\mathbf{Q}_+$ bzw. $\mathbf{N}$ enthält. Den Bereich $\mathbf{Z}$ der ganzen Zahlen haben wir weiterhin als den kleinsten geordneten Ring beschrieben, der $\mathbf{N}$ enthält. Unser Weg führte von den natürlichen Zahlen über die gebrochenen Zahlen zu den rationalen Zahlen. Auf diese Weise wurde zunächst ein Mangel der Multiplikation (vgl. (M2)) und danach ein Mangel der Addition (vgl. (A2)) behoben. Es liegt die Frage nahe, ob man die Reihenfolge der in 4.2. bzw. 5.2. genannten Konstruktionsschritte vertauschen kann. Das ist möglich und führt darüber hinaus zum gleichen Ergebnis, nämlich wieder zum Bereich der rationalen Zahlen. Bei diesem Weg wird zuerst der kleinste geordnete Ring gebildet, der den Bereich $\mathbf{N}$ enthält, also der Bereich der ganzen Zahlen. Danach wird der kleinste geordnete Halbkörper konstruiert, der den geordneten Ring der ganzen Zahlen umfaßt. Dieser erweist sich sogar als geordneter Körper und muß auf Grund der algebraischen Charakterisierung der rationalen Zahlen bis auf Isomorphie mit $\mathbf{Q}$ übereinstimmen.

Die Konstruktion von $\mathbf{Z}$ aus $\mathbf{N}$ erfolgt nach dem Vorgehen von 5.2. durch die Bildung der Klassen:

$$m \ominus n = \{(k, l)\colon k, l \in \mathbf{N} \wedge m + l = k + n\},$$

für die dann Anordnung, Addition und Multiplikation entsprechend I, II, III aus 5.2. definiert werden. Die natürlichen Zahlen ergeben sich in der Form $m \ominus 0$ und die negativen ganzen Zahlen in der Form $0 \ominus m$. Die für $\mathbf{Z}$ gültigen Strukturgesetze lassen sich analog zu entsprechenden Beweisen in 5.2. herleiten.

Von $\mathbf{Z}$ kommen wir danach zu den rationalen Zahlen, indem wir analog dem Vorgehen in 4.2. die Menge $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ in Klassen zerlegen:

$$\frac{a}{b} = \{(c, d) : ad = cb\}.$$

Anordnung, Addition und Multiplikation für diese Klassen werden wie in 4.3., 4.4. bzw. 4.5. bei der Konstruktion von $\mathbf{Q}_+$ definiert. Die Strukturgesetze von $\mathbf{Q}$ lassen sich dann ebenfalls mühelos beweisen. Die Klassen der Form $\frac{a}{1}$ $(a \in \mathbf{Z})$ bilden einen zu $\mathbf{Z}$ isomorphen Bereich.

6. Der Bereich der reellen Zahlen

6.1. Einleitung

Die Veranschaulichung der rationalen Zahlen auf einer Geraden beschreibt die Tatsache, daß die rationalen Zahlen als Maßzahlen für kommensurable Längen verwendet werden können. Die Beziehung zwischen den rationalen Zahlen und Punkten dieser Geraden, die damit hergestellt wird, führt naturgemäß zu einem Vergleich der Geraden mit dem Bereich der rationalen Zahlen. Geometrische Überlegungen führten bereits im Altertum zu der Erkenntnis, daß es neben kommensurablen Längen auch inkommensurable gibt, d. h. Längen, deren Verhältnis zur Maßeinheit nicht durch ein geordnetes Paar natürlicher Zahlen (vgl. 4.1.) und daher nicht durch eine gebrochene Zahl bestimmt wird. Es gibt also auf der Zahlengeraden irrationale Punkte. In diesem Sinne ist die Zahlengerade reichhaltiger als der Bereich der rationalen Zahlen. Im Vergleich zur Geraden enthält der Bereich der rationalen Zahlen Lücken.

Um jeder Länge eine Maßzahl zuordnen zu können, werden wir danach streben, den Bereich der rationalen Zahlen zu einem Zahlenbereich zu erweitern, der in gleicher Weise lückenlos ist, wie wir es uns von der Geraden vorstellen. Die Konstruktion einer Erweiterung des Bereiches der rationalen Zahlen wäre nun in der Weise denkbar, daß man die irrationalen Punkte der Zahlengeraden zur Bildung neuer Zahlen benutzt und mit Hilfe geometrischer Einsichten die arithmetischen Eigenschaften von $\mathbf{Q}$ auf diese Erweiterung überträgt. Eine exakte Ausführung dieses Programms würde allerdings erfordern, daß wir unsere anschaulichen Vorstellungen von der Geraden in präzisen Aussagen festlegen. Dem entgegen ist es ein Anliegen der Arithmetik und für die Anwendung der Zahlen von Bedeutung, die einzelnen Zahlenbereiche rein arithmetisch auf der Grundlage der Logik und Mengenlehre zu gewinnen. Wie auch bei den bisherigen Konstruktionen von Zahlenbereichen soll daher die gewünschte Erweiterung der rationalen Zahlen von Eigenschaften der Geraden oder anderer geometrischer Objekte losgelöst vorgenommen werden. Geometrische Einsichten können natürlich wieder zur Veranschaulichung und Motivierung gewisser Konstruktionsschritte, aber an keiner Stelle für Beweise herangezogen werden.

Eine Lückenhaftigkeit von $\mathbb{Q}$ kam auch bei der negativen Beantwortung einer rein algebraischen Fragestellung zum Ausdruck. Wie in 5.6. gezeigt wurde, ist nicht jede gebrochene Zahl Quadratzahl im Bereich der gebrochenen Zahlen. Eine Gleichung der Form $x^n = a$ ($n \geqq 2$) besitzt nur für spezielle gebrochene Zahlen a eine Lösung im Bereich der rationalen Zahlen.

Eine exakte Erweiterung des Bereiches der rationalen Zahlen zu einem lückenlosen sogenannten stetigen Zahlenbereich wurde erstmals von DEDEKIND vorgenommen. Der entscheidende Schritt bestand dabei in der genauen Formulierung dieser gewünschten Eigenschaft. Nach DEDEKIND heißt eine durch eine reflexive totale Ordnung geordnete Menge $(X, \leqq)$ *stetig*, wenn sie dicht ist und zu jeder Zerlegung von X in zwei nichtleere Mengen A, B mit $\bigwedge_{a \in A} \bigwedge_{b \in B} a < b$ ein Element c aus X existiert (c liegt entweder in A oder in B), so daß $\bigwedge_{a \in A} \bigwedge_{b \in B} a \leqq c \leqq b$ gilt. Wir beschreiben die gewünschte Eigenschaft der Stetigkeit durch das folgende Stetigkeitsaxiom:

(O4) Jede nichtleere nach oben beschränkte Menge besitzt ein Supremum.

Wir haben in 5.4. bereits nachgewiesen, daß in $\mathbb{Q}$ dieses Axiom (O4) nicht erfüllt ist. In 6.3. werden wir auf die Gleichwertigkeit von (O4) mit der Stetigkeit nach DEDEKIND eingehen. Die Aussage (O4) ist gleichwertig mit:

(O4′) Jede nichtleere nach unten beschränkte Menge besitzt ein Infimum.

Den Beweis von (O4) $\Leftrightarrow$ (O4′) überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

Das Ziel dieses Abschnittes besteht nun darin, den Bereich der rationalen Zahlen zu einem stetigen Zahlenbereich zu erweitern. An eine solche Erweiterung von $\mathbb{Q}$ stellen wir darüber hinaus die Forderung, daß die für das Rechnen in $\mathbb{Q}$ maßgeblichen Strukturgesetze gültig bleiben. Es gibt verschiedene Wege, eine stetige Erweiterung von $\mathbb{Q}$ zu konstruieren. Das allgemeine Prinzip solcher Konstruktionen besteht darin, die in $\mathbb{Q}$ vorhandenen „Lücken" durch geeignete Gebilde zu charakterisieren und dann diese Gebilde zum Bereich der rationalen Zahlen hinzuzunehmen. An späterer Stelle (vgl. 6.3.) wird gezeigt, daß es bis auf Isomorphie genau eine stetige Erweiterung von $\mathbb{Q}$ gibt. Die verschiedenen Konstruktionsverfahren führen also zum gleichen Zahlenbereich und sind daher vom Ergebnis her als gleichwertig anzusehen. Wir werden die in $\mathbb{Q}_+$ vorhandenen „Lücken" durch nichtperiodische Dezimalbrüche charakterisieren und unter Beachtung dessen, daß jeder periodische Dezimalbruch eine gebrochene Zahl darstellt, die nichtnegativen reellen Zahlen als Dezimalbrüche gewinnen. Die Erweiterung des Bereiches der nichtnegativen reellen Zahlen zum Bereich der reellen Zahlen kann danach in der gleichen Weise vorgenommen werden wie die Erweiterung von $\mathbb{Q}_+$ zum Bereich $\mathbb{Q}$. Weitere Konstruktionsverfahren werden wir in 6.3. kurz darlegen.

6.2. Konstruktion des Bereiches der reellen Zahlen mit Hilfe von Dezimalbrüchen

Die Charakterisierung der in $\mathbf{Q}_+$ vorhandenen Lücken durch Dezimalbrüche ist eng mit der Längenmessung verknüpft und ergibt sich, wenn wir das durch den Divisionsalgorithmus beschriebene Meßverfahren auf eine beliebige Länge anwenden. Dieses Meßverfahren liefert bei unbegrenzter Fortsetzung eine monoton wachsende Folge gebrochener Zahlen a_0; a_0,a_1; a_0,a_1a_2; ... und bestimmt daher eindeutig einen Dezimalbruch $a_0,a_1a_2...$. Im Fall einer bezüglich der Maßeinheit kommensurablen Länge entsteht ein periodischer Dezimalbruch. Dieser stellt eine gebrochene Zahl dar, die Maßzahl der kommensurablen Länge ist. Aus der Sicht des Meßverfahrens ist die Periodizität allerdings als ein zufällig eintretender Sonderfall anzusehen. Im allgemeinen wird sich ein nichtperiodischer Dezimalbruch ergeben. Dieser charakterisiert dann eine Lücke im Bereich der rationalen Zahlen. Das wird sehr anschaulich, wenn wir neben den gebrochenen Zahlen $r_0 = a_0$; $r_1 = a_0,a_1$; $r_2 = a_0,a_1a_2$; ... noch die gebrochenen Zahlen $s_0 = r_0 + 1$; $s_1 = r_1 + \frac{1}{10}$; $s_2 = r_2 + \frac{1}{10^2}$; ... betrachten. Jedes s_n ist dann größer als jedes r_m, und die Differenz $s_n - r_n = \frac{1}{10^n}$ wird für genügend große n kleiner als eine beliebig vorgegebene positive gebrochene Zahl, d. h., die Zahlen r_n, s_n rücken mit wachsendem n immer dichter zusammen. Es existiert jedoch keine gebrochene Zahl a mit $r_n \leqq a \leqq s_n$ für alle n. In Abb. 5 veranschaulicht der Punkt P der Zahlengeraden diese Lücke im Bereich $\mathbf{Q}$.

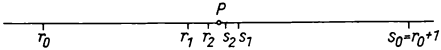


Abb. 5

Wie in 4.8. bezeichnet $\mathbf{R}_+$ die Menge aller Dezimalbrüche ohne Neunerperiode, $\mathbf{R}_+^{(p)}$ die Menge aller periodischen Dezimalbrüche ohne Neunerperiode und $\mathbf{R}_+^{(e)}$ die Menge aller endlichen Dezimalbrüche. Entsprechend den Ergebnissen aus 4.8. wollen wir zwischen gebrochenen Zahlen und periodischen Dezimalbrüchen ohne Neunerperiode nicht unterscheiden, setzen also $\mathbf{Q}_+ = \mathbf{R}_+^{(p)}$.

6.2.1. Anordnung der Dezimalbrüche

Wir erklären zunächst eine irreflexive totale Ordnung „$<$“ in R_+.

Definition 1. Sind $a = a_0,a_1a_2...$, $b = b_0,b_1b_2...$ zwei verschiedene Dezimalbrüche, so soll $a < b$ genau dann gelten, wenn $a_n < b_n$ für $n = \min\{\nu: a_\nu \neq b_\nu\}$ zutrifft.

Es ist unmittelbar einzusehen, daß diese Relation irreflexiv, transitiv und konnex ist (Übungsaufgabe). Die aus dieser Ordnungsrelation in R_+ resultierende Anordnung entspricht der Anordnung der Wörter eines Lexikons, wenn wir die Dezimalbrüche als (unendliche) Wörter des Alphabets 0, 1, ..., 9 auffassen[1]). Wir sprechen daher auch von der *lexikographischen Ordnung* in R_+. Dem Satz 4 aus 4.8. entnehmen wir, daß die Einschränkung dieser Relation auf Q_+ mit der bereits in Q_+ erklärten Ordnung übereinstimmt. Aus der Definition der lexikographischen Ordnung in R_+ ergeben sich darüber hinaus sehr einfach die beiden folgenden Sätze über die ordnungsmäßige Verteilung der gebrochenen Zahlen in der Menge R_+.

Satz 1 (Dichtheit von Q_+ in R_+). *Die gebrochenen Zahlen liegen dicht in der Menge* R_+, *d. h., zwischen zwei verschiedenen Elementen aus* R_+ *liegt stets eine gebrochene Zahl.*

Beweis. Sind $a = a_0,a_1a_2...$, $b = b_0,b_1b_2...$ verschiedene Elemente aus R_+ mit $a < b$, so gilt für den kleinsten Index n mit $a_n \neq b_n$ die Beziehung $a_n < b_n$. Ist dann a_{n+i} eine auf a_n folgende von 9 verschiedene Ziffer von a, so ist $a_0,a_1...a_n...a_{n+i+1}9$ eine gebrochene Zahl c mit $a < c < b$.

Satz 2 (Archimedisches Axiom). *Zu jedem Element* a *aus* R_+ *existiert eine natürliche Zahl* n *mit* $a < n$.

Beweis. Für $a = a_0,a_1a_2...$ ist $n = a_0 + 1$ eine natürliche Zahl mit der gewünschten Eigenschaft.

Auf Grund der Gültigkeit des Archimedischen Axioms nennen wir R_+ auch *archimedisch geordnet*. Wir zeigen jetzt, daß R_+ das bereits genannte Stetigkeitsaxiom (O4) erfüllt.

Satz 3 (Stetigkeit von R_+). *In* R_+ *besitzt jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum.*

Beweis. Es sei M eine durch $b = b_0,b_1b_2...$ nach oben beschränkte nichtleere Teilmenge von R_+. Für jedes $a = a_0,a_1a_2...$ aus M gilt dann $a_0 \leqq b_0$. Die Menge aller a_0, für die ein $a \in M$ mit $a = a_0,a_1a_2...$ existiert, ist daher eine nach oben beschränkte Menge natürlicher Zahlen und besitzt ein Maximum c_0. Sodann sei c_1 die größte Zahl, die als Ziffer a_1 bei den Dezimalbrüchen $c_0,a_1a_2...$ aus M vorkommt. Anschließend wird c_2 als die größte Zahl gewählt, die als Ziffer a_2 bei den Dezimalbrüchen $c_0,c_1a_2a_3...$ aus M vorkommt. So fortfahrend wird c_n für jedes n aus N eindeutig festgelegt. Falls $c = c_0,c_1c_2...$ ein Dezimalbruch ohne Neunerperiode ist, haben wir mit c eine kleinste obere Schranke von M gefunden. Für den Fall, daß c kein Dezimalbruch aus R_+ ist, existiert eine kleinste Zahl n_0 mit $n_0 \geqq 1$ und $c_n = 9$ für alle $n \geqq n_0$. Wir setzen dann

$$c_\nu' = \begin{cases} c_\nu & \text{für } \nu < n_0 - 1, \\ c_\nu + 1 & \text{für } \nu = n_0 - 1, \\ 0 & \text{für } \nu \geqq n_0 \end{cases}$$

[1]) Hierbei ist natürlich die Stellung des Kommas zu beachten.

und erhalten mit $c' = c_0', c_1' c_2' \ldots$ einen Dezimalbruch ohne Neunerperiode, so daß c' kleinste obere Schranke von M in R_+ ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Insbesondere erhalten wir: Zu jeder nichtleeren nach oben beschränkten Menge M von gebrochenen Zahlen gibt es ein $a \in \mathsf{R}_+$ mit $a = \sup M$.

Wir bemerken, daß man auch umgekehrt jedes Element $a \in \mathsf{R}_+$ als Supremum einer nichtleeren Menge von gebrochenen Zahlen, ja sogar von Elementen aus $\mathsf{R}_+^{(e)}$ erhalten kann. Ist nämlich $a = a_0, a_1 a_2 \ldots$, so ist mit $a^{(n)} = a_0, a_1 \ldots a_n$ offenbar $a = \sup \{a^{(n)} : n \in \mathsf{N}\}$.

Nachdem wir die geordnete Menge Q_+ zu einer stetig geordneten Menge R_+ erweitert haben, kommt es darauf an, die in Q_+ erklärte Addition und Multiplikation auf R_+ fortzusetzen, so daß die in Q_+ gültigen Strukturgesetze auch für R_+ gelten. Am Schluß von 4.8. wurde gezeigt, daß wir die Summe und das Produkt zweier gebrochener Zahlen $a = a_0, a_1 a_2 \ldots$ und $b = b_0, b_1 b_2 \ldots$ mit einer vorgegebenen Genauigkeit erhalten, wenn wir für genügend großes n die Summe bzw. das Produkt von $a^{(n)} = a_0, a_1 \ldots a_n$ und $b^{(n)} = b_0, b_1 \ldots b_n$ bilden. Für beliebige gebrochene Zahlen a, b gilt dann (Beweis!)

$$(1) \qquad a + b = \sup \{a^{(n)} + b^{(n)} : n \in \mathsf{N}\}, \qquad a \cdot b = \sup \{a^{(n)} \cdot b^{(n)} : n \in \mathsf{N}\}.$$

Wir können nun aber auch zu beliebigen Elementen a, b aus R_+ die gebrochenen Zahlen $a^{(n)}$ und $b^{(n)}$ bilden. Die Mengen $\{a^{(n)} + b^{(n)} : n \in \mathsf{N}\}$, $\{a^{(n)} \cdot b^{(n)} : n \in \mathsf{N}\}$ sind dann in R_+ nach oben beschränkt. Wegen (1) werden somit die Definitionen

$$(2) \qquad a + b := \sup \{a^{(n)} + b^{(n)} : n \in \mathsf{N}\}, \quad a \cdot b := \sup \{a^{(n)} \cdot b^{(n)} : n \in \mathsf{N}\}$$

für eine Addition bzw. Multiplikation beliebiger Dezimalbrüche aus R_+ nahegelegt. Durch die Definitionen (2) werden die Addition und die Multiplikation in R_+ auf die entsprechenden Operationen in Q_+ zurückgeführt. Eine unmittelbare Herleitung der Strukturgesetze für $\mathsf{R}_+(<, +, \cdot)$ auf der Grundlage dieser Definitionen wäre allerdings recht langwierig. Wir wollen daher zunächst eine zu (2) gleichwertige Formulierung gewinnen, die eine einfache Herleitung der Strukturgesetze ermöglicht. Dazu wird der für die gesamte Analysis grundlegende Konvergenzbegriff eine wichtige Rolle spielen. Durch ihn ist es möglich, die bereits durch $a = \sup \{a^{(n)} : n \in \mathsf{N}\}$ beschriebene der Annäherung beliebiger Elemente aus R_+ durch gebrochene Zahlen allgemeiner darzulegen.

6.2.2. Konvergenz in der Menge R_+

Zunächst genügt es, daß sich der Leser in diesem Abschnitt mit den Begriffsbildungen der Intervallschachtelung und Konvergenz sowie mit dem Inhalt des Satzes 12 vertraut macht. Da wir Folgen $(a_\nu)_{\nu \in \mathsf{N}}$, $(b_\nu)_{\nu \in \mathsf{N}}$, ... aus R_+ betrachten, werden wir in diesem Abschnitt die Ziffern eines Dezimalbruches aus R_+ mit griechischen Buchstaben bezeichnen: $a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$, $b = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \ldots$ usw. Wir erklären zunächst den Begriff der Intervallschachtelung.

Definition 2 (Intervallschachtelung in R_+). Es seien $(a_\nu)_{\nu\in\mathsf{N}}$ und $(b_\nu)_{\nu\in\mathsf{N}}$ Folgen aus R_+ mit folgenden Eigenschaften:

a) $\bigwedge\limits_{n\in\mathsf{N}} (a_n \leqq a_{n+1} \wedge b_{n+1} \leqq b_n)$,

b) $\bigwedge\limits_{n\in\mathsf{N}} a_n < b_n$,

c) $\sup\{a_\nu : \nu \in \mathsf{N}\} = \inf\{b_\nu : \nu \in \mathsf{N}\}$.

Wir sagen dann, daß die beiden Folgen $(a_\nu)_{\nu\in\mathsf{N}}$, $(b_\nu)_{\nu\in\mathsf{N}}$ eine *Intervallschachtelung* bilden, die wir mit $(a_\nu|b_\nu)$ bezeichnen. Den Dezimalbruch $x = \sup\{a_\nu : \nu \in \mathsf{N}\}$ nennen wir *Limespunkt* von $(a_\nu|b_\nu)$.

Der Name Intervallschachtelung deutet darauf hin, daß die abgeschlossenen Intervalle $[\![a_n, b_n]\!] = \{c : a_n \leqq c \leqq b_n\}$ ineinandergeschachtelt sind: $[\![a_{n+1}, b_{n+1}]\!] \subseteqq [\![a_n, b_n]\!]$ für alle n. Dabei ist x der einzige Punkt, der in jedem Intervall enthalten ist (Abb. 6). Statt $\sup\{a_\nu : \nu \in \mathsf{N}\}$ bzw. $\inf\{b_\nu : \nu \in \mathsf{N}\}$ schreiben wir auch kurz $\sup a_\nu$ bzw. $\inf b_\nu$.

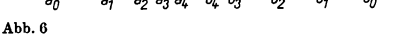


Abb. 6

In der folgenden Definition der Konvergenz einer Folge benutzen wir die Sprechweise „fast alle" für die Glieder einer Folge. Wir sagen: Fast alle Glieder einer Folge besitzen eine bestimmte Eigenschaft $H(x)$, wenn nur endlich viele Folgenglieder existieren, die die Eigenschaft $H(x)$ nicht besitzen.

In Band 1 wurden für eine Eigenschaft (Aussage) $H(x)$ allgemein die Generalisierung „$\bigwedge\limits_x$ ..." („für jedes x gilt: ...") und die Partikularisierung „$\bigvee\limits_x$ ..." („es gibt ein x mit ...") betrachtet, zwischen denen die folgende Äquivalenz besteht:

$$\bigwedge_x H(x) \Leftrightarrow \neg \bigvee_x \neg H(x).$$

Die gleiche Äquivalenz gilt, wenn wir „$\bigwedge\limits_x$ ..." als „für fast alle x gilt: ..." und „$\bigvee\limits_x$ ..." als „es gibt unendlich viele x mit ..." interpretieren.

Definition 3 (Konvergenz in R_+). Eine Folge $(x_\nu)_{\nu\in\mathsf{N}}$ aus R_+ heißt *konvergent* gegen x, wenn es eine Intervallschachtelung $(a_\nu|b_\nu)$ mit dem Limespunkt x gibt, so daß in jedem Intervall $[\![a_i, b_i]\!]$ fast alle x_n enthalten sind. Ist die Folge $(x_\nu)_{\nu\in\mathsf{N}}$ gegen x konvergent, so heißt x *Grenzwert* dieser Folge.

Ist x Grenzwert der konvergenten Folge $(x_\nu)_{\nu\in\mathsf{N}}$, so sehen wir x als einen Dezimalbruch an, dem sich die Dezimalbrüche x_n der Folge beliebig nähern. Wir wollen die durch die Konvergenz beschriebene Annäherung an einigen Beispielen verdeutlichen:

1. Die Folge $\left(\frac{1}{\nu}\right)_{\nu\in\mathbb{N}^*}$ ist gegen 0 konvergent. Für die Intervallschachtelung $(a_\nu|b_\nu)$ mit $a_\nu = 0$ und $b_\nu = \frac{1}{10^\nu}$ gilt nämlich $\sup\{a_\nu : \nu \in \mathbb{N}\} = \inf\{b_\nu : \nu \in \mathbb{N}\} = 0$ sowie $\frac{1}{n} \in [\![a_\nu, b_\nu]\!]$ für fast alle n bei beliebiger Wahl von ν (vgl. Satz 6).

2. Ist $x = \zeta_0,\zeta_1\zeta_2\ldots$ ein beliebiger Dezimalbruch aus R_+, so konvergiert die Folge $(x^{(\nu)})_{\nu\in\mathbb{N}} = (\zeta_0,\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ gegen x (vgl. Satz 8).

3. Ist $\zeta_0,\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_n$ ein endlicher Dezimalbruch mit $\zeta_n < 9$ und $x_\nu = \zeta_0,\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_n\underbrace{9\ldots9}_{\nu}$, so konvergiert die Folge $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ gegen $x = \zeta_0,\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_{n-1}(\zeta_n + 1)$. Setzen wir nämlich $a_\nu = x_\nu$ und $b_\nu = x$ für alle ν, so ist $(a_\nu|b_\nu)$ eine Intervallschachtelung mit den erforderlichen Eigenschaften.

Die Konvergenz einer Folge aus R_+ läßt sich auch recht einprägsam durch das Verhalten der Ziffern der Dezimalbrüche dieser Folge beschreiben. Dazu sei $x = \zeta_0\zeta_1\zeta_2\ldots$ der Grenzwert der Folge $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ und $x_\nu = \zeta_0^{(\nu)},\zeta_1^{(\nu)}\zeta_2^{(\nu)}\ldots$. Setzen wir $x \notin \mathsf{R}_+^{(e)}$ voraus, so besagt (Beweis!) die Konvergenz, daß für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Gleichheit $\zeta_k^{(\nu)} = \zeta_k$ für fast alle ν gilt. Wenn wir wieder $x^{(n)} = \zeta_0,\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_n$ und $x_\nu^{(n)} = \zeta_0^{(\nu)},\zeta_1^{(\nu)}\zeta_2^{(\nu)}\ldots\zeta_n^{(\nu)}$ setzen, so gilt daher auch $x^{(n)} = x_\nu^{(n)}$ für fast alle ν. Für den Fall, daß x ein endlicher Dezimalbruch ist, kann die direkte Beschreibung der Konvergenz mit Hilfe der Ziffern komplizierter werden (vgl. Beispiel 3).

In den folgenden Sätzen werden wir einige Eigenschaften der Konvergenz in R_+ zusammenstellen.

Satz 4 (Eindeutigkeit des Grenzwertes). *Jede konvergente Folge besitzt genau einen Grenzwert.*

Beweis. Es seien x, x' Grenzwerte der Folge $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, und es gelte $x < x'$. Nach Satz 1 existiert ein x'' mit $x < x'' < x'$. Es sei $(a_\nu|b_\nu)$ eine Intervallschachtelung mit dem Limespunkt x, so daß in jedem Intervall $[\![a_n, b_n]\!]$ fast alle x_ν liegen. Entsprechend sei $(a_\nu'|b_\nu')$ eine Intervallschachtelung mit dem Limespunkt x, so daß in jedem $[\![a_n', b_n']\!]$ fast alle x_ν liegen. Wegen $x = \inf b_\nu$, $x' = \sup a_\nu'$ existiert ein n_0 mit $b_{n_0} < x'' < a_{n_0}'$. Es gilt also $a_{n_0} < b_{n_0} < a_{n_0}' < b_{n_0}'$. Es können aber nicht zugleich fast alle Folgenglieder der Folge $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ in den disjunkten Intervallen $[\![a_{n_0}, b_{n_0}]\!]$ und $[\![a_{n_0}', b_{n_0}']\!]$ liegen.

Den eindeutig bestimmten Grenzwert x einer konvergenten Folge $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ bezeichnen wir mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu$.

Satz 5 (Verträglichkeit der Ordnung mit der Konvergenz). *Es seien $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, $(x_\nu')_{\nu\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $x_n' \leqq x_n$ für fast alle n. Dann gilt*

$$\lim_{\nu\to\infty} x_\nu' \leqq \lim_{\nu\to\infty} x_\nu.$$

Beweis. Wir führen die Annahme $x = \lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu < \lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu' = x'$ zum Widerspruch. Wie im Beweis von Satz 4 können im Fall $x < x'$ disjunkte Intervalle $[\![a_{n_\nu}, b_{n_\nu}]\!]$, $[\![a'_{\kappa_\nu}, b'_{\kappa_\nu}]\!]$ mit $x_n \in [\![a_{n_\nu}, b_{n_\nu}]\!]$ und $x_n' \in [\![a'_{\kappa_\nu}, b'_{\kappa_\nu}]\!]$ für fast alle n sowie $b_{n_\nu} < a'_{\kappa_\nu}$ gefunden werden. Daraus folgt $x_n < x_n'$ für fast alle n und daher ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Bemerkung. Aus $x_n' < x_n$ kann i. allg. nicht auf $x' < x$ geschlossen werden.

Satz 6. *Es seien $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ und $(b_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ Folgen aus $\mathbb{Q}_+$ mit $a_n \leqq x \leqq b_n$ für alle n. Dann gilt $\sup a_\nu = \inf b_\nu = x$ genau dann, wenn bei beliebiger Wahl einer gebrochenen Zahl $r > 0$ die Ungleichung $b_n - a_n < r$ für fast alle n gilt.*

Beweis. Es gelte $b_n - a_n < r$ bei beliebiger Wahl einer gebrochenen Zahl $r > 0$ für fast alle n. Es sei $x_\nu = \sup a_\nu$, $x'' = \inf b_\nu$. Aus $a_n \leqq x \leqq b_n$ für alle n erhalten wir $x' \leqq x \leqq x''$. Falls $x' < x''$ ist, existieren nach Satz 1 zwei gebrochene Zahlen r_1, r_2 mit $x' < r_1 < r_2 < x''$. Daraus folgt $0 < r_2 - r_1 < b_n - a_n$ für alle n. Wenn wir $r = r_2 - r_1$ setzen, erhalten wir damit einen Widerspruch.

Es sei nun $\sup a_\nu = \inf b_\nu = x$ und r eine beliebig vorgegebene positive gebrochene Zahl. Wir bestimmen eine natürliche Zahl n mit $\frac{2}{n} \leqq r$ und setzen $m_0 = \min\left\{m: m \in \mathbb{N} \wedge x \leqq \frac{m}{n}\right\}$. Wegen $\sup a_\nu = \inf b_\nu = x$ gilt dann

$$\frac{m_0 - 1}{n} < a_\nu \leqq b_\nu < \frac{m_0 + 1}{n},$$

also $b_\nu - a_\nu < \frac{2}{n} \leqq r$ für fast alle ν.

Satz 7. *Zu jedem x aus $\mathbb{R}_+$ existiert eine Intervallschachtelung $(a_\nu|b_\nu)$ mit folgenden Eigenschaften:*

a) *x ist Limespunkt von $(a_\nu|b_\nu)$.*

b) $\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n \in \mathbb{Q}_+ \wedge b_n \in \mathbb{Q}_+)$.

c) $\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n < x < b_n$, *falls $x > 0$, bzw.* $\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = 0 < b_n$, *falls $x = 0$.*

Ist $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine beliebige gegen x konvergente Folge, so liegen fast alle x_n in jedem Intervall einer solchen Intervallschachtelung.

Beweis. Es sei $x = \zeta_0,\zeta_1\zeta_2\ldots$ beliebig aus $\mathbb{R}_+$. Ist x kein endlicher Dezimalbruch, so setzen wir $a_n = x^{(n)} = \zeta_0,\zeta_1\ldots\zeta_n$ und $b_n = a_n + \frac{1}{10^n}$. Auf Grund von Satz 1 aus 4.8. ist b_n ebenfalls ein endlicher Dezimalbruch der Form $\zeta_0',\zeta_1'\ldots\zeta_n'$, und wegen $a_n < b_n$ gilt daher $\zeta_0,\zeta_1\ldots\zeta_n < \zeta_0,\zeta_1\zeta_2\ldots < \zeta_0',\zeta_1'\ldots\zeta_n'$. Nach Satz 6 folgt $\sup a_\nu = \inf b_\nu = x$.

Ist x ein endlicher Dezimalbruch, so ist x eine gebrochene Zahl. Im Fall $x = 0$ setzen wir $a_n = 0$, $b_n = \frac{1}{10^n}$, und für $x > 0$ setzen wir $a_n = \max\left\{0, x - \frac{1}{10^n}\right\}$, $b_n = x + \frac{1}{10^n}$. Wir erhalten nach Satz 6 wieder $\sup a_\nu = \inf b_\nu = x$. Schließlich sei $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine beliebige gegen x konvergente Folge. Es existiert also eine Intervallschachtelung $(a_\nu' | b_\nu')$ mit $a_\nu' \leqq x_n \leqq b_\nu'$ für fast alle n bei beliebiger Wahl von ν. Es sei $(a_\nu | b_\nu)$ eine Intervallschachtelung mit den im Satz genannten Eigenschaften. Wir wollen jetzt $x > 0$ voraussetzen. Für $x = 0$ verlaufen die Überlegungen ähnlich. Wegen $a_m < x$ und $\sup a_\nu' = x$ existiert ein a'_{n_0} mit $a'_{n_0} > a_m$. Entsprechend kann ein b'_{n_0} mit $b'_{n_0} < b_m$ gefunden werden. Wegen $[\![a'_{n_0}, b'_{n_0}]\!] \leqq [\![a_m, b_m]\!]$ liegen damit auch in $[\![a_m, b_m]\!]$ fast alle x_n. Damit ist der Satz bewiesen.

Aus dem Beweis von Satz 7 ergibt sich insbesondere, daß für x aus $\mathbb{R}_+$ die Folge $(x^{(\nu)})_{\nu \in \mathbb{N}}$ gegen x konvergiert. Damit gilt:

Satz 8. *Zu jedem x aus $\mathbb{R}_+$ existiert eine Folge $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ aus $\mathbb{Q}_+$ mit $x = \lim\limits_{\nu \to \infty} x_\nu$.*

Eine Folge, die gegen Null konvergiert, nennen wir eine *Nullfolge*. Wir werden jetzt ein Kriterium dafür angeben, wann eine Folge aus $\mathbb{Q}_+$ eine Nullfolge ist.

Satz 9. *Eine Folge $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ aus $\mathbb{Q}_+$ konvergiert genau dann gegen Null, wenn $x_n < \frac{1}{m}$ für fast alle n bei beliebiger Vorgabe von m gilt ($m \in \mathbb{N}^*$).*

Beweis. Zunächst ist $\left(0 \,\middle|\, \frac{1}{m}\right)$ eine Intervallschachtelung nach Satz 6 mit dem Limespunkt Null. Danach folgt der Satz 9 unmittelbar aus der Definition der Konvergenz und aus Satz 7.

Über das Rechnen mit Nullfolgen aus $\mathbb{Q}_+$ beweisen wir den

Satz 10. *Sind $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ und $(y_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ Nullfolgen aus $\mathbb{Q}_+$, so ist auch $(x_\nu + y_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Ist $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge aus $\mathbb{Q}_+$ und $(y_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge aus $\mathbb{Q}_+$, so ist $(x_\nu \cdot y_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge aus $\mathbb{Q}_+$.*

Beweis. Der erste Teil des Satzes ergibt sich unmittelbar aus Satz 9. Es sei $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge aus $\mathbb{Q}_+$ und $(y_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge aus $\mathbb{Q}_+$. Es existiert also ein r aus $\mathbb{Q}_+$ mit $y_n < r$ für alle n. Da $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, gilt $x_n < \frac{1}{rm}$ für fast alle n bei beliebiger Wahl von $m \in \mathbb{N}^*$. Daraus folgt

$$x_n y_n \leqq x_n r < \frac{r}{rm} = \frac{1}{m},$$

d. h., $(x_\nu \cdot y_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

Der Satz 6 ermöglicht nun die folgende Charakterisierung einer Intervallschachtelung, die durch Folgen aus $\mathbb{Q}_+$ erklärt ist.

Satz 11. *Es seien* $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *Folgen aus* $\mathbb{Q}_+$ *mit* $a_n \leqq a_{n+1}$, $b_{n+1} \leqq b_n$ *und* $a_n < b_n$ *für alle* n. *Dann bilden die Folgen* $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *genau dann eine Intervallschachtelung, wenn* $\lim\limits_{\nu\to\infty}(b_\nu - a_\nu) = 0$ *gilt.*

Der folgende Satz ist wesentlich für die Möglichkeit der Übertragung der Rechenoperationen und Rechengesetze von $\mathbb{Q}_+$ auf R_+.

Satz 12. *Sind* $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *und* $(x_\nu')_{\nu\in\mathbb{N}}$ *konvergente Folgen aus* $\mathbb{Q}_+$, *so sind auch die Folgen* $(x_\nu + x_\nu')_{\nu\in\mathbb{N}}$ *und* $x_\nu \cdot (x_\nu')_{\nu\in\mathbb{N}}$ *konvergent. Gilt ferner noch* $x_n \neq 0$ *für alle* n *und* $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu \neq 0$, *so ist auch die Folge* $\left(\frac{1}{x_\nu}\right)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *konvergent. Dabei hängen die Grenzwerte der Folgen* $(x_\nu + x_\nu')_{\nu\in\mathbb{N}}$, $(x_\nu \cdot x_\nu')_{\nu\in\mathbb{N}}$ *und* $\left(\frac{1}{x_\nu}\right)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *nur von den Grenzwerten der Folgen* $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *bzw.* $(x_\nu')_{\nu\in\mathbb{N}}$ *ab.*

Beweis. Es gelte $x = \lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu$, $x' = \lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu'$. Wir beschränken uns jeweils auf den Fall $x > 0$, $x' > 0$. Für x bzw. x' seien $(a_\nu \mid b_\nu)$ bzw. $(a_\nu' \mid b_\nu')$ Intervallschachtelungen mit den in Satz 7 genannten Eigenschaften. Aus den Sätzen 10 und 11 erhalten wir $\lim\limits_{\nu\to\infty}(b_\nu + b_\nu' - (a_\nu + a_\nu')) = 0$ und daher eine Intervallschachtelung $(a_\nu + a_\nu' \mid b_\nu + b_\nu')$ mit $a_n + a_n' < x_\nu + x_\nu' < b_n + b_n'$ für fast alle ν bei beliebigen n. Damit ist gezeigt, daß $(x_\nu + x_\nu')_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge ist. Um zu zeigen, daß $(x_\nu \cdot x_\nu')_{\nu\in\mathbb{N}}$ konvergiert, benutzen wir die Umformung $b_nb_n' - a_na_n' = (b_n - a_n)\,b_n' + (b_n' - a_n')a_n$, aus der wir mit Hilfe der Sätze 10 und 11 $\lim\limits_{\nu\to\infty}(b_\nu b_\nu' - a_\nu a_\nu') = 0$ erhalten. Daher ist $(a_\nu a_\nu' \mid b_\nu b_\nu')$ eine Intervallschachtelung, und wegen $a_na_n' < x_\nu x_\nu' < b_nb_n'$ für fast alle ν bei beliebigem n ist $(x_\nu x_\nu')_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Schließlich zeigen wir noch die Konvergenz von $\left(\frac{1}{x_\nu}\right)_{\nu\in\mathbb{N}}$. Wegen $\nu > 0$ können wir zunächst zu den in Satz 7 genannten Eigenschaften von $(a_\nu \mid b_\nu)$ noch $a_n > 0$ für alle n voraussetzen. Es ist dann $\frac{1}{b_n} < \frac{1}{x_\nu} < \frac{1}{a_n}$ für fast alle ν bei beliebigem n. Wegen

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{b_n} = \frac{b_n - a_n}{a_nb_n} < \frac{b_n - a_n}{a_1^{\,2}}$$

gilt

$$\lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{1}{a_\nu} - \frac{1}{b_\nu}\right) = 0.$$

Also ist $\left(\frac{1}{x_\nu}\right)_{\nu\in\mathbb{N}}$ konvergent. Die Grenzwerte der Folgen $(x_\nu + x_\nu')_{\nu\in\mathbb{N}}$, $(x_\nu \cdot x_\nu')_{\nu\in\mathbb{N}}$ und $\left(\frac{1}{x_\nu}\right)_{\nu\in\mathbb{N}}$ hängen nur von den Grenzwerten der Folgen $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ bzw. $(x_\nu')_{\nu\in\mathbb{N}}$ ab, da nach Satz 7 die genannten Intervallschachtelungen $(a_\nu \mid b_\nu)$, $(a_\nu' \mid b_\nu')$ in gleicher Weise benutzt werden können, wenn wir von zwei anderen Folgen ausgehen, die die gleichen Grenzwerte wie $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ und $(x_\nu')_{\nu\in\mathbb{N}}$ besitzen.

6.2.3. Algebraische Operationen in der Menge R_+

Das mit Satz 12 erhaltene Ergebnis benutzen wir zunächst zur Definition einer Addition und einer Multiplikation im Bereich R_+.

Definition 4 (Addition und Multiplikation in R_+). Es seien x, x' beliebige Elemente aus R_+ sowie $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, $(x_\nu')_{\nu\in\mathbb{N}}$ gegen x bzw. x' konvergente Folgen aus $\mathbb{Q}_+$. Das nach Satz 12 durch x und x' eindeutig bestimmte Element $\lim\limits_{\nu\to\infty}(x_\nu + x_\nu')$ bezeichnen wir mit $x + x'$ und nennen es die Summe von x und x'. Entsprechend bezeichnen wir mit $x \cdot x'$ den Grenzwert $\lim\limits_{\nu\to\infty}(x_\nu \cdot x_\nu')$ und nennen $x \cdot x'$ das Produkt der Elemente x und x'. Also:

$$(3) \qquad x + x' := \lim_{\nu\to\infty}(x_\nu + x_\nu'); \qquad x \cdot x' := \lim_{\nu\to\infty}(x_\nu \cdot x_\nu').$$

Statt (3) können wir auch

$$(3') \qquad \lim_{\nu\to\infty} x_\nu + \lim_{\nu\to\infty} x_\nu' = \lim_{\nu\to\infty}(x_\nu + x_\nu'), \qquad \lim_{\nu\to\infty} x_\nu \cdot \lim_{\nu\to\infty} x_\nu' = \lim_{\nu\to\infty}(x_\nu \cdot x_\nu')$$

schreiben, wenn $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ und $(x_\nu')_{\nu\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen aus $\mathbb{Q}_+$ sind.

Wegen $x = \sup x^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)}$ sind die unter (2) genannten Definitionen mit der Definition 4 gleichwertig.

Wir können jetzt ohne Schwierigkeiten die Gültigkeit der Strukturgesetze von $\mathbb{Q}_+$ für R_+ nachweisen.

Satz 13. *Der Bereich* $\mathsf{R}_+(<, +, \cdot)$ *bildet einen geordneten Halbkörper, der den Bereich* $\mathbb{Q}_+(<, +, \cdot)$ als *Teilstruktur enthält.*

Beweis. Es seien x, x', x'' beliebige Elemente aus R_+ und $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, $(x_\nu')_{\nu\in\mathbb{N}}$, $(x_\nu'')_{\nu\in\mathbb{N}}$ gegen x, x' bzw. x'' konvergente Folgen aus R_+.

Assoziativgesetz der Addition:

$$\begin{aligned}(x + x') + x'' &= \lim_{\nu\to\infty}(x_\nu + x_\nu') + x'' = \lim_{\nu\to\infty}((x_\nu + x_\nu') + x_\nu'') \\ &= \lim_{\nu\to\infty}(x_\nu + (x_\nu' + x_\nu'')) = x + \lim_{\nu\to\infty}(x_\nu' + x_\nu'') = x + (x' + x'').\end{aligned}$$

Kommutativgesetz der Addition:

$$x + x' = \lim_{\nu\to\infty}(x_\nu + x_\nu') = \lim_{\nu\to\infty}(x_\nu' + x_\nu) = x' + x.$$

Existenz eines Nullelementes:

Für die Folge $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ mit $a_\nu = 0$ für alle ν gilt $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$ und daher

$$x + 0 = \lim_{\nu\to\infty}(x_\nu + 0) = \lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x.$$

Assoziativgesetz der Multiplikation:

$$\begin{aligned}(xx')x'' &= \lim_{\nu\to\infty}(x_\nu x_\nu') \cdot \lim_{\nu\to\infty} x_\nu'' = \lim_{\nu\to\infty}((x_\nu x_\nu')x_\nu'') = \lim_{\nu\to\infty}(x_\nu(x_\nu' x_\nu'')) \\ &= \lim_{\nu\to\infty} x_\nu \cdot \lim_{\nu\to\infty}(x_\nu' x_\nu'') = x(x'x'').\end{aligned}$$

Kommutativgesetz der Multiplikation:

$$xx' = \lim_{\nu\to\infty}(x_\nu x_\nu') = \lim_{\nu\to\infty}(x_\nu' x_\nu) = x'x.$$

Existenz eines Einselementes:

Für die Folge $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ mit $a_\nu = 1$ für alle ν gilt $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 1$ und daher

$$x \cdot 1 = \lim_{\nu\to\infty}(x_\nu \cdot 1) = \lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x.$$

Existenz inverser Elemente:

Es sei $x \neq 0$ und $x_n \neq 0$ für alle n. Nach Satz 12 ist dann auch $\left(\frac{1}{x_\nu}\right)_{\nu\in\mathbb{N}}$ konvergent, und es gilt

$$x \lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{1}{x_\nu}\right) = \lim_{\nu\to\infty}\left(x_\nu \frac{1}{x_\nu}\right) = \lim_{\nu\to\infty} 1 = 1.$$

Distributivgesetz:

$$\begin{aligned}x(x' + x'') &= x \lim_{\nu\to\infty}(x_\nu' + x_\nu'') = \lim_{\nu\to\infty}(x_\nu(x_\nu' + x_\nu'')) \\ &= \lim_{\nu\to\infty}(x_\nu x_\nu' + x_\nu x_\nu'') = \lim_{\nu\to\infty}(x_\nu x_\nu') + \lim_{\nu\to\infty}(x_\nu x_\nu'') = xx' + xx''.\end{aligned}$$

Monotoniegesetz der Addition:

Es sei $x < x'$. Es existieren gebrochene Zahlen a, b mit $x < a < b < x'$. Für fast alle n gilt dann $x_n < x_n + (b - a) < x_n'$ und daher auch

$$x_n + x_n'' < x_n + (b - a) + x_n'' < x_n' + x_n''.$$

Nach Satz 5 erhalten wir daraus

$$\lim_{\nu\to\infty}(x_\nu + x_\nu'') \leqq \lim_{\nu\to\infty}(x_\nu + (b-a) + x_\nu'') \leqq \lim_{\nu\to\infty}(x_\nu' + x_\nu''),$$

d. h., $x + x'' \leqq x + x'' + (b-a) \leqq x' + x''$. Aus $x + x'' = x' + x''$ würde nun $x + x'' = x + x'' + (b-a)$ und durch vollständige Induktion sogar $x + x'' = x + x'' + n(b-a)$ für jede natürliche Zahl n folgen. Da $b - a$ eine positive rationale Zahl ist, existiert nach dem Archimedischen Axiom ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k(b-a) > x + x''$, also würde

$$x + x'' < k(b-a) \leqq k(b-a) + x + x'' = x + x''$$

im Widerspruch zur Irreflexivität der Relation „$<$" gelten. (Bei der Abschätzung $k(b-a) \leqq k(b-a) + x + x''$ wurde die bereits bewiesene Aussage $x < x' \Rightarrow x + x'' \leqq x' + x''$ benutzt.)

Monotoniegesetz der Multiplikation:

Aus $x < x'$ und $x'' > 0$ folgt $x_n < x_n'$ und $x_n'' > 0$ für fast alle n. Wir erhalten dann also $x_n x_n'' < x_n' x_n''$ für fast alle n und nach Satz 5 daher $xx'' \leqq x'x''$. Es muß nun sogar $xx'' < x'x''$ gelten, da wegen $x'' > 0$ und der bereits bewiesenen Existenz inverser Elemente sonst $x = x'$ folgen würde.

Der Bereich $\mathsf{R}_+(<, +, \cdot)$ erfüllt also die Strukturgesetze (A0), (A1), ($A2_1$), (A3); (M0), (M1), ($M2_1$) ($M2_2$), (M3); (M4); (O1), (O2), (O3) und ist daher ein geordneter Halbkörper. Wegen $\mathsf{Q}_+(<, +, \cdot) \subseteqq \mathsf{R}_+(<, +, \cdot)$ (hinsichtlich der Bedeutung dieser Schreibweise vgl. S. 56) ist Satz 13 damit bewiesen.

6.2.4. Der Körper der reellen Zahlen

Mit dem Halbkörper $\mathsf{R}_+(<, +, \cdot)$ haben wir eine Erweiterung von $\mathsf{Q}_+(<, +, \cdot)$ gewonnen, in der das Archimedische Axiom sowie das Stetigkeitsaxiom gelten. Wir können nun $\mathsf{R}_+(<, +, \cdot)$ nach der in Kapitel 5 für den Übergang von Q_+ zu Q dargelegten Methode zu einem archimedisch geordneten Körper $\mathsf{R}(<, +, \cdot)$ erweitern, der den Bereich der rationalen Zahlen enthält. Es ist leicht zu zeigen (Übungsaufgabe), daß bei diesem Übergang von R_+ zu R die Stetigkeit erhalten bleibt. Somit ist R ein archimedisch geordneter Körper, der das Stetigkeitsaxiom erfüllt und der den Bereich der rationalen Zahlen umfaßt. Die Elemente aus R nennen wir *reelle Zahlen* bzw. R den *Bereich der reellen Zahlen*. Eine reelle Zahl, die keine rationale Zahl ist, wird eine *irrationale* Zahl genannt.

Nach der Konstruktion von R kann jede reelle Zahl a als unendlicher Dezimalbruch ohne Neunerperiode $a_0,a_1a_2\ldots$ bzw. in der Form $-a_0,a_1a_2\ldots$ dargestellt werden, je nachdem, ob a positiv oder negativ ist.

Die in 5.2. und 5.3. für Q hergeleiteten Rechenregeln gelten auch für das Rechnen in R.

Der Betrag einer reellen Zahl wird in gleicher Weise wie der Betrag einer rationalen Zahl erklärt:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ wenn } a \geqq 0, \\ -a, \text{ wenn } a < 0. \end{cases} \tag{4}$$

Das Rechnen mit Beträgen erfolgt in R ebenfalls nach den gleichen Rechenregeln wie in Q.

Wir wissen, daß bei der Veranschaulichung der rationalen Zahlen auf einer Geraden die den rationalen Zahlen zugeordneten Punkte die Zahlengerade nicht lückenlos ausfüllen. Nach der Erweiterung des Körpers der rationalen Zahlen zum Körper der reellen Zahlen ergeben sich die folgenden Fragen: Läßt sich die Veranschaulichung der rationalen Zahlen auf einer Geraden zu einer Veranschaulichung aller reellen Zahlen auf der Geraden forsetzen? Wird gegebenenfalls dabei jedem Punkt der Zahlengeraden eine reelle Zahl zugeordnet?

Die Möglichkeit der Veranschaulichung der reellen Zahlen auf der Zahlengeraden ist mit der Stetigkeit der Geraden im Sinne des Stetigkeitsaxioms (O4) gleichwertig. Ist $a = a_0,a_1a_2...$ aus $\mathsf{R}_+ \setminus \mathsf{Q}$, so wird dieser Zahl derjenige Punkt $P_a = P$ auf der Geraden zugeordnet, den wir zur Veranschaulichung der durch a in Q_+ charakterisierten Lücke verwendeten (vgl. Abb. 5). Die Zahl $-a$ wird durch den zu P_a bezüglich P_0 symmetrisch liegenden Punkt veranschaulicht.

Ist P ein beliebiger rechts von P_0 gelegener Punkt der Zahlengeraden, so können wir auf die Strecke OP das dem Divisionsalgorithmus zugrunde liegende Meßverfahren anwenden. Wir erhalten eine Folge a_0; a_0,a_1; a_0,a_1a_2;... gebrochener Zahlen und daher einen eindeutig bestimmten Dezimalbruch $a_0,a_1a_2...$. Wir zeigen, daß $a_0,a_1a_2...$ eine reelle Zahl ist, indem wir nachweisen, daß die Periode 9 nicht auftreten kann. Für den Fall, daß OP bezüglich der Einheitsstrecke OP_1 kommensurabel ist, haben wir den Beweis schon geführt (vgl. 4.8.). Es sei OP bezüglich OP_1 inkommensurabel. Wir wollen die Annahme, daß $a_0,a_1a_2...$ die Periode 9 enthält, zum Widerspruch führen. Ist k der größte Index, für den $a_k < 9$ ist, so betrachten wir den endlichen Dezimalbruch $b = a_0,a_1...a_{k-1}(a_k + 1)$. Dann ist OP_b bezüglich OP_1 kommensurabel und daher P_b von P verschieden. Wir wollen uns überlegen, daß zwischen P und P_b ein rationaler Punkt P' liegt, für den also OP' kommensurabel ist. Dazu betrachten wir den n-ten Teil $OP_{\frac{1}{n}}$ der Maßeinheit OP_1, wobei wir n so groß wählen können, daß $OP_{\frac{1}{n}}$ kürzer als PP_b wird.[1]) Von den rationalen Punkten $P_{\frac{k}{n}}$ $(k = 1, 2, ...)$, die wir bei fortlaufendem Nebeneinanderlegen der Strecke $OP_{\frac{1}{n}}$ erhalten, wählen wir denjenigen Punkt $P_{\frac{m}{n}}$ aus, der erstmals rechts von P liegt. Auf Grund der Festlegung von n ist $P' = P_{\frac{m}{n}}$

[1]) Die zur Veranschaulichung der Zahlen auf einer Geraden benutzten Eigenschaften einer Geraden stehen in Übereinstimmung mit unserer Vorstellung. Eine genaue Analyse dieser Eigenschaften und ihre Begründung im Sinne einer exakten mathematischen Theorie erfolgt in der Geometrie (vgl. MfL Bd. 6).

ein rationaler Punkt, der zwischen P und P_b liegt. Nach der Bedeutung der einzelnen Ziffern beim genannten Meßprozeß muß im Sinne der lexikographischen Ordnung die Beziehung

$$a_0,a_1\ldots a_k\overline{9} < b_0,b_1b_2\ldots < a_0,a_1\ldots a_{k-1}(a_k+1)$$

für $\frac{m}{n} = b_0,b_1b_2\ldots$ gelten. Ein solcher Dezimalbruch $b_0,b_1b_2\ldots$ kann aber offensichtlich nicht existieren.

Die reellen Zahlen lassen sich also auf der Zahlengeraden veranschaulichen und füllen dabei die Zahlengerade lückenlos aus.

Während im Bereich der rationalen Zahlen nicht jede Gleichung der Form $x^n = a$ ($a \in \mathbb{Q}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$) lösbar ist, gilt für den Bereich der reellen Zahlen der folgende

Satz 14 (Existenz und Eindeutigkeit der n-ten Wurzel). *Jede Gleichung der Form $x^n = a$ mit $a \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$ besitzt genau eine nichtnegative Lösung.*

Für den Fall der Gleichung $x^2 = 2$ haben wir den Beweis praktisch schon in 5.4. geführt. Wir haben dort gezeigt, daß in $\mathbb{Q}_+$ für ein Supremum x' der Menge $\{x: x \in \mathbb{Q}_+ \wedge x^2 < 2\}$ weder $x'^2 < 2$ noch $x'^2 > 2$ gelten kann. Das läßt sich in $\mathbb{R}_+$ genauso für das Supremum b der nach oben beschränkten Menge $\{x: x \in \mathbb{R}_+ \wedge x^2 < 2\}$ zeigen. Es muß danach $b^2 = 2$ gelten. Unter Verwendung des binomischen Satzes kann der Beweis ähnlich für beliebige $n \in \mathbb{N}^*$ und $a \in \mathbb{R}_+$ geführt werden. Einen Beweis von Satz 14 findet der Leser auch in MfL Bd. 4.

Die eindeutige nichtnegative Lösung b der Gleichung $x^n = a$ ($a \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$) heißt n-te Wurzel von a und wird mit $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet. Es gelten also:

$$(5) \qquad \sqrt[n]{a} \geqq 0, \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Die Begriffe der Intervallschachtelung und der Konvergenz einer Folge können analog den in 6.2.2. gegebenen Definitionen für den Bereich R der reellen Zahlen erklärt werden. Der folgende Satz beinhaltet eine zweckmäßige Beschreibung der Konvergenz einer beliebigen Folge $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ aus R.

Satz 15.

$$(6) \qquad \lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{N(\varepsilon)\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} (n \geqq N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon).$$

Beweis. Die Existenz einer natürlichen Zahl $N(\varepsilon)$ mit $|x_n - x| < \varepsilon$ für alle $n \geqq N(\varepsilon)$, ist gleichwertig damit, daß die Ungleichung $|x_n - x| < \varepsilon$ für fast alle n gilt. Es sei $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Es existiert dann eine Intervallschachtelung $(a_\nu \mid b_\nu)$ mit $a_m < x_n < b_m$ für fast alle n bei beliebigem m und $\sup a_\nu = \inf b_\nu = x$. Unter Verwendung von Satz 1 und Satz 6 kann $m = m_0$ so gewählt werden, daß $b_{m_0} - a_{m_0} < \varepsilon$ erfüllt ist. Dann gilt $|x - x_n| < b_{m_0} - a_{m_0} < \varepsilon$ für fast alle n.

Es gelte nun $|x_n - x| < \varepsilon$ für fast alle n bei beliebiger Wahl von $\varepsilon > 0$. $(a_\nu \mid b_\nu)$ sei eine Intervallschachtelung mit dem Limespunkt x und $a_m < x < b_m$ für alle m. Wir

betrachten ein beliebiges Intervall $[\![a_{m_s}, b_{m_s}]\!]$ dieser Intervallschachtelung und setzen $\varepsilon = \min\{b_{m_s} - x, x - a_{m_s}\}$. Wegen $|x_n - x| < \varepsilon$ für fast alle n gilt $x_n \in [\![a_{m_s}, b_{m_s}]\!]$ für fast alle n. Das bedeutet $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x$.

Um ein weiteres wichtiges Konvergenzkriterium zu gewinnen, beweisen wir zunächst für eine beliebige Folge $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{R}$

$$(7)\qquad (x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \text{ konvergent} \Leftrightarrow \sup_n \inf_{m>n} x_m = \inf_n \sup_{m>n} x_m.$$

(Die rechte Seite dieser Aussage ist eine Abkürzung für $\sup\{y_n : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$, wobei y_n und z_n durch $y_n = \inf\{x_m : m > n\}$ bzw. $z_n = \sup\{x_m : m > n\}$ erklärt sind.)

Beweis. Es sei $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ konvergent und $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x$. Wegen $\inf_{m>n_1} x_m \leqq \sup_{m>n_2} x_m$ bei beliebiger Wahl von n_1 und n_2 aus $\mathbb{N}$ gilt stets

$$(8)\qquad \sup_n \inf_{m>n} x_m \leqq \inf_n \sup_{m>n} x_m.$$

Wir nehmen an, daß $\sup_n \inf_{m>n} x_m < \inf_n \sup_{m>n} x_m$ gilt, und setzen

$$\varepsilon = \inf_n \sup_{m>n} x_m - \sup_n \inf_{m>n} x_m.$$

Ferner sei n_0 so gewählt, daß $|x - x_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $n \geqq n_0$ erfüllt ist. Dann gilt

$$x - \frac{\varepsilon}{3} < x_n < x + \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle $n \geqq n_0$ und daher auch

$$x - \frac{\varepsilon}{3} \leqq \inf_{m>n_0} x_m \leqq \sup_{m>n_0} x_m \leqq x + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Also ist

$$x - \frac{\varepsilon}{3} \leqq \sup_n \inf_{m>n} x_m \leqq \inf_n \sup_{m>n} x_m \leqq x + \frac{\varepsilon}{3}$$

und daher

$$\inf_n \sup_{m>n} x_m - \sup_n \inf_{m>n} x_m \leqq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

Damit haben wir einen Widerspruch erhalten.

Es gelte nun $\sup_n \inf_{m>n} x_m = \inf_n \sup_{m>n} x_m = x$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert dann ein n_0 mit

$$x - \varepsilon < \inf_{m>n_0} x_m \leqq x \leqq \sup_{m>n_0} x_m < x + \varepsilon.$$

Das bedeutet $x - \varepsilon < x_m < x + \varepsilon$ für fast alle m. Also ist $|x - x_m| < \varepsilon$ für fast alle m.

Satz 16 (Cauchysches Konvergenzkriterium). *Es sei* $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *eine beliebige Folge aus* R. *Dann gilt:*

$$(9)\qquad (x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \text{ konvergent} \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0}\bigvee_{N(\varepsilon)\in\mathbb{N}}\bigwedge_{m,n\in\mathbb{N}} (n, m \geqq N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon).$$

Beweis. Es sei $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ konvergent und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $N(\varepsilon)$, so daß $|x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geqq N(\varepsilon)$ ist. Daraus ergibt sich $|x_n - x_m| \leqq |x_n - x| + |x - x_m| < \varepsilon$ für $m, n \geqq N(\varepsilon)$.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ möge ein $N(\varepsilon)$ existieren mit $|x_n - x_m| < \varepsilon$ für alle $m, n \geqq N(\varepsilon)$. Dann gilt also $x_n - \varepsilon < x_m < x_n + \varepsilon$ für $m, n \geqq N(\varepsilon)$ und daher $\inf\limits_{m>n} x_m + 2\varepsilon \geqq \sup\limits_{m>n} x_m$ für $n \geqq N(\varepsilon)$. Daraus folgt $\sup\limits_{n}\inf\limits_{m>n} x_m + 2\varepsilon \geqq \inf\limits_{n}\sup\limits_{m>n} x_m$ für jedes $\varepsilon > 0$. Es gilt somit $\sup\limits_{n}\inf\limits_{m>n} x_m \geqq \inf\limits_{n}\sup\limits_{m>n} x_m$ und wegen (8) und (7) ist damit die Konvergenz von $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ bewiesen.

6.3. Verschiedene Charakterisierungen und Konstruktionsmöglichkeiten des Körpers der reellen Zahlen

In 6.1. haben wir bereits darauf hingewiesen, daß es bis auf Isomorphie genau eine stetige Erweiterung des Körpers Q gibt. Wir werden uns in 6.3.1. dem Beweis dieser Charakterisierung des Körpers der reellen Zahlen zuwenden. Zu verschiedenen Charakterisierungen der stetigen Körper gelangen wir in 6.3.2. dadurch, daß wird das Stetigkeitsaxiom durch gleichwertige Bedingungen ersetzen. Aus den einzelnen Charakterisierungen der stetigen Körper ergeben sich weitere Konstruktionsmöglichkeiten für den Bereich der reellen Zahlen, auf die wir in 6.3.3. kurz eingehen.

6.3.1. Der Bereich der reellen Zahlen als einziger stetiger Körper

Es sei zunächst $K = K(<, +, \cdot)$ ein beliebiger geordneter Körper. Nach Satz 4 aus 5.2. enthält K einen zu $\mathbb{Q}(<, +, \cdot)$ isomorphen Teilbereich, der als Primkörper von K (vgl. 5.2. Satz 5) eindeutig bestimmt ist. Wir wollen den zu Q isomorphen Teilbereich von K mit Q identifizieren und daher stets Q als einen Teilkörper von K bzw. K als einen Erweiterungskörper von Q auffassen.

Für beliebige Elemente a, b aus K bezeichnen wir mit $a - b$ die Lösung der Gleichung $b + x = a$ und für $b \neq 0$ mit $\frac{a}{b}$ die Lösung der Gleichung $b \cdot x = a$. Ferner sei $|a|$ wieder das nichtnegative Element aus der Menge $\{a, -a\}$. Bezüglich der Addition Subtraktion, Multiplikation und Division sowie mit Ungleichungen und Beträgen kann in K weitgehend genauso gerechnet werden wie im Körper der rationalen Zahlen.

Die Eigenschaften des in 6.2. konstruierten Körpers R der reellen Zahlen veranlassen uns zu folgender

Definition (stetiger Körper). Der geordnete Körper $K = K(<, +, \cdot)$ wird ein *stetiger Körper* genannt, wenn er das Stetigkeitsaxiom (O4) erfüllt:

Jede nichtleere nach oben beschränkte Menge besitzt ein Supremum.

Der Körper R der reellen Zahlen ist nach dieser Definition ein stetiger Körper. Ferner wissen wir, daß R archimedisch geordnet ist. Der folgende Satz zeigt, daß das Archimedische Axiom aus dem Stetigkeitsaxiom folgt.

Satz 1. *Jeder stetige Körper ist archimedisch geordnet.*

Beweis. Wir führen die Annahme, daß K stetig ist und das Archimedische Axiom nicht erfüllt, zum Widerspruch. Da K nicht archimedisch geordnet sein soll, ist die Menge N der natürlichen Zahlen nach oben beschränkt und besitzt daher wegen der geforderten Stetigkeit von K ein Supremum. Wenn wir $b = \sup \mathsf{N}$ setzen, ist $b - 1$ kleiner als b und daher keine obere Schranke von N. Es existiert also ein natürliche Zahl n mit $b - 1 < n$. Daraus folgt $b < n + 1$ im Widerspruch dazu, daß b eine obere Schranke von N ist.

Wir bemerken, daß es auch geordnete Körper gibt, die das Archimedische Axiom nicht erfüllen. Als Beispiel betrachten wir den Bereich der rationalen Funktionen der Form $\frac{f(x)}{g(x)}$, wobei $f(x)$ und $g(x)$ Polynome mit Koeffizienten aus Q sind und $g(x)$ vom Nullpolynom verschieden ist. Die für Polynome übliche Addition und Multiplikation läßt sich analog dem Vorgehen in Kapitel 4 auf den Bereich der rationalen Funktionen fortsetzen. Ein Polynom $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ wird *positiv* genannt, wenn sein höchster (nicht verschwindender) Koeffizient a_n positiv ist. Die dadurch im Bereich der Polynome definierte Ordnung läßt sich nun ebenfalls auf den Bereich der rationalen Funktionen fortsetzen. Bezüglich der erklärten Addition, Multiplikation und Ordnung ist der Bereich der rationalen Funktionen ein geordneter Körper, der das Archimedische Axiom nicht erfüllt. So ist beispielsweise x größer als jede rationale Zahl, das positive Element $\frac{1}{x}$ hingegen kleiner als jede positive rationale Zahl. Im Körper der rationalen Funktionen existieren also sogenannte unendlich große (größer als jede rationale Zahl) und unendlich kleine Elemente (kleiner als jede positive rationale Zahl), aber größer als Null. Solche Elemente kann es in einem archimedisch geordneten Körper nicht geben.

Wir setzen nun voraus, daß der Körper K archimedisch geordnet ist. Dann gelten:

(1) Zu $a, b, c \in K$ mit $a < b$ und $c > 0$ existiert eine natürliche Zahl m, so daß $a + \frac{c}{m} < b$ gilt.

(2) Zwischen je zwei Elementen aus K liegt eine rationale Zahl.

Beweise. Gilt $a < b$, so existiert nach dem Archimedischen Axiom eine natürliche Zahl n mit $\frac{1}{b-a} < n$. Daraus folgt $\frac{1}{n} < b - a$ und daher $a + \frac{1}{n} < b$. Zu c

können wir eine natürliche Zahl k mit $c < k$ finden. Wir erhalten $c < \frac{kn}{n}$ und mit $m = kn$ daher $c < \frac{m}{n}$. Wegen $\frac{c}{m} < \frac{1}{n}$ und $a + \frac{1}{n} < b$ gilt also $a + \frac{c}{m} < b$.

Um (2) zu beweisen, setzen wir o. B. d. A. $0 \leqq a < b$ voraus und bestimmen n so, daß $a + \frac{1}{n} < b$ gilt. Wie bereits aus dem Beweis von (1) hervorgeht, existieren natürliche Zahlen m mit $a < \frac{m}{n}$. Für $m_0 = \min \left\{m: a < \frac{m}{n}\right\}$ ist die Ungleichung $a < \frac{m_0}{n} < b$ erfüllt.

Als Folgerung aus (1) erhalten wir:

(1′) Aus $y < b + \frac{c}{n}$ für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 1$ folgt $a \leqq b$.

Wäre nämlich $b < a$, so müßte nach (1) für ein n die Ungleichung $b + \frac{c}{n} < a$ erfüllt sein.

Ist K ein stetiger Körper, so besitzt jede nach oben beschränkte nichtleere Menge M ein Supremum in K. Dieses eindeutig bestimmte Element aus K bezeichnen wir mit $\sup M$ bzw., wenn aus dem Zusammenhang nicht hervorgeht, welcher stetige Körper gemeint ist, mit $\sup_K M$.

Sind M_1, M_2 beliebige Teilmengen von K, so setzen wir:

(3) $$M_1 + M_2 := \{x + y: x \in M_1 \wedge y \in M_2\},$$

(4) $$M_1 M_2 := \{xy: x \in M_1 \wedge y \in M_2\}.$$

Diese Mengenbildungen spielen im Beweis von Satz 2 eine Rolle. Wir werden die folgenden Aussagen benötigen: Sind M_1 und M_2 nach oben beschränkte nichtleere Teilmengen von K_+ ($:= \{x: x \in K \wedge x \geqq 0\}$), wobei K ein stetiger Körper sein soll, so gelten:

(5) $$\sup (M_1 + M_2) = \sup M_1 + \sup M_2,$$

(6) $$\sup (M_1 M_2) = \sup M_1 \cdot \sup M_2.$$

Wir beschränken uns auf den Beweis der Formel (6). Aus $a_1 \in M_1$, $a_2 \in M_2$ folgt $a_1 a_2 \leqq \sup M_1 \cdot \sup M_2$. Also ist $\sup M_1 \cdot \sup M_2$ eine obere Schranke von $M_1 M_2$ und daher $\sup (M_1 M_2) \leqq \sup M_1 \cdot \sup M_2$. Ist n eine beliebige von Null verschiedene natürliche Zahl, so sind $\sup M_1 - \frac{1}{n}$ und $\sup M_2 - \frac{1}{n}$ keine oberen Schranken von M_1 bzw. M_2. Es existieren also Elemente $a_1 \in M_1$, $a_2 \in M_2$ mit $\sup M_1 - \frac{1}{n} < a_1$

und $\sup M_2 - \frac{1}{n} < a_2$. Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned}&\sup M_1 \cdot \sup M_2\\ &< \left(a_1 + \frac{1}{n}\right)\left(a_2 + \frac{1}{n}\right) = a_1 a_2 + \frac{1}{n}(a_1 + a_2) + \frac{1}{n^2}\\ &\leqq \sup (M_1 M_2) + \frac{1}{n}(\sup (M_1 + M_2) + 1)\end{aligned}$$

und nach (1') daher $\sup M_1 \cdot \sup M_2 \leqq \sup (M_1 M_2)$.

Satz 2. *Sind K und K' stetige Körper, so gibt es genau einen Isomorphismus von K auf K'. Dieser Isomorphismus läßt die rationalen Zahlen elementweise fest.*

Beweis. Wir werden zunächst zeigen, daß ein Isomorphismus von K auf K' existiert. Es sei $a \in K_+$. Wir definieren

$$\mathfrak{Q}_a := \{x : x \in \mathfrak{Q}_+ \wedge x < a\} \text{ für } a > 0, \quad \mathfrak{Q}_0 := \{0\}. \tag{7}$$

Da $\mathfrak{Q}_a$ eine nichtleere durch a nach oben beschränkte Teilmenge von K ist, existiert $\sup_K \mathfrak{Q}_a$, und es gilt $0 \leqq \sup_K \mathfrak{Q}_a \leqq a$. Wir zeigen

$$\sup_K \mathfrak{Q}_a = a. \tag{8}$$

Für $a = 0$ ist das klar. Würde für $a > 0$ die Ungleichung $\sup_K \mathfrak{Q}_a < a$ gelten, so könnten wir nach (2) eine rationale Zahl r finden, die zwischen $\sup_K \mathfrak{Q}_a$ und a liegt. Nach Definition von $\mathfrak{Q}_a$ müßte r dann zu $\mathfrak{Q}_a$ gehören. Das wäre aber ein Widerspruch zur Definition des Supremums.

Die Mengenbildung (7) ist mit der Addition und Multiplikation verträglich:

$$\mathfrak{Q}_{a+b} = \mathfrak{Q}_a + \mathfrak{Q}_b, \qquad \mathfrak{Q}_{ab} = \mathfrak{Q}_a \mathfrak{Q}_b. \tag{9}$$

Wir beschränken uns auf den Nachweis der zweiten Gleichung. Der Beweis der ersten Gleichung ist danach eine einfache Übungsaufgabe. Im Fall $a = 0$ oder $b = 0$ sind beide Gleichungen trivial. Wir können daher $a \cdot b > 0$ voraussetzen. Es sei $r \in \mathfrak{Q}_a \mathfrak{Q}_b$. Es existieren dann $r_1 \in \mathfrak{Q}_a$, $r_2 \in \mathfrak{Q}_b$ mit $r = r_1 r_2$. Wegen $0 \leqq r_1 < a$, $0 \leqq r_2 < b$ ergibt sich $0 \leqq r_1 r_2 < ab$ und daher $r \in \mathfrak{Q}_{ab}$. Damit ist $\mathfrak{Q}_a \mathfrak{Q}_b \subseteq \mathfrak{Q}_{ab}$ bewiesen. Es sei nun $r \in \mathfrak{Q}_{ab}$. Dann gilt $r < ab$, und nach (1) gibt es eine natürliche Zahl n mit $r + \frac{1}{n} < ab$. Zu einer beliebigen natürlichen Zahl m existieren wegen (8) rationale Zahlen r_1 und r_2 aus $\mathfrak{Q}_a$ bzw. $\mathfrak{Q}_b$ mit $r_1 + \frac{1}{m} > a$, $r_2 + \frac{1}{m} > b$. Wir erhalten also

$$r + \frac{1}{n} < ab < \left(r_1 + \frac{1}{m}\right)\left(r_2 + \frac{1}{m}\right) < r_1 r_2 + \frac{1}{m}(a + b + 1).$$

Bei festgehaltenem n sei m so groß gewählt, daß $\frac{1}{n} > \frac{1}{m}(a+b+1)$ gilt. Es folgt dann $r < r_1 r_2$ und daher $\frac{r}{r_1} < r_2$, also $\frac{r}{r_1} \in \mathfrak{Q}_b$. Aus der Darstellung $r = r_1 \frac{r}{r_1}$ können wir somit auf $r \in \mathfrak{Q}_a \mathfrak{Q}_b$ schließen.

Die Mengen der Form $\mathfrak{Q}_a$ werden jetzt zur Erklärung einer Abbildung von K in K' benutzt. Als Teilmenge von $\mathfrak{Q}$ ist $\mathfrak{Q}_a$ auch eine Teilmenge von K'. Da $\mathfrak{Q}_a$ in K nach oben beschränkt ist, besitzt $\mathfrak{Q}_a$ nach dem Archimedischen Axiom auch eine natürliche Zahl als obere Schranke. Das bedeutet aber, daß $\mathfrak{Q}_a$ auch in K' nach oben beschränkt ist. Es existiert daher $\sup_{K'} \mathfrak{Q}_a$. Durch $\sup_K \mathfrak{Q}_a \mapsto \sup_{K'} \mathfrak{Q}_a$ wird eine Abbildung φ von K_+ in K_+' definiert.

Die Definition (7) können wir auch für beliebige Elemente aus K_+' vornehmen:

(7′) $\quad \mathfrak{Q}_{a'} := \{x : x \in \mathfrak{Q}_+ \wedge x < a'\}$ für $a' > 0$.

Es gilt dann:

(10) $\quad \mathfrak{Q}_{\varphi(a)} = \mathfrak{Q}_a$.

Für $a = 0$ ist das klar. Es sei $a > 0$ und $r \in \mathfrak{Q}_{\varphi(a)}$. Dann gilt $r < \sup_{K'} \mathfrak{Q}_a$. Es existiert also ein s mit $s \in \mathfrak{Q}_a$ und $r < s$. Daraus folgt $r < a$ und daher $r \in \mathfrak{Q}_a$. Umgekehrt existiert nach (2) zu einem r aus $\mathfrak{Q}_a$ ein s aus $\mathfrak{Q}_a$ mit $r < s$. Daraus folgt $r \in \mathfrak{Q}_{\varphi(a)}$.

Wir zeigen nun, daß φ ein Isomorphismus von K_+ auf K_+' ist. Die Abbildung φ ist monoton $\big(a < b \Rightarrow \varphi(a) < \varphi(b)\big)$ und daher auch injektiv: Es seien a, b aus K_+ und $a < b$. Da zwischen a und b eine rationale Zahl liegt, ist $\mathfrak{Q}_a$ eine echte Teilmenge von $\mathfrak{Q}_b$. Wegen (10) folgt daraus $\varphi(a) < \varphi(b)$.

Die Abbildung φ ist surjektiv: Es sei $a' \in K_+'$. Für $a = \sup_K \mathfrak{Q}_{a'}$ gilt dann $\mathfrak{Q}_a = \mathfrak{Q}_{a'}$ und daher $\varphi(a) = a'$.

Die Abbildung φ ist additiv $\big(\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)\big)$: Aus $a, b \in K_+$ folgt

$$\begin{aligned} \varphi(a+b) &= \sup_{K'} \mathfrak{Q}_{a+b} = \sup_{K'} (\mathfrak{Q}_a + \mathfrak{Q}_b) \quad \text{(nach (9))} \\ &= \sup_{K'} \mathfrak{Q}_a + \sup_{K'} \mathfrak{Q}_b \quad \text{(nach (5))} \\ &= \varphi(a) + \varphi(b). \end{aligned}$$

Die Abbildung φ ist multiplikativ $\big(\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)\big)$: Aus $a, b \in K_+$ folgt

$$\begin{aligned} \varphi(ab) &= \sup_{K'} \mathfrak{Q}_{ab} = \sup_{K'} (\mathfrak{Q}_a \mathfrak{Q}_b) \quad \text{(nach (9))} \\ &= \sup_{K'} \mathfrak{Q}_a \cdot \sup_{K'} \mathfrak{Q}_b \quad \text{(nach (6))} \\ &= \varphi(a) \cdot \varphi(b). \end{aligned}$$

Der Isomorphismus φ von K_+ auf K_+' kann zu einem Isomorphismus von K auf K' fortgesetzt werden, indem für $a \in K_-$ $(:= \{x : x \in K \wedge x \leqq 0\})$ die Zuordnung $a \mapsto -\varphi(-a)$ erklärt wird.

Es sei nun ψ ein beliebiger Isomorphismus von K auf K'. Wegen

$$\psi(a) = \psi(a+0) = \psi(a) + \psi(0)$$

muß $\psi(0) = 0$ gelten. Entsprechend beweist man $\psi(1) = 1$. Für jede natürliche Zahl

m gilt daher

$$\psi(m) = \psi(1 + \cdots + 1) = \psi(1) + \cdots + \psi(1) = m,$$

und für jede gebrochene Zahl der Form $\frac{1}{n}$ folgt $\psi\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ aus

$$1 = \psi\left(\frac{1}{n} \cdot n\right) = \psi\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \psi(n) = \psi\left(\frac{1}{n}\right) \cdot n.$$

Daraus ergibt sich nun

$$\psi\left(\frac{m}{n}\right) = \psi\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = \psi(m) \cdot \psi\left(\frac{1}{n}\right) = m \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$$

für jede gebrochene Zahl. Für ein beliebiges Element a aus K_+ gilt $a = \sup_K \mathfrak{Q}_a$. Es sei $a' = \sup_{K'} \mathfrak{Q}_a$. Wir wollen $a' = \psi(a)$ beweisen, indem wir die Aussagen $a' < \psi(a)$ bzw. $\psi(a) < a'$ zum Widerspruch führen. Im Falle $a' < \psi(a)$ können wir nach (2) eine gebrochene Zahl r mit $a' < r < \psi(a)$ finden. Daraus folgt $\psi^{-1}(a') < r < a$ und daher $r \in \mathfrak{Q}_a$. Das ist aber ein Widerspruch zu $\sup_{K'} \mathfrak{Q}_a = a' < r$. Falls $\psi(a) < a'$ ist, existiert eine gebrochene Zahl r mit $\psi(a) < r < a'$. Aus $\psi(a) < r$ erhalten wir durch Anwendung von ψ^{-1} die Beziehung $a < r$ und daher $r \notin \mathfrak{Q}_a$. Dem widersprechend bedeutet $r < a' = \sup_{K'} \mathfrak{Q}_a$, daß $r < a$, also $r \in \mathfrak{Q}_a$ gelten muß. Es ist also $\psi(a) = a' = \varphi(a)$ für alle $a \in K_+$. Ist schließlich $a \in K_-$, so gilt $-a \in K_+$ und daher

$$0 = \psi(a - a) = \psi(a) + \psi(-a) = \psi(a) + \varphi(-a).$$

Daraus folgt $\psi(a) = -\varphi(-a) = \varphi(a)$. Der Isomorphismus ψ stimmt also mit φ überein und läßt jede rationale Zahl fest. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Der Satz 2 beinhaltet, daß der in 6.2. konstruierte Körper der reellen Zahlen bis auf Isomorphie der einzige stetige Körper ist. Da ferner die Strukturgesetze (A0), (A1), (A2); (A3); (M0), (M1), (M2), (M3); (M4); (O1), (O2), (O3), (O4) die definierenden Eigenschaften eines stetigen Körpers sind, wird der Körper der reellen Zahlen durch diese Strukturgesetze eindeutig charakterisiert. Mit anderen Worten: Die genannten Strukturgesetze (A0), ..., (O4) bilden ein Axiomensystem für den Körper der reellen Zahlen. Nach Satz 2 existiert zu je zwei Modellen dieses Axiomensystems genau ein Isomorphismus des einen Modells auf das andere, d. h., dieses Axiomensystem ist strikt kategorisch (vgl. MfL Bd. 1, 3.5.).

6.3.2. Weitere Charakterisierungen des Körpers der reellen Zahlen

Die Ergebnisse aus 6.3.1. zeigen die große Bedeutung des Stetigkeitsaxioms (O4). In diesem Abschnitt wollen wir einige wichtige Eigenschaften des Körpers der reellen Zahlen betrachten, die eng mit dem Stetigkeitsaxiom zusammenhängen. Mit Hilfe dieser Eigenschaften gelangen wir zu weiteren Charakterisierungen des Körpers der reellen Zahlen.

Ist M eine beliebige nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von R, so erhalten wir eine Zerlegung (A, B) von R in zwei Klassen A und B, wenn wir B als die Menge der oberen Schranken von M definieren und $A = \mathsf{R} \setminus B$ setzen. Diese Zerlegung hat die Besonderheit, daß jedes Element der Klasse A kleiner ist als jedes Element der Klasse B. Bei der Veranschaulichung der reellen Zahlen auf einer Zahlengeraden kann die Zerlegung (A, B) als „Zerschneiden" der Zahlengeraden in zwei Teile gedeutet werden.

Für einen beliebigen geordneten Körper K definieren wir nun:

(11) (A, B) *Dedekindscher Schnitt* in $K :\Leftrightarrow$

$$\emptyset \subset A \subset K \wedge K = A \cup B \wedge \bigwedge_{a,b \in K} (a \in A \wedge b \in B \Rightarrow a < b).$$

Ist (A, B) ein Dedekindscher Schnitt in K, so nennen wir A die *Unterklasse* und B die *Oberklasse* von (A, B). Da jeder Dedekindsche Schnitt (A, B) in K eine Zerlegung von K mit den beiden Klassen A und B ist, wird (A, B) durch seine Unterklasse (bzw. Oberklasse) eindeutig charakterisiert. Es gilt:

(12) A Unterklasse eines Dedekindschen Schnittes in $K \Leftrightarrow$

$$\emptyset \subset A \subset K \wedge \bigwedge_{a,a' \in K} (a \in A \wedge a' < a \Rightarrow a' \in A).$$

Den Beweis dieser Aussage sowie die Formulierung der entsprechenden Aussage für die Oberklasse überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

Die Ausführungen vor der Definition (11) zeigen, daß jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge M von R (oder auch eines beliebigen geordneten Körpers K) einen Dedekindschen Schnitt (A, B) erzeugt. Da R ein stetiger Körper ist, existiert $c = \sup M$. Für diese Zahl c gilt: $\bigwedge_{a,b} (a \in A \wedge b \in B \Rightarrow a \leqq c \wedge c \leqq b)$. Allgemein definieren wir für einen Dedekindschen Schnitt (A, B) in K:

(13) c *Schnittelement* von $(A, B) :\Leftrightarrow$

$$c \in K \wedge \bigwedge_{a,b \in K} (a \in A \wedge b \in B \Rightarrow a \leqq c \wedge c \leqq b).$$

Jeder Dedekindsche Schnitt (A, B) besitzt höchstens ein Schnittelement (welches dann entweder zu A oder zu B gehört). Sind nämlich c_1 und c_2 Schnittelemente von (A, B) mit $c_1 < c_2$, so folgt für das Element $c = \frac{c_1 + c_2}{2}$ aus K sowohl $c \notin A$ als auch $c \notin B$. Das ist ein Widerspruch zu $A \cup B = K$.

Eine Charakterisierung der stetigen Körper mit Hilfe Dedekindscher Schnitte beinhaltet der folgende

Satz 3. *Der geordnete Körper K ist genau dann stetig, wenn jeder Dedekindsche Schnitt in K ein Schnittelement besitzt.*

Beweis. Es sei K ein geordneter Körper, in dem jeder Dedekindsche Schnitt ein Schnittelement besitzt, und es sei M eine beliebige nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von K. Für das Schnittelement c des von M erzeugten Dedekindschen Schnittes $(K \setminus B, B)$, bei dem also B die Menge der oberen Schranken von M ist, gilt $c = \sup M$. Somit ist K ein stetiger Körper.

Wird nun umgekehrt K als ein stetiger Körper vorausgesetzt und ist (A, B) ein beliebiger Dedekindscher Schnitt in K, so existiert $c = \sup A$ für die nichtleere nach oben beschränkte Menge A. Das Element c ist Schnittelement von (A, B).

Bei den folgenden Betrachtungen wird der bereits in 6.2. behandelte Begriff der Konvergenz einer Folge sowie der Begriff der Fundamentalfolge eine wichtige Rolle spielen. Ist $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus dem geordneten Körper K und x ein Element aus K, so definieren wir in Übereinstimmung mit Satz 15 aus 6.2:

$$(14) \qquad \lim_{\nu \to \infty} x_\nu = x :\Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0, \varepsilon \in K} \bigvee_{N(\varepsilon) \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} (n \geqq N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon).$$

Im Fall $x = \lim_{\nu \to \infty} x_\nu$ nennen wir $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine (in K) *konvergente Folge* und x *Grenzwert* dieser Folge. Man kann leicht zeigen, daß jede konvergente Folge aus K genau einen Grenzwert besitzt.

Für Konvergenzuntersuchungen im Bereich der reellen Zahlen erweist sich die Gültigkeit des Cauchyschen Konvergenzkriteriums (vgl. Satz 16 aus 6.2.) als sehr wesentlich. Beim Beweis dieses Kriteriums wurde die Eigenschaft der Stetigkeit benutzt, so daß wir nicht erwarten können, daß in einem beliebigen geordneten Körper K jede Folge mit der im Cauchyschen Konvergenzkriterium genannten Eigenschaft (vgl. rechte Seite von (9) aus 6.2.) auch konvergent ist. Zur genaueren Darlegung dieser Zusammenhänge definieren wir den Begriff der Fundamentalfolge:

$$(15) \qquad (x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \textit{ Fundamentalfolge} \text{ in } K :\Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0, \varepsilon \in K} \bigvee_{N(\varepsilon) \in \mathbb{N}} \bigwedge_{m,n \in \mathbb{N}} (m, n \geqq N(\varepsilon) \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon).$$

Das in 6.2. bewiesene Cauchysche Konvergenzkriterium besagt, daß in R die Fundamentalfolgen mit den konvergenten Folgen übereinstimmen. Für einen beliebigen geordneten Körper K und eine beliebige Folge $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ aus K gilt:

$$(16) \qquad (x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \text{ konvergent in } K \Rightarrow (x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \text{ Fundamentalfolge in } K.$$

Dies folgt unmittelbar aus der Dreiecksungleichung für den Betrag.

Wenn K ein stetiger Körper und daher isomorph zu R ist, gilt auch die Umkehrung von (16). Allerdings kann allgemein aus der Gültigkeit der Umkehrung von (16) nicht auf die Stetigkeit von K geschlossen werden. Gilt für den geordneten Körper K die

Umkehrung von (16), so heißt K ein *vollständiger* Körper:

(17) K vollständiger Körper $:\Leftrightarrow$

$(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ Fundamentalfolge in $K \Rightarrow (x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ konvergent in K.

Der stetige Körper der reellen Zahlen ist somit ein vollständiger Körper. Während aus der Stetigkeit von K das Archimedische Axiom folgt, gibt es nichtarchimedisch geordnete vollständige Körper. (Jeder geordnete Körper kann nämlich zu einem geordneten vollständigen Körper erweitert werden.) Der folgende Satz zeigt, daß für archimedisch geordnete Körper die Stetigkeit und die Vollständigkeit gleichwertig sind.

Satz 4. *Der geordnete Körper K ist genau dann stetig, wenn er archimedisch geordnet und vollständig ist.*

Beweis. Wir brauchen nur noch zu zeigen, daß ein archimedisch geordneter vollständiger Körper K stetig ist. Es sei M eine beliebige nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge des archimedisch geordneten vollständigen Körpers K. Zu jeder natürlichen Zahl n existiert nach dem Archimedischen Axiom eine ganze Zahl k_n, so daß $\frac{k_n}{2^n}$ keine, $\frac{k_n+1}{2^n}$ hingegen eine obere Schranke von M ist. Wir setzen $a_n = \frac{k_n}{2^n}$ und $b_n = \frac{k_n+1}{2^n}$. Es gilt dann $a_n < b_m$ für beliebige m, n. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl $N(\varepsilon)$ mit $\frac{1}{N(\varepsilon)} < \varepsilon$. Daraus folgt für m, $n \geqq N(\varepsilon)$ und $n > m$ die Beziehung

$$|a_n - a_m| = a_n - a_m < b_m - a_m = \frac{1}{2^m} < \frac{1}{N(\varepsilon)} < \varepsilon.$$

Also ist $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Fundamentalfolge und daher konvergent. Es ist leicht zu zeigen, daß der Grenzwert $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu$ Supremum von M ist.

In einem geordneten Körper K hängt der Begriff der Fundamentalfolge eng mit dem Begriff der Intervallschachtelung zusammen. Ist K ein geordneter Körper und sind $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ und $(b_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ Folgen aus K, so sagen wir, daß diese Folgen eine *Intervallschachtelung* $(a_\nu \mid b_\nu)$ in K bilden, wenn folgendes gilt:

a) $\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n \leqq a_{n+1} \wedge b_{n+1} \leqq b_n)$,

b) $\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n < b_n$,

c) $\bigwedge\limits_{\varepsilon>0} \bigvee\limits_{N(\varepsilon)\in\mathbb{N}} (n \geqq N(\varepsilon) \Rightarrow b_n - a_n < \varepsilon)$.

Für den stetigen Körper R stimmt diese Definition der Intervallschachtelung mit der in 6.2. gegebenen überein.

Das Element c aus K heißt *Limeselement* der Intervallschachtelung $(a_\nu \mid b_\nu)$ in K, wenn $a_n \leqq c \leqq b_n$ für jedes n gilt. Eine Intervallschachtelung $(a_\nu \mid b_\nu)$ besitzt (Beweis!)

genau dann ein Limeselement c, wenn wenigstens eine der Folgen $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, $(b_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ konvergiert; in diesem Fall ist c der Grenzwert der beiden Folgen $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ und $(b_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$.

Für eine beliebige Intervallschachtelung $(a_\nu \mid b_\nu)$ sind die Folgen $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ und $(b_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ offensichtlich Fundamentalfolgen in K. Es gilt daher:

Satz 5. *Ist K ein vollständiger Körper, so besitzt jede Intervallschachtelung in K ein Limeselement.*

Wir zeigen nun, daß für einen archimedisch geordneten Körper auch die Umkehrung gilt:

Satz 6. *Ist K ein archimedisch geordneter Körper und besitzt jede Intervallschachtelung in K ein Limeselement, so ist K vollständig.*

Beweis. Wir zeigen, daß zu jeder Fundamentalfolge $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ in K eine Intervallschachtelung $(a_\nu \mid b_\nu)$ in K gefunden werden kann, so daß in jedem Intervall $[\![a_n, b_n]\!]$ fast alle Folgenglieder der Folge $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ liegen. Danach folgt dann unmittelbar, daß $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ gegen das Limeselement von $(a_\nu \mid b_\nu)$ konvergiert. Nach der Definition der Fundamentalfolge können wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $k_n \in \mathbb{N}$ mit $|x_{k_n} - x_m| < \frac{1}{2^{n+1}}$ für alle $m \geqq k_n$ bestimmen. Wir setzen nun $a_n = x_{k_n} - \frac{1}{2^n}$ und $b_n = x_{k_n} + \frac{1}{2^n}$. Aus

$$a_{n+1} - a_n = x_{k_{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} - x_{k_n} + \frac{1}{2^n} \geqq -|x_{k_n} - x_{k_{n+1}}| + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$> -\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = 0$$

sowie

$$b_n - b_{n+1} = x_{k_n} + \frac{1}{2^n} - x_{k_{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\geqq -|x_{k_n} - x_{k_{n+1}}| + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} > -\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = 0$$

folgt $a_n \leqq a_{n+1}$ und $b_{n+1} \leqq b_n$ für alle n. Ferner gilt $a_n < b_n$. Damit sind die für eine Intervallschachtelung geforderten Bedingungen a) und b) erfüllt. Zum Nachweis der Bedingung c) benötigen wir, daß K archimedisch geordnet ist. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert nach dem Archimedischen Axiom eine natürliche Zahl $N(\varepsilon)$ mit $\frac{1}{2^{N(\varepsilon)-1}} < \varepsilon$. Für $n \geqq N(\varepsilon)$ folgt dann

$$b_n - a_n = 2 \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \leqq \frac{1}{2^{N(\varepsilon)-1}} < \varepsilon.$$

Damit gilt auch c), d. h., die Folgen $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ und $(b_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ bilden eine Intervallschachtelung.

Wegen $|x_{k_n} - x_m| < \frac{1}{2^{n+1}}$ für alle m mit $m \geqq k_n$ erhalten wir schließlich

$$a_n = x_{k_n} - \frac{1}{2^n} < x_{k_n} - \frac{1}{2^{n+1}} < x_m < x_{k_n} + \frac{1}{2^{n+1}} < x_{k_n} + \frac{1}{2^n} = b_n,$$

womit gezeigt ist, daß in jedem Intervall $[\![a_n, b_n]\!]$ fast alle Folgenglieder liegen.

Aus den Sätzen 4, 5 und 6 erhalten wir eine Charakterisierung der stetigen Körper mit Hilfe von Intervallschachtelungen:

Satz 7. *Der geordnete Körper K ist genau dann stetig, wenn er archimedisch geordnet ist und jede Intervallschachtelung in K ein Limeselement besitzt.*

Die genannten verschiedenen Charakterisierungen des stetigen Körpers fassen wir in dem folgenden Satz zusammen.

Satz 8. *Für einen geordneten Körper K sind die folgenden Bedingungen gleichwertig:*

a) *Jede nichtleere nach oben beschränkte Menge besitzt ein Supremum.*

b) *Jede nichtleere nach unten beschränkte Menge besitzt ein Infimum.*

c) *Jeder Dedekindsche Schnitt besitzt ein Schnittelement.*

d) *Der Körper K ist archimedisch geordnet und vollständig.*

e) *Der Körper K ist archimedisch geordnet, und jede Intervallschachtelung besitzt ein Limeselement.*

Jede der in Satz 8 genannten Bedingungen ist notwendig und hinreichend dafür, daß K isomorph zum Körper der reellen Zahlen ist.

6.3.3. Konstruktionsmöglichkeiten für den Bereich der reellen Zahlen

In 6.2. haben wir den Bereich der reellen Zahlen mit Hilfe der Dezimalbrüche konstruiert. Jeder nichtperiodische Dezimalbruch charakterisiert eine Lücke im Bereich der gebrochenen Zahlen und die Konstruktion von $\mathbb{R}_t$ erfolgte durch Hinzunahme der nichtperiodischen Dezimalbrüche zur Menge $\mathbb{Q}_t$. Der Satz 8 bietet nun weitere Möglichkeiten, die in $\mathbb{Q}$ vorhandenen Lücken durch geeignete Objekte zu charakterisieren und den Bereich $\mathbb{Q}$ zu vervollständigen.

Wir betrachten die folgenden Mengen:

$\mathfrak{M}_1$ = Menge aller nichtleeren nach oben beschränkten Teilmengen von $\mathbb{Q}$, die in $\mathbb{Q}$ kein Supremum besitzen;

$\mathfrak{M}_2$ = Menge aller nichtleeren nach unten beschränkten Teilmengen von $\mathbb{Q}$, die in $\mathbb{Q}$ kein Infimum besitzen;

$\mathfrak{M}_3$ = Menge aller Dedekindschen Schnitte in $\mathbb{Q}$ ohne Schnittelement;

$\mathfrak{M}_4$ = Menge aller Fundamentalfolgen in $\mathbb{Q}$, die in $\mathbb{Q}$ nicht konvergieren;

$\mathfrak{M}_5$ = Menge aller Intervallschachtelungen in $\mathbb{Q}$ ohne Limeselement.

Jede dieser Mengen ist nach Satz 8 nicht leer, da der archimedisch geordnete Körper $\mathbb{Q}$ nicht stetig ist. In jeder Menge $\mathfrak{M}_i$ definieren wir nun eine Relation „$\sim_i$“ $(i = 1, \ldots, 5)$:

$$A_1 \sim_1 A_2 :\Leftrightarrow \{x : x \in \mathbb{Q} \wedge x \text{ obere Schranke von } A_1\} = \{x : x \in \mathbb{Q} \wedge x \text{ obere Schranke von } A_2\},$$

$$B_1 \sim_2 B_2 :\Leftrightarrow \{x : x \in \mathbb{Q} \wedge x \text{ untere Schranke von } B_1\} = \{x : x \in \mathbb{Q} \wedge x \text{ untere Schranke von } B_2\},$$

$$(A, B) \sim_3 (A', B') :\Leftrightarrow A = A' \wedge B = B',$$

$$(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \sim_4 (y_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} :\Leftrightarrow \lim_{\nu \to \infty} (x_\nu - y_\nu) = 0,$$

$$(a_\nu \mid b_\nu) \sim_5 (a_\nu' \mid b_\nu') :\Leftrightarrow \lim_{\nu \to \infty} (a_\nu - a_\nu') = 0.$$

Es ist leicht zu sehen, daß diese Relationen Äquivalenzrelationen sind. Die zugehörigen Restklassen sind nun jeweils geeignete Objekte zur Charakterisierung der in $\mathbb{Q}$ vorhandenen Lücken und können zur Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ benutzt werden.

Wir bemerken zunächst, daß zwischen den Restklassen nach den Relationen „$\sim_1$“, „$\sim_2$“ und „$\sim_3$“ sowie zwischen den Restklassen nach den Relationen „$\sim_4$“ und „$\sim_5$“ ein enger Zusammenhang besteht. Wie in 6.3.2. gezeigt wurde, erzeugt nämlich jedes Element aus $\mathfrak{M}_1$ ein Element aus $\mathfrak{M}_3$, wobei Elemente A_1 und A_2 aus $\mathfrak{M}_1$ genau dann das gleiche Element aus $\mathfrak{M}_3$ erzeugen, wenn $A_1 \sim_1 A_2$ gilt. Ein analoger Zusammenhang besteht zwischen den Elementen von $\mathfrak{M}_2$ und $\mathfrak{M}_3$. Die Restklassen nach „$\sim_1$“ bzw. „$\sim_2$“ können also in natürlicher Weise den Restklassen nach „$\sim_3$“ eineindeutig zugeordnet werden. Ferner wird jede Intervallschachtelung durch zwei spezielle Fundamentalfolgen gebildet. Es sei F die Korrespondenz von der Menge $\mathfrak{M}_5$ in die Menge $\mathfrak{M}_4$, die der Intervallschachtelung $(a_\nu \mid b_\nu)$ die beiden Folgen $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ und $(b_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ zuordnet. Der Beweis von Satz 6 zeigt, daß diese Korrespondenz eine 1-1-Abbildung von der Menge der Klassen nach der Relation „$\sim_5$“ auf die Menge der Klassen nach der Relation „$\sim_4$“ vermittelt.

Es soll nun die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ mit Hilfe der Restklassen nach „$\sim_i$“ beschrieben werden. Wir können uns dabei auf die Fälle $i = 3$ und $i = 4$ beschränken. Aus den eben genannten Zusammenhängen ist nämlich ersichtlich, wie die weiteren Möglichkeiten $(i = 1, 2, 5)$ auf diese beiden zurückzuführen sind. Die Fälle $i = 3$ und $i = 4$ bedeuten allerdings wesentlich verschiedene Arten der Vervollständigung. Bei der Vervollständigung mit Hilfe Dedekindscher Schnitte wird die Ordnungsstruktur von $\mathbb{Q}$, bei der Vervollständigung mit Hilfe von Fundamentalfolgen hingegen die Konvergenzstruktur von $\mathbb{Q}$ benutzt.

Wir werden nun die Konstruktion der reellen Zahlen mit Hilfe Dedekindscher Schnitte sowie mit Hilfe der Fundamentalfolgen in den hauptsächlichen Schritten kurz darlegen:

I. Konstruktion von R mit Hilfe Dedekindscher Schnitte

a) Festlegung einer Ausgangsmenge:

Es sei $\mathfrak{S}$ die Menge aller Dedekindschen Schnitte in $\mathbb{Q}$ (also $\mathfrak{M}_3 \subset \mathfrak{S}$).

b) Definition einer Äquivalenzrelation in der Ausgangsmenge:

Falls zwei Dedekindsche Schnitte aus $\mathfrak{S}$ ein Schnittelement besitzen, so sollen sie *äquivalent* heißen, wenn ihre Schnittelemente übereinstimmen. Dedekindsche Schnitte aus $\mathfrak{S}$ ohne Schnittelement seien nur zu sich selbst äquivalent.

c) Bestimmung einer Grundmenge für die Erweiterung:

Es bezeichne $\overline{\mathfrak{S}}$ die Menge der Äquivalenzklassen. Ein Schnitt (A, B) aus $\mathfrak{S}$, der kein Schnittelement besitzt, liegt in der einelementigen Äquivalenzklasse $\{(A, B)\}$, ein Schnitt (A, B) aus $\mathfrak{S}$ mit einem Schnittelement c hingegen in der zweielementigen Äquivalenzklasse $\{(A \setminus \{c\}, B \cup \{c\}), (A \cup \{c\}, B \setminus \{c\})\}$.

d) Definition einer Ordnung in der Grundmenge:

Sind a, b Elemente aus $\overline{\mathfrak{S}}$, so setzen wir

$$a \leqq b :\Leftrightarrow \text{Es gibt } (A_1, B_1) \in a \text{ und } (A_2, B_2) \in b \text{ mit } A_1 \subseteq A_2.$$

e) Definition einer Addition und Multiplikation in der Grundmenge:

Sind a, b Elemente aus $\overline{\mathfrak{S}}$, so werden $a + b$ und $a \cdot b$ repräsentantenweise definiert: Mit $(A_1, B_1), (A_2, B_2)$ ist auch $(A_1 + A_2, B_1 + B_2)$ (vgl. (3)) ein Dedekindscher Schnitt in $\mathbb{Q}$. Für $(A_1, B_1) \in a, (A_2, B_2) \in b$ setzen wir $a + b = c$, wenn $(A_1 + A_2, B_1 + B_2) \in c$ gilt. Bei der Erklärung der Multiplikation sind Fallunterscheidungen erforderlich. Wir wollen uns auf den Fall beschränken, daß für $(A_1, B_1) \in a, (A_2, B_2) \in b$ die Oberklassen aus nichtnegativen Elementen bestehen: $B_1 \subseteq \mathbb{Q}_+, B_2 \subseteq \mathbb{Q}_+$. Es ist dann $(\mathbb{Q} \setminus B_1B_2, B_1B_2)$ (vgl. (4)) ein Dedekindscher Schnitt, und wir setzen $ab := d$, wenn $(\mathbb{Q} \setminus B_1B_2, B_1B_2) \in d$ gilt. (Für den Fall $A_1 \subseteq \mathbb{Q}_-, A_2 \subseteq \mathbb{Q}_-$ ist beim Produkt A_1A_2 als Oberklasse, für den Fall $A_1 \subseteq \mathbb{Q}_-, B_2 \subseteq \mathbb{Q}_+$ als Unterklasse A_1B_2 zu setzen.)

f) $\overline{\mathfrak{S}} = \overline{\mathfrak{S}}(<, +, \cdot)$ ist ein stetiger Körper.

g) Einbettung von $\mathbb{Q}$ in den konstruierten stetigen Körper:

Die zweielementigen Äquivalenzklassen bilden einen zu $\mathbb{Q}$ isomorphen Bereich. Durch Identifizierung der zweielementigen Äquivalenzklassen mit den jeweiligen Schnittzahlen wird $\mathbb{Q}$ isomorph in $\mathfrak{S}$ eingebettet.

II. Konstruktion von R mit Hilfe von Fundamentalfolgen

a) Festlegung einer Ausgangsmenge:

Es sei $\mathfrak{F}$ die Menge aller Fundamentalfolgen in $\mathbb{Q}$ (also $\mathfrak{M}_4 \subset \mathfrak{F}$).

b) Definition einer Äquivalenzrelation in der Ausgangsmenge:

In $\mathfrak{F}$ betrachten wir die Äquivalenzrelation „$\sim_4$“.

c) Bestimmung einer Grundmenge für die Erweiterung:

Es sei $\overline{\mathfrak{F}}$ die Menge der Äquivalenzklassen von $\mathfrak{F}$ bezüglich der Relation „$\sim_4$".

d) Definition einer Ordnung in der Grundmenge:

Sind a, b Elemente aus $\overline{\mathfrak{F}}$, so setzen wir

$$a \leqq b :\Leftrightarrow \text{Es gibt eine Folge } (x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \text{ aus } a \text{ und eine Folge } (y_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \text{ aus } b \text{ mit } x_n \leqq y_n \text{ für alle } n.$$

e) Definition einer Addition und Multiplikation in der Grundmenge:

Sind a, b Elemente aus $\overline{\mathfrak{F}}$, so werden $a + b$ und $a \cdot b$ repräsentantenweise definiert: Mit $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ und $(y_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ sind auch $(x_\nu + y_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ und $(x_\nu y_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ Fundamentalfolgen in $\mathbb{Q}$. Wir setzen $a + b := c$ und $a \cdot b := d$, wenn

$$(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in a, \quad (y_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in b, \quad (x_\nu + y_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in c \quad \text{und} \quad (x_\nu y_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in d$$

gelten.

(Die genannten Definitionen sind von den Repräsentanten unabhängig.)

f) $\overline{\mathfrak{F}} = \overline{\mathfrak{F}}(<, +, \cdot)$ ist ein stetiger Körper.

g) Einbettung von $\mathbb{Q}$ in den konstruierten stetigen Körper:

Enthält a eine in $\mathbb{Q}$ konvergente Folge $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, so ist jede Folge aus a gegen die gleiche rationale Zahl konvergent. Die Menge aller Elemente aus $\mathfrak{F}$, die aus in $\mathbb{Q}$ konvergenten Folgen bestehen, bilden einen zu $\mathbb{Q}$ isomorphen Bereich. Durch Identifizierung dieser Elemente mit den entsprechenden Grenzwerten wird $\mathbb{Q}$ in $\overline{\mathfrak{F}}$ isomorph eingebettet.

Abschließend wollen wir noch darauf hinweisen, daß sich die Definition der reellen Zahlen durch Dezimalbrüche in das hier genannte Konstruktionsverfahren II mit Hilfe von Fundamentalfolgen einordnen läßt. Einen Dezimalbruch $a = a_0,a_1a_2\ldots$ können wir nämlich als die Folge $(a^{(\nu)})_{\nu\in\mathbb{N}}$ der gebrochenen Zahlen $a^{(\nu)} = a_0,a_1\ldots a_\nu$ auffassen. Diese Folge ist eine Fundamentalfolge in $\mathbb{Q}_+$ und liegt daher in einer Äquivalenzklasse von $\mathfrak{F}$. Wird nun jedem Dezimalbruch seine Äquivalenklasse zugeordnet, so wird dadurch eine eineindeutige Beziehung zwischen den Dezimalbrüchen aus R_+ und den nichtnegativen Äquivalenzklassen hergestellt. Die Definition der reellen Zahlen durch Dezimalbrüche kann also als eine Auswahl spezieller Repräsentanten angesehen werden, durch die die Klassenbildung umgangen wird.

7. Der Bereich der komplexen Zahlen

7.1. Einleitung

Nach der Konstruktion des Körpers der reellen Zahlen ist in gewisser Weise ein natürlicher Abschluß im Prozeß der Zahlenbereichserweiterungen erreicht. Der Körper der reellen Zahlen ist nämlich bis auf Isomorphie der einzige stetige Körper. Während wir bisher forderten, daß alle für den gegebenen Zahlenbereich betrachteten Strukturgesetze hinsichtlich der Ordnung, der Addition und der Multiplikation auch für den neuen Zahlenbereich erfüllt werden, müssen wir bei einer Erweiterung des Bereiches der reellen Zahlen auf gewisse Strukturgesetze verzichten. Die bisher behandelten Zahlenbereiche lassen sich überdies nach einem einheitlichen Prinzip auf einer Geraden veranschaulichen. Da durch die reellen Zahlen sämtliche Punkte der Geraden erfaßt werden, kann — zumindest unter Beibehaltung dieses Prinzips — eine Veranschaulichung einer Erweiterung von $\mathbf{R}$ auf einer Geraden nicht mehr möglich sein.

Eines der Motive für die bisher durchgeführten Zahlenbereichserweiterungen bestand jeweils in dem Wunsch, bestimmte Gleichungen lösen zu können. Der Wunsch nach der Lösbarkeit einer beliebigen Gleichung der Form $a \cdot x = b$ $(a \neq 0)$ führte vom Bereich der natürlichen Zahlen zum Bereich der gebrochenen Zahlen, der Wunsch nach der Lösbarkeit einer Gleichung der Form $a + x = b$ vom Bereich der gebrochenen Zahlen zum Bereich der rationalen Zahlen, und schließlich führte der Wunsch nach der Lösbarkeit einer Gleichung der Form $x^n = a$ $(a > 0)$ zum Bereich der reellen Zahlen. Eine Gleichung der Form $x^n = a$ ist für $a > 0$ im Bereich der reellen Zahlen für gerades n nicht lösbar. Ist es nun auch wünschenswert, eine solche Gleichung lösen zu können? Wir verbinden mit dieser Gleichung sicher keinen anschaulichen Sachverhalt und könnten daher diese Aufgabe als uninteressant beiseite tun. Tatsächlich führen jedoch Lösungsansätze verschiedener sinnvoller mathematischer Aufgaben auf die Gleichung $x^2 = -1$. Um derartige Lösungsansätze nicht von vornherein verwerfen zu müssen, hat man sich eine von einer reellen Zahl verschiedene „Zahl" gedacht, der man die Eigenschaft, Lösung von $x^2 = -1$ zu sein, zuschrieb. Wenn wir eine solche „Zahl" mit i bezeichnen, wurde also mit dem Buchstaben i wie

mit einer reellen Zahl gerechnet und zusätzlich die Eigenschaft $i^2 = -1$ benutzt. Eine Rechtfertigung für dieses Vorgehen bestand zunächst in der Brauchbarkeit dieser Methode. Wir wollen das am Beispiel der Cardanoschen[1]) Formel erläutern.

Es handelt sich dabei um eine Lösungsformel für eine kubische Gleichung der Form $x^3 + px + q = 0$. Sie lautet

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

und liefert eine Lösung der gegebenen kubischen Gleichung, falls die rechte Seite existiert.[2]) Das ist genau dann der Fall, wenn $\frac{4p^3}{27} + q^2 \geqq 0$ ist. Für $\frac{4p^3}{27} + q^2 < 0$ ist $\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ nicht erklärt und die Cardanosche Formel als Lösungsansatz anscheinend unbrauchbar. Dieser bei der Gleichung $x^3 - 6x + 4 = 0$ eintretende Fall ging als „casus irreducibilis" in die Geschichte der Mathematik ein. Der italienische Mathematiker Bombelli[3]) hatte erkannt, daß die Cardanosche Formel auch Lösungen liefert, wenn man die Existenz einer „Zahl" i mit der Eigenschaft $i^2 = -1$ voraussetzt. Für die Gleichung $x^3 - 6x + 4 = 0$ ergibt die Cardanosche Formel

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-2 + \sqrt{4 - 8}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{4 - 8}} = \sqrt[3]{-2 + 2\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{-2 - 2\sqrt{-1}} \\ &= \sqrt[3]{-2 + 2i} + \sqrt[3]{-2 - 2i} = \sqrt[3]{1 + 3i - 3 - i} + \sqrt[3]{1 - 3i - 3 + i} \\ &= \sqrt[3]{1 + 3i + 3i^2 + i^3} + \sqrt[3]{1 - 3i + 3i^2 - i^3} = \sqrt[3]{(1 + i)^3} + \sqrt[3]{(1 - i)^3} \\ &= (1 + i) + (1 - i) = 2. \end{aligned}$$

Wir können uns davon überzeugen, daß die mit Hilfe der Cardanoschen Formel erhaltene Zahl 2 eine Lösung der gegebenen kubischen Gleichung ist. In 7.5. werden wir genauer auf die Cardanosche Formel eingehen.

Die Bedeutung der Gleichung $x^2 = -1$ führt nun zur Frage nach einem Zahlenbereich C, in dem diese Gleichung Lösungen besitzt. Wir können nicht alle Strukturgesetze von R berücksichtigen, wir sollten aber sicher folgende Forderungen stellen:

I. Der Bereich C ist ein Erweiterungskörper von R.

II. In C existiert eine Zahl i mit $i^2 = -1$.

III. Der Bereich C ist mit den Eigenschaften I und II minimal.

In 7.2. zeigen wir, daß es bis auf Isomorphie genau einen Körper C gibt, der die genannten Bedingungen erfüllt.

[1]) Hieronimo Cardano (1501—1576).

[2]) Die Bedeutung der hier benutzten Wurzelzeichen wird in 7.5. erklärt.

[3]) Rafael Bombelli (1530—1572).

7.2. Konstruktion des Bereiches der komplexen Zahlen

Eindeutigkeit von C*:*

Um einen Körper C mit den genannten Eigenschaften I, II, III zu konstruieren, werden wir zunächst einen Bereich mit den gewünschten Eigenschaften als gegeben voraussetzen — unabhängig davon, ob ein solcher Bereich überhaupt existiert — und daraus Konstruktionshinweise ableiten. Gleichzeitig wird sich dabei zeigen, daß es bis auf Isomorphie höchstens einen Körper C mit den genannten Eigenschaften geben kann.

Es sei also $\mathsf{C} = \mathsf{C}(+, \cdot)$ ein Bereich mit den Eigenschaften I, II, III. Sind a, b beliebige reelle Zahlen, so ist $a + bi$ ein Element z aus C. Aus $z = a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i$ $(a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathsf{R})$ folgt $a_1 - a_2 = (b_2 - b_1)i$ und daraus $(a_1 - a_2)^2 + (b_2 - b_1)^2 = 0$. Diese Beziehung zwischen reellen Zahlen ist dann und nur dann erfüllt, wenn $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$ gilt. Für die Elemente z der Form $a + bi$ sind somit a und b eindeutig bestimmte reelle Zahlen.

Es sei $\mathsf{C}_1 = \{a + bi\colon a, b \in \mathsf{R}\}$. Es ist leicht zu sehen, daß für C_1 die Beziehungen $\mathsf{R} \subseteq \mathsf{C}_1 \subseteq \mathsf{C}$ und $i \in \mathsf{C}_1$ gelten. Wir wollen zeigen, daß C_1 einen Körper bildet. Dazu haben wir die Strukturgesetze (A0), (A1), $(\mathrm{A}2_1)$, $(\mathrm{A}2_2)$, (A3); (M0), (M1), $(\mathrm{M}2_1)$, $(\mathrm{M}2_2)$, (M3); (M4) nachzuweisen. Da C_1 ein Teilbereich des Körpers C ist, übertragen sich (A1), (A3), (M1), (M3), (M4) unmittelbar von C auf C_1. Wegen

$$(1) \qquad (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

$$(2) \qquad (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$$

gelten (A0) bzw. (M0) in C_1. Da die Zahlen 0, 1 zu C_1 gehören, sind auch $(\mathrm{A}2_1)$ und $(\mathrm{M}2_1)$ für C_1 erfüllt. Das Gesetz $(\mathrm{A}2_2)$ ergibt sich aus $(a + bi) + (-a + (-b)i) = 0$. Um schließlich das Gesetz $(\mathrm{M}2_2)$ einzusehen, wollen wir versuchen, die Gleichung $(a + bi)(x + yi) = 1$ für $a + bi \neq 0$ zu lösen. Für die linke Seite dieser Gleichung erhalten wir $(ax - by) + (ay + bx)i$. Wegen der Eindeutigkeit dieser Darstellung kann dieses Element nur 1 sein, wenn die Gleichungen

$$(3) \qquad \begin{cases} ax - by = 1, \\ ay + bx = 0 \end{cases}$$

gelten. Indem wir die mit a multiplizierte erste Gleichung und mit b multiplizierte zweite Gleichung addieren, erhalten wir aus (3) die Gleichung $a^2 x + b^2 x = a$. Wegen $a + bi \neq 0$ können wir aus dieser Gleichung $x = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$ gewinnen. Wir multiplizieren jetzt die erste Gleichung von (3) mit $-b$ und die zweite Gleichung mit a und erhalten durch nachfolgende Addition beider Gleichungen $b^2 y + a^2 y = -b$, woraus

$y = \dfrac{-b}{a^2+b^2}$ folgt. Man kann leicht nachprüfen, daß $\dfrac{a}{a^2+b^2} + \dfrac{-b}{a^2+b^2}\,i$ die Lösung der Gleichung $(a+bi)x = 1$ in C ist, d. h., $(a+bi)^{-1}$ gehört zu C_1, womit auch $(\mathrm{M}2_2)$ nachgewiesen ist. Der Teilbereich C_1 von C erfüllt also genauso wie C die Forderungen I und II und muß daher wegen der an C gestellten Forderung III mit C übereinstimmen.

Damit haben wir folgendes Ergebnis gewonnen: Falls ein Körper $\mathsf{C} = \mathsf{C}(+,\cdot)$ mit den Eigenschaften I, II, III existiert, muß für diesen $\mathsf{C} = \{a+bi : a, b \in \mathsf{R}\}$ gelten. Die Darstellung der Elemente von C in der Form $a+bi$ ist dabei eindeutig.

Existenz von C*:*

Da jedes Element aus einem Körper C mit den Eigenschaften I, II, III eindeutig ein geordnetes Paar reeller Zahlen bestimmt:

$$a + bi \mapsto (a, b), \tag{4}$$

werden wir versuchen, eine Konstruktion mit Hilfe geordneter Paare reeller Zahlen vorzunehmen. Wir setzen $\bar{\mathsf{C}} = \mathsf{R} \times \mathsf{R}$. Die Definitionen für eine Addition und Multiplikation in $\bar{\mathsf{C}}$ werden durch (1), (2) motiviert:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \tag{5}$$

$$(a_1, b_1)\,(a_2, b_2) := (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2). \tag{6}$$

Wir zeigen zunächst, daß $\bar{\mathsf{C}}$ damit ein Körper ist. Die Strukturgesetze (A0) und (M0) gelten in $\bar{\mathsf{C}}$ auf Grund der Definitionen (5) und (6). Weiterhin folgen (A1), (A3), (M3) für $\bar{\mathsf{C}}$ unmittelbar aus der Gültigkeit der entsprechenden Strukturgesetze in R. Aus (5) ist ersichtlich, daß $(0,0)$ Nullelement von $\bar{\mathsf{C}}$ und $(-a, -b)$ das zu (a, b) entgegengesetzte Element ist. Damit gelten auch $(\mathrm{A}2_1)$ und $(\mathrm{A}2_2)$ in $\bar{\mathsf{C}}$. Die Gültigkeit von (M1) und (M4) können wir durch Ausrechnen bestätigen (Übungsaufgabe). Das geordnete Paar $(1,0)$ ist Einselement von $\bar{\mathsf{C}}$, da $(a,b)\,(1,0) = (1,0)\,(a,b) = (a,b)$ für ein beliebiges Element (a,b) aus $\bar{\mathsf{C}}$ gilt. Für $(a,b) \neq (0,0)$ ist $a^2 + b^2 > 0$. Wir können daher $\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2}\right)$ bilden und erhalten

$$(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ba}{a^2+b^2}\right) = (1,0).$$

Damit sind $(\mathrm{M}2_1)$ und $(\mathrm{M}2_2)$ nachgewiesen. Der Bereich $\bar{\mathsf{C}}(+,\cdot)$ ist also ein Körper.

Um eine Erweiterung von R zu gewinnen, zeigen wir, daß $\bar{\mathsf{C}}$ einen zu R isomorphen Teilbereich enthält. Nach (4) entsprechen den reellen Zahlen die geordneten Paare der Form $(a, 0)$. Wir definieren durch $a \mapsto (a, 0)$ eine Abbildung f von R in $\bar{\mathsf{C}}$. Offensichtlich ist f eine eineindeutige Abbildung. Unter Beachtung der Definition der

Addition und Multiplikation in $\tilde{\mathbf{C}}$ erhalten wir weiterhin

$$f(a+b) = (a+b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b),$$

$$f(ab) = (ab, 0) = (a, 0)\,(b, 0) = f(a)\,f(b).$$

Die Abbildung f ist also ein Isomorphismus von $\mathbf{R}$ auf die Menge $\tilde{\mathbf{R}} := \{(x, 0) : x \in \mathbf{R}\}$. Wenn wir entsprechend der Zuordnung $a \mapsto (a, 0)$ die Mengen $\mathbf{R}$ und $\tilde{\mathbf{R}}$ identifizieren, erhalten wir aus $\tilde{\mathbf{C}}$ eine Erweiterung $\mathbf{C}$ von $\mathbf{R}$ ($\mathbf{C} := (\tilde{\mathbf{C}} \setminus \tilde{\mathbf{R}}) \cup \mathbf{R}$).

Nach (4) ist das geordnete Paar $(0, 1)$ der „Zahl" i zugeordnet. Es ist daher naheliegend, zu untersuchen, ob $(0, 1)$ eine Lösung der Gleichung $x^2 = -1$ in $\mathbf{C}$ ist. Nach der Definition der Multiplikation in $\tilde{\mathbf{C}}$ gilt $(0, 1)\,(0, 1) = (-1, 0)$, und daher ist die Beziehung $(0, 1)(0, 1) = -1$ in $\mathbf{C}$ erfüllt. Wir setzen $i := (0, 1)$ und erhalten damit für ein beliebiges Element (a, b) aus $\tilde{\mathbf{C}}$

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)\,(0, 1) = (a, 0) + (b, 0)i.$$

Beim Übergang von $\tilde{\mathbf{C}}$ zu $\mathbf{C}$ können wir für (a, b) daher $a + bi$ schreiben.

Mit dem Körper $\mathbf{C}$ haben wir eine Erweiterung von $\mathbf{R}$ gewonnen, die den Bedingungen I und II genügt. Der Körper $\mathbf{C}$ erfüllt auch die Minimalitätsforderung III, da sich jedes Element von $\mathbf{C}$ in der Form $a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$) schreiben läßt. Die Ergebnisse über die Existenz und Eindeutigkeit eines Körpers mit den Eigenschaften I, II und III fassen wir in dem folgenden Satz zusammen:

Satz 1. *Bis auf Isomorphie gibt es genau einen minimalen Erweiterungskörper* $\mathbf{C}$ *von* $\mathbf{R}$, *in dem die Gleichung* $x^2 = -1$ *lösbar ist. Bezeichnet dabei* i *eine Lösung der Gleichung* $x^2 = -1$, *so besitzt jedes Element aus* $\mathbf{C}$ *eine eindeutige Darstellung der Form* $a + bi$, *wobei* a, b *reelle Zahlen sind.*

Den eindeutig bestimmten Körper $\mathbf{C} = \mathbf{C}(+, \cdot)$ nennen wir den *Bereich der komplexen Zahlen*. Dieser Zahlenbereich ist ein Erweiterungskörper von $\mathbf{R}(+, \cdot)$, d. h., bezüglich der Addition und der Multiplikation[1]) kann man mit komplexen Zahlen genauso rechnen wir mit reellen Zahlen, und die reellen Zahlen sind spezielle komplexe Zahlen. Das in $\mathbf{C}(+, \cdot)$ ausgezeichnete Element i (imaginäre Einheit) erfüllt die Gleichung $i^2 = -1$. Die bei der Darstellung $z = a + bi$ einer komplexen Zahl z eindeutig bestimmten reellen Zahlen a und b heißen *Realteil* bzw. *Imaginärteil* von z und werden mit $\operatorname{Re} z$ bzw. $\operatorname{Im} z$ bezeichnet: $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$. Eine komplexe Zahl ist genau dann eine reelle Zahl, wenn ihr Imaginärteil 0 ist. Komplexe Zahlen der Form $z = bi$ heißen *rein imaginär*. Sie sind durch $\operatorname{Re} z = 0$ charakterisiert.

Bei der Konstruktion von $\mathbf{C}$ haben wir die Ordnung von $\mathbf{R}$ nicht berücksichtigt. Wir wissen auch, daß $\mathbf{C}$ kein stetiger Körper sein kann. Es drängt sich die Frage auf, ob die in $\mathbf{R}$ erklärte Ordnung auf $\mathbf{C}$ fortgesetzt werden kann, so daß $\mathbf{C}$ wenigstens ein geordneter Körper wird. Diese Frage wird durch Satz 2 negativ beantwortet.

[1]) Für Quotienten vereinbaren wir alle gleiche Schreibweise wie in den bisher behandelten Zahlenbereichen.

Satz 2. *Im Körper* C *der komplexen Zahlen kann keine Ordnungsrelation erklärt werden, so daß* C *damit ein geordneter Körper wird.*

Beweis. Sei „$<$" eine irreflexive totale Ordnung in C. Wir zeigen, daß $\mathsf{C}(<, +, \cdot)$ kein geordneter Körper sein kann. In einem geordneten Körper müssen von Null verschiedene Elemente der Form a^2 positiv sein. Für $a > 0$ folgt das sofort aus dem Monotoniegesetz der Multiplikation. Aus $a < 0$ folgt $-a > 0$ und daher $(-a)(-a) > 0$. Es ist leicht zu zeigen, daß $(-a)(-a) = -(a(-a)) = -(-(aa)) = a^2$ gilt (vgl. entsprechende Beweise in Kapitel 5). Wegen $i^2 = -1$, $1^2 = 1$ müßten also -1 und 1 in $\mathsf{C}(<, +, \cdot)$ beide positiv sein, wenn $\mathsf{C}(<, +, \cdot)$ ein geordneter Körper wäre. Das ist nicht möglich, da in einem geordneten Körper das zu einem positiven Element entgegengesetzte Element negativ ist.

7.3. Veranschaulichung der komplexen Zahlen und der Rechenoperationen in der Gaußschen Zahlenebene

Wir haben bereits erwähnt, daß eine Erweiterung von R nicht mehr auf einer Geraden veranschaulicht werden kann. Für den Körper der komplexen Zahlen ist das auch auf Grund von 7.2. Satz 2 einleuchtend. Da jede komplexe Zahl durch ihren Realteil und Imaginärteil, d. h. durch ein geordnetes Paar reeller Zahlen bestimmt wird, ist es naheliegend, die komplexen Zahlen in einer Ebene zu veranschaulichen. Wir betrachten dazu eine Ebene, in der ein kartesisches Koordinatensystem ausgezeichnet ist. Die Punkte dieser Ebene werden in der üblichen Weise durch geordnete Paare reeller Zahlen beschrieben (Abb. 7). Die komplexe Zahl $z = a + bi$ soll dem Punkt P_z der Ebene zugeordnet werden, der durch das geordnete Paar (a, b) dargestellt wird.

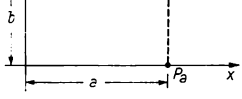


Abb. 7

Als Koordinatenachsen sind die x-Achse bzw. y-Achse Zahlengeraden. Als Teilmengen der Ebene stellen die Punkte dieser beiden Geraden bei der Veranschaulichung der komplexen Zahlen in der Ebene komplexe Zahlen dar. Auf der x-Achse werden die

komplexen Zahlen mit dem Imaginärteil 0, also die reellen Zahlen, auf der y-Achse die komplexen Zahlen mit dem Realteil 0, also die rein imaginären Zahlen veranschaulicht. Eine Ebene, die zur Veranschaulichung der komplexen Zahlen benutzt wird, nennt man *Gaußsche Zahlenebene*.

Im Bereich der reellen Zahlen wird jeder Zahl durch die Betragsbildung eine nichtnegative Zahl zugeordnet. Bei der Veranschaulichung der reellen Zahlen auf einer Zahlengeraden kann der Betrag einer reellen Zahl als Abstand des entsprechenden Punktes vom Nullpunkt gedeutet werden. Diese geometrische Deutung legt es nahe, auch für komplexe Zahlen z eine Betragsbildung zu erklären, so daß der Betrag von z den Abstand der Punkte P_0 und P_z beschreibt.

Für $z = a + bi$ definieren wir daher

$$(1) \qquad |z| := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Für eine reelle Zahl $z = a$ liefert (1) wegen $\sqrt{a^2} = |a|$ den bereits erklärten Betrag einer reellen Zahl.

Mit dem Betrag einer komplexen Zahl können wir weitgehend in gleicher Weise rechnen wie mit dem Betrag einer reellen Zahl. Es gelten die folgenden Beziehungen:

$$(2) \qquad |z| \geqq 0, \qquad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0;$$

$$(3) \qquad |-z| = |z|, \qquad |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|;$$

$$(4) \qquad |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|; \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \text{ falls } z_2 \neq 0 \text{ ist};$$
$$|z^n| = |z|^n;$$

$$(5) \qquad |z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|, \qquad |z_1 - z_2| \leqq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|$$
(Dreiecksungleichung);

$$(6) \qquad \Big|\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu\Big| \leqq \sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu|;$$

$$(7) \qquad \big||z_1| - |z_2|\big| \leqq |z_1 - z_2|;$$

$$(8) \qquad \bigwedge_c\, (c \in \mathbb{R} \wedge c > 0 \Rightarrow |z| < c) \Rightarrow z = 0,$$
d. h., gilt $|z| < c$ für jede positive reelle Zahl c, so ist $z = 0$.

Beweise. Zu (2). Nach (1) ist $|z|$ eine nichtnegative reelle Zahl. Aus der Beziehung $z = 0 = 0 + 0\,i$ folgt offensichtlich $|z| = 0$, und aus $z = a + bi$, $|z| = 0$ ergibt sich $a^2 + b^2 = 0$, also $a = b = 0$.

Den Nachweis von (3) überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

Zu (4). Mit $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ erhalten wir

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

und daher

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= \sqrt{(a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2} \\ &= \sqrt{a_1^2 a_2^2 - 2 a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + 2 a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2^2 b_1^2} \\ &= \sqrt{a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2}. \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} |z_1|\,|z_2| &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} \\ &= \sqrt{a_1^2 a_2^2 + a_1^2 b_2^2 + b_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2}. \end{aligned}$$

Damit ist $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$ bewiesen. Für $z = a + bi \neq 0$ ist

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$

und daher

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \sqrt{\frac{a^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{b^2}{(a^2 + b^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{|z|}.$$

Daraus folgt für $z_2 \neq 0$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_1 \frac{1}{z_2}\right| = |z_1| \left|\frac{1}{z_2}\right| = |z_1| \frac{1}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Die Gleichung $|z^n| = |z|^n$ kann leicht durch vollständige Induktion bewiesen werden.

Zu (5). Es seien $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$. Wir erhalten

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$

und daraus

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 \\ &= a_1^2 + 2 a_1 a_2 + a_2^2 + b_1^2 + 2 b_1 b_2 + b_2^2. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} (|z_1| + |z_2|)^2 &= |z_1|^2 + 2|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2 \\ &= a_1^2 + b_1^2 + 2\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} + a_2^2 + b_2^2. \end{aligned}$$

Die Ungleichung $|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$ ist daher genau dann erfüllt, wenn

$$\begin{aligned} 2\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} &\geqq a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 + b_1^2 + 2b_1b_2 + b_2^2 \\ &\quad - (a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2) \\ &= 2(a_1a_2 + b_1b_2), \end{aligned}$$

also

$$\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} \geqq a_1a_2 + b_1b_2$$

gilt. Die letzte Ungleichung erhalten wir aber aus der Ungleichung $(a_1b_2 - b_1a_2)^2 \geqq 0$:

$$\begin{aligned} &a_1^2b_2^2 + b_1^2a_2^2 \geqq 2a_1a_2b_1b_2, \\ &a_1^2a_2^2 + a_1^2b_2^2 + b_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 \geqq a_1^2a_2^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + b_1^2b_2^2, \\ &(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \geqq (a_1a_2 + b_1b_2)^2, \\ &\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} \geqq |a_1a_2 + b_1b_2| \geqq a_1a_2 + b_1b_2. \end{aligned}$$

Damit ist der erste Teil von (5) bewiesen. Die restlichen Aussagen über den Betrag einer komplexen Zahl werden in gleicher Weise bewiesen wie die entsprechenden Aussagen über den Betrag einer rationalen (bzw. reellen) Zahl (vgl. 5.5.).

Wegen $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a - bi}{|z|^2}$ für $z = a + bi \neq 0$ ergibt sich mit

(9) $\quad \bar{z} := a - bi$

für $\dfrac{1}{z}$ die einfache Schreibweise

(10) $\quad \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}.$

Wir nennen $\bar{z}$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl*. Aus der Definition von $\bar{z}$ ergeben sich die folgenden Beziehungen:

(11) $\quad |z| = \sqrt{z\bar{z}};$

(12) $\quad \operatorname{Re} z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \dfrac{z - \bar{z}}{2};$

(13) $\quad \bar{\bar{z}} = z;$

(14) $\quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2;$

(15) $\quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2;$

(16) $\quad \bar{z} = z \Leftrightarrow z$ reell.

Die Beweise sind sehr einfach. Wir erhalten z. B. (15) aus

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)} = \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i}$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i = (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) = \overline{z_1}\,\overline{z_2}.$$

Die Aussagen (13), (14), (15), (16) liefern zusammengefaßt den folgenden

Satz. *Die durch den Übergang von einer komplexen Zahl z zu ihrer konjugiert komplexen Zahl $\bar{z}$ definierte Abbildung φ ist ein Isomorphismus von* C *auf* C, *der die Elemente aus* R *festläßt und für den $\varphi = \varphi^{-1}$ gilt.*

Beweis. Wegen (13) ist φ injektiv und surjektiv. Aus $\overline{z_1} = \overline{z_2}$ folgt nämlich $\bar{\bar{z}}_1 = \bar{\bar{z}}_2$ und daher $z_1 = z_2$ nach (13). Die Abbildung φ ist also injektiv. Für ein beliebiges Element z aus C gilt $\varphi(\bar{z}) = z$. Also ist φ auch surjektiv. Nun bedeuten (14) und (15), daß φ ein Isomorphismus von C auf C ist. Aus (13) folgt weiterhin $\varphi = \varphi^{-1}$. Schließlich besagt (16), daß φ die reellen Zahlen festläßt.

Als Folgerungen aus diesem Satz erhalten wir noch:

(17) $$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2};$$

(18) $$\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}};$$

(19) $$\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}.$$

Diese Beziehungen lassen sich natürlich auch direkt unter Verwendung der Definition von $\bar{z}$ gewinnen (Übungsaufgabe).

Bei der Veranschaulichung der komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene bedeutet der Übergang von einer komplexen Zahl z zu ihrer konjugiert komplexen Zahl $\bar{z}$ einfach die Spiegelung an der x-Achse.

Für verschiedene Aufgaben und Untersuchungen ist die Darstellung einer komplexen Zahl in der Form $a + bi$ unzweckmäßig. So ist z. B. die Berechnung eines Produktes mit mehreren komplexen Zahlen als Faktoren recht aufwendig und unübersichtlich. Die Gleichung (4) zeigt andererseits, daß sich der Betrag eines Produktes einfach als Produkt der Beträge der einzelnen Faktoren ergibt und daher unmittelbar aus den Beträgen der einzelnen Faktoren gewonnen werden kann. Durch den Betrag $r = |z|$ allein ist die komplexe Zahl z nicht eindeutig festgelegt. Als zweites Bestimmungsstück wollen wir für eine von Null verschiedene komplexe Zahl z den Winkel φ ($-\pi < \varphi \leqq \pi$) nehmen, der von dem positiven Teil der x-Achse und der durch die Strecke $P_0 P_z$ bestimmten von P_0 ausgehenden Halbgeraden gebildet wird. Die Festlegung des Winkels φ soll dabei so erfolgen, daß den Punkten P_z oberhalb der x-Achse positive, unterhalb der x-Achse negative Winkel entsprechen. Den Winkel φ nennen

wir *Argument* von z und schreiben $\varphi = \arg z$. Unter Verwendung trigonometrischer Funktionen (vgl. MfL Bd 4) wird $\varphi = \arg z$ analytisch durch

$$\sin\varphi = \frac{b}{|z|}, \qquad \cos\varphi = \frac{a}{|z|}, \qquad -\pi < \varphi \leqq \pi \tag{20}$$

für $z = a + bi$ festgelegt. Daraus erhalten wir

$$z = |z|\,(\cos\arg z + i\sin\arg z) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{21}$$

Die trigonometrische Darstellung (21) einer komplexen Zahl z ist für die Beschreibung der Multiplikation komplexer Zahlen geeigneter. Es gelten nämlich

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\, r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \end{aligned} \tag{22}$$

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \text{ (Moivresche[1]) Formel)}; \tag{23}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right). \tag{24}$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\, r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + (\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)i). \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir für $z_1 z_2$ unter Verwendung eines Additionstheorems die Darstellung $r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$. Damit ist (22) bewiesen.

Aus (22) folgt (23) durch vollständige Induktion. Für $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ erhalten wir $\bar{z} = r\left(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right)$ und daraus unter Verwendung von (10) und (22) die Aussage (24).

Wir wollen nun die Addition und die Multiplikation komplexer Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene geometrisch deuten. Realteil und Imaginärteil einer komplexen Zahl z bilden die Koordinaten des Punktes P_z in der Ebene. Nach der Erklärung der Summe zweier komplexer Zahlen erfolgt der Übergang von P_{z_1} und P_{z_2} zum Punkt $P_{z_1+z_2}$ durch koordinatenweise Addition. Der Addition komplexer Zahlen entspricht daher die Vektoraddition in der Gaußschen Zahlenebene (Abb. 8).

Für die Veranschaulichung der Multiplikation benutzen wir die trigonometrischen Darstellungen

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Nach (22) werden bei der Multiplikation die Beträge multipliziert und die Argumente modulo 2π addiert. Die von P_0 ausgehende Halbgerade durch den Punkt $P_{z_1 z_2}$ kann

[1]) Abraham de Moivre (1667–1754).

also einfach durch Abtragen der Argumente von z_1, z_2 aus den Halbgeraden durch P_0 und P_{z_1} bzw. P_0 und P_{z_2} ermittelt werden. Um den Punkt $P_{z_1z_2}$ aus den Punkten P_{z_1}, P_{z_2} zu erhalten, wird zum Dreieck $P_0P_1P_{z_1}$ ein ähnliches Dreieck $P_0P_{z_2}P$ gezeichnet, wobei P auf der Halbgeraden durch P_0 und $P_{z_1z_2}$ liegen soll und die Seiten P_0P_1 und $P_0P_{z_2}$, $P_1P_{z_1}$ und $P_{z_2}P$, sowie $P_0P_{z_1}$ und P_0P jeweils einander entsprechende Seiten sein sollen. P ist dann der Punkt $P_{z_1z_2}$ (Abb. 9).

Die Veranschaulichung der Subtraktion, der Inversenbildung und der Division in der Gaußschen Zahlenebene überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

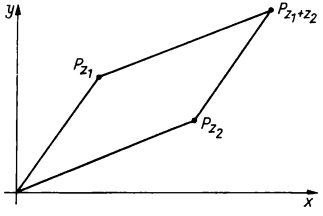


Abb. 8

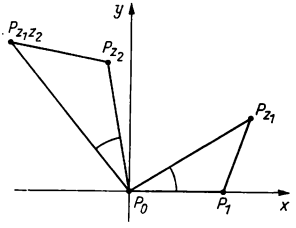


Abb. 9

7.4. Gleichungen n-ten Grades im Bereich der komplexen Zahlen

Im Bereich der reellen Zahlen besitzt für $a > 0$ die Gleichung $x^n = a$ für eine ungerade natürliche Zahl n genau eine, für eine gerade natürliche Zahl n genau zwei Lösungen. Wir wollen jetzt in $\mathbf{C}$ die Gleichung $x^n = a$ betrachten, wobei wir a als eine beliebige von Null verschiedene komplexe Zahl und n als eine natürliche Zahl voraussetzen.

Unter Verwendung der trigonometrischen Darstellungen

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad a = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$$

erhalten wir

$$r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$$

für $z^n = a$. Also ist z genau dann eine Lösung von $x^n = a$, wenn $r = \sqrt[n]{r_0}$ und $n \cdot \varphi = \varphi_0 + k \cdot 2\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ gilt. Für φ folgt daraus die Bedingung

$$\varphi = \frac{\varphi_0 + k \cdot 2\pi}{n}.$$

Wenn wir

$$\psi_l = \frac{\varphi_0 + l \cdot 2\pi}{n} \quad (l = 0, 1, \ldots, n-1)$$

setzen, erhalten wir aus

$$\frac{\varphi_0}{n} \leqq \psi_l < \frac{\varphi_0}{n} + 2\pi \text{ und } \psi_{l+1} - \psi_l = \frac{2\pi}{n},$$

daß die Winkel $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ bei der Veranschaulichung am Einheitskreis der Gaußschen Zahlenebene diesen in n gleiche Teile zerlegen.

Jeder Winkel φ mit der Eigenschaft

$$\varphi = \frac{\varphi_0 + k \cdot 2\pi}{n}$$

unterscheidet sich von einem der Winkel ψ_l durch ein ganzzahliges Vielfaches von 2π. Wir schließen daraus auf genau n verschiedene Winkel $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ mit $-\pi < \varphi_l \leqq \pi$, so daß $z_l = \sqrt[n]{r_0}(\cos \varphi_l + i \sin \varphi_l)$ eine Lösung von $x^n = a$ ist.

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Satz 1. *Eine Gleichung der Form* $x^n = a$ $(= r_0(\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0) \neq 0)$ *besitzt in* $\mathbb{C}$ *für eine beliebige von Null verschiedene natürliche Zahl* n *genau* n *verschiedene Lösungen. Dabei ist*

$$\sqrt[n]{r_0}\left(\cos \frac{\varphi_0}{n} + i \sin \frac{\varphi_0}{n}\right)$$

eine Lösung, und alle n *Lösungen bilden bei ihrer Veranschaulichung in der Gaußschen Zahlenebene die Eckpunkte eines regelmäßigen* n*-Ecks.*

Als Spezialfälle dieses Satzes wollen wir die Gleichungen $x^2 = -1$ und $x^n = 1$ untersuchen.

$x^2 = -1$:

Aus der trigonometrischen Darstellung $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$ erhalten wir $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$, $\psi_1 = \frac{3\pi}{2}$. Die komplexen Zahlen

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = 0 + i = i$$

und

$$z_1 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = 0 - i = -i$$

sind daher die Lösungen der Gleichung $x^2 = -1$.

Bezeichnen wir mit j eine beliebige der beiden Lösungen, so besitzt nach Satz 1 aus 7.2. jedes Element z aus $\mathbf{C}$ genau eine Darstellung der Form $a + bj$ mit $a, b \in \mathbf{R}$. Wir erhalten damit eine Übersicht über alle Isomorphismen von $\mathbf{C}$ auf sich, die die reellen Zahlen festlassen. Bei einem Isomorphismus f von $\mathbf{C}$ auf $\mathbf{C}$ muß eine Lösung der Gleichung $x^2 = -1$ wieder in eine Lösung dieser Gleichung übergehen. Wir setzen $j = f(i)$. Wenn f die Elemente von $\mathbf{R}$ festläßt, gilt daher

$$f(a + bi) = f(a) + f(bi) = f(a) + f(b) \cdot f(i) = a + bj.$$

Für $i = j$ ist f also die identische Abbildung für $j = -i$ der Isomorphismus, der den Übergang zur konjugiert komplexen Zahl beschreibt. Es gibt somit genau zwei Isomorphismen von $\mathbf{C}$ auf sich, die die reellen Zahlen festlassen.

$x^n = 1$:

Es gilt $1 = \cos 0 + i \sin 0$ und daher

$$\psi_0 = 0, \quad \psi_1 = \frac{2\pi}{n}, \ldots, \psi_{n-1} = (n-1)\frac{2\pi}{n}.$$

Die n Lösungen

$$z_l = \cos\left(l\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(l\frac{2\pi}{n}\right) \quad (l = 0, 1, \ldots, n-1)$$

der Gleichung

$x^n = 1$ heißen *n-te Einheitswurzeln*. Wir erhalten

für $n = 2$ die Zahlen 1 und -1 als zweite Einheitswurzeln,

für $n = 3$ die Zahlen

$$1, \varrho_1 = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right),$$

$$\varrho_2 = \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) - i \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \overline{\varrho_1}$$

als dritte Einheitswurzeln,

für $n = 4$ die Zahlen $1, i, -1, -i$ als vierte Einheitswurzeln.

Die n-ten Einheitswurzeln bilden bei ihrer Veranschaulichung in der Gaußschen Zahlenebene die Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks, für das P_0 Mittelpunkt und P_1 ein Eckpunkt ist.

Die Menge der n-ten Einheitswurzeln weist bezüglich der Multiplikation folgende Besonderheiten auf:

a) Mit z und z' ist auch zz' eine n-te Einheitswurzel.

b) Ist z eine n-te Einheitswurzel, so ist auch $\frac{1}{z}$ eine n-te Einheitswurzel.

c) Jede n-te Einheitswurzel ist eine Potenz der n-ten Einheitswurzel $z_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$.

Beweis. Aus $z^n = 1, z'^n = 1$ folgen $(z\,z')^n = z^n z'^n = 1$ sowie $\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n} = 1$. Mit der obigen Durchnumerierung der n-ten Einheitswurzeln erhalten wir $z_l = z_1^{\,l}$ für $l = 0, 1, \ldots, n-1$.

Die Aussagen a) und b) beinhalten, daß die n-ten Einheitswurzeln bezüglich der Multiplikation eine Gruppe mit n-Elementen bilden. Darüber hinaus folgt aus c), daß diese Gruppe zyklisch und daher insbesondere kommutativ ist (vgl. MfL Bd. 3).

Eine Ergänzung von Satz 1 ist der folgende

Satz 2. *Aus einer Lösung z der Gleichung $x^n = a$ $(a \neq 0)$ ergeben sich die n Lösungen dieser Gleichung, wenn man z mit den n-ten Einheitswurzeln multipliziert.*

Den einfachen Beweis überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

Den Ausgangspunkt für die Erweiterung des Bereiches der reellen Zahlen zum Bereich der komplexen Zahlen bildete die Gleichung $x^2 = -1$. Wir haben festgestellt, daß im Bereich der komplexen Zahlen sogar jede Gleichung der Form $x^n = a$ lösbar ist, und zwar für $a \neq 0$ genau n verschiedene Lösungen besitzt. In der Algebra sind darüber hinaus die allgemeineren Gleichungen der Form $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ stets von großem Interesse gewesen. Die algebraische Bedeutung der komplexen Zahlen wird durch den Fundamentalsatz der klassischen Algebra begründet, der erstmals von Gauss bewiesen wurde und den wir hier ohne Beweis nennen.

Satz 3 (Fundamentalsatz der klassischen Algebra). *Jede Gleichung der Form $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ $(a_\nu \in \mathbb{C};\ \nu = 0, 1, \ldots, n;\ a_n \neq 0)$ besitzt im Körper der komplexen Zahlen bei geeigneter Zählung genau b Lösungen.*

Wir wollen auf einige mit diesem Satz zusammenhängende Aussagen bzw. einfache Folgerungen aus diesem Satz eingehen.

Ein Ausdruck der Form $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$ wird in der Algebra ein *Polynom* n-ten Grades mit der *Unbestimmten* x genannt.[1]) Die komplexen Zahlen $a_0, \ldots, a_n$ heißen die *Koeffizienten* des Polynoms. Zwei Polynome $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ und $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu' x^\nu$ sind definitionsgemäß genau dann *gleich*, wenn sie den gleichen Grad besitzen und $a_\nu = a_\nu'$ für alle ν gilt.

[1]) Eine genaue Erklärung des Begriffs Polynom erfolgt in der Algebra (vgl. MfL Bd. 3).

Wir beweisen den folgenden

Satz 4. *Ist a eine Lösung der Gleichung $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, so können wir vom Polynom $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ das lineare Polynom $x - a$ als Faktor abspalten. Es existiert also ein Polynom $(n-1)$-ten Grades*

$$b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

mit

$$(b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0)(x - a) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Beweis. Wir setzen

$$b_\nu := \sum_{\mu=\nu+1}^{n} a_\mu a^{\mu-(\nu+1)} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1),$$

also

$$\begin{aligned}
b_{n-1} &= a_n, \\
b_{n-2} &= a_{n-1} + a_n a, \\
b_{n-3} &= a_{n-2} + a_{n-1}a + a_n a^2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_0 &= a_1 + a_2 a + \cdots + a_n a^{n-1}.
\end{aligned}$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu x^\nu (x-a) &= \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu x^{\nu+1} - \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu a x^\nu \\
&= \sum_{\nu=1}^{n-1} b_{\nu-1} x^\nu + b_{n-1}x^n - \sum_{\nu=1}^{n-1} b_\nu a x^\nu - b_0 a \\
&= \sum_{\nu=1}^{n-1} \left(\sum_{\mu=\nu}^{n} a_\mu a^{\mu-\nu} \right) x^\nu + a_n x^n \\
&\quad - \sum_{\nu=1}^{n-1} \left(\sum_{\mu=\nu-1}^{n} a_\mu a^{\mu+1-(\nu+1)} \right) x^\nu - \sum_{\mu=1}^{n} a_\mu a^\mu \\
&= \sum_{\nu=1}^{n-1} \left(\sum_{\mu=\nu+1}^{n} a_\mu a^{\mu-\nu} \right) x^\nu + \sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu x^\nu + a_n x^n \\
&\quad - \sum_{\nu=1}^{n-1} \left(\sum_{\mu=\nu+1}^{n} a_\mu a^{\mu-\nu} \right) x^\nu - \sum_{\mu=1}^{n} a_\mu a^\mu \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x^\nu - \sum_{\mu=1}^{n} a_\mu a^\mu = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu - \sum_{\mu=0}^{n} a_\mu a^\mu = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu.
\end{aligned}$$

Eine Lösung a der Gleichung $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ heißt eine *k-fache* Wurzel, wenn von $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ das Polynom $(x-a)^k$, aber nicht $(x-a)^{k+1}$

als Faktor abgespalten werden kann. Die Zählung der Lösungen bei der Aussage des Fundamentalsatzes der klassischen Algebra hat so zu erfolgen, daß eine k-fache Wurstelle k-mal gezählt wird.

Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die n Lösungen der Gleichung

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{1}$$

(gewisse x_l können als mehrfache Wurzeln zusammenfallen), so können wir nach Satz 4 von $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ schrittweise die Linearfaktoren $x - x_l$ abspalten und erhalten danach

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung können wir ausmultiplizieren und nach Potenzen von x ordnen. Ein Vergleich mit der linken Seite liefert uns auf Grund der Gleichheit zweier Polynome eine Beziehung zwischen den Koeffizienten $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ des durch die Gleichung (1) gegebenen Polynoms und den Lösungen dieser Gleichung. Wir erhalten die Vietaschen[1]) Formeln:

$$\text{(2)} \quad \begin{cases} -a_{n-1} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} x_\nu, \\ a_{n-2} = x_1x_2 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \sum\limits_{\nu<\mu} x_\nu x_\mu, \\ -a_{n-3} = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = \sum\limits_{\nu<\mu<\lambda} x_\nu x_\mu x_\lambda, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (-1)^n a_0 = x_1x_2 \cdots x_n. \end{cases}$$

Über Gleichungen mit reellen Koeffizienten gilt der

Satz 5. *Es sei $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ ein Polynom mit $a_\nu \in \mathbb{R}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$. Ist dann a eine Lösung der Gleichung $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, so ist auch die zu a konjugiert komplexe Zahl $\bar{a}$ eine Lösung dieser Gleichung.*

Beweis. Aus $a_n a^n + \cdots + a_1 a + a_0 = 0$ folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{a_n a^n + \cdots + a_1 a + a_0} = \overline{a_n a^n} + \cdots + \overline{a_1 a} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n}\,\overline{a^n} + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{a} + \overline{a_0} = a_n \overline{a}^n + \cdots + a_1 \overline{a} + a_0 \end{aligned}$$

auf Grund der Eigenschaften für den Übergang zur konjugiert komplexen Zahl.

[1]) François Vieta (1540–1603).

7.5. Auflösung von Gleichungen zweiten und dritten Grades

In diesem Abschnitt werden wir für die Gleichungen zweiten und dritten Grades Lösungsformeln herleiten und anhand der Lösungsformeln verschiedene Typen solcher Gleichungen unterscheiden. Dabei werden wir uns inbesondere für die Fälle interessieren, bei denen in den Gleichungen nur reelle Koeffizienten auftreten.

Die allgemeine Gleichung zweiten Grades

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \qquad (a_2 \neq 0)$$

besitzt nach dem Fundamentalsatz der klassischen Algebra genau zwei Lösungen. Wegen der möglichen Division durch a_2 können wir uns auf die normierte Gleichung

$$(1) \qquad x^2 + px + q = 0$$

beschränken. Nach der Umformung

$$x^2 + px + q = x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

erhalten wir für (1) die Gleichung

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Bezeichnen wir mit z_1, z_2 die beiden Lösungen der Gleichung $z^2 = \frac{p^2}{4} - q$, so erhalten wir als Lösungen von (1)

$$x_1 = -\frac{p}{2} + z_1, \quad x_2 = -\frac{p}{2} + z_2 = -\frac{p}{2} - z_1.$$

Die Zahl $D = \frac{p^2}{4} - q$ nennen wir die *Diskriminante* der quadratischen Gleichung (1). Die beiden Lösungen x_1 und x_2 stimmen genau dann überein, wenn $D = 0$ gilt.

Die Vietaschen Formeln für die quadratische Gleichung (1) lauten

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1x_2 = q. \end{cases}$$

Sind p und q reelle Zahlen, so besitzt die Gleichung (1) genau dann reelle Lösungen, wenn $D \geqq 0$ gilt. Für diesen Fall erhalten wir die Lösungsformel in der gewohnten Form

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Gilt $D < 0$, so erhalten wir zwei zueinander konjugiert komplexe Zahlen als Lösungen von (1). Diese lassen sich in der Form

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

angeben.

Wir betrachten nun die allgemeine Gleichung dritten Grades

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \qquad (a_3 \neq 0).$$

Nach der Aussage des Fundamentalsatzes der klassischen Algebra besitzt diese Gleichung genau drei Lösungen im Bereich der komplexen Zahlen. Im einleitenden Abschnitt hatten wir bereits die Cardanosche Formel zur Lösung spezieller kubischer Gleichungen genannt. Wir wollen uns jetzt genauer mit dieser Lösungsformel beschäftigen.

Die gegebene kubische Gleichung dividieren wir durch a_3:

$$x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0 \qquad \left(b_\nu = \frac{a_\nu}{a_3}, \nu = 0, 1, 2\right).$$

Durch die Substitution $x = y - \frac{1}{3}b_2$ erhalten wir aus

$$x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 = \left(y - \frac{b_2}{3}\right)^3 + b_2\left(y - \frac{b_2}{3}\right)^2 + b_1\left(y - \frac{b_2}{3}\right) + b_0 = 0$$

durch Ordnen nach Potenzen von y eine Gleichung

$$c_3y^3 + c_2y^2 + c_1y + c_0 = 0,$$

bei der $c_3 = 1$ und $c_2 = 0$ gilt. Mit $p = c_1$, $q = c_0$ ergibt sich $y^3 + py + q = 0$. Die Lösungen dieser Gleichung sind dann mit den Lösungen der Gleichung

$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ durch $x = y - \frac{1}{3}b_2 = y - \frac{a_2}{3a_3}$ verknüpft. Die Bestimmung der Lösungen einer beliebigen Gleichung dritten Grades ist damit auf die Bestimmung der Lösungen einer Gleichung der Form

$$y^3 + py + q = 0 \tag{3}$$

zurückgeführt worden. Dieses ist der Gleichungstyp, der für die Cardanosche Formel in 7.1. vorausgesetzt wurde.

Um die Cardanosche Formel zu gewinnen, setzen wir $y_1 = u + v$ für eine Lösung y_1 der Gleichung (3). (Dieser Ansatz ist für uns naheliegend, da wir bereits die Cardanosche Formel kennen.) Aus $(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$ folgt durch Umformung

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Eine Vereinfachung dieser Gleichung ergibt sich, wenn u, v so gewählt werden können, daß $3uv + p = 0$ wird. Aus $u + v = y_1$ und $3uv + p = 0$ folgt für $v \neq 0$ die Bedingung $u = -\frac{p}{3v}$ und daher $u + v = -\frac{p}{3v} + v = y_1$, also $v^2 - vy_1 - \frac{p}{3} = 0$. Die für $p \neq 0$ von Null verschiedenen Lösungen v_1, v_2 dieser Gleichung in v erfüllen nach den Vietaschen Formeln (2) die Gleichungen $v_1 + v_2 = y_1$ und $v_1 v_2 = -\frac{p}{3}$. Mit $v_1 = v$ und $v_2 = u$ erhalten wir

$$(4) \qquad \begin{cases} u + v = y_1, \\ uv = -\frac{p}{3}, \quad u^3 v^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3, \\ u^3 + v^3 = -q. \end{cases}$$

Nach den Vietaschen Formeln sind daher u^3 und v^3 die Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 + qz - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$. Es gilt also

$$z_1 = u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}, \quad z_2 = v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Damit haben wir mit

$$y_1 = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

die Cardanosche Formel erhalten.

Die Wurzelzeichen werden hier allerdings in einem allgemeineren Sinn verwendet als sonst üblich (vgl. 6.2. Satz 14). In der Cardanoschen Formel bezeichnet $\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ eine komplexe Zahl w, die Lösung der Gleichung $z^2 = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ ist. Ferner steht $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + w}$ für eine der drei komplexen Lösungen u_1, u_2, u_3 der Gleichung $z^3 = -\frac{q}{2} + w$ und $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - w}$ entsprechend für eine der drei komplexen Lösungen v_1, v_2, v_3 der Gleichung $z^3 = -\frac{q}{2} - w$.

Die Zahlen u_k, v_l wollen wir uns so durchnumeriert denken, daß $u_1 + v_1 = y_1$ gilt. Ferner seien $u_2 = \varrho_1 u_1$, $u_3 = \varrho_2 u_1$ sowie $v_2 = \varrho_2 v_1$, $v_3 = \varrho_1 v_1$, wobei ϱ_1, ϱ_2 die von 1 verschiedenen dritten Einheitswurzeln bezeichnen sollen (vgl. 7.4. Satz 2). Die Lösungen

der Gleichung (3) ergeben sich dann in der Form

$$(5) \qquad y_1 = u_1 + v_1,$$
$$y_2 = u_2 + v_2 = \varrho_1 u_1 + \varrho_2 v_1,$$
$$y_3 = u_3 + v_3 = \varrho_2 u_1 + \varrho_1 v_1.$$

Die beiden nicht notwendig verschiedenen Zahlen $u_2 + v_2$, $u_3 + v_3$ sind nämlich wegen

$$u_k^3 + v_k^3 = -q \qquad (k = 2, 3),$$

$$u_2 v_2 = \varrho_1 u_1 \cdot \varrho_2 v_1 = (\varrho_1 \varrho_1^{-1})\, u_1 v_1 = u_1 v_1 = -\frac{p}{3}$$

sowie

$$u_3 v_3 = \varrho_2 u_1 \cdot \varrho_1 v_1 = (\varrho_2 \varrho_2^{-1})\, u_1 v_1 = u_1 v_1 = -\frac{p}{3}$$

tatsächlich Lösungen von (3), und auf Grund der für y_1 durchgeführten Überlegungen muß sich jede Lösung von (3) als Summe eines u_k mit einem v_l schreiben lassen. Für $l \neq k$ $(l, k = 1, 2, 3)$ und $p \neq 0$ kann $u_l + v_k$ keine Lösung von (3) sein, da die Bedingung $u_l v_k = -\frac{p}{3}$ nicht erfüllt wird (beispielsweise ist $u_2 v_3 = \varrho_1 u_1 \cdot \varrho_1 v_1 = \varrho_1^2 \left(-\frac{p}{3}\right) \neq -\frac{p}{3}$).

Um eine Lösung von (3) mit Hilfe der Cardanoschen Formel zu gewinnen, muß zu einer Lösung von

$$z^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

eine geeignete Lösung von

$$z^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

addiert werden. Aus der Darstellung dieser Lösung in der Form $y_1 = u_1 + v_1$ erhalten wir dann nach (5) die beiden weiteren Lösungen.

Beispiel 1.

$$y^3 + \frac{3\sqrt[3]{3}}{2}\left(1 - \sqrt{3}\, i\right) y - 3 = 0.$$

Es ist also $p = \frac{3\sqrt[3]{3}}{2}\left(1 - \sqrt{3}\,i\right)$, $q = -3$. Wir erhalten

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 = \frac{3}{8}\left(1 - \sqrt{3}\,i\right)^3 = \frac{3}{8}\left(1 - 3\sqrt{3}\,i + 3 \cdot 3i^2 - 3\sqrt{3}\,i^3\right) = -3,$$

$$-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{12}{4}} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Zur Berechnung der u_l, v_k benutzen wir die trigonometrischen Darstellungen

$$\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}\,(\cos 30° + i \sin 30°),$$

$$\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \sqrt{3}\left(\cos(-30°) + i \sin(-30°)\right).$$

Wir setzen (vgl. 7.4. Satz 1)

$$u_1 = \sqrt[3]{\sqrt{3}}\,(\cos 10° + i \sin 10°) = \sqrt[6]{3}\,(\cos 10° + i \sin 10°)$$

und

$$v' = \sqrt[3]{\sqrt{3}}\left(\cos(-10°) + i \sin(-10°)\right) = \sqrt[6]{3}\,(\cos 10° - i \sin 10°).$$

Es ist

$$u_1 v' = \left(\sqrt[6]{3}\right)^2 (\cos^2 10° + \sin^2 10°) = \sqrt[3]{3}.$$

Um $-\frac{p}{3} = -\frac{\sqrt[3]{3}}{2}\left(1 - \sqrt{3}\,i\right)$ zu erhalten, müssen wir $u_1 v'$ mit der dritten Einheitswurzel $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ multiplizieren. Damit ist

$$v_1 = v'\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \sqrt[6]{3}\,(\cos 110° + i \sin 110°).$$

Die drei Lösungen der gegebenen Gleichung sind:

$$y_1 = u_1 + v_1 = \sqrt[3]{3}\,(\cos 10° + i \sin 10°) + \sqrt[3]{3}\,(-\cos 70° + i \sin 70°),$$

$$y_2 = \varrho_1 u_1 + \varrho_2 v_1$$

$$= \sqrt[3]{3}\,(-\cos 50° + i \sin 50°) + \sqrt[3]{3}\,(\cos 10° - i \sin 10°),$$

$$y_3 = \varrho_2 u_1 + \varrho_1 v_1$$

$$= \sqrt[3]{3}\,(-\cos 70° - i \sin 70°) + \sqrt[3]{3}\,(-\cos 50° - i \sin 50°).$$

Besonders einfach wird die Cardanosche Formel für $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$. Das gilt genau dann, wenn die Diskriminante

$$(6) \qquad D := -4p^3 - 27q^2$$

gleich Null ist. Wir haben dann zur Bestimmung der u_k bzw. v_l jeweils die Gleichung $z^3 = -\frac{q}{2}$ zu lösen. Aus $D = 0$ erhalten wir $-\frac{27q^2}{4p^3} = 1$ und daher $\frac{27q^3}{8p^3} = -\frac{q}{2}$. Das bedeutet, daß $u_1 = \frac{3q}{2p}$ eine Lösung von $z^3 = -\frac{q}{2}$ ist. Wegen

$$u_1 u_1 = \frac{9q^2}{4p^2} = \frac{p}{3}\left(\frac{27q^2}{4p^3}\right) = -\frac{p}{3}$$

ist $v_1 = u_1$ und daher $y_1 = u_1 + v_1 = \frac{3q}{p}$ eine Lösung. Weiter erhalten wir

$$y_2 = u_2 + v_2 = \varrho_1 u_1 + \varrho_2 v_1 = \varrho_1 u_1 + \varrho_2 u_1$$

$$= u_1(\varrho_1 + \varrho_2)$$

sowie

$$y_3 = u_3 + v_3 = \varrho_2 u_1 + \varrho_1 u_1 = u_1(\varrho_1 + \varrho_2).$$

Im Fall $D = 0$ stimmen also wenigstens zwei der drei Lösungen überein. Es ist

$$u_1(\varrho_1 + \varrho_2) = \frac{3q}{2p}(\varrho_1 + \overline{\varrho_1}) = \frac{3q}{2p}\, 2 \cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{3q}{2p}.$$

Für den Fall $D = 0$ und $p \neq 0$ besitzt die Gleichung (3) die Lösungen

$$y_1 = \frac{3q}{p}, \quad y_2 = y_3 = -\frac{3q}{2p}.$$

Wir wollen nun zeigen, daß umgekehrt für $D \neq 0$ die drei Lösungen y_1, y_2, y_3 von (3) paarweise verschieden sein müssen. Wäre etwa $y_2 = y_3$, so müßte

$$y_1 = u_1 + v_1, \qquad y_2 = \varrho_1 u_1 + \varrho_2 v_1 = \varrho_2 u_1 + \varrho_1 v_1$$

gelten. Daraus folgt

$$(\varrho_1 - \varrho_2)\, u_1 = (\varrho_1 - \varrho_2) v_1$$

und daher $u_1 = v_1$. Es gilt also

$$-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = u_1^3 = v_1^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

und damit

$$\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = 0.$$

Das ist aber gleichwertig mit $D = 0$.

Die Diskriminante ist also dann und nur dann gleich Null, wenn von den drei Lösungen y_1, y_2, y_3 wenigstens zwei übereinstimmen.

Bisher konnten p und q beliebige komplexe Zahlen sein. Wir werden jetzt voraussetzen, daß p und q reell sind. Für die Charakterisierung der Lösungen unterscheiden wir die Fälle $D < 0$, $D = 0$, $D > 0$.

1. $D < 0$:

Es ist dann $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$, und die Zahlen

$$-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

sind daher reell. Wir bezeichnen mit u_1 die reelle Lösung der Gleichung

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

und mit v' die reelle Lösung der Gleichung

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Da $u_1 v_1$ die reelle Zahl $-\frac{p}{3}$ ergibt, muß v_1 reell sein und daher mit v' übereinstimmen.

Also ist $y_1 = u_1 + v_1$ eine reelle Zahl. Weiter folgt dann

$$\begin{aligned} y_2 &= \varrho_1 u_1 + \varrho_2 v_1 \\ &= u_1(-\cos 60° + i \sin 60°) + v_1(-\cos 60° - i \sin 60°) \\ &= -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + i\,\frac{1}{2}\sqrt{3}\;(u_1 - v_1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3 &= \varrho_2 u_1 + \varrho_1 v_1 \\ &= u_1(-\cos 60° - i \sin 60°) + v_1(-\cos 60° + i \sin 60°) \\ &= -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + i\,\frac{1}{2}\sqrt{3}\;(v_1 - u_1). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt (vgl. auch 7.4. Satz 5) $y_2 = \overline{y_3}$. Für $D < 0$ existieren also drei verschiedene Lösungen, von denen eine reell ist und die beiden anderen zueinander konjugiert komplexe Zahlen sind.

2. $D = 0$:

Wir erhalten die reellen Lösungen

$$y_1 = \frac{3q}{p}, \quad y_2 = y_3 = -\frac{3q}{2p}.$$

3. $D > 0$:

Es ist jetzt $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$. Die Lösungen w_1, w_2 der Gleichung $z^2 = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ sind rein imaginäre zueinander entgegengesetzte Zahlen. Daher sind

$$-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \text{und} \quad -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

zueinander konjugiert komplexe Zahlen. Ist $u_1 = a_1 + b_1 i$ eine Lösung von

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

so ist

$$(a_1 - b_1 i)^3 = \overline{u_1}^3 = \overline{u_1^3} = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

also $\overline{u}_1$ eine Lösung von

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Ferner ist $u_1\bar{u}_1$ eine reelle Zahl und daher $\bar{u}_1 = v_1$. Mit $y_1 = u_1 + v_1 = u_1 + \bar{u}_1 = 2a_1$ erhalten wir also eine reelle Lösung von (3). Weiterhin sind auch

$$y_2 = u_2 + v_2 = \varrho_1 u_1 + \varrho_2 v_1 = \varrho_1 u_1 + \dot{\varrho}_1\bar{u}_1 = \varrho_1 u_1 + \overline{\varrho_1 u_1}$$

und

$$y_3 = u_3 + v_3 = \varrho_2 u_1 + \varrho_1 v_1 = \varrho_2 u_1 + \bar{\varrho}_2\bar{u}_1 = \varrho_2 u_1 + \overline{\varrho_2 u_1}$$

reelle Lösungen. Wir haben hiermit den Fall des „casus irreducibilis" geklärt. Die kubische Gleichung (3) besitzt genau dann drei verschiedene reelle Lösungen, wenn $D > 0$ ist. Jede dieser Lösungen ergibt sich dabei aus der Cardanoschen Formel als Summe zweier (nicht reeller) konjugiert komplexer Zahlen.

Das oben betrachtete Beispiel 1 zeigt, daß wir unter Verwendung einer Tafel für die trigonometrischen Funktionen die Cardanosche Formel zur näherungsweisen Berechnung der Lösungen einer kubischen Gleichung benutzen können. Ein Nachteil der Cardanoschen Formel besteht darin, daß ganzzahlige Lösungen einer kubischen Gleichung i. allg. nicht als solche aus der Cardanoschen Formel gewonnen werden können. Dazu betrachten wir das

Beispiel 2.

$$x^3 + 3x + 4 = 0.$$

Es ist $p = 3$, $q = 4$ und $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 4 + 1 = 5 > 0$, also $D < 0$. Die Gleichung besitzt daher genau eine reelle Lösung. Diese ergibt sich aus der Cardanoschen Formel als

$$y_1 = u_1 + v_1 = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{5}}.$$

Wir können u_1 und v_1 nur näherungsweise berechnen, da bereits $\sqrt{5}$ eine irrationale Zahl ist. Andererseits ist -1 eine Lösung der gegebenen Gleichung und daher $y_1 = -1$.

7.6. Gleichungen vierten Grades

Die allgemeine Gleichung vierten Grades

(1) $$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

können wir mittels der Transformation $x = y - \frac{a}{4}$ in eine Gleichung der Form

(2) $$y^4 + py^2 + qy + r = 0$$

überführen. Die vier Lösungen dieser Gleichung bezeichnen wir mit y_1, y_2, y_3, y_4.

Für die Lösung y_1 setzen wir $y_1 = \frac{u_1}{2} + \frac{v_1}{2} + \frac{w_1}{2}$ mit der Zielstellung, eine der Cardanoschen Formel ähnliche Methode zur Bestimmung der Lösungen einer Gleichung vierten Grades zu erhalten. Durch Einsetzen von $2y_1 = u_1 + v_1 + w_1$ in die zu (2) gleichwertige Gleichung $16y^4 + 16py^2 + 16qy + 16r = 0$ ergibt sich nach einigen Umformungen

$$\begin{aligned}(3)\qquad & (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) + 4(u_1v_1 + v_1w_1 + w_1u_1)\,(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 + 2p) \\ & + 4p(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) + 8(u_1v_1w_1 + q)\,(u_1 + v_1 + w_1) \\ & + 4(u_1^2v_1^2 + v_1^2w_1^2 + w_1^2u_1^2) + 16r = 0.\end{aligned}$$

Zur Vereinfachung dieser Gleichungen wollen wir versuchen, die Zahlen u_1, v_1, w_1 so zu bestimmen, daß neben $u_1 + v_1 + w_1 = 2y_1$ auch noch $u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 + 2p = 0$ und $u_1v_1w_1 + q = 0$ gelten. Wegen

$$4y_1^2 = u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 + 2u_1v_1 + 2v_1w_1 + 2w_1u_1$$

ist

$$u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 + 2p = 0$$

gleichwertig mit

$$u_1v_1 + v_1w_1 + w_1u_1 = 2y_1^2 + p.$$

Die Gleichungen

$$(4)\qquad \begin{cases} -(u_1 + v_1 + w_1) = -2y_1, \\ u_1v_1 + v_1w_1 + w_1u_1 = 2y_1^2 + p, \\ -u_1v_1w_1 = q \end{cases}$$

werden nach den Vietaschen Formeln (vgl. 7.4. (2)) erfüllt, wenn wir für u_1, v_1, w_1 die Lösungen der kubischen Gleichung

$$z^3 - 2y_1z^2 + (2y_1^2 + p)z + q = 0$$

wählen. Die Gleichung (3) geht dann über in

$$u_1^2v_1^2 + v_1^2w_1^2 + w_1^2u_1^2 = p^2 - 4r.$$

Aus den damit für y_1^2, v_1^2, w_1^2 gewonnenen Gleichungen

$$(5)\qquad \begin{cases} u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 = -2p, \\ u_1^2v_1^2 + v_1^2w_1^2 + w_1^2u_1^2 = p^2 - 4r, \\ u_1^2v_1^2w_1^2 = q^2 \end{cases}$$

folgt ebenfalls nach den Vietaschen Formeln, daß u_1^2, v_1^2, w_1^2 die Lösungen z_1, z_2, z_3

der kubischen Gleichung

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0 \tag{6}$$

sind. Bei geeigneter Durchnumerierung der Lösungen von (6) gilt daher:

u_1 ist eine Lösung der Gleichung $u^2 = z_1$,

v_1 ist eine Lösung der Gleichung $v^2 = z_2$,

w_1 ist eine Lösung der Gleichung $w^2 = z_3$.

Erklären wir analog zu (4) u_k, v_k, w_k für y_k ($k = 2, 3, 4$), so müssen auch u_k, v_k, w_k Lösungen von $u^2 = z_1$, $v^2 = z_2$ bzw. $w^2 = z_3$ sein und die Bedingung $u_k v_k w_k = -q$ erfüllen. Es ist also $u_k = \pm u_1$, $v_k = \pm v_1$, $w_k = \pm w_1$. Bei geeigneter Durchnumerierung von y_2, y_3, y_4 erhalten wir daher

$$\begin{cases} 2y_1 = u_1 + v_1 + w_1, \\ 2y_2 = u_1 - v_1 - w_1, \\ 2y_3 = -u_1 + v_1 - w_1, \\ 2y_4 = -u_1 - v_1 + w_1. \end{cases} \tag{7}$$

Um eine Gleichung vierten Grades (2) zu lösen, hat man also zunächst die Lösungen z_1, z_2, z_3 der kubischen Gleichung (6) zu bestimmen. Danach ermittelt man u_1 als eine Lösung von $u^2 = z_1$ und v_1 als eine Lösung von $v^2 = z_2$. Von den beiden Lösungen w', w'' der Gleichung $w^2 = z_3$ wählt man dann diejenige als w_1 aus, die $u_1 v_1 w_1 = -q$ erfüllt. Die vier Lösungen von (2) ergeben sich dann aus den Gleichungen (7).

Das Lösen einer Gleichung vierten Grades kann somit nach einem einheitlichen Verfahren auf rationale Operationen (Addition, Multiplikation, Subtraktion, Division) und das Lösen von Gleichungen zweiten und dritten Grades zurückgeführt werden. Nennen wir das Lösen einer Gleichung der Form $x^n = a$ abkürzend *Radizieren*, so können wir über Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades zusammenfassend folgendes aussagen:

Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades lassen sich nach einem jeweils einheitlichen Rechenschema mit Hilfe rationaler Operationen und durch mehrfaches) Radizieren gewinnen. Wir sagen hierfür auch, daß eine *Darstellung durch Radikale* möglich ist.

Man könnte nun erwarten, daß diese Eigenschaft auch den Gleichungen höheren Grades zukommt. Der norwegische Mathematiker N. H. Abel zeigte, daß die Lösungen einer Gleichung der Form $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ für $n \geq 5$ keine von den Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ abhängige Radikaldarsstellung besitzen können. Es gibt für $n \geq 5$ sogar konkrete Gleichungen, bei denen für die Lösungen keine Radikaldarstellung existiert. Die Frage, wann die Lösungen einer konkreten Gleichung n-ten Grades mit $n \geq 5$ Radikaldarstellungen besitzen, wird in der Algebra durch die Galoissche Theorie beantwortet.

Zur Geschichte der Zahlzeichen und des Zahlbegriffes

Hans Wussing

Der Begriff der Zahl ist einer der grundlegenden Begriffe der Mathematik. Seine historische Entwicklung, die Entwicklung von Umfang und Inhalt des Begriffes „Zahl", spiegelt bis zu einem gewissen Grade auf seine Weise das Leistungsvermögen der Mathematik und den Grad der Reife und Durchbildung der Grundlagen der Mathematik wider, auch und vielleicht gerade deswegen, weil der Gang der historischen Entwicklung sich nur teilweise mit dem heute gewählten logischen Aufbau des Zahlensystems deckt.

1. Die Herausbildung des Zahlbegriffes in der Antike

Zählen gehört zu den ältesten geistigen Tätigkeiten der Menschheit und hatte unmittelbare Bedürfnisse bei der Auseinandersetzung des Menschen mit der Natur zu erfüllen.

Für die Ausbildung und Weiterführung der Zahlreihe haben die erste gesellschaftliche Arbeitsteilung, die Trennung in Ackerbauer und Viehzüchter, und das Aufkommen von Privateigentum in der beginnenden Klassengesellschaft die bestimmende Rolle gespielt. Aus der Notwendigkeit, Viehherden zu überblicken, Tausch- und Geldgeschäfte zu betreiben u. a. m. entwickelte sich die Fähigkeit zum Zählen.

Die Zahlensysteme wurden meist auf dezimaler Grundlage ausgebildet (10 Finger!). Weit verbreitet waren auch 20er Systeme (Zehen und Finger!), unter anderem bei den Kelten, den frühen Einwohnern Frankreichs und Englands. Noch heute erinnert französisch 80 = quatre-vingt (4 mal zwanzig) daran. Vereinzelt wurde auch die 12

(6 Knöchel an der Hand) als Basis des Zahlsystems zugrunde gelegt. In alten Sprachen fällt „10" sehr häufig mit „beide Hände", „20" mit „ein Mensch" zusammen (Abb. 1 und 2).

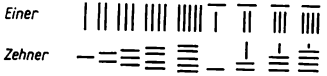


Abb. 1. Altchinesische Bambusziffern (seit 2. Jh. v. u. Z. bis etwa 12. Jh. u. Z.)

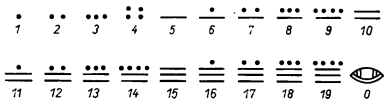


Abb. 2. Zahlzeichen der Maya (seit etwa 500 u. Z.). Unreines 20er System, später Positionssystem mit Nullzeichen

Wie philologische Untersuchungen an alten Sprachen ergaben, hing ursprünglich das gewählte Zahlwort von der Art des gezählten Gegenstandes ab; die Anzahl wurde also als Eigenschaft der Gegenstände aufgefaßt. Davon existieren auch in der deutschen Sprache noch Reste: Man spricht von einem Paar Schuhe, einer Mandel Eier, einem Joch Ochsen, einem Ries Papier.

Es bedeutete in der Geschichte der Menschheit einen ungeheuren Schritt vorwärts, als ein abstrakter, vom zu zählenden Gegenstand losgelöster Anzahlbegriff herausgearbeitet werden konnte. Doch gehörte dazu ein bedeutender Erfahrungsschatz beim rechnerischen Umgang mit Zahlenwerten, wie er uns in den frühen, hochentwickelten Klassengesellschaften entgegentritt.

Hervorragend ausgebildet waren schon vor 4000 Jahren die Zahlensysteme im alten Ägypten und besonders in Mesopotamien, im Zweistromland zwischen Euphrat und Tigris, auf dem sich lange Zeit ein Großreich mit der Hauptstadt Babylon halten konnte.

Das altägyptische Zahlsystem war dezimal aufgebaut, aber kein Positionssystem. Für jede der Zehnerpotenzen bi $s\ 10^6$ existierte ein Individualzeichen, eine spezielle Hieroglyphe (Abb. 3). Die Zahlen wurden durch Reihung der Individualzeichen ausgedrückt (Abb. 4); erst später kam eine Art Verzifferung in Gebrauch. Auch mit Bruchteilen des Ganzen wurde in der altägyptischen Mathematik gerechnet. Neben besonderen Individualzeichen für häufig vorkommende Werte wie $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ war

die Rechnung auf Stammbrüchen $\frac{1}{n}$ aufgebaut; geschrieben wurde der „Nenner" n; ein darübergesetzter Punkt unterschied den Wert $\frac{1}{n}$ von n.

Wie aus den ältesten Keilschrifttexten hervorgeht, entstand das babylonische Zahlensystem, ein hochentwickeltes Positionssystem zur Basis 60, Schritt für Schritt aus der Überlagerung eines ursprünglichen Dezimalsystems mit einem 6er System der Maßeinheiten für Länge, Gewicht und Währung.

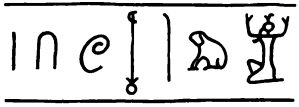


Abb. 3. Altägyptische Individualzeichen für die Zehnerpotenzen bis 10^6. Das Zeichen für 100 ist das Sinnbild für eine Meßleine, das Zeichen für 1000 eine Lotosblume, für 10000 ein Schilfkolben, für 100000 ein Frosch. Das Zeichen für 10^6 stellt den ägyptischen Gott des Luftraumes dar

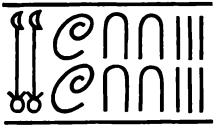


Abb. 4. Die Zahl 2246 in altägyptischer Schreibweise; Reihung von Individualzeichen

Im ausgereifteren Zustand wurden zwei Zeichen verwendet, Keile und Winkelhaken, die mit einem Holzstäbchen in den feuchten Ton gedrückt wurden und aus denen sich neben Schriftzeichen auch die 60 Ziffern des Zahlensystems zusammensetzten (Abb. 5). Ab ungefähr 600 v. u. Z., d. h. zur Perserzeit, wurde sogar ein inneres Lückenzeichen, eine innere „Null", verwendet.

Im babylonischen Positionssystem bedeutet die „Ziffer Eins", der Teil, also nicht nur 1, sondern $60^{\pm k}$ mit k ganz. Im übrigen ging die Größenordnung der Zahlen aus dem Zusammenhang hervor, da die großen Sprünge der Größenordnung eine Verwechslung ausschlossen. Dieses Positionssystem besaß daher den großen Vorteil, daß — durch eine gedankliche Verschiebung der Größenordnung — auch die Bruchrechnung im ganzzahligen Bereich vorgenommen werden konnte. Das sexagesimale Positionssystem hat sich darum in der Antike überall dort durchgesetzt, wo in größerem Umfang schwierige numerische Rechnungen bewältigt werden mußten, vor allem also in der Astronomie. Von etwa 200 v. u. Z. wurde es zur Rechengrundlage der hellenistischen Astronomie: von dort ist es schließlich durch Vermittlung der ara-

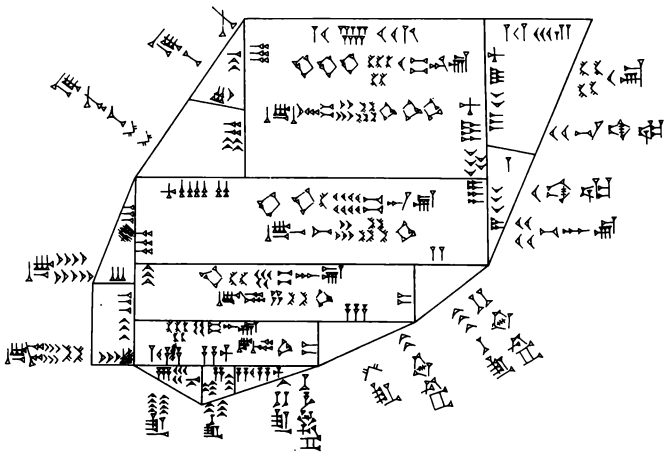


Abb. 5. Altbabylonischer Felderplan. Liegende Schriftzeichen bedeuten Zahlenangaben für die Flächenmaße

bischen Gelehrten in den europäischen Kulturkreis eingedrungen und behauptet sich noch heute in der Zeit- und Winkelmessung und in der Trigonometrie.

Trotz aller hochentwickelten Rechentechnik im alten Ägypten und in der babylonischen Mathematik zeigen aber die erhaltenen Quellen in keinem einzigen Fall eine kritische Reflexion, die auf eine Begriffsbestimmung von „Zahl" hindeuten könnte. Der Zahlbegriff war sozusagen nur implizit vorhanden.

Die explizite Herausarbeitung eines Zahlbegriffes erfolgte vielmehr erst zur Zeit der Herausbildung der vollentwickelten Sklavenhaltergesellschaft, während des 6. und 5. Jahrhunderts v. u. Z., in enger Berührung mit der ionischen Naturphilosophie. In einer Atmosphäre der Besinnung auf das Wesen der Natur und die Art des Zusammenhanges, während des Überganges vom Sammeln und Beschreiben von Fakten zum Verstehenwollen und Begreifen hat sich auch der Umschlag von einer rezeptartig betriebenen zu einer allgemeine Sätze aufstellenden und Beweise heranziehenden Mathematik vollzogen, die auf Definitionen aufbaute.

In diesem allgemeinen Zusammenhang einer sich herausbildenden eigenständigen Wissenschaft Mathematik erfolgte auch die Herausarbeitung des Zahlbegriffes. Diese Entwicklung wurde vermutlich schon mit THALES von Milet (etwa 624 — etwa 548 v. u. Z.) eingeleitet oder wenigstens zu seinen Lebzeiten. Nach späteren Berichten

definierte THALES das „Wieviel, das ist die Zahl als Zusammenfassung von Einheiten" ([12], S. 28).

Die Pythagoreer verliehen den Zahlen Eigenschaften, z. B. Haß und Liebe, männlich und weiblich. Trotz des Ballastes idealistischer Vorstellungen wurden — sozusagen unbeabsichtigt — aber auch echte, wissenschaftliche Ergebnisse erzielt. Auf die Pythagoreer gehen die Unterscheidung von geraden und ungeraden Zahlen, die Anfänge einer Teilbarkeitslehre und die Lehre von den vollkommenen und den Primzahlen zurück. Diese Leistungen sind dann später in die „Elemente" des EUKLEIDES (etwa 365 — etwa 300 v. u. Z.) aufgenommen worden.

Vom Begriffsumfang her verstanden die Pythagoreer unter „Zahl" lediglich positive ganze rationale, also natürliche Zahlen größer als Null. Die 1 selbst galt in der pythagoreischen Schule (und auch später bei EUKLEIDES) nicht als Zahl, sondern als Quelle und Ursprung aller Zahlen.

Mit dieser Vorstellung von der so verstandenen Zahl errichteten die Pythagoreer ein idealistisches philosophisches Gebäude, wonach die „ganze Welt Zahl" (oder Verhältnis von Zahlen) sei. Es brach zusammen, als noch innerhalb der pythagoreischen Schule, wahrscheinlich durch HIPPASOS von Metapont (um 450 v. u. Z.), die Entdeckung gemacht wurde, daß es Strecken gibt, die sich nicht als Verhältnis von (ganzen, positiven) Zahlen ausdrücken lassen. Beispielweise gilt dies für die Diagonale im Einheitsquadrat; Quadratseite und Diagonale „messen sich nicht gegenseitig", wie man damals sagte, sie sind zueinander inkommensurabel.

Das Problem der geistigen Bewältigung der Inkommensurabilität hat sich durch die ganze antike Mathematik hindurchgezogen: Es existieren gegeneinander inkommensurable Strecken, man kann sie konstruieren. Aber es gibt keine Zahl und kein Verhältnis von Zahlen, das ein arithmetisches Äquivalent des geometrischen Objektes sein kann.

Ein Ausweg aus diesem inneren Widerspruch hätte die begriffliche Definition der irrationalen Zahl sein müssen, doch konnte dieser Weg in der Antike nicht beschritten werden, da die begriffliche Bewältigung von Grenzübergängen (die für die Definition der Irrationalzahlen unvermeidlich sind) damals noch nicht geleistet werden konnte. Vielmehr schritt die antike Mathematik durch die Herausarbeitung der Methode der sog. geometrischen Algebra voran. Die Lösung algebraischer Probleme — z. B. die von algebraischen Gleichungen — wird dann durch geometrische Konstruktion gefunden.

Damit blieb vom Umfang her der Begriff der Zahl auf den der natürlichen Zahl >1 beschränkt. Brüche traten als Verhältnisse von Zahlen auf, wurden aber nicht selbst als „Zahlen" empfunden.

Auch auf geometrischem Wege, also mit den Methoden der geometrischen Algebra, lieferte THEAITETOS (etwa 410—368 v. u. Z.) eine Systematisierung der quadratischen Irrationalitäten (also von Strecken!) und EUDOXOS von Knidos (etwa 408— etwa 355 v. u. Z.) ordnete die Irrationalitäten unter dem allgemeinen Begriff der Größe in das System der antiken Mathematik ein.

Erst in hellenistischer Zeit, vor allem bei ARCHIMEDES (etwa 287—212 v. u. Z.), verstärkte sich das Gefühl, daß inkommensurable Größen auch einen Zahlenwert haben und Zahlen gleichgestellt werden können. ARCHIMEDES formuliert ganz einwandfrei, irrationale Größenverhältnisse können „zwischen rationale Verhältnisse ein geschlossen" werden. Ein Beispiel findet sich in seiner „Kreismessung": Dort schließt ARCHIMEDES den Wert von π, wenn wir uns modern ausdrücken, zwischen den Grenzen $3\frac{10}{71}$ und $3\frac{10}{70}$ ein. Doch zu einer anderen als bei EUKLID auftretenden expliziten Definition von Zahl ist es auch bei ihm nicht gekommen, nicht einmal bei EUTOKIOS (um 600 u. Z.) ganz am Ausgang der antiken Tradition, der immerhin von „ganzer Zahl" spricht, möglicherweise im Unterschied von Zahlen, die demnach auch als nichtganz vorgestellt werden konnten.

Der strengen, wenn auch enggefaßten Genauigkeit des Begriffes Zahl stand jedoch auch in der Antike ein ausgedehnter Gebrauch von Zahlen gegenüber. Doch war es unter den Bedingungen der Sklavenhaltergesellschaft, die alle produktive Arbeit diskreditierte, zu einer tiefgreifenden Trennung zwischen der wissenschaftlichen Mathematik der Freien und den mathematischen Methoden der Praxis gekommen. PLATON eiferte gegen jede Form der Anwendung der Mathematik, gegen jene, die Mathematik „um des Kaufens und Verkaufens willen wie Handelsleute und Krämer betreiben" ([26], S. 95).

Die Trennung zwischen „offizieller" Mathematik und der Mathematik der Praxis durchzog auch das Rechnen. Entsprechend unterschied man peinlich genau zwischen der (edlen) Arithmetik und der (inferioren) Logistik.

In der griechischen Antike waren zwei Zahlensysteme in Gebrauch, ein älteres, das attische oder herodianische Zahlensystem, und ein jüngeres, das sog. milesische Zahlensystem.

Das attische Zahlensystem diente vorwiegend zum kaufmännischen Rechnen, zur Fixierung von Geld- und Warenangaben sowie zur Bezeichnung der Spalten auf dem Abacus. Es war aus einem durch ein Fünfersystem überlagerten Dezimalsystem hervorgegangen. Die dezimalen Stufen 10, 100, 1000 und 10000 wurden durch die Anfangsbuchstaben des griechischen Zahlwortes bezeichnet, also bedeutete

Δ = 10 von griechisch ΔEKA,
H = 100 von griechisch HEKATON,
X = 1000 von griechisch XIΛIOI,
M = 10000 von griechisch MYPIOI.

Die Einer wurden durch Striche bezeichnet. Die Bündelung zu fünf wurde mit dem Anfangsbuchstaben Π von griechisch ΠENTE, fünf, vorgenommen, wobei die alte Schreibweise Γ von Π Verwendung fand. Also bedeutete

$\overline{|\Delta|} = 50$, $\overline{|H|} = 500$,
$\overline{|X|} = 5000$, $\overline{|M|} = 50000$.

Zum Rechnen war das attische Zahlensystem denkbar ungeeignet. Im wissenschaftlichen Zusammenhang benutzte man vielmehr das milesische Zahlensystem; z. B. rechneten Archimedes und Diophantos (um 250 u. Z.) milesisch. Für schwierige und umfangreiche Rechnungen stand überdies das weitaus bequemere babylonische Sexagesimalsystem zur Verfügung.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Einer	A	B	Γ	Δ	E	F	Z	H	Θ
	α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	ϑ
Zehner	I	K	Λ	M	N	Ξ	O	Π	Q
	ι	$\varkappa$	λ	μ	ν	ξ	o	π	ς
Hunderter	P	Σ	T	Y	Φ	X	Ψ	Ω	$\curlyvee$
	ϱ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	$\curlyvee$
Tausender	,a	,β	,γ	,δ	,ε	,ς	,ζ	,η	,ϑ

Abb. 6. Milesisches Zahlensystem

Im milesischen Zahlensystem (Abb. 6) wurden 24 griechischen und 3 semitischen Buchstaben der Reihe nach die Zahlenwerte 1, 2, ..., 9; 10, 20, ..., 90; 100, 200, ..., 900 zugeordnet. Höhere Stellenwerte der „Ziffern" wurden u. a. durch Vorsetzen eines kleinen Striches angedeutet. Um der Verwechslung mit den Buchstaben in Wörtern zu begegnen, wurde etwa die ganze Zahl überstrichen; doch gab es noch

а	в	г	д	є	ѕ	з	и	ѳ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
і	к	л	м	н	ѯ	о	п	ч
10	20	30	40	50	60	70	80	90
р	с	т	у	ф	х	ѱ	ѡ	ц
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Abb. 7. Altslawisches Zahlensystem. Die Tilde unterscheidet den Zahlenwert vom gleichgeschriebenen Buchstaben in Wörtern

andere Bezeichnungsweisen. Einzelheiten würden hier zu weit führen. Doch sei des allgemeinen kulturhistorischen Interesses wegen vermerkt, daß das römische Zahlensystem, welches vom Typ her dem attischen sehr nahe steht, und das slawische Zahlensystem (Abb. 7), welches, wiederum als Typ, dem milesischen Zahlensystem eng verwandt ist, noch bis in die Neuzeit, bis ins 15. und 16. Jahrhundert, in Gebrauch waren.

2. Die Ausdehnung der Zahlbereiche im Feudalismus und Frühkapitalismus

Auf der Erde haben sich heute fast allgemein die indisch-arabischen Ziffern und das dezimale Positionssystem durchgesetzt. Die Ursprünge unseres heutigen Zahlensystems reichen weit zurück, doch ist der Entstehungsprozeß noch nicht in allen Einzelheiten geklärt.

Die altindische Zählweise war seit alters her, trotz einiger Reste eines Vierersystems, dezimal aufgebaut. Das Zahlsystem wurde, in enger Verbindung zur herrschenden Religion, dem Buddhismus, weit ausgeführt und besaß schon im 3. Jahrhundert v. u. Z. Zahlworte, die zur Bezeichnung der Zahl 10^{421} ausreichten!

Zwei Zahlenschreibweisen waren in Gebrauch; eine von ihnen mit den sog. Brahmiziffern war weit verbreitet und bildete den historischen Ausgangspunkt unserer jetzigen Ziffernschreibweise (Abb. 8). Viele Inschriften in Brahmiziffern sind aus dem 3. Jahrhundert v. u. Z. erhalten geblieben. Einige mit Sicherheit verbürgte Zahlenangaben in Positionsschreibweise stammen aus dem 6. Jahrhundert. Die älteste in Indien selbst erhaltene Inschrift, in der die Null auftritt, stammt von Gualior und wurde 876 verfaßt (Abb. 9); doch gibt es Nachrichten aus China, Indonesien und Kambodscha über die zeitlich frühere Verwendung einer Null nach indischem Vorbild.

Im übrigen ist die Herkunft des Zeichens für die Null, eines Punktes oder eines kleinen Kreises, noch umstritten. Es ist unklar, ob die indischen Mathematiker die „Null" selbst „erfunden" haben und ob und wieweit babylonische Einflüsse mitgewirkt haben Doch bleibt die welthistorische Leistung der frühen indischen Mathematik unbestritten; alle Momente eines dezimalen Positionssystems mit Einschluß der Ziffernschreibweise konsequent durchgebildet zu haben. Das sanskritische Wort „sunja" für „das Leere" war jedenfalls seit dem 5. Jahrhundert in Gebrauch; im Arabischen wurde daraus später al-sifr, daraus entstand schließlich das Wort Ziffer (deutsch) oder цифра (russisch) oder chiffre (französisch) usw.

Die ersten Nachrichten über das neue indische Zahlensystem drangen bereits im 7. Jahrhundert längs der Karawanenwege nach dem Westen vor. Im Jahre 662 schrieb ein syrischer Gelehrter von den Indern und „ihrer Zahlenschreibweise, die über jedes Lob erhaben ist" ([15], S. 107). Am Ende des 8. Jahrhunderts lernte man

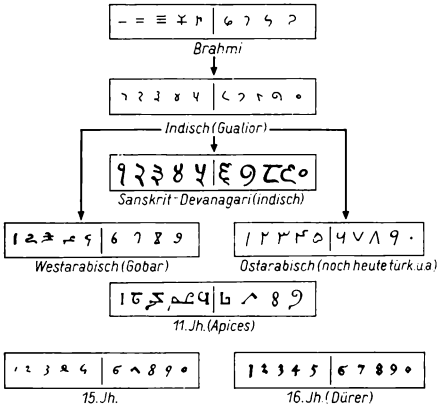


Abb. 8. Stammbaum unserer heutigen Zahlzeichen

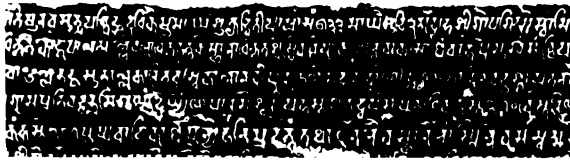


Abb. 9. Wandinschrift in Gualior

die indischen Ziffern in Bagdad, dem kulturellen und wissenschaftlichen Zentrum des mittlerweile entstandenen arabischen Weltreiches, kennen. Die arabischen Mathematiker erkannten sehr rasch die Vorteile der neuen Zahlenschreibweise. Bereits der bedeutende Mathematiker AL-HWÂRAZMÎ (etwa 780—etwa 850) schrieb eine ausführliche Erläuterung zum Gebrauch der indischen Ziffern und des „kleinen Kreises ähnlich dem Buchstaben o".

Über die damals von den Arabern teilweise besetzte Pyrenäenhalbinsel wurden die christlichen Mönche im 11. Jahrhundert erstmals mit den indischen Ziffern bekannt, und zwar mit einer inzwischen entstandenen Modifikation der Schreibweise, die im westarabischen Raum verwendet wurde, den sog. Gobar-Ziffern. Doch verstand man das Wesen der Ziffern anfangs nicht, verwendete sie vielmehr ganz sinnlos als Beschriftung der Rechensteine des Abacus, als sog. Apices. Erst rund zweihundert Jahre

später fanden die indisch-arabischen Ziffern wenigstens in Übersetzungen aus dem Arabischen eine sachgemäße Interpretation. Doch hat es noch bis ins 15. und 16. Jahrhundert gedauert, ehe sich die indisch-arabischen Ziffern, zusammen mit dem schriftlichen Rechnen, gegen die römischen Ziffern und das Rechnen auf dem Abacus durchsetzen konnten. Es waren die Rechenmeister und Kaufleute, also die Vertreter des Frühkapitalismus, die dem Neuen gegen Widerstände aus reaktionär-kirchlichen Kreisen und gegen Aberglauben und Unverständnis zum Sieg verhalfen (Abb. 10).



Abb. 10. Sieg des Ziffernrechnens über das Abacus-Rechnen. Zeitgenössische Darstellung vom Jahre 1504. PYTHAGORAS, der damals als Erfinder des Abacus-Rechnens galt, sitzt griesgrämig noch beim Rechnen, während BOETHIUS (links), der angebliche Erfinder des schriftlichen Rechnens mit indischen Ziffern, bereits fertig ist. Die Göttin Arithmetica im Hintergrund beaufsichtigt den Wettbewerb

Die Schreibweise der Ziffern hat dabei natürlich im Laufe der vielen hundert Jahre und bei dem weiten Weg über viele Völker hinweg manche Änderung erfahren; im ganzen aber ist sie erstaunlich getreu überliefert worden, wenn man dies etwa mit Schriftzeichen vergleicht.

Zu den Aspekten eines vollentwickelten Positionssystems, das die Menschheit der indischen Mathematik verdankt, gehört auch der völlig korrekte Umgang mit der Zahl Null und mit negativen ganzen Zahlen. Aber auch die frühe chinesische Mathematik kannte, zu Beginn unserer Zeitrechnung, negative Zahlen.

Die positiven Zahlen nannte man in Indien dhana oder sva (Eigentum), die negativen rina oder kšaya (Verminderung, Schuld). Der bedeutende indische Mathematiker BRAHMAGUPTA (*598) erläuterte Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von positiven und negativen Zahlen, z. B. heißt es: „Die Summe zweier positiver Zahlen ist positiv, die zweier negativer Zahlen negativ" ([15], S. 125). Mit quadratischen Irrationalitäten hat man sich in der indischen Mathematik ebenfalls ausführlich beschäftigt, aber nur im Hinblick auf die numerischen Verfahren zur Berechnung ihrer (Näherungs)Werte. Zur Unterordnung der Irrationalitäten unter den Begriff „Zahl" ist man jedoch nicht vorgestoßen.

Diese tiefe Einsicht wurde vielmehr erst von arabischen Mathematikern erzielt. In kritischer Auseinandersetzung mit den Auffassungen der griechisch-hellenistischen Mathematik entwickelten arabische Mathematiker eine eigene Theorie und dehnten den Begriff der Zahl auf die Menge der positiven reellen Zahlen aus. AL-HAYYAM (1048—1131) gehört zu den herausragenden Anhängern dieser Ansicht, die jedoch von anderen wieder bestritten wurde. Die weitreichenden Ergebnisse in der ostarabischen Mathematik zur Theorie der irrationalen Zahlen wurden in Europa erst im 16./17. Jahrhundert bekannt, als die Entwicklung der numerischen Methoden dort ebenfalls zu einer Erweiterung der Zahlenbereiche gedrängt hatte.

Mit der Entwicklung des Frühkapitalismus in Europa während des 15. und 16. Jahrhunderts und der damit verbundenen Ablösung der Naturalwirtschaft durch die Geldwirtschaft stieg das allgemeine Bedürfnis sprunghaft an, das Rechnen zu erlernen. Sogenannte Rechenmeister übernahmen auf eigene Kosten oder im Auftrage der Stadtverwaltungen diese Bildungsaufgabe, überall, wo sich der Frühkapitalismus auszubreiten begonnen hatte. Von den deutschen Rechenmeistern ist auf Grund seiner vorzüglichen Lehrbücher ADAM RIES (1492—1559) am bekanntesten geworden.

Verständlicherweise konnten im Zusammenhang mit dem kaufmännischen Rechnen die negativen Zahlen als „Schulden" eine einleuchtende Erklärung finden. Eine negative Lösung eines Gleichungssystems, die wirklich als Lösung eines mathematischen Problems anerkannt wird, trat in Europa zuerst bei LEONARDO FIBONACCI von Pisa (etwa 1180—etwa 1250) auf, dem Leiter einer italienischen Handelsniederlassung in Nordafrika. LEONARDO behandelte die Aufgabe der Verteilung einer gefundenen Geldsumme unter vier Personen, die ihrerseits schon gewisse Geldbeträge besitzen. Dann fährt er fort: „Ich werde zeigen, daß diese Aufgabe unlösbar ist, wenn nicht zugestanden wird, daß der erste Partner Schulden hat" ([12], S. 53). Doch hat sich — bei ständig zunehmendem Gebrauch — die Anerkennung der negativen Zahlen als vollwertige Zahlen lange hingezogen, noch RENÉ DESCARTES (1596—1650) spricht bei negativen Gleichungslösungen von „falschen" Lösungen.

Ähnlich umstritten war die Frage, ob „irrationale Größen" echte Zahlen sind. Wohl beherrschte man schon im 15. Jahrhundert sehr gut numerische Verfahren des Radizierens, aber sind die Wurzeln Zahlen? Beispielsweise stellte M. STIFEL (etwa 1487—1567), einer der führenden Vertreter der „Coß", 1544 die für die damalige Zeit bewundernswert scharfsinnige Überlegung an: „Mit Recht wird bei den irrationalen

Zahlen darüber disputiert, ob sie wahre Zahlen sind oder nur fingierte. Denn bei Beweisen an geometrischen Figuren haben die irrationalen Zahlen noch Erfolg, wo uns die rationalen im Stich lassen, und sie beweisen genau das, was die rationalen Zahlen nicht beweisen konnten, jedenfalls mit den Beweismitteln, die sie uns bieten. Wir werden also veranlaßt, ja gezwungen, zuzugeben, daß sie in Wahrheit existieren, nämlich auf Grund ihrer Wirkungen, die wir als wirklich, gewiß und feststehend empfinden.

Aber andere Gründe veranlassen uns zu der entgegengesetzten Behauptung, daß wir nämlich bestreiten müssen, daß die irrationalen Zahlen Zahlen sind. Nämlich wenn wir versuchen, sie der Zählung zu unterwerfen und sie mit rationalen Zahlen in ein Verhältnis zu setzen, dann finden wir, daß sie uns fortwährend entweichen, so daß keine von ihnen sich genau erfassen läßt. . . . Es kann aber nicht etwas eine wahre Zahl genannt werden, bei dem es keine Genauigkeit gibt und was zu wahren Zahlen kein bekanntes Verhältnis hat. So wie eine unendliche Zahl keine Zahl ist, so ist eine irrationale Zahl keine wahre Zahl, weil sie sozusagen unter einem Nebel der Unendlichkeit verborgen ist . . ." ([12], S. 68/69).

Das Problem, ob also irrationale Größen zu den Zahlen zu rechnen seien, wurde positiv entschieden mit der Herausarbeitung der Methode der analytischen Geometrie. R. DESCARTES hatte — zu Beginn seiner Abhandlung „La géometrie" von 1637 — gelehrt, daß man *jeder* Strecke eine Zahl zuordnen soll. Da die Rechenoperationen der Addition, der Subtraktion, der Multiplikation, der Division und des Quadratwurzelziehens in geometrischen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal ausführbar sind, also wiederum Strecken ergeben, kann man auch irrationale Größen mit demselben Recht als Zahl interpretieren, denn — wie J. WALLIS (1616—1703) zur Mitte des 17. Jahrhunderts argumentiert — „diese (DESCARTES, F. VAN SCHOOTEN und andere, Wg.) haben geometrische Konstruktionen den arithmetischen Operationen angeglichen und dabei die Einheit nicht als Punkt angesehen, sondern als eine beliebig angenommene Strecke, und die übrigen Zahlen kennzeichnen sie dann als andere Strecken, die zu der angenommenen Strecke das gleiche Verhältnis haben wie die in Rede stehenden Zahlen zur Einheit" ([12], S. 71).

Ähnlich äußerte sich auch G. W. LEIBNIZ (1646—1716). Bei I. NEWTON heißt es schließlich endgültig: „Unter Zahl verstehen wir nicht sowohl eine Menge von Einheiten, sondern vielmehr das abstrakte Verhältnis irgendeiner Größe zu einer anderen Größe derselben Gattung, die als Einheit angenommen wird. Sie ist von dreifacher Art: ganz, gebrochen und irrational; ganz, wenn die Einheit sie mißt; gebrochen, wenn ein Teil der Einheit, dessen Vielfaches die Einheit ist, sie mißt; irrational, wenn die Einheit mir ihr inkommensurabel ist" (lateinisch [19], S. 4, deutsch [12], S. 71/72). Eine schärfere begriffliche Definition der irrationalen Zahlen konnte erst im 19. Jahrhundert gefunden werden.

Noch mühsamer war der Weg, der den komplexen Zahlen ein endgültiges Heimatrecht in der Mathematik verschaffte. Eine erste, bewußte Konfrontation mit dem Problem der komplexen (oder imaginären) Zahlen trat bei G. CARDANO (1501—1576) in dessen „Ars magna" von 1545 auf, und zwar bei der Behandlung der Aufgabe, 10 so

in zwei Teile zu teilen, daß ihr Produkt 40 ist. CARDANO sagt, die Aufgabe sei „unmöglich". Er gibt aber Lösungen an, nämlich $5 \cdot \tilde{p} \cdot R \cdot \tilde{m} \cdot 15$ und $5 \cdot \tilde{m} \cdot R \cdot \tilde{m} \cdot 15$, wobei $\tilde{p}$, $\tilde{m}$ und R die Symbole für Plus, minus und Wurzelziehen bedeuten. Noch verwirrender wurde die Situation bei der Behandlung kubischer Gleichungen, und zwar beim sog. „casus irreducibilis", wo der Lösungsweg formal auf komplexe Lösungen führt, die Lösung aber reell ist. Der italienische Ingenieur R. BOMBELLI (1526—1573) ist diesem Problem ausführlich nachgegangen: „Ich habe noch eine andere Art von Kubikwurzeln aus zusammengesetzten Ausdrücken gefunden, die von den andern sehr verschieden ist; sie entsteht bei dem Gleichungstyp $x^3 = px + q$, wenn $\left(\frac{p}{3}\right)^3$ größer als $\left(\frac{q}{2}\right)^2$ ist." (italienisch [4], S. 30, deutsch [12], S. 59/60).

BOMBELLI gab für die dann entstehenden „sophistischen" Lösungen formal alle Rechenregeln an, die dem heutigen Rechnen mit komplexen Zahlen äquivalent sind; allerdings bemühte er sich vergeblich um eine geometrische Interpretation. S. STEVIN (1548—1620), durch den in Europa die Dezimalbrüche heimisch wurden, meinte, wenn es keine Deutung dieser „Rechenausdrücke" gibt, könnte man ganz gut auf die Beschäftigung mit ihnen verzichten. Der Ausdruck „imaginäre" (eingebildete) Zahlen geht auf DESCARTES zurück, der diese Wendung im Zusammenhang mit der von A. GIRARD (1595—1632) aufgestellten Behauptung gebrauchte, wonach eine Gleichung n-ten Grades genau n Wurzeln hat. LEIBNIZ noch sprach von den imaginären Zahlen als von „einem Wunder der Analysis, dem Monstrum der idealen Welt, fast einem Amphibium zwischen Sein und Nicht-Sein" (lateinisch [17], S. 357, deutsch [2], S. 214).

Gerade im Hinblick auf den Fundamentalsatz der Algebra, aber auch in Zusammenhang mit der Trigonometrie erhielten komplexe Zahlen zur Mitte des 18. Jahrhunderts einen festen Gebrauchswert. L. EULER führte das Symbol i ein, und man rechnete, „wie wenn $i^2 = -1$ sei". Bei EULER findet sich die für uns heute sehr unbestimmt klingende Definition: „Eine Größe heißt imaginär, wenn sie weder größer als Null, noch kleiner als Null, noch gleich Null ist. Das ist etwas Unmögliches, wie z. B. $\sqrt{-1}$ oder allgemein $a + b\sqrt{-1}$." (französisch [9], S. 79, deutsch [12], S. 66).

Gerade der Fundamentalsatz der Algebra und seine allgemeine Formulierung von der Übereinstimmung von Grad und Lösungsanzahl hielten das ständige Interesse an den komplexen Zahlen wach. Nachdem formal die Rechenregeln mit dem Symbol i festgelegt waren, wurde insbesondere nach einer geometrischen Interpretation der komplexen Zahlen gesucht. Dem norwegisch-dänischen Geodäten C. WESSEL (1745 bis 1818) gelang dies zuerst, indem er, wie er sich ausdrückte, „die Richtung von Strecken durch analytische Zeichen ausdrückte". Für den Fall zweier Dimensionen deckten sich seine Verfahren der Addition, Subtraktion, Multiplikation usw. der Strecken mit den entsprechenden geometrischen Konstruktionen bei den Rechenoperationen mit komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene.

Doch blieben WESSELS Vorstellungen damals fast ohne Wirkung. Andere Ansätze in ähnlicher Richtung stammten beispielsweise auch von dem französischen Mathematiker und glühenden Republikaner L. N. M. CARNOT (1753—1823), der eine umfassende „Geometrie der Lage" anstrebte. Den entsprechenden Beitrag lieferte jedoch erst C. F. GAUSS (1777—1855).

Der von ihm 1797 gegebene erste exakte und vollständige Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra benutzte zwar implizit, in keiner Weise jedoch explizit die Vorstellung der komplexen Zahl. Doch behielt er sich schon zu diesem Zeitpunkt eine Rechtfertigung und eine „eingehende Auseinandersetzung dieser ganzen Sache (d. i. der Verwendung komplexer Zahlen, Wg.) für eine andere Gelegenheit" ([11], S. 7) ausdrücklich vor. Er kam darauf zurück im Jahre 1831 in seiner Selbstanzeige zur „Theorie der biquadratischen Reste": „Die Versetzung der Lehre von den biquadratischen Resten in das Gebiet der complexen Zahlen könnte vielleicht manchen, der mit der Natur der imaginären Grössen weniger vertraut und in falschen Vorstellungen davon befangen ist, anstössig und unnatürlich scheinen, und die Meinung veranlassen, daß die Untersuchung dadurch gleichsam in die Luft gestellt sei, eine schwankende Haltung bekommen, und sich von der Anschaulichkeit ganz entferne. Nichts würde unbegründeter sein als eine solche Meinung. Im Gegenteil ist die Arithmetik der komplexen Zahlen der anschaulichsten Versinnlichung fähig . . ." ([10], S. 174). Dann setzt GAUSS die Prinzipien dessen auseinander, was wir heute als Darstellung der komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene bezeichnen. Zum Schluß fühlt er aus: „Wir haben geglaubt, den Freunden der Mathematik durch diese kurze Darstellung der Hauptmomente einer neuen Theorie der sogenannten imaginären Größen einen Dienst zu erweisen. Hat man diesen Gegenstand bisher aus einem falschen Gesichtspunkt betrachtet und eine geheimnisvolle Dunkelheit dabei gefunden, so ist dies grossentheils den wenig schicklichen Benennungen zuzuschreiben. Hätte man $+1$, -1, $\sqrt{-1}$ nicht positive, negative, imaginäre (oder gar unmögliche) Einheit, sondern etwa direkte, inverse, laterale Einheit genannt, so hätte von einer solchen Dunkelheit kaum die Rede sein können." ([10], S. 178).

Die überzeugenden Darlegungen und die große Autorität von GAUSS räumten bei den zeitgenössischen Mathematikern die letzten Vorbehalte gegen den Gebrauch der komplexen Zahlen aus. Eine andere Sache aber war ein logisch und begrifflich einwandfreier Aufbau des ganzen Zahlensystems. Dies fiel den Mathematikern der 19. Jahrhunderts als Aufgabe zu.

3. Verschärfung des Zahlbegriffes und Begründung des Zahlensystems im 19. und 20. Jahrhundert

Mit dem Aufkommen des Fabriksystems während der industriellen Revolution und dem stürmischen Aufschwung der Produktivkräfte bei der Erstarkung der kapitalistischen Produktionsweise nahmen in ganz Europa während des 19. Jahrhunderts auch die Naturwissenschaften und die Mathematik einen raschen Aufschwung. Auf dem Hintergrunde eines breiten gesellschaftlichen Interesses an der Mathematik und ihrer zunehmenden Leistungsfähigkeit in Wirtschaft, Technik und Wissenschaft konnten auch die Grundlagen der Mathematik einer eingehenden Erörterung unterzogen werden. Neben der Verschärfung der Grundlagen der Analysis, an der C. F. GAUSS, N. I. LOBAČEVSKIJ (1789—1857), und dann später K. WEIERSTRASS (1815 bis 1897), H. HANKEL (1839—1873) und P. G. LEJEUNE-DIRICHLET (1805—1859) mitwirkten, stand insbesondere die damit eng zusammenhängende Erklärung des Zahlbegriffes im Vordergrund, die logische Absicherung aller längst in Gebrauch befindlichen „Zahlenarten". Einer der frühesten Versuche, einen zusammenhängenden Aufbau des Zahlensystems von den natürlichen zu den reellen Zahlen rein arithmetisch vorzunehmen, stammt von dem böhmischen Mathematiker B. BOLZANO (1781—1848), jedoch blieb das noch nicht abgeschlossene Manuskript „Reine Zahlenlehre" unveröffentlicht und hat auf den Ablauf der Forschung im 19. Jahrhundert keine Wirkung ausüben können.

Noch die erste Hälfte des 19. Jahrhunderts brachte eine einwandfreie Begründung der komplexen Zahlen mittels des Begriffes der reellen Zahl. Nach einem noch nicht sehr weitreichenden gedanklichen Ansatz von CAUCHY verstand der irische Mathematiker W. R. HAMILTON (1805—1865) im Jahre 1833 die komplexen Zahlen als Paare reeller Zahlen, Addition und Multiplikation werden durch die Definitionsgleichungen

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$
$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

festgelegt. Übrigens hat erst G. FROBENIUS (1849—1917) im Jahre 1878 bewiesen, daß nur der durch die zweite Gleichung repräsentierte Ansatz auf einen kommutativen Körper führt.

Durch die Untersuchungen von HAMILTON, die schließlich in seine Studien über Quaternionen und nichtkommutative Verknüpfungen einmündeten, rückten die Verknüpfungsgesetze selbst in den Vordergrund des Interesses. Von G. BOOLE (1815—1864), A. CAYLEY (1821—1895) in Großbritannien, mit B. PEIRCE (1809 bis 1880) und seinem Sohn C. S. PEIRCE (1839—1914) in den USA, mit H. GRASSMANN (1809—1877) und H. HANKEL in Deutschland wurde hier eine Entwicklung eingeleitet, die noch am Ausgang des 19. Jahrhunderts zur Begründung der mathematischen

Logik und der axiomatischen Methode führte und dann später auch der Begründung des Zahlensystems zugute kommen sollte.

Mit der arithmetischen Definition der komplexen Zahlen war die strenge Begründung des Zahlensystems auf eine Grundlegung der Theorie der reellen Zahlen zurückgeführt worden. Logischerweise mußte der nächste historische Schritt darin bestehen, die irrationalen Zahlen mit Hilfe des (vorausgesetzten) Bereiches der rationalen Zahlen zu begründen.

Der eine Weg dahin wurde von R. DEDEKIND (1931—1916) gewiesen und von ihm selbst noch vollendet. Danach werden die irrationalen Zahlen als Schnitte im Bereich der rationalen Zahlen erzeugt. DEDEKIND hat diese Theorie im Herbst des Jahres 1858 konzipiert und sie in seinen berühmten Schriften „Stetigkeit und irrationale Zahlen" (1872) und „Was sind und was sollen die Zahlen" (1883) publiziert. Über die Motive und seine Zielstellung äußert sich DEDEKIND rückblickend so: „Ich befand mich damals (1850, Wg.). . . zum ersten Male in der Lage, die Elemente der Differentialrechnung vortragen zu müssen, und fühlte dabei empfindlicher als jemals früher den Mangel einer wirklich wissenschaftlichen Begründung der Arithmetik . . . . Für mich war damals dies Gefühl der Unbefriedigung ein so überwältigendes, daß ich den festen Entschluß faßte, so lange nachzudenken, bis ich eine rein arithmetische und völlig strenge Begründung der Prinzipien der Infinitesimalanalysis gefunden haben würde." ([7], S. 9/10) . . . „Die bisher übliche Einführung der irrationalen Zahlen knüpfte nämlich geradezu an den Begriff der extensiven Größen an — welcher aber sonst nirgends streng definiert wird — und erklärt die Zahl als das Resultat der Messung einer solchen Größe durch eine zweite gleichartige. Statt dessen fordere ich, daß die Arithmetik sich aus sich selbst heraus entwickeln soll. Daß solche Anknüpfungen an nicht arithmetische Vorstellungen die nächste Veranlassung zur Erweiterung des Zahlbegriffs gegeben haben, mag im allgemeinen zugegeben werden . . .; aber hierin liegt ganz gewiß kein Grund, diese fremdartigen Betrachtungen selbst in die Arithmetik, in die Wissenschaft von den Zahlen aufzunehmen. Sowie die negativen und gebrochenen rationalen Zahlen durch eine freie Schöpfung hergestellt, und wie die Gesetze der Rechnungen mit diesen Zahlen auf die Gesetze der Rechnungen mit ganzen positiven Zahlen zurückgeführt werden müssen und können, ebenso hat man dahin zu streben, daß auch die irrationalen Zahlen durch die rationalen Zahlen allen vollständig definiert werden." ([7], S. 17)

Auf einem anderen Wege als DEDEKIND gelangten G. CANTOR (1845—1918), der Begründer der Mengenlehre, und kurz vor und unabhängig von ihm der französische Mathematiker CH. MÉRAY (1835—1911) im Jahre 1872 zum gleichen Ziel. Im Anschluß an ausführliche, von WEIERSTRASS in seinen Vorlesungen vorgetragene Überlegungen führte CANTOR im Bereich der rationalen Zahlen „Fundamentalreihen" mit ihren Grenzwerten $\lim a_n = b$ ein. (CANTOR sagt Reihe, wo wir Folge sagen würden). Für diese Fundamentalfolgen definiert CANTOR die Gleichheit und Rechenoperationen. Da sie durch entsprechende Definitionen denselben Rechengesetzen genügen wie die rationalen Zahlen, werden sie von CANTOR auch als Zahlen bezeich-

net, auch dann, wenn der Grenzwert keine rationale Zahl ist. Diese seine Auffassung hat CANTOR dann 1883 als Teil seiner schrittmachenden größeren Publikation „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre" dargestellt und sie u. a. mit der von DEDEKIND verglichen. Er kommt zum Resultat: „Zur Definition einer irrationalen reellen Zahl gehört stets eine wohldefinierte unendliche Menge erster Mächtigkeit; hierin besteht das gemeinschaftliche aller Definitionsformen, ihr Unterschied liegt in dem Erzeugungsmoment, durch welches die Menge mit der durch sie definierten Zahl verknüpft ist und in den Bedingungen, welche die Menge zu erfüllen hat, damit sie als Grundlage für die betreffende Zahlendefinition sich eigne." ([2], S. 246)

Die von CANTOR gegebene Definition der irrationalen Zahlen ist dann von P. BACHMANN (1837—1920) im Jahre 1892 in seiner Monographie „Vorlesungen über die Theorie der Irrationalzahlen" in der Weise modifiziert worden, daß für die Fundamentalfolgen Intervallschachtelungen benutzt werden; darunter lassen sich bequem auch unendliche Dezimalbrüche verstehen. BACHMANN definiert dann: „Zwei gegeneinander convergierende Zahlenreihen bestimmen miteinander eine Zahl oder es entspreche ihnen eine Zahl." [(1], S. 8). Selbstverständlich sind alle drei Definitionen der irrationalen Zahlen miteinander äquivalent.

Der weitere historische Gang folgte nicht dem nächstliegenden logischen Erfordernis: Das Axiomensystem für die natürlichen Zahlen — bereits weitgehend formalisiert — stellte G. PEANO (1858—1932) schon 1889 auf, während die Definition der rationalen Zahlen als Paare natürlicher Zahlen durch H. WEBER (1842—1913) erst auf das Jahr 1895 zurückgeht. Bei WEBER heißt es: „Die natürlichen Zahlen bilden eine geordnete Menge; zwischen zwei aufeinander folgenden ihrer Elemente liegt kein weiteres Element. Eine solche Mannigfaltigkeit heißt eine discrete. Eine geordnete Menge von der Eigenschaft, dass zwischen je zwei Elementen immer noch andere Elemente gefunden werden, heißt dicht. Eine dichte Menge kann man bilden, wenn man die natürlichen Zahlen in Paaren zusammenfaßt, und diese Paare als Elemente einer Menge auffasst. Diese Paare sollen Brüche genannt und mit $m:n$ oder $\frac{m}{n}$ bezeichnet werden, und zwei solche Brüche $m:n$ und $m':n'$ werden einander gleich gesetzt, wenn $mn' = nm'$ ist. Faßt man alle unter einander gleichen Brüche zu einem Element zusammen, so erhält man eine Mannigfaltigkeit, die geordnet ist, wenn man noch feststellt, daß $m:n$ größer als $m':n'$ ist, wenn $mn' > nm'$ ist." ([25], S. 4/5). Damit sind die positiven rationalen Zahlen erklärt. Durch Dedekindsche Schnitte werden die positiven reellen Zahlen erzeugt; schließlich werden die negativen reellen Zahlen erklärt durch eine Art „Umkehrung" der Größenbeziehung.

Mit der Herausarbeitung der abstrakten Strukturbegriffe der Algebra an der Wende des 19. zum 20. Jahrhundert erhielt dieser Weg eine tiefere, allgemeinere algebraische Einbettung. L. KRONECKER (1823—1891) und DEDEKIND hatten den Begriff „Körper" in seiner Bedeutung für die Algebra herausgestellt, E. STEINITZ (1871—1928) gab in der berühmten zusammenfassenden Darstellung „Algebraische Theorie

der Körper" eine abstrakte Theorie der Körper. Dort wird unter anderem bewiesen, daß sich jeder Integritätsbereich in einen Körper einbetten läßt; der Übergang von den (positiven und negativen) ganzen Zahlen zu den rationalen Zahlen ist ein Spezialfall.

STEINITZ hatte an D. HILBERT (1862—1943) angeknüpft, der seinerseits im Jahre 1900 in der Abhandlung „Über den Zahlbegriff" einen axiomatischen Aufbau des Zahlensystems vorgenommen hatte. „In der Theorie des Zahlbegriffes gestaltet sich die axiomatische Methode wie folgt: Wir denken ein System von Dingen; wir nennen diese Dinge Zahlen und bezeichnen sie mit $a, b, c, \ldots$ Wir denken diese Zahlen in gewissen gegenseitigen Beziehungen, deren genaue und vollständige Beschreibung durch die folgenden Axiome geschieht". ([14], S. 181). Es folgen die bekannten sechs Axiome der Verknüpfung, die sechs Axiome der Rechnung, die vier der Anordnung und die zwei der Stetigkeit (Archimedisches Axiom und Axiom der Vollständigkeit). Dann fährt Hilbert fort: „Einige der Axiome ... sind Folgen der übrigen, und es entsteht so die Aufgabe, die logische Abhängigkeit der genannten Axiome zu erörtern. ... ([14], S. 183) In diesem Nachweis (der Widerspruchslosigkeit der aufgestellten Axiome, Wg.) erblicke ich zugleich den Beweis für die Existenz des Inbegriffes der reellen Zahlen ..." ([14], S. 184). Und an anderer Stelle drückt sich HILBERT so aus: „Die Bedenken, welche gegen die Existenz des Inbegriffs aller reellen Zahlen und unendlicher Mengen überhaupt geltend gemacht worden sind, verlieren bei der oben gekennzeichneten Auffassung jede Berechtigung: unter der Menge der reellen Zahlen haben wir uns ... zu denken ... ein System von Dingen, deren gegenseitige Berechnungen durch das obige endliche und abgeschlossene System von Axiomen ... gegeben sind, und über welche neue Aussagen nur Gültigkeit haben, falls man sie mittelst einer endlichen Anzahl von logischen Schlüssen aus jenen Axiomen ableiten kann". ([14], S. 355)

Doch zeigte die Aufdeckung der Antinomien der Mengenlehre um die Jahrhundertwende, daß — gegen die damalige Ansicht von HILBERT — doch begründete Bedenken gegen diesen Aufbau des Zahlensystems vorgebracht werden konnten. Auch der Beweis der Widerspruchsfreiheit dieses Axiomensystems erforderte gänzlich neue Überlegungen.

Unter dem Eindruck der schweren gesellschaftlichen und ideologischen Krisen der imperialistischen Staaten zu Anfang des 20. Jahrhunderts wurden die vorhandenen Grundlagenschwierigkeiten der Mathematik zu einer Art Existenzkrise der Mathematik überhaupt hochgespielt. HILBERT aber wandte sich gegen die Dramatisierung und betonte die Möglichkeit, die Schwierigkeiten zu überwinden. Sein Beitrag bestand im Aufbau einer Beweistheorie, einer mathematischen Theorie, die die Aussage kraft der Beweise von Sätzen und Theorien selbst einer mathematischen Untersuchung unterwirft. Der von HILBERT gewiesene und von seinen Schülern W. ACKERMANN (1896—1962) und J. VON NEUMANN (1903—1957) beschrittene Weg erwies sich als fruchtbar, wenn auch nicht in allen Punkten nach den ursprünglichen Plänen realisierbar, vor allem wegen des von K. GÖDEL (*1906) im Jahre 1931 erzielten Ergebnisses.

Doch können wir hier auf die sehr komplizierten mathematischen und philosophischen Fragen nicht näher eingehen.

Es reicht die Feststellung, daß heute durch die grundlegenden Arbeiten u. a. von G. GENTZEN (1909—1945) aus dem Jahre 1938, von P. BERNAYS (*1888) aus dem darauffolgenden Jahr und 1950 durch P. LORENZEN (*1915) der Beweis für die Widerspruchsfreiheit für die reine Zahlentheorie in vollem Umfang geführt werden konnte. Und da der Aufbau der genetisch gesehen höheren Zahlenarten — gebrochene Zahlen, rationale Zahlen, reelle Zahlen, komplexe Zahlen — logisch einwandfrei auf dem System der natürlichen Zahlen vorgenommen werden kann, ist der Aufbau des gesamten Zahlensystems heute abgeschlossen.

Literatur

[1] BACHMANN, P.: Vorlesungen über die Theorie der Irrationalzahlen, Leipzig 1882.
[2] BECKER, O.: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung, Freiburg/München 1954.
[3] Theorie der reellen Zahlen in Bolzanos handschriftlichem Nachlaß, Ed. K. RYCHLIK, Prag 1962.
[4] BOMBELLI, R.: L'Algebra, Ed. E. Bortolotti, Bologna 1929.
[5] BOURBAKI, N.: Elemente der Mathematik-Geschichte, Göttingen 1971 (Übersetzung aus dem Französischen).
[6] CARDANO, G.: Ars magna, Nürnberg 1545.
[7] DEDEKIND, R.: Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1872 (Nachdruck Braunschweig/Berlin 1965).
[8] DESCARTES, R.: Geometrie, Leiden 1637.
[9] EULER, L.: Recherches sur les racinesi maginaires des equations. (1749). Wiederabdruck: L. EULER: Opera omnia, Series prima, Opera mathematica, Vol. 6, Leipzig und Berlin 1921, S. 78—147.
[10] GAUSS, C. F.: Werke, Bd. 2, Göttingen 1876.
[11] Die vier Gauss'schen Beweise für die Zerlegung ganzer algebraischer Funktionen in reelle Factoren ersten oder zweiten Grades. Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Bd. 14, Leipzig 1890.
[12] GERICKE, H.: Geschichte des Zahlbegriffes, Mannheim 1970.
[13] HANKEL, H.: Theorie der complexen Zahlensysteme, Leipzig 1867.
[14] HILBERT, D.: Über den Zahlbegriff, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 8 (1900), 180—184.
[15] JUSCHKEWITSCH, A. P.: Geschichte der Mathematik im Mittelalter, Leipzig 1964 (Übersetzung aus dem Russischen).
[16] KRYSICKI, W.: Zählen und Rechnen einst und jetzt, Leipzig 1968.
[17] Leibnizens mathematische Schriften, Ed. C. I. Gerhardt, Bd. V, Halle 1858.
[18] MENNINGER, K.: Zahlwort und Ziffer, Göttingen 1958.
[19] NEWTON, I.: Arithmetica universalis, Leiden 1732.
[20] SCRIBA, C. J.: The Concept of Number, Mannheim 1968.

[21] Stevin, S.: L'arithmétique, Leiden 1685.
[22] Stifel, M.: Arithmetica integra, Nürnberg 1544.
[23] Struik, D. J.: Abriß der Geschichte der Mathematik, 5. Aufl., Berlin 1972 (Übersetzung aus dem Amerikanischen).
[24] Wallis, J.: Mathesis universalis, Oxford 1657.
[25] Weber, H.: Lehrbuch der Algebra, 1. Band, 2. Aufl., Braunschweig 1898.
[26] Wussing, H.: Mathematik in der Antike, 2. Aufl., Leipzig 1965.

Namen- und Sachverzeichnis

absoluter Betrag 75
— —, Rechengesetze 75
Ackermann, W. 163
Algorithmus, euklidischer 45, 83
Al-Hayyam 156
Al-Hwarazmi 154
Approximation, beste 47, 54
Approximationssatz 54
Archimedes 151, 152
archimedisch geordnete Menge 91
— —r Körper 105, 113
Archimedisches Axiom 24, 27, 92
Argument einer komplexen Zahl 128
attisches Zahlensystem 151
Axiom, Archimedisches 91
Axiome *siehe* Strukturgesetze

Bachmann, P. 162
Bernays, P. 164
beschränkte Menge 71
Betrag, absoluter 75
— einer komplexen Zahl 124
Boethius, A. M. S. 155
Bolzano, B. 160
Bombelli, R. 119, 158
Boole, G. 160
Brahmagupta 156
Brahmiziffern 153
Bruch 12
—, g-adischer 39
—, reduzierter 13
Bruchdarstellung 13
—, reduzierte 13
Bruchrechnung 25
Brüche, Erweitern 13
—, gleichnamige 13
—, Hauptnenner 17
—, Kürzen 13

Cantor, G. 161, 162
Cardano, G. 118, 157, 158
Carnot, L. N. M. 159
Cauchy, A. L. 160
Cauchysches Konvergenzkriterium 104
Cayley, A. 160

Darstellung gebrochener Zahlen 28
Dedekind, R. 110, 161
Dedekindscher Schnitt 110
Descartes, R. 156, 157, 158
Dezimalbruch 28, 33
—, endlicher 33
—, gemischtperiodischer 39
—, periodischer 33
—, reinperiodischer 39
Dezimalbruchdarstellung 35, 36, 37
dichte Menge 15, 91
Differenz zweier Zahlen 19, 61
Diophant von Alexandria 81, 152
diophantische Gleichung 82
Dirichlet, P. G. Lejeune 160
Diskriminante 136, 140
Divisionsalgorithmus 31
Dreiecksungleichung 75

Einheitswurzeln 131
endlicher Dezimalbruch 33
Erweitern von Brüchen 13
Erweiterungskörper, minimaler 122
Eudoxos von Knidos 150
Eukleides 150
euklidischer Algorithmus 45, 83
Euler, L. 158
Eulersche Funktion 84
Eutokios 151

Fibonacci, L. 156
Folge, Grenzwert einer 93
—, konvergente 93, 111
Formel, Moivresche 128
—n, Vietasche 134, 135
Frobenius, G. 160
Fundamentalfolge 111
Fundamentalsatz der Algebra 132
Funktion, Eulersche 84

Gauss, C. F. 159, 160
Gaußsche Zahlenebene 124
gebrochene Zahlen 12
— —. Addition 16
— —, Zahlen, Anordnung 14
— —, Darstellung 28
— —, Division 25
— —, Eigenschaften 17, 20
— —, Multiplikation 20
Gentzen, G. 164
geordneter Halbring 11
— Halbkörper 56
— Körper 67
— Ring 77
Girard, A. 158
Gleichung, diophantische 82
Gödel, K. 164
Grassmann, H. 160
Grenzwert einer Folge 93
Grundgesetze *siehe* Strukturgesetze
Gualior 153

Halbkörper, geordneter 56
Halbring, geordneter 11
— der natürlichen Zahlen 11
Hamilton, W. R. 160
Hankel, H. 160
Hauptnenner 17
Hilbert, D. 163
Hippasos von Metapont 150

Imaginärteil 122
Infimum einer Menge 73
Intervallschachtelung 93, 112
irrationale Zahl 100
irreflexible totale Ordnung 14, 90
isomorphe Einbettung 23, 65

Kettenbruch 46, 85
Körper, archimedisch geordneter 105, 113
—. geordneter 67
—, stetiger 105
—, vollständiger 112, 113
kommensurable Meßgröße 9
komplexe Zahl, Betrag 124
Kongruenzen 40
konjugiert komplexe Zahl 126, 127
konvergenge Folge 93, 102, 111
Konvergenzkriterium von Cauchy 104
Kronecker, L. 162
Kürzen von Brüchen 13

Leibniz, G. W. 157, 158
lexikographische Ordnung 91
Limeselement 112, 113
Limespunkt 93
Lobačevskij, N. O. 160
Lorenzen, P. 164

Maßeinheit 9
Maximum einer Menge 72
Medianwert 53
Menge, beschränkte 71
—, dichte 16, 91
—, Stetigkeit 89
Méray, Ch. 161
Meßgröße 9
—, kommensurable 9
milesisches Zahlensystem 152
minimaler Erweiterungskörper 122
Minimum einer Menge 72
Moivre, A. de 128
Moivresche Formel 128
Multiplikation gebrochener Zahlen 20

Näherungsbruch 47
Näherungsbrüche, Eigenschaften 49
natürliche Zahlen 9, 10
— —, ,Eigenschaften 10, 11
— —, isomorphe Einbettung 23
Neumann, J. von 163
Newton, I. 157
Nullfolge 69

obere Schranke 71
Ordnung, irreflexible totale 14, 90
—, lexikographische 91

Peano, G. 162
Peirce, B. 160
Peirce, C. S. 160
Periode eines g-adischen Bruches 39
Periodenlänge, primitive 39, 41
Polynom 132
Potenzgesetze 27, 80
Primkörper 68
Primzahlzerlegung 79
Punkte, rationale 71
Pythagoras 155

Quotient zweier Zahlen 23
Quotientengleichheit 12

Radikaldarstellung von Lösungen 145
rationale Punkte 71
— Zahlen, negative 69
— —, positive 69
— —, Primzahlzerlegung 80
Realteil 122
reduzierte Bruchdarstellung 13
—r Bruch 13
reelle Zahlen 100
Repräsentant 12
Restklassenring 79
Ries, A. 156
Ring, geordneter 77

Schnitt, Dedekindscher 110
Schnittelement 110
Schooten, F. van 157
Schranke, obere 71
—, untere 71
Steinitz, E. 162
stetiger Körper 105
Stetigkeit einer Menge 89, 91
Stetigkeitsaxiom 89
Stevin, S. 158
Stifel, M. 156
Strukturgesetze 10
Supremum einer Menge 73

Teilkörper 68
Teilnenner eines Kettenbruches 46
Thales von Milet 149
Theaitetos 150
totale Ordnung, irreflexible 14, 90

Unbestimmte 132
untere Schranke 71

Vieta, F. 134, 135
Vietasche Formeln 134, 135
vollständiger Körper 112, 113
Vorperiode eines g-adischen Bruches 39
Vorperiodenlänge, primitive 39, 41

Wallis, J. 157
Weber, H. 162
Weierstrass, K. 160
Wessel, C. 158
Wurzel, k-fache 133

Zahl, irrationale 100
—, konjugiert komplexe 126
—en, ganze 77
—en, gebrochene 12
—en, komplexe 122
—en, natürliche 9, 10
—en, negative rationale 69
—en, positive rationale 69
—en, rationale 66
—en, reelle 100
Zahlendifferenz 19
Zahlenebene, Gaußsche 124
Zahlengerade 71, 101, 102
Zahlensystem, attisches 151
—, milesisches 152
Zwischenbrüche 53