Studienbücherei

S. Brehmer · H. Apelt

Analysis

II. Differential- und Integralrechnung

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

Mathematik für Lehrer
Band 5

Herausgegeben von:
W. Engel, S. Brehmer, M. Schneider, H. Wussing

Unter Mitarbeit von:
G. Asser, J. Böhm, J. Flachsmeyer, G. Geise, T. Glocke,
K. Härtig, G. Kasdorf, O. Krötenheerdt, H. Lugowski,
P. H. Müller, G. Porath

Studienbücherei

Analysis

S. Brehmer
H. Apelt

II. Differential- und Integralrechnung

Mit 75 Abbildungen

Mit historischen Anmerkungen von H.-J. Ilgauds

Vierte Auflage

VEB Deutscher Verlag
der Wissenschaften
Berlin 1988

ISBN 3-326-00371-4

ISSN 0081-7384

Verlagslektor: Erika Arndt
Verlagshersteller: Norma Braun
Umschlaggestaltung: Rudolf Wendt

Lizenz-Nr. 206 · 435/67/88
Printed in the German Democratic Republic
Satz: VEB Druckhaus „Maxim Gorki", DDR-7400 Altenburg
Offsetdruck und buchbinderische Verarbeitung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer",
DDR-5820 Bad Langensalza
LSV 1034
Bestellnummer: 5701898
01280

Inhalt

3. Differentialrechnung

3.1. Grundregeln der Differentialrechnung

3.1.1. Differenzierbarkeit

In der historischen Entwicklung der Differentialrechnung spielte das sogenannte *Tangentenproblem* eine große Rolle. Es sei f eine in einem Intervall definierte reellwertige Funktion. Zu einem beliebigen Punkt a mit $a \in D(f)$ wählen wir eine reelle Zahl h mit $h \neq 0$, $a + h \in D(f)$ und betrachten die Verbindungsgerade der Punkte

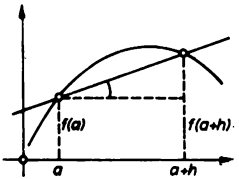

Abb. 3.1

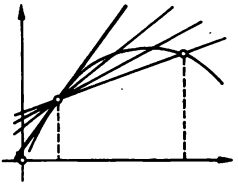

Abb. 3.2

$P(a, f(a))$, $P(a + h, f(a + h))$, die häufig als „Kurvensekante" bezeichnet wird (Abb. 3.1). Der Quotient der Zahlen $f(a + h) - f(a)$ und h ist offenbar gleich dem Tangens des Winkels, den die Sekante mit der x-Achse einschließt. Dieser Tangens wird gewöhnlich als Anstieg der Sekante bezeichnet. Wir führen nun einen Grenzübergang durch. Lassen wir h die Glieder einer Nullfolge (h_n) mit $a + h_n \in D(f)$ durchlaufen, so kann der Fall eintreten, daß die Folge der zugehörigen Sekanten einer „Grenzgeraden" zustrebt (Abb. 3.2). Ist diese von der Wahl der Nullfolge unabhängig, so wird man sie als die *Tangente* der durch die Gleichung $y = f(x)$ gegebene Kurve im Punkt mit der Abszisse $x = a$ bezeichnen.

Für die uns aus der Schulmathematik bekannten elementaren Funktionen existiert im allgemeinen diese Grenzlage, und die auf diese Weise bestimmte Tangente „be-

rührt" den Graphen der Funktion im betrachteten Punkt. Im allgemeinen verbindet man mit dem Begriff der Tangente die Vorstellung, daß die Kurve wie in Abb. 3.2 in einer Umgebung des betrachteten Punktes ganz auf einer Seite der Tangente liegt.

Es ist jedoch möglich, daß die Tangente die Kurve im betrachteten Punkt „durchsetzt" (vgl. Abb. 3.23, S. 70). Es gibt aber auch Funktionen, bei denen die Grenzlage der Sekante zwar existiert, aber kaum unseren gewohnten Vorstellungen von einer Tangente entspricht. Für die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{für} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

ist der Anstieg der Sekante durch die Punkte $P(0, f(0))$, $P(x, f(x))$ durch

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x}$$

gegeben. Er strebt gegen 0 für $x \to 0$, und folglich existiert die Grenzlage der Sekanten, nämlich die x-Achse. Diese „Tangente" hat in jeder Umgebung des Punktes $P(0, 0)$ unendlich viele Schnittpunkte mit dem Graphen der Funktion f.

Dieses Beispiel zeigt, daß man mit rein geometrischen Vorstellungen nur schwer zu einer exakten Begriffsbildung gelangen kann. Zur Einführung der Grundbegriffe der Differentialrechnung wollen wir uns daher von der geometrischen Deutung lösen. Damit haben wir auch die Möglichkeit, unsere Betrachtungen auf komplexe Funktionen auszudehnen.

Definition 1. Sind a, $a + h$ $(h \neq 0)$ Punkte des Definitionsbereichs einer reellen (oder komplexen) Funktion f, so heißt die Zahl

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

der *Differenzenquotient* von f an der Stelle a mit dem Zuwachs h.

Definition 2. Eine reelle (oder komplexe) Funktion f heißt in einem inneren Punkt a ihres Definitionsbereichs *differenzierbar*, wenn die Funktion g mit

$$g(h) := \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \qquad \big(h \neq 0, a + h \in D(f)\big)$$

an der Stelle $h = 0$ einen endlichen Grenzwert besitzt. Dieser Grenzwert wird mit $f'(a)$ bezeichnet und heißt der *Differentialquotient* oder die *Ableitung* der Funktion f an der Stelle a.

Nach dieser Definition gilt somit

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

oder, mit $x = a + h$,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{2}$$

Setzen wir

$$\varrho_f(a, x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a), \tag{3}$$

so erhalten wir durch Umstellung die *Weierstraßsche Zerlegungsformel*

$$f(x) = f(a) + (x - a) f'(a) + (x - a) \varrho_f(a, x), \tag{4}$$

wobei

$$\lim_{x \to a} \varrho_f(a, x) = 0 \tag{5}$$

wegen (2), (3) ist. Der letzte Summand in (4) kann als Produkt zweier für $x \to a$ gegen Null strebender Größen für kleine $|x - a|$ vernachlässigt werden. Der Funktionswert $f(x)$ wird demnach für kleine $|x - a|$ durch die lineare Funktion

$$f^*(x) = f(a) + (x - a) f'(a) \tag{6}$$

gut approximiert. Im reellen Fall geht die Gerade mit der Gleichung (6) wegen $f^*(a) = f(a)$ durch den Kurvenpunkt $P(a, f(a))$, und ihr Anstieg ist die Ableitung der Funktion f an der Stelle a.

Definition 3. Ist die reelle Funktion f im Punkt a differenzierbar, so heißt die Gerade durch den Punkt $P(a, f(a))$ mit dem Anstieg $f'(a)$ die *Tangente* des Graphen von f im Punkt $P(a, f(a))$.

Eine Gleichung der Tangente in der Punkt-Richtung-Form lautet

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = f'(a), \tag{7}$$

was für $y = f^*(x)$ mit (6) gleichbedeutend ist.

Die zur Tangente senkrechte Gerade durch den Kurvenpunkt heißt die *Normale* der Kurve im Punkt $P(a, f(a))$. Eine Gleichung der Normalen lautet demnach

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)} (x - a) \tag{8}$$

im Fall $f'(a) \neq 0$ bzw.

$$x = a \tag{9}$$

im Fall $f'(a) = 0$.

Das Dreieck mit den Eckpunkten $P(a, f(a))$, $P(x, f(a))$ und $P(x, f^*(x))$ heißt das *Anstiegsdreieck*. Seine Katheten haben die Längen $|x - a|$ und $|(x - a) f'(a)|$. Der Funktionswert von f an der Stelle x kann gemäß (4) in drei Summanden zerlegt werden (Abb. 3.3). Diese Summanden sind der Funktionswert an der Stelle a, dem Betrage nach die senkrechte Kathete des Anstiegsdreiecks und die Restgröße $(x - a)\, \varrho_f(a, x)$, die die Abweichung des Kurvenverlaufs von der Tangente charakterisiert.

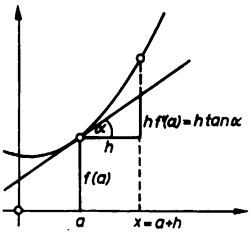

Abb. 3.3.

Der nachfolgende Satz kann auch als Definition für die Differenzierbarkeit verwendet werden.

Satz 1. *Eine reelle (oder komplexe) Funktion f ist in einem inneren Punkt a ihres Definitionsbereichs differenzierbar genau dann, wenn es eine reelle (oder komplexe) Zahl c gibt derart, daß*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - (x - a)\, c}{x - a} = 0 \tag{10}$$

ist.

Beweis. Ist f an der Stelle a differenzierbar, so ist (10) mit $c = f'(a)$ erfüllt. Ist umgekehrt (10) erfüllt, so folgt

$$c = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a),$$

und f ist an der Stelle a differenzierbar.

Wir stellen einen Zusammenhang zwischen der Stetigkeit und der Differenzierbarkeit einer Funktion f an der Stelle a her.

Satz 2. *Jede in einem inneren Punkt a ihres Definitionsbereichs differenzierbare Funktion f ist an der Stelle a stetig.*

Beweis. Aus (4), (5) folgt

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

und die Behauptung ist bewiesen.

Die Stetigkeit ist somit eine notwendige Voraussetzung für die Differenzierbarkeit. Daß sie nicht hinreichend ist, werden wir in Beispiel 2 sehen.

Bis zum 19. Jahrhundert wurde es von den Mathematikern als selbstverständlich betrachtet, daß eine „stetige" Funktion auch in „fast allen" Punkten ihres Definitionsbereiches differenzierbar ist. Der Grund für diese Auffassung ist in einer zu engen Bestimmung des Funktionsbegriffes zu sehen. Man verstand unter „Funktion" nur analytische Ausdrücke, die aus elementaren „Funktionen" mit Hilfe von Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzieren und Wurzelziehen zusammengesetzt waren. Eine solche Begriffsbestimmung, die allerdings alle wesentlichen Fälle einfacher praktischer Probleme zu behandeln erlaubte, legt natürlich auf Grund der Anschauung eine „Gleichsetzung" von Stetigkeit und Differenzierbarkeit nahe, wobei beide Begriffe selbst nur sehr vage bestimmt waren. Diese Meinung vom Verhältnis von Stetigkeit und Differenzierbarkeit war noch zu Beginn des 19. Jahrhunderts so allgemein verbreitet, daß 1806 André Marie Ampère (1775—1836) dafür sogar den Versuch eines Beweises unternahm und Sylvestre François Lacroix (1765—1843) im gleichen Jahr in seinem berühmten Lehrbuch einfach beide Begriffe als gleichbedeutend betrachtete.

Erst mit der unbedingt notwendigen Verschärfung der Grundlagen der Analysis im 19. Jahrhundert wurden auch die Begriffe „Stetigkeit" und „Differenzierbarkeit" genauer untersucht. Bernard Bolzano (1781—1848), der auch klar dargestellt hat, was „stetig" eigentlich bedeutet, verfaßte 1830 das Manuskript „Functionenlehre". Darin stellte er fest, daß zwar Stetigkeit aus Differenzierbarkeit folgt, aber nicht umgekehrt. Zur Begründung dieser Ansicht gab er eine Funktion an, die zwar überall stetig, aber in unendlich vielen Punkten des Definitionsintervalls nicht differenzierbar ist. Erst 1922 stellte K. Rychlik fest, daß die Funktion von Bolzano sogar nirgends differenzierbar ist. Bolzanos Ideen sind während seiner Zeit für die Entwicklung der Analysis nicht fruchtbar geworden, hauptsächlich deshalb, weil viele seiner Arbeiten im tschechischen Teil der Habsburger Monarchie wegen der politischen Ansichten des Verfassers nicht veröffentlicht werden durften.

Das gleiche Problem wie Bolzano griffen in der Folgezeit auch eine Reihe weiterer bedeutender Mathematiker auf. Besonders sind hier Untersuchungen von Bernhard Riemann (1826 bis 1866) aus dem Jahre 1854 und von Hermann Hankel (1839—1873) aus dem Jahre 1870 zu erwähnen. Bis 1875 war es weitgehend unbekannt geblieben, daß bereits Karl Weierstrass (1815—1897) 1861 in Vorlesungen eine Klasse von Funktionen angegeben hatte, die in ganz $\mathbb{R}$ definiert und stetig, aber in keinem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar sind. Weierstrass hatte die Funktionen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

$\left(x \in \mathbb{R}, 0 < a < 1, b \text{ ungerade ganze Zahl}, ab > 1 + \frac{3}{2}\pi\right)$ betrachtet. Zur Klasse der Weierstraßschen Funktionen gehört auch die in 2.6.2., Beispiel 4, betrachtete Funktion. Durch Gaston Darboux (1842—1917) wurden 1875 die Überlegungen des Berliner Mathematikers vereinfacht und

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((n+1)!\,\pi x)}{n!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

als eine solche Funktion, die überall stetig, aber nirgends differenzierbar ist, eingeführt.

Mit den Untersuchungen durch die genannten Mathematiker waren auch endgültig die alten anschaulichen Vorstellungen und der dazu gehörende Funktionsbegriff überwunden. Der Begriff „Funktion" nach der Definition von PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805—1859) wurde zum allgemein anerkannten Bestandteil der Analysis.

Zu jeder reellen (oder komplexen) Funktion f können wir eine neue Funktion bilden, deren Definitionsbereich die (möglicherweise leere) Menge aller Punkte a aus dem Definitionsbereich von f umfaßt, in denen f differenzierbar ist und deren Funktionswert die Ableitung von f in diesen Punkten ist.

Definition 4. Unter der *Ableitung* einer in einem offenen Intervall definierten reellen (oder in einem Gebiet definierten komplexen) Funktion f verstehen wir die durch

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (x \in D(f'))$$

definierte Funktion f', wobei $D(f')$ die Menge aller x aus $D(f)$ ist, in denen f differenzierbar ist.

Ist $D(f')$ nicht leer, so sagen wir, f sei in der Menge $D(f')$ *differenzierbar*. Ist $D(f') = D(f)$, d. h., ist die Funktion f in allen Punkten ihres Definitionsbereiches differenzierbar, so heißt f *differenzierbar*.

Ist f' eine in $D(f)$ stetige Funktion, so heißt f *stetig differenzierbar*.

Die Bezeichnung f' für die Ableitung einer Funktion f geht auf JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736—1813) zurück (1770 „Nouvelle Méthode pour résoudre les équations littéraires par le moyen des séries").

Beispiel 1. Nach 2.3.4., Beispiel 3, gilt

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a$$

für alle reellen (oder auch für alle komplexen) Zahlen a. Die Funktion $f(x) = x^2$ ($x \in \mathsf{R}$ bzw. $x \in \mathsf{C}$) ist somit in allen Punkten a ihres Definitionsbereichs differenzierbar, und es gilt stets $f'(a) = 2a$. Die Funktion $f'(x) = 2x$ ($x \in \mathsf{R}$ bzw. $x \in \mathsf{C}$) ist stetig, und folglich ist die Funktion $f(x) = x^2$ stetig differenzierbar (Abb. 3.4).

Beispiel 2. Wir betrachten die Funktion $f(x) = |x|$ ($x \in \mathsf{R}$). Bilden wir den Grenzwert dieser Funktion beim Grenzübergang $x \to a$ mit $a \neq 0$, so kommt es nur auf die Funktionswerte in einer Umgebung von a an. Wir können daher voraussetzen, daß x und a dasselbe Signum haben. Aus $|x| = x \operatorname{sgn} x$ folgt somit

$$\lim_{x \to a} \frac{|x| - |a|}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x \operatorname{sgn} x - a \operatorname{sgn} a}{x - a} = \lim_{x \to a} \operatorname{sgn} a \frac{x - a}{x - a} = \operatorname{sgn} a,$$

d. h., es ist $f'(a) = 1$ für $a > 0$ und $f'(a) = -1$ für $a < 0$ (Abb. 3.5). Für $a = 0$ ist der

Differenzenquotient gleich

$$\frac{|x| - 0}{x - 0} = \operatorname{sgn} x \qquad (x \neq 0),$$

und diese Funktion besitzt für $x \to 0$ keinen Grenzwert. Die Funktion $f(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ ist somit in der Menge $D(f') = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar. Im Punkt $x = 0$ ist sie nicht differenzierbar, obwohl sie dort stetig ist.

Der Differenzenquotient besitzt aber im Punkt 0 einseitige Grenzwerte. Wir führen daher die folgende Verallgemeinerung ein.

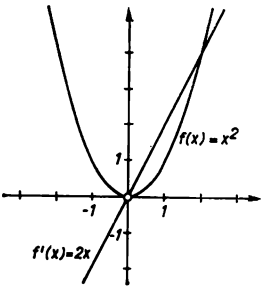

Abb. 3.4

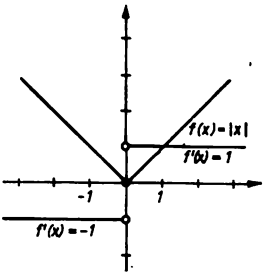

Abb. 3.5

Definition 5. Eine auf einem Intervall I definierte Funktion f heißt in einem Punkt $a \in I$ *links-* bzw. *rechtsseitig differenzierbar*, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \uparrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \downarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

die *links-* bzw. *rechtsseitige Ableitung* von f im Punkt a, existiert.

Die Funktion $f(x) = |x|$ besitzt im Punkt $x = 0$ die linksseitige Ableitung -1, die rechtsseitige Ableitung 1.

Ist der in Definition 5 betrachtete Punkt a ein Randpunkt des Intervalls I, so läßt man gewöhnlich den Zusatz „linksseitig" bzw. „rechtsseitig" fort, da keine Mißverständnisse zu befürchten sind.

Eine Übertragung des Beweisgedankens von Satz 2 zeigt, daß jede in einem Punkt a links- bzw. rechtsseitig differenzierbare Funktion dort auch links- bzw. rechtsseitig stetig ist.

Abschließend machen wir einige Bemerkungen über die in der mathematischen Literatur anzutreffenden Bezeichnungen für die Begriffsbildungen der Differentialrechnung. Im Differenzenquotienten der Funktion $y = f(x)$ wird der Zuwachs h häufig mit Δx und die Differenz der betrachteten Funktionswerte $f(a + h)$, $f(a)$ mit Δy bezeichnet. Ferner setzt man

$$\frac{dy}{dx} := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

wobei das Symbol $\frac{dy}{dx}$ (gelesen: dy nach dx) kein Quotient, sondern der Grenzwert eines Quotienten ist. Diese von Leibniz eingeführte Symbolik besitzt neben einer Reihe von Vorzügen, die sich vor allem auf das leichte Einprägen von einigen Rechenregeln der Differentialrechnung beziehen, auch erhebliche Nachteile. Zunächst wird nicht klar unterschieden, ob es sich um die Ableitung an der Stelle a (also um die Zahl $f'(a)$) oder um die Ableitung (also um die Funktion f') handelt. Will man hervorheben, daß es sich um die Ableitung an der Stelle a handelt, so hat man die etwas schwerfällige Schreibweise

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$$

anzuwenden. Der schwerwiegendste Einwand besteht aber darin, daß hierbei die Ableitung durch die Bezeichnungen der Variablen für das Argument x bzw. für den Funktionswert y der Funktion f charakterisiert wird. Bei gewissen Untersuchungen, z. B. wenn für die Variablen x, y andere Variable oder andere Funktionen substituiert werden, kann diese Bezeichnungsweise zu erheblicher Verwirrung führen. Ähnliches gilt für die ebenfalls häufig verwendeten Bezeichnungen $\frac{df}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$ oder y' für die Ableitung der Funktion $y = f(x)$. Trotzdem wird man auf diese Bezeichnungsweisen nicht ganz verzichten können, zumal sie in der Literatur weit verbreitet sind.

Auf die Einführung sogenannter „Differentiale" dx, dy wollen wir hier verzichten. Ein tieferes Verständnis und die erforderliche Sicherheit im Umgang mit diesen Objekten kann nach unserer Meinung erst auf einer höheren Stufe erzielt werden.

3.1.2. Differentiation einiger elementarer Funktionen

Mit den in 2.3. und 2.4. bereitgestellten Hilfsmitteln können wir sofort die Ableitungen einiger elementarer Funktionen berechnen.

Satz 1. *Die Ableitung einer konstanten Funktion ist die Nullfunktion.*

Beweis. Der Differenzenquotient ist stets gleich 0.

Satz 2. *Die reelle (oder komplexe) Potenzfunktion* $y = x^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *besitzt die Ableitung* $y' = nx^{n-1}$.

Beweis. Nach 1.1.1. (7) ist

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \to a} \sum_{k=1}^{n} x^{n-k} a^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} a^{k-1} = na^{n-1}$$

für alle reellen (oder komplexen) Zahlen a.

Wir formulieren die Behauptung von Satz 2 auch in der häufig angewandten Schreibweise

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \tag{1}$$

obwohl gegen sie wiederum die am Schluß von 3.1.1. erhobenen Einwände gelten.

Satz 3. *Die Ableitung der reellen (oder komplexen) Exponentialfunktion* $y = e^x$ *ist wiederum die Exponentialfunktion, d. h., es gilt*

$$(e^x)' = e^x. \tag{2}$$

Beweis. Aus dem Additionstheorem der Exponentialfunktion folgt

$$\frac{e^{a+h} - e^a}{h} = e^a \frac{e^h - 1}{h} \qquad (a, h \in \mathsf{R} \text{ (bzw. } \mathsf{C}), h \neq 0).$$

Aus 2.3.4. (6) folgt somit

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = e^a,$$

und Satz 3 ist bewiesen. In der Tatsache, daß sich die Exponentialfunktion bei der Differentiation „reproduziert", liegt eine wesentliche Ursache für die Bedeutung dieser Funktion für die Mathematik und die Naturwissenschaften.

Satz 4. *Die Logarithmusfunktion* $y = \ln x$ *zur Basis* e *(der natürliche Logarithmus) besitzt die Ableitung* $y' = \frac{1}{x}$, *d. h., es ist*

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \tag{3}$$

Beweis.[1]) Es ist

$$\frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \frac{1}{a} \frac{\ln \frac{x}{a}}{\frac{x}{a} - 1} \qquad (x, a > 0, x \neq a).$$

[1]) In 3.1.3. wird ein anderer Beweis geführt.

Aus 2.3.4. (7) folgt

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}=\frac{1}{a}\lim_{x\to a}\frac{\ln\frac{x}{a}}{\frac{x}{a}-1}=\frac{1}{a}\lim_{t\to 1}\frac{\ln t}{t-1}=\frac{1}{a}.$$

Damit ist (3) bewiesen.

Daß die Ableitung der Logarithmusfunktion eine rationale Funktion ist, wird sich für die Integration rationaler Funktionen als bedeutungsvoll erweisen.

Satz 5. *Die trigonometrischen Funktionen $y=\sin x$ bzw. $y=\cos x$ besitzen die Ableitungen $y'=\cos x$ bzw. $y'=-\sin x$, d. h., es ist*

$$(\sin x)'=\cos x, \tag{4}$$

$$(\cos x)'=-\sin x. \tag{5}$$

Beweis. Nach 2.5.1. (19) ist

$$\sin(a+h)-\sin a=2\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2},$$

und aus 2.5.1. (8) und der Stetigkeit der Kosinusfunktion folgt

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}=\lim_{h\to 0}\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos a.$$

Unter Verwendung von 2.5.1. (17) erhalten wir analog

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h}=-\lim_{h\to 0}\sin\left(a+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=-\sin a,$$

und Satz 5 ist bewiesen.

3.1.3. Differentiation von verknüpften Funktionen

Wir leiten einige Regeln für die Differentiation von verknüpften Funktionen her.

Satz 1. *Sind die Funktionen f und g in einem inneren Punkt a ihres Definitionsbereichs differenzierbar, so sind die Funktionen λf ($\lambda\in\mathbf{R}$ bzw. $\lambda\in\mathbf{C}$), $f\pm g$, $f\cdot g$ an*

der Stelle a differenzierbar, und es gilt

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a), \tag{1}$$

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a), \tag{2}$$

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)\, g(a) + f(a)\, g'(a). \tag{3}$$

Ist darüber hinaus $g(a) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}$ an der Stelle a differenzierbar, und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\, g(a) - f(a)\, g'(a)}{(g(a))^2}. \tag{4}$$

Beweis. Die Behauptungen (1), (2) ergeben sich sofort aus

$$\frac{\lambda f(a+h) - \lambda f(a)}{h} = \lambda \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

$$\frac{[f(a+h) \pm g(a+h)] - [f(a) \pm g(a)]}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \pm \frac{g(a+h) - g(a)}{h}.$$

Die Regel (3) für die Ableitung eines Produktes leiten wir her, indem wir im Zähler des Differenzenquotienten für das Produkt einen Summanden addieren und wieder subtrahieren, der eine Abspaltung des Differenzenquotienten für f bzw. für g ermöglicht. Es ist

$$\frac{f(a+h)\, g(a+h) - f(a)\, g(a)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot g(a+h) + f(a) \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h}.$$

Da g an der Stelle a differenzierbar, also auch stetig ist, liefert der Grenzübergang $h \to 0$ die Behauptung (3). Ist $g(a) \neq 0$, so können wir wegen der Stetigkeit von g an der Stelle a ein $\delta > 0$ so wählen, daß aus $|h| < \delta$ stets $g(a+h) \neq 0$ folgt. Dann ist

$$\frac{1}{h}\left(\frac{f(a+h)}{g(a+h)} - \frac{f(a)}{g(a)}\right) = \frac{f(a+h)\, g(a) - f(a)\, g(a+h)}{h g(a+h)\, g(a)}$$

$$= \frac{1}{g(a+h)\, g(a)}\left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot g(a) - f(a)\, \frac{g(a+h) - g(a)}{h}\right],$$

und der Grenzübergang $h \to 0$ ergibt die Behauptung (4).

In Verallgemeinerung von Satz 1 gelten für die Ableitungen der in einem Intervall bzw. einem Gebiet differenzierbaren Funktionen folgende Rechenregeln:

$$(\lambda f)' = \lambda f', \tag{1'}$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \tag{2'}$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg', \tag{3'}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}. \tag{4'}$$

Beispiel 1. Die Ableitung der Tangensfunktion ist

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x},$$

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{5}$$

Ganz analog erhalten wir

$$(\cot x)' = -1 - \cot^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{6}$$

Mit Hilfe der Regeln (1) und (2) sowie der Sätze 1 und 2 aus 3.1.2. können wir nun beliebige ganzrationale Funktionen, mit (4) darüber hinaus alle rationalen Funktionen in Teilintervallen des Definitionsbereichs differenzieren.

Beispiel 2. Es ist die Ableitung der Funktion

$$y = \frac{a(x+b)\,(x+c)}{x^n}$$

mit $a, b, c \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}^*$ zu bilden. Unter Verwendung von (4) ergibt sich

$$y' = \frac{[a(x+b)\,(x+c)]'\,x^n - a(x+b)\,(x+c)\,nx^{n-1}}{x^{2n}},$$

und Anwendung von (1), (3) und (2) liefert

$$y' = \frac{a[x+c+x+b]\,x^n - a(x+b)\,(x+c)\,nx^{n-1}}{x^{2n}},$$

$$y' = a\,\frac{(2-n)\,x^2 + (1-n)\,(cx+bx) - bcn}{x^{n+1}}.$$

Wir leiten nun die Regel für die *Differentiation von Umkehrfunktionen* her.

Satz 2. *Besitzt eine auf einem offenen Intervall stetige Funktion f eine Umkehrfunktion g, die an der Stelle $f(a)$ eine von 0 verschiedene Ableitung besitzt, so ist f an der*

Stelle a differenzierbar, und es ist

$$f'(a) = \frac{1}{g'(f(a))}. \tag{7}$$

Beweis. Nach der Weierstraßschen Zerlegungsformel ist

$$\begin{aligned} x - a &= g(f(x)) - g(f(a)) \\ &= (f(x) - f(a))\, g'(f(a)) + (f(x) - f(a))\, \varrho_g(f(a), f(x)). \end{aligned}$$

Der Punkt $f(a)$ ist innerer Punkt des Definitionsbereichs von g. Da $g'(f(a)) \neq 0$ ist und $\varrho_g(f(a), f(x))$ wegen der Stetigkeit von f für $x \to a$ gegen 0 strebt, ist $g'(f(a)) + \varrho_g(f(a), f(x))$ für hinreichend kleine $|x - a|$ von Null verschieden, und es folgt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{1}{g'(f(a)) + \varrho_g(f(a), f(x))} = \frac{1}{g'(f(a))},$$

womit Satz 2 bewiesen ist.

Beispiel 3. Aus (5) folgt

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)},$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2} \tag{8}$$

und ebenso

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1 + x^2} \tag{9}$$

für alle reellen x. Damit haben wir wiederum zwei nichtrationale Funktionen mit rationalen Ableitungen gefunden.

Beispiel 4. Für $|x| < 1$ ist

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}},$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{10}$$

Die Formel

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{11}$$

kann ebenfalls mit Hilfe von Satz 2 oder einfacher aus

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

(vgl. 2.5.2. (9)) abgeleitet werden.

Beispiel 5. Die Ableitung der Logarithmusfunktion kann auch mit Hilfe von (7) ermittelt werden, und zwar gilt

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}. \tag{12}$$

Wir leiten die Regel für die Differentiation zusammengesetzter Funktionen her, die häufig als *Kettenregel* bezeichnet wird.

Satz 3. *Ist die reelle (oder komplexe) Funktion g an der Stelle a und die Funktion f an der Stelle $g(a)$ differenzierbar und ist a ein innerer Punkt des Definitionsbereichs der zusammengesetzten Funktion $f \circ g$, so ist $f \circ g$ an der Stelle a differenzierbar, und es ist*

$$(f \circ g)'(a) = g'(a) \cdot f'(g(a)). \tag{13}$$

Beweis. Nach der Weierstraßschen Zerlegungsformel ist

$$f(g(x)) - f(g(a)) = (g(x) - g(a))\, f'(g(a)) + (g(x) - g(a))\, \varrho_f(g(a), g(x)).$$

Da g an der Stelle a differenzierbar, also auch stetig ist, gilt $g(x) \to g(a)$ und damit $\varrho_f(g(a), g(x)) \to 0$ für $x \to a$. Es folgt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = g'(a)\, f'(g(a)) + g'(a) \cdot 0,$$

und (13) ist bewiesen.

Die Kettenregel läßt sich unter Verwendung der Leibnizschen Symbolik sehr gut einprägen. Ist $y = g(x)$ und

$$z = f(y), \tag{14}$$

so erhalten wir die Ableitung der zusammengesetzten Funktion

$$z = f(g(x)) \tag{15}$$

nach der formalen Regel

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}, \tag{16}$$

die allerdings einiger Erläuterungen bedarf. Zunächst ist zu bemerken, daß die Variable z auf der linken Seite die zusammengesetzte Funktion (15), auf der rechten Seite dagegen die Funktion (14) symbolisiert. Ferner muß beachtet werden, daß nach Ausführung der Differentiation $\frac{dz}{dy}$ die Variable y durch $g(x)$ bzw., wenn wir eine feste Stelle a betrachten, durch $g(a)$ zu ersetzen ist. Man darf aber (16) bzw. die analog gebildete Beziehung

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y}\,\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ohne eine exakte Begründung des Rechnens mit Differentialen nicht als ausreichend für einen Beweis der Kettenregel betrachten. Dagegen ist es völlig legitim, sie als Merkregel für das Rechnen mit Differentialquotienten aufzufassen. Entsprechendes gilt für die Merkregel

$$\frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy}$$

für die Ableitung einer Umkehrfunktion.

Beispiel 6. Es sei $f(y) = \sin y$ und $g(x) = x^2 + 2x$. Dann ist $f'(y) = \cos y$, $f'\big(g(x)\big) = \cos\,(x^2 + 2x)$ und $g'(x) = 2x + 2$. Somit gilt

$$\big(\sin\,(x^2 + 2x)\big)' = \big(\cos\,(x^2 + 2x)\big)\,(2x + 2).$$

In der Leibnizschen Symbolik hätte man $z = \sin y$, $y = x^2 + 2x$,

$$\frac{dz}{dy} = \cos y = \cos\,(x^2 + 2x), \qquad \frac{dy}{dx} = 2x + 2$$

und damit

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx} = \big(\cos(x^2 + 2x)\big)\,(2x + 2)$$

zu setzen.

Beispiel 7. Für alle positiven reellen Zahlen a ist

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (x \in \mathsf{R}). \tag{17}$$

Der Beweis ergibt sich mit der Kettenregel aus $a^x = e^{x \ln a}$, indem wir $f(y) = e^y$, $g(x) = x \ln a$ setzen. Dann ist

$$f'\big(g(x)\big) = f\big(g(x)\big) = e^{x \ln a} = a^x, \qquad g'(x) = \ln a,$$

und aus (13) folgt die Behauptung.

Beispiel 8. Für alle reellen Zahlen α ist

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad (x \in \mathbb{R}, x > 0). \tag{18}$$

Mit $f(y) = e^y$, $g(x) = \alpha \ln x$ gilt $f\big(g(x)\big) = e^{\alpha \ln x} = x^\alpha$, und aus

$$f'\big(g(x)\big) = f\big(g(x)\big) = x^\alpha,$$

$$g'(x) = (\alpha \ln x)' = \frac{\alpha}{x}$$

folgt die Behauptung.

Beispiel 9. Es sei $f(y) = \ln y$ und $g(x) = x + \sqrt{x^2 + c}$. Dann ist

$$f'(y) = \frac{1}{y}, \; f'\big(g(x)\big) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + c}} \quad \text{und} \quad g'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + c}}.$$

Somit gilt

$$\Big(\ln\big(x + \sqrt{x^2 + c}\big)\Big)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + c}}.$$

Beispiel 10. Es empfiehlt sich manchmal, zur Berechnung der Ableitung einer überall positiven Funktion f den natürlichen Logarithmus von $f(x)$ zu nehmen und die so entstehende Funktion $\ln f(x)$ zu differenzieren. Es ist

$$\big(\ln f(x)\big)' = \frac{f'(x)}{f(x)}, \tag{19}$$

und man nennt die Funktion auf der rechten Seite die *logarithmische Ableitung* von $f(x)$. Wir berechnen auf diese Art die Ableitung von $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Es ist

$$\ln f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1 + x}.$$

Somit gilt

$$\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1 + x}\right].$$

Beispiel 11. Es sei $f(x) = \operatorname{arcosh} x$. Unter Verwendung von 2.5.5. (5), erhält man

$$(\operatorname{arcosh} x)' = \Big(\ln\big(x + \sqrt{x^2 - 1}\big)\Big)' = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

d. h., es ist

$$(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad (x > 1). \tag{20}$$

Beispiel 12. Wegen 2.5.5. (6) ist

$$(\operatorname{arsinh} x)' = \left(\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right)' = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

d. h., es ist

$$(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \qquad (x \in \mathsf{R}). \tag{21}$$

3.1.4. Mittelwertsätze der Differentialrechnung

Wir betrachten in diesem Abschnitt ausschließlich reelle Funktionen, die auf einem Intervall definiert sind, und beweisen zunächst einen nach Michel Rolle (1652 bis 1719) benannten Satz. Er findet sich erstmals in seinem 1690 erschienenen Werk „Traité d'algèbre". Den Beweis des Satzes lieferte er erst 1691.

Satz 1. *Ist f eine im abgeschlossenen Intervall $[\![a, b]\!]$ stetige und im offenen Intervall $]\!]a, b[\![$ differenzierbare Funktion, die an den Endpunkten des Intervalls den Wert Null annimmt, so gibt es eine Zahl ξ mit $a < \xi < b$ und*

$$f'(\xi) = 0.$$

Beweis. Nach dem Satz vom Maximum und Minimum in 2.4.2. gibt es Punkte $x_1, x_2 \in [\![a, b]\!]$ mit $f(x_1) \leqq f(x) \leqq f(x_2)$ für $a \leqq x \leqq b$.

Fall 1. Es ist $f(x_2) > 0$. Wegen $f(a) = f(b) = 0$ gilt $a < x_2 < b$, und f ist in x_2 differenzierbar. Nach Definition von x_2 ist

$$\frac{f(x_2 + h) - f(x_2)}{h} \begin{cases} \leqq 0 & \text{für} \quad h > 0, \\ \geqq 0 & \text{für} \quad h < 0. \end{cases}$$

Der Grenzübergang $h \to 0$ ($h > 0$ bzw. $h < 0$) liefert $f'(x_2) \leqq 0$ und $f'(x_2) \geqq 0$, d. h., es ist $f'(x_2) = 0$.

Fall 2. Es ist $f(x_2) = 0$. Ist auch $f(x_1) = 0$, so ist $f(x) = 0$ für alle x mit $a \leqq x \leqq b$. Andernfalls setzen wir $g(x) := -f(x)$. Dann besitzt g im Punkt x_1 ein Maximum, und wie im Fall 1 folgt $g'(x_1) = 0$ und damit $f'(x_1) = 0$.

Der Fall $f(x_2) < 0$ kann nicht eintreten, und Satz 1 ist bewiesen.

Die Voraussetzungen von Satz 1 sind natürlich stets erfüllt, wenn $f(a) = f(b) = 0$ und wenn f sogar im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ differenzierbar ist. Daß die schwächeren Voraussetzungen von Satz 1 ausreichen, kann man sich an dem nachfolgenden Beispiel anschaulich klarmachen.

Beispiel 1. Es sei $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$. Für alle x mit $x \in \,]-1, 1[$ ist

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

In den Randpunkten des Intervalls ist die Funktion nicht differenzierbar, aber sie ist im abgeschlossenen Intervall stetig. Ihre Ableitung verschwindet an der Stelle $\xi = 0$ (Abb. 3.6).

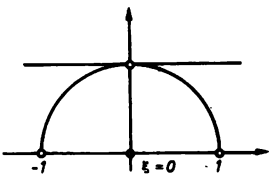

Abb. 3.6

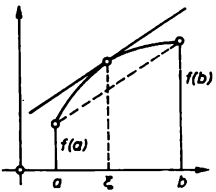

Abb. 3.7

Wir beweisen nun den *Mittelwertsatz der Differentialrechnung.*

Satz 2. *Ist f eine im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetige und im offenen Intervall $]a, b[$ differenzierbare reelle Funktion, so gibt es eine Zahl ξ mit $a < \xi < b$ und*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{1}$$

Beweis. Um den Beweis auf den Satz von Rolle zurückführen zu können, bilden wir die Gleichung $y = q(x)$ der durch die Kurvenpunkte $P(a, f(a))$, $P(b, f(b))$ gehenden Sekante (Abb. 3.7). Sie lautet in der Zweipunkteform

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Somit ist

$$q(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

$$q'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Die Funktion g mit $g(x) = f(x) - q(x)$ erfüllt alle Voraussetzungen des Satzes von ROLLE, und es gibt daher ein ξ mit $a < \xi < b$ und

$$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - q'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Damit ist Satz 2 bewiesen. Er besagt geometrisch, daß es eine zu einem inneren Punkt gehörende Tangente gibt, die zur Sekante parallel ist.

Wir geben dem Mittelwertsatz noch eine andere Fassung (Abb. 3.8).

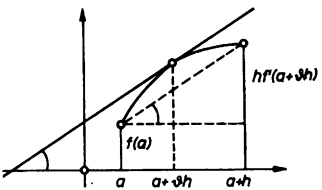

Abb. 3.8

Satz 2'. *Ist die reelle Funktion f für alle x mit $|x - a| \leqq |h|$ $(h \neq 0)$ stetig und für alle x mit $|x - a| < |h|$ differenzierbar, so gibt es ein ϑ mit $0 < \vartheta < 1$ und*

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a + \vartheta h). \tag{2}$$

Beweis. Setzen wir

$$F(t) := f(a + th) \qquad (0 \leqq t \leqq 1),$$

so ist F im abgeschlossenen Intervall $[\![0, 1]\!]$ stetig und im offenen Intervall $]\!]0, 1[\![$ differenzierbar, und nach Satz 2 gibt es ein ϑ mit $0 < \vartheta < 1$ und $F'(\vartheta) = F(1) - F(0)$. Wegen $F(1) = f(a + h)$, $F(0) = f(a)$ und $F'(t) = hf'(a + th)$ ist dies mit (2) gleichbedeutend.

Beispiel 2. Es sei $q(x) = q(0)\, e^{ax}$ (vgl. 2.1.5.). Dann ist $q'(x) = aq(0)\, e^{ax} = aq(x)$, und nach dem Mittelwertsatz gibt es zu x_1, x_2 mit $x_1 < x_2$ ein ξ mit $x_1 < \xi < x_2$ und

$$\frac{q(x_2) - q(x_1)}{x_2 - x_1} = q'(\xi) = aq(\xi).$$

Die Funktion q erfüllt also die Bedingung 2.1.5. (11).

Die Ableitung einer in einem Intervall differenzierbaren Funktion braucht nicht wieder stetig zu sein. Aber auch dann, wenn sie nicht stetig ist, kann sie keinen „Zwischenwert" auslassen, denn es gilt

Satz 3. *Ist die reelle Funktion f im Intervall $[\![a, b]\!]$ differenzierbar, so nimmt die Funktion f' in diesem Intervall jeden Wert zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ mindestens einmal an.*

Beweis. Wir setzen

$$p(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{für} \quad a < x \leqq b, \\ f'(a) & \text{für} \quad x = a, \end{cases}$$

$$q(x) := \begin{cases} \dfrac{f(b) - f(x)}{b - x} & \text{für} \quad a \leqq x < b, \\ f'(b) & \text{für} \quad x = b. \end{cases}$$

Dann sind p, q in $[\![a, b]\!]$ stetig. Es sei nun μ eine zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ liegende Zahl, wobei wir nur den Fall $\mu \neq f'(a), f'(b)$ zu betrachten brauchen. Wegen $f'(a) = p(a)$, $f'(b) = q(b)$ und $p(b) = q(a)$ liegt μ zwischen $p(a)$ und $p(b)$ oder zwischen $q(a)$ und $q(b)$. Nach dem Zwischenwertsatz 2.4.2., Satz 3, gibt es ein x mit $p(x) = \mu$ oder mit $q(x) = \mu$. Im ersten Fall ist $x \neq a$, und folglich gibt es ein ξ mit $a < \xi < x \leqq b$ und

$$\mu = p(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi).$$

Analog verläuft der Beweis im zweiten Fall, und Satz 3 ist bewiesen.

Als Anwendung des Mittelwertsatzes beweisen wir zwei wichtige Sätze.

Satz 4. *Ist die Ableitung einer auf einem Intervall differenzierbaren reellen Funktion die Nullfunktion, so ist die Funktion konstant.*

Beweis. Aus (2) folgt $f(a + h) = f(a)$ für alle $a, a + h$, die im betrachteten Intervall liegen.

Der nachfolgende Satz liefert ein hinreichendes Kriterium für die Umkehrbarkeit einer Funktion.

Satz 5. *Ist die Ableitung einer auf einem Intervall differenzierbaren Funktion von* 0 *verschieden, so ist die Funktion streng monoton und damit umkehrbar.*

Beweis. Die Funktion f' kann nicht positive und negative Werte annehmen, da sie sonst nach Satz 3 auch den Wert 0 annehmen würde. Es sei etwa stets $f'(x) > 0$. Für $h > 0$ ist dann $f(x + h) - f(x) = hf'(x + \vartheta h) > 0$, d. h., die Funktion f ist streng monoton wachsend und damit umkehrbar.

Daß die Funktion f im Fall $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend ist, erkennt man auch aus der geometrischen Deutung der Ableitung.

Wir beweisen den *verallgemeinerten Mittelwertsatz der Differentialrechnung*, der u. a. für die Berechnung von Grenzwerten von Bedeutung ist.

Satz 6. *Sind die Funktionen f, g im abgeschlossenen Intervall $[\![a, b]\!]$ stetig, im offenen Intervall $]\!]a, b[\![$ differenzierbar und ist $g'(x) \neq 0$ für $a < x < b$, so gibt es ein ξ mit $a < \xi < b$ und*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{3}$$

Beweis. Wäre $g(a) = g(b)$, so gäbe es entgegen unserer Voraussetzung ein ξ mit $g'(\xi) = 0$. Somit ist $g(a) \neq g(b)$. Wir setzen

$$p(x) := f(x) - \lambda g(x)$$

und bestimmen λ so, daß $p(a) = p(b)$ ist. Aus

$$f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b)$$

folgt

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Die Funktion p erfüllt die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes, und wegen $p(a) = p(b)$ gibt es ein ξ mit $a < \xi < b$ und

$$0 = p'(\xi) = f'(\xi) - \lambda g'(\xi),$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \lambda = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

und Satz 6 ist bewiesen.

3.1.5. Glatte Kurven

Wir betrachten eine Funktion, die jeder reellen Zahl t aus einem Intervall I eindeutig einen Punkt $\boldsymbol{x}(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_p(t)\big)$ des Raumes R_p zuordnet. Die Funktion $\boldsymbol{x}$ sei hierbei als stetig vorausgesetzt, so daß auch die Koordinatenfunktionen x_i $(i = 1, \ldots, p)$ im Intervall I stetig sind. Deuten wir I als ein Zeitintervall und ist $p = 2$ bzw. $p = 3$, so können wir die Abbildung

$$t \mapsto \boldsymbol{x}(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_p(t)\big) \qquad (t \in I) \tag{1}$$

als Bahn eines bewegten Massenpunktes in der Ebene ($p = 2$) bzw. im Raum ($p = 3$) in Abhängigkeit von der Zeit t auffassen. Wir beschränken uns zunächst auf die Fälle $p = 2, 3$ und gehen von (1) zu der Schreibweise

$$\mathfrak{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big) \qquad (t \in I)$$

bzw.

$$\mathfrak{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) \qquad (t \in I)$$

über.

Beispiel 1. Es sei

$$\mathfrak{r}(t) = (\cosh t, \sinh t) \qquad (t \in \mathsf{R}). \tag{2}$$

Wegen $\cosh t > 0$, $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ liegen die Punkte $\mathfrak{r}(t)$ auf dem rechten Ast der Hyperbel mit der Gleichung $x^2 - y^2 = 1$ (Abb. 3.9), und jeder Punkt dieses Hyperbelastes wird für geeignetes t tatsächlich angenommen.

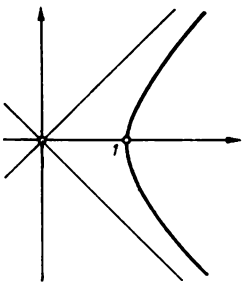

Abb. 3.9

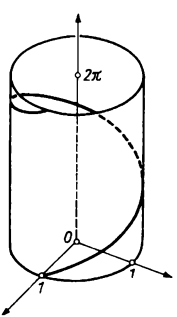

Abb. 3.10

Beispiel 2. Es sei

$$\mathfrak{r}(t) = (\cos t, \sin t, t) \qquad (t \in \mathsf{R}). \tag{3}$$

Wir betrachten die Projektion $\mathfrak{r}^*(t) = (\cos t, \sin t)$ der Raumpunkte $\mathfrak{r}(t)$ in die x, y-Ebene. Wegen $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ liegen die Punkte $\mathfrak{r}^*(t)$ auf dem Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$, und $\mathfrak{r}^*(t)$ führt einen vollen Umlauf aus, wenn t ein Intervall der Länge 2π durchläuft. Die Bewegung des Punktes $\mathfrak{r}(t)$ in Abhängigkeit von t ergibt sich durch Überlagerung der Rotationsbewegung von $\mathfrak{r}^*(t)$ mit einer gleichförmigen Bewegung in Richtung der z-Achse. Somit durchläuft $\mathfrak{r}(t)$ eine *Schraubenlinie* (Abb. 3.10).

Beispiel 3. Ist f eine im Intervall I definierte reelle stetige Funktion, so bilden die Punkte

$$\mathfrak{r}(t) = \big(t, f(t)\big) \qquad (t \in I) \tag{4}$$

den Graphen von f.

Beispiel 4. Es sei $a, b > 0$ und

$$\mathfrak{r}(t) = (a \cos t, b \sin t) \qquad (-\pi \leqq t \leqq \pi). \tag{5}$$

Wie aus Abb. 3.11 hervorgeht, durchläuft $\mathfrak{r}(t)$ die Punkte einer Ellipse mit den Halbachsen a und b.

In den ersten drei Beispielen ist die Funktion $t \mapsto \mathfrak{r}(t)$ umkehrbar eindeutig. In Beispiel 4 ist dagegen $\mathfrak{r}(\pi) = \mathfrak{r}(-\pi)$, während die Abbildung für $-\pi < t \leqq \pi$ umkehrbar eindeutig ist. In den ersten drei Fällen sprechen wir von einer (einfachen) Kurve, im vierten Fall von einer (einfach) geschlossenen Kurve und geben allgemein die

Definition 1. Eine Punktmenge C des Raumes R_p heißt eine (einfache) *Kurve*, wenn es eine stetige Funktion $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t)$ gibt, die ein Intervall I reeller Zahlen um-

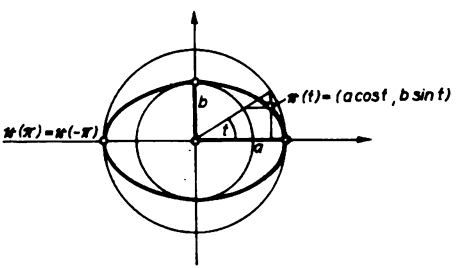

Abb. 3.11.

kehrbar eindeutig auf die Menge C abbildet. Ist I beschränkt und abgeschlossen, so heißt C auch ein *Kurvenstück*.

Ist $I = [\![a, b]\!]$, bildet die Funktion das Intervall $]\!]a, b[\![$ umkehrbar eindeutig auf C ab und ist $\mathfrak{r}(a) = \mathfrak{r}(b)$, so heißt C eine (einfach) *geschlossene Kurve*.

Der Begriff der Kurve war ursprünglich von Camille Jordan (1838—1922) wie folgt definiert worden: Sind $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(t \in I)$ stetige Funktionen, so heißt die Menge C der Punkte $(\varphi(t), \psi(t))$ mit $t \in I$ eine Kurve. Er forderte also nicht die umkehrbare Eindeutigkeit der Abbildung $t \mapsto (\varphi(t), \psi(t))$. Von Giuseppe Peano (1858—1932) wurde 1890 gezeigt, daß diese Definition zu allgemein ist. Er konstruierte im Intervall $[\![0, 1]\!]$ stetige Funktionen φ, ψ für die die Menge $C = \{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in [\![0, 1]\!]\}$ gleich dem Einheitsquadrat der Ebene ist. Dieses unseren anschaulichen Vorstellungen vom Kurvenbegriff widersprechende Ergebnis gab Anlaß zu der obigen engeren Definition, die erstmalig von Jordan in „Cours d'analyse III" gegeben wurde.

Die Funktion $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t)$ in Definition 1 heißt eine *Parameterdarstellung* der Kurve C und t der Kurvenparameter. In den physikalischen Anwendungen ist t gewöhnlich die Zeit. Mit dieser Interpretation können wir den Differentiationsprozeß anders

deuten. Wir betrachten einen festen Parameterwert t_0 und eine gegen t_0 strebende Folge von Parameterwerten $t_1, t_2, \ldots$. Die Differenz $\mathfrak{r}(t_n) - \mathfrak{r}(t_0)$ stellt dann angenähert die Wegdifferenz dar, die der bewegte Massenpunkt $\mathfrak{r}(t)$ im Zeitintervall von t_0 bis t_n zurücklegt (Abb. 3.12). Von der elementaren Definition der Geschwindigkeit gleichförmig bewegter Massenpunkte ausgehend, bezeichnen wir den Quotienten

$$\frac{\mathfrak{r}(t_n) - \mathfrak{r}(t_0)}{t_n - t_0} = \left(\frac{x(t_n) - x(t_0)}{t_n - t_0}, \frac{y(t_n) - y(t_0)}{t_n - t_0}, \frac{z(t_n) - z(t_0)}{t_n - t_0}\right) \tag{6}$$

als *mittlere Geschwindigkeit* von $\mathfrak{r}(t)$ im Zeitintervall von t_0 bis t_n (Abb. 3.13). Besitzt (6) für jede Folge (t_n) mit $t_n \to t_0$ einen Grenzwert, so heißt dieser die *Geschwindigkeit*

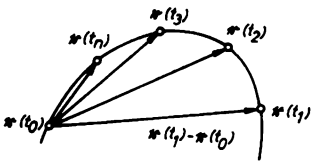

Abb. 3.12

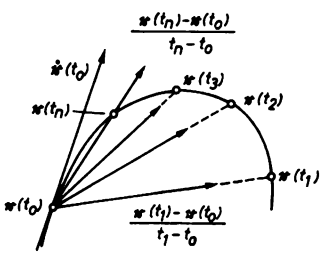

Abb. 3.13

$\dot{\mathfrak{r}}(t_0)$ des durch $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t)$ gegebenen bewegten Massenpunktes zur Zeit $t = t_0$. Die Berechnung der Geschwindigkeit ergibt sich wegen (6) durch koordinatenweise Differentiation, wobei wir die Ableitungen durch einen Punkt kennzeichnen. In den Beispielen (2) bis (5) gilt

$$\dot{\mathfrak{r}}(t) = (\sinh t, \cosh t), \tag{2'}$$

$$\dot{\mathfrak{r}}(t) = (-\sin t, \cos t, 1), \tag{3'}$$

$$\dot{\mathfrak{r}}(t) = \big(1, f'(t)\big), \tag{4'}$$

$$\dot{\mathfrak{r}}(t) = (-a \sin t, b \cos t). \tag{5'}$$

Ist $\dot{\mathfrak{r}}(t) \neq 0$, so können wir im Kurvenpunkt $\mathfrak{r}(t_0)$ die Gerade mit dem Richtungsvektor $\dot{\mathfrak{r}}(t_0)$ antragen. Entsprechend der geometrischen Deutung (Abb. 3.13) heißt sie die *Tangente* der Kurve im Punkt $\mathfrak{r}(t_0)$, und $\dot{\mathfrak{r}}(t_0)$ ist ein Vektor, der die Richtung der Tangente im Kurvenpunkt angibt.

Definition 2. Eine Kurve C heißt *glatt*, wenn sie eine Parameterdarstellung $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t)$ $(t \in I)$ mit stetig differenzierbaren Koordinatenfunktionen und mit $\dot{\mathfrak{r}}(t) \neq 0$

für alle $t \in I$ besitzt. Eine glatte Kurve $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t)$ $(t \in I)$ besitzt somit in allen ihren Punkten eine Tangente, und $\dot{\mathfrak{r}}(t)$ ist ein *Tangentenvektor*, d. h. ein Richtungsvektor der Tangente im Punkt $\mathfrak{r}(t)$. Der Einheitsvektor

$$\mathfrak{t}(t) = \frac{\dot{\mathfrak{r}}(t)}{|\dot{\mathfrak{r}}(t)|} \tag{7}$$

heißt der *Tangenteneinheitsvektor* der Kurve im Punkt $\mathfrak{r}(t)$.

Im Fall einer Funktion

$$\boldsymbol{x} = \big(x_1(t), \ldots, x_p(t)\big) \qquad (t \in I) \tag{8}$$

von einem Intervall I reeller Zahlen in den Raum R_p mit stetig differenzierbaren Koordinatenfunktionen setzen wir entsprechend den bisher behandelten Spezialfällen

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) := \big(\dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_p(t)\big) \qquad (t \in I), \tag{9}$$

und bezeichnen $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ als Ableitung der Funktion (8).

Eines der ältesten Probleme, zu dessen Lösung heute Methoden der Differentialrechnung angewandt werden, ist das Tangentenproblem. Es ist besonders bedeutungsvoll für die Aufklärung einer Reihe grundlegender Zusammenhänge in der Theorie der Kurven und der Entwicklung der formalen Darstellung solcher Zusammenhänge geworden.

Tangenten sind in der Antike gelegentlich an Kegelschnitten und wenigen höheren Kurven (archimedische Spirale) bestimmt worden. Dazu wurden geometrische (Apollonius (262? bis 190? v. u. Z.)) oder an der mechanischen Erzeugung (Archimedes (287?–212 v. u. Z.)) der Kurven orientierte Verfahren verwendet. Die Tangente wird dabei nicht immer als Grenzlage der Sekante, sondern als Gerade, die mit der Kurve genau einen Punkt gemeinsam hat, eingeführt.

Es muß hier jedoch auch bemerkt werden, daß die antike Mathematik das auch dem Tangentenproblem letztlich zugrunde liegende Problem des Unendlichen zwar erkannt, aber nicht bewältigt hat (Paradoxien des Zeno (490?–430? v. u. Z.)). Eine andere Frage, die noch aus der antiken Mathematik stammte, spielte bis in die Zeit der Renaissance eine große Rolle. Es ist die Frage nach der Größe des Winkels zwischen Tangente und (Kreis)bogen (Kontingenzwinkel). Während Euklid (365?–300? v. u. Z.) im III. Buch der „Elemente" behauptet hatte, „in den Zwischenraum der geraden Linie und des Bogens läßt sich keine weitere gerade Linie nebenhineinziehen", war im Mittelalter, etwa bei Johannes Campanus (13. Jahrhundert), der eine berühmte Übersetzung der „Elemente" aus dem Arabischen angefertigt hatte, der Kontingenzwinkel eine (flächenhafte) Größe. Erst 1557 zeigte Jacques Peletier (1515–1562), daß der Kontingenzwinkel Null ist, eine Feststellung, die durch die Autorität von François Vieta (1540–1603) allgemeine Anerkennung fand. Vieta hat selbst einen originellen Beitrag zum Tangentenproblem geleistet. Er betrachtet die Tangente an die archimedische Spirale $r = a\varphi$ im Punkt $P(\varphi)$ und die von $P(\varphi)$ nach $P(\varphi + \varepsilon)$ und $P(\varphi - \varepsilon)$ zielenden Sehnen. Er stellte fest, daß diese Sehnen mit der Tangente fast gleiche Winkel bilden, und zeigte an Beispielen, daß mit abnehmendem $\varepsilon > 0$ die Abweichung der beiden Winkel beliebig klein wird. Eine allgemeine Lösung des Normalen- und damit des Tangentenproblems bei algebraischen Kurven gelang René Descartes (1596–1650) unter Vermeidung infinitesimaler Methoden 1637 in seiner „Geometrie". Seine analytisch-geometrischen und algebraischen Methoden haben neben denen von Pierre Fermat (1601–1665; um 1635 „Isagoge") die abstrakte Formalisierung auch infinitesimaler Aufgaben wesentlich mit vorbereitet. In der Folgezeit wird das Tangentenproblem auch von

anderen Forschern mit verschiedenen Methoden erfolgreich an speziellen Fällen bearbeitet. Es bilden sich deutlich zwei Richtungen heraus, eine geometrische, vertreten durch EVANGELISTA TORRICELLI (1608–1647), ISAAC BARROW (1630–1677), CHRISTIAAN HUYGENS (1629–1695), und eine algebraische, deren bedeutendster Vertreter neben FERMAT und DESCARTES JOHN WALLIS (1616–1703) war.

Das Tangentenproblem war also im wesentlichen auch ohne allgemeine Methoden der Differentialrechnung gelöst worden. Die Entwicklung von Wirtschaft und Wissenschaft stellte jedoch der Mathematik im 17. Jahrhundert eine neue große Aufgabe, nämlich die der mathematischen Behandlung von Bewegungsproblemen. Dieses Problem wurde besonders im Zusammenhang mit dem verstärkt einsetzenden Bau von Maschinerien, Aufgaben der Ballistik und durch die Himmelsmechanik erzeugt.

Den Zusammenhang von Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung deckte dann GALILEO GALILEI (1564–1642) weitestgehend auf. Eine allgemeine mathematische Behandlung der Bewegungsprobleme gelang ihm jedoch nicht. Zur Lösung dieser schwierigen Aufgabe war es zunächst notwendig, eine systematische Zusammenfassung der bisherigen mathematischen Kenntnisse, auch über das Tangentenproblem, das u. a. in der Himmelsmechanik erhebliche Bedeutung besitzt, zu geben. Im Jahre 1668 gab JAMES GREGORY (1638–1675) diese Zusammenfassung.

Ein erster Schritt in Richtung eines allgemeinen Kalküls, der heute so bezeichneten Differentialrechnung, war die Potenzreihenmethode. Der Calculus (die Form der Differentialrechnung nach LEIBNIZ) war es jedoch nicht. Dieser konnte nur von Mathematikern gefunden werden, die sowohl die geometrische als auch die algebraische Methode völlig beherrschten.

Die Methode der Differentation ist die Entdeckung von NEWTON und LEIBNIZ. ISAAC NEWTON (1642–1727) fand seine Methode in den Jahren 1665/66. Für alle zugänglich wurde sie jedoch erst 1704 durch Veröffentlichung des Werkes „Quadratura curvarum" (Quadratur der Kurven). GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716) machte unabhängig von NEWTON seine Entdeckung 1673–1676, veröffentlichte seine Ergebnisse aber schon 1684 in der Leipziger Zeitschrift „Acta Eruditorum". Die Arbeit von LEIBNIZ hatte den Titel „Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitas moratur, et singulare pro illi calculi genus" (Eine neue Methode für Maxima und Minima sowie für Tangenten, die durch gebrochene und irrationale Werte nicht beeinträchtigt wird, und eine merkwürdige Art des Kalküls dafür). Sie enthielt neben den noch gebräuchlichen Beziehungen die wichtigsten Differentationsregeln sowie die notwendigen Bedingungen für Extremwerte und Wendepunkte.

Der „Calculus differentialis" war damit geschaffen.

Da die Newtonsche Methode die historisch ältere, dazu heute weniger bekannt ist, sei sie etwas genauer ausgeführt. NEWTON verwendete eine Reihe von neuen Kunstausdrücken, deren wichtigste „Fluxion" (ein endlicher Wert, eine Geschwindigkeit) und „Fluente" waren. Wenn mit $v, x, y, z \ldots$ die Variablen für Fluenten bezeichnet werden „And the Velocities by which every Fluent is increased by its generating Motion (which I may call Fluxions, or simply Velocities or Celerities) I shall represent by the same Letters pointed thus $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ and $\dot{z}$" (I. NEWTON „The Method of Fluxions ...", London 1736, p. 20). Er erläuterte seine Methode am Beispiel:

„Therefore let any Equation $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ be given, and substitute $x + \dot{x}o$ for x, and $y + \dot{y}o$ for y, and there will arise

$$\left.\begin{aligned} & x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2oox + \dot{x}^3o^3 \\ & - ax^2 - 2a\dot{x}ox - a\dot{x}^2oo \\ & - axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}oo \\ & - y^3 - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2ooy - \dot{y}^3o^3 \end{aligned}\right\} = 0.$$

Now by Supposition $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, which therefore being expunged, and the remaining Terms being divided by o, there will remain $3\dot{x}x^2 + 3\dot{x}^2ox + \dot{x}^3oo - 2a\dot{x}x - a\dot{x}^2o + a\dot{x}y$

$+ a\dot{y}x - a\dot{x}\dot{y}o - 3\dot{y}y^2 - 3\dot{y}^2oy - \dot{y}^3oo = 0$. But whereas o is supposed to be infinitely little, that it may represent the Moments of Quantities; the Terms that are multiplyd by it will be nothing in respect of the rest. Therefore I reject them, and there remains $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0 \ldots$" (ebenda, p. 24–25).

NEWTONS Methode ist aus der Beschäftigung mit der Reihenlehre, wobei besonders der Einfluß von WALLIS zu beachten ist, in Verbindung mit kinematischen Vorstellungen erwachsen. Seine Art der Behandlung des Bewegungsproblems trägt deutlich die Züge einer theoretisch-physikalischen Auffassung.

LEIBNIZ hat über seine Entdeckung und ihre Quellen selbst Bericht erstattet (Briefwechsel mit EHRENFRIED WALTER TSCHIRNHAUS (1651–1708)). Er führt die Entdeckung des Calculus auf drei Einflüsse zurück: erstens auf die von BLAISE PASCAL (1623–1662) entwickelte Methode des charakteristischen Dreiecks (vgl. Abb. 3.3), zweitens auf die von DESCARTES u. a. entwickelte algebraische Darstellungsweise geometrischer Kurven, drittens auf die Entdeckungen von MERCATOR (1512–1594) und WALLIS über unendliche Reihen sowie eigene Untersuchungen über die Summation unendlicher Reihen.

Es steht heute fest, daß die große Entdeckung der Differentialrechnung durch NEWTON und LEIBNIZ unabhängig voneinander erfolgte. Der sich bis ins 20. Jahrhundert hinziehende Prioritätsstreit ist durch äußerst detaillierte Untersuchungen jetzt beigelegt worden.

Die bedeutendsten Mathematiker des Kontinents nahmen die Leibnizsche Bezeichnungsweise schnell auf, und innerhalb weniger Jahrzehnte wurde die Analysis zu einem großartigen Gebäude, allerdings mit recht unsicheren Fundamenten. Erst das 19. Jahrhundert hat hier die notwendige Sicherheit geschaffen.

3.1.6. Aufgaben

1. Man ermittle die Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$f(x) = 3\sqrt{x^3} \qquad (x \in \mathbb{R}, x \geqq 0),$$
$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}, x \geqq 0),$$
$$f(x) = x^3 + \sin x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
$$f(x) = \operatorname{Re} z \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

2. Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = e^x, \quad f(x) = \ln x, x > 0, \quad f(x) = \sin x, \quad f(x) = \cos x.$$

Man gebe die Gleichungen der Normalen für diejenigen Punkte der Graphen der Funktionen an, in denen die Tangente den Anstieg 1 hat.

3. Man gebe die Ableitungen der folgenden Funktionen an:

$$f(x) = 2x^5 + 6x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 7x + 9,$$
$$f(x) = \frac{x^3+1}{x+3}, \qquad f(x) = x + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}, \qquad f(x) = x^3e^{x^2},$$
$$f(x) = 7x^3 \cos x, \qquad f(x) = 3 \sin x \cos^2 x,$$
$$f(x) = \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin^2 x}, \qquad f(x) = \ln(\sin^2 x + 1),$$

$$f(x) = \sqrt{5x^2 + 3x + 8}, \qquad f(x) = \frac{x}{\sqrt{ax + b}},$$

$$f(x) = e^{\sqrt{2x^2+3x+4}}, \qquad f(x) = (1 + x^2)^{\cos x}.$$

4. Man bestimme für die folgenden Funktionen f aus $\mathbb{R}$ den (größtmöglichen) Definitionsbereich $D(f)$ und ermittle die Ableitungen der Funktionen. Man gebe jeweils $D(f')$ an.

$$f(x) = 2x\sqrt{1 - x^2}, \qquad f(x) = \ln(\ln x),$$

$$f(x) = \sqrt{1 - \cos x}, \qquad f(x) = \ln\frac{x^2 - x - 6}{x^2},$$

$$f(x) = \sin((3x^2 - 2x + 7)^4).$$

5. Gegeben seien die Funktionen

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{für} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} x \sin\dfrac{1}{x} & \text{für} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

Man untersuche die Funktionen auf Stetigkeit und gebe $D(f_1')$ und $D(f_2')$ an.

6. Für welche reellen Zahlen x kann die Ableitung der Funktionen

$$y = \arcsin\sqrt{1 - x^2}, \qquad y = \operatorname{arccos}(8x^4 - 8x^2 + 1)$$

mit Hilfe von 3.1.3., Satz 3, ermittelt werden? Wie lauten diese Ableitungen?

7. Man ermittle ϑ aus

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x + \vartheta h)$$

für die Funktionen

$$f(x) = e^x, \qquad f(x) = \ln x, \qquad f(x) = \frac{1}{x}.$$

8. Man bestimme mit Hilfe des Mittelwertsatzes zwei Zahlen a, b mit $a < \sqrt{80} < b$, indem man $\vartheta = 0$ und $\vartheta = 1$ setzt und geeignet abschätzt.

9. Nach der Zahlentafel ist $\lg 20 = 1{,}3010$. Man ermittle mit Hilfe des Mittelwertsatzes einen Näherungswert für $\lg 20{,}5$, indem man $\vartheta = \frac{1}{2}$ setzt.

10. Man berechne die Tangenteneinheitsvektoren der Kurve

$$\mathfrak{r} = \left(\sin^2\frac{t}{3}\cos t, \ \sin^2\frac{t}{3}\sin t\right) \qquad (0 \leqq t \leqq 3\pi)$$

in den Punkten mit den Parameterwerten $t, t + \pi, t + 2\pi \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$ und zeige, daß die Tangenten in den zugehörigen Kurvenpunkten ein gleichseitiges Dreieck bilden.

11. Man zeige, daß der Tangentenabschnitt der Kurve mit der Gleichung

$$y = \sqrt{1 - x^2} + \ln x - \ln\left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right) \qquad (0 < x < 1)$$

vom Kurvenpunkt bis zur y-Achse eine konstante Länge besitzt (*Traktrix*[1]) oder *Schleppkurve* von HUYGENS, Abb. 3.14).

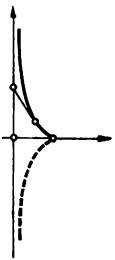

Abb. 3.14

3.2. Differentiation von Funktionen mehrerer Variabler

3.2.1. Partielle Ableitungen

Es sei f eine in einem Gebiet G des Raumes R_2 definierte reellwertige Funktion. Unter gewissen Voraussetzungen kann eine solche Funktion durch eine Fläche im dreidimensionalen Raum veranschaulicht werden (Abb. 3.15). Wir wählen einen Punkt (a, b) mit $(a, b) \in G$ und eine in G liegende ε-Umgebung dieses Punktes. Für $0 < |h| < \varepsilon$, $0 < |k| < \varepsilon$ ist stets $(a + h, b)$, $(a, b + k) \in G$.

In Analogie zu 3.1.1., Definition 1, können wir die Differenzenquotienten

$$\frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}, \quad \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k}$$

[1]) Die Traktrix war LEIBNIZ seit etwa 1676 und JAKOB BERNOULLI (1654—1705) seit 1691 bekannt. Beide veröffentlichten zunächst nicht ihre Ergebnisse. Der französische Arzt CLAUDIUS PERRAUT (1613—1688) stellt die Aufgabe, die Kurve zu bestimmen, die in einer horizontalen Ebene von einem Massenpunkt beschrieben wird, der am Ende eines gespannten Fadens befestigt ist und dessen zweites Ende eine in der Ebene gelegene Gerade durchläuft. Als die Mathematiker sich dieser Aufgabe annahmen, veröffentlichte LEIBNIZ 1693 seine Lösung. Im gleichen Jahr verallgemeinerte HUYGENS die Aufgabe und gab den lösenden Kurven den Namen Traktorien, ohne zu wissen, daß auch JAKOB BERNOULLI und GUILLAUME FRANÇOIS ANTOINE DE L'HOSPITAL (1661—1704) bereits solche Verallgemeinerungen vorgenommen hatten.

bilden. Diese Zahlen lassen sich in der Schnittebene, die durch den Flächenpunkt $P(a, b, f(a, b))$ geht und parallel zur x, z-Ebene bzw. y, z-Ebene verläuft, geometrisch als Sekantenanstieg deuten. Existieren die Grenzwerte dieser Differenzenquotienten für $h \to 0$ bzw. $k \to 0$, so lassen sich diese als Anstieg der Tangenten an die Schnittkurven der Fläche mit den genannten Ebenen deuten. Die Grenzwerte heißen die *partiellen Ableitungen* der Funktion im Punkt (a, b). In der klassischen mathematischen

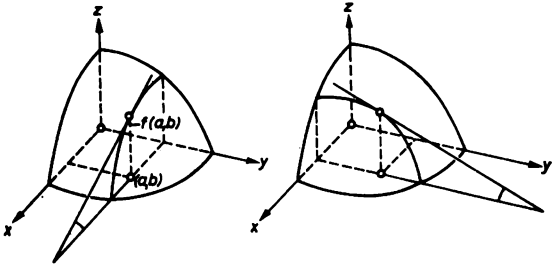

Abb. 3.15

und physikalischen Literatur werden diese partiellen Ableitungen mit den Symbolen $f_x(a, b)$ bzw. $f_y(a, b)$ (gelesen: f nach x (partiell) an der Stelle (a, b) bzw. f nach y (partiell) an der Stelle (a, b)) oder mit

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} \quad \text{bzw.} \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)}$$

(gelesen: df nach dx partiell an der Stelle (a, b) bzw. df nach dy partiell an der Stelle (a, b)) bezeichnet. Man setzt also

$$f_x(a,b) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}, \tag{1}$$

$$f_y(a,b) = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)} := \lim_{k \to 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}. \tag{2}$$

Zu jeder in einem Gebiet G des $\mathbb{R}_2$ definierten reellwertigen Funktion f können wir die Funktion f_x bzw. f_y bilden, deren Definitionsbereich die (möglicherweise leere) Menge aller Punkte (a, b) ist, in denen $f_x(a, b)$ bzw. $f_y(a, b)$ existiert. Die Berechnung der Funktion f_x bzw. f_y kann auf die Regeln für die Differentiation von Funktionen von

einer Variablen zurückgeführt werden. Setzen wir nämlich

$$\varphi(x) := f(x, b), \qquad \psi(y) := f(a, y),$$

so folgt aus (1), (2) sofort

$$\varphi'(a) = f_x(a, b), \qquad \psi'(b) = f_y(a, b).$$

Man braucht also jeweils nur die eine der beiden Variablen als Konstante zu betrachten und nach der anderen Variablen zu differenzieren.

Aus

$$f(x, y) = x^3 - 3x \sin y + y^3 + 4$$

folgt z. B.

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 3 \sin y,$$
$$f_y(x, y) = -3x \cos y + 2y.$$

Wir verallgemeinern die für Funktionen von zwei Variablen eingeführten Begriffsbildungen.

Definition. Ist f eine in einem Gebiet G des R_p definierte reellwertige Funktion, so heißt der Grenzwert

$$f_{x_i}(a_1, \ldots, a_p) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_p) - f(a_1, \ldots, a_p)}{t}, \tag{3}$$

falls er existiert, die *partielle Ableitung* der Funktion f nach der i-ten Variablen an der Stelle $(a_1, \ldots, a_p)$.

Die *Funktion* f_{x_i} wird analog zum Fall zweier Variabler definiert. Neben f_{x_i} ist auch hier das Symbol $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ gebräuchlich. Diese klassischen Bezeichnungsweisen haben einen schwerwiegenden Nachteil. In dem Term $f_{x_i}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_p)$ tritt das gleiche Zeichen x_i in verschiedener Bedeutung auf. Bei dem im Argument der Funktion auftretenden Zeichen x_i kommt es auf den Zahlenwert an, der für diese Variable eingesetzt wird. Als Index von f deutet x_i nur diejenige Variable an, nach der zu differenzieren ist. Die Bezeichnung dieser Variablen ist aber beim Funktionsbegriff prinzipiell ohne Bedeutung. So sind z. B. die Funktionen

$$z = f(x, y) \qquad \big((x, y) \in G\big),$$
$$z = f(y, x) \qquad \big((y, x) \in G\big)$$

identisch. Die Symbole f_x, f_y haben aber in diesen beiden Schreibweisen derselben Funktion eine unterschiedliche Bedeutung. In manchen Darstellungen setzen sich daher immer mehr andere Schreibweisen für die partielle Ableitung nach der i-ten

Variablen durch. Wir werden neben den klassischen Schreibweisen vorwiegend das Symbol $\partial_i f$ an Stelle von f_{x_i} verwenden.

Bezeichnen wir mit e_i das Element aus R_p, dessen i-te Koordinate 1 ist, während alle anderen Koordinaten 0 sind, so können wir die Definition (3) mit $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ auch in der Form

$$\partial_i f(\boldsymbol{a}) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + te_i) - f(\boldsymbol{a})}{t} \tag{4}$$

aussprechen.

Besitzt f in allen Punkten $\boldsymbol{a}$ aus G partielle Ableitungen, so können wir auf die Funktion φ_i mit $\varphi_i(t) = f(\boldsymbol{a} + te_i)$ den Mittelwertsatz der Differentialrechnung anwenden und erhalten

$$\varphi_i(t) - \varphi_i(0) = t\varphi_i'(\vartheta t).$$

Wegen $\varphi_i'(t) = \partial_i f(\boldsymbol{a} + te_i)$ erhalten wir mit

$$f(\boldsymbol{a} + te_i) - f(\boldsymbol{a}) = t\partial_i f(\boldsymbol{a} + \vartheta te_i) \tag{5}$$

den *Mittelwertsatz für partielle Ableitungen.*

Partielle Ableitungen von Funktionen mehrerer Variabler erläutert LEONHARD EULER (1707 bis 1783) erstmals im 7. Kapitel seiner Differentialrechnung ausführlich. Hier führte er für partielle Ableitungen auch erstmals einen Symbolismus ein. Für $\frac{\partial f}{\partial x}$ schrieb er $\left(\frac{df}{dx}\right)$.

3.2.2. Differenzierbare Funktionen von mehreren Variablen

Nach 3.1.1., Satz 1, ist eine reelle Funktion genau dann an der Stelle a differenzierbar, wenn es eine reelle Zahl c mit

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - (x - a)\,c}{x - a} = 0 \tag{1}$$

gibt. Wir erhalten eine äquivalente Bedingung, wenn wir den Bruch mit $\operatorname{sgn}(x - a)$ multiplizieren, so daß (1) in

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - (x - a)\,c}{|x - a|} = 0 \tag{2}$$

übergeht. In dieser Form können wir den Begriff der Differenzierbarkeit auf reellwertige Funktionen von zwei (oder mehreren) Variablen verallgemeinern.

Wir nennen eine reellwertige Funktion $z = f(x, y)$ im Punkt $(a, b) \in D(f)$ *differenzierbar*, wenn es zwei reelle Zahlen c_1, c_2 mit

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} \frac{f(x, y) - f(a, b) - (x - a)\,c_1 - (y - b)\,c_2}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0 \tag{3}$$

gibt. Setzen wir speziell $x = a + h$, $y = b$, so folgt

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b) - hc_1}{h} = 0$$

oder, wenn wir zum Betrag übergehen,

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} - c_1 \right| = 0.$$

Dies besagt, daß $c_1 = f_x(a, b)$ ist. Ebenso erhalten wir $c_2 = f_y(a, b)$. Hiernach ist die Funktion f an der Stelle (a, b) differenzierbar genau dann, wenn sie an dieser Stelle partielle Ableitungen besitzt und wenn

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} \frac{f(x, y) - f(a, b) - (x - a) f_x(a, b) - (y - b) f_y(a, b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0 \tag{4}$$

gilt. Setzen wir

$$\varrho_f(a, b; x, y) := \frac{f(x, y) - f(a, b) - (x - a) f_x(a, b) - (y - b) f_y(a, b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}},$$

so erhalten wir durch Umstellung die *Weierstraßsche Zerlegungsformel*

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(a, b) &+ (x - a) f_x(a, b) + (y - b) f_y(a, b) \\ &+ \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\, \varrho_f(a, b; x, y) \end{aligned} \tag{5}$$

mit

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} \varrho_f(a, b; x, y) = 0. \tag{6}$$

Sind umgekehrt (5), (6) erfüllt, so gilt (4), und die Funktion f ist an der Stelle (a, b) differenzierbar.

Für eine im Punkt (a, b) differenzierbare Funktion f setzen wir

$$f^*(x, y) := f(a, b) + (x - a) f_x(a, b) + (y - b) f_y(a, b). \tag{7}$$

Der Graph dieser in x, y linearen Funktion ist eine Ebene, die durch den Punkt $P\big(a, b, f(a, b)\big)$ geht. Wegen

$$f(x, y) - f^*(x, y) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\, \varrho_f(a, b; x, y)$$

und

$$0 = \lim_{(x,y) \to (a,b)} \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = \lim_{(x,y) \to (a,b)} \varrho_f(a, b; x, y)$$

schmiegt sie sich dem Graphen der Funktion f sehr eng an und heißt deshalb die *Tangentialebene* des Graphen von f im Punkt $P\big(a, b, f(a, b)\big)$.

Abgesehen von der letzten geometrischen Deutung können unsere Betrachtungen auf reellwertige Funktionen $z = f(x_1, \ldots, x_p)$ von mehreren Variablen übertragen werden.

Definition. Eine in einem Gebiet G des Raumes R_p definierte reellwertige Funktion f heißt in einem Punkt $\boldsymbol{a}$ mit $\boldsymbol{a} \in G$ *differenzierbar*, wenn es reelle Zahlen $c_1, \ldots, c_p$ mit

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - \sum_{i=1}^{p} (x_i - a_i)\, c_i}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|} = 0 \tag{8}$$

gibt.

Wie im Fall von zwei Variablen folgert man aus (8), daß $c_i = \partial_i f(\boldsymbol{a})$ $(i = 1, \ldots, p)$ und folglich

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - \sum_{i=1}^{p} (x_i - a_i)\, \partial_i f(\boldsymbol{a})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|} = 0 \tag{9}$$

ist. Setzen wir

$$\varrho_f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) := \frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - \sum_{i=1}^{p} (x_i - a_i)\, \partial_i f(\boldsymbol{a})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|}, \tag{10}$$

so gilt

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \varrho_f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = 0, \tag{11}$$

und wir erhalten die Weierstraßsche Zerlegungsformel

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{i=1}^{p} (x_i - a_i)\, \partial_i f(\boldsymbol{a}) + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|\, \varrho_f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}).^{1)} \tag{12}$$

Das Wesen der Differenzierbarkeit einer Funktion besteht gerade darin, daß die lineare Funktion

$$f^*(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{i=1}^{p} (x_i - a_i)\, \partial_i f(\boldsymbol{a}) \tag{13}$$

für kleine $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|$ eine gute Approximation für die Funktion f darstellt. Den Übergang von der gegebenen Funktion f zu der linearen Näherungsfunktion f^* bezeichnet

---

[1]) Im Fall $p = 1$ unterscheidet sich die Definition (10) von der Definition 3.1.1. (3) durch den Faktor $\operatorname{sgn}(x - a)$. Bei der neuen Definition geht 3.1.1. (4) in

$$f(x) = f(a) + (x - a)\, f'(a) + |x - a|\, \varrho_f(a, x)$$

über, und 3.1.1. (5) bleibt unverändert gültig.

man als *Linearisierung* des Problems. Sie findet in der *Fehlerrechnung* vielfältige Anwendungen.

Im Fall einer Funktion $z = f(x, y)$ von zwei Variablen setzt man häufig, wenn man den Funktionsverlauf in der Umgebung des Punktes (a, b) betrachtet,

$$\Delta x := x - a, \qquad \Delta y := y - b, \qquad \Delta z := f(x, y) - f(a, b).$$

Mit diesen Bezeichnungen nimmt die Näherungsgleichung

$$f(x, y) - f(a, b) \approx f^*(x, y) - f(a, b)$$

die Form

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$$

an. Es ist auch üblich, die Änderungen $\Delta x, \Delta y$, die man sich als sehr klein vorzustellen pflegt, mit dx, dy zu bezeichnen und das — von a, b, dx, dy abhängige — sogenannte *totale Differential* dz durch

$$dz := \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

zu definieren. Die obige Näherungsgleichung nimmt dann die Form $\Delta z \approx dz$ an.

Totale Differentiale wurden (mit anderen Bezeichnungen) von EULER in seiner Differentialrechnung von 1755 eingeführt.

Wir zeigen an einem Beispiel, daß die Existenz der partiellen Ableitungen für die Differenzierbarkeit zwar notwendig, aber nicht hinreichend ist.

Beispiel 1. Es sei

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{für} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für} \quad x = y = 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist im Punkt $(0, 0)$ stetig, denn setzen wir $\varrho := \sqrt{x^2 + y^2}$ und bestimmen wir ein φ mit

$$x = \varrho \cos \varphi, \qquad y = \varrho \sin \varphi,$$

so folgt $f(x, y) = \varrho \sin 2\varphi$ und damit

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{\varrho\to 0} \varrho \sin 2\varphi = 0 = f(0, 0).$$

Wegen

$$\frac{f(0 + h, 0) - f(0)}{h} = 0, \qquad \frac{f(0, 0 + k) - f(0, 0)}{k} = 0$$

besitzt f im Punkt $(0, 0)$ die partiellen Ableitungen $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. Es ist aber, wenn wir r und ψ mit $h = r\cos\psi$, $k = r\sin\psi$ bestimmen,

$$\frac{f(0+h, 0+k) - f(0, 0) - hf_x(0, 0) - kf_y(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{2hk}{h^2 + k^2} = \sin 2\psi.$$

Ein Grenzwert für diesen Quotienten existiert nur für spezielle Grenzübergänge $(h, k) \to (0, 0)$, z. B. dann, wenn wir $(h, k) = (r\cos\psi, r\sin\psi)$ so gegen $(0, 0)$ streben lassen, daß $\sin 2\psi$ gegen 0 strebt. Ein Grenzwert schlechthin existiert nicht, und folglich ist die Funktion f an der Stelle $(0, 0)$ nicht differenzierbar, obwohl sie partielle Ableitungen an dieser Stelle besitzt. Sie besitzt sogar in allen Punkten von R_2 partielle Ableitungen, aber die partiellen Ableitungen f_x, f_y sind im Punkt $(0, 0)$ nicht stetig.

Aus der Stetigkeit der partiellen Ableitungen kann dagegen die Differenzierbarkeit einer Funktion gefolgert werden.

Satz 7. *Besitzt eine reellwertige Funktion f in einem Gebiet G aus R_p stetige partielle Ableitungen, so ist sie in allen Punkten $\boldsymbol{a}$ aus G differenzierbar.*

Beweis. Sei $\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_p) = h_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + h_p\boldsymbol{e}_p$. Wir setzen $\boldsymbol{b}_0 := \boldsymbol{a}$ und

$$\boldsymbol{b}_i := \boldsymbol{a} + \sum_{j=1}^{i} h_j\boldsymbol{e}_j \qquad (i = 1, \ldots, p).$$

Wegen $\quad \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{b}_{i-1} + h_i\boldsymbol{e}_i \quad$ und $\quad \boldsymbol{b}_p = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{h} \quad$ ist

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{p} (f(\boldsymbol{b}_{i-1} + h_i\boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{b}_{i-1})).$$

Aus dem Mittelwertsatz für partielle Ableitungen folgt

$$f(\boldsymbol{b}_{i-1} + h_i\boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{b}_{i-1}) = h_i\partial_i f(\boldsymbol{b}_{i-1} + \vartheta_i h_i\boldsymbol{e}_i),$$

$$\frac{\left|f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - \sum_{i=1}^{p} h_i\partial_i f(\boldsymbol{a})\right|}{\|\boldsymbol{h}\|} = \frac{\left|\sum_{i=1}^{p} h_i\partial_i f(\boldsymbol{b}_{i-1} + \vartheta_i h_i\boldsymbol{e}_i) - \sum_{i=1}^{p} h_i\partial_i f(\boldsymbol{a})\right|}{\|\boldsymbol{h}\|}$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{p} \frac{|h_i|}{\|\boldsymbol{h}\|} |\partial_i f(\boldsymbol{b}_{i-1} + \vartheta_i h_i\boldsymbol{e}_i) - \partial_i f(\boldsymbol{a})|.$$

Aus $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$ folgt stets $\boldsymbol{b}_{i-1} + \vartheta_i h_i\boldsymbol{e}_i \to \boldsymbol{a}$. Wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitungen und $|h_i| \leqq \|\boldsymbol{h}\|$ ist somit

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - \sum_{i=1}^{p} h_i\partial_i f(\boldsymbol{a})}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0,$$

was zu beweisen war.

Wir nennen eine Funktion f aus R_p in R in einem Gebiet G *stetig differenzierbar*, wenn f in G stetige partielle Ableitungen besitzt.

3.2.3. Verallgemeinerte Kettenregel

Wir betrachten eine in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}_2$ definierte reellwertige Funktion f und eine in G verlaufende Kurve mit der Gleichung

$$\mathfrak{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big) \qquad (t \in I), \tag{1}$$

wobei wir uns t etwa als Zeitparameter vorstellen können. Dann können wir die reelle Funktion F mit

$$F(t) := f\big(x(t), y(t)\big) \qquad (t \in I) \tag{2}$$

bilden. Sie gibt jeweils den Funktionswert von f in dem zum Zeitpunkt t gehörenden Kurvenpunkt an. In Satz 1 werden wir zeigen, daß die Funktion F differenzierbar ist, wenn dies für die Funktion f und für die Koordinatenfunktionen von (1) gilt, und daß ihre Ableitung in der Form

$$F'(t) = f_x\big(x(t), y(t)\big)\,\dot{x}(t) + f_y\big(x(t), y(t)\big)\,\dot{y}(t) \qquad (t \in I) \tag{3}$$

dargestellt werden kann. Diese Formel wird häufig in der Form

$$\frac{df\big(x(t), y(t)\big)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{4}$$

angegeben, wobei zu beachten ist, daß nach der Bildung der partiellen Ableitungen f_x, f_y die Variablen x, y durch $x(t), y(t)$ zu ersetzen sind.

Beispiel 1. Es sei

$$f(x, y) = x \sin(xy), \qquad \mathfrak{r}(t) = \big(t^2, \ln(t^2 + 1)\big).$$

Aus

$$f_x(x, y) = \sin(xy) + xy\cos(xy), \qquad f_y(x, y) = x^2\cos(xy), \qquad \dot{x}(t) = 2t$$

und

$$\dot{y}(t) = \frac{2t}{t^2 + 1}$$

folgt

$$\frac{df\big(x(t), y(t)\big)}{dt} = \sin\big[\big(t^2\ln(t^2 + 1)\big) + t^2\ln(t^2 + 1)\cdot\cos\big(t^2\ln(t^2 + 1)\big)\big]\,2t$$
$$+ t^4\cos\big(t^2\ln(t^2 + 1)\big)\frac{2t}{t^2 + 1}.$$

Die Gleichung (3) bzw. (4) wird als *verallgemeinerte Kettenregel* bezeichnet. Sie kann auf Funktionen von mehreren Variablen übertragen werden und nimmt dann die

Form

$$\frac{df(x_1(t), \ldots, x_p(t))}{dt} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} \quad (t \in I) \tag{5}$$

an. Die rechte Seite können wir gemäß 1.5.2. (7) als ein Skalarprodukt schreiben. Ein Faktor dieses Skalarprodukts ist der Tangentenvektor $\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_p(t))$ der Kurve mit der Gleichung $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_p(t))$. Die Koordinaten des zweiten Vektors sind die partiellen Ableitungen der Funktion f an der betrachteten Stelle. Der so gebildete Vektor heißt der *Gradient* von f und wird mit grad f bezeichnet. Setzen wir also

$$\operatorname{grad} f(x) := (\partial_1 f(x), \ldots, \partial_p f(x)), \tag{6}$$

so nimmt (5) die Gestalt

$$\frac{df(x(t))}{dt} = \langle \operatorname{grad} f(x(t)), \dot{x}(t) \rangle \tag{7}$$

an. Im Fall $p = 2$ oder $p = 3$ schreiben wir hierfür auch, wie in der analytischen Geometrie üblich,

$$\frac{df(\mathfrak{r}(t))}{dt} = \operatorname{grad} f(\mathfrak{r}(t)) \cdot \dot{\mathfrak{r}}(t). \tag{8}$$

Setzen wir speziell

$$\mathfrak{r}(t) := \mathfrak{r}_0 + t\mathfrak{e},$$

so ist $\dot{\mathfrak{r}}(t) = \mathfrak{e}$, und wir erhalten

$$\left.\frac{df(\mathfrak{r}_0 + t\mathfrak{e})}{dt}\right|_{t=0} = \operatorname{grad} f(\mathfrak{r}_0) \cdot \mathfrak{e}. \tag{9}$$

Ist $\mathfrak{e}$ ein Einheitsvektor, so heißt diese Zahl die *Richtungsableitung von f an der Stelle $\mathfrak{r}_0$ in Richtung des Einheitsvektors* $\mathfrak{e}$, weil sie die Änderung der Funktion f beim Fortschreiten in Richtung des Einheitsvektors $\mathfrak{e}$ charakterisiert.

Auf eine geometrische Interpretation dieser Gleichung kommen wir später zurück. An dieser Stelle bemerken wir nur, daß das Skalarprodukt in (9) und damit die Richtungsableitung im Punkt $\mathfrak{r}_0$ einen maximalen Wert annimmt, wenn der Einheitsvektor $\mathfrak{e}$ mit dem Gradienten gleichgerichtet ist. Wählen wir im Fall $p = 3$ für $\mathfrak{e}$ den Vektor $(1, 0, 0)$ bzw. $(0, 1, 0)$ bzw. $(0, 0, 1)$, so ist die Richtungsableitung offensichtlich gleich der partiellen Ableitung nach x bzw. y bzw. z.

Beispiel 2. Ist $f(x, y) = x \sin(xy)$, so ist

$$\operatorname{grad} f(x, y) = (\sin(xy) + xy \cos(xy), x^2 \cos(xy)),$$

und die Richtungsableitung von f an der Stelle $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ in Richtung des Einheitsvektors $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ nimmt wegen $\operatorname{grad} f\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = (1, 0)$ den Wert $\frac{3}{5}$ an.

Wir formulieren nun den oben angekündigten

Satz. *Es sei I ein Intervall,*

$$\boldsymbol{x} = \big(x_1(t), \ldots, x_p(t)\big) \qquad (t \in I), \tag{10}$$

und die Funktionen $x_i = x_i(t)$ seien in $b \in I$ differenzierbar. Ferner sei f eine in einer Umgebung U von $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}(b)$ definierte und in $\boldsymbol{a}$ differenzierbare reellwertige Funktion von p Variablen. Dann ist die reelle Funktion

$$F(t) = f\big(x_1(t), \ldots, x_p(t)\big) \qquad (t \in I, \boldsymbol{x}(t) \in U) \tag{11}$$

im Punkt b differenzierbar, und es ist

$$F'(b) = \sum_{j=1}^{p} x_j'(b)\, \partial_j f\big(x_1(b), \ldots, x_p(b)\big). \tag{12}$$

Beweis. Nach 3.2.2. (12) ist

$$f(\boldsymbol{x}(t)) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{j=1}^{p} (x_j(t) - x_j(b))\, \partial_j f(\boldsymbol{a}) + \|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{a}\| \cdot \varrho_f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}(t)),$$

$$\frac{f(\boldsymbol{x}(t)) - f(\boldsymbol{a})}{t - b} = \sum_{j=1}^{p} \frac{x_j(t) - x_j(b)}{t - b}\, \partial_j f(\boldsymbol{a}) + \frac{\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{a}\|}{t - b} \cdot \varrho_f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}(t)). \tag{13}$$

Wegen $\boldsymbol{x}(t) \to \boldsymbol{a}$ für $t \to b$ gilt $\varrho_f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}(t)) \to 0$ für $t \to b$. Der Quotient von $\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{a}\|$ und $t - b$ ist wegen

$$\frac{\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(b)\|}{t - b} = \operatorname{sgn}(t - b) \left\| \left(\frac{x_1(t) - x_1(b)}{t - b}, \ldots, \frac{x_p(t) - x_p(b)}{t - b} \right) \right\|$$

beschränkt, und folglich strebt der letzte Summand von (13) gegen 0 für $t \to b$. Es folgt

$$\lim_{t \to b} \frac{F(t) - F(b)}{t - b} = \lim_{t \to b} \frac{f(\boldsymbol{x}(t)) - f(\boldsymbol{x}(b))}{t - b} = \sum_{j=1}^{p} x_j'(b)\, \partial_j f(\boldsymbol{x}(b)),$$

und der Satz ist bewiesen.

3.2.4. Glatte Flächen

Während wir zur Definition des Kurvenbegriffs von Funktionen aus R in R_2 bzw. R_3 ausgingen, betrachten wir zur Einführung des Flächenbegriffs Funktionen $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u, v)$ aus R_2 in R_3.

Definition 1. Eine Punktmenge F des Raumes $\mathbb{R}_3$ heißt ein *Flächenstück*, wenn es eine stetige Funktion $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u, v)$ gibt, die einen Bereich B aus $\mathbb{R}_2$ umkehrbar eindeutig auf die Menge F abbildet (Abb. 3.16).

In Koordinatendarstellung gilt

$$\mathfrak{r} = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big) \qquad \big((u, v) \in B\big). \tag{1}$$

Wählen wir $v = b$ konstant und variieren nur u, so durchlaufen die Punkte $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u, b)$ eine in dem Flächenstück liegende Kurve, eine sogenannte *u-Linie*. Entsprechend

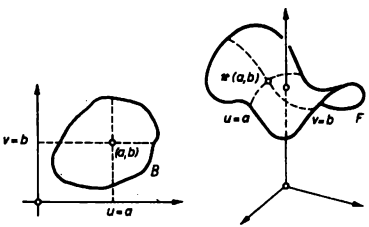

Abb. 3.16

bilden die Punkte $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(a, v)$ mit konstantem a eine *v-Linie* (Abb. 3.16). Die Gleichung $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u, v)$ heißt eine *Parameterdarstellung*, u, v heißen die *Flächenparameter*, und B heißt der *Parameterbereich*.

Beispiel 1. Es sei

$$\mathfrak{r} = (v \cos u, v \sin u, u) \qquad (0 \leqq u \leqq 2\pi, 0 \leqq v \leqq 1) \tag{2}$$

(Abb. 3.17). Die Bildpunkte dieser Abbildung liegen auf einer Wendelfläche.

Beispiel 2. Es sei $a > 0$ und

$$\mathfrak{r} = (a \cos v \sin u, a \sin v \sin u, a \cos u) \qquad (0 \leqq u \leqq \pi, -\pi < v \leqq \pi) \tag{3}$$

(vgl. 2.5.3. (13)). Die Parameter u, v können entsprechend Abb. 3.18 als Poldistanz bzw. (geographische) Länge auf der Kugel mit dem Radius a gedeutet werden. Für $v = \pm\pi$ ist die geforderte umkehrbare Eindeutigkeit der Abbildung von B auf F verletzt.

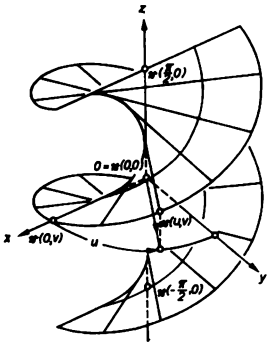

Abb. 3.17

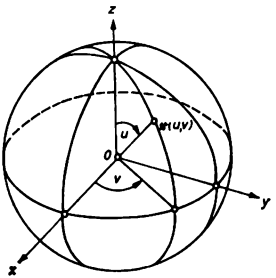

Abb. 3.18

Beispiel 3. Ist $z = f(x, y)$ $\big((x, y) \in B\big)$ eine in B definierte reellwertige stetige Funktion, so bilden die Punkte

$$\mathfrak{r} = \big(u, v, f(u, v)\big) \qquad \big((u, v) \in B\big) \tag{4}$$

ein Flächenstück F (Abb. 3.19). Der Parameterbereich B ist die Projektion des Flächenstücks F in die x, y-Ebene, und die Flächenparameter u bzw. v stimmen mit x bzw. y überein.

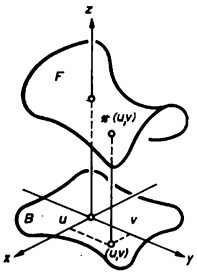

Abb. 3.19

Besitzen die Koordinatenfunktionen in (1) stetige partielle Ableitungen, so können wir die Vektoren

$$\mathfrak{r}_u = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right), \tag{5}$$

$$\mathfrak{r}_v = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) \tag{6}$$

bilden. Sie stellen *Tangentenvektoren* an die u- bzw. v-Linien dar. In Beispiel 1 bzw. 2 bzw. 3 gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_u &= (-v \sin u, v \cos u, 1), \\ \mathfrak{r}_v &= (\cos u, \sin u, 0), \end{aligned} \tag{2'}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_u &= (a \cos v \cos u, a \sin v \cos u, -a \sin u), \\ \mathfrak{r}_v &= (-a \sin v \sin u, a \cos v \sin u, 0) \end{aligned} \tag{3'}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_u &= (1, 0, f_u), \\ \mathfrak{r}_v &= (0, 1, f_v). \end{aligned} \tag{4'}$$

Sind die Vektoren $\mathfrak{r}_u, \mathfrak{r}_v$ nicht parallel, so spannen sie eine durch den Flächenpunkt gehende Ebene, die *Tangentialebene* der Fläche auf. Das vektorielle Produkt $\mathfrak{r}_u \times \mathfrak{r}_v$ ist in diesem Fall ein (vom Nullvektor verschiedener) Stellungsvektor.

Analog zum Begriff der glatten Kurve geben wir die

Definition 2. Ein Flächenstück F heißt *glatt*, wenn es eine Parameterdarstellung $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u, v)$ mit stetig differenzierbaren Koordinatenfunktionen und mit $\mathfrak{r}_u \times \mathfrak{r}_v \neq \mathfrak{o}$ für alle $(u, v) \in B$ besitzt.

Der Vektor

$$\mathfrak{N} = \frac{\mathfrak{r}_u \times \mathfrak{r}_v}{\|\mathfrak{r}_u \times \mathfrak{r}_v\|} \tag{7}$$

heißt der *Normaleneinheitsvektor* im betrachteten Flächenpunkt.

Wegen $\mathfrak{r}_u \times \mathfrak{r}_v = (-f_u, f_v, 1) \neq \mathfrak{o}$ ist jede Fläche (4) mit stetig differenzierbarer Funktion f glatt.

Eine Gleichung der Tangentialebene an die Fläche mit der Gleichung $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u, v)$ im Flächenpunkt $\mathfrak{r}(u_0, v_0)$ lautet

$$\mathfrak{r}^* = \mathfrak{r}(u_0, v_0) + \lambda \mathfrak{r}_u(u_0, v_0) + \mu \mathfrak{r}_v(u_0, v_0) \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}) \tag{8}$$

in Parameterdarstellung oder

$$\left(\mathfrak{r}^* - \mathfrak{r}(u_0, v_0)\right) \cdot \mathfrak{N}_0 = 0 \tag{9}$$

bzw.

$$\left(\mathfrak{r}^* - \mathfrak{r}(u_0, v_0)\right) \cdot \left(\mathfrak{r}_u(u_0, v_0) \times \mathfrak{r}_v(u_0, v_0)\right) = 0 \tag{10}$$

in parameterfreier Darstellung.

3.2.5. Aufgaben

1. Man berechne die partiellen Ableitungen f_x, f_y der Funktionen

$$f(x, y) = \ln \frac{x + y}{x - y},$$

$$f(x, y) = \arctan \frac{y}{x},$$

$$f(x, y) = \frac{\arctan x}{1 + y^2}.$$

2. Es sei

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad (x, y) = (0, 0), \\ xy\,\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für} \quad (x, y) \neq (0, 0). \end{cases}$$

Man zeige, daß die Funktion f stetig differenzierbar ist.

3. Man bestimme für die Funktion $f(x, y) = x^3 - y^3$ in den Punkten $(1, 1)$ und $(-1, 1)$ die Ableitung in Richtung der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten.

4. Man berechne die Gradienten der Funktionen

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^5, \qquad f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z},$$

$$f(x, y) = \ln\left[(x - a)^2 + (y - b)^2\right], \qquad f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

5. Jedem Punkt (x, y, z) eines Gebietes $G \subseteq \mathbb{R}_3$ sei ein Vektor $\mathfrak{v}$ zugeordnet, dessen Koordinaten Funktionen von x, y, z sind. Wir bezeichnen sie mit v_x, v_y, v_z, wobei hier die Indizes nicht etwa partielle Ableitungen bedeuten. Als *Divergenz* bzw. *Rotation*[1]) von $\mathfrak{v} = (v_x, v_y, v_z)$, in Zeichen div $\mathfrak{v}$ bzw. rot $\mathfrak{v}$, bezeichnet man die reellwertige bzw. vektorwertige Funktion

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

bzw.

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right).$$

---

[1]) Der Begriff „Divergenz" geht auf William Kingdon Clifford (1845—1879), der Begriff „Rotation" auf James Clerk Maxwell (1831—1879) zurück. Maxwell verwendete für „Rotation" oft auch den noch heute gebräuchlichen Ausdruck „curl".

Man berechne div $\mathfrak{v}$ und rot $\mathfrak{v}$ für

$$\mathfrak{v} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right),$$

$$\mathfrak{v} = \left(0, x, z \sin \sqrt{x^2+y^2}\right),$$

$$\mathfrak{v} = (\sin(yz), xz \cos(yz), xy \cos(yz)).$$

6. Man berechne eine Gleichung der Tangentialebene für

a) die *Sattelfläche* $z = xy$,

b) das *Rotationsparaboloid* $z = x^2 + y^2$,

c) den *Kegel* $z = \sqrt{x^2+y^2}$,

d) die *Halbkugel* $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

in dem zu (x_0, y_0) gehörenden Flächenpunkt.

3.3. Höhere Ableitungen und der Satz von Taylor

3.3.1. Höhere Ableitungen

Ist die Ableitung f' einer reellen (oder komplexen) Funktion f in einer Umgebung eines Punktes a definiert, so können wir prüfen, ob die Funktion f' in a differenzierbar ist. Ist dies der Fall, so setzen wir

$$f''(a) := (f')'(a) \tag{1}$$

und nennen $f''(a)$ die *zweite Ableitung von f im Punkt a*. Entsprechend heißt die durch (1) definierte Funktion f'' die *zweite Ableitung von f*. Ganz analog definieren wir die dritte, ..., n-te Ableitung von f durch

$$f''' := (f'')', \ldots, f^{(n)} := (f^{(n-1)})'.$$

In der Leibnizschen Symbolik setzt man

$$\frac{d^2y}{dx^2} := f'', \ldots, \frac{d^ny}{dx^n} := f^{(n)}$$

(gelesen dny nach dx hoch n). Auch die Bezeichnungen $y'', \ldots, y^{(n)}$ für die höheren Ableitungen der Funktion $y = f(x)$ sind gebräuchlich. Weiterhin setzt man stets $f^{(0)} := f$ bzw. $y^{(0)} := y$. Wir nennen eine Funktion f im Intervall I von der *Ordnung k* oder (mindestens) *k-mal stetig differenzierbar* in I, wenn die Funktion $f^{(k)}$ in I existiert und stetig ist. Wegen 3.1.1., Satz 2, sind dann auch alle Funktionen $f^{(k-1)}, \ldots, f', f$

in I stetig. Die Menge aller in I k-mal stetig differenzierbaren Funktionen bezeichnen wir mit $C_k(I)$.

Beispiel 1. Wir bilden die Ableitungen der Sinusfunktion. Es ist

$$\begin{aligned} y &= \sin x, \\ y' &= \cos x, \\ y'' &= -\sin x, \\ y''' &= -\cos x, \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$(\sin x)^{(2k)} = (\cos x)^{(2k-1)} = (-1)^k \sin x, \tag{2}$$

$$(\sin x)^{(2k+1)} = (\cos x)^{(2k)} = (-1)^k \cos x. \tag{3}$$

Beispiel 2. Sind die Funktionen f, g n-mal stetig differenzierbar, so ist

$$\begin{aligned} (f \cdot g)' &= f' \cdot g + f \cdot g', \\ (f \cdot g)'' &= f'' \cdot g + 2f' \cdot g' + f \cdot g'', \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(n-j)} g^{(j)}. \tag{4}$$

Die Behauptungen (2), (3), (4) sind durch vollständige Induktion zu beweisen.

3.3.2. Höhere partielle Ableitungen. Satz von Schwarz

Besitzt eine reellwertige Funktion f von p Variablen stetige partielle Ableitungen $\partial_i f$, so können wir diese Funktionen wiederum auf die Existenz von partiellen Ableitungen bzw. auf Differenzierbarkeit untersuchen. Wir setzen

$$\partial_j \partial_i f := \partial_j(\partial_i f) \qquad (i, j = 1, \dots, p)$$

oder, in anderen Schreibweisen,

$$\partial_j \partial_i f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{x_i x_j} \qquad (i, j = 1, \dots, p)$$

und nennen diese Funktionen die zweiten partiellen Ableitungen von f. Analog werden die dritten partiellen Ableitungen

$$\partial_k \partial_j \partial_i f = \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = f_{x_i x_j x_k} \qquad (i, j, k = 1, \dots, p)$$

und die höheren partiellen Ableitungen gebildet.

Beispiel 1. Aus $f(x, y) = \sin(xy)$ folgt

$$f_x(x, y) = y \cos(xy),$$
$$f_y(x, y) = x \cos(xy),$$
$$f_{xx}(x, y) = -y^2 \sin(xy),$$
$$f_{xy}(x, y) = \cos(xy) - xy \sin(xy),$$
$$f_{yx}(x, y) = \cos(xy) - xy \sin(xy),$$
$$f_{yy}(x, y) = -x^2 \sin(xy).$$

Die Übereinstimmung der partiellen Ableitungen f_{xy} und f_{yx} ist kein Zufall, denn der Satz von Hermann Amandus Schwarz (1843—1921) besagt, daß die Reihenfolge der Differentiationen vertauscht werden darf, wenn die zweiten partiellen Ableitungen stetig sind. Die Voraussetzungen können sogar noch abgeschwächt werden.

Satz. *Ist f eine in einem Gebiet G des Raumes R_p stetige reellwertige Funktion und besitzt f in G stetige partielle Ableitungen $\partial_i f$, $\partial_j f$, $\partial_i \partial_j f$, so existiert auch $\partial_i \partial_j f$ in G, und es ist $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$.*

Beweis. Da bei der Ableitung nach der i-ten und j-ten Variablen alle Variablen x_k mit $k \neq i, j$ konstant zu halten sind, genügt es, den Fall $p = 2$ zu betrachten. Es sei also f, f_x, f_y, f_{xy} stetig in G ($G \subseteq \mathsf{R}_2$) und $(a, b) \in G$. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir ein $\delta > 0$ mit

$$|f_{xy}(a + h, b + k) - f_{xy}(a, b)| < \varepsilon$$

für $\|(h, k)\| = \sqrt{h^2 + k^2} < \delta$ und setzen

$$g_k(x) := f(x, b + k) - f(x, b)$$

für $\|(x - a, k)\| < \delta$. Dann ist

$$g_k'(x) = f_x(x, b + k) - f_x(x, b),$$

und aus den Mittelwertsätzen folgt

$$\begin{aligned} &f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b) = g_k(a + h) - g_k(a) \\ &= h g_k'(a + \vartheta h) \\ &= h\big(f_x(a + \vartheta h, b + k) - f_x(a + \vartheta h, b)\big) \\ &= hk f_{xy}(a + \vartheta h, b + \vartheta' k) \qquad (0 < \vartheta < 1, 0 < \vartheta' < 1). \end{aligned}$$

Somit ist

$$\left| \frac{f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b)}{h \cdot k} - f_{xy}(a, b) \right|$$
$$= |f_{xy}(a + \vartheta h, b + \vartheta' k) - f_{xy}(a, b)| < \varepsilon.$$

Lassen wir hierin k gegen 0 streben, so erhalten wir

$$\left| \frac{f_y(a+h, b) - f_y(a, b)}{h} - f_{xy}(a, b) \right| \leq \varepsilon .$$

Da ε beliebig gewählt war, folgt

$$f_{xy}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(a+h, b) - f_y(a, b)}{h} = f_{yx}(a, b),$$

und der Satz ist bewiesen.

Wie im Fall der Funktionen einer Variablen nennen wir eine reellwertige Funktion aus R_p im Gebiet G *von der Ordnung* k, wenn in G alle partiellen Ableitungen bis zur k-ten Ordnung existieren und stetig sind. Die Reihenfolge der partiellen Ableitungen darf dann nach dem Satz von SCHWARZ beliebig permutiert werden.

Der nach SCHWARZ benannte Satz findet sich bereits 1721 bei NIKOLAUS I BERNOULLI (1687 bis 1759), 1755 bei EULER und 1797 bei LAGRANGE. Einen ersten Beweis eines wichtigen Spezialfalles des Satzes hatte schon 1739 ALEXIS CLAUDE CLAIRAUT (1713—1765) geliefert.

3.3.3. Die Taylorsche Formel

Wir ermitteln die Ableitungen der ganzrationalen Funktion

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n .$$

Es ist

$$\begin{aligned} p'(x) &= a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}, \\ p''(x) &= 1 \cdot 2 a_2 + \cdots + (n-1) \cdot n a_n x^{n-2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p^{(n)}(x) &= 1 \cdot 2 \cdots n a_n . \end{aligned}$$

Alle höheren Ableitungen verschwinden. Für $x = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} p(0) &= a_0, \\ p'(0) &= a_1, \\ p''(0) &= 1 \cdot 2 \cdot a_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ p^{(n)}(0) &= n!\, a_n . \end{aligned}$$

Somit ist

$$a_j = \frac{p^{(j)}(0)}{j!} \quad (0 \leq j \leq n),$$

d. h., jede ganzrationale Funktion p von höchstens n-tem Grade kann in der Form

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

dargestellt werden. Sie ist daher durch die Funktionswerte der Ableitungen von der 0-ten bis zur n-ten Ordnung an der Stelle 0 eindeutig bestimmt. Wir zeigen, daß Entsprechendes auch für jede Zahl a mit $a \neq 0$ gilt. Hierzu setzen wir

$$q(x) := p(x + a).$$

Dann ist q wiederum eine ganzrationale Funktion, und es ist

$$q^{(j)}(x) = p^{(j)}(x + a),$$

$$p(x + a) = q(x) = q(0) + \frac{q(0)}{1!}x + \cdots + \frac{q^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$= p(a) + \frac{p'(a)}{1!}x + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}x^n.$$

Ersetzen wir hierin x durch $x - a$, so erhalten wir

$$p(x) = p(a) + \frac{p'(a)}{1!}(x - a) + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n. \tag{1}$$

Diese Formel wird als *Entwicklung der ganzrationalen Funktion p an der Stelle a* bezeichnet. Wir ersehen aus ihr, daß die Funktion p durch ihre Ableitungen an einer beliebigen Stelle a bestimmt ist.

Ersetzen wir in (1) die Funktion p durch eine beliebige, etwa in einer Umgebung von a n-mal stetig differenzierbare Funktion f, so wird diese Gleichung im allgemeinen nicht für alle x aus dieser Umgebung erfüllt sein. Es zeigt sich aber, daß die rechte Seite von (1) die Funktion f in einer hinreichend kleinen Umgebung von a in einem noch zu präzisierenden Sinne sehr gut approximiert. Das Wesen des Satzes von Brook Taylor (1685—1731) besteht in der Untersuchung des Fehlers, den man begeht, wenn man die Funktion f durch die so gebildete ganzrationale Funktion ersetzt.

Es sei f eine in einer Umgebung von a mindestens $(n + 1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Entsprechend unserer Vorbemerkung betrachten wir die ganzrationale Funktion

$$p_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Wir bezeichnen diese Funktion als das *Taylorsche Näherungspolynom* n-ten Grades von f an der Stelle a. Der Vergleich mit (1) zeigt, daß

$$p_n^{(j)}(a) = f^{(j)}(a) \qquad (j = 0, 1, \ldots, n)$$

ist. Die Funktion f und ihr Näherungspolynom haben somit an der Stelle a die gleichen Ableitungen von der 0-ten bis zur n-ten Ordnung. Um genauere Aussagen über die Güte der Annäherung von f durch p_n machen zu können, setzen wir

$$R_{n+1}(a, x) := f(x) - p_n(x).$$

Nach Definition von p_n gilt dann die *Taylorsche Formel*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(a, x)$$

mit dem *Restglied* $R_{n+1}(a, x)$. Wir leiten eine Darstellung dieses Restgliedes her, die viele wichtige Anwendungen in der Analysis erfährt. Wir ersetzen x durch eine Konstante b und a durch eine Variable t. Mit $F(t) := R_{n+1}(t, b)$ gilt

$$\begin{aligned}
F(t) &= f(b) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(t)}{j!}(b-t)^j, \\
F'(t) &= -\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j+1)}(t)}{j!}(b-t)^j - \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(t)}{j!}(-1)\cdot j(b-t)^{j-1} \\
&= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j+1)}(t)}{j!}(b-t)^j \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(t)}{(j-1)!}(b-t)^{j-1}, \\
F'(t) &= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n, \qquad (2)
\end{aligned}$$

denn die letzte Summe geht durch eine Indextransformation in die vorletzte Summe über. Wir führen weiterhin die Hilfsfunktion $G(t) := (b-t)^k$ ein, wobei k eine positive natürliche Zahl ist. Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es ein ϑ mit $0 < \vartheta < 1$ und

$$\frac{F(a) - F(b)}{G(a) - G(b)} = \frac{F'\big(a + \vartheta(b-a)\big)}{G'\big(a + \vartheta(b-a)\big)}.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
&F(a) = R_{n+1}(a, b), \qquad F(b) = 0, \\
&G(a) = (b-a)^k, \qquad G(b) = 0, \\
&F'\big(a + \vartheta(b-a)\big) = -\frac{f^{(n+1)}\big(a + \vartheta(b-a)\big)}{n!}\big((b-a)(1-\vartheta)\big)^n, \\
&G'\big(a + \vartheta(b-a)\big) = -k\big((b-a)(1-\vartheta)\big)^{k-1},
\end{aligned}$$

und es folgt

$$\frac{F(a)}{(b-a)^k} = \frac{f^{(n+1)}\big(a+\vartheta(b-a)\big)}{kn!}(b-a)^{n-k+1}(1-\vartheta)^{n-k+1},$$

$$R_{n+1}(a,b) = F(a) = \frac{f^{(n+1)}\big(a+\vartheta(b-a)\big)}{kn!}(b-a)^{n+1}(1-\vartheta)^{n-k+1}.$$

Ersetzen wir nun wieder b durch x, so erhalten wir die *Restgliedformel* von Oskar Schlömilch (1823—1901)

$$R_{n+1}(a,x) = \frac{f^{(n+1)}\big(a+\vartheta(x-a)\big)}{kn!}(x-a)^{n+1}(1-\vartheta)^{n-k+1}. \tag{3}$$

Für $k = 1$ ergibt sich die *Restgliedformel von* Augustin-Louis Cauchy (1789 bis 1837)

$$R_{n+1}(a,x) = \frac{f^{(n+1)}\big(a+\vartheta(x-a)\big)}{n!}(x-a)^{n+1}(1-\vartheta)^{n}, \tag{4}$$

für $k = n + 1$ die *Restgliedformel von* Lagrange

$$R_{n+1}(a,x) = \frac{f^{(n+1)}\big(a+\vartheta(x-a)\big)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{5}$$

Mit unseren bisherigen Betrachtungen haben wir den *Satz von* Taylor (mit der Restgliedformel von Lagrange) bewiesen.

Satz 1. *Es sei f eine in einer Umgebung von a mindestens $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein ϑ mit $0 < \vartheta < 1$ und*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}\big(a+\vartheta(x-a)\big)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{6}$$

Man nennt die Formel (6) auch die *Taylorentwicklung* von f an der Stelle a mit dem Restglied $(n+1)$-ter Ordnung von Lagrange. Letzteres kann auch durch das Restglied von Schlömilch bzw. Cauchy ersetzt werden.

Für $n = 0$ geht (6) offenbar in den Mittelwertsatz der Differentialrechnung über. Im Spezialfall $a = 0$ erhalten wir aus (6) die nach Colin MacLaurin (1698—1746) benannte Formel

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!}x^{n+1}. \tag{7}$$

Setzen wir in (6) schließlich $h := x - a$, so erhalten wir die ebenfalls häufig auftretende Formel

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta h)}{(n+1)!}h^{n+1}. \tag{8}$$

Wir beweisen einen Satz über die Einzigkeit der Taylorentwicklung.

Satz 2. *Es sei f eine in der Umgebung von a $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, und es gebe reelle Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ mit*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} a_k h^k}{h^n} = 0. \tag{9}$$

Dann ist $a_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Beweis. Ersetzen wir $f(a+h)$ in (9) durch die rechte Seite von (8), so erhalten wir

$$\lim_{h\to 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{f^{(k)}(a)}{k!} - a_k\right)\frac{h^k}{h^n} + \frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta h)}{(n+1)!}h\right) = 0.$$

Dies ist wegen $k \leqq n$ nur für $\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!} = a_k$ möglich.

Die nach Taylor benannte Entwicklung der Funktion f an der Stelle a befand sich seit 1668 (allerdings ohne Restglied und Konvergenzbeweis) im Besitz von Gregory. Leibniz kannte 1694 Ergebnisse, die der Taylorschen Reihe gleichwertig sind. Bei Taylor findet sich (durch unstrengen Grenzübergang hergeleitet) diese Reihenentwicklung erst 1712 (gedruckt 1715 in „Methodus incrementorum"). Die MacLaurinsche Reihe ist vorhanden in MacLaurins „Treatise of Fluxions" (1742), kam jedoch auch schon 1715 bei Taylor vor. Ideen, die zur Reihenentwicklung mit abschätzbarem Restglied hätten führen können (Fortsetzung der Idee der ständigen partiellen Integration) finden sich in einem Brief de l'Hospitals an Joh. Bernoulli vom 16. 5. 1693).

Die Restgliedformel in der Form von Lagrange findet sich 1797 in dessen „Théorie des fonctions analytiques" — die Form von Schlömilch tritt bei diesem 1847 auf.

Beispiel 1. Wir entwickeln die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ an der Stelle $a = 0$. Wegen $f^{(n)}(x) = e^x$ $(n \in \mathbb{N})$ folgt aus (7) die Darstellung

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!}x^{n+1}. \tag{10}$$

Um diese Formel für die numerische Berechnung von e^x mit Angabe einer Fehlerschranke verwenden zu können, nehmen wir für das Restglied

$$R_{n+1}(0, x) = \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

eine Abschätzung vor. Ist b eine positive reelle Zahl, so gilt für alle x mit $|x| \leqq b$ die Ungleichung

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\vartheta x} \right| \leqq \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} 3^b.$$

Da die Exponentialreihe für alle reellen Zahlen b konvergiert, bilden ihre Glieder, also auch $\frac{b^{n+1}}{(n+1)!}$, eine Nullfolge. Mit hinreichend großem n können wir also erreichen, daß sich das Näherungspolynom im Intervall $[\![-b, b]\!]$ höchstens um eine beliebig kleine vorgegebene Zahl von der Funktion unterscheidet, und es ist

$$\lim_{n \to \infty} R_n(0, x) = 0 \qquad (x \in \mathsf{R}).$$

Aus (10) erhalten wir durch Grenzübergang wiederum die Reihendarstellung

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Es soll die Zahl e bis auf acht Dezimalen genau berechnet werden. Wir wählen dazu ein n mit $|R_{n+1}(0, 1)| < 10^{-10}$. Die weitere Rechnung wird zeigen, daß die Schranken 10^{-8} bzw. 10^{-9} für das gewünschte Ergebnis nicht ausreichen. Aus

$$|R_{n+1}| < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-10}$$

entnehmen wir, daß $n = 13$ gewählt werden kann. Wir berechnen die Summe

$$s_{13} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{13!}.$$

Es ist mit $0 \leqq \xi_i \leqq \frac{1}{2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 11)$

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} = 2{,}5000000000,$$

$$\frac{1}{3!} = 0{,}1666666667 - \xi_1 \, 10^{-10},$$

$$\frac{1}{4!} = 0{,}0416666667 - \xi_2 \, 10^{-10},$$

$$\frac{1}{5!} = 0{,}0083333333 + \xi_3 \, 10^{-10},$$

$$\frac{1}{6!} = 0{,}0013888889 - \xi_4\, 10^{-10},$$

$$\frac{1}{7!} = 0{,}0001984127 - \xi_5\, 10^{-10},$$

$$\frac{1}{8!} = 0{,}0000248016 - \xi_6\, 10^{-10},$$

$$\frac{1}{9!} = 0{,}0000027557 + \xi_7\, 10^{-10},$$

$$\frac{1}{10!} = 0{,}0000002756 - \xi_8\, 10^{-10},$$

$$\frac{1}{11!} = 0{,}0000000251 - \xi_9\, 10^{-10},$$

$$\frac{1}{12!} = 0{,}0000000021 - \xi_{10}\, 10^{-10},$$

$$\frac{1}{13!} = 0{,}0000000002 - \xi_{11}\, 10^{-10}.$$

Damit erhalten wir für s_{13} die Abschätzung

$$2{,}7182818286 - \frac{9}{2}\, 10^{-10} < s_{13} < 2{,}7182818286 + \frac{2}{2}\, 10^{-10},$$

$$2{,}7182818281 < s_{13} < 2{,}7182818287,$$

und somit gilt wegen $s_{13} < e < s_{13} + 10^{-10}$ für e die Abschätzung

$$2{,}7182818281 < e < 2{,}7182818287.$$

Beispiel 2. Nach 3.3.1. (2), (3) ergeben sich als Entwicklung der trigonometrischen Funktionen $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ an der Stelle $a = 0$ wegen $f^{(2k)}(0) = g^{(2k-1)}(0) = 0$, $f^{(2k+1)}(0) = g^{(2k)}(0) = (-1)^k$ die Darstellungen

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$+ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \vartheta x, \tag{11}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$$

$$+ (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cos \vartheta x. \tag{12}$$

Wegen $|\cos \vartheta x| \leqq 1$ gilt für alle x mit $|x| \leqq b$ die Abschätzung

$$|R_{2n+1}(0, x)| \leqq \frac{b^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{13}$$

bzw.

$$|R_{2n}(0, x)| \leqq \frac{b^{2n}}{(2n)!}. \tag{14}$$

Auf den rechten Seiten dieser Ungleichungen stehen die Glieder einer Nullfolge. Auf Grund der Periodizität und der Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen genügt es, die Funktionswerte von $\cos x$ und $\sin x$ für $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ zu berechnen. Dann können wir (13), (14) durch die für numerische Berechnungen bequemen Abschätzungen

$$|R_{2n+1}(0, x)| \leqq \frac{1}{(2n+1)!} \tag{13'}$$

bzw.

$$|R_{2n}(0, x)| \leqq \frac{1}{(2n)!} \tag{14'}$$

ersetzen. Für kleine $|x|$ gelten die Näherungsformeln

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}, \qquad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}. \tag{15}$$

Der Grenzübergang $n \to \infty$ in (11) und (12) führt zu den Definitionsgleichungen dieser Funktionen zurück.

Beispiel 3. Da stets

$$(\sinh x)^{(2n)} = \sinh x, \qquad (\sinh x)^{(2n+1)} = \cosh x,$$

$$(\cosh x)^{(2n)} = \cosh x, \qquad (\cosh x)^{(2n+1)} = \sinh x \qquad (n \in \mathbf{N})$$

gilt, folgt analog zu Beispiel 2

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cosh \vartheta x, \tag{16}$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cosh \vartheta x. \tag{17}$$

Beispiel 4. Für $1 + x > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+x), & f(0) &= 0,\\
f'(x) &= (1+x)^{-1}, & f'(0) &= 1,\\
f''(x) &= (-1)(1+x)^{-2}, & f''(0) &= -1,\\
f'''(x) &= (-1)(-2)(1+x)^{-3}, & f'''(0) &= (-1)(-2),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}, & f^{(n)}(0) &= (-1)^{n-1}(n-1)!,\\
f^{(n+1)}(x) &= (-1)^n\, n!\,(1+x)^{-n-1}
\end{aligned}$$

und damit

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(0, x), \tag{18}$$

wobei das Restglied in der Form von Lagrange durch

$$R_{n+1}(0, x) = (-1)^n \frac{(1+\vartheta x)^{-n-1}}{n+1} x^{n+1} = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\vartheta x)^{n+1}} \tag{19}$$

und in der Form von Cauchy durch

$$R_{n+1}(0, x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}(1-\vartheta')^n}{(1+\vartheta' x)^{n+1}} \tag{20}$$

gegeben ist. Für $0 < x \leqq 1$ setzen wir

$$\vartheta_1 := \frac{1}{(1+\vartheta x)^{n+1}}.$$

Dann ist offenbar $0 < \vartheta_1 < 1$, und aus (19) folgt

$$R_{n+1}(0, x) = (-1)^n \vartheta_1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (0 < x \leqq 1). \tag{21}$$

Für $-1 < x \leqq 0$ setzen wir

$$\vartheta_2 := \left(\frac{1-\vartheta'}{1+\vartheta' x}\right)^n \frac{1+x}{1+\vartheta' x}.$$

Wegen $0 < 1 - \vartheta' < 1 + \vartheta' x$, $1 + \vartheta' x > 1 + x > 0$ ist $0 < \vartheta_2 < 1$, und aus (20) folgt

$$R_{n+1}(0, x) = (-1)^n \frac{\vartheta_2 x^{n+1}}{1+x} \qquad (-1 < x \leqq 0). \tag{22}$$

Aus (21) und (22) ersehen wir, daß

$$\lim_{n\to\infty} R_n(0, x) = 0 \qquad (-1 < x \leqq 1)$$

ist. Für $x = 1$ ergibt sich die Darstellung

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + (-1)^n \frac{\vartheta_1}{n+1}.$$

Für numerische Berechnungen von ln 2 ist diese Darstellung schlecht geeignet. Bestimmen wir aber x aus

$$\frac{1+x}{1-x} = 2,$$

d. h., setzen wir $x = \frac{1}{3}$, so folgt aus

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \cdots + (-1)^{2n-1}\frac{x^{2n}}{2n} + (-1)^{2n}\vartheta_1 \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{2n}}{2n} - \vartheta_2 \frac{x^{2n+1}}{1-x}$$

die Beziehung

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right) + x^{2n+1}\left(\frac{\vartheta_1}{2n+1} + \frac{\vartheta_2}{1-x}\right).$$

Für $n = 5$ kann der letzte Summand durch

$$\frac{1}{3^{11}}\left(\frac{\vartheta_1}{11} + \frac{\vartheta_2}{1-\frac{1}{3}}\right) < \frac{1}{3^{11}}\,\frac{35}{22} < \frac{1}{10^5}$$

abgeschätzt werden, womit bereits eine recht gute Annäherung erzielt ist. Der Grenzübergang $n \to \infty$ in (18) ergibt

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad (-1 < x \leqq 1). \tag{23}$$

Ersetzen wir hierin x durch $x - 1$, so erhalten wir die bisher noch nicht aufgetretene Reihendarstellung

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} \qquad (0 < x \leqq 2)$$

der Logarithmusfunktion in einer Teilmenge ihres Definitionsbereichs. Insbesondere ist

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots. \tag{24}$$

Beispiel 5. Für die Funktion

$$f(x) = (1 + x)^\alpha$$

mit $1 + x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)\,(1 + x)^{\alpha - n},$$

$$f^{(n)}(x) = n!\,\binom{\alpha}{n}\,(1 + x)^{\alpha - n},$$

und die Taylorsche Formel mit dem Restglied von CAUCHY lautet

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n$$

$$+ \binom{\alpha}{n + 1} (n + 1)\, x^{n+1} (1 + \vartheta x)^{\alpha - n - 1} (1 - \vartheta)^n. \tag{25}$$

Setzen wir

$$a_n := \binom{\alpha}{n} n x^n,$$

so gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x| \cdot \left|\frac{\alpha - n}{n + 1}\right| \frac{n + 1}{n} = |x| \cdot \left|\frac{\alpha - n}{n}\right|.$$

Ist $|x| < 1$, so wird für hinreichend großes n die rechte Seite kleiner als eine feste Zahl ϱ mit $\varrho < 1$. Aus dem Quotientenkriterium folgt die absolute Konvergenz der Reihe mit den Gliedern a_n, und folglich gilt $a_n \to 0$ für $n \to \infty$. Um

$$\lim_{n \to \infty} R_n(0, x) = 0 \qquad (|x| < 1)$$

zu beweisen, brauchen wir nur noch zu zeigen, daß $(1 + \vartheta x)^{\alpha - n - 1} (1 - \vartheta)^n$ beschränkt ist.

Es ist

$$(1 + \vartheta x)^{\alpha - n - 1} (1 - \vartheta)^n = \left(\frac{1 - \vartheta}{1 + \vartheta x}\right)^n (1 + \vartheta x)^{\alpha - 1}$$

$$< (1 + \vartheta x)^{\alpha - 1} \leqq \begin{cases} 2^{\alpha - 1} & \text{für} \quad \alpha \geqq 1, \\ (1 - |x|)^{\alpha - 1} & \text{für} \quad \alpha < 1, \end{cases}$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Aus (25) erhalten wir die Reihendarstellung

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad (|x| < 1) \tag{26}$$

der allgemeinen Potenzfunktion in einer Teilmenge ihres Definitionsbereichs.

3.3.4. Die Taylorsche Formel für Funktionen von mehreren Variablen

Wir können den Taylorschen Satz auch auf Funktionen von mehreren Variablen übertragen.

Satz. *Es sei f eine in einem Gebiet G des Raumes R_p definierte reellwertige Funktion der Ordnung $n+1$. Ist die Strecke mit den Endpunkten $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}$ in G enthalten, so gibt es ein ϑ mit $0 < \vartheta < 1$ und*

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) &+ \sum_{j=1}^{p} h_j \partial_j f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} h_i h_j \partial_i \partial_j f(\boldsymbol{a}) \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{1}{n!} \sum_{i_1=1}^{p} \cdots \sum_{i_n=1}^{p} h_{i_1} \cdots h_{i_n} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} f(\boldsymbol{a}) \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} \sum_{i_1=1}^{p} \cdots \sum_{i_{n+1}=1}^{p} h_{i_1} \cdots h_{i_{n+1}} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_{n+1}} f(\boldsymbol{a}+\vartheta \boldsymbol{h}). \end{aligned} \tag{1}$$

Beweis. Wir setzen $F(t) := f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h})$ $(0 \leqq t \leqq 1)$. Nach der verallgemeinerten Kettenregel 3.2.3. (5) ist, wenn wir hierin $x_i(t) := a_i + th_i$ und damit $x_i'(t) = h_i$ setzen,

$$F'(t) = \sum_{j=1}^{p} h_j \partial_j f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h}).$$

Ersetzen wir in der verallgemeinerten Kettenregel f durch $\partial_j f$, so erhalten wir analog

$$F''(t) = \sum_{j=1}^{p} h_j \sum_{i=1}^{p} h_i \partial_i \partial_j f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h}),$$

$$F''(t) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} h_i h_j \partial_i \partial_j f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h}).$$

In dieser Weise fortfahrend erhalten wir

$$F^{(n)}(t) = \sum_{i_1=1}^{p} \cdots \sum_{i_n=1}^{p} h_{i_1} \cdots h_{i_n} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h}).$$

Nach dem Taylorschen Satz für Funktionen von einer Variablen ist

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \frac{F^{(n+1)}(\vartheta)}{(n+1)!},$$

und wenn wir die gefundenen Darstellungen für die Ableitungen von F einsetzen, erhalten wir die Behauptung.

Wir betrachten einige Spezialfälle. Für $n = 0$ ergibt sich

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{j=1}^{p} h_j \partial_j f(\boldsymbol{a} + \vartheta \boldsymbol{h}). \tag{2}$$

Dies ist der *Mittelwertsatz für reellwertige Funktionen von mehreren Variablen*. Für Extremwertuntersuchungen wird der Spezialfall $n = 1$ von Bedeutung sein. Wir erhalten

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{j=1}^{p} h_j \partial_j f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} h_i h_j \partial_i \partial_j f(\boldsymbol{a} + \vartheta \boldsymbol{h}). \tag{3}$$

Die Formel (2) bzw. (3) geben wir für den Fall $p = 2$ in ausführlicher Schreibweise an. Hierzu ist etwa $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_p)$ durch (a, b) und $\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_p)$ durch (h, k) zu ersetzen. Dann ist

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + hf_x(a + \vartheta h, b + \vartheta k) + kf_y(a + \vartheta h, b + \vartheta k) \tag{4}$$

bzw.

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) = f(a, b) &+ hf_x(a, b) + kf_y(a, b) \\ &+ \frac{1}{2}\,[h^2 f_{xx}(a + \vartheta h, b + \vartheta k) + 2hkf_{xy}(a + \vartheta h, b + \vartheta k) \\ &+ k^2 f_{yy}(a + \vartheta h, b + \vartheta k)]. \end{aligned} \tag{5}$$

In den Formeln (1) bis (5) ist wesentlich, daß auf den rechten Seiten in allen Argumenten jeweils dieselbe reelle Zahl ϑ erscheint.

3.3.5. Extremwerte und Wendepunkte. Kurvendiskussion

Bevor wir die Untersuchung von Funktionen auf Extremwerte mit den Methoden der Differentialrechnung durchführen, wollen wir die hierbei verwendeten Begriffsbildungen präzisieren.

Definition 1. Es sei f eine reellwertige Funktion aus $\mathbb{R}$ (oder aus einem metrischen Raum). Die Funktion f besitzt im Punkt a ein *Maximum*, wenn stets

$$f(x) \leqq f(a) \qquad \big(x \in D(f)\big) \tag{1}$$

gilt. Sie besitzt in a ein *lokales Maximum*, wenn a ein Häufungspunkt von $D(f)$ ist und wenn es eine ε-Umgebung von a mit

$$f(x) \leqq f(a) \qquad \big(x \in D(f) \cap U_\varepsilon(a)\big) \tag{2}$$

gibt. Die Funktion besitzt in a ein *Minimum* bzw. ein *lokales Minimum*, wenn (1) bzw. (2) mit dem Zeichen $\geqq$ an Stelle von $\leqq$ erfüllt sind.

Gilt in (1) bzw. (2) das Gleichheitszeichen nur für $x = a$, so werden wir, wenn wir diesen Sachverhalt besonders hervorheben wollen, diesen Begriffsbildungen das Beiwort „eigentlich" hinzufügen. So hat z. B. die Funktion f in Abb. 3.20 im Punkt a_1 ein Maximum, in a_2 ein lokales eigentliches Maximum, in a_3 ein eigentliches Minimum und in a_4 ein lokales Minimum.

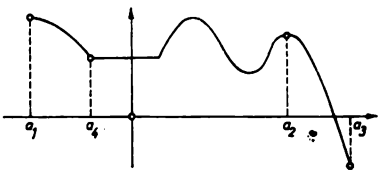

Abb. 3.20

Als Oberbegriff für die Begriffe „Maximum" bzw. „Minimum" verwenden wir den Begriff *Extremwert*. Es ist ein weit verbreiteter Irrtum, daß Extremwertbestimmungen stets mit den Hilfsmitteln der Differentialrechnung zu führen sind. Unsere nachfolgenden Untersuchungen werden zeigen, daß mit den Methoden der Differentialrechnung nur teils *hinreichende*, teils *notwendige* Bedingungen für *lokale* Extremwerte angegeben werden können. Sind die Voraussetzungen der nachfolgenden Sätze nicht erfüllt, so müssen zur Extremwertbestimmung andere Methoden entwickelt werden. Als erstes geben wir eine notwendige Bedingung an.

Satz 1. *Besitzt eine in einem inneren Punkt a ihres Definitionsbereichs differenzierbare reelle Funktion f in diesem Punkt einen Extremwert, so verschwindet die Ableitung von f im Punkt a.*

Beweis. Es sei etwa $f(x) \leqq f(a)$ für alle x mit $x \in U_\varepsilon(a)$. Dann ist

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \begin{cases} \leqq 0 & \text{für} \quad h > 0, \\ \geqq 0 & \text{für} \quad h < 0. \end{cases}$$

Der Grenzübergang $h \to 0$ mit $h > 0$ bzw. $h < 0$ liefert $f'(a) \leqq 0$ bzw. $f'(a) \geqq 0$ und damit $f'(a) = 0$.

Die Aussage $f'(a) = 0$ bedeutet, daß die Tangente im Punkt $P\big(a, f(a)\big)$ den Anstieg 0 hat, d. h. parallel zu x-Achse verläuft.

Beispiel 1. Die Funktion

$$f(x) = x^2 - 2x + 6 + \sin^2(x - 1)$$

ist an der Stelle $x = 1$ differenzierbar, und es ist

$$f(x) = (x - 1)^2 + 5 + \sin^2(x - 1) \geqq 5 = f(1).$$

Somit muß $f'(1) = 0$ sein.

Eine hinreichende Bedingung formulieren wir in

Satz 2. *Es sei f eine im Intervall $]a, b[$ differenzierbare reelle Funktion.*[1]) *Wechselt die Ableitung der Funktion beim Durchgang durch c mit $c \in]a, b[$ das Vorzeichen, d. h., gilt für hinreichend kleines positives ε und für $c - \varepsilon \leqq x_1 < c < x_2 \leqq c + \varepsilon$ stets $f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0$, so besitzt f in c einen eigentlichen lokalen Extremwert.*

Beweis. Für $0 < |h| < \varepsilon$ ist $f(c + h) = f(c) + hf'(c + \vartheta h)$ mit $0 < \vartheta < 1$. Der Summand $hf'(c + \vartheta h)$ hat stets das gleiche Vorzeichen, denn mit h wechselt nach Voraussetzung auch $f'(c + \vartheta h)$ das Vorzeichen. Ist $hf'(c + \vartheta h)$ negativ bzw. positiv, so ist stets $f(c + h) < f(c)$ bzw. $f(c + h) > f(c)$, und die Behauptung ist bewiesen.

Zur Einführung des Begriffes „Wendepunkt" betrachten wir die Lagebeziehung zwischen dem Graphen einer differenzierbaren Funktion f in der Umgebung eines Punktes a und der Tangente im zugehörigen Kurvenpunkt. Abgesehen von dem hier nicht näher untersuchten Fall, daß es in jeder Umgebung des betrachteten

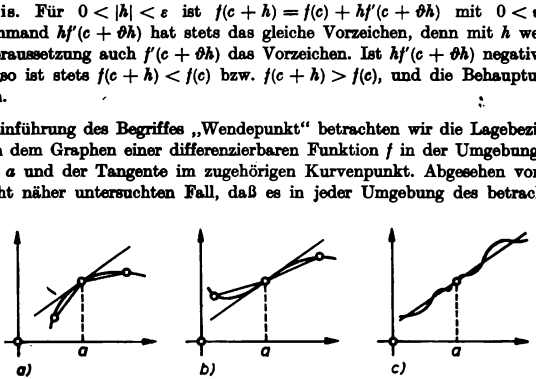

Abb. 3.21

Punktes weitere Punkte der Kurve gibt, die auf der Tangente liegen (Abb. 3.21c), unterscheiden wir zwei Fälle. In einer Umgebung des Punktes kann die Kurve ganz auf einer Seite der Tangente liegen (Abb. 3.21a), oder die Tangente kann die Kurve durchsetzen (Abb. 3.21b). Um ein analytisches Kriterium für diesen Sachverhalt herzuleiten, vergleichen wir den Anstieg $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$ der zu $a, a + h$

[1]) Stetige Differenzierbarkeit braucht nicht gefordert zu werden.

gehörenden Sekante mit dem Anstieg $f'(a)$ der Tangente. Die Differenz zwischen Sekanten- und Tangentenanstieg hat für $h > 0$ und für $h < 0$ im ersten Fall unterschiedliche, im zweiten Fall gleiche Vorzeichen. Dies führt zur

Definition 2. Eine in einer Umgebung von a definierte und in a differenzierbare reelle Funktion f besitzt in a einen *Wendepunkt*, wenn für hinreichend kleine $|h|$ $(h \neq 0)$ stets

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} > f'(a) \tag{3}$$

oder stets

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} < f'(a) \tag{4}$$

gilt. Ist darüber hinaus $f'(a) = 0$, so heißt dieser Wendepunkt auch *Stufenpunkt*.

Aus dieser Definition ergibt sich sofort das folgende hinreichende Kriterium für die Existenz eines Wendepunktes.

Satz 3. *Besitzt die Ableitung f' einer in einer Umgebung von a differenzierbaren reellen Funktion f einen eigentlichen lokalen Extremwert, so besitzt f in a einen Wendepunkt.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit besitze f' in a ein eigentliches lokales Maximum. Für hinreichend kleine $|h|$ $(h \neq 0)$ ist dann

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a+\vartheta h) < f'(a),$$

und (4) ist erfüllt.

Beispiel 2. Die Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ besitzt an der Stelle $x = 1$ einen Wendepunkt, denn ihre Ableitung besitzt in diesem Punkt ein eigentliches Minimum.

Wir betrachten nun eine Klasse von Funktionen, für die sich die Untersuchung auf Extremwerte und Wendepunkte mit Hilfe einer Taylorentwicklung besonders übersichtlich gestalten läßt. Mit $\mathfrak{T}(a)$ bezeichnen wir die Menge aller reellen Funktionen f, für die es ein $m \geqq 2$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

1. Die Funktion f ist in einer Umgebung von a mindestens m-mal stetig differenzierbar.
2. Es ist $f^{(m)}(a) \neq 0$.
3. Aus $2 \leqq k < m$ folgt $f^{(k)}(a) = 0$.

Für jede Funktion f aus $\mathfrak{T}(a)$ ist die Zahl m als kleinste natürliche Zahl m mit $m \geqq 2$ und $f^{(m)}(a) \neq 0$ durch diese Bedingung eindeutig bestimmt. Die Taylorentwicklung einer solchen Funktion lautet offenbar

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f^{(m)}\big(a + \vartheta(x-a)\big)}{m!}\,(x-a)^m. \tag{5}$$

Hat der letzte Summand in (5) positives bzw. negatives Vorzeichen, so liegt der Kurvenpunkt $P\big(x, f(x)\big)$ oberhalb bzw. unterhalb der Tangente, deren Gleichung

$$y = f(a) + f'(a)\,(x-a)$$

durch die ersten beiden Summanden auf der rechten Seite von (5) bestimmt ist (Abb. 3.22). Die Lage des Kurvenpunktes zur Tangente wird also durch das Vorzeichen von $f^{(m)}\big(a + \vartheta(x-a)\big)\,(x-a)^m$ bestimmt. Wegen der Stetigkeit von $f^{(m)}$ und wegen $f^{(m)}(a) \neq 0$ gibt es eine Umgebung $U_\varepsilon(a)$, in der stets $f^{(m)}(x) \neq 0$ ist.

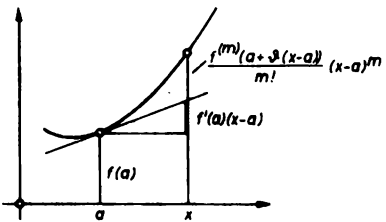

Abb. 3.22

In dieser Umgebung haben dann $f^{(m)}(x)$ und $f^{(m)}(a)$ stets dasselbe Vorzeichen, und die Lage des Kurvenpunktes wird durch das Vorzeichen von $f^{(m)}(a)\,(x-a)^m$ bestimmt. Ist m gerade bzw. ungerade, so hat $(x-a)^m$ für $x > a$ das gleiche bzw. entgegengesetzte Vorzeichen wie für $x < a$. Ein Wendepunkt liegt also genau dann vor, wenn m ungerade ist. Ist m gerade, so liegt die Kurve in der betrachteten Umgebung ganz auf einer Seite der Tangente, und die Kurve ist für $f^{(m)}(a) > 0$ „von unten konvex", für $f^{(m)}(a) < 0$ „von unten konkav" (Abb. 3.23).

Eine Funktion f aus $\mathfrak{T}(a)$ besitzt hiernach genau dann einen lokalen Extremwert an der Stelle a, wenn m gerade und $f'(a) = 0$ ist. Dieser Extremwert ist ein Maximum bzw. ein Minimum, je nachdem, ob $f^{(m)}(a)$ negativ bzw. positiv ist. Ist $f'(a) = 0$ und m ungerade, so besitzt die Funktion an der Stelle a einen Stufenpunkt (Abb. 3.24). Für Funktionen f, die an jeder Stelle a ihres Definitionsbereichs zur Menge $\mathfrak{T}(a)$ gehören, können wir somit notwendige und hinreichende Bedingungen für das Vorliegen von lokalen Extremwerten und Wendepunkten formulieren.

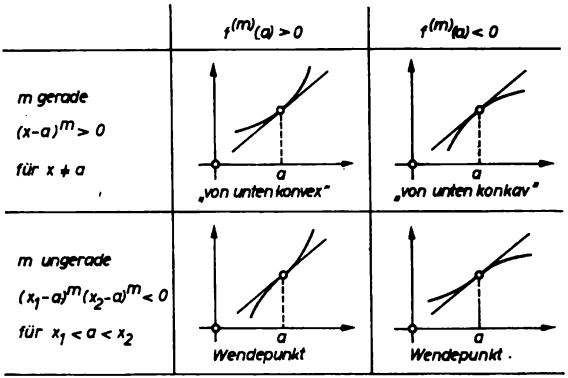

Abb. 3.23

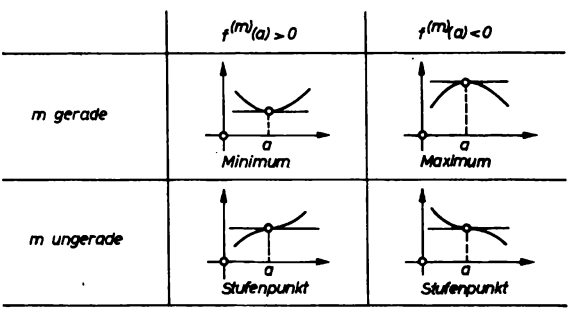

Abb. 3.24

Satz 4. *Eine Funktion f aus $\mathfrak{T}(a)$ besitzt an der Stelle a einen lokalen eigentlichen Extremwert genau dann, wenn $f'(a) = 0$ und die kleinste natürliche Zahl m mit $m \geqq 2$ und $f^{(m)}(a) \neq 0$ gerade ist. Im Fall $f^{(m)}(a) < 0$ liegt ein Maximum, im Fall $f^{(m)}(a) > 0$ ein Minimum vor.*

Die Funktion besitzt an der Stelle a einen Wendepunkt genau dann, wenn die kleinste natürliche Zahl m mit $m \geqq 2$ und $f^{(m)}(a) \neq 0$ ungerade ist.

Die in Satz 1 formulierte notwendige Bedingung für das Auftreten lokaler Extremwerte fand FERMAT 1629. Ein hinreichendes Kriterium ist bei ihm 1643 in Ansätzen erkennbar, bei LEIBNIZ ist die Bedingung 1683 völlig klar ausgesprochen.

GILES PERSONE DE ROBERVAL (1602—1675) entdeckte 1638 die Wendepunkte an der sogenannten Konchoide der Geraden $((x-a)^2(x^2+y^2)-kx^2=0)$, und FERMAT erschloß daraus die allgemeine Wendepunktbedingung.

Beispiel 3. Für die Funktion

$$f(x) = 3 + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{2}{3}x^3$$

gilt

$$\begin{aligned} f(0) &= 3 \text{ und} \\ f'(x) &= \cos 2x + 2x^2, & f'(0) &= 1, \\ f''(x) &= -2\sin 2x + 4x, & f''(0) &= 0, \\ f'''(x) &= -4\cos 2x + 4, & f'''(0) &= 0, \\ f^{(4)}(x) &= 8\sin 2x, & f^{(4)}(0) &= 0, \\ f^{(5)}(x) &= 16\cos 2x, & f^{(5)}(0) &= 16. \end{aligned}$$

Somit ist $m = 5$, und folglich besitzt die Funktion f im Punkt $x = 0$ einen Wendepunkt. Die Taylorentwicklung lautet

$$f(x) = 3 + x + \frac{16}{120}x^5\cos 2\vartheta x.$$

In der Umgebung von $P(0, 3)$ schmiegt sich die Kurve sehr eng an die Tangente mit der Gleichung $y = x + 3$ an.

Beispiel 4. Einer gegebenen Kugel mit dem Radius r soll ein gerader Kreiszylinder einbeschrieben werden. Wie muß das Verhältnis von Zylinderhöhe h und Zylinderdurchmesser d gewählt werden, damit

a) das Volumen bzw.

b) der Mantel bzw.

c) die Oberfläche

des Zylinders möglichst groß wird?

Die Größen, die zu einem Extremwert gemacht werden sollen, sind

$$\begin{aligned} V &= \pi\frac{d^2}{4}h && \text{(Volumen)}, \\ M &= \pi d h && \text{(Mantel)}, \\ F &= \pi d h + \pi\frac{d^2}{2} && \text{(Oberfläche)}. \end{aligned}$$

Hierbei sind d und h durch die Bedingung $d^2 + h^2 = 4r^2$ miteinander verknüpft (Abb. 3.25). Wir können daher h als Funktion von d ausdrücken (oder umgekehrt) und in die obigen Formeln einsetzen. Dann sind V, M und F nur noch von einer Variablen abhängig. Die Rechnungen gestalten sich aber einfacher, wenn wir h und d

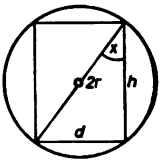

Abb. 3.25

durch den Winkel x ausdrücken (Abb. 3.25). Mit $h = 2r \cos x$, $d = 2r \sin x$ erhalten wir

$$V = 2\pi r^3 \sin^2 x \cos x,$$
$$M = 2\pi r^2 \sin 2x,$$
$$F = 2\pi r^2 \sin x\,(2 \cos x + \sin x).$$

Für $0 < x < \frac{2}{\pi}$ sind diese Funktionen stets positiv und nehmen für $x = 0$ oder $x = \frac{\pi}{2}$ den Wert 0 an. Sie haben daher ihr Maximum an einer Stelle x_V bzw. x_M bzw. x_F im Innern des Intervalls, und an dieser Stelle muß die Ableitung der differenzierbaren Funktion V bzw. F bzw. M verschwinden. Aus

$$V' = 2\pi r^3 \sin x\,[2 \cos^2 x - \sin^2 x],$$
$$M' = 4\pi r^2 \cos 2x,$$
$$F' = 2\pi r^2\,[2 \cos 2x + \sin 2x]$$

ergeben sich wegen $\tan x > 0$ für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ die notwendigen Bedingungen

$$2 \cos^2 x_V = \sin^2 x_V, \qquad \tan x_V = \sqrt{2},$$

$$\cos 2x_F = 0, \qquad x_F = \frac{\pi}{4}, \qquad \tan x_F = 1,$$

$$2 \cos 2x_M + \sin 2x_M = 0, \qquad -2 = \tan 2x_M = \frac{2 \tan x_M}{1 - \tan^2 x_M},$$

$$\tan^2 x_M - \tan x_M - 1 = 0, \qquad \tan x_M = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

In allen Fällen gibt es genau eine Nullstelle der Ableitung, und an dieser Stelle nimmt die im Intervall $\left]\!\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\!\right[$ definierte Funktion ihr Maximum an. Die gesuchten Längenverhältnisse sind

a) $\frac{h}{d} = \sqrt{2}$,

b) $\frac{h}{d} = 1$,

c) $\frac{h}{d} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

3.3.6. Extremwerte von Funktionen mehrerer Variabler

Die Theorie der Extremwerte von Funktionen mehrerer Variabler können wir hier nur kurz streifen.

Satz 1. *Existieren die partiellen Ableitungen einer in einem Gebiet G des Raumes R_p definierten reellwertigen Funktion f in einem Punkt $\boldsymbol{a}$ mit $\boldsymbol{a} \in G$ und besitzt f in $\boldsymbol{a}$ einen Extremwert, so verschwinden alle partiellen Ableitungen im Punkt $\boldsymbol{a}$.*

Beweis. Besitzt f in $\boldsymbol{a}$ einen Extremwert, so besitzen die Funktionen φ_i mit $\varphi_i(t) = f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}_i)$ im Punkt 0 einen Extremwert. Nach 3.3.5., Satz 1, ist $0 = \varphi_i'(0) = \partial_i f(\boldsymbol{a})$.

Ebenso wie im Fall der Funktionen von einer Variablen sind die hiermit bewiesenen notwendigen Bedingungen nicht hinreichend. Eine hinreichende Bedingung für den Fall $p = 2$ liefert

Satz 2. *Ist eine reellwertige Funktion f in einem Gebiet G aus R_2 von der Ordnung 2, gilt $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ und ist*

$$f_{xx}(a, b)\, f_{yy}(a, b) - \big(f_{xy}(a, b)\big)^2 > 0, \tag{1}$$

so besitzt f im Punkt (a, b) einen eigentlichen lokalen Extremwert.

Beweis. Wegen der Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen gibt es eine ε-Umgebung U von (a, b) derart, daß die Bedingung (1) auch für alle Punkte dieser Umgebung erfüllt ist. Für keinen Punkt dieser Umgebung kann f_{xx} verschwinden, da sonst (1) nicht erfüllt wäre. Daher hat f_{xx} in U stets dasselbe Vorzeichen. Wählen wir h, k mit $(h, k) \neq (0, 0)$ und $(a + h, b + k) \in U$, so gehört für $0 < \vartheta < 1$ auch der Punkt $(a + \vartheta h, b + \vartheta k)$ zu U. Zur Abkürzung setzen wir

$$A := f_{xx}(a + \vartheta h, b + \vartheta k),$$
$$B := f_{xy}(a + \vartheta h, b + \vartheta k),$$
$$C := f_{yy}(a + \vartheta h, b + \vartheta k).$$

Die Formel 3.3.4. (5) lautet nun

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{1}{2}[Ah^2 + 2Bhk + Ck^2],$$

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{1}{2A}[A^2h^2 + 2ABhk + ACk^2],$$

$$2A \cdot [f(a+h, b+k) - f(a, b)] = (Ah + Bk)^2 + (AC - B^2)\,k^2.$$

Für $k = 0$ ist $h \neq 0$, und die rechte Seite ist gleich A^2h^2, also positiv. Für $k \neq 0$ ist die rechte Seite nicht kleiner als $(AC - B^2)\,k^2$ und damit wiederum positiv. Daher gilt stets

$$2f_{xx}(a + \vartheta h, b + \vartheta k)\,[f(a+h, b+k) - f(a, b)] > 0.$$

Es folgt

$$f(a+h, b+k) \gtrless f(a, b),$$

je nachdem, ob f_{xx} an der Stelle (a, b) und damit auch in der Umgebung U von (a, b) positiv oder negativ ist. Im ersten Fall liegt ein eigentliches lokales Minimum, im zweiten Fall ein lokales Maximum vor.

Ohne Beweis vermerken wir, daß im Fall $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ kein Extremwert vorliegen kann. Im Fall $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ sind beide Fälle möglich.

Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2 + 2x - 10y + 5.$$

Es ist

$$f_x(x, y) = 2x + 2y + 2, \qquad f_y(x, y) = 2x + 8y - 10,$$

$$f_{xx}(x, y) = 2, \qquad f_{xy}(x, y) = 2, \qquad f_{yy}(x, y) = 8.$$

Notwendige Bedingungen für das Vorliegen eines Extremwertes sind

$$2x + 2y + 2 = 0, \qquad 2x + 8y - 10 = 0.$$

Sie sind nur für $x = -3$, $y = 2$ erfüllt. Wegen $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 12 > 0$ liegt ein lokaler Extremwert vor, und zwar wegen $f_{xx} = 2 > 0$ ein lokales Minimum.

3.3.7. Grenzwertbestimmungen mit Hilfe der Differentialrechnung

Ist eine Funktion als der Quotient zweier in einem Intervall definierter Funktionen f, g gegeben, so ist sie in den Punkten, in denen der Nenner verschwindet, nicht definiert. Sind die Funktionen stetig und ist f an einer isolierten Nullstelle a des Nenners von 0 verschieden, so besitzt der Quotient an der Stelle a einen uneigentlichen links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert. Völlig offen ist dagegen das Verhalten

des Quotienten in einer Umgebung einer gemeinsamen Nullstelle von Zähler- und Nennerfunktion. Bei differenzierbaren Funktionen kann diese Frage in vielen Fällen mit Hilfe einer nach BERNOULLI-DE L'HOSPITAL benannten Regel entschieden werden. Um nicht eine Vielzahl von Regeln formulieren zu müssen, betrachten wir gleichzeitig verschiedene Formen des Grenzübergangs und stellen die dem Grenzübergang entsprechenden Voraussetzungen über das Intervall, in dem die Funktionen f, g differenzierbar sein müssen, in der nachfolgenden Tabelle zusammen.

Grenzübergang	Differenzierbarkeitsintervall für f, g
a) $x \downarrow a$	$a < x < a + h$
b) $x \uparrow a$	$a - h < x < a$
c) $x \to a$	$0 < \lvert x - a \rvert < h$
d) $x \to \infty$	$x > R$ $\left.\right\}$ $(R > 0)$
e) $x \to -\infty$	$x < -R$ $\left.\right\}$

Unter diesen Voraussetzungen gilt der

Satz 1. *Ist* $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ *und existiert der eigentliche oder uneigentliche Grenzwert* $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *so gilt*

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{1}$$

Beweis. Im Fall a) setzen wir

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für} \quad a < x < a + h, \\ 0 & \text{für} \quad x = a. \end{cases}$$

Dann ist F stetig in $[\![a, a + h[\![$ und differenzierbar in $]\!]a, a + h[\![$. Analog definieren wir die Funktion G. Für $a < x < a + h$ ist nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

mit $a < \xi < x$. Aus $x \downarrow a$ folgt somit $\xi \downarrow a$, und da der Grenzwert des Quotienten von $f'(x)$ und $g'(x)$ für $x \downarrow a$ nach Voraussetzung existiert, erhalten wir

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi \downarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

womit die Behauptung im Fall a) bewiesen ist. Analog verläuft der Beweis im Fall b), und a) und b) zusammen ergeben den Fall c). Im Fall d) setzen wir

$$F(t) := \begin{cases} f\left(\frac{1}{t}\right) & \text{für} \quad 0 < t < \frac{1}{R}, \\ 0 & \text{für} \quad t = 0. \end{cases}$$

Dann ist F stetig in $\left]\!\left[0, \frac{1}{R}\right]\!\right[$, differenzierbar in $\left]\!\left]0, \frac{1}{R}\right[\!\right[$, und es ist

$$F'(t) = -\frac{1}{t^2} \cdot f'\left(\frac{1}{t}\right) \qquad \left(0 < t < \frac{1}{R}\right).$$

Analog definieren wir G und erhalten mit Hilfe des bereits Bewiesenen

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Analog verfahren wir im Fall e), und Satz 1 ist bewiesen.

Man beachte, daß auf der rechten Seite von (1) nicht etwa die Ableitung des Quotienten $\frac{f}{g}$ zu bilden ist, sondern daß Zähler und Nenner einzeln zu differenzieren sind.

Beispiel 1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x \cos x}{1} = 0.$$

Beispiel 2.

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{\cos x - 1} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\sin x} = -\infty.$$

Beispiel 3.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x-1}{x+1} \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = 2.$$

In diesen Beispielen ergibt sich die Berechtigung des ersten Gleichheitszeichens erst aus der Existenz des rechts stehenden Grenzwertes.

In den Voraussetzungen von Satz 1 wird gefordert, daß f und g bei dem betrachteten Grenzübergang gegen 0 streben. Man spricht daher häufig von „unbestimmten Ausdrücken der Form $\frac{0}{0}$". Für „unbestimmte Ausdrücke der Form $\frac{\infty}{\infty}$" gilt ein analoger Satz. Bei der Beweisführung wird nur benötigt, daß die Nennerfunktion gegen ∞ strebt und daß g' nicht das Vorzeichen wechselt.

Satz 2. *Ist* $\lim g(x) = \infty$, *existiert der eigentliche oder uneigentliche Grenzwert* $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *und ist* g' *in dem betrachteten Differenzierbarkeitsintervall von* 0 *verschieden, so ist*

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{2}$$

Beweis. Die Funktion g' hat wegen 3.1.4., Satz 3, und $g'(x) \neq 0$ stets dasselbe Vorzeichen. In Abb. 3.26 ist das Verhalten der Funktion g in den Fällen a), b), d), e) veranschaulicht. In den Fällen b) und d) ist offensichtlich $g'(x) > 0$, und in den Fällen a) und e) ist $g'(x) < 0$. Es genügt, den Beweis für die Fälle b) und d) zu führen, da der

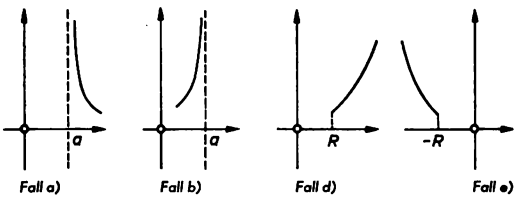

Abb. 3.26

Beweis in den Fällen a) und e) analog verläuft und der Fall c) eine Folgerung aus den Fällen a) und b) ist. Es liege also Fall b) oder Fall d) vor. Wir unterscheiden wiederum zwei Fälle.

Fall 1. Der auf der rechten Seite von (2) stehende Grenzwert ist eine reelle Zahl c. Dann gibt es für alle positiven ε im Fall b) ein positives δ, im Fall d) ein positives ω mit

$$c - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < c + \varepsilon \qquad (a - \delta < x < a \quad \text{bzw.} \quad \omega < x).$$

Es folgt

$$(c - \varepsilon)\, g'(x) - f'(x) < 0 < (c + \varepsilon)\, g'(x) - f'(x),$$

d. h., die Funktion h_1 bzw. h_2 mit

$$h_1(x) = (c - \varepsilon)\, g(x) - f(x), \qquad h_2(x) = (c + \varepsilon)\, g(x) - f(x)$$

ist wegen $h_1'(x) < 0 < h_2'(x)$ streng monoton fallend bzw. wachsend. Aus $a - \delta < b < x < a$ bzw. $\omega < b < x$ folgt somit, da $g(x)$ für hinreichend kleine $\delta > 0$ bzw. für hinreichend große ω positiv ist,

$$h_1(x) = (c - \varepsilon)\, g(x) - f(x) < (c - \varepsilon)\, g(b) - f(b) = h_1(b),$$

$$c - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} + \frac{(c - \varepsilon)\, g(b) - f(b)}{g(x)}$$

bzw.

$$h_2(b) = (c + \varepsilon)\, g(b) - f(b) < (c + \varepsilon)\, g(x) - f(x) = h_2(x),$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{(c + \varepsilon)\, g(b) - f(b)}{g(x)} < c + \varepsilon.$$

Wegen $g(x) \to \infty$ erhalten wir, wenn wir x von unten gegen a bzw. gegen ∞ streben lassen,

$$c - \varepsilon \leqq \lim \frac{f(x)}{g(x)} \leqq c + \varepsilon.$$

Da ε beliebig gewählt war, folgt

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Fall 2. Der auf der rechten Seite von (2) stehende Grenzwert ist nicht endlich, etwa ∞. Dann gibt es für alle positiven Zahlen K ein positives δ bzw. ein positives ω mit

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > K \qquad (a - \delta < x < a \quad \text{bzw.} \quad \omega < x).$$

Dann ist $f'(x) - Kg'(x) > 0$, und die Funktion h mit $h(x) = f(x) - Kg(x)$ ist streng monoton wachsend. Für $a - \delta < b < x < a$ bzw. $\omega < b < x$ folgt $f(b) - Kg(b) < f(x) - Kg(x)$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} > K + \frac{f(b) - Kg(b)}{g(x)}.$$

Der zweite Summand der rechten Seite strebt für $x \uparrow a$ bzw. für $x \to \infty$ gegen 0, d. h., es ist

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} \geqq K,$$

und da K beliebig gewählt war, folgt die Behauptung.

Beispiel 4.

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{\ln x}{\cot x} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\downarrow 0} \left(-\frac{\sin^2 x}{x}\right) = 0$$

(vgl. Beispiel 1).

Neben den in Satz 1 und Satz 2 betrachteten Grundformen der Regel von BERNOULLI-DE L'HOSPITAL treten weitere unbestimmte Ausdrücke auf, die wir wie folgt auf die Grundformen zurückführen können:

1. $0 \cdot \infty$: Um den Grenzwert $f(x) \cdot g(x)$ zu berechnen, setzen wir $h(x) := \frac{1}{g(x)}$ bzw. $h(x) := \frac{1}{f(x)}$ und berechnen den Grenzwert von $\frac{f(x)}{h(x)}$ bzw. $\frac{g(x)}{h(x)}$ nach Satz 1 bzw. 2.

2. $\infty - \infty$: Wir setzen

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\,g(x)}}$$

und wenden Satz 1 an.

3. In allen Fällen, in denen Grenzwerte von Funktionen der Form $f(x)^{g(x)}$ zu bestimmen sind, setzen wir

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

und berechnen den Grenzwert des Exponenten.

Im letzten Fall sind insbesondere die „unbestimmten Ausdrücke der Form 0^0, 1^∞, ∞^{0}" sorgfältig zu untersuchen.

Beispiel 5.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan x\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\cot x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -1.$$

Beispiel 6.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} = \exp \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\cot x} = \exp \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \exp 0 = 1.$$

Beispiel 7.

$$\lim_{x\downarrow 0} (\sin x)^{\tan x} = \exp \lim_{x\downarrow 0} \frac{\ln \sin x}{\cot x} = \exp \lim_{x\downarrow 0} (-\sin x \cos x) = 1.$$

Beispiel 8.

$$\lim_{x\downarrow 0} \left[\frac{x}{x^2+1}\right]^x = \exp \lim_{x\downarrow 0} x \ln \frac{x}{x^2+1} = \exp \lim_{x\downarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Das in den Sätzen 1 und 2 angegebene Verfahren zur Ermittlung von Grenzwerten führt nicht zum Ziel, wenn der Quotient der Ableitungen an der betrachteten Stelle wiederum ein unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ ist. In diesem Fall kann eine nochmalige oder eine mehrmalige Anwendung der Regel von BERNOULLI-DE L'HOSPITAL zum Ziel führen. Ist etwa

$$\left.\begin{array}{l} \lim f(x) = \lim f'(x) = \cdots = \lim f^{(n-1)}(x) \\ \lim g(x) = \lim g'(x) = \cdots = \lim g^{(n-1)}(x) \end{array}\right\} = 0 \text{ bzw. } \infty$$

und existiert

$$\lim \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)},$$

so ist nach Satz 1 bzw. Satz 2

$$\lim \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \lim \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = \cdots = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Man beachte aber, daß diese Schlußkette nur dann richtig ist, wenn alle Quotienten von $f^{(k)}(x)$ und $g^{(k)}(x)$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ an der betrachteten Stelle unbestimmte Ausdrücke sind. Die Kette bricht ab, wenn diese Bedingung nicht mehr erfüllt ist.

Beispiel 9.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{e^x - 1 - x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2\sin x + 2x}{e^x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2\cos x + 2}{e^x} = 0.$$

In manchen Fällen kann man mit den geschilderten Methoden den Grenzwert auch dann nicht ermitteln, wenn er existiert.

Das Verhalten des Quotienten von f und g für einen (rechts- bzw. linksseitigen) Grenzübergang an einer gemeinsamen Nullstelle a von f, g kann stets entschieden werden, wenn es für f bzw. für g eine kleinste natürliche Zahl k bzw. m gibt derart,

daß $f^{(k)}$ bzw. $g^{(m)}$ in einer Umgebung von a existiert und stetig ist und außerdem $f^{(k)}(a) \neq 0$ bzw. $g^{(m)}(a) \neq 0$ gilt. Wegen $f(a) = g(a) = 0$ ergibt die Taylorentwicklung

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{m!\, f^{(k)}\big(a + \vartheta(x-a)\big)\,(x-a)^k}{k!\, g^{(m)}\big(a + \vartheta'(x-a)\big)\,(x-a)^m},$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{m!\, f^{(k)}(a)}{k!\, g^{(m)}(a)} \lim_{x \to a} (x-a)^{k-m}.$$

Ist $k > m$, so ist der Grenzwert 0. Ist $k = m$, so ist der Grenzwert gleich dem Quotienten von $k!\, f^{(k)}(a)$ und $k!\, g^{(k)}(a)$. Ist $k < m$ und $k - m$ gerade, so ist der Grenzwert je nach dem Vorzeichen des Quotienten von $f^{(k)}(a)$ und $g^{(m)}(a)$ gleich ∞ oder $-\infty$. Ist $k < m$ und $k - m$ ungerade, so ist der rechtsseitige Grenzwert ∞, der linksseitige Grenzwert $-\infty$ oder umgekehrt.

Die Regel von Bernoulli – de l'Hospital erschien zuerst in der 1696 gedruckten „Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes" des Marquis de l'Hospital für unbestimmte Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$. Johann I Bernoulli, der seit 1691 mit de l'Hospital bekannt war und diesen in die Arbeiten mit dem Calculus eingeführt hatte, wies 1704 darauf hin, daß er die Regel 1694 dem Marquis mitgeteilt habe – er also der eigentliche Entdecker sei. Gleichzeitig bemerkte er, daß die Regel unter Umständen mehrfach anzuwenden sei.

3.3.8. Aufgaben

1. Man bestimme durch vollständige Induktion die n-te Ableitung der Funktionen

$$y = (1+x)^\alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R}), \qquad y = \frac{\ln x}{x}.$$

2. Man gebe die Taylorentwicklung der Funktion $f(x) = a^x$ $(a > 0)$ an der Stelle 0 an.

3. Man berechne ohne Verwendung einer Logarithmentafel $\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4} + \frac{1}{10}\right)$ auf vier Stellen genau.

4. Man entwickle die Funktion $f(x, y) = \cos x \cos y$ in der Umgebung des Nullpunktes mit einem Restglied vierter Ordnung.

5. Man bestimme die Extrema der folgenden Funktionen:

$$f(x) = \cos x + \frac{x^2}{2},$$

$$g(x) = \cos x + \cosh x,$$

$$h(x) = \frac{x^4}{16} - \frac{x^2}{2} + 1.$$

6. Man diskutiere den Verlauf der Graphen der Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2}, \qquad g(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}, \qquad h(x) = x - \sin x.$$

7. Man bestimme bei den folgenden Funktionen die Punkte, in denen die notwendigen Bedingungen für das Vorliegen eines lokalen Extremwertes erfüllt sind, und untersuche, ob in ihnen die hinreichenden Bedingungen erfüllt sind:

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} + y^2x - 5x + \frac{y^3}{3} - 5y,$$

$$g(x, y) = x^2y^2(a - x - y) \qquad (a > 0),$$

$$h(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{xy} \qquad (x, y > 0).$$

8. Gegeben seien n Punkte (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Man bestimme einen Punkt (x, y), für den die Funktion

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} [(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2]$$

ein lokales Minimum besitzt.

3.4. Potenzreihen

3.4.1. Konvergenzbereich von Potenzreihen

In 3.3.3. haben wir für gewisse Funktionen f (z. T. in Teilmengen ihres Definitionsbereichs) Reihendarstellungen der Form

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n \tag{1}$$

erhalten. Wir nennen jede Darstellung dieser Form eine *Potenzreihendarstellung* oder *Potenzreihenentwicklung* der Funktion f *an der Stelle* a in der betrachteten Teilmenge von $D(f)$. Kann eine Funktion f in einer Umgebung von a in der Form (1) dargestellt werden, so sagen wir, f lasse sich in a *in eine Potenzreihe entwickeln.*

Wir gehen nun von der umgekehrten Problemstellung aus. Wir geben eine Folge (c_n) komplexer (oder reeller) Zahlen und eine komplexe (oder reelle) Zahl a vor und bestimmen die Menge aller komplexen (oder reellen) Zahlen x, für die die in (1) rechts stehende Reihe konvergent ist.[1]) Ist M die so definierte Menge, so können wir eine Funktion f durch die Gleichung (1) definieren. Dann gilt

$$f: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n \qquad (x \in M). \tag{2}$$

Ist $x \notin M$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$ eine divergente Reihe.

[1]) Untersuchungen dieser Art haben wir bereits in 2.2.4., Beispiel 3, durchgeführt.

Definition 1. Die Menge M aller komplexen bzw. reellen Zahlen x, für die $\sum c_n(x-a)^n$ konvergiert, heißt der *Konvergenzbereich* der Potenzreihe mit den Koeffizienten c_n und mit dem Mittelpunkt a, ihre Komplementärmenge $\mathsf{C} \setminus M$ bzw. $\mathsf{R} \setminus M$ ihr *Divergenzbereich*. Die Funktion (2) heißt die durch die Potenzreihe $\sum c_n(x-a)^n$ dargestellte Funktion.

Der Begriff „Potenzreihe" bzw. „Potenzreihe mit den Koeffizienten c_n und dem Mittelpunkt a" wird in der mathematischen Literatur in verschiedenen Bedeutungen verwandt. Zwischen der Funktion und ihrer Darstellung durch eine Reihe (bzw. dem abstrakt definierten Term $\sum c_n(x-a)^n$) wird oft nicht streng unterschieden. Im folgenden wird aus dem Zusammenhang hervorgehen, welche Bedeutung gemeint ist. Wir sagen, eine Potenzreihe *konvergiere* bzw. *divergiere* im Punkt x, wenn x zu ihrem Konvergenz- bzw. Divergenzbereich gehört. Wenn sich die Betrachtungen ausschließlich auf reelle Zahlen beziehen, so kennzeichnen wir dies durch die Bezeichnung „reelle Potenzreihe". Andernfalls sprechen wir nur kurz von Potenzreihen.

Wir wollen nun zeigen, daß für den Konvergenzbereich einer Potenzreihe mit dem Mittelpunkt a die folgenden drei Fälle möglich sind.

a) Die Potenzreihe konvergiert nur in ihrem Mittelpunkt a. Sie heißt dann (nicht ganz konsequent) *nirgends konvergent*.

b) Es gibt eine positive reelle Zahl R, den *Konvergenzradius* der Potenzreihe, mit folgender Eigenschaft: Die Potenzreihe ist für alle x mit $|x-a| < R$ absolut konvergent und für alle x mit $|x-a| > R$ divergent. In den Punkten x mit $|x-a| = R$ kann sie absolut konvergent, bedingt konvergent oder divergent sein.

c) Die Potenzreihe ist in allen Punkten x absolut konvergent. Sie heißt dann *beständig konvergent*.

Im Fall a) bzw. c) sagen wir auch, die Potenzreihe habe den Konvergenzradius $R = 0$ bzw. $R = \infty$.

Satz 1. *Zu jeder Potenzreihe $\sum c_n(x-a)^n$ gibt es genau ein R mit $0 \leqq R \leqq \infty$ derart, daß die Potenzreihe für alle x mit $|x-a| < R$ absolut konvergent, für alle x mit $|x-a| > R$ divergent ist.*

Beweis. Wir setzen

$$L := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}, \tag{3}$$

$$R := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad L = \infty, \\ \dfrac{1}{L} & \text{für} \quad 0 < L < \infty, \\ \infty & \text{für} \quad L = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Für $x = a$ ist die Reihe trivialerweise konvergent. Für $x \neq a$ ist sie nach 2.2.4., Satz 6, absolut konvergent, wenn

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n(x-a)^n|} = |x-a| \cdot L < 1 \tag{5}$$

und divergent, wenn

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n(x-a)^n|} = |x-a| \cdot L > 1 \tag{6}$$

ist. Im Fall $R = 0$ gilt stets (6), d. h., die Reihe ist für kein x mit $x \neq a$ konvergent. Im Fall $R = \infty$ gilt stets (5), d. h., die Reihe ist für alle x absolut konvergent. Ist $0 < R < \infty$, so ist die Reihe für

$$\frac{|x-a|}{R} < 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{|x-a|}{R} > 1$$

absolut konvergent bzw. divergent. Damit ist der Satz bewiesen.

Definition 2. Die Menge aller x mit $|x-a| \leqq R$ heißt der *Konvergenzkreis* der Potenzreihe mit dem Mittelpunkt a und dem Konvergenzradius R $(0 < R < \infty)$.

Nach unserem Satz ist der Konvergenzbereich stets eine Teilmenge des Konvergenzkreises, da die Reihe für $|x-a| > R$ divergiert. Das Innere des Konvergenzkreises ist dagegen stets im Konvergenzbereich enthalten. Wenn R bekannt ist, hat man zur Bestimmung des Konvergenzbereiches nur die Randpunkte des Konvergenzkreises in Betracht zu ziehen.

Für reelle Potenzreihen ist der Konvergenzbereich im Fall $R \neq 0$ stets ein (offenes, halboffenes oder abgeschlossenes) Intervall, so daß in diesem Fall der Konvergenzbereich sinnvoll als Konvergenzintervall bezeichnet werden könnte. Im Interesse einer einheitlichen Darstellung bezeichnen wir auch für reelle Potenzreihen das abgeschlossene Intervall $\{x : |x-a| \leqq R\}$ als Konvergenzintervall, obwohl auch hier die Randpunkte nicht notwendig Konvergenzpunkte sind.

Beispiel. Wir betrachten die Potenzreihen mit dem Mittelpunkt 0 und den Koeffizienten

$$c_n = n^n, \quad c_n = 1, \quad c_n = \frac{1}{n}, \quad c_n = \frac{1}{n^2}, \quad c_n = \frac{1}{n^n}.$$

Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = 0$$

ist die Potenzreihe $\sum n^n x^n$ nirgends, die Potenzreihe $\sum n^{-n} x^n$ beständig konvergent. Die Potenzreihen $\sum x^n$, $\sum n^{-1} x^n$, $\sum n^{-2} x^n$ haben alle den Konvergenzradius 1. Die erste ist für kein x mit $|x| = 1$ konvergent, da die Glieder dann keine Nullfolge bilden. Die zweite ist z. B. für $x = 1$ divergent (harmonische Reihe), für $x = -1$ konvergent (ihre Summe ist nach 3.3.3. (24) gleich $-\ln 2$). Die dritte Potenzreihe ist für alle x mit $|x| = 1$ absolut konvergent.

Wie diese Beispiele zeigen, können über das Konvergenzverhalten auf dem Rand des Konvergenzkreises bzw. Konvergenzintervalls keine allgemeinen Aussagen gemacht werden.

Mit Hilfe des Konvergenzkriteriums von WEIERSTRASS (2.6.2., Satz 2) beweisen wir, daß jede Potenzreihe „fast gleichmäßig konvergent" ist, d. h., es gilt

Satz 2. *Ist B eine im Innern des Konvergenzkreises der Potenzreihe $\sum c_n(x-a)^n$ liegende beschränkte abgeschlossene Punktmenge, so ist die Potenzreihe in B gleichmäßig konvergent.*

Beweis. Es sei $r = \sup\{|x-a| : x \in B\}$. Dann ist r kleiner als der Konvergenzradius R, da B sonst einen Punkt mit dem Rand des Konvergenzkreises gemein hätte. Die Reihe $\sum |c_n| r^n$ ist daher nach Satz 1 konvergent. Wegen $|c_n(x-a)^n| \leqq |c_n| r^n$ für alle $x \in B$ ist die Potenzreihe nach 2.6.2., Satz 2, in B gleichmäßig konvergent.

Insbesondere ist die Potenzreihe in jeder abgeschlossenen Kreisscheibe (bzw. in jedem abgeschlossenen Intervall) $\{x : |x-a| \leqq r\}$ mit $r < R$ gleichmäßig konvergent.

3.4.2. Analytische Funktionen

Über Funktionen, die sich in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches in eine Potenzreihe entwickeln lassen, können weitreichende Aussagen bewiesen werden. Diese Funktionen spielen daher in der Analysis eine hervorragende Rolle.

Definition 1. Eine Funktion heißt im Punkt a ihres Definitionsbereichs *analytisch* oder *regulär* oder *holomorph*, wenn sie sich im Punkt a in eine Potenzreihe entwickeln läßt.

Hiernach ist f in a analytisch genau dann, wenn es eine Folge (c_n) und eine positive reelle Zahl r mit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \qquad (|x-a| < r) \tag{1}$$

gibt. Der Konvergenzradius R dieser Potenzreihe muß dann natürlich von 0 verschieden sein, und es gilt $r \leqq R$.

Aus 3.3.3. (1) ersehen wir, daß jedes Polynom in jedem Punkt analytisch ist.

Satz 1. *Ist f in a analytisch, so ist f in a stetig.*

Beweis. Die Behauptung folgt wegen 2.6.2., Satz 1, sofort aus der fast gleichmäßigen Konvergenz einer Potenzreihe.

Satz 2. *Jede in einem Punkt a ihres Definitionsbereichs analytische Funktion ist in allen Punkten einer Umgebung von a analytisch.*

Beweis. Es sei $r > 0$ eine Zahl, so daß (1) erfüllt ist, und es sei $0 \leqq |b - a| < r$. Wir wählen eine Zahl r_1 mit $|b - a| < r_1 < r$ und setzen

$$q := \frac{|b - a|}{r_1}.$$

Dann ist $q < 1$ und $|b - a| = qr_1 < r_1$. Für alle x mit

$$|x - b| \leqq (1 - q)\, r_1 = r_1 - |b - a| < r - |b - a|$$

gilt

$$|x - a| \leqq |x - b| + |b - a| \leqq (1 - q)\, r_1 + qr_1 = r_1 < r$$

(Abb. 3.27), und es folgt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n[(x - b) + (b - a)]^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x - b)^k (b - a)^{n-k}.$$

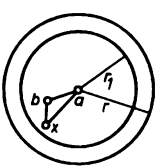

Abb. 3.27

Wegen $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$ ist

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_n \binom{n}{k} (x - b)^k (b - a)^{n-k}. \tag{2}$$

Wir zeigen, daß der große Umordnungssatz angewendet werden kann. Setzen wir

$$S_p := \sum_{n=0}^{p} \sum_{k=0}^{p} \left| c_n \binom{n}{k} (x - b)^k (b - a)^{n-k} \right|,$$

so gilt

$$S_p \leqq \sum_{n=0}^{p} \sum_{k=0}^{p} |c_n| \binom{n}{k} [(1-q)\, r_1]^k (q r_1)^{n-k}.$$

Wiederum wegen $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$ wird die rechte Seite der letzten Ungleichung höchstens größer, wenn wir die obere Grenze p in der zweiten Summe durch n ersetzen:

$$\begin{aligned} S_p &\leqq \sum_{n=0}^{p} \sum_{k=0}^{n} |c_n| \binom{n}{k} (1-q)^k q^{n-k} r_1^n \\ &= \sum_{n=0}^{p} |c_n|\, r_1^n\, [(1-q)+q]^n \\ &\leqq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|\, r_1^n. \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist endlich, denn aus (1) ersehen wir, daß der Konvergenzradius R der Potenzreihe nicht kleiner als r sein kann, und für alle x mit $|x-a| \leqq r_1 < r \leqq R$ ist die Reihe (1) sogar absolut konvergent. Damit sind die Voraussetzungen des großen Umordnungssatzes erfüllt, und aus (2) folgt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \binom{n}{k} (b-a)^{n-k} (x-b)^k.$$

Ferner sind die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \binom{n}{k} (b-a)^{n-k} (x-b)^k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

bei denen wir die untere Summationsgrenze 0 durch k ersetzen können, konvergent. Somit gibt es Zahlen d_k mit

$$d_k = \sum_{n=k}^{\infty} c_n \binom{n}{k} (b-a)^{n-k} \qquad (0 \leqq |b-a| < r;\ k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

und mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (x-b)^k \qquad (|x-b| < r - |b-a|) \tag{4}$$

erhalten wir die gewünschte Darstellung. Die Funktion f ist in b analytisch.

Satz 3. *Jede in einem Punkt a analytische Funktion ist in einer Umgebung von a stetig differenzierbar, und die Ableitung ist wieder eine in allen Punkten dieser Umgebung analytische Funktion.*

Beweis. Es gelte (1) und $0 \leqq |b-a| < r$. Aus (4), (3) folgt

$$f(x) - f(b) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(x-b)^k - d_0 = (x-b)\sum_{k=1}^{\infty} d_k(x-b)^{k-1}.$$

Für $0 < |x-b| < r - |b-a|$ ist somit

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b} = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(x-b)^{k-1}.$$

Da die rechts stehende Potenzreihe für Zahlen x mit $x \neq b$ konvergent ist, hat sie einen positiven Konvergenzradius, und aus Satz 1 und (3) folgt

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = d_1 = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(b-a)^{n-1}.$$

Die Funktion f ist in b differenzierbar. Aus (1) folgt somit stets

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1} \qquad (|x-a| < r). \tag{5}$$

Man kann also eine für $|x-a| < r \leqq R$ durch eine Potenzreihe $\sum c_n(x-a)^n$ dargestellte Funktion differenzieren, indem man die Reihe bildet, deren Glieder sich durch Differentiation ihrer Glieder $c_n(x-a)^n$ ergeben. Man spricht daher auch von *gliedweiser Differentiation* der Potenzreihe. Es ist zu beachten, daß diese Differentiationsregel für Randpunkte des Konvergenzbereiches im allgemeinen nicht angewendet werden darf.

Die Funktion f' ist für $|x-a| < r$ wiederum durch eine Potenzreihe dargestellt und damit analytisch. Nach dem Bewiesenen ist sie dann differenzierbar, also erst recht stetig für $|x-a| < r$. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Als Folgerung erhalten wir

Satz 4. *Besitzt die Potenzreihe mit dem Mittelpunkt a und den Koeffizienten c_n den Konvergenzradius R, so ist die Funktion*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

im Innern des Konvergenzkreises beliebig oft stetig differenzierbar. Die Ableitungen können durch gliedweise Differentiation gewonnen werden, und alle so gebildeten Potenzreihen haben denselben Konvergenzradius.

Es bleibt nur die letzte Behauptung zu beweisen. Wegen $|nc_n| \geqq |c_n|$ kann der Konvergenzradius der durch gliedweise Differentiation gewonnenen Reihe nicht größer werden, und da sich (5) als Folgerung aus (1) ergab, kann er nicht kleiner werden.

Die Entwicklung einer in a analytischen Funktion f in eine Potenzreihe mit dem Mittelpunkt a ist durch diese Funktion eindeutig bestimmt, denn es gilt

Satz 5. *Aus*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \qquad (|x-a| < r) \tag{6}$$

folgt

$$f^{(k)}(x) = k! \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} c_n (x-a)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{7}$$

und

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Beweis. Die Behauptung (7) gilt für $k = 0$. Gilt (7) für eine natürliche Zahl k, so ist

$$f^{(k)}(x) = k!\, c_k + k! \sum_{n=k+1}^{\infty} \binom{n}{k} c_n (x-a)^{n-k},$$

$$f^{(k+1)}(x) = k! \sum_{n=k+1}^{\infty} (n-k) \binom{n}{k} c_n (x-a)^{n-k-1}$$

$$= (k+1)! \sum_{n=k+1}^{\infty} \binom{n}{k+1} c_n (x-a)^{n-(k+1)},$$

die Behauptung gilt auch für $k+1$ und damit allgemein. Setzen wir in (7) $x = a$, so erhalten wir $f^{(k)}(a) = k!\, c_k$, womit auch (8) bewiesen ist.

Beispiel. Für $|x| < 1$ ist

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1},$$

. . . . . .

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k)} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = k! \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}.$$

Setzen wir (8) in (6) ein, so erhalten wir die *Taylorsche Reihe*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \qquad (|x-a| < r). \tag{9}$$

Es gibt Funktionen, die in einer Umgebung eines Punktes beliebig oft stetig differenzierbar, aber nicht analytisch sind. Dies gilt z. B. für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x = 0, \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

an der Stelle 0. Auf den Beweis dieser Behauptung wollen wir hier nicht eingehen.

Dieses Beispiel einer Funktion, die bei Null nicht in eine Taylorreihe entwickelt werden kann, gab AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY 1829 in seinen „Leçons sur le calcul différentiel". Auf CAUCHY geht auch der Begriff „analytische Funktion" zurück, der allerdings erst durch WEIERSTRASS weiter aufgeklärt wurde.

Nach dem Taylorschen Satz gilt für jede in $U_r(a)$ beliebig oft stetig differenzierbare Funktion f und für alle $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}\big(a + \vartheta(x-a)\big)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad (|x-a| < r).$$

Die Darstellung (9) der Funktion f als Taylorsche Reihe ist somit genau dann möglich, wenn das Restglied für $|x-a| < r$ gegen 0 strebt, d. h. wenn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}\big(a + \vartheta(x-a)\big)}{n!}(x-a)^n = 0 \qquad (|x-a| < r) \tag{10}$$

ist.

Wir geben noch ein weiteres Kriterium dafür an, daß eine Funktion f an einer Stelle a ihres Definitionsbereichs analytisch ist.

Satz 6. *Eine Funktion f ist an der Stelle a genau dann analytisch, wenn f in einer Umgebung von a beliebig oft differenzierbar ist und wenn es positive reelle Zahlen K, r gibt mit*

$$|f^{(n)}(x)| \leqq n!\, K^n \qquad (|x-a| < r). \tag{11}$$

Beweis. Es sei f in a analytisch, d. h., es gelte (6). Wegen

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L < \infty$$

gibt es eine Schranke $K_0 > 1$ der Folge mit den Gliedern $\sqrt[n]{|c_n|}$, d. h., es ist $|c_n| \leqq K_0^n$. Wir wählen ein $r > 0$ mit $q := rK_0 < 1$. Für alle x mit $|x-a| < r$ folgt aus (7) die Abschätzung

$$|f^{(k)}(x)| \leqq k! \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} K_0^n r^{n-k} = k!\, K_0^k \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} q^{n-k}.$$

Aus dem obigen Beispiel folgt

$$|f^{(k)}(x)| \leqq k!\, K_0^k \frac{1}{(1-q)^{k+1}} \leqq k! \left(\frac{K_0}{1-q}\right)^{2k},$$

und (11) ist mit $K = K_0^2(1-q)^{-2}$ erfüllt. Ist umgekehrt (11) erfüllt und $|x-a| < r$, so folgt

$$\left| \frac{f^{(n)}(a + \vartheta(x-a))}{n!} (x-a)^n \right| \leqq K^n \cdot r^n,$$

und für $r < K^{-1}$ ist (10) erfüllt. Damit gilt (9), und die Funktion f ist in a analytisch.

3.4.3. Verknüpfungen analytischer Funktionen

Für Funktionen, die durch Verknüpfungen analytischer Funktionen entstehen, können ähnliche Sätze wie für die Stetigkeit von verknüpften Funktionen bewiesen werden.

Satz 1. *Sind die Funktionen f, g an der Stelle a analytisch, so sind die Funktionen λf ($\lambda \in \mathsf{R}$ bzw. $\lambda \in \mathsf{C}$), $f \pm g$, $f \cdot g$ an der Stelle a analytisch.*

Beweis. In einer Umgebung von a sei

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-a)^n. \tag{1}$$

Hieraus ersehen wir sofort, daß λf und $f \pm g$ an der Stelle a analytisch sind. Die Behauptung für das Produkt $f \cdot g$ folgt aus dem Satz über die Multiplikation absolut konvergenter Reihen. Hiernach ist

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} c_j d_{k-j} \right) (x-a)^k, \tag{2}$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Satz 2. *Ist die Funktion g in a und die Funktion h in $g(a)$ analytisch, so ist die zusammengesetzte Funktion $h \circ g$ in a analytisch.*

Beweis. Für jede in a analytische Funktion f, deren Potenzreihenentwicklung in a die Koeffizienten c_k besitzt, setzen wir

$$f^*(x) := \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \, (x-a)^k. \tag{3}$$

Die Potenzreihenentwicklungen von f und f^* haben denselben Konvergenzradius R. Für zwei in a analytische Funktionen f, g mit den Potenzreihenentwicklungen (1) sei

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k, \qquad f^*(x)\, g^*(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x-a)^k.$$

Wegen (2) und (3) ist

$$|a_k| = \left|\sum_{j=0}^{k} c_j d_{k-j}\right| \leqq \sum_{j=0}^{k} |c_j| \cdot |d_{k-j}| = \alpha_k. \tag{4}$$

Es sei nun g in a und h in $g(a)$ analytisch, d. h., es sei

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-a)^n, \qquad h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - g(a))^k, \tag{5}$$

wobei diese Reihen den von 0 verschiedenen Konvergenzradius R_1 bzw. R_2 besitzen mögen. Wegen $g(a) = d_0$ ist

$$h(g(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\sum_{n=1}^{\infty} d_n (x-a)^n\right)^k. \tag{6}$$

Wir setzen

$$g_0(x) := g(x) - d_0 = \sum_{n=1}^{\infty} d_n (x-a)^n, \qquad g_0^*(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |d_n|\,(x-a)^n.$$

Nach Satz 1 sind mit g_0, g_0^* auch alle k-ten Potenzen von g_0, g_0^* analytisch in a, d. h., es ist

$$(g_0(x))^k = \sum_{n=1}^{\infty} d_{kn} (x-a)^n, \qquad (g_0^*(x))^k = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{kn} (x-a)^n. \tag{7}$$

Aus (4) folgt durch vollständige Induktion stets $|d_{kn}| \leqq \delta_{kn}$. Setzen wir die erste Gleichung (7) in (6) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} h(g(x)) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sum_{n=1}^{\infty} d_{kn} (x-a)^n \\ &= b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_k d_{kn} (x-a)^n. \end{aligned}$$

Können wir zeigen, daß der große Umordnungssatz angewendet werden darf, so folgt

$$h(g(x)) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k d_{kn}\right) (x-a)^n,$$

und die Behauptung ist bewiesen.

Wegen der Stetigkeit von g_0^* in a und $g_0^*(a) = 0$ gibt es ein positives ε mit $|g_0^*(x)| < R_2$ für $|x-a| < \varepsilon$. Für alle x mit $|x-a| < \varepsilon$ setzen wir $x' := a + |x-a|$ und $z' := g^*(x') + d_0$. Wegen $|x'-a| = x'-a = |x-a|$ ist

dann $|z' - d_0| = |g^*(x')| < R_2$, und für alle p mit $p \geqq 1$ folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p} \sum_{n=1}^{p} |b_k d_{kn}(x-a)^n| &\leqq \sum_{k=1}^{p} \sum_{n=1}^{p} |b_k|\, \delta_{kn}\, |x-a|^n \\ &\leqq \sum_{k=1}^{p} |b_k| \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{kn}(x'-a)^n \\ &= \sum_{k=1}^{p} |b_k| \left(g^*(x')\right)^k \\ &\leqq \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|\, (z'-d_0)^k \\ &= h^*(z') < \infty,\end{aligned}$$

der große Umordnungssatz darf angewendet werden, und Satz 2 ist bewiesen.

Als Folgerung aus Satz 2 erhalten wir den

Satz 3. *Ist f eine im Punkt a analytische Funktion mit $f(a) \neq 0$, so ist die Funktion $\frac{1}{f}$ im Punkt a analytisch.*

Beweis. Es sei

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

und $c_0 \neq 0$. Setzen wir

$$g(x) := -\frac{1}{c_0} \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n, \qquad h(z) := \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

so ist g im Punkt a und h im Punkt 0 analytisch, und es ist

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{c_0} \frac{1}{1-g(x)} = \frac{1}{c_0}\, h\big(g(x)\big).$$

Die Behauptung folgt nun aus Satz 2.

In Verbindung mit Satz 1 ergibt sich aus Satz 3, daß der Quotient zweier in a analytischer Funktionen f, g mit $g(a) \neq 0$ wieder eine in a analytische Funktion ist.

Beispiel. Die Funktion

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \left(x \in \mathsf{R},\, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2},\, k \text{ ganz}\right)$$

ist wegen 2.5.1. (5), (6) und $\cos 0 = 1$ im Punkt 0 analytisch, d. h., es gibt Koeffizienten a_k und ein $r > 0$ mit

$$\tan x = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (|x| < r).$$

Da die Tangensfunktion ungerade ist, gilt $a_{2k} = 0$ für alle natürlichen Zahlen k. Die Koeffizienten a_{2k+1} ermitteln wir mit Hilfe der Cauchyschen Produktreihe aus dem Ansatz $\cos x \tan x = \sin x$, d. h. aus

$$\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots\right)(a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots$$

durch Koeffizientenvergleich. Für die Koeffizienten a_1, a_3, a_5 ergeben sich die Gleichungen

$$a_1 = 1, \qquad a_3 - \frac{a_1}{2!} = -\frac{1}{3!}, \qquad a_5 - \frac{a_3}{2!} + \frac{a_1}{4!} = \frac{1}{5!},$$

aus denen $a_1 = 1$, $a_3 = \frac{1}{5}$, $a_5 = \frac{2}{15}$ folgt. Die Potenzreihenentwicklung der Tangensfunktion im Punkt 0 beginnt somit mit den Gliedern

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots.$$

Eine explizite Formel zur Berechnung der Koeffizienten a_{2k+1} kann mit Hilfe der sogenannten *Bernoullischen Zahlen* angegeben werden.

Die Entwicklung der Tangensfunktion findet sich erstmals 1671 bei Gregory, die Sinus-, Kosinus- und Exponentialreihe sind eine Entdeckung Newtons, wenn ihre systematische Darstellung auch erst durch Euler erfolgte.

3.4.4. Aufgaben

1. Man bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^n}{n!} x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^n} x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$$

2. Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, wenn

$$a_n = \begin{cases} 2^k & \text{für} \quad n = 2k \\ 3^k & \text{für} \quad n = 2k+1 \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{k} & \text{für} \quad n = 2k \\ k \ln k & \text{für} \quad n = 2k+1 \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

ist.

3. Man entwickle die folgenden Funktionen nach Potenzen von x:

$$f(x) = \sin x \cos x, \qquad g(x) = \frac{1}{x^2 + 2}, \qquad h(x) = \frac{1 - x}{1 + x}.$$

4. Es sei f eine für $|x| < r$ analytische Funktion und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ die Potenzreihenentwicklung von f im Punkt 0. Ist f eine gerade Funktion, dann gilt $c_{2k+1} = 0$ $(k \in \mathbb{N})$, und ist f eine ungerade Funktion, dann gilt $c_{2k} = 0$ $(k \in \mathbb{N})$.

5. Man bestimme die Punktmenge, in der die komplexe Funktion $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}$ analytisch ist.

3.5. Anwendungen des Banachschen Fixpunktsatzes in der Differentialrechnung

3.5.1. Fixpunkte differenzierbarer Funktionen

Nach den Betrachtungen in 2.4.5. heißt eine Abbildung f eines Intervalls I in sich kontrahierend, wenn

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqq q\,|x_1 - x_2| \qquad (x_1, x_2 \in I) \tag{1}$$

ist, wobei $0 < q < 1$ gilt. Für eine differenzierbare Funktion f gibt es nach dem Mittelwertsatz zu x_1, x_2 ein ξ mit

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)\,(x_1 - x_2).$$

Gilt also $|f'(x)| \leqq q < 1$ für $x \in I$, so ist die Abbildung f kontrahierend, und aus dem Satz in 2.4.5. folgt der

Satz. *Jede in einem abgeschlossenen Intervall I differenzierbare Funktion f, die den Bedingungen*

$$f(x) \in I \qquad (x \in I), \tag{2}$$

$$|f'(x)| \leqq q < 1 \qquad (x \in I) \tag{3}$$

genügt, besitzt genau einen Fixpunkt in I.

Beispiel. Es sei $0 < b < 1$, und k sei eine positive natürliche Zahl. Wir setzen

$$f(x) := x - \frac{x^k - b}{k}. \tag{4}$$

Es ist $f(x) = x$ genau dann, wenn $x^k = b$ ist. Falls f einen Fixpunkt besitzt, haben wir damit zugleich einen neuen Beweis für die Existenz der k-ten Wurzel und ein Verfahren zu ihrer numerischen Berechnung gefunden.

Wir wählen eine positive reelle Zahl c mit

$$0 < c^k \leqq b. \tag{5}$$

Wir können z. B. $c = b$ setzen. Für $c \leqq x \leqq 1$ ist

$$0 \leqq f'(x) = 1 - x^{k-1} \leqq 1 - c^{k-1} < 1,$$

und die Abbildung f ist im Intervall $I = [\![c, 1]\!]$ kontrahierend mit dem Kontraktionsfaktor

$$q = 1 - c^{k-1}. \tag{6}$$

Es ist $f(x) \leqq x$ bzw. $f(x) \geqq x$ genau dann, wenn $x^k \geqq b$ bzw. $x^k \leqq b$ ist. Es folgt $f(1) \leqq 1$, $f(c) \geqq c$ und

$$f(x) - c \geqq f(x) - f(c) = (x - c)\, f'(\xi_1) \geqq 0,$$

$$1 - f(x) \geqq f(1) - f(x) = (1 - x)\, f'(\xi_2) \leqq 0,$$

d. h., es ist $c \leqq f(x) \leqq 1$ $(x \in I)$, und f bildet das Intervall I in sich ab. Damit besitzt f genau einen Fixpunkt in I. Wählen wir eine beliebige reelle Zahl a_0 mit $c \leqq a_0 \leqq 1$, so konvergiert die durch

$$a_{n+1} := a_n - \frac{a_n^{\,k} - b}{k} \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{7}$$

definierte Folge gegen die k-te Wurzel aus b, und die Abschätzungsformeln 2.4.5. (5), (6) ermöglichen eine Berechnung der k-ten Wurzel mit jeder gewünschten Genauigkeit. Für nahe bei 1 gelegene Zahlen b konvergiert die Folge sehr gut. Es empfiehlt sich daher, zunächst eine Zahl d zu suchen, für die $1 - d^k b$ eine sehr kleine positive Zahl ist, und die k-te Wurzel von $b' = d^k b$ zu ermitteln. Es ist dann

$$\sqrt[k]{b} = \frac{\sqrt[k]{b'}}{d}.$$

Zur Berechnung von $\sqrt{2}$ setzen wir z. B. $b' := 2 \cdot (0{,}7)^2 = 0{,}98$ und

$$f(x) = x - \frac{x^2 - 0{,}98}{2} = 0{,}49 + \frac{x}{2}\,(2 - x).$$

Mit $a_0 = 1$ erhalten wir die folgende Tabelle:

n	$\frac{a_n}{2}$	$2 - a_n$	$b_n = \frac{a_n}{2}\,(2 - a_n)$	$a_{n+1} = 0{,}49 + b_n$
0	0,5	1	0,5	0,99
1	0,495	1,01	0,49995	0,98995
2	0,494975	1,01005	0,4999495	0,9899495

Gemäß (5) können wir $c = 0{,}98$ wählen. Dann ist $q = 1 - c = 0{,}02$ und

$$\left|\sqrt{0{,}98} - a_3\right| \leqq \frac{q}{1-q}\,|a_2 - a_3| = \frac{0{,}02}{0{,}98} \cdot 5 \cdot 10^{-7} < 1{,}02 \cdot 10^{-8},$$

$$\left|\sqrt{2} - \frac{a_3}{0{,}7}\right| \leqq \frac{1{,}02}{0{,}7} \cdot 10^{-8} < 1{,}5 \cdot 10^{-8},$$

$$\sqrt{2} \approx 1{,}4142136\ (\pm\, 2 \cdot 10^{-8}).$$

3.5.2. Das Newtonsche Näherungsverfahren

Im Beweis des Satzes von Bolzano (2.4.2., Satz 2) haben wir ein sehr einfaches Verfahren zur Ermittlung einer Nullstelle unter der alleinigen Voraussetzung der Stetigkeit der betrachteten Funktion kennengelernt. Unter stärkeren Voraussetzungen können wesentlich besser konvergierende Verfahren entwickelt werden.

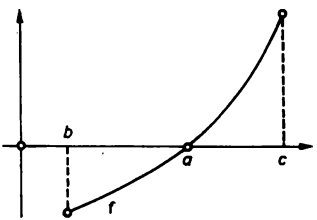

Abb. 3.28

Wir gehen von einer geometrischen Betrachtung aus. Hat die Funktion f in der Umgebung einer Nullstelle a den in Abb. 3.28 dargestellten Verlauf und ist $x > a$, so können wir zu x eine näher an der Nullstelle a liegende Zahl x^* ermitteln, indem wir den Schnittpunkt der Tangente durch den Kurvenpunkt $P(x, f(x))$ mit der x-Achse bestimmen. Offensichtlich ist

$$\frac{f(x)}{x - x^*} = f'(x)$$

und, wenn wir die von x abhängige Zahl x^* mit $\varphi(x)$ bezeichnen,

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \tag{1}$$

Es ist $\varphi(x) = x$ genau dann, wenn x eine Nullstelle der Funktion f ist. Damit haben wir einen Zusammenhang zum Banachschen Fixpunktsatz aufgedeckt.

Satz 1. *Es sei f eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, und es gebe ein abgeschlossenes Intervall I mit $I \subseteq D(f)$ derart, daß*

$$f'(x) \neq 0 \qquad (x \in I), \tag{2}$$

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} \in I \qquad (x \in I), \tag{3}$$

$$\frac{|f(x)\, f''(x)|}{(f'(x))^2} \leqq q < 1 \qquad (x \in I) \tag{4}$$

ist. Dann besitzt f genau eine Nullstelle a im Intervall I. Wählen wir die Zahl a_0 aus I beliebig und setzen

$$a_{n+1} := a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} \qquad (n \in \mathbb{N}), \tag{5}$$

so gilt $a_n \to a$ für $n \to \infty$.

Beweis. Für die durch (1) definierte Funktion φ gilt

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)\, f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)\, f''(x)}{(f'(x))^2}, \tag{6}$$

und wegen (3), (4) erfüllt φ die Voraussetzungen des Satzes aus 3.5.1. Hieraus folgen unmittelbar die Behauptungen.

Die Berechnung der Nullstelle mit Hilfe der durch (5) definierten Folge wird als *Newtonsches Näherungsverfahren* bezeichnet. Dieses Verfahren konvergiert sehr gut, doch ist der Nachweis, daß alle Voraussetzungen erfüllt sind, oft recht schwierig. In vielen Fällen führt der Ansatz (5) auch dann zum Ziel, wenn die Voraussetzungen (3), (4) nicht erfüllt sind.

Es genügt zum Beispiel die Kenntnis eines Intervalls $I = [\![b, c]\!]$, in dessen Endpunkten die Funktion f verschiedene Vorzeichen annimmt und in dessen Innerem die beiden ersten Ableitungen der Funktion nicht verschwinden. Die Funktion ist dann in diesem Intervall streng monoton und von unten konkav bzw. konvex. Wir können uns auf den Fall $f'(x), f''(x) > 0$ für $x \in I$ beschränken. Anderenfalls ersetzen wir f durch die Funktion g gemäß der folgenden Tabelle:

	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
$f''(x) > 0$	$g(x) = f(x)$	$g(x) = f(-x)$
$f''(x) < 0$	$g(x) = -f(-x)$	$g(x) = -f(x)$

Wegen $f'(x) > 0$ ist $f(b) < 0 < f(c)$, und nach dem Satz von Bolzano und wegen der strengen Monotonie gibt es genau eine Nullstelle a mit $b < a < c$ (Abb. 3.28).

Für $a < x \leqq c$ ist

$$\varphi(x) - a = \varphi(x) - \varphi(a) = (x - a)\,\varphi'(\xi) = (x - a)\,\frac{f(\xi)\,f''(\xi)}{(f'(\xi))^2} > 0,$$

$$x - \varphi(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} > 0,$$

d. h., aus $a < x \leqq c$ folgt $a < \varphi(x) < x$. Setzen wir $a_0 := c$, $a_{n+1} := \varphi(a_n)$ $(n \in \mathbb{N})$, so ist die Folge (a_n) streng monoton fallend und (durch a) nach unten beschränkt. Sie besitzt daher einen Grenzwert a^*, und wegen der Stetigkeit von φ ist

$$a^* = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \varphi\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \varphi(a^*).$$

Folglich ist a^* die gesuchte Nullstelle a.

Die Fehlerabschätzung entsprechend dem Banachschen Fixpunktsatz kann einsetzen, sobald die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt sind.

Beispiel. Es sei $f(x) = x - \cos x$. Dann ist $f'(x) = 1 + \sin x$, $f''(x) = \cos x$, $f(0) = -1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$. Für $0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$ ist $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, und die oben genannten Voraussetzungen sind erfüllt. Wenn wir mit einem beliebigen Startwert a_0 mit $0 \leqq a_0 < \frac{\pi}{2}$ beginnen, konvergiert die durch (5) definierte Folge gegen eine Nullstelle von f, d. h. gegen eine Lösung der Gleichung $\cos x = x$. Es empfiehlt sich natürlich — etwa mit Hilfe einer Logarithmentafel — einen möglichst genauen Näherungswert als Startwert durch Probieren zu ermitteln.

Auf Einzelheiten in der numerischen Auswertung des Verfahrens soll hier nicht eingegangen werden. Dies geschieht im Rahmen des Lehrgangs *Numerische Mathematik*. Wir behandeln nur noch kurz das sogenannte *modifizierte Newtonverfahren*.

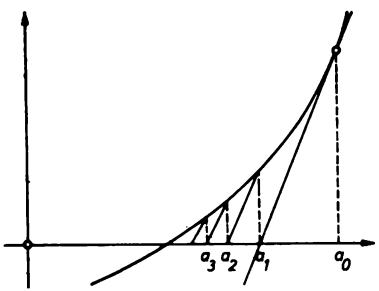

Abb. 3.29

Es ermöglicht eine Abschwächung der Voraussetzungen und eine einfachere Berechnung der Näherungswerte, nimmt aber dafür den Nachteil einer langsameren Konvergenz in Kauf. Hierbei wird nicht für jeden Näherungswert die Kurventangente konstruiert. Entsprechend Abb. 3.29 ermitteln wir die Schnittpunkte der x-Achse mit den zur Tangente im ersten Näherungswert a_0 parallelen Geraden durch die zu den Näherungswerten a_n gehörenden Kurvenpunkte. Setzen wir

$$a_{n+1} := a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_0)} \qquad (n \in \mathbb{N}), \tag{7}$$

so ist entsprechend unserer geometrischen Deutung

$$\frac{f(a_n)}{a_{n+1} - a_n} = f'(a_0).$$

Satz 2. *Es sei f eine in einem offenen Intervall I differenzierbare Funktion mit $f'(a_0) \neq 0$ für ein $a_0 \in I$. Dann gibt es positive reelle Zahlen α, q mit*

$$\left|1 - \frac{f'(x)}{f'(a_0)}\right| \leqq q < 1 \qquad (|x - a_0| \leqq \alpha). \tag{8}$$

Ist

$$|f(a_0)| \leqq \alpha(1 - q)\,|f'(a_0)|, \tag{9}$$

so besitzt f genau eine Nullstelle a mit $|a - a_0| \leqq \alpha$, und zwar ist a der Grenzwert der durch (7) definierten Folge.

Beweis. Es sei

$$\varphi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(a_0)}.$$

Dann ist

$$|\varphi'(x)| = \left|1 - \frac{f'(x)}{f'(a_0)}\right| \leqq q \qquad (|x - a_0| \leqq \alpha),$$

und φ ist kontrahierend. Wegen (9) ist

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - a_0| &\leqq |\varphi(x) - \varphi(a_0)| + |\varphi(a_0) - a_0| \\ &\leqq q\,|x - a_0| + \left|\frac{f(a_0)}{f'(a_0)}\right| \leqq q\alpha + \alpha(1 - q) = \alpha, \end{aligned}$$

und φ bildet das Intervall $[\![a_0 - \alpha, a_0 + \alpha]\!]$ in sich ab. Hieraus folgen die Behauptungen.

3.5.3. Implizit definierte Funktionen

In vielen Anwendungen der Analysis sind Funktionen $y = f(x)$ nicht explizit definiert, sondern durch Bedingungen der Form $F(x, y) = c$ charakterisiert, wobei F eine in einem Gebiet G des Raumes R_2 definierte reellwertige Funktion ist. Wir untersuchen die Frage, welche Voraussetzungen hinreichend dafür sind, daß die Gleichung $F(x, y) = c$ für vorgegebenes x nach y aufgelöst werden kann, so daß y in Abhängigkeit von x, also als Funktion $y = f(x)$ von einer Variablen x erscheint. Dies wird im allgemeinen nicht in expliziter Form gelingen. So ist es z. B. sinnlos zu versuchen, die Gleichung

$$x^3 \sin(xy) + e^{x-y} - \ln(x + y) = 0$$

explizit nach y „aufzulösen". Mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes werden wir aber eine zum modifizierten Newtonverfahren analoge Methode entwickeln, die eine Berechnung der Funktionswerte der „aufgelösten" Gleichung $y = f(x)$ mit jeder gewünschten Genauigkeit ermöglicht. Zunächst müssen wir voraussetzen, daß wir überhaupt einen Punkt (a, b) mit $F(a, b) = c$ finden können. Ferner werden sich die Differenzierbarkeit der Funktion F und die Bedingung $\partial_2 F(a, b) \neq 0$ als bedeutungsvoll erweisen. Schließlich müssen wir den Definitionsbereich der Funktion F auf eine Umgebung des Punktes (a, b) einschränken, damit es zu vorgegebenem x nicht mehrere Lösungen y der Gleichung $F(x, y) = c$ gibt.

Satz 1. *Es sei F eine in einem Gebiet G des Raumes R_2 stetig differenzierbare reellwertige Funktion. Gilt*

$$F(a, b) = c, \qquad \partial_2 F(a, b) \neq 0, \tag{1}$$

so gibt es positive reelle Zahlen α, β derart, daß die Gleichung

$$F(x, y) = c \tag{2}$$

für vorgegebenes x mit $|x - a| \leqq \alpha$ genau eine Lösung $y = f(x)$ mit $|y - b| \leqq \beta$ besitzt, und die so definierte Funktion f ist stetig differenzierbar.

Beweis. Wir setzen

$$\Phi(x, y) := y - \frac{F(x, y) - c}{\partial_2 F(a, b)} \qquad ((x, y) \in G). \tag{3}$$

Es ist $\Phi(x, y) = y$ genau dann, wenn $F(x, y) = c$ ist, womit ein erster Zusammenhang unseres Problems mit dem Fixpunktsatz aufgedeckt ist. Ist

$$R_{\alpha\beta} := \{(x, y) : |x - a| \leqq \alpha \wedge |y - b| \leqq \beta\} \tag{4}$$

ein in G enthaltener Rechtecksbereich, so gibt es nach dem Mittelwertsatz stets ein η mit $(x, \eta) \in R_{\alpha\beta}$ und

$$\Phi(x, y_1) - \Phi(x, y_2) = y_1 - y_2 - \frac{F(x, y_1) - F(x, y_2)}{\partial_2 F(a, b)}$$
$$= (y_1 - y_2)\left(1 - \frac{\partial_2 F(x, \eta)}{\partial_2 F(a, b)}\right).$$

Wegen der Stetigkeit von $\partial_2 F$ können wir α, β und eine positive reelle Zahl q so wählen, daß

$$\left|1 - \frac{\partial_2 F(x, y)}{\partial_2 F(a, b)}\right| \leqq q < 1 \qquad ((x, y) \in R_{\alpha\beta}) \tag{5}$$

ist. Hieraus folgt offensichtlich

$$\partial_2 F(x, y) \neq 0 \qquad ((x, y) \in R_{\alpha\beta}), \tag{6}$$

$$|\Phi(x, y_1) - \Phi(x, y_2)| \leqq q\,|y_1 - y_2| \qquad ((x, y_1), (x, y_2) \in R_{\alpha\beta}). \tag{7}$$

Weiterhin ist

$$|\Phi(x, y) - b| \leqq |\Phi(x, y) - \Phi(x, b)| + |\Phi(x, b) - b|$$
$$\leqq q\,|y - b| + \left|\frac{F(x, b) - c}{\partial_2 F(a, b)}\right|.$$

Wegen der Stetigkeit von F können wir α so klein wählen, daß

$$|F(x, b) - F(a, b)| \leqq \beta(1 - q)\,|\partial_2 F(a, b)| \qquad (|x - a|) \leqq \alpha) \tag{8}$$

ist. Dann ist

$$|\Phi(x, y) - b| \leqq q\beta + \beta(1 - q) \leqq \beta.$$

Wählen wir eine feste Zahl x mit $|x - a| \leqq \alpha$ und setzen $\varphi(y) := \Phi(x, y)$, so gilt $|\varphi(y) - b| \leqq \alpha$ sowie

$$|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)| \leqq q\,|y_1 - y_2|$$

für $|y - b|$, $|y_1 - b|$, $|y_2 - b| \leqq \alpha$, und φ erfüllt die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes. Es gibt daher genau eine — von der zunächst fest gewählten Zahl x abhängige — reelle Zahl $f(x)$ mit $\varphi(f(x)) = x$, $\Phi(x, f(x)) = x$, d. h. mit

$$F(x, f(x)) = F(a, b) \qquad (|x - a| \leqq \alpha, |f(x) - b| \leqq \beta). \tag{9}$$

Setzen wir

$$f_0(x) := b, \qquad f_{n+1}(x) := f_n(x) - \frac{F(x, f_n(x)) - c}{\partial_2 F(a, b)}, \tag{10}$$

so gilt

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \qquad (|x - a| \leqq \alpha). \tag{11}$$

Die a-priori-Abschätzung lautet in unserem Fall, wenn wir (8) berücksichtigen,

$$|f(x) - f_n(x)| \leqq \frac{q^n}{1 - q}\,|f_1(x) - f_0(x)| = \frac{q^n}{1 - q}\left|\frac{F(x, b) - c}{\partial_2 F(a, b)}\right|,$$
$$|f(x) - f_n(x)| \leqq \beta q^n \qquad (|x - a| \leqq \alpha). \tag{12}$$

Hieraus entnehmen wir, daß die Folge (f_n) im Intervall $\{x: |x - a| \leqq \alpha\}$ gleichmäßig konvergent und die Grenzfunktion f in diesem Intervall stetig ist.

Bisher haben wir beim Beweis nur die Existenz und Stetigkeit von $\partial_2 F$ vorausgesetzt. Es existiere nun auch $\partial_1 F$, und $\partial_1 F$ sei in G stetig. Dann ist F in G stetig differenzierbar. Für $|x - a|$, $|x_1 - a| \leqq \alpha$ ist

$$F(x_1, f(x_1)) - F(x, f(x)) = c - c = 0,$$

und nach dem Mittelwertsatz 3.3.4. (4) gibt es einen auf der Verbindungsstrecke von $(x, f(x))$, $(x_1, f(x_1))$ liegenden Punkt (ξ, η) mit

$$(x_1 - x)\, \partial_1 F(\xi, \eta) + (f(x_1) - f(x))\, \partial_2 F(\xi, \eta) = 0,$$

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = -\frac{\partial_1 F(\xi, \eta)}{\partial_2 F(\xi, \eta)},$$

wobei wir (6) beachtet haben. Für $x_1 \to x$ gilt $\xi \to x$, und wegen der Stetigkeit von f folgt weiterhin $f(x_1) \to f(x)$, $\eta \to f(x)$. Somit ist

$$f'(x) = -\frac{\partial_1 F(x, f(x))}{\partial_2 F(x, f(x))}, \tag{13}$$

und unser Satz ist vollständig bewiesen.

Beispiel. Es sei $a, b > 0$ und

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \qquad (x, y \in \mathrm{R})$$

und $c = 1$. Wegen

$$\partial_2 F(x_0, y_0) = 2\,\frac{y_0}{b^2}$$

sind die Voraussetzungen von Satz 1 (mit x_0, y_0 statt a, b) für alle x_0, y_0 mit $y_0 > 0$ und

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

erfüllt (Abb. 3.11). Die Gleichung $F(x, y) = 1$ kann in einer Umgebung von (x_0, y_0) eindeutig nach y aufgelöst werden, und nach (13) ist

$$y' = -\frac{\partial_1 F(x, y)}{\partial_2 F(x, y)} = -\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x}{y}.$$

Dieses Ergebnis können wir im vorliegenden Fall direkt nachprüfen.

Die Auflösung der Gleichung $F(x, y) = 1$ ergibt, wenn $y > 0$ ist,

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad (|x| \leqq a),$$

und für $|x| < a$ ist

$$y' = \frac{b}{a}\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}.$$

Ersetzt man in den Voraussetzungen von Satz 1 die Forderung $\partial_2 F(a, b) \neq 0$ durch $\partial_1 F(a, b) \neq 0$, so kann die Gleichung $F(x, y) = c$ in analoger Weise in einem hinreichend kleinen Rechtecksbereich eindeutig nach x aufgelöst werden. Die Bedingung „$\partial_1 F(a, b) \neq 0$ oder $\partial_2 F(a, b) \neq 0$" ist äquivalent mit der Bedingung „grad $F(a, b) \neq (0, 0)$". Durch jeden Punkt (a, b), in dem der Gradient von F nicht verschwindet, geht somit genau eine glatte Kurve C derart, daß in einer hinreichend kleinen Umgebung von (a, b) die Aussagen $(x, y) \in C$ und $F(x, y) = F(a, b)$ äquivalent

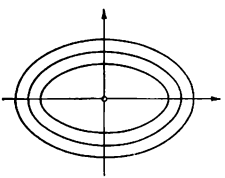

Abb. 3.30

sind. Man nennt die Menge aller Punkte (x, y) mit $F(x, y) = c$ die *Niveaulinie* der Funktion (oder des „Skalarfeldes") F mit dem „Niveau" $c = F(a, b)$. In Abb. 3.30 sind einige Niveaulinien der Funktion $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ eingezeichnet. Der (im Raum $\mathbb{R}_3$ liegende) Graph der Funktion $z = F(x, y)$ ergibt sich, indem man in jedem Punkt einer Niveaulinie das zugehörige Niveau in Richtung der z-Achse abträgt. Auf Grund dieser geometrischen Deutung heißen die Niveaulinien auch *Höhenlinien* der „Fläche $z = F(x, y)$".

Die Betrachtungen dieses Abschnitts können sinngemäß auf Funktionen von mehreren Variablen übertragen werden. Wir formulieren hier nur das Ergebnis für den Fall einer in $G \subseteq \mathbb{R}_3$ stetig differenzierbaren reellwertigen Funktion $u = F(x, y, z)$ von drei Variablen. Ist $F(a, b, c) = d$, $\partial_3 F(a, b, c) \neq 0$, so gibt es positive Zahlen α, β, γ derart, daß für alle x, y mit $|x - a| \leqq \alpha$, $|y - b| \leqq \beta$ genau eine reelle Zahl $z = f(x, y)$ mit $|z - c| \leqq \gamma$ und $F(x, y, z) = d$ existiert. Die so definierte Funktion f ist stetig differenzierbar, und es ist

$$\partial_1 f(x, y) = -\frac{\partial_1 F\big(x, y, f(x, y)\big)}{\partial_3 F\big(x, y, f(x, y)\big)},$$

$$\partial_2 f(x, y) = -\frac{\partial_2 F\big(x, y, f(x, y)\big)}{\partial_3 F\big(x, y, f(x, y)\big)}.$$

Analoge Aussagen gelten, wenn $\partial_1 F(a, b, c) \neq 0$ bzw. $\partial_2 F(a, b, c) \neq 0$ ist. Durch jeden Punkt $(a, b, c) \in G$ mit grad $F(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ geht daher genau eine glatte Fläche F derart, daß die Aussagen $(x, y, z) \in F$ und $F(x, y, z) = F(a, b, c)$ äquivalent sind. Sie heißt die zum Niveau $F(a, b, c)$ gehörende *Niveaufläche.*

Die Beweise all dieser Aussagen sind ganz analog wie oben zu führen.

Ist $\mathfrak{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ $(t \in I)$ eine glatte Kurve, die ganz in der Niveaufläche mit der Gleichung $F(x, y, z) = c$ liegt, so gilt $F\big(\mathfrak{r}(t)\big) = c$ $(t \in I)$. Hieraus und aus 3.2.3. (8) folgt

$$0 = \frac{dF\big(\mathfrak{r}(t)\big)}{dt} = \operatorname{grad} F\big(\mathfrak{r}(t)\big) \cdot \dot{\mathfrak{r}}(t).$$

Als Tangentenvektor einer in der Niveaufläche verlaufenden Kurve liegt $\dot{\mathfrak{r}}(t)$ in der Tangentialebene dieser Fläche. Der Gradient steht daher stets auf der Niveaufläche (genauer auf ihrer Tangentialebene) senkrecht.

3.5.4. Aufgaben

1. Man berechne $\sqrt[3]{3}$ mit Hilfe des Beispiels in 3.5.1. auf vier Stellen hinter dem Komma.

2. Man zeichne die Niveaulinien der Funktion $F(x, y) = \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4}$ für $c = 1$ und $c = 2$ und zeige, daß der Gradient in den zu $x = 5$ und $x = 8$ gehörenden Punkten auf den Niveaulinien senkrecht steht.

3. Man zeige, daß die Bedingungen (5) und (8) für die Funktion $F(x, y) = y^5 - 4y - x - 2$ (vgl. 1.3.5. (6)) mit $a = -5$, $b = 1$, $\alpha = 0{,}005$, $\beta = 0{,}01$, $q = 0{,}5$ erfüllt sind, und berechne die ersten Näherungswerte für die durch $F(x, y) = F(a, b)$ implizit definierte Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $x = -5{,}005$.

4. Integralrechnung

4.1. Riemannscher Inhalt und Riemannsches Integral

4.1.1. Das Inhaltproblem

Eine klassische Problemstellung der Mathematik behandelt die Frage, in welcher Weise man gewissen Punktmengen M der Ebene, z. B. Dreiecken, Rechtecken, Kreisen usw., eine reelle Zahl $\mu(M)$ als Inhalt zuordnen kann. Von anschaulichen Vorstellungen ausgehend, wird man hierbei fordern, daß gewisse Bedingungen erfüllt sind. Die folgenden Forderungen sind recht naheliegend.

I. Die Summe der Inhalte zweier durchschnittsfremder Mengen ist gleich dem Inhalt ihrer Vereinigungsmenge (endliche Additivität).

II. Kongruente Mengen haben den gleichen Inhalt.

III. Das Einheitsquadrat hat den Inhalt 1.

Man kann zeigen, daß es möglich ist, jeder beschränkten Menge der Ebene eine reelle Zahl als Inhalt zuzuordnen, so daß diese Eigenschaften erfüllt sind.[1]) Die Lösung ist aber außerordentlich kompliziert. Wir werden uns daher damit begnügen, ein möglichst umfassendes System von Teilmengen M der Ebene anzugeben, denen ein Inhalt $\mu(M)$ mit den geforderten Eigenschaften zugeordnet werden kann. Die im folgenden Abschnitt ausgeführte Konstruktion geht auf die Mathematiker Riemann, Jordan und Peano zurück.[2])

Wir skizzieren den Aufbau und formulieren die später benutzten Ergebnisse, so daß Abschnitt 4.1.2., in dem die Beweise ausgeführt werden, auch ohne Gefahr für das weitere Verständnis übergangen werden kann.

Wir konstruieren im Raum R_2 mit dem Halbierungsverfahren eine Folge von Systemen $\mathfrak{Q}_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, die aus Quadraten bestehen. Zum System $\mathfrak{Q}_0$ gehören

---

[1]) Das analoge Problem für den Raum ist dagegen nicht lösbar.

[2]) Eine umfassendere, von Henri-Léon Lebesgue (1875—1941) angegebene Lösung, die für die moderne Mathematik von grundlegender Bedeutung ist, können wir in dieser Einführung nicht behandeln. Man vergleiche hierzu die historischen Anmerkungen am Schluß von 4.1.3.

alle Quadrate Q der Seitenlänge 1, deren Eckpunkte ganzzahlige Koordinaten haben. Halbieren wir alle Kanten eines Quadrates Q aus $\mathfrak{Q}_0$, so entstehen aus ihm 2^2 Quadrate mit der Kantenlänge $\frac{1}{2}$, deren Eckpunktskoordinaten in der Form $\frac{m}{2}$ (m ganz) dargestellt werden können. Entsprechend besteht $\mathfrak{Q}_n$ aus allen Quadraten Q der Kantenlänge $\frac{1}{2^n}$, deren Eckpunktkoordinaten *dyadische Zahlen n-ter Ordnung* sind, d. h., die in der Form $\frac{m}{2^n}$ mit ganzzahligem m dargestellt werden können (Abb. 4.1).

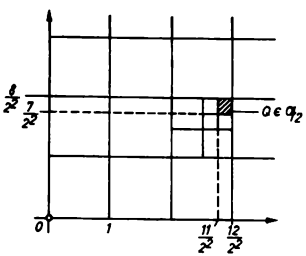

Abb. 4.1

Als elementargeometrischen Inhalt e_n eines Quadrats Q aus $\mathfrak{Q}_n$ bezeichnen wir die Zahl

$$e_n = \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \qquad (Q \in \mathfrak{Q}_n). \tag{1}$$

Es sei M eine beschränkte Teilmenge des Raumes R_2. Für jede natürliche Zahl n bestimmen wir die (stets endliche) Anzahl $i_n(M)$ bzw. $a_n(M)$ aller Quadrate Q aus $\mathfrak{Q}_n$, die ganz in M enthalten sind bzw. wenigstens einen Punkt mit M gemein haben (Abb. 4.2). Multiplizieren wir diese Anzahl mit dem elementargeometrischen Inhalt e_n der Quadrate Q aus $\mathfrak{Q}_n$, so erhalten wir Näherungszahlen $\underline{\mu}_n(M)$ bzw. $\bar{\mu}_n(M)$ für den zu definierenden Inhalt. Die Zahlenfolgen mit den Gliedern $\underline{\mu}_n(M)$ bzw. $\bar{\mu}_n(M)$ sind monoton wachsend bzw. fallend und (wegen $\underline{\mu}_n(M) \leqq \bar{\mu}_n(M)$) beschränkt. Sie besitzen daher Grenzwerte $\underline{\mu}(M)$ bzw. $\bar{\mu}(M)$, die als *innerer* bzw. *äußerer Inhalt* der beschränkten Menge M bezeichnet werden. Die Menge M heißt *quadrierbar*[1]), wenn diese Grenzwerte übereinstimmen. In diesem Fall setzen wir $\mu(M) := \bar{\mu}(M) = \underline{\mu}(M)$ und nennen diese Zahl den *Riemannschen* oder *Peano-Jordanschen Inhalt* der Menge M. Ist $\mu(M) = 0$, so heißt M eine Menge vom Inhalt 0. Stets ist $\mu(\emptyset) = 0$.

[1]) Diese Bezeichnung erinnert an das berühmte Problem der Quadratur des Kreises.

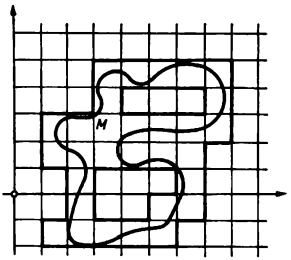

Abb. 4.2

$i_n(M) = \delta, \quad a_n(M) = 3\delta$

Aus unserer Inhaltsdefinition werden wir die folgenden Sätze herleiten.

Satz 1. *Eine Punktmenge ist quadrierbar genau dann, wenn sie beschränkt ist und wenn ihre Begrenzungspunkte eine Menge vom Inhalt* 0 *bilden.*

So hat zum Beispiel die Peripherie eines Kreises den Flächeninhalt 0. Dasselbe gilt für alle in der Elementargeometrie behandelten Figuren, d. h., alle diese Figuren sind quadrierbar.

Satz 2. *Sind die Mengen M, N quadrierbar, so sind auch ihre Differenzmenge und ihr Durchschnitt quadrierbar.*

Satz 3. *Sind die Mengen M, N quadrierbar und durchschnittsfremd, so ist ihre Vereinigung quadrierbar, und es gilt*

$$\mu(M \dot{\cup} N) = \mu(M) + \mu(N).$$

Satz 4. *Ist die Menge M^* kongruent zur quadrierbaren Menge M, so ist auch M^* quadrierbar, und es ist $\mu(M^*) = \mu(M)$.*

Sind M, N beliebige quadrierbare Mengen, so folgt aus Satz 3 wegen $M \cup N = M \cup (N \setminus M)$ stets

$$\mu(M \cup N) = \mu(M) + \mu(N \setminus M).$$

Aus $(M \cap N) \cup (N \setminus M) = N$ folgt andererseits

$$\mu(M \cap N) + \mu(N \setminus M) = \mu(N),$$

und Addition der letzten Gleichungen ergibt die für beliebige quadrierbare Mengen M, N gültige Formel

$$\mu(M \cup N) + \mu(M \cap N) = \mu(M) + \mu(N). \tag{2}$$

Sie ist anschaulich einleuchtend, denn der Durchschnitt der Mengen M, N wird auf beiden Seiten doppelt gemessen. Eine unmittelbare Folgerung von (2) ist die Verallgemeinerung

$$\mu(M \cap N) = 0 \Rightarrow \mu(M \cup N) = \mu(M) + \mu(N) \tag{3}$$

von Satz 3.

Aus $M \subseteqq N$ folgt $\mu(N) = \mu(M) + \mu(N \setminus M)$. Daher gilt das *Monotoniegesetz*

$$M \subseteqq N \Rightarrow \mu(M) \leqq \mu(N).$$

Für den Inhalt eines Rechtecks

$$R = \{(x, y) : a \leqq x \leqq b \wedge c \leqq y \leqq d\}$$

wird sich bei unserer Konstruktion entsprechend unseren elementargeometrischen Kenntnissen das Produkt seiner Kantenlängen ergeben, d. h. $\mu(R) = (b - a)(d - c)$. Diese Formel bleibt auch für $a = b$ oder $c = d$ gültig, d. h., der Flächeninhalt einer (achsenparallelen) Strecke bzw. eines Punktes ist gleich Null.

Bei unserer Definition des Inhalts sind wir von einer speziellen Folge von Systemen $\mathfrak{Q}_n$ ausgegangen. Die Aussage von Satz 4 ist gleichbedeutend damit, daß unsere Inhaltsdefinition bei Parallelverschiebungen, Drehungen und Spiegelungen dieses Netzes zu den gleichen quadrierbaren Mengen und zum gleichen Inhaltsmaß führt. Geht die Punktmenge M^* aus einer quadrierbaren Punktmenge M durch zentrische Streckung mit dem (positiven) Faktor t hervor, d. h., ist

$$M^* = \{t(x, y) : (x, y) \in M\}, \tag{4}$$

so ist auch M^* quadrierbar, und es ist

$$\mu(M^*) = t^2\mu(M). \tag{5}$$

Alle hier skizzierten Aussagen können mühelos auf den Raum R_3 bzw. R_1 oder ganz allgemein auf den Raum R_p übertragen werden. An Stelle des Einheitsquadrates tritt hierbei der p-dimensionale Einheitswürfel $\{(x_1, \ldots, x_p) : 0 \leqq x_i \leqq 1\ (i = 1, \ldots, p)\}$, und die Mengensysteme $\mathfrak{Q}_n$ bestehen aus allen p-dimensionalen Würfeln Q der Kantenlänge 2^{-n}, deren Eckpunktskoordinaten dyadische Zahlen n-ter Ordnung sind. Der elementargeometrische Inhalt e_n eines solchen Würfels ist die p-te Potenz seiner Kantenlänge, d. h., es ist

$$e_n = e_n^{(p)} = \frac{1}{2^{pn}}. \tag{6}$$

Für den Inhalt eines Rechtecksbereichs

$$R = \{(x_1, \ldots, x_p) : a_i \leqq x_i \leqq b_i\ (i = 1, \ldots, p)\}$$

mit $a_i < b_i$ oder allgemeiner $a_i \leqq b_i$ $(i = 1, \ldots, p)$ werden wir die aus der Elementargeometrie bekannte Formel

$$\mu(R) = (b_1 - a_1) \cdots (b_p - a_p) \tag{7}$$

gewinnen. Allgemeiner wird sich für den *Zylinderbereich*

$$M_a^b = \{(x_1, \ldots, x_{p+1}) : (x_1, \ldots, x_p) \in M \wedge a \leqq x_{p+1} \leqq b\} \tag{8}$$

des Raumes R_{p+1} mit der quadrierbaren „Grundfläche" M $(M \subset \mathsf{R}_p)$ und der Höhe $b - a$ die zu erwartende Formel

$$\mu^{(p+1)}(M_a^b) = (b - a)\, \mu^{(p)}(M) \tag{9}$$

ergeben, wobei der obere Index von μ darauf hindeutet, daß es sich um Inhaltsmessungen in verschiedenen Räumen (R_{p+1} bzw. R_p) handelt.

Die Sätze 1 bis 4 bleiben bei der Übertragung auf den p-dimensionalen Fall unverändert gültig.

Ist M quadrierbar, $t > 0$ und

$$M^* = \{t(x_1, \ldots, x_p) : (x_1, \ldots, x_p) \in M\}, \tag{10}$$

so ist

$$\mu(M^*) = t^p \mu(M). \tag{11}$$

4.1.2. Riemannscher Inhalt

Entsprechend den einführenden Erläuterungen in 4.1.1. bezeichnen wir mit $\mathfrak{Q}_n$ oder genauer $\mathfrak{Q}_n^{(p)}$ die Menge aller Würfel des R_p mit der Seitenlänge 2^{-n}, deren Eckpunktkoordinaten dyadische Zahlen n-ter Ordnung sind. Ferner sei e_n oder genauer $e_n^{(p)}$ durch 4.1.1. (6) definiert, so daß stets

$$e_n = 2^p \cdot e_{n+1} \tag{1}$$

gilt. Für jede beschränkte Menge M des Raumes R_p sei $i_n(M)$ bzw. $a_n(M)$ wie in 4.1.1. definiert, und es sei

$$\underline{\mu}_n(M) = i_n(M)\, e_n, \qquad \bar{\mu}_n(M) = a_n(M)\, e_n. \tag{2}$$

Da bei einer Halbierung der Kantenlänge jeder Würfel in 2^p Teilwürfel zerlegt wird und bei den inneren bzw. äußeren Würfeln höchstens weitere hinzukommen bzw. einige entfallen können, gelten die Ungleichungen

$$2^p i_n(M) \leqq i_{n+1}(M) \leqq a_{n+1}(M) \leqq 2^p a_n(M). \tag{3}$$

Aus (1) folgt, wenn wir (3) mit e_{n+1} multiplizieren,

$$\underline{\mu}_n(M) \leqq \underline{\mu}_{n+1}(M) \leqq \bar{\mu}_{n+1}(M) \leqq \bar{\mu}_n(M). \tag{4}$$

Die Zahlenfolgen mit den Gliedern $\underline{\mu}_n(M)$ bzw. $\bar{\mu}_n(M)$ sind daher konvergent.

Dies rechtfertigt die folgende

Definition. Unter dem *inneren* bzw. *äußeren Inhalt* einer beschränkten Punktmenge M des metrischen Raumes $\mathfrak{R}_p$ verstehen wir die Zahl

$$\underline{\mu}(M) = \underline{\mu}^{(p)}(M) := \lim_{n\to\infty} \underline{\mu}_n(M)$$

bzw.

$$\bar{\mu}(M) = \bar{\mu}^{(p)}(M) := \lim_{n\to\infty} \bar{\mu}_n(M).$$

Die Menge heißt *quadrierbar*, wenn $\underline{\mu}(M) = \bar{\mu}(M)$ ist, und die Zahl

$$\mu(M) = \mu^{(p)}(M) := \underline{\mu}(M) = \bar{\mu}(M)$$

heißt in diesem Fall der (Riemannsche) *Inhalt* der Menge M.

Da wegen (4) stets $0 \leqq \underline{\mu}(M) \leqq \bar{\mu}(M)$ gilt, ist jede Menge M, deren äußerer Inhalt 0 ist, quadrierbar. Ihr Inhalt ist 0, und insbesondere gilt $\mu(\emptyset) = 0$. Wir beweisen einen Hilfssatz.

Satz 1. *Für alle beschränkten Mengen M, N gilt*

$$M \subseteqq N \Rightarrow \underline{\mu}(M) \leqq \underline{\mu}(N) \wedge \bar{\mu}(M) \leqq \bar{\mu}(N), \tag{5}$$

$$M \cap N = \emptyset \Rightarrow \underline{\mu}(M) + \underline{\mu}(N) \leqq \underline{\mu}(M \cup N), \tag{6}$$

$$\bar{\mu}(M \cup N) \leqq \bar{\mu}(M) + \bar{\mu}(N), \tag{7}$$

$$\bar{\mu}(M) \leqq \underline{\mu}(M) + \bar{\mu}(\beta M), \tag{8}$$

wobei βM die Menge der Begrenzungspunkte von M bedeutet.

Beweis. Aus $M \subseteqq N$ folgt stets

$$i_n(M) \leqq i_n(N), \qquad a_n(M) \leqq a_n(N).$$

Daher gilt (5). Sind M, N durchschnittsfremd, so folgt aus $Q \in \mathfrak{Q}_n$ und $Q \subseteqq M$ stets $Q \cap N = \emptyset$. Daher ist $i_n(M) + i_n(N) \leqq i_n(M \cup N)$, und es gilt (6). Für beliebige beschränkte Mengen M, N ist $a_n(M \cup N) \leqq a_n(M) + a_n(N)$, woraus (7) folgt. Ist schließlich $Q \in \mathfrak{Q}_n$ und $Q \cap M \neq \emptyset$, so enthält Q entweder einen Begrenzungspunkt von M oder Q liegt im Innern von M, denn auf der Verbindungsstrecke eines inneren und eines äußeren Punktes von M liegt stets ein Begrenzungspunkt von M.[1]) Daher ist

$$a_n(M) \leqq a_n(\beta M) + i_n(M),$$

und (8) ist bewiesen.

Als Folgerung aus (5) und (7) ergibt sich, daß jede Teilmenge einer Menge vom Inhalt 0 bzw. die Vereinigung von zwei Mengen vom Inhalt 0 wieder den Inhalt 0 besitzt.

Satz 2. *Jeder Rechtecksbereich des $\mathfrak{R}_p$ ist quadrierbar, und sein Inhalt ist gleich dem Produkt seiner Kantenlängen.*

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall $p = 1$. Es seien a, b dyadische Zahlen n-ter Ordnung mit $a < b$ und $I = [\![a, b]\!]$, $I' =]\!]a, b[\![$. Dann ist $i_n(I) = 2^n(b - a) = a_n(I')$, folglich

$$\underline{\mu}_n(I) = b - a = \bar{\mu}_n(I')$$

[1]) Man beweist dies mit Hilfe des Halbierungsverfahrens.

und allgemeiner

$$\underline{\mu}_{n+k}(I) = b - a = \bar{\mu}_{n+k}(I') \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Somit ist

$$\underline{\mu}(I) = b - a = \bar{\mu}(I'),$$

falls a, b dyadische Zahlen sind. Sind a, b beliebige reelle Zahlen mit $a < b$, so gibt es für alle natürlichen Zahlen n mit $2^{1-n} < b - a$ dyadische Zahlen n-ter Ordnung a_n, b_n mit

$$a_n - \frac{1}{2^n} < a \leqq a_n < b_n \leqq b < b_n + \frac{1}{2^n}. \tag{9}$$

Dann ist

$$[\![a_n, b_n]\!] \subseteqq [\![a, b]\!] \subseteqq \left]\!\right]a_n - \frac{1}{2^n}, b_n + \frac{1}{2^n}\left[\!\right[, \tag{10}$$

und aus dem bereits Bewiesenen folgt

$$b_n - a_n \leqq \underline{\mu}([\![a, b]\!]) \leqq \bar{\mu}([\![a, b]\!]) \leqq \left(b_n + \frac{1}{2^n}\right) - \left(a_n - \frac{1}{2^n}\right). \tag{11}$$

Für $n \to \infty$ gilt $a_n \to a$, $b_n \to b$, und folglich ist $[\![a, b]\!]$ quadrierbar, $\mu([\![a, b]\!]) = b - a$. Damit ist der Satz im Fall $p = 1$ bewiesen.

Der Beweis für $p > 1$ verläuft ganz analog. Man zeigt zuerst, daß der innere Inhalt eines abgeschlossenen bzw. der äußere Inhalt eines offenen Rechtecksbereichs, dessen Eckpunkte dyadische Zahlen sind, gleich dem Produkt der Kantenlängen ist. Man hat dazu nur die in (10), (11) auftretenden Intervalle durch die analog gebildeten abgeschlossenen bzw. offenen Rechtecksbereiche zu ersetzen. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Aus ihm folgt, daß die Menge der Randpunkte eines Rechtecksbereichs den Inhalt 0 besitzt, da man jede einzelne der $2p$ Randflächen in einen Rechtecksbereich beliebig kleiner Höhe einschließen kann.

In Verschärfung von (8) gilt

Satz 3. *Für alle beschränkten Mengen M ist*

$$\bar{\mu}(\beta M) = \bar{\mu}M) - \underline{\mu}(M). \tag{12}$$

Beweis. Es sei R_n die Vereinigungsmenge aller Q aus $\mathfrak{Q}_n$, deren Inneres keinen Begrenzungspunkt von M enthält. Dann liegen alle Punkte von $\beta M \cap R_n$ auf den Rändern von endlich vielen Würfeln, und es ist $\mu(R_n \cap \beta M) = 0$. Ferner sei S_n die Vereinigungsmenge aller Q aus $\mathfrak{Q}_n$, deren Inneres mindestens einen Begrenzungspunkt von M enthält. Für diese Würfel Q gilt $Q \cap M \neq \emptyset$, aber nicht $Q \subseteqq M$. Daher ist

$$a_n(S_n) + i_n(M) \leqq a_n(M),$$

$$\bar{\mu}_n(S_n) \leqq \bar{\mu}_n(M) - \underline{\mu}_n(M).$$

Da jeder Punkt des Raumes in R_n oder S_n enthalten ist, gilt

$$\beta M \subseteqq (R_n \cap \beta M) \cup (S_n \cap \beta M),$$

und wegen (7) folgt

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(\beta M) &\leqq \bar{\mu}(R_n \cap \beta M) + \bar{\mu}(S_n \cap \beta M)\\ &= \bar{\mu}(S_n \cap \beta M) \leqq \bar{\mu}(S_n) \leqq \bar{\mu}_n(M) - \mu_n(M).\end{aligned}$$

Der Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt $\bar{\mu}(\beta M) \leqq \bar{\mu}(M) - \underline{\mu}(M)$, und zusammen mit (8) erhalten wir die Behauptung.

Eine unmittelbare Folgerung ist Satz 1 aus 4.1.1.

Zum Beweis von 4.1.1., Satz 2, zeigen wir zuerst, daß stets $\beta(M \setminus N) \subseteqq \beta M \cup \beta N$ ist. Es sei $x \notin \beta M \cup \beta N$. Liegt x im Äußeren von M oder im Innern von N, so liegt x im Äußeren von $M \setminus N$. Liegt aber x gleichzeitig im Innern von M und im Äußern von N, so liegt x im Innern von $M \setminus N$. In beiden Fällen gilt $x \notin \beta(M \setminus N)$. Da weitere Fälle nicht auftreten können, gilt $\beta(M \setminus N) \subseteqq \beta M \cup \beta N$. Sind M, N quadrierbar, so besitzt $\beta M \cup \beta N$ und damit $\beta(M \setminus N)$ den Inhalt 0, und $M \setminus N$ ist quadrierbar. Wegen $M \cap N = M \setminus (M \setminus N)$ ist auch $M \cap N$ quadrierbar. Damit ist 4.1.1., Satz 2, bewiesen.

Sind M, N quadrierbar und durchschnittsfremd, so folgt aus (6), (7) die Abschätzung

$$\mu(M) + \mu(N) \leqq \underline{\mu}(M \cup N) \leqq \bar{\mu}(M \cup N) \leqq \mu(M) + \mu(N),$$

womit auch 4.1,1., Satz 3, bewiesen ist.

Zum Beweis der Inhaltsformel 4.1.1. (9) für Zylinderbereiche $M_a{}^b$ sei $M_n{}^*$ bzw. M_n die Vereinigungsmenge aller Q aus $\mathfrak{Q}_n{}^{(p)}$ mit $Q \cap M \neq \emptyset$ bzw. $Q \subseteqq M$. Dann ist $(M_n)_a{}^b \subseteqq M_a{}^b \subseteqq (M_n{}^*)_a{}^b$. Da $(M_n)_a{}^b$ und $(M_n{}^*)_a{}^b$ Vereinigungsmengen von Rechtecksbereichen sind, die keine inneren Punkte gemein haben, folgt aus Satz 2, daß

$$\mu^{(p+1)}((M_n)_a{}^b) = (b-a)\,\mu^{(p)}(M_n), \qquad \mu^{(p+1)}((M_n{}^*)_a{}^b) = (b-a)\,\mu^{(p)}(M_n{}^*)$$

ist. Daher gilt

$$(b-a)\,\mu^{(p)}(M_n) \leqq \underline{\mu}^{(p+1)}(M_a{}^b) \leqq \bar{\mu}^{(p+1)}(M_a{}^b) \leqq (b-a)\,\mu^{(p)}(M_n{}^*),$$

und der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert die Behauptung 4.1.1. (9). Eine analoge Formel gilt für Zylinderbereiche bezüglich anderer Koordinatenachsen.

Wir betrachten eine *lineare Abbildung*

$$x_i{}^* = \sum_{k=1}^{p} c_{ik} x_k + c_i \qquad (i = 1, \ldots, p). \tag{13}$$

Sie ordnet jedem Punkt $x = (x_1, \ldots, x_p)$ des Raumes R_p einen Bildpunkt $x^* = (x_1{}^*, \ldots, x_p{}^*)$ dieses Raumes und damit jeder Teilmenge M von R_p eine Bildmenge M^* zu. Mit C bezeichnen wir die Determinante der *Transformationsmatrix* (c_{ik}) und beweisen

Satz 4. *Jede quadrierbare Menge M geht bei der Abbildung* (13) *in eine quadrierbare Menge M^* über, und es ist*

$$\mu(M^*) = |C|\,\mu(M). \tag{14}$$

Beweis. Wir setzen zuerst voraus, daß für alle Q aus $\mathfrak{Q}_n$ ($n \in \mathsf{N}$) die Behauptung

$$\mu(Q^*) = |C|\,\mu(Q) \tag{15}$$

bereits bewiesen sei. Die Bildmenge M^* einer jeden beschränkten Menge M ist wieder beschränkt. Nehmen wir an, es sei $\underline{\mu}(M^*) < |C|\,\underline{\mu}(M)$. Nach Definition des inneren Inhalts gibt es dann ein n mit

$$\underline{\mu}(M^*) < |C|\,\underline{\mu}_n(M) \leqq |C|\,\underline{\mu}(M).$$

Die Zahl $\underline{\mu}_n(M)$ ist der Inhalt einer Vereinigungsmenge R_n von Würfeln $Q \in \mathfrak{Q}_n$ (siehe Abb. 4.2, S. 108), und wegen (15) ist $\mu(R_n{}^*) = |C| \cdot \mu(R_n)$. Aus $R_n \subseteqq M$ folgt $R_n{}^* \subseteqq M^*$, und wir gelangen zum Widerspruch

$$|C|\,\mu(R_n) = \mu(R_n{}^*) \leqq \underline{\mu}(M^*) < |C|\,\underline{\mu}_n(M) = |C|\,\mu(R_n).$$

Somit ist stets $\underline{\mu}(M^*) \geqq |C|\, \underline{\mu}(M)$. In analoger Weise führen wir die Annahme $\bar{\mu}(M^*) > |C|\, \bar{\mu}(M)$ zum Widerspruch und erhalten zusammenfassend

$$|C|\, \underline{\mu}(M) \leqq \underline{\mu}(M^*) \leqq \bar{\mu}(M^*) \leqq |C|\, \bar{\mu}(M).$$

Mit M ist daher auch M^* quadrierbar, und es gilt (14).

Es bleibt somit (15) zu beweisen, was wir zunächst für spezielle Abbildungstypen durchführen. Für jede *Translation*

$$x_i^* = x_i + c_i \qquad (i = 1, \ldots, p) \tag{16}$$

ist (c_{ik}) die Einheitsmatrix, und wegen $C = 1$ und Satz 2 ist (15) erfüllt.

Als nächstes betrachten wir im Spezialfall $p = 2$ die *Scherung*

$$x^* = x, \qquad y^* = tx + y$$

in Richtung der y-Achse. Das Rechteck

$$R = \{(x, y) : 0 \leqq x \leqq a \wedge 0 \leqq y \leqq b\}$$

geht hierbei in das Parallelogramm

$$\begin{aligned} R^* &= \{(x^*, y^*) : 0 \leqq x^* \leqq a \wedge 0 \leqq y^* - tx^* \leqq b\} \\ &= \{(x, y) : 0 \leqq x \leqq a \wedge tx \leqq y \leqq tx + b\} \end{aligned}$$

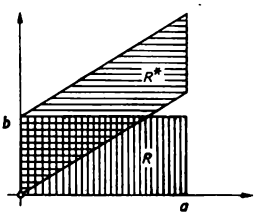

Abb. 4.3

über (Abb. 4.3). Die aus der Elementargeometrie bekannte Inhaltsgleichheit von R und R^* könnte an dieser Stelle ohne großen Aufwand bewiesen werden, doch wird sie sich in 4.1.4. (Satz 7) zwanglos ergeben. Wegen der bereits bewiesenen Invarianz des Inhalts bei Translationen gilt daher $\mu(Q^*) = \mu(Q)$ für alle Q aus $\mathfrak{Q}_n$. Da diese Gleichung auch für die Spiegelung

$$x^* = y, \qquad y^* = x$$

an der Geraden mit der Gleichung $y = x$ erfüllt ist, gilt $\mu(Q^*) = \mu(Q)$ auch für eine Scherung in Richtung der x-Achse. Allgemeiner gilt die Gleichung $\mu(Q^*) = \mu(Q)$ wegen der Inhaltsformel für Zylinderbereiche auch im Fall $p \geqq 2$ für die Scherungen

$$x_i^* = \begin{cases} x_r + tx_s & \text{für} \quad i = r \qquad (r \neq s), \\ x_i & \text{für} \quad i \neq r. \end{cases} \tag{17}$$

Die Transformationsmatrix einer solchen Scherung ist eine sogenannte *Additionsmatrix*, und zwar ist $c_{rs} = t$, während alle Elemente der Hauptdiagonalen gleich 1 und die restlichen gleich 0 sind. Die Determinante einer Additionsmatrix ist 1, so daß wiederum (15) erfüllt ist.

Als letzten Spezialfall betrachten wir die Abbildung

$$x_i^* = d_i x_i \qquad (i = 1, \ldots, p), \tag{18}$$

bei der die i-te Seitenlänge eines jeden Würfels Q aus $\mathfrak{Q}_n$ mit $|d_i|$ multipliziert wird, so daß $\mu(Q^*) = |d_1 \cdots d_p|\, \mu(Q)$ ist. Sind alle d_i von 0 verschieden, so handelt es sich um eine *Maßstabsänderung* in den Achsenrichtungen mit eventueller Richtungsumkehr. Die Determinante der Transformationsmatrix von (18) ist $|d_1 \cdots d_p|$, und (15) gilt auch für diese Abbildung. Nach einem Satz der linearen Algebra kann jede quadratische Matrix (c_{ik}) mit der Determinante C als Produkt von Additionsmatrizen und einer Diagonalmatrix, deren Determinante wiederum C ist, dargestellt werden.[1]) Die Abbildung (13) kann daher (in geeigneter Reihenfolge) durch Nacheinanderausführung einer Translation, einer Maßstabsänderung in den Achsenrichtungen und von Scherungen erzeugt werden. Bei jedem Teilschritt gilt (15), wobei für Translationen und Scherungen $C = 1$ zu setzen ist. Damit ist Satz 4 bewiesen.

Jede Kongruenztransformation läßt sich in der Form (13) mit *orthogonaler* Transformationsmatrix darstellen. Die Determinante einer orthogonalen Matrix ist stets gleich ± 1, und mit Satz 4 ist auch 4.1.1., Satz 4, bewiesen. Für die Abbildung $x_i^* = tx_i$ $(i = 1, \ldots, p)$ ist $|C| = t^p$, und aus (14) folgt 4.1.1. (11).

4.1.3. Riemannsches Integral

Die klassische Problemstellung der Integralrechnung besteht darin, für eine in einem Intervall $I = [\![a, b]\!]$ beschränkte Funktion f mit $f(x) \geqq 0$ für $a \leqq x \leqq b$ den Inhalt der sogenannten *Ordinatenmenge*

$$I_0 f = \{(x, y) : a \leqq x \leqq b \wedge 0 \leqq y \leqq f(x)\} \tag{1}$$

(der „Fläche unter der Kurve $y = f(x)$") zu berechnen (Abb. 4.4). Zur Lösung dieses Problems betrachten wir etwas allgemeiner eine beliebige beschränkte Funktion aus

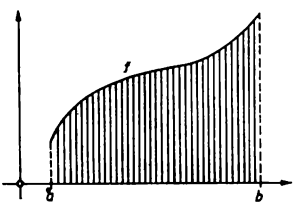

Abb. 4.4

[1]) Vgl. Brehmer-Belkner, Einführung in die analytische Geometrie und lineare Algebra.

R in R. Für jede Teilmenge M ihres Definitionsbereiches setzen wir

$$\underline{f}(M) := \inf\{f(x) : x \in M\}, \tag{2}$$

$$\bar{f}(M) := \sup\{f(x) : x \in M\} \tag{3}$$

(Abb. 4.5). Der Definitionsbereich von f enthalte das Intervall $I = [\![a, b]\!]$. Ein Mengensystem $\mathfrak{Z} = \{I_1, I_2, \ldots, I_k\}$ von abgeschlossenen Intervallen heiße eine *Zerlegung* des Intervalls I, wenn I die Vereinigung der Intervalle $I_1, \ldots, I_k$ ist und

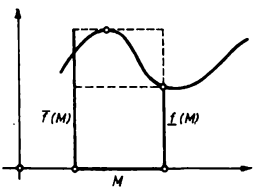

Abb. 4.5

wenn I_i und I_j für $i \neq j$ höchstens Randpunkte gemein haben. Eine solche Zerlegung $\mathfrak{Z}$ ist offensichtlich durch $k + 1$ Punkte $x_0, x_1, \ldots, x_k$ mit

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$$

bestimmt, wobei $I_j = [\![x_{j-1}, x_j]\!]$ zu setzen ist. Die Länge des Intervalls I ist gleich der Summe der Intervallängen von I_j, d. h., es ist

$$\mu(I) = b - a = \sum_{j=1}^{k} (x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{k} \mu(I_j).$$

Die maximale Intervallänge $d(\mathfrak{Z})$, d. h., die Zahl

$$d(\mathfrak{Z}) = \max\{\mu(I_j) : j = 1, \ldots, k\}$$

heißt der *Durchmesser* der Zerlegung $\mathfrak{Z}$.

Für jede Zerlegung $\mathfrak{Z}$ bestimmen wir eine *Untersumme* durch

$$\underline{S}(f, \mathfrak{Z}) = \sum_{j=1}^{k} \underline{f}(I_j)\, \mu(I_j) = \sum_{j=1}^{k} \underline{f}(I_j)\, (x_j - x_{j-1}) \tag{4}$$

und eine *Obersumme* durch

$$\bar{S}(f, \mathfrak{Z}) = \sum_{j=1}^{k} \bar{f}(I_j)\, \mu(I_j) = \sum_{j=1}^{k} \bar{f}(I_j)\, (x_j - x_{j-1}). \tag{5}$$

Dann ist

$$\bar{S}(f, \mathfrak{Z}) - \underline{S}(f, \mathfrak{Z}) = \sum_{j=1}^{k} \left(\bar{f}(I_j) - \underline{f}(I_j)\right) \mu(I_j) \geqq 0. \tag{6}$$

Ist f nichtnegativ, so besitzen Unter- und Obersumme eine einfache geometrische Bedeutung (Abb. 4.6). Die Summanden der Untersumme bzw. Obersumme sind die Flächeninhalte von Rechtecken, die keine inneren Punkte gemein haben. Die Summe

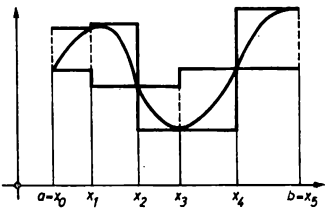

Abb. 4.6

dieser Inhalte, also die Unter- bzw. Obersumme, ist der Flächeninhalt einer Punktmenge, die der Ordinatenmenge I_0' ein- bzw. umbeschrieben ist. Hieraus folgt

$$\underline{S}(f, \mathfrak{Z}) \leqq \underline{\mu}(I_0') \leqq \bar{\mu}(I_0') \leqq \bar{S}(f, \mathfrak{Z}) \qquad \big(f(x) \geqq 0 \quad \text{für} \quad x \in I\big). \tag{7}$$

Die weiteren Betrachtungen sind zunächst von der Inhaltslehre unabhängig. Daher ist die Voraussetzung $f(x) \geqq 0$ nicht erforderlich. Wegen $\underline{f}(I_j) \geqq \underline{f}(I)$ und $\bar{f}(I_j) \leqq \bar{f}(I)$ für $j = 1, \ldots, k$ ist

$$\underline{S}(f, \mathfrak{Z}) = \sum_{j=1}^{k} \underline{f}(I_j)\, \mu(I_j) \geqq \underline{f}(I) \sum_{j=1}^{k} \mu(I_j) = \underline{f}(I)\,(b - a).$$

Für die Obersumme gilt die entgegengesetzte Abschätzung. Daher ist stets

$$(b - a)\, \underline{f}(I) \leqq \underline{S}(f, \mathfrak{Z}) \leqq \bar{S}(f, \mathfrak{Z}) \leqq (b - a)\, \bar{f}(I). \tag{8}$$

Eine Zerlegung $\mathfrak{Z}'$ heißt eine *Verfeinerung* der Zerlegung $\mathfrak{Z}$, wenn jedes Intervall der Zerlegung $\mathfrak{Z}'$ in einem Intervall der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ enthalten ist.

Satz 1. *Bei einer Verfeinerung einer Zerlegung wird die zugehörige Untersumme höchstens größer, die zugehörige Obersumme höchstens kleiner.*

Beweis. Es genügt, den Fall zu betrachten, daß nur ein Intervall I^* aus der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ in die Teilintervalle I', I'' zerlegt wird (Abb. 4.7). Wegen (8) ist

$$\mu(I^*)\, \underline{f}(I^*) \leqq \underline{S}(f, \{I', I''\}).$$

Da alle anderen Summanden in den Zerlegungssummen unverändert bleiben, wird die Untersumme höchstens größer. Analog verläuft der Beweis für Obersummen.

Es seien $\mathfrak{Z}', \mathfrak{Z}''$ zwei beliebige Zerlegungen des Intervalls $[\![a, b]\!]$. Dann ist $I' \cap I''$ für $I' \in \mathfrak{Z}'$, $I'' \in \mathfrak{Z}''$ ein abgeschlossenes Intervall, eine Einermenge oder die leere

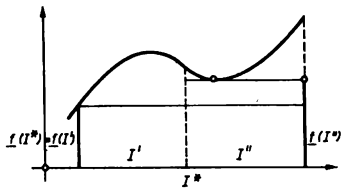

Abb. 4.7

Menge. Die Menge aller Intervalle $I' \cap I''$ bildet wiederum eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von $[\![a, b]\!]$, die *Überlagerung* der Zerlegungen $\mathfrak{Z}'$, $\mathfrak{Z}''$ (Abb. 4.8). Die Überlagerung $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{Z}'$, $\mathfrak{Z}''$ ist eine Verfeinerung von $\mathfrak{Z}'$ und von $\mathfrak{Z}''$. Daher ist stets

$$\underline{S}(f, \mathfrak{Z}') \leqq \underline{S}(f, \mathfrak{Z}) \leqq \bar{S}(f, \mathfrak{Z}) \leqq \bar{S}(f, \mathfrak{Z}''),$$

d. h., eine beliebige Obersumme (Untersumme) ist eine obere (untere) Schranke für eine beliebige Untersumme (Obersumme). Wir können hiernach die folgende Definition aussprechen.

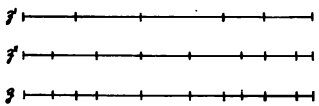

Abb. 4.8

Definition 1. Es sei f eine auf $[\![a, b]\!]$ definierte und beschränkte Funktion. Dann heißt die kleinste obere Schranke aller Untersummen das *untere* (*Darbouxsche*) *Integral*, in Zeichen $\underline{J}(f; a, b)$, und die größte untere Schranke aller Obersummen das *obere* (*Darbouxsche*) *Integral*, in Zeichen $\bar{J}(f; a, b)$, von f in $[\![a, b]\!]$.

Nach dieser Definition ist

$$\underline{J}(f; a, b) = \sup_{\mathfrak{Z}} \underline{S}(f, \mathfrak{Z}), \tag{9}$$

$$\bar{J}(f; a, b) = \inf_{\mathfrak{Z}} \bar{S}(f, \mathfrak{Z}), \tag{10}$$

wobei $\mathfrak{Z}$ die Menge aller Zerlegungen des Intervalls $[\![a, b]\!]$ durchläuft. Wegen (8), (9), (10) ist stets

$$\underline{S}(f, \mathfrak{Z}) \leqq \underline{J}(f; a, b) \leqq \bar{J}(f; a, b) \leqq \bar{S}(f, \mathfrak{Z}). \tag{11}$$

Es gibt beschränkte Funktionen, für die $\underline{J}(f; a, b) < \bar{J}(f; a, b)$ ist.

Beispiel 1. Es sei $a = 0$, $b = 1$ und

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x \text{ rational,} \\ 0 \text{ für } x \text{ irrational.} \end{cases}$$

Für jedes Teilintervall I von $[\![0, 1]\!]$ gilt $\underline{f}(I) = 0$, $\bar{f}(I) = 1$. Setzen wir diese Werte für eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ in (4) bzw. (5) ein, so erhalten wir $\underline{S}(f, \mathfrak{Z}) = 0$ und

$$\bar{S}(f, \mathfrak{Z}) = \sum_{j=1}^{k} \mu(I_j) = \mu([\![0, 1]\!]) = 1.$$

Somit ist $\underline{J}(f; 0, 1) = 0$, $\bar{J}(f; 0, 1) = 1$.

Die Klasse der Funktionen, für die das untere mit dem oberen Darbouxschen Integral übereinstimmt, erhält einen besonderen Namen.

Definition 2. Eine Funktion f heißt (im Riemannschen Sinn) über das Intervall $[\![a, b]\!]$ *integrierbar*, wenn sie im Intervall $[\![a, b]\!]$ definiert und beschränkt ist und wenn ihr oberes und ihr unteres (Darbouxsches) Integral übereinstimmen. Die Zahl $J(f; a, b)$ mit

$$J(f; a, b) = \underline{J}(f; a, b) = \bar{J}(f; a, b)$$

heißt dann das (Riemannsche) *Integral* oder auch das *bestimmte* (Riemannsche) *Integral* der Funktion f über das Intervall $[\![a, b]\!]$.

Neben dieser auf Riemann zurückgehenden Definition[1]) haben zahlreiche andere Mathematiker den Begriff des Integrals eingeführt. Die meisten dieser Definitionen sind zwar etwas komplizierter als die hier gegebene, haben aber den Vorteil, daß die Klasse der integrierbaren Funktionen umfassender ist. Für uns erweist sich die Riemannsche Definition als ausreichend, zumal wir zeigen können, daß alle in einem Intervall $[\![a, b]\!]$ stetigen Funktionen über dieses Intervall integrierbar sind.

Neben der Bezeichnung $J(f; a, b)$ werden wir, wie in der mathematischen Literatur fast durchweg üblich, die auf Leibniz zurückgehende Bezeichnung

$$\int_a^b f(x)\, dx := J(f; a, b) \tag{12}$$

verwenden. Sie entstand aus der Darstellung

$$\underline{S}(f, \mathfrak{Z}) = \sum_{j=1}^{k} \underline{f}(I_j)\, \Delta x_j$$

für Untersummen (oder analog für Obersummen), und zwar ist das Summenzeichen in das Zeichen $\int$, ein langgezogenes S, und die Differenzen $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ sind in das „Differential" dx übergegangen.

---

[1]) Riemann hat allerdings den weiter unten behandelten Weg über die sogenannten Zwischensummen gewählt.

Das Zeichen $\int$ findet sich im Druck in den Acta Eruditorum 1686, war von LEIBNIZ aber in Manuskripten schon seit 1675 verwendet worden.

In (12) ist x als gebundene Variable zu betrachten, die durch andere Variable ersetzt werden kann. So ist z. B.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(z)\,dz = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Die Zahl a bzw. b heißt die *untere* bzw. *obere* Grenze des Integrals, und beide Zahlen heißen *Integrationsgrenzen*. Die Funktion f heißt der *Integrand*.

Aus (7) ersehen wir, daß die Ordinatenmenge $I_0 f$ für jede im Riemannschen Sinne über das Intervall $I = [\![a, b]\!]$ integrierbare nichtnegative Funktion f quadrierbar ist und daß ihr Integral gerade den Flächeninhalt angibt. Unter der genannten Voraussetzung gilt also

$$\mu(I_0 f) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \big(f(x) \geqq 0 \quad \text{für} \quad a \leqq x \leqq b\big). \tag{13}$$

Wir beweisen das *Riemannsche Integrabilitätskriterium.*

Satz 2. *Die Funktion f ist über das Intervall $[\![a, b]\!]$ integrierbar genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ mit $\bar{S}(f, \mathfrak{Z}) - \underline{S}(f, \mathfrak{Z}) < \varepsilon$ gibt.*

Beweis. Wegen (11) ist die Bedingung hinreichend für die Integrierbarkeit. Sei umgekehrt f integrierbar. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es nach Definition 1 eine Zerlegung $\mathfrak{Z}'$ und eine Zerlegung $\mathfrak{Z}''$ mit

$$J(f; a, b) - \underline{S}(f, \mathfrak{Z}') < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \bar{S}(f, \mathfrak{Z}'') - J(f; a, b) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für die Überlagerung $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{Z}'$ und $\mathfrak{Z}''$ gilt

$$\bar{S}(f, \mathfrak{Z}) - \underline{S}(f, \mathfrak{Z}) \leqq \bar{S}(f, \mathfrak{Z}'') - \underline{S}(f, \mathfrak{Z}') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

und Satz 2 ist bewiesen.

Unser nächstes Ziel ist der Beweis der Integrierbarkeit einiger wichtiger Klassen von Funktionen und die Bereitstellung von Methoden für die numerische Berechnung ihrer Integrale. Zunächst führen wir den Begriff der *Zwischensumme* $S(f, \mathfrak{Z}, \xi)$ ein. Ist $\mathfrak{Z} = \{I_1, \ldots, I_k\}$ eine Zerlegung, so bezeichnen wir mit ξ eine auf der Menge $\mathfrak{Z}$ definierte *Auswahlfunktion*, die jedem Intervall I_j aus $\mathfrak{Z}$ ein Element ξ_j dieses Intervalls zuordnet, und setzen

$$S(f, \mathfrak{Z}, \xi) := \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)\,\mu(I_j) = \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)\,(x_j - x_{j-1}) \tag{14}$$

(Abb. 4.9). Wegen $\underline{f}(I_j) \leqq f(\xi_j) \leqq \bar{f}(I_j)$ ist stets

$$\underline{S}(f, \mathfrak{Z}) \leqq S(f, \mathfrak{Z}, \xi) \leqq \bar{S}(f, \mathfrak{Z}). \tag{15}$$

Die angenäherte Berechnung von Integralen werden wir mit Hilfe von *Zerlegungsfolgen* durchführen. Wir nennen eine Folge von Zerlegungen $\mathfrak{Z}^{(n)}$ eine *ausgezeichnete Zerlegungsfolge*, wenn die Folge ihrer Durchmesser $d(\mathfrak{Z}^{(n)})$ eine Nullfolge ist. Dies ist z. B. für die durch

$$\mathfrak{Z}^{(n)}: a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} = b$$

mit

$$x_j^{(n)} = a + j\,\frac{b-a}{n} \qquad (j = 0, 1, \ldots, n)$$

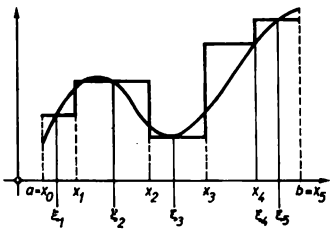

Abb. 4.9

definierte Zerlegungsfolge der Fall. Wir bezeichnen die so definierte Zerlegungsfolge $(\mathfrak{Z}^{(n)})$ als die *äquidistante Zerlegungsfolge*, weil die Länge aller Intervalle aus der Zerlegung $\mathfrak{Z}^{(n)}$ gleich $\dfrac{b-a}{n}$ ist.

Eine Folge von Zwischensummen $S(f, \mathfrak{Z}^{(n)}, \xi^{(n)})$ nennen wir eine *ausgezeichnete Folge von Zwischensummen*, wenn die Folge der Durchmesser $d(\mathfrak{Z}^{(n)})$ eine Nullfolge ist.

Satz 3. *Jede auf dem Intervall $[\![a, b]\!]$ monotone Funktion f ist über das Intervall $[\![a, b]\!]$ integrierbar, und jede ausgezeichnete Folge von Zwischensummen konvergiert gegen das Integral der Funktion über das Intervall $[\![a, b]\!]$.*

Beweis. Sei f monoton wachsend. Wegen (6) gilt stets

$$\bar{S}(f, \mathfrak{Z}) - \underline{S}(f, \mathfrak{Z}) \leqq d(\mathfrak{Z}) \sum_{j=1}^{k} \big(\bar{f}(I_j) - \underline{f}(I_j)\big) = d(\mathfrak{Z}) \sum_{j=1}^{k} \big(f(x_j) - f(x_{j-1})\big),$$

$$\bar{S}(f, \mathfrak{Z}) - \underline{S}(f, \mathfrak{Z}) \leqq d(\mathfrak{Z}) \big(f(b) - f(a)\big). \tag{16}$$

Für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge ist daher

$$\lim_{n\to\infty} \left(\bar{S}(f, \mathfrak{Z}^{(n)}) - \underline{S}(f, \mathfrak{Z}^{(n)})\right) = 0, \tag{17}$$

und aus (11), (15) folgt, wenn wir die zu $\mathfrak{Z}^{(n)}$ gehörenden Auswahlfunktionen $\xi^{(n)}$ beliebig wählen,

$$\lim_{n\to\infty} \bar{S}(f, \mathfrak{Z}^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, \mathfrak{Z}^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} S(f, \mathfrak{Z}^{(n)}, \xi^{(n)}) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{18}$$

Beispiel 2. Wir berechnen das Integral der monotonen Funktion $f(x) = x$ über ein Intervall $[\![a, b]\!]$ mit Hilfe der äquidistanten Zerlegungsfolge, wobei wir als Zwischenpunkte die rechten Endpunkte der Intervalle wählen. Die Zwischensumme ist dann gleich der Obersumme, und zwar ist

$$\begin{aligned}\bar{S}(f, \mathfrak{Z}^{(n)}) &= \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(a + \frac{b-a}{n} j\right) = \frac{b-a}{n} na + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{j=1}^{n} j \\ &= (b-a)\,a + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \frac{n(n+1)}{2} = (b-a)\left(a + \frac{b-a}{2} \cdot \frac{n+1}{n}\right),\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \bar{S}(f, \mathfrak{Z}^{(n)}) = (b-a)\left(a + \frac{b-a}{2}\right) = \frac{(b-a)(b+a)}{2},$$

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Wie dieses Beispiel zeigt, kann schon die Integration sehr einfacher Funktionen mit Hilfe von Zwischensummen recht mühsam sein.

Satz 4. *Jede auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall stetige Funktion ist über dieses Intervall integrierbar.*

Beweis. Es sei f auf dem Intervall $[\![a, b]\!]$ stetig. Nach 2.4.3. ist f auf diesem Intervall gleichmäßig stetig. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ bestimmen wir ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

für $|x' - x''| < \delta$. Wählen wir eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{I_1, \ldots, I_k\}$ von $[\![a, b]\!]$, deren Durchmesser kleiner als δ ist, so gilt $\bar{f}(I_j) - \underline{f}(I_j) < \frac{\varepsilon}{b-a}$ $(j = 1, \ldots, k)$ und folglich

$$\begin{aligned}\bar{S}(f, \mathfrak{Z}) - \underline{S}(f, \mathfrak{Z}) &= \sum_{j=1}^{k} \left(\bar{f}(I_j) - \underline{f}(I_j)\right) \mu(I_j) \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^{k} \mu(I_j) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon,\end{aligned}$$

und die Behauptung folgt aus dem Riemannschen Integrabilitätskriterium.

Unter der stärkeren Voraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit kann der Beweis der Integrierbarkeit ohne den tiefliegenden Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit mit den in der Schulmathematik bereitstehenden Hilfsmitteln geführt werden.

Satz 5. *Jede auf einem abgeschlossenen Intervall stetig differenzierbare Funktion ist über dieses Intervall integrierbar, und jede ausgezeichnete Folge von Zwischensummen konvergiert gegen das Integral der Funktion über das Intervall.*

Beweis. Die Funktion f sei im Intervall $[\![a, b]\!]$ stetig differenzierbar. In jedem abgeschlossenen Teilintervall I von $[\![a, b]\!]$ gibt es Punkte x', x'' mit $f(x') = \bar{f}(I)$, $f(x'') = \underline{f}(I)$. Ist K das Maximum von $|f'(x)|$ für $a \leqq x \leqq b$, so folgt aus dem Mittelwertsatz

$$\bar{f}(I) - \underline{f}(I) = (x' - x'')\, f'(\xi) \leqq K\, |x' - x''| \leqq K\mu(I).$$

Wegen (6) ist

$$\bar{S}(f, \mathfrak{Z}) - \underline{S}(f, \mathfrak{Z}) \leqq \sum_{j=1}^{k} \big(K\mu(I_j)\big)\, \mu(I_j) \leqq Kd(\mathfrak{Z}) \cdot \sum_{j=1}^{k} \mu(I_j),$$

$$\bar{S}(f, \mathfrak{Z}) - \underline{S}(f, \mathfrak{Z}) \leqq Kd(\mathfrak{Z})\,(b - a). \tag{19}$$

Für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge gelten daher wiederum die Relationen (17), (18), und Satz 5 ist bewiesen.

Mit Hilfe der Sätze 3 und 5 sowie einiger noch zu beweisender Eigenschaften des bestimmten Integrals (vgl. 4.1.4.) sind wir prinzipiell in der Lage, fast alle in der Schulmathematik auftretenden Integrale numerisch zu berechnen, wobei wir wegen (16), (19) durch Wahl einer Zerlegung mit hinreichend kleinem Durchmesser jede vorgeschriebene Genauigkeit erreichen können. Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung werden wir allerdings Methoden entwickeln, die in vielen Fällen eine wesentlich einfachere Berechnung gestatten.

Mit Ausnahme der Sätze 3 und 5 können alle Begriffe und Sätze nahezu unverändert auf den mehrdimensionalen Fall übertragen werden. An die Stelle des Intervalls $[\![a, b]\!]$ tritt eine beliebige quadrierbare Menge M des Raumes $\mathfrak{R}_p$, und f ist eine auf M definierte beschränkte reellwertige Funktion. An Stelle der Intervalle I_j der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ treten paarweise punktfremde quadrierbare Teilmengen M_j von M mit $M = M_1 \cup \cdots \cup M_k$. In den Unter- bzw. Obersummen

$$\underline{S}(f, \mathfrak{Z}) = \sum_{j=1}^{k} \underline{f}(M_j)\, \mu(M_j),$$

$$\bar{S}(f, \mathfrak{Z}) = \sum_{j=1}^{k} \bar{f}(M_j)\, \mu(M_j)$$

liefern Summanden mit $\mu(M_j) = 0$ keinen Beitrag, so daß wir solche Summanden auch weglassen oder mehrfach aufzählen können. Es spielt daher keine Rolle, ob

wir die Begrenzungspunkte der quadrierbaren Mengen M_j, die ja Mengen vom Inhalt 0 bilden, berücksichtigen oder auch mehrfach auftreten lassen. Es genügt zu fordern, daß die Mengen M_j keine inneren Punkte gemein haben. Die Überlagerung $\mathfrak{Z}$ zweier Zerlegungen $\mathfrak{Z}'$, $\mathfrak{Z}''$ besteht aus allen nichtleeren Mengen $M' \cap M''$ mit $M' \in \mathfrak{Z}'$, $M'' \in \mathfrak{Z}''$, wobei Mengen mit $\mu(M' \cap M'') = 0$ auch weggelassen werden können.

Die Definition der Integrierbarkeit und des Integrals, das Riemannsche Integrabilitätskriterium sowie der Satz über die Integrierbarkeit von Funktionen, die auf einer beschränkten abgeschlossenen Punktmenge stetig sind, bleiben unverändert. Das Integral einer beschränkten Funktion über eine Menge vom Inhalt 0 ist stets 0. Bezeichnungen für das Integral sind

$$J(f, M) = \int_M f(x)\, dx = \int_M f(x_1, \ldots, x_p)\, d(x_1, \ldots, x_p).$$

Im Fall $p = 2$ bzw. $p = 3$ nennt man dies auch ein *ebenes Integral* bzw. ein *Raumintegral.*

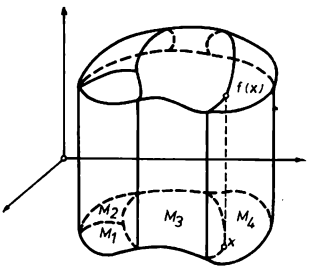

Abb. 4.10.

Ist stets $f(x) \geqq 0$ $\big(x = (x_1, \ldots, x_p)\big)$, so stellen die Summanden der Unter- bzw. Obersumme Inhalte von Zylindern des Raumes R_{p+1} dar, deren Vereinigungsmenge der Ordinatenmenge

$$M_0^f = \{(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}) : (x_1, \ldots, x_p) \in M \wedge 0 \leqq x_{p+1} \leqq f(x_1, \ldots, x_p)\} \tag{20}$$

ein- bzw. umbeschrieben ist (Abb. 4.10). Hieraus folgt in Verallgemeinerung von (13) die Inhaltsformel

$$\mu(M_0^f) = \int_M f(x)\, dx \qquad \big(f(x) \geqq 0 \quad \text{für} \quad x \in M\big). \tag{21}$$

Im Fall $p = 1$ ist der in diesem Anhang definierte Integralbegriff etwas allgemeiner, als wir ihn im Hauptteil entwickelt haben. Während wir anfänglich nur abgeschlossene Intervalle $[\![a, b]\!]$ betrachtet haben, sind jetzt für den Integrationsbereich beliebige quadrierbare Mengen M des Raumes R_1 zugelassen, und dies sind nicht notwendig abgeschlossene Intervalle. Im Interesse der einfacheren Darstellung wollen wir aber im Fall $p = 1$ weiterhin nur abgeschlossene Intervalle betrachten und nur in 4.1.8. eine kleine Verallgemeinerung vornehmen.

Die Berechnung und Vermessung von ebenen Flächenstücken, Oberflächen und Volumina ist ein Bedürfnis jeder menschlichen Gesellschaftsform. Man denke dabei etwa an die Vermessung von Feldern, es mußte der Inhalt und die Oberfläche von Dammbauten festgestellt werden, ebenso Inhalte von Handelswaren und vieles andere mehr. Das Problem der Inhaltsbestimmung hatte so von jeher praktische wirtschaftliche Bedeutung. So sind auch aus einer Reihe der bekannten ältesten Kulturen (Ägypten, Babylon, China) solche notwendigen Rechnungen bekannt. Auch eine der ältesten griechischen Arbeiten zur Mathematik, die Untersuchung des HIPPOKRATES von Chios (460—370 v. u. Z.) zur Quadratur der sogenannten Kreismöndchen, ist einem solchen Problem, allerdings schon recht theoretischer Art, gewidmet. Ob diese Quadratur auf den gesamten Kreis verallgemeinert werden kann, blieb eine offene Frage. Wahrscheinlich dachte man zuerst daran, die atomistische Methode des DEMOKRIT (460—370 v. u. Z.), die sich bei einfachen Kubaturen bewährt hatte, anzuwenden. Später verschiebt sich die Wahl der Methoden bei Quadraturen dahingehend, daß man obere und untere Schranken für den gesuchten Inhalt bestimmt und dann versucht, durch (inkorrekte) Verfahren zur Grenze überzugehen.

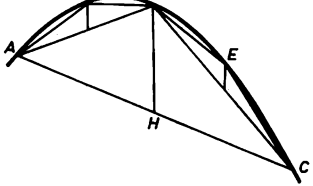

Abb. 4.11

Mit der Schaffung einer neuen geometrischen Größenlehre durch EUDOXOS VON KNIDOS (408?—355? v. u. Z.) wurde ein Hilfsmittel gefunden, infinitesimale Betrachtungen streng durchzuführen, indem man die ermittelten Ergebnisse durch eine doppelte indirekte Methode bewies. Allerdings besaß die griechische Mathematik keine Mittel, neue Ergebnisse auf Gebieten, die heute der Infinitesimalrechnung zugeordnet werden, algorithmisch zu finden. Von den griechisch-hellenistischen Mathematikern verwendete besonders ARCHIMEDES auf geniale Weise die geometrische Größenlehre zur Lösung von Problemen, die in moderner Ausdrucksweise die Integration ganzrationaler Funktionen verlangen. Als Beispiel soll sein Beweis für die mittels mechanischer Hilfsüberlegungen gefundene Fläche des Parabelsegmentes angeführt werden (Abb. 4. 11).

Dem Segment über AC wird das Dreieck ABC einbeschrieben: H halbiert AC, HB ist parallel zur Achse der Parabel. Durch AB und BC werden wieder Parabelsegmente abgeschnitten, auf sie wird das Verfahren wieder angewendet, man erhält die Dreiecke ADB und BEC. Aus den Eigenschaften der Parabel folgt, daß $\triangle ABC$ viermal so groß ist wie die Summe dieser beiden Dreiecke. Nach dem nächsten Schnitt erhält man vier Dreiecke, deren Summe ein Viertel der Flächen-

inhalte der beiden vorigen ausmacht, usw. Angenommen, der Satz wäre falsch, dann müßte der Flächeninhalt des Segmentes entweder größer oder kleiner als $\frac{4}{3}$ des Flächeninhaltes K von Dreieck ABC sein. Sei zunächst Segment $> \frac{4}{3}$ Dreieck vorausgesetzt. Bei dem Verfahren der einzubeschreibenden Dreiecke „wird es möglich sein, ... so weit fortzuschreiten, daß die Summe der übriggebliebenen Restsegmente kleiner ist als die Differenz, um die das Segment die Fläche K übertrifft. Daraus würde folgen, daß das eingeschriebene Vieleck" (d. i. eine Partialsumme $A + B + \cdots + E$) „größer ist als die Fläche K. Dies ist aber unmöglich. Denn da gewisse Flächen vorhanden sind, die eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $\frac{1}{4}$ bilden" (die obige Konstruktion) „,..., so ist klar, daß die Summe aller dieser Flächen kleiner ist als $\frac{4}{3}$ von der größten." Beides zusammen ergibt einen Widerspruch. (Nach: H. Wussing „Mathematik in der Antike", Leipzig 1962, S. 134)

Diese Spitzenleistungen hellenistischer Mathematik sind weit über tausend Jahre nicht übertroffen worden. Vielfach waren sie nicht bekannt bzw. wurden nicht verstanden. Die Neubegegnung mit dem antiken Wissen in der Renaissance bringt auch neue Ergebnisse auf dem Gebiet der heutigen Inhaltslehre und Integralrechnung, so die Versuche zur Kreisquadratur des Nikolaus von Cues (1401—1464). Es beginnt langsam neues Interesse für geometrisch-infinitesimale Betrachtungen zu erwachen. François Vieta führt Kreisquadraturen unter Verwendung einfacher Grenzübergänge durch und steht kurz vor der Integralformel (in heutiger Schreibweise)

$$\int_0^{\pi/2} \sin t \, dt = 1.$$

In der Folgezeit gelingen vielen Mathematikern einfache Quadraturen und Volumenbestimmungen, meist mit mechanischen Hilfsbetrachtungen. So bestimmte Luca Valerio (1552—1608) den Inhalt der Kugelschicht, des Drehellipsoids und des einschaligen Hyperboloids. Galileo Galilei, aus physikalischen Gründen sah an infinitesimalen Methoden interessiert, veranlaßte seinen Schüler Bonaventura Cavalieri (1598?—1647) zu dessen „Geometria indivisibilibus ..." (1635), die eine Zusammenfassung der bisherigen Kenntnisse auf infinitesimalem Gebiet darstellt und in der sich sinngemäß die Integralformel $\int_0^a x^n \, dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ findet. Von anderer Seite näherte sich Johannes Kepler (1571—1630) Problemen der heutigen Inhaltslehre und Integralrechnung, indem er durch (unsichere) Grenzübergänge die Inhalte kompliziert zusammengesetzter Drehkörper bestimmte („Doliometrie" 1615) und meist zu näherungsweise richtigen Ergebnissen kam.

Das Frühbarock bringt insgesamt gesehen jedoch nur eine Reihe von wichtigen Einzelergebnissen. Wie in der Geschichte der Differentialrechnung kommen die entscheidenden neuen Ideen erst durch die Versuche einer algebraischen Formalisierung der Mathematik (Descartes, Fermat) und durch Arbeiten, die geometrische Infinitesimalbetrachtungen beinhalten (Huygens, Pascal, Barrow u. a.), wobei mitunter archimedische Strenge angestrebt wird. Die Entwicklung der Integralrechnung war in dieser Periode engstens mit der der Differentialrechnung verknüpft. Eine von der Differentialrechnung unabhängige Begründung der Integralrechnung ist das Verdienst von Bernhard Riemann. Einen wichtigen Ausgangspunkt hierfür bildete eine Arbeit von Jean Baptiste Joseph de Fourier (1768—1830) „Théorie analytique de la chaleur" (1807, 1822). Hierin hatte Fourier die Darstellung „willkürlicher" Funktionen durch trigonometrische Reihen eingeführt. Die hiermit zusammenhängenden Diskussionen beeinflußten wesentlich den

Funktionsbegriff und den Grenzwertbegriff. Für die Frage, wann eine „beliebige" Funktion durch eine trigonometrische Reihe darstellbar ist, hatten AUGUSTIN LOUIS CAUCHY im Jahre 1826 und PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET 1829 Teillösungen gegeben. In seiner Habilitationsschrift „Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe" von 1854 (veröffentlicht 1867) von BERNHARD RIEMANN werden die Dirichletschen Bedingungen für die Entwickelbarkeit einer Funktion in eine Fourierreihe betrachtet. Eine dieser Bedingungen forderte, daß die Funktion „integrabel" sein muß (und nicht unendlich viele Maxima und Minima hat). RIEMANN untersuchte diese Bedingungen und definierte den Begriff des bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit neu, indem er festsetzt: „Es wird alsdann der Werth der Summe

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$$

von der Wahl der Intervalle δ und der Größen ε abhängen. Hat sie nun die Eigenschaft, wie auch δ und ε gewählt werden mögen, sich einer festen Grenze A unendlich zu nähern, sobald sämmtliche δ unendlich klein werden, so heißt dieser Werth $\int_a^b f(x)\,dx$."

Damit S, wenn sämtliche δ gegen Null gehen, konvergiert, „ist außer der Endlichkeit der Function $f(x)$ noch erforderlich, daß die Gesammtgröße der Intervalle, in welchen die Schwankungen $> \sigma$ sind, was auch σ sei, durch geeignete Wahl von δ beliebig klein gemacht werden kann". Das so eingeführte „Riemannsche Integral" wurde zum festen Bestandteil der sich in der 2. Hälfte des 19. Jahrhunderts außerordentlich schnell entwickelnden Theorie der Funktionen reeller Variabler (KARL WEIERSTRASS, PAUL DU BOIS-REYMOND (1831—1889), HERMANN HANKEL, ULISSE DINI (1845—1918)) und war ebenso wie die Mengenlehre letztlich durch die Fourierreihen angeregt worden.

Der Begriff des bestimmten Riemannschen Integrals ist historisch älter als der mit ihm eng verwandte Begriff des Riemannschen (oder Peano-Jordanschen) Inhalts. Die Mathematik trat der Frage nach dem Maß „beliebiger" beschränkter Punktmengen erst um 1880 näher. Erste Versuche in diese Richtung machten OTTO STOLZ (1842—1905), AXEL HARNACK (1851—1888) und besonders GEORG CANTOR (1845—1918) in den Jahren 1884—1885. Ihre Maßbestimmungen, die im wesentlichen mit dem von uns eingeführten äußeren Inhalt übereinstimmen, litten darunter, daß nur ausgesagt werden konnte, daß das Maß der Vereinigung zweier disjunkter Mengen nicht größer ist als die Summe der Maße der beiden Mengen (vgl. 4.1.2. (7)). Um diese Schwierigkeit zu vermeiden, führten GIUSEPPE PEANO (1858—1932) in „Applicazioni geometrische del calcolo infinitesimale" von 1887 und im gleichen Jahr CAMILLE JORDAN im „Cours d'Analyse" neben dem Cantorschen Inhalt das „innere" Maß einer beschränkten Punktmenge ein und nannten Mengen meßbar oder quadrierbar, wenn Cantorsches und inneres Maß zusammenfielen. Die Vereinigung von zwei disjunkten quadrierbaren Mengen A, B hatte nun als Maß wirklich die Summe der Maße von A und B. In der weiteren Entwicklung erwies sich die Klasse der Mengen, denen auf diese Art eine Maßzahl zugeordnet werden konnte, als zu eng. Weitere wesentliche Fortschritte erreichte 1898 EMILE BOREL (1871—1956) in seinen „Leçons sur la théorie des fonctions". Seine Ergebnisse (Borelsche Mengen, Borelsches Maß) stellten die Verbindung her zwischen gleichwertigen Arbeiten von RENÉ-LOUIS BAIRE (1874—1932) zur Funktionen- und Maßtheorie (Bairesche Mengen, Bairesches Maß), bildeten den Ausgangspunkt einer Reihe von Untersuchungen zur Klassifikation der Punktmengen und bereiteten die Arbeiten von HENRI LEBESGUE (1875 bis 1941) vor. 1900 stellte LEBESGUE seine Arbeit, die erst 1902 unter dem Titel „Intégrale, longueur, aire" veröffentlicht wurde, fertig. In ihr ist die Maßtheorie von Punktmengen zu einem gewissen Abschluß (Lebesguesches Maß) gebracht. Sie enthält auch seine Integrationstheorie, die eine Verallgemeinerung der Riemannschen Integrationstheorie darstellt. Andere Verallgemeinerungen gehen auf die Mathematiker THOMAS JEAN STIELTJES (1856—1894), WILLIAM HENRY YOUNG (1863—1942) und andere zurück.

4.1.4. Eigenschaften Riemannscher Integrale

In den folgenden Sätzen stellen wir einige wichtige Eigenschaften Riemannscher Integrale zusammen.

Satz 1. *Ist K_1 eine untere und K_2 eine obere Schranke einer über das Intervall $[\![a, b]\!]$ integrierbaren Funktion f, so ist*

$$K_1(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq K_2(b-a). \tag{1}$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus 4.1.3. (8). Eine unmittelbare Folgerung ist die Formel

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a) \tag{2}$$

für die Integration einer konstanten Funktion mit dem Funktionswert c, da wir $K_1 = K_2 = c$ in (1) setzen können. Im Fall $c > 0$ haben wir damit die Formel für den Rechtecksinhalt wiedergewonnen.

Das Integral ist bezüglich des Integranden *homogen und additiv*, d. h., es gilt

Satz 2. *Für alle über das Intervall $[\![a, b]\!]$ integrierbaren Funktionen f, g und für alle reellen Zahlen s, t ist*

$$\int_a^b \big(sf(x) + tg(x)\big)\,dx = s\int_a^b f(x)\,dx + t\int_a^b g(x)\,dx. \tag{3}$$

Beweis. Setzen wir $h(x) := sf(x) + tg(x)$, so ist stets

$$s\underline{f}(I_j) + t\underline{g}(I_j) \leqq \underline{h}(I_j) \leqq \bar{h}(I_j) \leqq s\bar{f}(I_j) + t\bar{g}(I_j),$$

woraus

$$s\underline{S}(f, \mathfrak{Z}) + t\underline{S}(g, \mathfrak{Z}) \leqq \underline{S}(h, \mathfrak{Z}) \leqq \bar{S}(h, \mathfrak{Z}) \leqq s\bar{S}(f, \mathfrak{Z}) + t\bar{S}(g, \mathfrak{Z})$$

und damit die Behauptung folgt.

Satz 3. *Es sei $a < c < b$. Die Funktion f ist über das Intervall $[\![a, b]\!]$ genau dann integrierbar, wenn f über die beiden Teilintervalle $[\![a, c]\!]$, $[\![c, b]\!]$ integrierbar ist, und es gilt dann*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{4}$$

(Abb. 4.12).

Beweis. Es sei $I = [\![a, b]\!]$, $I' = [\![a, c]\!]$, $I'' = [\![c, b]\!]$. Jede Vereinigung $\mathfrak{Z}$ von Zerlegungen $\mathfrak{Z}'$, $\mathfrak{Z}''$ der Intervalle I', I'' ist eine Zerlegung von I, und es ist stets

$$\underline{S}(f, \mathfrak{Z}') + \underline{S}(f, \mathfrak{Z}'') = \underline{S}(f, \mathfrak{Z}) \leqq \underline{J}(f; a, b),$$

also auch

$$\underline{J}(f; a, c) + \underline{J}(f; c, b) \leqq \underline{J}(f; a, b).$$

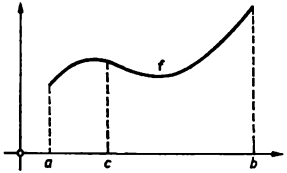

Abb. 4.12

Andererseits entsteht aus jeder Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von I durch Überlagerung mit der Zerlegung von I, die nur aus den Intervallen I', I'' besteht, eine Zerlegung $\mathfrak{Z}^*$ von I, die in zwei Zerlegungen $\mathfrak{Z}'$, $\mathfrak{Z}''$ von I', I'' zerfällt. Daher ist stets

$$\underline{S}(f, \mathfrak{Z}) \leqq \underline{S}(f, \mathfrak{Z}^*) = \underline{S}(f, \mathfrak{Z}') + \underline{S}(f, \mathfrak{Z}'') \leqq \underline{J}(f; a, c) + \underline{J}(f; c, b),$$

also auch

$$\underline{J}(f; a, b) \leqq \underline{J}(f; a, c) + \underline{J}(f; c, b).$$

Somit ist

$$\underline{J}(f; a, b) = \underline{J}(f; a, c) + \underline{J}(f; c, b). \tag{5}$$

Eine analoge Gleichung gilt für die oberen Integrale, und folglich ist

$$[\bar{J}(f; a, b) - \underline{J}(f; a, b)] = [\bar{J}(f; a, c) - \underline{J}(f; a, c)] + [\bar{J}(f; c, b) - \underline{J}(f; c, b)].$$

Die drei in eckigen Klammern stehenden Terme sind nichtnegativ. Die linke Seite verschwindet genau dann, wenn die beiden rechts stehenden Summanden verschwinden. Damit ist die erste Behauptung des Satzes bewiesen. Die Behauptung (4) folgt nun aus (5).

Für eine teilweise allgemeinere Fassung von Satz 3 führen wir die folgenden Bezeichnungen ein. Setzen wir

$$\int_a^a f(x)\,dx := 0, \qquad \int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx \qquad (a < b), \tag{6}$$

so gilt

Satz 4. *Ist die Funktion f über ein Intervall I integrierbar und gilt $a, b, c \in I$, so ist*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0. \tag{7}$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus (6), wenn zwei der Zahlen a, b, c übereinstimmen. Anderenfalls können wir wegen der Symmetrie der Formel (7) in a, b, c voraussetzen, daß c zwischen a und b liegt. Ist $a < c < b$, so folgt die Behauptung aus (6) und (4). Der Fall $b < c < a$ kann durch Umbenennung auf diesen Fall zurückgeführt werden.

Satz 5. *Sind die Funktionen f, g über das Intervall $[\![a, b]\!]$ integrierbar und ist $f(x) \leqq g(x)$ für $a \leqq x \leqq b$, so ist*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx. \tag{8}$$

Sind die Funktionen f, g darüber hinaus stetig, so gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $f(x) = g(x)$ für $a \leqq x \leqq b$ ist.

Beweis. Nach Satz 2 ist die Funktion h mit $h(x) = g(x) - f(x)$ integrierbar, und wegen $0 \leqq h(x)$ und Satz 1 ist

$$0 \leqq \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx,$$

und (8) ist bewiesen.

Sind f, g sogar stetig und gibt es einen Punkt c mit $a \leqq c \leqq b$ und $f(c) < g(c)$, so gibt es ein Intervall $[\![a', b']\!]$ mit $a \leqq a' \leqq c \leqq b' \leqq b$ und $f(x) < g(x)$ für $a' \leqq x \leqq b'$. Ist m das Minimum von $g(x) - f(x)$ für $a' \leqq x \leqq b'$, so ist $m > 0$ und

$$\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,dx \geqq \int_{a'}^{b'} \big(g(x) - f(x)\big)\,dx \geqq m(b' - a') > 0,$$

und Satz 5 ist bewiesen.

Satz 6. *Ist die Funktion f über das Intervall $[\![a, b]\!]$ integrierbar, so ist auch ihr Absolutbetrag, d. h. die Funktion f^* mit $f^*(x) = |f(x)|$ $\big(x \in D(f)\big)$, über das Intervall $[\![a, b]\!]$ integrierbar, und es ist*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx \qquad (a \leqq b). \tag{9}$$

Beweis. Für alle x_1, x_2 aus einem Intervall $I \subseteq [\![a, b]\!]$ gilt

$$|f^*(x_1) - f^*(x_2)| = \big|\, |f(x_1)| - |f(x_2)| \,\big| \leqq |f(x_1) - f(x_2)| \leqq \bar{f}(I) - \underline{f}(I),$$

und es folgt

$$\bar{f}^*(I) - \underline{f}^*(I) \leqq \bar{f}(I) - \underline{f}(I).$$

Damit gilt stets

$$\bar{S}(f^*, \mathfrak{Z}) - \underline{S}(f^*, \mathfrak{Z}) \leqq \bar{S}(f, \mathfrak{Z}) - \underline{S}(f, \mathfrak{Z}).$$

Die Integrierbarkeit von f^* folgt nun aus dem Riemannschen Integrabilitätskriterium. Die Ungleichung (9) folgt aus (8), indem wir hierin f bzw. g durch $\pm f$ bzw. f^* ersetzen.

Wir stellen einige weitere Zusammenhänge zwischen der Integralrechnung und der Inhaltslehre her.

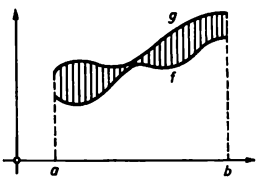

Abb. 4.13

Satz 7. *Ist $I = [\![a, b]\!]$, und sind f, g über das Intervall I integrierbare Funktionen mit $f(x) \leqq g(x)$ für $a \leqq x \leqq b$, so hat die Punktmenge*

$$I_f^g = \{(x, y) : a \leqq x \leqq b \wedge f(x) \leqq y \leqq g(x)\}, \tag{10}$$

d. h. die von den Geraden $x = a$, $x = b$ und von den Graphen der Funktionen f und g begrenzte Punktmenge (Abb. 4.13), *den Inhalt*

$$\mu(I_f^g) = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\, dx. \tag{11}$$

Beweis. Es sei zunächst $f(x), g(x) \geqq 0$ für $a \leqq x \leqq b$. Nach 4.1.3. (13) ist

$$\mu(I_0^g) = \int_a^b g(x)\, dx, \qquad \mu(I_0^f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Der Graph der Funktion f, den wir gemäß (10) mit I_f^f bezeichnen können, enthält

nur Randpunkte von I_0^f und hat somit den Inhalt 0. Wegen $I_f^g = (I_0^g \setminus I_0^f) \cup I_f^f$ und der Quadrierbarkeit der rechten Seite ist daher

$$\mu(I_f^g) = \mu(I_0^g) - \mu(I_0^f),$$

was mit (11) gleichbedeutend ist.

Ist die Voraussetzung $f(x), g(x) \geqq 0$ nicht erfüllt, so verschieben wir die Punktmenge I_f^g nach oben, bis sie oberhalb der x-Achse liegt. Da hierbei Flächeninhalte und die Differenz $g(x) - f(x)$ invariant bleiben, gilt (11) auch in diesem Fall.

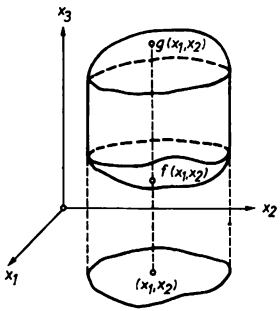

Abb. 4.14

Die Sätze dieses Abschnittes können wie folgt auf den p-dimensionalen Fall übertragen werden. An Stelle von (1) tritt die Abschätzung

$$K_1\mu(M) \leqq \int_M f(x)\,dx \leqq K_2\mu(M) \qquad (K_1 \leqq f(x) \leqq K_2), \tag{12}$$

und die Formeln (2) bzw. (3) lauten

$$\int_M c\,dx = c\mu(M), \tag{13}$$

$$\int_M \big(sf(x) + tg(x)\big)\,dx = s\int_M f(x)\,dx + t\int_M g(x)\,dx. \tag{14}$$

Der Graph einer integrierbaren Funktion f bildet wegen der Quadrierbarkeit von M_0^f eine Menge vom $(p+1)$-dimensionalen Inhalt 0, und in Verallgemeinerung von (11) erhalten wir im Fall $f(x) \leqq g(x)$ $(x \in M)$ für den *Normalbereich*

$$M_f^g = \{(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}) : (x_1, \ldots, x_p) \in M \wedge f(x_1, \ldots, x_p) \leqq x_{p+1} \leqq g(x_1, \ldots, x_p)\} \tag{15}$$

bezüglich der x_{p+1}-Achse (Abb. 4.14) die Inhaltsformel

$$\mu(M_f^g) = \int_M \big(g(x) - f(x)\big)\, dx. \tag{16}$$

Weiterhin gilt

$$\int_M f(x)\, dx \leqq \int_M g(x)\, dx \qquad \big(f(x) \leqq g(x) \quad \text{für} \quad x \in M\big). \tag{17}$$

Sind f, g stetig und ist $\mu(M) > 0$, so gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $f(x) = g(x)$ für alle $x \in M$ ist. An die Stelle von (4) tritt die Formel

$$\int_M f(x)\, dx = \int_{M_1} f(x)\, dx + \int_{M_2} f(x)\, dx \quad \big(M = M_1 \cup M_2, \mu(M_1 \cap M_2) = 0\big). \tag{18}$$

Schließlich ist

$$\left| \int_M f(x)\, dx \right| \leqq \int_M |f(x)|\, dx. \tag{19}$$

Die Beweise dieser Behauptungen können fast unverändert übernommen werden.

Bemerkung. Ist f eine komplexwertige, auf einer quadrierbaren Menge M des Raumes R_p definierte Funktion, deren Real- bzw. Imaginärteil f_1 bzw. f_2 über M integrierbar ist, so setzt man

$$\int_M f(x)\, dx := \int_M f_1(x)\, dx + i \int_M f_2(x)\, dx. \tag{20}$$

4.1.5. Mittelwertsätze der Integralrechnung

Wir wenden uns einem Mittelwertsatz zu, den wir zunächst für eine nichtnegative stetige Funktion geometrisch interpretieren (Abb. 4.15). Nach 4.1.3. (13) stellt das Integral von f über das Intervall $[\![a, b]\!]$ den Inhalt der Ordinatenmenge I_0^f (vgl.

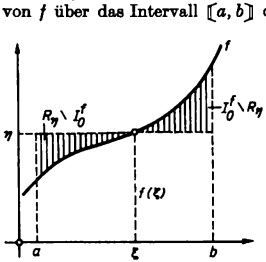

Abb. 4.15

4.1.3. (1)) dar. Wir betrachten die Schar der Parallelen zur x-Achse, die die y-Achse in Punkten η mit $\eta > 0$ schneiden. Jede solche Parallele bestimmt ein Rechteck R_η mit der Grundlinie $b - a$ und der Höhe η. Liegt η echt zwischen dem Minimum und dem Maximum der Funktionswerte von f, so sind die Mengen $R_\eta \setminus I_0^f$ und $I_0^f \setminus R_\eta$ nicht leer. Nach unseren anschaulichen Vorstellungen können wir η so wählen, daß diese beiden Differenzmengen gleichen Inhalt haben. Dann sind auch R_η und I_0^f inhaltsgleich. Da f stetig ist, schneidet die zu η gehörende Parallele den Graphen von f in einem Kurvenpunkt, dessen Abszisse wir mit ξ bezeichnen. Dann ist $\eta = f(\xi)$, und das Produkt von $f(\xi)$ und $b - a$, der Rechtecksinhalt, ist gleich dem Flächeninhalt von I_0^f, also gleich dem Integral der Funktion f über das Intervall $[\![a, b]\!]$.

Unabhängig von anschaulichen Vorstellungen formulieren und beweisen wir den *Mittelwertsatz der Integralrechnung.*

Satz 1. *Ist f eine auf dem Intervall $[\![a, b]\!]$ stetige Funktion, so gibt es ein ξ mit $a \leqq \xi \leqq b$*[1]) *und*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b - a). \tag{1}$$

Beweis. Wir wählen in 4.1.4., Satz 1, für K_1 bzw. K_2 das Minimum bzw. das Maximum von f auf dem Intervall $[\![a, b]\!]$. Die Zahl

$$\eta = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx \tag{2}$$

liegt dann wegen 4.1.4. (1) zwischen dem Minimum und dem Maximum von f, und nach dem Zwischenwertsatz 2.4.2., Satz 3, gibt es ein ξ mit $\eta = f(\xi)$. Aus (2) folgt nun die Behauptung (1).

Wir geben dem Mittelwertsatz noch eine andere Fassung. Ist f auf dem Intervall $[\![a, b]\!]$ stetig und $x, x + h \in [\![a, b]\!]$, so gibt es ein ϑ mit $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ und

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = h\,f(x + \vartheta h).^{2)} \tag{3}$$

Für $h > 0$ folgt dies unmittelbar aus (1), und für $h < 0$ ist

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = -\int_{x+h}^{x} f(t)\,dt = -(-h)\,f(x + \vartheta h),$$

womit (3) bewiesen ist.

---

[1]) Es kann sogar $a < \xi < b$ gefordert werden (vgl. den Beweis von Satz 3).

[2]) Die Integrationsvariable mußte umbenannt werden, da x anderweitig verbraucht wurde.

Ebenso wie in der Differentialrechnung gibt es einen *verallgemeinerten Mittelwertsatz der Integralrechnung.*

Satz 2. *Sind f, g auf dem Intervall $[\![a, b]\!]$ stetige Funktionen und ist $g(x) \geqq 0$ (oder $g(x) \leqq 0$) für $a \leqq x \leqq b$, so gibt es ein ξ mit $a \leqq \xi \leqq b$ und*

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\, dx. \tag{4}$$

Beweis. Es sei K_1 bzw. K_2 das Minimum bzw. das Maximum von $f(x)$ für $a \leqq x \leqq b$. Ist stets $g(x) \geqq 0$, so ist $K_1 g(x) \leqq f(x)\, g(x) \leqq K_2 g(x)$, und aus 4.1.4. (8) folgt

$$K_1 \int_a^b g(x)\, dx \leqq \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leqq K_2 \int_a^b g(x)\, dx.$$

Ist

$$\int_a^b g(x)\, dx = 0,$$

so ist auch das mittlere Integral gleich Null, und (4) gilt für alle ξ mit $a \leqq \xi \leqq b$. Anderenfalls setzen wir

$$\eta := \frac{\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx}{\int_a^b g(x)\, dx},$$

und wegen $K_1 \leqq \eta \leqq K_2$ gibt es ein ξ mit $a \leqq \xi \leqq b$ und $f(\xi) = \eta$, womit (4) bewiesen ist.

Ist $g(x) = 1$ für $a \leqq x \leqq b$, so geht (4) in (1) über.

Um die Mittelwertsätze auf den p-dimensionalen Fall übertragen zu können, betrachten wir speziellere Punktmengen. Unter einem *Bereich* B verstehen wir eine Punktmenge, die sich aus einem (nichtleeren) beschränkten Gebiet G und dessen Begrenzungspunkten zusammensetzt. Dann gilt

Satz 3. *Ist f eine auf einem quadrierbaren Bereich B stetige reellwertige Funktion, so gibt es einen im Inneren von B liegenden Punkt ξ mit*

$$\int_B f(x)\, dx = f(\xi)\, \mu(B). \tag{5}$$

Beweis. Es sei

$$c := \frac{1}{\mu(B)} \int_B f(x)\, dx,$$

und die Funktion f nehme im Punkt x_1 bzw. x_2 ihr Minimum bzw. Maximum an. Es ist $f(x_1)\,\mu(B) \leqq c\mu(B) \leqq f(x_2)\,\mu(B)$, $f(x_1) \leqq c \leqq f(x_2)$. Nehmen wir an, für alle inneren Punkte von B, also im Gebiet G sei stets $f(x) > c$. Nach 4.1.4. (13), (12) ist

$$\int_B f(x)\,dx = \int_G f(x)\,dx > \int_G c\,dx = c\mu(G) = c\mu(B),$$

was der Definition von c widerspricht. Es gibt daher ein x' mit $x' \in G$ und $f(x') \leqq c$. Ebenso gibt es ein x'' mit $x'' \in G$ und $f(x'') \geqq c$. Die Punkte x', x'' können nach Definition des Gebietes (1.5.5., Definition 3) durch einen ganz in G verlaufenden Streckenzug verbunden werden. Sind a, b zwei Eckpunkte dieses Streckenzuges und setzen wir $g(t) := f(a + t(b - a))$ $(0 \leqq t \leqq 1)$, so nimmt die nach 2.3.3., Satz 2, stetige Funktion g alle Werte zwischen $g(0) = f(a)$ und $g(1) = f(b)$ an. Daher nimmt die Funktion f auf jeder Teilstrecke des Streckenzuges alle Zwischenwerte an, und es muß einen Punkt ξ auf diesem Streckenzug, also in G, mit $f(\xi) = c$ geben. Damit ist der Mittelwertsatz bewiesen.

Es gilt auch der *verallgemeinerte Mittelwertsatz*:

Satz 4. *Sind f, g auf einem quadrierbaren Bereich B stetige Funktionen und ist $g(x) \geqq 0$* (oder $g(x) \leqq 0$) *für alle $x \in B$, so gibt es einen im Inneren von B liegenden Punkt ξ mit*

$$\int_B f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi) \int_B g(x)\,dx. \tag{6}$$

Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 2.

In vielen Anwendungen ist die zu integrierende Funktion noch von einem Parameter t oder von mehreren Parametern $t_1, \ldots, t_p$ abhängig. Dann ist das Integral, falls es existiert, ebenfalls von t bzw. $t_1, \ldots, t_p$ abhängig. In diesem Zusammenhang formulieren wir den

Satz 5. *Es sei f eine in einem Gebiet G des Raumes R_{p+q} stetige Funktion, und G_1 bzw. G_2 seien Gebiete des Raumes R_p bzw. R_q mit $(x, t) \in G$ für $x \in G_1$ und $t \in G_2$. Ist dann B ein in G_1 enthaltener quadrierbarer Bereich, so ist die durch*

$$g(t) = \int_B f(x, t)\,dx \tag{7}$$

definierte Funktion g in G_2 stetig.

Beweis. Für jedes t_0 mit $t_0 \in G_2$ existiert das in (7) rechts stehende Integral. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir einen Rechtecksbereich R mit $R \subset G_2$ und $t_0 \in R$. Die Menge aller Punkte (x, t) mit $x \in B$ und $t \in R$ ist dann beschränkt und abgeschlossen, und die Funktion f ist auf dieser Menge gleichmäßig stetig. Es gibt daher ein δ mit $|f(x, t) - f(x, t_0)| < \dfrac{\varepsilon}{\mu(B)}$ für $x \in B$, $\|t - t_0\| < \delta$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein ξ mit $\xi \in B$ und

$$|g(t) - g(t_0)| = \left| \int_B (f(x, t) - f(x, t_0))\,dx \right| = \mu(B)\,|f(\xi, t) - f(\xi, t_0)| < \varepsilon,$$

d. h., die Funktion g ist stetig.

4.1.6. Definition des Riemannschen Integrals mit Hilfe von Zwischensummen[1])

Wir gehen zunächst von der ursprünglichen Definition aus und beweisen einen Hilfssatz.

Satz 1. *Ist f auf dem Intervall $[\![a, b]\!]$ beschränkt, so gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, daß aus $d(\mathfrak{Z}) < \delta$ stets*

$$0 \leqq \underline{J}(f; a, b) - \underline{S}(f, \mathfrak{Z}) < \varepsilon, \tag{1}$$

$$0 \leqq \bar{S}(f, \mathfrak{Z}) - \bar{J}(f; a, b) < \varepsilon \tag{2}$$

folgt.

Beweis. Es genügt der Beweis von (1), da (2) ganz analog bewiesen wird. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir eine Zerlegung $\mathfrak{Z}' = \{I_1', \ldots, I_m'\}$ mit

$$0 \leqq \underline{J}(f; a, b) - \underline{S}(f, \mathfrak{Z}') < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

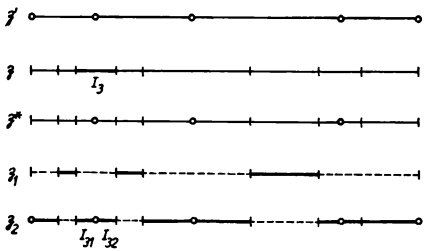

Abb. 4.16

Dies ist auf Grund der Definition 1 in 4.1.3. möglich. Dann bestimmen wir eine natürliche Zahl k mit

$$\left(\bar{f}(I) - \underline{f}(I)\right) < \frac{\varepsilon}{4m} k \qquad (I = [\![a, b]\!]). \tag{4}$$

Es sei nun $\mathfrak{Z} = \{I_1, \ldots, I_m\}$ eine beliebige Zerlegung mit $d(\mathfrak{Z}) < \frac{1}{k}$, und $\mathfrak{Z}^*$ sei die Überlagerung von $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}'$ (Abb. 4.16). Wir zerlegen $\mathfrak{Z}$ in zwei disjunkte Teilmengen $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$. Die (möglicherweise leere) Menge $\mathfrak{Z}_1$ enthalte alle Intervalle, die ganz im Innern eines Intervalls aus $\mathfrak{Z}'$ liegen und demzufolge auch in der Zerlegung $\mathfrak{Z}^*$ auftreten. Bilden wir die Differenz von $\underline{S}(f, \mathfrak{Z}^*)$ und $\underline{S}(f, \mathfrak{Z})$, so heben sich

[1]) Von diesem Abschnitt wird im folgenden kein Gebrauch gemacht.

die zu diesen Intervallen gehörenden Summanden heraus. Es sei I_j ein Intervall aus der Menge $\mathfrak{Z}_2$ der Intervalle, die wenigstens einen Randpunkt eines Intervalls aus $\mathfrak{Z}'$ enthalten. Dann gibt es Intervalle $I_{j1}, \ldots, I_{jp}$ aus $\mathfrak{Z}^*$, die eine Zerlegung von I_j bilden. Da Untersummen bei einer Verfeinerung der Zerlegung höchstens größer werden, erhalten wir, wenn wir (4) und $\mu(I_j) < \frac{1}{k}$ beachten,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p} \underline{f}(I_{ji})\,\mu(I_{ji}) - \underline{f}(I_j)\,\mu(I_j) &= \sum_{i=1}^{p} \big(\underline{f}(I_{ji}) - \underline{f}(I_j)\big)\,\mu(I_{ji}) \\ &\leqq \sum_{i=1}^{p} \big(\bar{f}(I) - \underline{f}(I)\big)\,\mu(I_{ji}) \\ &= \big(\bar{f}(I) - \underline{f}(I)\big)\,\mu(I_j) \\ &< \frac{\varepsilon k}{4m} \cdot \frac{1}{k} = \frac{\varepsilon}{4m}.\end{aligned}$$

Da $\mathfrak{Z}_2$ höchstens $2m$ Intervalle enthalten kann, erhalten wir durch Summation über alle Intervalle I_j aus $\mathfrak{Z}_2$ die Abschätzung

$$\underline{S}(f, \mathfrak{Z}^*) - \underline{S}(f, \mathfrak{Z}) < 2m \cdot \frac{\varepsilon}{4m} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Aus (3), (5) und $\underline{S}(f, \mathfrak{Z}^*) - \underline{S}(f, \mathfrak{Z}') \geqq 0$ folgt

$$\begin{aligned}0 &\leqq \underline{J}(f; a, b) - \underline{S}(f, \mathfrak{Z}) \\ &= \underline{J}(f; a, b) - \underline{S}(f, \mathfrak{Z}') - \big(\underline{S}(f, \mathfrak{Z}^*) - \underline{S}(f, \mathfrak{Z}')\big) + \underline{S}(f, \mathfrak{Z}^*) - \underline{S}(f, \mathfrak{Z}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

und Satz 1 ist bewiesen.

Eine unmittelbare Folgerung ist

Satz 2. *Für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge* $(\mathfrak{Z}^{(n)})$ *ist*

$$\underline{J}(f; a, b) = \lim_{n \to \infty} \underline{S}(f, \mathfrak{Z}^{(n)}), \tag{6}$$

$$\bar{J}(f; a, b) = \lim_{n \to \infty} \bar{S}(f, \mathfrak{Z}^{(n)}). \tag{7}$$

Ist die Funktion f über das Intervall $[\![a, b]\!]$ integrierbar, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \underline{S}(f, \mathfrak{Z}^{(n)}) = \lim_{n \to \infty} \bar{S}(f, \mathfrak{Z}^{(n)}). \tag{8}$$

Die Definition des Riemannschen Integrals kann auch auf die Betrachtung von Zwischensummen gegründet werden, denn es gilt der

Satz 3. *Die Funktion f ist über das Intervall $[\![a, b]\!]$ integrierbar genau dann, wenn die Folge $(S(f, \mathfrak{Z}^{(n)}, \xi^{(n)}))$ für jede Wahl einer ausgezeichneten Zerlegungsfolge und einer zugehörigen Folge von Auswahlfunktionen $\xi^{(n)}$ konvergiert.*

Beweis. Wegen (8) und 4.1.3. (15) ist die Bedingung notwendig. Existiert umgekehrt stets $\lim\limits_{n\to\infty} S(f, \mathfrak{Z}^{(n)}, \xi^{(n)})$, so existiert auch der Grenzwert einer jeden Mischfolge von zwei solchen Folgen, und daher haben alle diese Folgen den gleichen Grenzwert J. Sei $(\mathfrak{Z}^{(n)})$ eine beliebige Zerlegungsfolge mit $d(\mathfrak{Z}^{(n)}) \to 0$. Wir bestimmen Auswahlfunktionen $\xi^{(n)}$, $\bar{\xi}^{(n)}$ mit

$$0 \leqq S(f, \mathfrak{Z}^{(n)}, \xi^{(n)}) - \underline{S}(f, \mathfrak{Z}^{(n)}) < \frac{1}{n}, \tag{9}$$

$$0 \leqq \bar{S}(f, \mathfrak{Z}^{(n)}) - S(f, \mathfrak{Z}^{(n)}, \bar{\xi}^{(n)}) < \frac{1}{n}. \tag{10}$$

Dies ist möglich, denn wir können in jedem der k_n zur Zerlegung $\mathfrak{Z}^{(n)}$ gehörenden Intervalle $I_j^{(n)}$ einen Punkt $\xi_j^{(n)}$ bzw. $\bar{\xi}_j^{(n)}$ mit

$$f(\xi_j^{(n)}) - \underline{f}(I_j^{(n)}) < \frac{1}{n(b-a)}, \quad \bar{f}(I_j^{(n)}) - f(\bar{\xi}_j^{(n)}) < \frac{1}{n(b-a)}$$

finden, und für die so definierten Auswahlfunktionen gilt (9), (10). Der Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt $0 \leqq J - \underline{J}(f; a, b) \leqq 0$, $0 \leqq \bar{J}(f; a, b) - J \leqq 0$, woraus $J = J(f; a, b)$ und unsere Behauptung folgen.

Alle Betrachtungen dieses Abschnittes können wieder sinngemäß auf den mehrdimensionalen Fall übertragen werden. Der Beweis von Satz 1 bedarf allerdings einiger zusätzlicher Überlegungen. Wir gehen hierauf nicht näher ein, da wir von den Ergebnissen keinen Gebrauch machen werden.

4.1.7. Integration über offene und halboffene Intervalle. Uneigentliche Integrale

Wir haben im ersten Teil von 4.1.3. den Begriff der Integrierbarkeit nur für Funktionen definiert, die auf einem beschränkten, abgeschlossenen Intervall definiert sind. Wir verallgemeinern unsere bisherigen Definitionen. Zuerst betrachten wir eine Funktion f, die etwa auf dem beschränkten Intervall $[\![a, b[\![$ definiert und über jedes abgeschlossene Teilintervall $[\![a, b']\!]$ mit $a < b' < b$ integrierbar ist. Wir prüfen, ob das Integral $J(f; a, b')$ für $b' \to b$ einen eigentlichen oder uneigentlichen Grenzwert

besitzt. Ist dies der Fall, so setzen wir

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{b' \uparrow b} \int_a^{b'} f(x)\,dx \qquad \big(D(f) = [\![a, b[\![\big). \tag{1}$$

Ganz analog verfahren wir im Fall eines Intervalls der Form $]\!]a, b]\!]$, d. h., wir setzen

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{a' \downarrow a} \int_{a'}^b f(x)\,dx \qquad \big(D(f) =]\!]a, b]\!]\big), \tag{2}$$

falls der rechts stehende Grenzwert existiert. Im Fall eines offenen Intervalls $]\!]a, b[\![$ wählen wir einen Punkt c mit $a < c < b$ und setzen

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad \big(D(f) =]\!]a, b[\![, a < c < b\big), \tag{3}$$

falls die beiden rechts stehenden Integrale existieren. Diese Definition ist dann wegen 4.1.4., Satz 3, unabhängig von der Wahl des Punktes c mit $a < c < b$.

Die Definition (1) bzw. (2) übertragen wir unverändert auf den Fall $b = \infty$ bzw. $a = -\infty$ und nennen den jeweiligen Grenzwert, falls er existiert, das *uneigentliche Integral* der Funktion f über das unbeschränkte Intervall $[\![a, \rightarrow[\![$ bzw. $]\!]\leftarrow, b]\!]$. Die Definitionen (1), (2) nehmen dann die Form

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx, \tag{4}$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx \tag{5}$$

an. Die Definition (3) geht ganz analog in die Form

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx \tag{6}$$

über.

Die Bezeichnung „uneigentliches Integral" wird nicht nur dann verwendet, wenn das Integrationsintervall unbeschränkt ist, sondern auch wenn die Funktion f im Intervall $[\![a, b[\![$ bzw. $]\!]a, b]\!]$ bzw. $]\!]a, b[\![$ unbeschränkt ist.

Man kann gewisse Kriterien für die Existenz uneigentlicher Integrale angeben, worauf wir hier nicht näher eingehen.

4.1.8. Aufgaben

1. Man berechne mit Hilfe der Identität

$$2 \sin \frac{\alpha}{2n} \sum_{j=1}^{n} \sin \frac{\alpha j}{n} = \cos \frac{\alpha}{2n} - \cos \frac{\alpha(2n+1)}{2n}$$

das Integral der Funktion $y = \sin x$ über das Intervall $\left[\!\left[0, \frac{\pi}{2} \right]\!\right]$.

2. Man berechne das Integral der Funktion $f(x) = x^2$ über ein Intervall $[\![a, b]\!]$.

3. Man gebe eine untere und eine obere Schranke des Integrals J mit

$$J = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\, dx$$

an.

4. Man beweise, daß

$$\int_0^1 \sin^2 x\, dx \leqq \frac{1}{3}$$

ist.

5. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 3 \sin x & \text{für } 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}, \\ -5x & \text{für } \frac{\pi}{2} < x \leqq 3. \end{cases}$$

Man berechne das Integral von f über das Intervall $[\![0, 3]\!]$.

6. Man beweise, daß eine Funktion, die aus einer über das Intervall $[\![a, b]\!]$ integrierbaren Funktion f durch Abänderung der Funktionswerte an endlich vielen Stellen entsteht, über dieses Intervall integrierbar ist.

Anleitung. Man beweise, daß die Funktion

$$g_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq c, \\ 1 & \text{für } x = c \end{cases}$$

über jedes Intervall $[\![a, b]\!]$ integrierbar ist.

7. Gegeben sei die Funktion $f(x) = 3x^2 + 2x$. Man bestimme eine Zahl ξ mit $-2 < \xi < 5$, für die

$$\int_{-2}^{5} f(x)\, dx = f(\xi)\,(5 - (-2))$$

gilt.

4.2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

4.2.1. Stammfunktion und bestimmtes Integral als Funktion der oberen Grenze

Der Abschnitt 4.1. über Riemannschen Inhalt und Riemannsches Integral wurde — abgesehen von dem Beweis des Satzes 5 in 4.1.3. — unabhängig von der Differentialrechnung behandelt. Im Abschnitt 4.2. stellen wir einen Zusammenhang zwischen diesen beiden Stoffgebieten her. Es wird sich zeigen, daß die Integralrechnung in gewissem Sinne als Umkehrung der Differentialrechnung aufgefaßt werden kann. Mit Hilfe des Riemannschen Integrals werden wir nämlich die Existenz einer Funktion beweisen können, deren Ableitung eine vorgegebene, auf einem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion ist, und umgekehrt werden wir das Riemannsche Integral einer Funktion f berechnen können, wenn uns eine Funktion F bekannt ist, deren Ableitung die Funktion f ist.

Definition 1. Es sei f eine auf einem Intervall I definierte Funktion. Die Funktion F heißt eine *Stammfunktion* (oder primitive Funktion) von f, wenn F auf dem Intervall I differenzierbar und $F'(x) = f(x)$ für alle x aus I ist.

Die Ermittlung einer Stammfunktion ist also das eigentliche Umkehrproblem der Differentialrechnung, und aus den in Kapitel 3 bewiesenen Differentiationsformeln kann bereits für eine große Zahl von Funktionen eine Stammfunktion angegeben werden. Stammfunktionen sind, wenn sie existieren, nicht eindeutig bestimmt, aber es gilt

Satz 1. *Es sei F eine Stammfunktion der Funktion f auf dem Intervall I. Dann ist G genau dann eine Stammfunktion von f auf I, wenn die Differenz der Funktionen F und G konstant ist.*

Beweis. Ist $G(x) = F(x) + c$, so ist $G'(x) = F'(x) = f(x)$, d. h., G ist eine Stammfunktion von f. Ist umgekehrt G eine Stammfunktion von f und $H = G - F$, so ist

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

und nach 3.1.4., Satz 4, ist $H(x) = c$ und folglich $G(x) = F(x) + c$ für x aus I. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Während Stammfunktionen einer Funktion f mit Hilfe des Begriffs der Ableitung definiert wurden, ordnen wir nun mit Hilfe des Begriffs des bestimmten Integrals jeder integrierbaren Funktion eine neue Funktion zu.

Definition 2. Es sei f eine über das Intervall $[\![a, b]\!]$ integrierbare Funktion. Dann heißt die Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad (a \leqq x \leqq b) \tag{1}$$

das *bestimmte Integral von f als Funktion der oberen Grenze.*

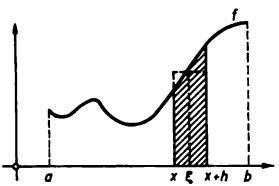

Abb. 4.17

Ist $f(x)$ nichtnegativ, so stellt die Differenz $F(x+h) - F(x)$ den Inhalt des in Abb. 4.17 schraffierten Bereichs dar, ist also gleich $h \cdot f(\xi)$, wobei $x < \xi < x + h$ gilt. Für eine stetige Funktion f wird somit der Quotient von $F(x+h) - F(x)$ und h, der Differenzenquotient von F, für $h \to 0$ gegen $f(x)$ streben. Damit haben wir bereits den Beweis für den *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* skizziert.

Satz 2. *Das bestimmte Integral einer im Intervall $[\![a, b]\!]$ stetigen Funktion f als Funktion der oberen Grenze ist eine Stammfunktion der Funktion f.*

Beweis. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung 4.1.5. (3) ist

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x + \vartheta h),$$

und für $h \to 0$ erhalten wir $F'(x) = f(x)$. Damit ist der Hauptsatz bewiesen.

Zu jeder in einem abgeschlossenen Intervall $[\![a, b]\!]$ stetigen Funktion f gibt es nach diesem Satz eine Stammfunktion, d. h., das Umkehrproblem der Differentialrechnung ist für die Klasse der auf abgeschlossenen Intervallen stetigen Funktionen stets lösbar. Damit ist nicht gesagt, daß die Stammfunktion in *geschlossener Form*, etwa mit Hilfe der elementaren Funktionen, dargestellt werden kann. Vielmehr gibt uns der Hauptsatz ein Mittel in die Hand, neue bisher nicht aufgetretene differenzierbare Funktionen zu definieren. Ist aber von einer gegebenen Funktion f eine Stammfunktion bereits bekannt, so liefert uns die nachfolgende *Umkehrung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung* ein bequemes Mittel für die numerische Berechnung von bestimmten Integralen.

Satz 3. *Ist F eine Stammfunktion der auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetigen Funktion f, so ist*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{2}$$

Beweis. Setzen wir

$$G(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad (a \leqq x \leqq b), \tag{3}$$

so ist $G'(x) = f(x) = F'(x)$ nach Satz 2, und wegen Satz 1 gibt es eine Konstante c mit $G(x) = F(x) + c$. Speziell ist $0 = G(a) = F(a) + c$, $c = -F(a)$, $G(x) = F(x) - F(a)$, und aus (3) folgt die Behauptung (2).

Die rechte Seite von (2) wird häufig mit $[F(x)]_a^b$ oder $F(x)\Big|_a^b$ bezeichnet, so daß (2) die Form

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(x)\Big|_a^b \qquad \big(F'(x) = f(x)\big) \tag{4}$$

annimmt.

So ist z. B.

$$\int_a^b \sin x\,dx = -\cos x\Big|_a^b = -\cos b + \cos a. \tag{5}$$

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist nebst seiner Umkehrung von so großer Bedeutung für das Verständnis der Zusammenhänge zwischen Differential- und Integralrechnung, daß der Lernende gut daran tut, sich auch die Beweise der Sätze 2 und 3 einzuprägen.

Satz 3 kann auch wie folgt formuliert werden.

Satz 4. *Ist f in $[a, b]$ stetig differenzierbar, so gilt*

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Die Voraussetzung der Stetigkeit der Ableitung ist hierbei wesentlich, denn es gibt differenzierbare Funktionen, deren Ableitung nicht integrierbar ist.

Die Erkenntnis, daß Differentiation und Integration „inverse" Prozesse sind, findet sich — allerdings in schwieriger geometrischer Sprache — bereits bei Isaac Barrow, dem Lehrer Newtons. Die Fluxionsrechnung von Newton und der Calculus von Leibniz enthalten neben der Differentialrechnung auch eine Integralrechnung. Die wichtigsten Regeln der Integralrechnung

finden sich in einer Arbeit von LEIBNIZ aus dem Jahre 1686. Sie enthielt das Symbol $\int$ ebenso wie den Namen „calculus summatorius". Die Bezeichnung „calculus integralis" geht auf eine Absprache von LEIBNIZ und JOHANN BERNOULLI aus dem Jahre 1696 zurück. Der Begriff „Integral" scheint eine Erfindung der Brüder BERNOULLI zu sein.

Die durch die Autorität von EULER gestützte Praxis, die Integralrechnung nur als Umkehrung der Differentialrechnung aufzufassen, wird erst durch die Arbeiten von RIEMANN überwunden.

Beispiel 1. Die Funktion $y = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ ist eine Stammfunktion der Funktion $y = x^n$, und folglich ist

$$\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \Big|_a^b = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

(vgl. 4.1.3., Beispiel 2, und 4.1., Aufgabe 2).

Beispiel 2. Wir schließen eine Lücke im Abschnitt 3.3.3. und leiten die Taylorentwicklung bzw. die Taylorsche Reihe der Arcus-Tangens-Funktion her. Diese Funktion ist eine Stammfunktion von $y = (1 + x^2)^{-1}$, und folglich ist

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan t \Big|_0^x = \arctan x.$$

Ersetzen wir a in der Identität

$$(1 - a) \sum_{j=0}^{n-1} a^j = 1 - a^n$$

durch $-t^2$, so erhalten wir nach Umstellung

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j t^{2j} + (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2}.$$

Mit den Rechenregeln für bestimmte Integrale erhalten wir nach Beispiel 1

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \int_0^x t^{2j} dt + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{1}{2j+1} x^{2j+1} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_n(x)\end{aligned}$$

mit

$$R_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt.$$

Wegen $t^{2n} \geqq 0$ gibt es nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz ein ϑ mit $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ und

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{1}{1+\vartheta^2 x} \int_0^x t^{2n} dt = (-1)^n \frac{1}{1+\vartheta^2 x} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Für jedes x mit $|x| \leqq 1$ ist die Folge $(R_n(x))$ eine Nullfolge. Daher ist

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \cdots \qquad (|x| \leqq 1). \tag{6}$$

Für $x = 1$ erhalten wir auf der linken Seite $\frac{\pi}{4}$, d. h., es ist, wie wir bereits in 2.2.3. behauptet hatten,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \cdots. \tag{7}$$

Für die numerische Berechnung von π ist diese Reihe allerdings sehr schlecht geeignet.

4.2.2. Unbestimmtes Integral

Die Rechenregeln für das Umkehrproblem der Differentialrechnung werden gewöhnlich mit Hilfe von sogenannten *unbestimmten Integralen* formuliert. Eine exakte Definition unbestimmter Integrale und des Rechnens mit diesen Objekten ist mit gewissen Schwierigkeiten verbunden, die ihre Ursache darin haben, daß Stammfunktionen nur bis auf additive Konstante bestimmt sind.

Wir wollen zunächst die Problematik erläutern. In vielen Lehrbüchern findet man die folgende Definition:

Unter dem unbestimmten Integral einer Funktion f, in Zeichen

$$\int f(x)\,dx, \tag{1}$$

versteht man die Menge aller Stammfunktionen von f.

Aus dieser Definition würde zunächst hervorgehen, daß die Variable x in (1) gebunden ist, d. h., daß z. B.

$$\int f(x)\,dx = \int f(t)\,dt$$

ist. Diese sich aus der Definition ergebende Konsequenz wird aber ignoriert, und es ist üblich, die Variable x in (1) als freie Variable zu betrachten. Aus diesem Grunde hätte man genauer

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) : F'(x) = f(x)\} \qquad (x \in I) \tag{2}$$

zu setzen. Hiernach ist das unbestimmte Integral (1) eine Menge von Termen in der Variablen x, die sich nach 4.2.1., Satz 1, jeweils nur um eine additive Konstante unterscheiden. Die Gleichung (2) wird im allgemeinen durch die nicht ganz exakte Form

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad \big(F'(x) = f(x) \quad \text{für} \quad x \in I\big) \tag{3}$$

wiedergegeben, in der C die *Integrationskonstante* heißt. Von dieser Gleichung kann man stets zu der Gleichung 4.2.1. (4) übergehen, wenn $a, b \in I$ ist.

Das nächste Problem ist eine exakte Einführung von Rechenoperationen mit unbestimmten Integralen. Die Definitionen

$$\int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx = \int \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx, \tag{4}$$

$$t\int f(x)\,dx = \int tf(x)\,dx, \tag{5}$$

$$\int F'(x)\,dx + g(x) = F(x) + g(x) + C \tag{6}$$

erscheinen naheliegend, führen aber zu überraschenden Konsequenzen. Nach (2) ist offenbar

$$\int 0\,dx = \{C : C \in \mathsf{R}\}, \tag{7}$$

wofür wir nach der Vereinbarung (3) auch

$$\int 0\,dx = C \tag{8}$$

schreiben. Aus (4) bzw. (5) und (8) folgt somit

$$\int f(x)\,dx - \int f(x)\,dx = C, \tag{9}$$

$$0\int f(x)\,dx = C. \tag{10}$$

Diese Beispiele zeigen, wie problematisch die obigen Definitionen sind. Aus diesem Grunde vermeiden viele Autoren die Definition (2) und betrachten (1) als „eine" Stammfunktion von f. Die Gleichungen (4) und (5) sind bei dieser Auffassung nur dann erfüllt, wenn die jeweiligen Stammfunktionen der auftretenden Integranden passend gewählt sind. Wir werden später an Beispielen zeigen, daß man zu Widersprüchen gelangt, wenn man mit den Rechenregeln (4), (5) und (6) sorglos umgeht. Es können jedoch keinerlei Schwierigkeiten auftreten, wenn man die Gleichung $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ $(x \in I)$, wie wir dies im folgenden tun wollen, ausschließlich als Synonym für die Formel $F'(x) = f(x)$ $(x \in I)$ verwendet.

Aus den in der Differentialrechnung bewiesenen Rechenregeln ergeben sich die folgenden Formeln, die in allen Intervallen I erfüllt sind, in denen die rechtsstehenden Funktionen definiert und differenzierbar sind:

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \in \mathbf{R}, n \neq -1), \tag{11}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C,^{1)} \tag{12}$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C, \tag{13}$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C, \tag{14}$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C, \tag{15}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C, \tag{16}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C, \tag{17}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C, \tag{18}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\arccos x + C, \tag{19}$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + C, \tag{20}$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = -\operatorname{arccot} x + C, \tag{21}$$

$$\int \sinh x \, dx = \cosh x + C, \tag{22}$$

$$\int \cosh x \, dx = \sinh x + C, \tag{23}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{arcosh} x + C, \tag{24}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \operatorname{arsinh} x + C. \tag{25}$$

---

[1]) An Stelle von $\int \frac{1}{f(x)} \, dx$ schreibt man kürzer $\int \frac{dx}{f(x)}$.

Wir geben einige Erläuterungen. Die Formel (11) gilt im Fall $\alpha \in \mathbb{N}$ für das Intervall $I = \mathbb{R}$, im Fall negativer ganzzahliger α entweder für das Intervall $]\leftarrow, 0[$ oder für das Intervall $]0, \rightarrow[$. Ist α nicht ganzzahlig, so gilt (11) nur für das Intervall $]0, \rightarrow[$. In allen Fällen ergibt sich (11) aus

$$(x^{\alpha+1})' = (\alpha + 1)\, x^{\alpha}, \qquad x^{\alpha} = \left(\frac{1}{\alpha + 1}\, x^{\alpha+1}\right)'.$$

Die Formel (12) gilt nach 3.1.2. (3) für das Intervall $[0, \rightarrow[$. Für $x \in]\leftarrow, 0]$ ist

$$(\ln |x|)' = \big(\ln (-x)\big)' = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x},$$

was wiederum mit (12) gleichbedeutend ist.

Aus der Gleichheit der linken Seiten von (18), (19) darf man nicht etwa schließen, daß arc sin x und $-$arc cos x übereinstimmen. Bei der Auffassung des Symbols (1) als Menge der Stammfunktionen kann aus (18), (19) nur gefolgert werden, daß die Mengen $\{\arcsin x + C : C \in \mathbb{R}\}$, $\{-\arccos x + C : C \in \mathbb{R}\}$ übereinstimmen. Dies ist genau dann der Fall, wenn es eine Konstante C_0 mit $\arcsin x = -\arccos x + C_0$ gibt. Nach 2.5.2. (9) ist dies mit $C_0 = \frac{\pi}{2}$ erfüllt. Bei der zweiten Auffassung des unbestimmten Integrals als „einer" (passend gewählten) Stammfunktion hat man in ähnlicher Weise zu schließen. Für das Formelpaar (20), (21) gelten nach 2.5.2. (10) analoge Aussagen. Die in den Formeln (11) bis (25) auf der linken Seite stehenden Integrale bezeichnet man als *Grundintegrale*.

4.3. Integrationsmethoden

4.3.1. Elementar integrierbare Funktionen

Wie wir in 4.2.1. bewiesen haben, existiert zu jeder in einem Intervall stetigen Funktion eine Stammfunktion. Es ist aber, wie bereits erwähnt, im allgemeinen nicht möglich, eine Stammfunktion „in geschlossener Form" anzugeben. Wir nennen eine Funktion *im offenen Intervall I elementar* (oder in geschlossener Form darstellbar), wenn sie sich (im ganzen Intervall) mit Hilfe endlich vieler Verknüpfungen $f \pm g$, $f \cdot g$, $f : g$, $f \circ g$ aus den elementaren Funktionen (Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen, trigonometrische Funktionen sowie deren Einschränkungen auf offene Intervalle und ihrer Umkehrungen) darstellen läßt. Nach dieser Definition ist jede im offenen Intervall I elementare Funktion auf Grund der in Kapitel 3 bewiesenen Sätze in I stetig differenzierbar, und ihre Ableitung ist wiederum elementar. Da-

gegen gibt es elementare Funktionen sehr einfacher Bauart, die nachweislich keine elementare Stammfunktion besitzen. So gibt es zum Beispiel keine in einem Intervall $]a, b[$ $(-\infty \leqq a < b \leqq \infty)$ elementare Funktion F mit

$$\int \frac{\sin x}{x}\, dx = F(x) + C \qquad (a < x < b).$$

Wir nennen eine in einem offenen Intervall I stetige Funktion *in I elementar integrierbar*, wenn sie in I eine elementare Stammfunktion besitzt. Die Funktion $f(x) = x^{-1} \sin x$ ist hiernach in keinem Intervall $]a, b[$ mit $-\infty \leqq a < b \leqq \infty$ elementar integrierbar. Dagegen ist jede ganzrationale Funktion wegen 4.2.2. (4), (5) und (11) elementar integrierbar.

Die in 4.2. bewiesenen Sätze über bestimmte Integrale liefern uns die Möglichkeit, mit Hilfe von stetigen, nicht elementar integrierbaren Funktionen f vermöge

$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt \qquad (x \in I)$$

neue Funktionen bzw. neue Funktionenklassen zu definieren. So kann man zum Beispiel die Theorie der Logarithmus- und Exponentialfunktionen aufbauen, indem man von der Definition

$$\ln x := \int_1^x \frac{dt}{t} \qquad (x \in \mathsf{R}_+^*)$$

ausgeht. Dieser rationelle Weg wurde von uns nicht beschritten, da er nicht schulbezogen ist und außerdem wichtiges Beispielmaterial erst sehr spät zur Verfügung steht.

Es gibt keine allgemein gültigen Regeln, um zu entscheiden, ob eine stetige Funktion in einem Intervall elementar integrierbar ist oder nicht. Man kann aber unter Benutzung von Rechenregeln der Differentialrechnung gewisse Regeln für die Umformung von Integralen entwickeln, mit deren Hilfe in gewissen Fällen eine Zurückführung der Integrale auf Grundintegrale möglich ist. Mit Hilfe dieser Regeln gelingt es, große Klassen von Funktionen anzugeben, die elementar integrierbar sind. Die beiden wichtigsten Regeln stellen wir in den nächsten Abschnitten bereit.

4.3.2. Partielle Integration

Nach der Regel für die Differentiation eines Produktes ist

$$f(x)\, g'(x) + g(x)\, f'(x) = \big(f(x)\, g(x)\big)' \qquad (x \in I),$$

und aus 4.2.2. (6), (4) folgt

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx + \int g(x)\, f'(x)\, dx = \int \big(f(x)\, g'(x) + g(x)\, f'(x)\big)\, dx$$
$$= \int \big(f(x)\, g(x)\big)'\, dx = f(x)\, g(x) + C.$$

Hieraus ergibt sich die folgende Regel für die *partielle Integration.*

Satz. *Sind f, g in einem Intervall I stetig differenzierbare Funktionen, so gilt*

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int g(x)\, f'(x)\, dx \qquad (x \in I). \tag{1}$$

Die Integrationskonstante C konnte in (1) weggelassen werden, da auf beiden Seiten unbestimmte Integrale stehen. Wir erläutern an einigen Beispielen, wie man in manchen Fällen mit Hilfe der Formel (1) Integrale elementar auswerten kann.

Beispiel 1. Wir berechnen $\int x \cos x\, dx$. Um (1) anwenden zu können, müssen wir den Integranden als Produkt einer Funktion $f(x)$ und der Ableitung einer Funktion $g(x)$ darstellen. Hierzu können wir etwa das Schema

$$\begin{aligned} f(x) &= x, \qquad & g(x) &= \quad , \\ f'(x) &= \quad , \qquad & g'(x) &= \cos x \end{aligned} \tag{2}$$

oder auch

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x, \qquad & g(x) &= \quad , \\ f'(x) &= \qquad , \qquad & g'(x) &= x \end{aligned} \tag{3}$$

aufstellen und so ergänzen, daß richtige Gleichungen entstehen. Die Auswahl des geeigneteren Schemas ergibt sich aus der Betrachtung der rechten Seite von (1), und zwar prüft man, ob die hiernach gebildete Funktion $g(x)\, f'(x)$ elementar integrierbar ist. Beim Schema (3) gelangen wir zu der Funktion

$$g(x) f'(x) = -\frac{1}{2}\, x^2 \sin x,$$

die eine kompliziertere Gestalt als der ursprüngliche Integrand besitzt. Das Schema (2) kann dagegen durch $f'(x) = 1$, $g(x) = \sin x$ ergänzt werden, und somit ist

$$\begin{aligned} &\int x \cos x\, dx = x \sin x - \int \sin x\, dx, \\ &\int x \cos x\, dx = x \sin x + \cos x + C. \end{aligned} \tag{4}$$

Beispiel 2. Wir berechnen $\int \cos^2 x\, dx$. Mit $f(x) = \cos x$, $g'(x) = \cos x$ erhalten wir $f'(x) = -\sin x$, $g(x) = \sin x$, und es folgt

$$\int \cos^2 x\, dx = \cos x \sin x + \int \sin^2 x\, dx.$$

Obwohl auf der rechten Seite ein ähnliches Integral wie auf der linken Seite erscheint, führt hier ein Kunstgriff zum Ziel. Setzen wir nämlich $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, so erscheint rechts noch einmal das gesuchte Integral, und eine Umformung ergibt

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x\,dx &= \cos x \sin x + \int dx - \int \cos^2 x\,dx\\ &= \cos x \sin x + x - \int \cos^2 x\,dx,\\ 2\int \cos^2 x\,dx &= \cos x \sin x + x + C,\\ \int \cos^2 x\,dx &= \frac{1}{2}(\cos x \sin x + x) + C. \end{aligned} \tag{5}$$

Beispiel 3. Wir betrachten das Integral $\int \frac{dx}{x \ln x}$ $(x > 1)$. Mit $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ und $g'(x) = \frac{1}{x}$ erhalten wir

$$f'(x) = -\frac{1}{x(\ln x)^2}, \qquad g(x) = \ln x$$

und folglich

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = 1 + \int \frac{dx}{x \ln x}.$$

Nach den in 4.2.2. ausgesprochenen Warnungen vor dem Rechnen mit **unbestimmten** Integralen wird der Leser aus dieser richtigen Gleichung nicht den **übereilten Schluß** $0 = 1$ ziehen!

Die partielle Integration gestaltet sich besonders übersichtlich, **wenn wir die folgende** Bezeichnung einführen. Für alle stetigen Funktionen f und **alle stetig differenzierbaren** Funktionen g setzen wir

$$\int f(x)\,dg(x) := \int f(x)\,g'(x)\,dx. \tag{6}$$

Speziell ist hiernach

$$\begin{aligned}\int dg(x) &= \int g'(x)\,dx,\\ \int dg(x) &= g(x) + C. \end{aligned} \tag{7}$$

Die Regel (1) für die partielle Integration lautet in dieser Bezeichnungsweise

$$\int f(x)\,dg(x) = f(x)\,g(x) - \int g(x)\,df(x). \tag{8}$$

Wir wenden sie auf das in Beispiel 1 behandelte Integral an:

$$\begin{aligned}\int x \cos x\,dx &= \int x\,d\sin x = x \sin x - \int \sin x\,dx\\ &= x \sin x + \cos x + C.\end{aligned}$$

Wie dieses Beispiel zeigt, erübrigt es sich bei dieser Symbolik, ein Schema der Form (2) aufzustellen.

Die Regel (1) bzw. (8) für die partielle Integration nimmt für bestimmte Integrale die Form

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = [f(x)\, g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)\, f'(x)\, dx \tag{9}$$

bzw.

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = [f(x)\, g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)\, df(x) \tag{10}$$

an. Der Beweis folgt sofort aus

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, f'(x)\, dx = \int_a^b \big(f(x)\, g(x)\big)'\, dx = [f(x)\, g(x)]_a^b.$$

Beispiel 4. Wir berechnen das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b x^2 e^{-x}\, dx.$$

Wegen $(e^{-x})' = -e^{-x}$ ist

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-x}\, dx &= -\int x^2\, de^{-x} = -(x^2 e^{-x} - \int e^{-x}\, dx^2)\\ &= -x^2 e^{-x} + \int e^{-x}(2x)\, dx\\ &= -x^2 e^{-x} - 2\int x\, de^{-x}.\end{aligned}$$

Nochmalige partielle Integration führt zu

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-x}\, dx &= -x^2 e^{-x} - 2(xe^{-x} - \int e^{-x}\, dx)\\ &= -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C\\ &= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C.\end{aligned}$$

Für das bestimmte Integral über das Intervall $[\![0, b]\!]$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^b x^2 e^{-x}\, dx &= [-e^{-x}(x^2 + 2x + 2)]_0^b\\ &= -e^{-x}(b^2 + 2b + 2) + 2.\end{aligned}$$

Nach der Regel von Bernoulli-de l'Hospital ist

$$\lim_{b\to\infty} b^2 e^{-b} = \lim_{b\to\infty} \frac{b^2}{e^b} = 2\lim_{b\to\infty} \frac{b}{e^b} = 2\lim_{b\to\infty} \frac{1}{e^b} = 0,$$

und es folgt

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b x^2 e^{-x}\,dx = 2.$$

Die Fläche, die von der x-Achse und dem Graphen der Funktion $y = x^2 e^{-x}$ begrenzt wird, ist nicht beschränkt, hat aber einen endlichen „Inhalt" (Abb. 4.18).

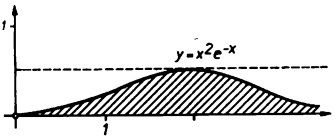

Abb. 4.18

Das vorstehende Beispiel führt an die Theorie der Eulerschen *Gammafunktion* heran. Diese wird für positive reelle α durch das uneigentliche Integral

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\,dt \qquad (\alpha > 0) \tag{11}$$

definiert. Zum Beweis der Konvergenz führen wir die Teilintegrale

$$\Gamma_1(\alpha) := \int_0^1 t^{\alpha-1} e^{-t}\,dt, \qquad \Gamma_2(\alpha) := \int_1^\infty t^{\alpha-1}\, e^{-t}\,dt \tag{12}$$

ein. Für $\alpha = 1$ gilt

$$\Gamma_1(1) = \int_0^1 e^{-t}\,dt = -[e^{-t}]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}, \tag{13}$$

$$\Gamma_2(1) = \int_1^\infty e^{-t}\,dt = \frac{1}{e} - \lim_{v\to\infty} \frac{1}{e^v} = \frac{1}{e}, \tag{14}$$

woraus

$$\Gamma(1) = 1 \tag{15}$$

folgt. Nach (12) gelten die Abschätzungen

$$\Gamma_1(\alpha) \leqq \Gamma_1(1) \qquad (\alpha \geqq 1), \tag{16}$$

$$\Gamma_2(\alpha) \leqq \Gamma_2(1) \qquad (0 < \alpha \leqq 1). \tag{17}$$

Für $0 < u < v < \infty$ und $\alpha > 0$ ist gemäß (10)

$$\int_u^v t^\alpha e^{-t} dt = -\int_u^v t^\alpha de^{-t} = -[t^\alpha e^{-t}]_u^v + \int_u^v e^{-t} dt^\alpha,$$

$$\int_u^v t^\alpha e^{-t}\,dt = \frac{u^\alpha}{e^u} - \frac{v^\alpha}{e^v} + \alpha \int_u^v t^{\alpha-1} e^{-t}\,dt. \tag{18}$$

Es ist

$$\lim_{u \downarrow 0} \frac{u^\alpha}{e^u} = 0 \qquad (\alpha > 0), \tag{19}$$

und aus der Bernoulli-de l'Hospitalschen Regel folgt, falls $0 < \alpha \leqq n$ ($n \in \mathbb{N}$) ist,

$$0 \leqq \lim_{v \to \infty} \frac{v^\alpha}{e^v} \leqq \lim_{v \to \infty} \frac{v^n}{e^v} = n \lim_{v \to \infty} \frac{v^{n-1}}{e^v} = \cdots = n! \lim_{v \to \infty} \frac{v^0}{e^v} = 0,$$

d. h., es ist

$$\lim_{v \to \infty} \frac{v^\alpha}{e^v} = 0 \qquad (\alpha > 0). \tag{20}$$

In (18) betrachten wir die Fälle $v = 1$, $u \downarrow 0$ bzw. $u = 1$, $v \to \infty$ und erhalten mit (19), (20) die Identitäten

$$\Gamma_1(\alpha + 1) = -\frac{1}{e} + \alpha\Gamma_1(\alpha), \tag{21}$$

$$\Gamma_2(\alpha + 1) = \frac{1}{e} + \alpha\Gamma_2(\alpha). \tag{22}$$

Wegen (16) ist $\Gamma_1(\alpha + 1)$ stets endlich, und aus (21) folgt die Endlichkeit von $\Gamma_1(\alpha)$ für alle $\alpha > 0$. Wegen (17) ist $\Gamma_2(\alpha + 1)$ zunächst für $0 < \alpha \leqq 1$ endlich. Aus (22) schließen wir dann durch vollständige Induktion auf die Endlichkeit von $\Gamma_2(\alpha)$ für alle $\alpha > 0$. Somit kann $\Gamma(\alpha)$ für alle $\alpha > 0$ durch (11) definiert werden.

Addition von (21), (22) ergibt mit

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{23}$$

die *Funktionalgleichung der Gammafunktion.* Mit (15) erhalten wir der Reihe nach $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 1 \cdot 2$, $\Gamma(4) = 1 \cdot 2 \cdot 3, \ldots$, und vollständige Induktion ergibt

$$n! = \Gamma(n + 1) = \int_0^\infty t^n e^{-t}\, dt \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{24}$$

Diese Formel bildet ein wichtiges Hilfsmittel für die Herleitung von Abschätzungsformeln für die Fakultät großer natürlicher Zahlen. Ohne Beweis vermerken wir, daß die Gammafunktion analytisch ist und der weiteren Funktionalgleichung

$$\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} \qquad (0 < \alpha < 1) \tag{25}$$

genügt. Mit $\alpha = \frac{1}{2}$ liefert dies

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \pi. \tag{26}$$

4.3.3. Substitutionsregel für unbestimmte Integrale

Während sich die Regel für die partielle Integration aus der Produktregel der Differentialrechnung ergab, leitet sich die Regel für die Integration durch Substitution aus der Formel

$$F(g(x))' = F'(g(x))\, g'(x) \tag{1}$$

für die Differentiation einer zusammengesetzten Funktion ab. Setzen wir $F' = f$, so können wir die Aussage (1) wie folgt formulieren:

Satz 1. *Ist F eine Stammfunktion der in einem Intervall I stetigen Funktion f und ist der Wertebereich der stetig differenzierbaren Funktion g in I enthalten, so ist $F(g(x))$ eine Stammfunktion der Funktion $f(g(x))\, g'(x)$.*

Hiernach ist

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + C, \tag{2}$$

wobei F eine beliebige Stammfunktion von f ist. Der Inhalt von Satz 1 wird häufig in der Form

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(z)\, dz \qquad (z = g(x)) \tag{3}$$

oder, mit der im vorigen Abschnitt eingeführten Bezeichnung,

$$\int f(g(x))\, dg(x) = \int f(z)\, dz \qquad (z = g(x)) \tag{4}$$

angegeben. Die Funktion $z = g(x)$ heißt hierbei die *Substitutionsfunktion*. Die Formel (3) bzw. (4) ist wie folgt zu interpretieren: Wenn es gelingt, den Integranden eines gegebenen Integrals in der Form $f(g(x))\, g'(x)$ darzustellen, so kann die Integration ausgeführt werden, wenn man eine Stammfunktion $F(z)$ von $f(z)$ kennt, und man erhält eine Stammfunktion von $f(g(x))\, g'(x)$, wenn man z in $F(z)$ durch $g(x)$ ersetzt.

Beispiel 1. Es ist

$$\int (\ln \sin x) \cos x\, dx = \int \ln \sin x\, d \sin x = \int \ln z\, dz \qquad (z = \sin x).$$

Wegen $(z \ln z - z)' = \ln z + 1 - 1 = \ln z$ ist

$$\int \ln z\, dz = z \ln z - z + C,$$

und wir erhalten

$$\int (\ln \sin x) \cos x\, dx = \sin x \ln \sin x - \sin x + C.$$

Beispiel 2. Für alle in einem Intervall von 0 verschiedenen stetig differenzierbaren Funktionen f gilt

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{1}{f(x)}\,df(x) = \int \frac{1}{z}\,dz = \ln|z| + C \qquad \big(z = f(x)\big),$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C. \tag{5}$$

Beispiel 3. Wir werten das Beispiel 3 aus 4.3.2. aus. Es ist

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{1}{\ln x}\,d\ln x = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + C \qquad (z = \ln x),$$

und da $\ln x > 0$ für $x > 1$ gilt, folgt

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln x) + C \qquad (x > 1).$$

Beispiel 4. Für alle von -1 verschiedenen reellen Zahlen α und für alle in einem Intervall stetig differenzierbaren Funktionen f mit $f(x) > 0$ gilt

$$\int \big(f(x)\big)^\alpha f'(x)\,dx = \int \big(f(x)\big)^\alpha\,df(x) = \int z^\alpha\,dz$$
$$= \frac{z^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad \big(z = f(x)\big),$$

$$\int \big(f(x)\big)^\alpha f'(x)\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\big(f(x)\big)^{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \neq -1). \tag{6}$$

Eine Zusammenfassung von (5) und (6) ergibt

$$\int \big(f(x)\big)^\alpha\,df(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha+1}\big(f(x)\big)^{\alpha+1} + C & \text{für } \alpha \neq -1, \\ \ln|f(x)| + C & \text{für } \alpha = -1. \end{cases} \tag{7}$$

Ist α eine natürliche Zahl, so kann die Voraussetzung $f(x) > 0$ entfallen. Ist α eine negative ganze Zahl, so brauchen wir nur zu fordern, daß $f(x)$ im betrachteten Intervall von 0 verschieden ist.

Die Übertragung der Regel (7) auf bestimmte Integrale ergibt

$$\int_a^b \big(f(x)\big)^\alpha\,df(x) = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{\alpha+1}\big(f(x)\big)^{\alpha+1}\right]_a^b & \text{für } \alpha \neq -1, \\ \big[\ln|f(x)|\big]_a^b & \text{für } \alpha = -1. \end{cases} \tag{8}$$

Diese Formel gilt unter der Voraussetzung, daß $(f(x))^a$ für alle x aus dem Intervall mit den Randpunkten a, b definiert ist.

Für die Anwendung der Substitutionsregel mußte bisher vorausgesetzt werden, daß sich der Integrand in der Form $f(g(x))\,g'(x)$ darstellen läßt. Dieser Sachverhalt liegt leider nur sehr selten vor. Einige wichtige Fälle haben wir in den obigen Beispielen behandelt. Weit häufiger tritt aber der Fall auf, daß der Integrand nicht von dieser speziellen Gestalt ist. Auch in diesem Fall kann man eine Umformung des Integrals durch Substitution vornehmen, wenn die zu substituierende Funktion eine zusätzliche Voraussetzung erfüllt.

Satz 2. *Ist f eine in einem Intervall I stetige Funktion und g eine stetig differenzierbare Funktion, die ein Intervall umkehrbar eindeutig auf das Intervall I abbildet, so ist*

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(z))\,g'(z)\,dz \qquad \big(z = g^{-1}(x),\, x \in I\big). \tag{9}$$

Der Beweis ergibt sich sofort aus (3), indem man z und x vertauscht. Bei der Anwendung der Substitutionsregel (9) bleibt es allerdings fraglich, ob das rechte Integral einfacher als das linke ausgewertet werden kann. Es ist ja sogar möglich, daß gar keine Substitutionsfunktion existiert, durch die das gegebene Integral in ein elementar auswertbares Integral übergeführt werden kann. Hat man aber eine solche Funktion g gefunden, so ist die Variable z nach ausgeführter Integration durch die Umkehrfunktion $g^{-1}(x)$ der Substitutionsfunktion $x = g(z)$ zu ersetzen.

Wir geben noch einige Erläuterungen für den formalen Umgang mit der Substitutionsregel (9). Bezeichnen wir die Umkehrfunktion von g mit h, so treten im Verlaufe der Rechnung Gleichungen der Form

$$x = g(z), \qquad z = h(x)$$

auf, die durch „Auflösung" auseinander hervorgehen. Je nach den Erfordernissen hat man hierbei von der ersten oder zweiten Gleichung auszugehen. In jedem Fall wird aber, wie wir aus (9) ersehen, die Ableitung der Funktion g benötigt. In manchen Fällen ist es zweckmäßig, diese Ableitung nicht unmittelbar, sondern mit Hilfe der Formel

$$g'(z) = \frac{1}{h'(g(z))}$$

für die Ableitung der Umkehrfunktion einer Funktion zu bestimmen. Für die Ausführung der Substitution (9) wird man also ein Schema der Form

$$\begin{aligned} &z = h(x), \qquad x = g(z), \\ &\frac{dz}{dx} = h'(x), \qquad \frac{dx}{dz} = g'(z) \end{aligned} \tag{10}$$

aufstellen, wobei die Ableitung von h nicht in allen Fällen benötigt wird. Wegen der letzten Gleichung kann man sich den Inhalt der Substitutionsregel (9) formal wie folgt einprägen: Im Integral $\int f(x)\,dx$ setze man $x = g(z)$ und ersetze dx durch $\frac{dx}{dz}\,dz$.

Beispiel 5. Bei der Auswertung des Integrals

$$\int \sin(2x-1)\,dx$$

setzen wir

$$z = 2x - 1, \qquad x = \frac{z+1}{2}, \qquad \frac{dx}{dz} = \frac{1}{2}$$

und erhalten

$$\int \sin(2x-1)\,dx = \int \sin z \cdot \frac{1}{2}\,dz$$

$$= -\frac{1}{2}\cos z + C \quad (z = 2x - 1),$$

$$\int \sin(2x-1)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x-1) + C.$$

Beispiel 6. Die Grundintegrale 4.2.2. (24), (25) können mit Hilfe der Substitutionsregel wie folgt gewonnen werden. Mit

$$x = \cosh z, \qquad z = \operatorname{arcosh} x, \qquad \frac{dx}{dz} = \sinh z \qquad (x > 1)$$

erhalten wir

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 z - 1}} \sinh z\,dz$$

$$= \int \frac{\sinh z}{\sinh z}\,dz = \int dz = z + C \qquad (z = \operatorname{arcosh} x),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh} x + C \qquad (x > 1).$$

Ganz analog ergibt sich 4.2.2. (25), indem wir $x = \sinh z$ substituieren.

Beispiel 7. Wir berechnen

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}} \tag{11}$$

für

$$\begin{array}{llll}
\text{a)} & A = 4, & B = -12, & C = 25, \\
\text{b)} & A = 4, & B = -12, & C = -7, \\
\text{c)} & A = -4, & B = 12, & C = 7, \\
\text{d)} & A = -4, & B = 12, & C = -25, \\
\text{e)} & A = 4, & B = -12, & C = 9.
\end{array}$$

Es ist

$$Ax^2 + Bx + C = \begin{cases} (2x-3)^2 + 4^2 & \text{im Fall a)}, \\ (2x-3)^2 - 4^2 & \text{im Fall b)}, \\ -(2x-3)^2 + 4^2 & \text{im Fall c)}, \\ -(2x-3)^2 - 4^2 & \text{im Fall d)}, \\ (2x-3)^2 & \text{im Fall e)}. \end{cases} \tag{12}$$

Der Fall d) braucht nicht weiter betrachtet zu werden, da der Radikand stets negativ und der Integrand folglich nirgends definiert ist. In den Fällen a), b), c) führen wir die Substitution

$$z = \frac{2x-3}{4}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{dx}{dz} = 2$$

durch und erhalten

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{\pm(2x-3)^2 \pm 4^2}} &= \int \frac{2dz}{\sqrt{\pm(4z)^2 \pm 4^2}} \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{\pm z^2 \pm 1}} \qquad \left(z = \frac{2x-3}{4}\right).
\end{aligned}$$

In jedem der drei Fälle stoßen wir auf ein Grundintegral, und zwar ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-3)^2 + 4^2}} = \frac{1}{2} \operatorname{arsinh} z + C \qquad \left(z = \frac{2x-3}{4}\right),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-3)^2 - 4^2}} = \frac{1}{2} \operatorname{arcosh} z + C \qquad \left(z = \frac{2x-3}{4}, z > 1\right),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-(2x-3)^2 + 4^2}} = \frac{1}{2} \arcsin z + C \qquad \left(z = \frac{2x-3}{4}, |z| < 1\right).$$

Daher ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 12x + 25}} = \frac{1}{2} \operatorname{arsinh} \frac{2x-3}{4} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 12x - 7}} = \frac{1}{2} \operatorname{arcosh} \frac{2x-3}{4} + C \qquad \left(x > \frac{7}{2}\right),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2 + 12x + 7}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x-3}{4} + C \qquad \left((2x-3)^2 < 4^2\right).$$

Im Fall e) setzen wir

$$z = 2x - 3, \quad \frac{dz}{dx} = 2, \quad \frac{dx}{dz} = \frac{1}{2},$$

und es folgt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 12x + 9}} = \int \frac{dx}{|2x-3|} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{|z|}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{sgn} z \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2} \operatorname{sgn} z \ln |z| + C \qquad (z = 2x - 3).$$

Somit ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 12x + 9}} = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln (2x-3) + C & \text{für } x > \frac{3}{2}, \\ -\frac{1}{2} \ln (3-2x) + C & \text{für } x < \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Die Umformungen (12) erläutern, wie man im allgemeinen Fall bei der Auswertung eines Integrals der Form (11) vorzugehen hat. Wenn der Integrand in einem Intervall definiert ist, ist dieses Integral stets elementar auswertbar.

4.3.4. Substitutionsregel für bestimmte Integrale

Wir übertragen die im vorigen Abschnitt behandelten Substitutionsregeln auf bestimmte Integrale.

Satz 1. *Ist g eine im Intervall $[\![a, b]\!]$ stetig differenzierbare und f eine im Wertebereich von g stetige Funktion, so gilt*

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)\, dz \tag{1}$$

bzw.

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)\,dg(x) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)\,dz. \tag{2}$$

Beweis. Ist F eine Stammfunktion von f, so ist die Funktion $F\big(g(x)\big)$ nach 4.3.3., Satz 1, eine Stammfunktion von $f\big(g(x)\big)\,g'(x)$, und aus 4.2.1., Satz 3, folgt

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)\,g'(x)\,dx = F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)\,dz.$$

Beispiel 1. Es ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\,d\sin x$$

$$= \int_{\sin 0}^{\sin\frac{\pi}{2}} e^z\,dz = \int_0^1 e^z\,dz = e - 1.$$

Beispiel 2. Setzen wir $g(x) = -x$ in (2), so erhalten wir

$$\int_{-a}^0 f(x)\,dx = \int_a^0 f(-x)\,d(-x) = -\int_a^0 f(-x)\,dx,$$

$$\int_{-a}^0 f(x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx.$$

Es folgt

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_0^a \big(f(x) + f(-x)\big)\,dx,$$

und speziell gilt

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx \qquad (f \text{ gerade}), \tag{3}$$

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0 \qquad (f \text{ ungerade}). \tag{4}$$

Wir übertragen auch die Substitutionsregel 4.3.3. (9) auf bestimmte Integrale.

Satz 2. *Ist f eine in einem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion und bildet die stetig differenzierbare Funktion g ein Intervall umkehrbar eindeutig auf das Intervall $[a, b]$ ab, so ist*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f\big(g(z)\big)\,g'(z)\,dz. \tag{5}$$

Der Beweis ergibt sich aus (1), indem wir $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$ setzen und anschließend α, β wieder in a, b umbenennen.

Die Forderung der Umkehrbarkeit von g ist bekanntlich gesichert, wenn die Ableitung von g im betrachteten Intervall nicht verschwindet. Für die numerische Rechnung empfiehlt sich das Schema

$$\begin{aligned} x &= g(z), & z &= h(x), \\ \frac{dx}{dz} &= g'(z), & \alpha &= h(a), \\ & & \beta &= h(b). \end{aligned}$$

Hierbei sind α, β die Grenzen des transformierten Integrals.

Beispiel 3. Wir werten das Integral

$$\int_1^{\sqrt{e-1}} x \ln (x^2 + 1)\,dx$$

aus und setzen

$$\begin{aligned} &\ln (x^2 + 1) = z, & x &= \sqrt{e^z - 1}\,, \\ &\ln (1 + 1) = \ln 2, & \frac{dx}{dz} &= \frac{e^z}{2\sqrt{e^z - 1}}\,, \\ &\ln \left(\sqrt{e - 1}^{\,2} + 1\right) = 1. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{e-1}} x \ln (x^2 + 1)\,dx &= \int_{\ln 2}^{1} \sqrt{e^z - 1} \cdot z \cdot \frac{e^z}{2\sqrt{e^z - 1}}\,dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{\ln 2}^{1} z e^z\,dz = \frac{1}{2} \Big[z e^z - e^z \Big]_{\ln 2}^{1} \\ &= 1 - \ln 2. \end{aligned}$$

Beispiel 4. Wir betrachten das Integral

$$\int_a^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \qquad (0 \leqq a \leqq 1)$$

$$\int_1^a \sqrt{x^2-1}\,dx \qquad (a \geqq 1).$$

Es stellt den Flächeninhalt des in

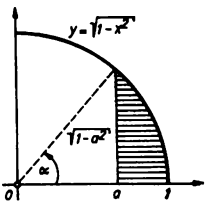

Abb. 4.19

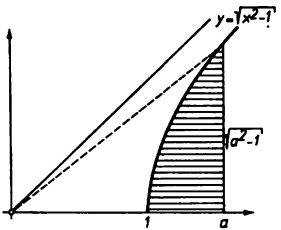

Abb. 4.20

schraffierten Bereichs dar. Die Substitution

$$x = \cos z \qquad \left(0 \leqq z \leqq \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\sqrt{1-x^2} = \sin z,$$

$$\frac{dx}{dz} = -\sin z,$$

$$z = \arccos x \qquad (0 \leqq x \leqq 1),$$

$$\alpha = \arccos a,$$

$$0 = \arccos 1,$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-a^2},$$

$$x = \cosh z \qquad (z \geqq 0),$$

$$\sqrt{x^2-1} = \sinh z,$$

$$\frac{dx}{dz} = \sinh z$$

$$z = \operatorname{arcosh} x \qquad (x \geqq 1),$$

$$\alpha = \operatorname{arcosh} a,$$

$$0 = \operatorname{arcosh} 1,$$

$$\sinh\alpha = \sqrt{\cosh^2\alpha - 1} = \sqrt{a^2-1},$$

führt zu

$$\int_a^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = -\int_\alpha^0 \sin^2 z\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin z\cos z - z\right]_\alpha^0$$

$$= \frac{1}{2}\left[\arccos a - a\sqrt{1-a^2}\right].$$

$$\int_1^a \sqrt{x^2-1}\,dx = \int_0^\alpha \sinh^2 z\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sinh z\cosh z - z\right]_0^\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\left[a\sqrt{a^2-1} - \operatorname{arcosh} a\right].$$

Addieren

wir den so bestimmten Inhalt

zum Inhalt

$$\frac{1}{2}\,a\sqrt{1-a^2}$$

Subtrahieren

vom Inhalt

$$\frac{1}{2}\,a\sqrt{a^2-1}$$

des Dreiecks mit den Eckpunkten 0, $P(a, 0)$ und

$$P\left(a, \sqrt{1-a^2}\right),$$

$$P\left(a, \sqrt{a^2-1}\right),$$

so erhalten wir für den

Kreissektor S_K (Abb. 4.21)

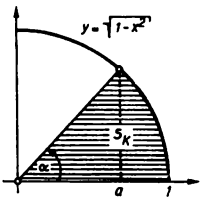

Abb. 4.21

Hyperbelsektor S_H (Abb. 4.22)

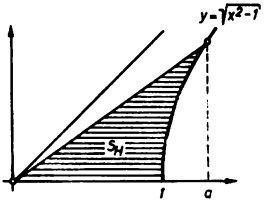

Abb. 4.22

die Inhaltsformel

$$\mu(S_K) = \frac{1}{2}\arccos a.$$

Speziell ergibt sich für $a = 0$ der Inhalt des Viertelkreises zu $\frac{\pi}{4}$.

$$\mu(S_H) = \frac{1}{2}\operatorname{arcosh} a. \tag{6}$$

Diese Gegenüberstellung rechtfertigt unter anderem die Bezeichnung „Hyperbelfunktionen". In Analogie hierzu werden die trigonometrischen Funktionen auch „Kreisfunktionen" genannt.

Beispiel 5. In der Wahrscheinlichkeitstheorie spielt das *Gaußsche Fehlerintegral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

(vgl. (3)) eine große Rolle. Die Substitution

$$x = \sqrt{t}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\, t^{-\frac{1}{2}}$$

ergibt, da mit x auch $t = x^2$ gegen ∞ strebt,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = 2 \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2}\, t^{-\frac{1}{2}}\, e^{-t}\, dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

(vgl. 4.3.2. (11)), und wegen 4.3.2. (26) erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}. \tag{7}$$

4.3.5. Integration rationaler Funktionen

Das wesentliche Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis von

Satz 1. *Jede rationale Funktion ist elementar integrierbar.*

Zum Beweis dieses Satzes werden einige Hilfsmittel aus der algebraischen Theorie der rationalen Funktionen benötigt, vor allem der Satz von der *Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen*. Hiernach kann jede rationale Funktion als Summe einer ganzrationalen Funktion und von rationalen Funktionen der Form

$$\frac{A}{(x-a)^p}, \quad \frac{Bx + D}{\left((x-b)^2 + c^2\right)^p} \quad (p = 1, 2, \ldots; a, b, c, A, B, D \in \mathsf{R}, c \neq 0)$$

dargestellt werden. Wir haben auf Grund dieses Satzes nur noch zu beweisen, daß diese speziellen rationalen Funktionen elementar integrierbar sind. Zunächst ist

$$\int \frac{A}{(x-a)}\, dx = A \ln |x-a| + C, \tag{1}$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^p}\, dx = \frac{A}{1-p}\, \frac{1}{(x-a)^{p-1}} + C \quad (p = 2, 3, \ldots). \tag{2}$$

Die Integrale des zweiten Typs zerlegen wir in die Summe

$$B \int \frac{(x-b)}{\left((x-b)^2 + c^2\right)^p}\, dx + (Bb + D) \int \frac{dx}{\left((x-b)^2 + c^2\right)^p}. \tag{3}$$

Ihre Integration beruht auf den Ableitungsformeln

$$\left(\arctan\frac{x-b}{c}\right)' = \frac{c}{(x-b)^2+c^2}, \tag{4}$$

$$\left(\ln\left((x-b)^2+c^2\right)\right)' = \frac{2(x-b)}{(x-b)^2+c^2}, \tag{5}$$

$$\left[\frac{1}{\left((x-b)^2+c^2\right)^{p-1}}\right]' = \frac{2(1-p)\,(x-b)}{\left((x-b)^2+c^2\right)^p}, \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{x-b}{\left((x-b)^2+c^2\right)^{p-1}}\right]' &= \left[(x-b)\left((x-b)^2+c^2\right)^{1-p}\right]' \\ &= \left((x-b)^2+c^2\right)^{1-p} + 2(1-p)\,(x-b)^2\left((x-b)^2+c^2\right)^{-p} \\ &= \left((x-b)^2+c^2\right)^{1-p} + 2(1-p)\left((x-b)^2+c^2\right)\left((x-b)^2+c^2\right)^{-p} \\ &\quad -2c^2(1-p)\left((x-b)^2+c^2\right)^{-p} \\ &= \frac{2c^2(p-1)}{\left((x-b)^2+c^2\right)^p} - \frac{2p-3}{\left((x-b)^2+c^2\right)^{p-1}}.\end{aligned} \tag{7}$$

Aus (4), (5) folgt

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(x-b)^2+c^2}\,dx &= \frac{1}{c}\arctan\frac{x-b}{c} + C, \\ \int\frac{x-b}{(x-b)^2+c^2}\,dx &= \frac{1}{2}\ln\left((x-b)^2+c^2\right) + C.\end{aligned} \tag{8}$$

Wegen (3) gibt es somit zu B, D stets reelle Zahlen β, δ mit

$$\int\frac{Bx+D}{(x-b)^2+c^2}\,dx = \beta\arctan\frac{x-b}{c} + \delta\ln\left((x-b)^2+c^2\right) + C. \tag{9}$$

Im Fall $p = 2, 3, \ldots$ lesen wir aus (6), (7) die Integrationsformeln

$$\int\frac{x-b}{\left((x-b)^2+c^2\right)^p}\,dx = \frac{1}{2(1-p)}\,\frac{1}{\left((x-b)^2+c^2\right)^{p-1}} + C \qquad (p = 2, 3, \ldots), \tag{10}$$

$$\int\frac{dx}{\left((x-b)^2+c^2\right)^p} = \frac{1}{2c^2(p-1)}\,\frac{x-b}{\left((x-b)^2+c^2\right)^{p-1}} + \frac{2p-3}{2c^2(p-1)}\int\frac{dx}{\left((x-b)^2+c^2\right)^{p-1}} \qquad (p = 2, 3, \ldots) \tag{11}$$

ab. Die letzte Formel ist eine Rekursionsformel, mit deren Hilfe der Exponent p stufenweise reduziert werden kann, bis wir zum Exponenten 1 gelangen, so daß wir (8) anwenden können. Fassen wir die dann in (10), (11) auftretenden echt gebrochenen rationalen Funktionen mit den Nennern $\left((x-b)^2+c^2\right)^j$ $(j=1,\ldots,p-1)$ zu einer rationalen Funktion mit dem Nenner $\left((x-b)^2+c^2\right)^{p-1}$ zusammen, so erhalten wir im Zähler eine ganzrationale Funktion g, deren Grad höchstens $2p-3$ ist. Somit ist

$$\int \frac{Bx+D}{\left((x-b)^2+c^2\right)^p}\,dx = \frac{g(x)}{\left((x-b)^2+c^2\right)^{p-1}} + \alpha \arctan\frac{x-b}{c} + C$$

$$(p=2,3,\ldots;\ \deg g \leqq 2p-3). \tag{12}$$

Die Formeln (1), (2), (9) und (12) liefern nun zusammen mit dem Satz über die Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen den Beweis von Satz 1.

Um eine rationale Funktion zu integrieren, gehen wir wie folgt vor.

1. Mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus prüfen wir, ob Zähler- und Nennerfunktion teilerfremd sind, bzw. kürzen gegebenenfalls einen größten gemeinsamen Teiler.

2. Wir stellen die rationale Funktion (mit dem *Verfahren der Restdivision*) als Summe einer ganzrationalen Funktion $f(x)$ und einer echt gebrochenen rationalen Funktion $r(x)$ dar. Das Integral von f kann unmittelbar berechnet werden.

3. Wir zerlegen den Nenner von $r(x)$ in die voneinander verschiedenen Linearfaktoren $(x-x_i)^{p_i}$ $(i=1,\ldots,k)$ bzw. quadratischen Faktoren ohne reelle Nullstellen

$$\left((x-b_j)^2+c_j^2\right)^{q_j} \qquad (j=1,\ldots,m).^{1)}$$

4. Sind alle p_i und alle q_j gleich 1, so machen wir entsprechend (1), (9) den Ansatz

$$\begin{aligned}\int r(x)\,dx = {} & A_1 \ln|x-x_1| + \cdots + A_k \ln|x-x_k| \\ & + B_1 \ln\left((x-b_1)^2+c_1^2\right) + \cdots + B_m \ln\left((x-b_m)^2+c_m^2\right) \\ & + D_1 \arctan\frac{x-b_1}{c_1} + \cdots + D_m \arctan\frac{x-b_m}{c_m} + C.\end{aligned} \tag{13}$$

Ist wenigstens ein p_i bzw. q_j größer als 1, so treten wegen (2) bzw. (12) echt gebrochene rationale Funktionen bei der Integration auf. Da die Summe echt gebrochener rationaler Funktionen mit teilerfremden Nennern wieder echt gebrochen ist, machen wir

[1]) Wie wir in 2.4.4. bemerkt haben, ist eine exakte Bestimmung der Zahlen x_i, b_j, c_j nur in seltenen Fällen möglich. Das hier beschriebene Verfahren besitzt daher mehr theoretisch-strukturelle als praktische Bedeutung.

den Ansatz

$$\int r(x)\,dx = \frac{h(x)}{(x-x_1)^{p_1-1}\cdots(x-x_k)^{p_k-1}\left((x-b_1)^2+c_1^2\right)^{q_1-1}\cdots\left((x-b_m)^2+c_m^2\right)^{q_m-1}}$$
$$+ A_1 \ln|x-x_1| + \cdots + A_k \ln|x-x_k|$$
$$+ B_1 \ln\left((x-b_1)^2+c_1^2\right) + \cdots + B_m \ln\left((x-b_m)^2+c_m^2\right)$$
$$+ D_1 \arctan\frac{x-b_1}{c_1} + \cdots + D_m \arctan\frac{x-b_m}{c_m} + C, \tag{14}$$

wobei der Grad von $h(x)$ kleiner als der Grad des Nenners zu wählen ist. Die Koeffizienten A_i, B_i, D_i und die Koeffizienten der ganzrationalen Funktion $h(x)$ ermitteln wir, indem wir die rechten Seiten von (13) bzw. (14) differenzieren, mit dem Nenner von $r(x)$ multiplizieren und nach der Methode des Koeffizientenvergleichs mit dem Zähler von $r(x)$ vergleichen. Das sich ergebende Gleichungssystem muß auf Grund der abgeleiteten Formeln (1), (2), (9) und (12) lösbar sein.

Dieses Verfahren ist universell anwendbar. Der Rechenaufwand kann aber in konkreten Beispielen durch gewisse Modifikationen reduziert werden.

Beispiel 1. Es ist

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+3} = \int \frac{dx}{(x+1)(x+3)} = A \ln|x+1| + B \ln|x+3| + C,$$

woraus durch Differentiation

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3},$$
$$1 = A(x+3) + B(x+1)$$

folgt. Koeffizientenvergleich ergibt $A + B = 0$, $3A + B = 1$, und wir erhalten

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+3} = \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x+3| + C = \ln\sqrt{\left|\frac{x+1}{x+3}\right|} + C.$$

Beispiel 2. Es ist

$$\int \frac{x+3}{x^3+x^2-2}\,dx = \int \frac{x+3}{(x-1)\left((x+1)^2+1\right)}\,dx$$
$$= A \ln|x-1| + B \ln\left((x+1)^2+1\right) + D \arctan(x+1) + C,$$

$$\frac{x+3}{x^3+x^2-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{2B(x+1)}{(x+1)^2+1} + \frac{D}{(x+1)^2+1},$$

$$x+3 = A\big((x+1)^2+1\big) + 2B(x+1)(x-1) + D(x-1),$$

$$x+3 = (A+2B)x^2 + (2A+D)x + (2A-2B-D),$$

$$\int \frac{x+3}{x^3+x^2-2}\,dx = \frac{4}{5}\ln|x-1| - \frac{2}{5}\ln(x^2+2x+2)$$

$$-\frac{3}{5}\arctan(x+1) + C.$$

Beispiel 3. Es ist

$$\int \frac{-2x^4-2x^3+2x^2+2x+4}{x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1}\,dx = \int \frac{-2x^4-2x^3+2x^2+2x+4}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\,dx$$

$$= A\ln|x+1| + B\ln(x^2+1) + D\arctan x + \frac{E_1x^2+E_2x+E_3}{(x+1)(x^2+1)} + C.$$

Differentiation ergibt

$$\frac{-2x^4-2x^3+2x^2+2x+4}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{2Bx}{x^2+1} + \frac{D}{x^2+1}$$

$$+\frac{(2E_1x+E_2)(x+1)(x^2+1)-(3x^2+2x+1)(E_1x^2+E_2x+E_3)}{(x+1)^2(x^2+1)^2},$$

$$-2x^4-2x^3+2x^2+2x+4 = A(x+1)(x^2+1)^2 + (2Bx+D)(x+1)^2(x^2+1)$$

$$+(2E_1x+E_2)(x+1)(x^2+1)-(3x^2+2x+1)(E_1x^2+E_2x+E_3),$$

$$-2x^4-2x^3+2x^2+2x+4 = A(x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1)$$

$$+2B(x^5+2x^4+2x^3+2x^2+x) + D(x^4+2x^3+2x^2+2x+1)$$

$$+2E_1(x^4+x^3+x^2+x) + E_2(x^3+x^2+x+1)$$

$$-E_1(3x^4+2x^3+x^2) - E_2(3x^3+2x^2+x) - E_3(3x^2+2x+1).$$

Durch Koeffizientenvergleich gewinnen wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
0 &= A+2B,\\
-2 &= A+4B+D-E_1,\\
-2 &= 2A+4B+2D-2E_2,\\
2 &= 2A+4B+2D+E_1-E_2-3E_3,\\
2 &= A+2B+2D+2E_1-2E_3,\\
4 &= A+D+E_2-E_3
\end{aligned}$$

mit der Lösung $A = 2$, $B = -1$, $D = 0$, $E_1 = 0$, $E_2 = 1$, $E_3 = -1$. Somit ist

$$\int \frac{-2x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x + 4}{x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1}\,dx = 2\ln|x+1| - \ln(x^2+1) + \frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)} + C.$$

Abschließend bemerken wir, daß die Koeffizienten, die bei den Ansätzen für die Integration rationaler Funktionen auftreten, auch mit anderen, zum Teil weniger zeitaufwendigen Methoden berechnet werden können. Entsprechend der Bemerkung in der Fußnote auf S. 168 verzichten wir auf eine ausführlichere Behandlung.

Eine einfache Folgerung aus Satz 1 ist

Satz 2. *Es sei F eine rationale Funktion von zwei Variablen, d. h., F lasse sich als Quotient von zwei ganzrationalen Funktionen in zwei Variablen darstellen. Ist dann*

$$f(x) = F(\cos x, \sin x) \qquad (|x| < \pi),$$

so ist die Funktion f elementar integrierbar.

Beweis. Die Substitution

$$z = \tan\frac{x}{2}, \qquad x = 2\arctan z, \qquad \frac{dx}{dz} = \frac{2}{1+z^2}$$

führt wegen

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+z^2} - 1,$$

$$\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

zu

$$\int f(x)\,dx = \int F\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}, \frac{2z}{1+z^2}\right)\cdot\frac{2}{1+z^2}\,dz \qquad \left(z = \tan\frac{x}{2}\right)$$

und damit auf die Integration einer rationalen Funktion.

4.3.6. Integration und Differentiation von Folgen und Reihen von Funktionen

Wir betrachten in diesem Abschnitt Funktionen f, die gemäß 2.6. als Grenzwerte von Funktionenfolgen (f_n) bzw. als Summen von Reihen $\sum f_n$ dargestellt sind, und untersuchen den Zusammenhang zwischen den Integralen der Funktion f und der Funktionen f_n. Unter der Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz läßt sich eine sehr einfache Aussage formulieren.

Satz 1. *Es sei (f_n) eine gleichmäßige konvergente Folge von Funktionen, die auf dem abgeschlossenen Intervall $[\![a, b]\!]$ stetig sind. Dann ist*

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx. \tag{1}$$

Beweis. Die Grenzfunktion $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ ist nach 2.6.2., Satz 1, stetig. Wegen 2.6.2. (1) gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein N mit $|f(x) - f_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ für $n \geqq N$, $a \leqq x \leqq b$. Es folgt

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx = \varepsilon,$$

und Satz 1 ist bewiesen.

Den Inhalt dieses Satzes drückt man häufig wie folgt aus: *Bei gleichmäßiger Konvergenz darf die Reihenfolge von Grenzwertbildung und Integration vertauscht werden.*

Die zu (1) analoge Formel zur Integration gleichmäßig konvergenter Reihen stetiger Funktionen lautet

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(dx), \tag{2}$$

d. h., gleichmäßig konvergente Reihen stetiger Funktionen kann man *gliedweise integrieren*. Für reelle Potenzreihen ist die Voraussetzung nach 3.4.1., Satz 2, stets erfüllt, wenn das Intervall $[\![a, b]\!]$ im Innern des Konvergenzkreises liegt.

Beispiel 1. Wir berechnen

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(10^{2n}x)}{10^n}\,dx.$$

Nach Beispiel 4 in 2.6.2. ist die zu integrierende Reihe gleichmäßig konvergent, und aus (2) folgt

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(10^{2n}x)}{10^n}\,dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(10^{2n}x)\,dx \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{2n}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\cos(10^{2n}x) \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{2n}} \left[\cos\left(10^{2n}\frac{\pi}{4}\right) - 1\right] \\ &= 1{,}002 - \frac{1}{2}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Die in Satz 1 geforderte gleichmäßige Konvergenz ist für die Zulässigkeit der gliedweisen Integration zwar hinreichend aber keineswegs notwendig. Integrieren wir zum Beispiel die in 2.6.2., Beispiel 3, definierten Funktionen f_n über ein beliebiges Intervall $[\![a, b]\!]$, so strebt die Folge der Integrale gegen 0, also gegen das Integral der Grenzfunktion, obwohl die Folge nicht gleichmäßig konvergent ist. Bei nicht gleichmäßiger Konvergenz ist sorgfältig zu untersuchen, ob die Grenzprozesse miteinander vertauscht werden dürfen.

In diesem Zusammenhang untersuchen wir auch das Problem der gliedweisen Differentiation von Folgen und Reihen von differenzierbaren Funktionen. Für Potenzreihen haben wir es bereits in 3.4.2., Satz 4, behandelt. Im allgemeinen Fall ist aber die gleichmäßige Konvergenz nicht hinreichend für die gliedweise Differentiation. Zu deren Nachweis muß man vielmehr die Folge der Ableitungen der Glieder auf gleichmäßige Konvergenz untersuchen.

Satz 2. *Es sei (f_n) eine Folge von auf dem abgeschlossenen Intervall $[\![a, b]\!]$ stetig differenzierbaren Funktionen. Ist die Folge (f_n') auf diesem Intervall gleichmäßig konvergent, so existiert für jedes $c \in [\![a, b]\!]$ die Grenzfunktion*

$$g(x) := \lim_{n\to\infty} \big(f_n(x) - f_n(c)\big) \qquad (x \in [\![a, b]\!]), \tag{3}$$

und es ist

$$g'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x). \tag{4}$$

Beweis. Da die Folge der Ableitungen f_n' auch in jedem Teilintervall von $[\![a, b]\!]$ gleichmäßig konvergiert, folgt aus Satz 1 stets

$$\int_c^x \lim_{n\to\infty} f_n'(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_c^x f_n'(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \big(f_n(x) - f_n(c)\big) = g(x), \tag{5}$$

womit die Existenz der Funktion g bewiesen ist. Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt aus (5) die Behauptung (4).

In Satz 2 wird keine Aussage über die Konvergenz der gegebenen Folge f_n gemacht. Unter einer zusätzlichen Voraussetzung kann eine Verschärfung von Satz 2 bewiesen werden.

Satz 3. *Es sei (f_n) eine Folge von auf dem abgeschlossenen Intervall $[\![a, b]\!]$ stetig differenzierbaren Funktionen, und die Zahlenfolge $\big(f_n(c)\big)$ sei für wenigstens ein $c \in [\![a, b]\!]$ konvergent. Ist dann die Folge der Ableitungen f_n' auf dem Intervall $[\![a, b]\!]$ gleichmäßig konvergent, so existiert die Grenzfunktion*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in [\![a, b]\!]) \tag{6}$$

im Sinne der punktweisen Konvergenz. Diese Funktion ist stetig differenzierbar, und es ist

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x). \tag{7}$$

Beweis. Die Funktion g sei durch (3) definiert. Setzen wir

$$f(x) := g(x) + \lim_{n\to\infty} f_n(c) = \lim_{n\to\infty} \big(f_n(x) - f_n(c)\big) + \lim_{n\to\infty} f_n(c),$$

so gilt offensichtlich (6). Da f und g sich nur um eine additive Konstante unterscheiden, ist $g' = f'$, und die Behauptung (7) folgt aus (4).

4.3.7. Aufgaben

1. Man beweise, daß die Integrale

a) $\int x^n e^x\,dx$, b) $\int x^n \cos x\,dx$, c) $\int x^n \sin x\,dx$

für natürliche Zahlen n elementar integrierbar sind und für negative ganzzahlige n auf die (nicht elementar auswertbaren) Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{x}\,dx$, b) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{x}\,dx$, c) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x}\,dx$

zurückgeführt werden können.

2. Man werte die folgenden Integrale aus:

$$\int (x^2 - 1) \cos x \, dx, \qquad \int_0^{2\pi} x^2 \cos x \, dx,$$

$$\int (\sinh x)^2 \, dx, \qquad \int \sin^3 x \, dx.$$

3. Man berechne den Inhalt der Fläche F, die durch die Graphen der Funktionen $f(x) = x^2 \ln x$, $g(x) = -(\ln x^2)$ $(1 \leqq x \leqq e)$ und die Gerade $x = e$ begrenzt wird.

4. Man werte die folgenden Integrale aus:

$$\int \sin (ax + b) \, dx \qquad (a \neq 0), \qquad \int \frac{\sin (\ln x)}{x} \, dx,$$

$$\int \frac{\cos (x^{-1})}{x^2} \, dx, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}, \qquad \int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx \qquad (a > 0),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x) \ln (1 + \sin x) \, dx, \qquad \int_0^{\pi} (2x + 2 \cos x) \, e^{x^2 + 2 \sin x} \, dx,$$

$$\int_{-1}^{1} x^4 (1 + x^5)^5 \, dx, \qquad \int_0^2 e^{\sqrt{x}} \, dx,$$

$$\int_0^1 \frac{2x}{1 + x^4} \, dx, \qquad \int_1^2 \sin \sqrt[4]{x - 1} \, dx.$$

5. Man zeige, daß die Graphen der Funktionen

$$f(x) = 2\sqrt{x} + \sqrt{4x - x^2} \qquad (0 \leqq x \leqq 4),$$

$$g(x) = 2\sqrt{x} - \sqrt{4x - x^2} \qquad (0 \leqq x \leqq 4)$$

den Rand einer Fläche F bilden, und bestimme den Flächeninhalt von F.

6. Man werte die folgenden Integrale aus:

$$\int \frac{x^2 - 3x + 3}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} \, dx, \qquad \int \frac{x^5 - x^4 + x - 1}{x^2 (x^2 + 1)^2} \, dx.$$

7. Man gebe den Inhalt der Fläche F an, die durch die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1 + \cos^2 x},$$

die x-Achse und die Geraden $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ begrenzt wird.

8. Man gebe eine Potenzreihenentwicklung der Funktionen

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt, \qquad \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

an.

9. Man zeige, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$$

im Intervall $[\![0, 1]\!]$ gleichmäßig konvergent ist, daß die durch gliedweise Differentiation entstehende Reihe für alle $x \in [\![0, 1]\!]$ konvergiert, aber im Punkt $x = 1$ nicht die Ableitung der durch die Reihe gegebenen Funktion liefert.

4.4. Weitere Anwendungen der Integralrechnung

4.4.1. Bogenlänge, Krümmung

Nach unseren anschaulichen Vorstellungen kann man gewissen Kurvenstücken eine *Bogenlänge* zuordnen. Wir wollen diesen Begriff präzisieren. Ein Mengensystem $\mathfrak{Z}$ von Kurvenstücken $C_1, \ldots, C_k$ heißt eine *Zerlegung* eines Kurvenstücks C, wenn $C = C_1 \cup \cdots \cup C_k$ ist und wenn die Kurvenstücke C_i, C_j für $i \neq j$ höchstens einen Randpunkt gemein haben. Die Verbindungsstrecken S_i der Randpunkte von C_i

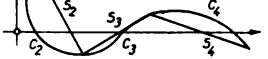

Abb. 4.23

$(i = 1, \ldots, k)$ bilden einen dem Kurvenstück C *einbeschriebenen Polygonzug* (Abb. 4.23). Die Summe $S(\mathfrak{Z})$ der Längen aller Strecken S_i bezeichnen wir als die *Länge* dieses Polygonzugs. Sie kann offensichtlich nicht länger als die zu definierende Länge des Kurvenstücks sein und kommt dieser Zahl um so näher, je „feiner" wir die Zerlegung wählen. Diese heuristischen Betrachtungen führen zu folgender

Definition. Ein Kurvenstück C heißt *rektifizierbar* (streckbar), wenn die Längen aller einbeschriebenen Polygonzüge eine obere Schranke besitzen. Die kleinste obere Schranke heißt in diesem Fall die *Bogenlänge* $s(C)$ des Kurvenstücks C.

Nach dieser Definition ist

$$s(C) := \sup_{\mathfrak{Z}} S(\mathfrak{Z}), \tag{1}$$

wobei $\mathfrak{Z}$ alle Zerlegungen von C durchläuft. Es gibt Kurvenstücke, die nicht rektifizierbar sind, doch gilt der

Satz. *Jedes glatte Kurvenstück C ist rektifizierbar. Ist $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ eine Parameterdarstellung von C mit stetig differenzierbaren Koordinatenfunktionen, so ist*

$$s(C) = \int_a^b |\dot{\mathfrak{r}}(t)|\, dt. \tag{2}$$

Beweis. Jeder Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von C kann umkehrbar eindeutig eine Zerlegung

$$\mathfrak{Z}^*: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$$

von $[\![a, b]\!]$ zugeordnet werden. Wir können dabei noch voraussetzen, daß C_i die Randpunkte $\mathfrak{r}_{i-1} = \mathfrak{r}(t_{i-1})$ und $\mathfrak{r}_i = \mathfrak{r}(t_i)$ $(i = 1, \ldots, k)$ besitzt. Dann ist

$$S(\mathfrak{Z}) = \sum_{i=1}^{k} |\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}_{i-1}| \tag{3}$$

die Länge des einbeschriebenen Polygonzuges. Zur Vereinfachung der Schreibweise beschränken wir uns jetzt auf ebene Kurven. Der Beweis für Raumkurven verläuft analog, es ist nur eine dritte Koordinate hinzuzufügen. Für ebene Kurven ist

$$\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}_{i-1} = \big(x(t_i) - x(t_{i-1}), y(t_i) - y(t_{i-1})\big),$$

und nach dem Mittelwertsatz gibt es im Intervall $]\!]t_{i-1}, t_i[\![$ Zahlen τ_i, τ_i' mit

$$\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}_{i-1} = \big(\dot{x}(\tau_i)\,(t_i - t_{i-1}), \dot{y}(\tau_i')\,(t_i - t_{i-1})\big).$$

Ist K eine Schranke von $\dot{x}(t)$ und $\dot{y}(t)$ für $a \leqq t \leqq b$, so folgt aus (3)

$$S(\mathfrak{Z}) = \sum_{i=1}^{k} \big\|\big(\dot{x}(\tau_i), \dot{y}(\tau_i')\big)\big\|\,(t_i - t_{i-1}), \tag{4}$$

$$S(\mathfrak{Z}) \leqq 2K \sum_{i=1}^{k} (t_i - t_{i-1}) = 2K(b - a).$$

Somit ist C rektifizierbar, und nach Definition der Bogenlänge als Supremum können wir zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ mit

$$0 < s(C) - S(\mathfrak{Z}) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5}$$

finden. Da die Länge eines einbeschriebenen Polygonzuges bei einer Verfeinerung der Zerlegung höchstens größer wird, gilt (5) auch für jede Verfeinerung von $\mathfrak{Z}$.

Die Funktion f mit $f(t) = |\dot{\mathfrak{x}}(t)| = \left\|\left(\dot{x}(t), \dot{y}(t)\right)\right\|$ ist stetig. Wir setzen

$$J := \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b |\dot{\mathfrak{x}}(t)|\,dt. \tag{6}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es im Intervall $]\!]t_{i-1}, t_i[\![$ ein τ_i^* mit

$$J = \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{k} f(\tau_i^*)\,(t_i - t_{i-1}). \tag{7}$$

Wir bestimmen ein $\delta > 0$ derart, daß aus $|t' - t''| < \delta$ stets

$$|\dot{x}(t') - \dot{x}(t'')|,\ |\dot{y}(t') - \dot{y}(t'')| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

folgt. Ferner wählen wir die Zerlegung $\mathfrak{Z}$ so fein, daß der Durchmesser von $\mathfrak{Z}^*$ kleiner als δ ist. Aus (7) und (4) folgt nun

$$|J - S(\mathfrak{Z})| \leqq \sum_{i=1}^{k} \left| \left\|\left(\dot{x}(\tau_i^*), \dot{y}(\tau_i^*)\right)\right\| - \left\|\left(\dot{x}(\tau_i), \dot{y}(\tau_i')\right)\right\| \right| \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

Wegen

$$\left| \|(a, b)\| - \|(a', b')\| \right| \leqq \|(a - a', b - b')\| \leqq |a - a'| + |b - b'|$$

ist weiterhin

$$\begin{aligned} |J - S(\mathfrak{Z})| &\leqq \sum_{i=1}^{k} \left(|\dot{x}(\tau_i^*) - \dot{x}(\tau_i)| + |\dot{y}(\tau_i^*) - \dot{y}(\tau_i')|\right)(t_i - t_{i-1}) \\ &\leqq 2\,\frac{\varepsilon}{4(b-a)} \sum_{i=1}^{k} (t_i - t_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

und zusammen mit (5) erhalten wir

$$|s(C) - J| \leqq |s(C) - S(\mathfrak{Z})| + |J - S(\mathfrak{Z})| < \varepsilon.$$

Da ε beliebig gewählt war, ist unser Satz bewiesen.

Für eine ebene Kurve lautet (2) in ausführlicherer Schreibweise

$$s(C) = \int_a^b \sqrt{\left(\dot{x}(t)\right)^2 + \left(\dot{y}(t)\right)^2}\,dt \tag{8}$$

und für eine Raumkurve

$$s(C) = \int_a^b \sqrt{\left(\dot{x}(t)\right)^2 + \left(\dot{y}(t)\right)^2 + \left(\dot{z}(t)\right)^2}\,dt. \tag{9}$$

Die Bogenlänge des Graphen einer stetig differenzierbaren Funktion $y = f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ ergibt sich nach 3.1.5. (4) zu

$$s(C) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \tag{10}$$

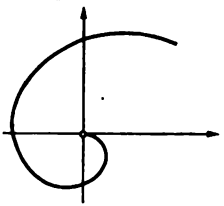

Abb. 4.24

Beispiel 1. Die *archimedische Spirale* (Abb. 4.24) besitzt die Parameterdarstellung

$$x = ct \cos t, \qquad y = -ct \sin t \qquad (t > 0),$$

wobei $c > 0$ ist. Wegen

$$\dot{x} = c(\cos t - t \sin t), \qquad \dot{y} = -c(\sin t + t \cos t)$$

und

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = c^2(1 + t^2)$$

hat das zum Intervall $[\![a, b]\!]$ gehörende Teilstück C_a^b dieser Spirale die Bogenlänge

$$s(C_a^b) = \int_a^b \sqrt{c^2(1 + t^2)}\, dt = \frac{c}{2} \left[t\sqrt{1 + t^2} + \operatorname{arsinh} t\right]_a^b.$$

Beispiel 2. Setzen wir $f(x) := \cosh x$ in (10), so ergibt sich für die Bogenlänge der Kettenlinie

$$s(C_a^b) = \int_a^b \sqrt{1 + \sinh^2 x}\, dx = \int_a^b \cosh x\, dx$$
$$= \sinh b - \sinh a.$$

Beispiel 3. Für die Ellipse

$$\mathfrak{r}(t) = (a \cos t, b \sin t) \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

gilt $\dot{\mathfrak{r}}(t) = (-a \sin t, b \cos t)$, und ein Ellipsenbogen hat die Länge

$$s(C_{t_1}^{t_2}) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt.$$

Dieses Integral ist für $a \neq b$ nicht elementar auswertbar und heißt wegen seiner geometrischen Bedeutung ein *elliptisches Integral*. Für $a = b$, d. h. für die Länge eines Kreisbogens erhalten wir

$$s(C_{t_1}^{t_2}) = a \int_{t_1}^{t_2} dt = a(t_2 - t_1). \tag{11}$$

Der Parameter t in der Parameterdarstellung $\mathfrak{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ des Einheitskreises ist also die vom Kreispunkt $P(1, 0)$ gemessene Bogenlänge.

Für den Umfang des Kreises mit dem Radius a erhalten wir aus (11) die Formel $U = 2a\pi$, womit die in 2.5.1. gegebene Definition der Zahl π ihre Rechtfertigung erfährt.

Mit Hilfe der Bogenlänge definieren wir einen weiteren wichtigen Begriff der Kurventheorie, nämlich den Begriff der Krümmung. Wir betrachten zwei benachbarte Kurvenpunkte $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{r}(t_0)$, $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}(t_1)$ einer glatten Kurve.

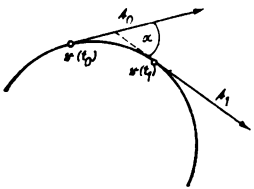

Abb. 4.25

Die zu diesen Punkten gehörenden Tangentenvektoren $\mathfrak{t}_0$, $\mathfrak{t}_1$ schließen einen Winkel ein, den wir mit $\alpha(t_0, t_1)$ bezeichnen (Abb. 4.25). Bei gleichbleibender hinreichend kleiner Bogenlänge $s(C_{t_0}^{t_1})$ bildet die Größe dieses Winkels ein Maß für die Abweichung der Kurve vom geradlinigen Verlauf. Man bezeichnet daher den Quotienten von $\alpha(t_0, t_1)$ und $s(t_0, t_1) := s(C_{t_0}^{t_1})$ als mittlere Krümmung des von $\mathfrak{r}_0$ nach $\mathfrak{r}_1$ führenden Kurvenbogens. Existiert der Grenzwert

$$k(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{\alpha(t_0, t_1)}{s(t_0, t_1)}, \tag{12}$$

so bezeichnet man ihn als die *Krümmung* der Kurve C im Punkt $\mathfrak{r}_0$. Setzen wir

$$S(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{für} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{für} \quad x = 0, \end{cases}$$

so gilt $S(x) \to 1$ für $x \to 0$ (vgl. 2.5.1. (8)), und es ist $xS(x) = \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$. Aus $t_1 \to t_0$ folgt $\alpha(t_0, t_1) \to 0$, und daher ist

$$k(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} S(\alpha(t_0, t_1)) \frac{\alpha(t_0, t_1)}{s(t_0, t_1)}$$

$$= \lim_{t_1 \to t_0} \frac{\sin \alpha(t_0, t_1)}{s(t_0, t_1)}.$$

Im Fall einer Raumkurve ist nach Definition des Vektorprodukts

$$\sin \alpha(t_0, t_1) = |\mathfrak{t}_0 \times \mathfrak{t}_1| = \left| \frac{\dot{\mathfrak{r}}(t_0)}{|\dot{\mathfrak{r}}(t_0)|} \times \frac{\dot{\mathfrak{r}}(t_1)}{|\dot{\mathfrak{r}}(t_1)|} \right|.$$

Wegen $\dot{\mathfrak{r}}(t_0) \times \dot{\mathfrak{r}}(t_0) = 0$ können wir dies auch in der Form

$$\sin \alpha(t_0, t_1) = \frac{|\dot{\mathfrak{r}}(t_0) \times (\dot{\mathfrak{r}}(t_1) - \dot{\mathfrak{r}}(t_0))|}{|\dot{\mathfrak{r}}(t_0)| \cdot |\dot{\mathfrak{r}}(t_1)|}$$

schreiben. Dividieren wir durch

$$s(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\mathfrak{r}}(t)|\, dt = |\dot{\mathfrak{r}}(\tau)|\, (t_1 - t_0) \qquad (t_0 \leqq \tau \leqq t_1),$$

so tritt der Quotient von $\dot{\mathfrak{r}}(t_1) - \dot{\mathfrak{r}}(t_0)$ und $t_1 - t_0$ auf. Sind die Koordinatenfunktionen von $\mathfrak{r}(t)$ zweimal stetig differenzierbar, so ist

$$\lim_{t_1 \to t_0} \frac{\dot{\mathfrak{r}}(t_1) - \dot{\mathfrak{r}}(t_0)}{t_1 - t_0} = \ddot{\mathfrak{r}}(t_0),$$

und wir erhalten

$$k(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{\left| \dot{\mathfrak{r}}(t_0) \times \dfrac{\dot{\mathfrak{r}}(t_1) - \dot{\mathfrak{r}}(t_0)}{t_1 - t_0} \right|}{|\dot{\mathfrak{r}}(t_0)|\, |\dot{\mathfrak{r}}(t_1)|\, |\dot{\mathfrak{r}}(\tau)|},$$

$$k(t_0) = \frac{|\dot{\mathfrak{r}}(t_0) \times \ddot{\mathfrak{r}}(t_0)|}{|\dot{\mathfrak{r}}(t_0)|^3}. \tag{13}$$

Hierfür schreiben wir kürzer

$$k = \frac{|\dot{\mathfrak{r}} \times \ddot{\mathfrak{r}}|}{|\dot{\mathfrak{r}}|^3}. \tag{14}$$

Ist $z(t) = 0$ für alle t, so können wir die Raumkurve als ebene Kurve auffassen. In diesem Fall ist

$$\dot{\mathfrak{r}} \times \ddot{\mathfrak{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, 0) \times (\ddot{x}, \ddot{y}, 0) = (0, 0, \dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}),$$

und gemäß (14) hätte man

$$k = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^3}$$

zu setzen. Im Gegensatz zu Raumkurven kann man jedoch der Krümmung ebener Kurven sinnvoll ein Vorzeichen zuweisen, und man bezeichnet

$$k = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^3} \tag{15}$$

als Krümmung der ebenen Kurve $\mathfrak{r}(t) = (x(t), y(t))$. Eine genauere Analyse ergibt, daß k positiv bzw. negativ ist, je nachdem, ob die Kurve für wachsende t nach links bzw. rechts von der Tangentenrichtung abweicht.

Für die Krümmung des Graphen einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $y = f(x)$ erhalten wir gemäß 3.1.5., Beispiel 3, die Formel

$$k = \frac{f''}{\sqrt{1 + f'^2}^3}. \tag{16}$$

Beispiel 4. Für die Funktion $y = \sin x$ erhalten wir

$$k = -\frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}^3}.$$

Beispiel 5. Für die Ellipse (vgl. Beispiel 3) gilt

$$k = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}^3}.$$

In den zu $t_0 = 0$ und $t_1 = \frac{\pi}{2}$ gehörenden Scheitelpunkten gilt

$$k_0 = \frac{a}{b^2}, \quad k_1 = \frac{b}{a^2}.$$

Beispiel 6. Für die Kurve

$$\mathfrak{r}(t) = \left(t, t^2, \frac{2}{3} t^3\right)$$

gilt

$$\dot{\mathfrak{r}}(t) = (1, 2t, 2t^2), \qquad \ddot{\mathfrak{r}}(t) = (0, 2, 4t),$$

$$|\dot{\mathfrak{r}}(t) \times \ddot{\mathfrak{r}}(t)| = |(4t^2, -4t, 2)| = 4t^2 + 2,$$

$$|\dot{\mathfrak{r}}(t)| = 1 + 2t^2, \qquad k = \frac{2}{(1 + 2t^2)^2}.$$

4.4.2. Oberfläche von Rotationskörpern

Wir berechnen den Flächeninhalt eines Kreissektors S_K mit dem Radius s und dem „Öffnungswinkel" t (Abb. 4.26). Für $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ und $s = 1$ ergibt sich aus 4.3.4. (6) die Formel $\mu(S_K) = \frac{t}{2}$. Für beliebiges $s > 0$ ist der Inhalt nach 4.1.1. (11) mit s^2 zu multiplizieren, und wir erhalten

$$\mu(S_K) = s^2 \cdot \frac{t}{2}. \tag{1}$$

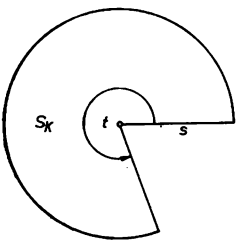

Abb. 4.26

Wir betrachten nun einen geraden Kreiskegel mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h (Abb. 4.27). Schneiden wir seinen Mantel längs einer „Mantellinie" auf, so können wir ihn nach unseren Erfahrungen (verzerrungsfrei) in die Ebene abrollen. Als Oberfläche $o(M)$ der Mantelfläche M des Kegels bezeichnen wir daher den Inhalt des bei diesem Abrollen entstehenden Kreissektors mit dem Radius $s = \sqrt{r^2 + h^2}$. Den Öffnungswinkel dieses Kreissektors bestimmen wir aus 4.4.1. (11). Der zum Kreissektor gehörende Bogen hat hiernach die Länge st, und andererseits ist diese Länge gleich dem Umfang $2r\pi$ des Grundkreises des Kegels. Somit ist $t = \frac{2r\pi}{s}$, und aus (1) folgt

$$o(M) = \pi r s. \tag{2}$$

Als nächstes berechnen wir die Oberfläche $o(M)$ des Mantels M eines Kegelstumpfes (Abb. 4.28). Er entstehe aus dem geraden Kreiskegel mit dem Grundkreisradius r_1 und der Höhe h_1 durch Abschneiden des Teilkegels mit der Höhe h_2 ($h_2 < h_1$) und dem Grundkreisradius r_2. Nach (2) ist

$$o(M) = \pi(r_1 s_1 - r_2 s_2).$$

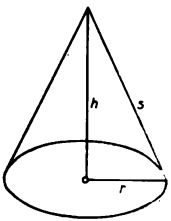

Abb. 4.27

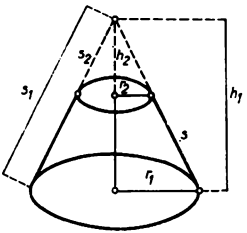

Abb. 4.28

Wegen $r_1 : r_2 = s_1 : s_2$, $r_1 s_2 = r_2 s_1$ ist

$$o(M) = \pi\big(r_1(s_1 - s_2) + r_2(s_1 - s_2)\big).$$

Der Mantel des Kegelstumpfes mit dem Grund- bzw. Deckkreisradius r_1 bzw. r_2 und der Mantellinie $s = s_1 - s_2$ hat somit die Oberfläche

$$o(M) = \pi(r_1 + r_2)\, s. \tag{3}$$

Diese Formel bleibt auch für den Mantel eines Zylinders, d. h. für $r_1 = r_2$ gültig.

Es sei nun $y = f(x)$ eine im Intervall $[\![a, b]\!]$ stetig differenzierbare überall nichtnegative Funktion. Durch Rotation des Graphen von f um die x-Achse entsteht die Mantelfläche M eines Rotationskörpers. Wir wollen den Begriff der Oberfläche $o(M)$ von M definieren. Hierzu wählen wir eine Zerlegung

$$\mathfrak{Z} : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$$

des Intervalls $[\![a, b]\!]$ und bilden den zugehörenden Polygonzug (Abb. 4.29) mit den Seitenlängen s_i. Bei Rotation der Teilstrecken des Polygonzuges entstehen Kegel-

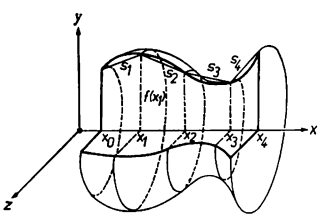

Abb. 4.29

stümpfe. Die Summe

$$S(\mathfrak{Z}) := \sum_{i=1}^{k} \pi\big(f(x_i) + f(x_{i-1})\big)\, s_i \tag{4}$$

der Inhalte der Mantelflächen dieser Kegelstümpfe nähert sich nach unseren anschaulichen Vorstellungen um so mehr der zu definierenden Oberfläche, je feiner wir die Zerlegung wählen. Wir wollen zeigen, daß sich die Summen $S(\mathfrak{Z})$ für einen hinreichend kleinen Durchmesser $d(\mathfrak{Z})$ beliebig wenig von dem Integral

$$o(M) := 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \tag{5}$$

unterscheiden, so daß es sinnvoll ist, diese Zahl als *Oberfläche des Mantels des Rotationskörpers* zu bezeichnen.[1])

Zum Beweis unserer Behauptung setzen wir

$$g(x) := \sqrt{1 + (f'(x))^2} = \|(1, f'(x))\|.$$

Dann ist

$$o(M) = 2\pi \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 2\pi \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, g(x)\, dx,$$

und nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es Zahlen ξ_i mit $x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i$ und

$$o(M) = 2\pi \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\, g(\xi_i)\, (x_i - x_{i-1}).$$

Andererseits gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung Zahlen ξ_i^* mit $x_{i-1} < \xi_i^* < x_i$ und

$$\begin{aligned} s_i &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \\ &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(\xi_i^*))^2\, (x_i - x_{i-1})^2} \\ &= g(\xi_i^*)\, (x_i - x_{i-1}), \end{aligned}$$

so daß

$$S(\mathfrak{Z}) = \pi \sum_{i=1}^{k} \big(f(x_i) + f(x_{i-1})\big)\, g(\xi_i^*)\, (x_i - x_{i-1}),$$

$$|o(M) - S(\mathfrak{Z})| \leqq \pi \sum_{i=1}^{k} |2f(\xi_i)\, g(\xi_i) - \big(f(x_i) + f(x_{i-1})\big)\, g(\xi_i^*)|\, (x_i - x_{i-1})$$

---

[1]) Inhaltsberechnungen von Drehflächen treten bereits 1657 bei HUYGENS und 1673 bei LEIBNIZ auf.

ist. Wegen der Stetigkeit von f und g auf dem abgeschlossenen Intervall $[\![a, b]\!]$ können wir eine Schranke K beider Funktionen angeben und zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(x^*)|, |g(x) - g(x^*)| < \frac{\varepsilon}{3\pi K(b-a)} \qquad (|x - x^*| < \delta)$$

finden. Für jede Zerlegung $\mathfrak{Z}$ mit $d(\mathfrak{Z}) < \delta$ ist dann

$$|2f(\xi_i)\, g(\xi_i) - (f(x_i) + f(x_{i-1}))\, g(\xi_i^*)|$$

$$\leqq |f(\xi_i) - f(x_i)|\, K + |f(\xi_i) - f(x_{i-1})|\, K + |g(\xi_i) - g(\xi_i^*)|\, K < \frac{\varepsilon}{\pi(b-a)},$$

$$|o(M) - S(\mathfrak{Z})| < \varepsilon,$$

und unsere Behauptung ist bewiesen.

Beispiel. Wir berechnen die Oberfläche des Mantels M der Kugelzone, die durch Rotation von

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

mit $-r < a < b < r$ um die x-Achse entsteht (Abb. 4.30). Es ist

$$f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} = r,$$

$$o(M) = 2\pi r \int_a^b dx = 2\pi r(b-a).$$

Die Oberfläche der Kugelkappe K_h mit der Höhe $h = r - a$ ergibt sich hieraus durch den Grenzübergang $b \to r$, d. h., es ist

$$o(K_h) = 2\pi r h.$$

Speziell ist die Oberfläche der Halbkugel gleich $2\pi r^2$.

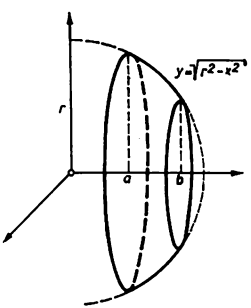

Abb. 4.30

4.4.3. Rauminhalte von Rotationskörpern

Es sei f eine im Intervall $[\![a, b]\!]$ stetige Funktion. Lassen wir die zu f gehörende Ordinatenmenge um die x-Achse rotieren, so entsteht ein *Rotationskörper* M, dessen Quadrierbarkeit wir nachweisen wollen. Die zur x-Achse senkrechte Ebene durch den Punkt x schneidet den Rotationskörper in einem Kreis mit dem Flächeninhalt

$$q(x) = \pi(f(x))^2. \tag{1}$$

Wir wählen eine Zerlegung

$$\mathfrak{Z}: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$$

des Intervalls $[\![a, b]\!]$ in die Intervalle $I_j := [\![x_{j-1}, x_j]\!]$. Die zwischen den Stufen x_{j-1} und x_j liegende „Scheibe" des Rotationskörpers ist dann einem Zylinder mit der Höhe $x_j - x_{j-1}$ und einer Grundfläche mit dem Inhalt $\bar{q}(I_j)$ bzw. $\underline{q}(I_j)$ ein- bzw. umbeschrieben. Daher ist

$$\underline{S}(q, \mathfrak{Z}) = \sum_{j=1}^{k} \underline{q}(I_j)\,(x_j - x_{j-1}) \leqq \underline{\mu}(M)$$

$$\leqq \bar{\mu}(M) \leqq \sum_{j=1}^{k} \bar{q}(I_j)\,(x_j - x_{j-1}) = \bar{S}(q, \mathfrak{Z}).$$

Wegen der Integrierbarkeit von q ist M quadrierbar, und der Rauminhalt von M ist gleich dem Integral der Querschnittsfunktion q, d. h., es ist

$$\mu(M) = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx. \tag{2}$$

Beispiel 1. Der zu

$$f(x) = \frac{r}{h}\, x \qquad (0 \leqq x \leqq h)$$

gehörende Rotationskörper K ist ein Kegel mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h. Sein Volumen ist

$$\mu(K) = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2\, dx = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Beispiel 2. Der zu

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

mit $-r \leqq a < b < r$ gehörende Rotationskörper ist eine Kugelzone $K_a{}^b$. Ihr Volumen ist

$$\mu(K_a{}^b) = \pi \int_a^b (r^2 - x^2)\, dx = \pi\big(r^2(b-a) - \frac{1}{3}(b^3 - a^3)\big).$$

Für $a = -r$, $b = r$ erhalten wir das Volumen der Kugel K, und zwar ist

$$\mu(K) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

4.4.4. Cavalierisches Prinzip. Berechnung mehrfacher Integrale

Das in 4.4.3. entwickelte Prinzip der Volumenberechnung über die „Querschnittsfunktion" $q(x)$, die den Flächeninhalt des Querschnitts in der „Höhenstufe" x angibt, kann von Rotationskörpern auf beliebige quadrierbare Punktmengen M übertragen werden.

Satz 1. *Es sei M eine quadrierbare Menge des Raumes R_3, und*

$$M(x) := \{(y, z) : (x, y, z) \in M\} \tag{1}$$

sei die Projektion des Querschnitts von M in der Höhe x auf die y,z-Ebene. Für $x < a$ bzw. $y > b$ sei $M(x) = \emptyset$. Setzen wir

$$q(x) := \mu\big(M(x)\big),^{1)} \tag{2}$$

d. h., ist $q(x)$ der Inhalt des zu x gehörenden Querschnitts, so ist q über $[\![a, b]\!]$ integrierbar, und es ist

$$\mu(M) = \int_a^b q(x)\, dx \tag{3}$$

(Abb. 4.31).

Beweis. Wegen $q(x) = 0$ für $x < a$ und $x > b$ können wir das Intervall $[\![a, b]\!]$ so weit verlängern, daß a, b ganze Zahlen sind. Für jede natürliche Zahl n bilden wir die äquidistante Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von $[\![a, b]\!]$ in die Intervalle $I_j := [\![x_{j-1}, x_j]\!]$ $(j = 1, \ldots, k)$ der Länge $h = 2^{-n}$. Mit R_n bzw. S_n bezeichnen wir die Vereinigung aller Q aus $\mathfrak{Q}_n$ (vgl. 4.1.2.) mit $Q \subseteq M$ bzw. $Q \cap M = \emptyset$.

Wir betrachten die zwischen den Höhenstufen x_{j-1}, x_j liegende Schicht M_j bzw. R_{nj} bzw. S_{nj} von M bzw. R_n bzw. S_n (Abb. 4.32). Ist r_{nj} bzw. s_{nj} der Inhalt der Projektion von R_{nj} bzw. S_{nj} in die y,z-Ebene, so gilt für $x_{j-1} \leqq \xi \leqq x_j$ stets $r_{nj} \leqq q(\xi) \leqq s_{nj}$, und folglich ist

$$r_{nj} \leqq \underline{q}(I_j) \leqq \bar{q}(I_j) \leqq s_{nj}.$$

---

[1]) Wenn $M(x)$ nicht quadrierbar ist, können wir $q(x) = \underline{\mu}\big(M(x)\big)$ oder $q(x) = \bar{\mu}\big(M(x)\big)$ setzen. Der Beweis bleibt dann unverändert gültig.

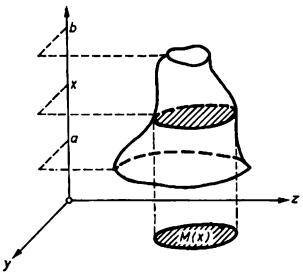

Abb. 4.31

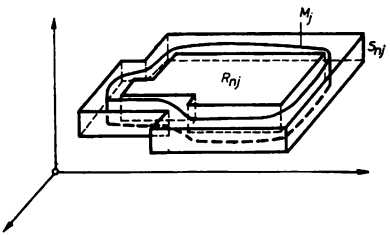

Abb. 4.32

Wegen $\mu(R_{nj}) = r_{nj}\mu(I_j)$, $\mu(S_{nj}) = s_{nj}\mu(I_j)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\mu(R_n) &= \sum_{j=1}^{k} \mu(R_{nj}) = \sum_{j=1}^{k} r_{nj}\mu(I_j)\\ &\leqq \sum_{j=1}^{k} \underline{q}(I_j)\ \mu(I_j) \leqq \sum_{j=1}^{k} \bar{q}(I_j)\ \mu(I_j)\\ &\leqq \sum_{j=1}^{k} s_{nj}\mu(I_j) = \sum_{j=1}^{k} \mu(S_{nj}) = \mu(S_n)\,.\end{aligned}$$

Da wir die Quadrierbarkeit von M vorausgesetzt haben, gilt $\mu(R_n) \to \mu(M)$, $\mu(S_n) \to \mu(M)$ für $n \to \infty$. Dies besagt, daß das untere und das obere Integral der Querschnittsfunktion q über $[\![a, b]\!]$ übereinstimmen und $\mu(M)$ gleich dem Integral von q über $[\![a, b]\!]$ ist. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Eine analoge Formel gilt, wenn wir die Querschnittsfunktion q bezüglich der Variablen y oder z bilden. Ferner kann Satz 1 sinngemäß auf den p-dimensionalen, speziell auf den zweidimensionalen Fall übertragen werden. Im letzten Fall ist $q(x)$

natürlich kein Flächeninhalt, sondern die Länge eines Intervalls oder die Summe der Längen mehrerer Intervalle (Abb. 4.33). Der obige Beweis bleibt für den p-dimensionalen Fall unverändert gültig.

Aus (3) lesen wir das (in der Schulmathematik gewöhnlich aus der Anschauung gewonnene und als Axiom benutzte) *Cavalierische Prinzip* (nach BONAVENTURA CAVALIERI) ab.

Satz 2. *Haben die Querschnitte zweier quadrierbarer Punktmengen des Raumes* R_3 *(oder* R_p*) in allen Höhenstufen gleichen Inhalt, so sind die Punktmengen inhaltsgleich.*

Ist nur von einer der Punktmengen bekannt, daß sie quadrierbar ist, so kann nicht auf Inhaltsgleichheit geschlossen werden. Bei den für die Elementarmathematik

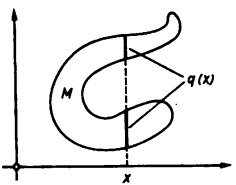

Abb 4.33

bedeutungsvollen Körpern kann die Quadrierbarkeit häufig mit Hilfe der Invarianz des Inhalts bei Kongruenztransformationen und Scherungen bzw. mit Hilfe von 4.1.2., Satz 4, bewiesen werden. Für Normalbereiche M_f^g mit stetigen Funktionen f, g (vgl. 4.1.4. (15)) ist die Quadrierbarkeit nach 4.1.4. (11) bzw. 4.1.4. (16) gesichert.

Das Cavalierische Prinzip tritt in der „Geometria indivisibilibus ..." (1635) des BONAVENTURA CAVALIERI auf. Das gesamte Werk, außerordentlich unklar abgefaßt, beruht wesentlich auf dem Satz „Ebene Figuren oder auch Körper stehen in demselben Verhältnis wie die Gesamtheiten ihrer Geraden, ihrer Ebenen, welche nach irgendeiner Regula genommen wurden" („Geometria ..." p. 111). „Regula" ist eine Gerade (oder Ebene), die eine geschlossene ebene Figur (oder einen Körper) berührt, und die Gesamtheiten sind die zur „Regula" parallelen Geraden (Ebenen) bis zur „abschließenden" Geraden (tangens opposita) oder Ebene. Aus dem obigen Satz fließt dann unter anderem der Satz „Raumgebilde der Ebene wie des Raumes sind inhaltlich gleich, wenn in gleicher Höhe bei beiden geführte Schnitte gleiche Strecken bzw. gleiche Flächen ergeben" (p. 482—483). Dieses Prinzip ist allerdings schon vorweggenommen von HERON VON ALEXANDRIA (um 100 u. Z.).

Beispiel 1. Mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips kann das Volumen der Halbkugel aus der Formel für das Volumen von Zylinder und Kegel wie folgt gewonnen werden (Abb. 4.34).

Wir betrachten den Restkörper, den wir erhalten, wenn wir aus dem Zylinder Z mit dem Grundkreisradius und der Höhe r den auf der Spitze stehenden Kegel K mit gleichem Grundkreisradius und gleicher Höhe ausschneiden. Der Querschnitt

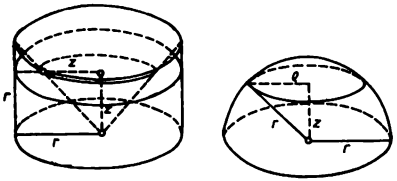

Abb. 4.34

dieses Restkörpers in der Höhe z hat den Inhalt $\pi r^2 - \pi z^2$, und da $\varrho := \sqrt{r^2 - z^2}$ der Radius des Querschnitts der Halbkugel H mit dem Radius r in der Höhe z ist, hat dieser Querschnitt den gleichen Inhalt. Daher ist

$$\mu(H) = \mu(Z \setminus K) = \mu(Z) - \mu(K) = r^2\pi - r^2\frac{\pi}{3}, \quad \mu(H) = \frac{2}{3}r^2\pi.$$

Die Berechnung von mehrdimensionalen Integralen kann mit Hilfe von Satz 1 auf die sukzessive Berechnung von eindimensionalen Integralen zurückgeführt werden.

Satz 3. *Der Normalbereich B der x,y-Ebene sei durch die Ungleichungen*

$$x_a \leqq x \leqq x_e, \qquad y_a(x) \leqq y \leqq y_e(x) \tag{4}$$

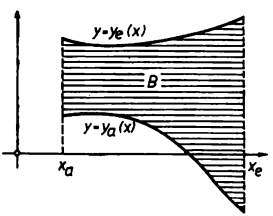

Abb. 4.35

mit stetigen Funktionen y_a, y_e charakterisiert (Abb. 4.35). *Ist dann f eine stetige Funktion, deren Definitionsbereich B enthält, so ist*

$$\int_B f(x, y)\, d(x, y) = \int_{x_a}^{x_e} \int_{y_a(x)}^{y_e(x)} f(x, y)\, dy\, dx. \tag{5}$$

Beweis. Es sei zunächst $f(x, y) \geqq 0$ für $(x, y) \in B$. Da B quadrierbar ist, ist auch der Normalbereich

$$M := B_0^f = \{(x, y, z) : x_a \leqq x \leqq x_e \wedge y_a(x) \leqq y \leqq y_e(x) \wedge 0 \leqq z \leqq f(x, y)\}$$

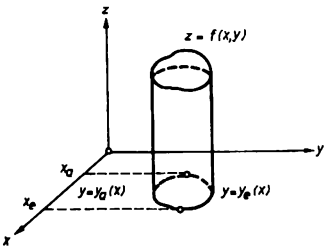

Abb. 4.36

quadrierbar (Abb. 4.36), und nach 4.1.4. (16) ist

$$\mu(M) = \int_B f(x, y)\, d(x, y). \tag{6}$$

Der zur Höhenstufe x_0 gehörende Querschnitt

$$M(x_0) = \{(y, z): y_a(x_0) \leqq y \leqq y_e(x_0) \wedge 0 \leqq z \leqq f(x_0, y)\}$$

hat nach 4.1.4. (11) den Flächeninhalt

$$q(x_0) = \mu\big(M(x_0)\big) = \int_{y_a(x_0)}^{y_e(x_0)} f(x_0, y)\, dy.$$

Aus Satz 1 folgt

$$\mu(M) = \int_{x_a}^{x_e} q(x)\, dx = \int_{x_a}^{x_e} \left[\int_{y_a(x)}^{y_e(x)} f(x, y)\, dy \right] dx.$$

Zusammen mit (6) ergibt sich die Behauptung (5). Es ist üblich, die eckigen Klammern wegzulassen, wie dies in (5) bereits geschehen ist.

Ist die Bedingung $f(x, y) \geqq 0$ für $(x, y) \in B$ nicht erfüllt, so wählen wir eine Konstante c mit $f(x, y) + c \geqq 0$ für $(x, y) \in B$. Wegen

$$\int_B \big(f(x, y) + c\big)\, d(x, y) = \int_B f(x, y)\, d(x, y) + c\mu(B), \tag{7}$$

$$\int_{x_a}^{x_e} \int_{y_a(x)}^{y_e(x)} \big(f(x, y) + c\big)\, dy\, dx = \int_{x_a}^{x_e} \left[\int_{y_a(x)}^{y_e(x)} f(x, y)\, dy + c\big(y_e(x) - y_a(x)\big) \right] dx$$

$$= \int_{x_a}^{x_e} \int_{y_a(x)}^{y_e(x)} f(x, y)\, dy\, dx + c \int_{x_a}^{x_e} \big(y_e(x) - y_a(x)\big)\, dx$$

$$= \int_{x_a}^{x_e} \int_{y_a(x)}^{y_e(x)} f(x, y)\, dy\, dx + c\mu(B) \tag{8}$$

und der zuvor bewiesenen Gleichheit der linken Seiten in (7) und (8) gilt (5) allgemein.

Beispiel 2. Es sei B die von der Parabel $y^2 = x$ und den Geraden $x = a$, $x = b$ $(0 \leqq a \leqq b)$ begrenzte Punktmenge. Sie kann durch die Ungleichungen

$$a \leqq x \leqq b,$$

$$-\sqrt{x} \leqq y \leqq \sqrt{x}$$

charakterisiert werden, ist also ein Normalbereich. Wir berechnen mit Hilfe von (5) das Integral der Funktion $f(x, y) = \sqrt{x}\, y^2$ über den Bereich B. Es ist

$$\int_B \sqrt{x}\, y^2\, d(x, y) = \int_a^b \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \sqrt{x}\, y^2\, dy\, dx.$$

Für das innere Integral über y ist $\sqrt{x}$ wie eine Konstante zu behandeln. Wir erhalten

$$\int_{\sqrt{x}}^{-\sqrt{x}} \sqrt{x}\, y^2\, dy = \sqrt{x} \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} = \frac{2}{3} x^2,$$

$$\int_B \sqrt{x}\, y^2\, d(x, y) = \frac{2}{3} \int_a^b x^2\, dx = \frac{2}{9} (b^3 - a^3).$$

Kann der Normalbereich B durch Ungleichungen der Form

$$y_a \leqq y \leqq y_e,$$

$$x_a(y) \leqq x \leqq x_e(y) \tag{9}$$

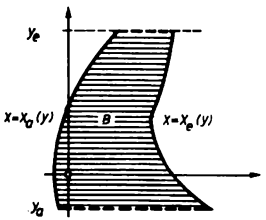

Abb. 4.37

mit stetigen Funktionen x_a und x_e charakterisiert werden (Abb. 4.37), so geht (5) in

$$\int_B f(x, y)\, d(x, y) = \int_{y_a}^{y_e} \int_{x_a(y)}^{x_e(y)} f(x, y)\, dx\, dy \tag{10}$$

über.

Beispiel 3. Wir berechnen das Integral von $f(x, y) = xy^2$ über den Bereich B, der durch die Geraden $y = 0, y = 1, y = x + 1$ und die Parabel $y^2 = x$ begrenzt wird. Dann ist B ein Normalbereich bezüglich der y-Achse, der durch die Ungleichungen

$$0 \leqq y \leqq 1, \qquad y - 1 \leqq x \leqq y^2$$

charakterisiert ist. Folglich gilt

$$\begin{aligned}\int_B xy^2\, d(x, y) &= \int_0^1 \int_{y-1}^{y^2} xy^2\, dx\, dy \\ &= \int_0^1 y^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{y-1}^{y^2} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (y^6 - y^4 + 2y^3 - y^2)\, dy = \frac{23}{420}.\end{aligned}$$

Ist keine der Darstellungen (4) bzw. (9) möglich, so versuche man, eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{B_1, \ldots, B_k\}$ von B zu finden derart, daß diese Darstellung für die Teilbereiche B_i $(i = 1, \ldots, k)$ möglich ist. Nach 4.1.4. (18) ist dann

$$\int_B f(x, y)\, d(x, y) = \sum_{i=1}^{k} \int_{B_i} f(x, y)\, d(x, y). \tag{11}$$

Für die Integration über Rechtecksbereiche

$$R = \{(x, y) : a \leqq x \leqq b \wedge c \leqq y \leqq d\}$$

kann (5) oder (10) angewendet werden, d. h., es ist

$$\int_B f(x, y)\, d(x, y) = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy, \tag{12}$$

die Reihenfolge der Integrationen darf bei konstanten Grenzen vertauscht werden.

Die Berechnung eines Integrals einer stetigen Funktion f über einen räumlichen Bereich B, der durch Ungleichungen der Form

$$\begin{aligned} &x_a \leqq x \leqq x_e, \\ &y_a(x) \leqq y \leqq y_e(x), \\ &z_a(x, y) \leqq z \leqq z_e(x, y) \end{aligned} \tag{13}$$

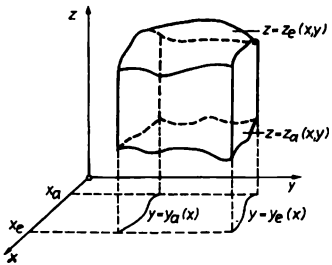

Abb. 4.38

mit stetigen Funktionen y_a, y_e, z_a, z_e gegeben ist (Abb. 4.38), geschieht nach der Formel

$$\int_B f(x, y, z)\, d(x, y, z) = \int_{x_a}^{x_e} \int_{y_a(x)}^{y_e(x)} \int_{z_a(x,y)}^{z_e(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx, \tag{14}$$

und entsprechende Formeln gelten für Permutationen der Variablen in (13), (14). Der Beweis von (14) erfolgt durch mehrfache Anwendung der Schlußweisen des Beweises von Satz 3.

Beispiel 4. Wir berechnen

$$\int_B \frac{1}{(1+z)^2}\, d(x, y, z),$$

wobei B der von den Ebenen $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ begrenzte Bereich ist. Die Punkte von B sind durch

$$0 \leqq x \leqq 1, \qquad 0 \leqq y \leqq 1 - x, \qquad 0 \leqq z \leqq 1 - x - y$$

charakterisiert (Abb. 4.39), und es ist

$$\int_B \frac{1}{(1+z)^2}\, d(x, y, z) = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+z)^2}\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[-\frac{1}{2(1+z)^2} \right]_0^{1-x-y} dy\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{1-x}\left(\frac{1}{(2-x-y)^2}-1\right)dy\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{1}{2-x-y}-y\right]_{y=0}^{y=1-x}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1\left(x-\frac{1}{2-x}\right)dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+\ln(2-x)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}.$$

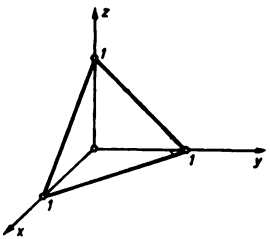

Abb. 4.39

4.4.5. Transformationsformeln für mehrfache Integrale

Die in 4.3.4., Satz 2, bewiesene Substitutionsregel kann auf mehrdimensionale Integrale übertragen werden. Eine exakte Behandlung dieses Problems ist sehr aufwendig, so daß wir uns an dieser Stelle mit der Angabe von Berechnungsformeln begnügen müssen. Wir schreiben 4.3.4. (1) in der Form

$$\int_{x(a)}^{x(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f\big(x(t)\big)\,x'(t)\,dt, \tag{1}$$

wobei die stetig differenzierbare Funktion $x = x(t)$ mit $x'(t) \neq 0$ das Intervall I^* mit den Endpunkten a, b umkehrbar eindeutig auf das Intervall I mit den Endpunkten $x(a), x(b)$ abbildet. Ist stets $x'(t) > 0$ bzw. $x'(t) < 0$, so ist $x(a) < x(b)$ bzw. $x(a) > x(b)$ genau dann, wenn $a < b$ ist. Daher können wir (1) auch in der Form

$$\int_I f(x)\,dx = \int_{I^*} f\big(x(t)\big)\,|x'(t)|\,dt \tag{2}$$

schreiben.

Ist das Integral der Funktion $z = f(x, y)$ über einen ebenen quadrierbaren Bereich B zu ermitteln, so empfiehlt es sich häufig, durch Gleichungen der Form

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v) \tag{3}$$

krummlinige Koordinaten einzuführen. Sie vermitteln eine eindeutige Abbildung aus der u,v-Ebene in die x,y-Ebene. Gibt es einen Bereich B^* der u,v-Ebene, der — von Begrenzungspunkten abgesehen — durch (3) umkehrbar eindeutig auf B abgebildet wird, und ist im Innern von B^* die *Funktionaldeterminante*

$$D = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} := \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \tag{4}$$

von 0 verschieden, so gilt die Transformationsformel

$$\int_B f(x, y)\, d(x, y) = \int_{B^*} f\big(x(u, v), y(u, v)\big)\, |D(u, v)|\, d(u, v). \tag{5}$$

Der Vergleich mit (2) zeigt, daß die Funktionaldeterminante in (5) der Ableitung der Substitutionsfunktion in (2) entspricht. Die Anwendung der Transformationsformel ist besonders dann nützlich, wenn für B^* ein Rechtecksbereich gewählt werden kann, da dann konstante Integrationsgrenzen auftreten.

Beispiel 1. Wir berechnen das Integral der Funktion $z = xy$ über den Bereich B, der begrenzt wird von den Kreisen mit den Radien $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ und den von 0 ausgehenden Halbgeraden, die mit der positiven x-Achse den (orientierten) Winkel $\frac{\pi}{4}$ bzw. $\frac{5\pi}{6}$ bilden (Abb. 4.40).

Wählen wir für (3) die Abbildung

$$x = r \cos \varphi, \qquad y = r \sin \varphi, \tag{6}$$

d. h., führen wir ebene Polarkoordinaten ein, so wird der Rechtecksbereich B^* der r, φ-Ebene, der durch

$$1 \leqq r \leqq 2, \quad \frac{\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \frac{5\pi}{6}$$

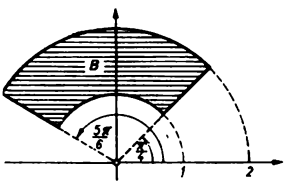

Abb. 4.40

charakterisiert ist, durch (6) umkehrbar eindeutig auf B abgebildet. Gemäß (4) ist

$$D(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r > 0 \tag{7}$$

für $1 \leqq r \leqq 2$, und nach (5) ist

$$\begin{aligned} \int_B xy\, d(x, y) &= \int_{B^*} r^3 \cos\varphi \sin\varphi\, r\, d(r, \varphi) \\ &= \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{6}} r^3 \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi\, dr \\ &= \int_1^2 \frac{r^3}{2} [\sin^2\varphi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{6}} dr = -\frac{15}{32}. \end{aligned}$$

Die Berechnung dieses Integrals ohne Verwendung der Transformationsformel ist mühsamer.

Die Transformationsformel (5) kann auch auf Funktionen von drei Variablen übertragen werden.

Wird der quadrierbare Bereich B^* — von Begrenzungspunkten abgesehen — durch

$$x = x(u, v, w), \qquad y = y(u, v, w), \qquad z = z(u, v, w) \tag{8}$$

umkehrbar eindeutig auf den quadrierbaren Bereich B abgebildet und ist die Funktionaldeterminante

$$D = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} := \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix} \tag{9}$$

der Abbildung (8) im Innern von B^* von 0 verschieden, so lautet die Transformationsformel

$$\int_B f(x, y, z)\, d(x, y, z) = \int_{B^*} f\big(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\big)\, |D(u, v, w)|\, d(u, v, w). \tag{10}$$

Für räumliche Zylinderkoordinaten haben wir

$$x = \varrho\cos\varphi, \qquad y = \varrho\sin\varphi, \qquad z = z \tag{11}$$

(vgl. 2.5.3. (12)), und die Funktionaldeterminante ist

$$D(\varrho, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\varrho\sin\varphi & \varrho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \varrho. \tag{12}$$

Für räumliche Polarkoordinaten

$$x = r\sin\vartheta\,\cos\varphi, \qquad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\vartheta \tag{13}$$

(vgl. 2.5.3. (13)) ist die Funktionaldeterminante durch

$$D(r, \vartheta, \varphi) = \begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta \\ r\cos\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & -r\sin\vartheta \\ -r\sin\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\vartheta \tag{14}$$

gegeben.

Beispiel 2. Wir berechnen das Raumintegral der Funktion $u = x^2 + y^2 + z^2$ über die Hohlkugel H mit dem Mittelpunkt 0 und dem inneren bzw. äußeren Radius a bzw. b $(0 < a < b)$. Durch räumliche Polarkoordinaten wird der durch

$$a \leqq r \leqq b, \qquad 0 \leqq \vartheta \leqq \pi, \qquad -\pi \leqq \varphi \leqq \pi$$

charakterisierte Bereich H^* eindeutig auf H abgebildet. Im Inneren von H^* ist die Funktionaldeterminante (14) von 0 verschieden, und das Innere von H^* wird umkehrbar eindeutig in H abgebildet. Wegen $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ und $\sin\vartheta \geqq 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_H (x^2 + y^2 + z^2)\, d(x, y, z) &= \int_{H^*} r^2 r^2 \sin\vartheta\, d(r, \vartheta, \varphi) \\ &= \int_a^b \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi r^4 \sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta\, dr \\ &= \frac{4}{5}\pi(b^5 - a^5). \end{aligned}$$

4.4.6. Aufgaben

1. Die *gewöhnliche Zykloide*

$$x = rt - r\sin t, \qquad y = r - r\cos t$$

wird durch einen Punkt eines Kreises mit dem Radius r beschrieben, der auf der x-Achse abrollt (Abb. 4.41). Man berechne die Länge des zu einer vollen Drehung des Kreises gehörenden Zykloidenbogens.

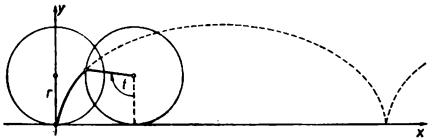

Abb. 4.41

2. Die *Astroide*

$$x = 3r\cos\frac{t}{4} + r\cos\frac{3t}{4}, \qquad y = 3r\sin\frac{t}{4} - r\sin\frac{3t}{4}$$

wird durch einen Punkt eines Kreises mit dem Radius $\frac{r}{4}$ beschrieben, der auf dem Inneren einer Kreislinie mit dem Radius r abrollt (Abb. 4.42). Man berechne den Umfang der Astroide.

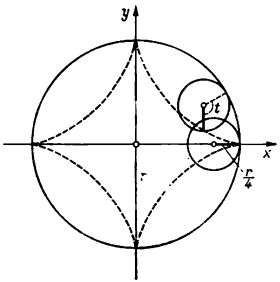

Abb. 4.42

3. Bei Rotation einer durch die Gleichung $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ $(b > a < 0)$ bestimmten Kreisfläche um die x-Achse wird ein *Torus* erzeugt (Abb. 4.43). Man berechne die Oberfläche und das Volumen des Torus.

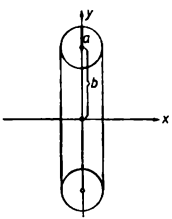

Abb. 4.43

4. Man berechne das Volumen des Körpers, der sich bei Rotation des Graphen von $y = \sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ um die x-Achse ergibt.

5. Man berechne die Integrale $\int x^2\, d(x, y)$, $\int y^2\, d(x, y)$, $\int xy\, d(x, y)$ über die obere Hälfte des Einheitskreises.

6. Man berechne

$$\int_B e^{x+y+z}\, d(x, y, z),$$

wobei B durch die Ebenen $x = 2$, $y = 0$, $y = x$, $z = 0$, $z = x + y$ begrenzt wird.

5. Einiges über Differentialgleichungen

5.1. Problemstellung, Grundbegriffe

Bei zahlreichen mathematischen und naturwissenschaftlichen Untersuchungen stößt man auf Gleichungen, in denen neben einer gesuchten Funktion $y = f(x)$ auch Ableitungen dieser Funktion auftreten. Es handelt sich dann um folgende Problemstellung. Gegeben ist eine Funktion $z = G(x, y, y_1, \ldots, y_n)$ von $n + 2$ Variablen. Es sind alle auf einem Intervall I n-mal stetig differenzierbaren Funktionen f gesucht, die der Bedingung

$$G\big(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)\big) = 0 \qquad (x \in I) \tag{1}$$

genügen. Dieses Problem formuliert man kürzer durch

$$G(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{2}$$

und nennt (2) eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung. Die zur Funktion $G(x, y, y_1, y_2) := x^2y + y_1y_2$ gehörende Differentialgleichung lautet z. B.

$$x^2y + y'y'' = 0.$$

Jede auf einem Intervall I definierte Funktion f, die (1) erfüllt, heißt eine *Lösung* oder ein *Integral* der Differentialgleichung (2) auf I. Die letzte Bezeichnung rührt daher, daß unser Problem im Spezialfall der Funktion $G(x, y, y_1) := y_1 - g(x)$ die Form $y' = g(x)$ annimmt, so daß jede Lösung eine Stammfunktion der Funktion g ist. Die Problemstellung der Theorie der Differentialgleichungen erweist sich somit als eine Verallgemeinerung des Umkehrproblems der Differentialrechnung.

Der Graph einer Lösung von (2) heißt eine *Lösungskurve* oder *Integralkurve*. Die Menge aller Lösungen auf I heißt die *Lösungsmannigfaltigkeit* oder das *vollständige Integral* auf I.

Hat die Differentialgleichung (2) die spezielle Gestalt

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{3}$$

so sprechen wir von einer *expliziten gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung*. Insbesondere heißt

$$y' = F(x, y) \tag{4}$$

eine explizite gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung.

Der Zusatz „gewöhnliche" Differentialgleichung besagt, daß eine Funktion von einer Variablen gesucht wird. Im Gegensatz dazu spricht man von einer *partiellen Differentialgleichung*, wenn eine Funktion von mehreren Variablen durch eine Gleichung charakterisiert wird, in der partielle Ableitungen dieser Funktion auftreten. So ist zum Beispiel

$$(x^2 + y^2)\, z_{xx} + 2z_{xy} - z(\sin y)\, z_y = 0$$

eine partielle Differentialgleichung für eine gesuchte Funktion $z = f(x, y)$, und zwar eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, weil die höchste Ordnung der auftretenden partiellen Ableitungen der gesuchten Funktion gleich 2 ist.

Die Problemstellung kann weiterhin dadurch verallgemeinert werden, daß man ein System von gesuchten Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ durch ein *Differentialgleichungssystem*

$$y_j' = F_j(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

charakterisiert. Die Differentialgleichung n-ter Ordnung (3) ist mit dem Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1}' &= y_n, \\ y_n' &= F(x, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned} \tag{5}$$

äquivalent, wenn man jeder Lösung y von (3) die Funktionen $y_1 = y$, $y_2 = y'$, ..., $y_n = y^{(n-1)}$ zuordnet und umgekehrt $y = y_1$ setzt, falls die Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ dem Differentialgleichungssystem (5) genügen.

Wir beschränken uns im wesentlichen auf die Differentialgleichung (4). Geht eine Lösungskurve der Gleichung (4) durch einen gegebenen Punkt (x_0, y_0), so hat die Tangente an die Lösungskurve in diesem Punkt wegen (4) den Anstieg $F(x_0, y_0)$. Wir bekommen also eine Vorstellung von dem möglichen Verlauf der Lösungskurven, wenn wir in jedem Punkt $(x_0, y_0) \in D(F)$ ein kurzes Geradenstück mit dem Anstieg $F(x_0, y_0)$ einzeichnen. So läßt zum Beispiel Abb. 5.1 sofort vermuten, daß die Lösungskurven der Differentialgleichung $y' = \dfrac{x}{y}$ die Gestalt von Hyperbelbögen haben.

Auf Grund der geschilderten geometrischen Deutung nennt man jedes Zahlentripel $\big(x, y, F(x, y)\big)$ ein *Richtungselement* von (4). In allen Punkten der zum Niveau c

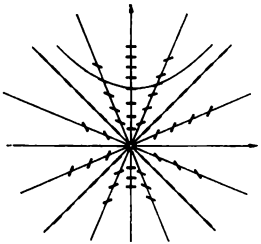

Abb. 5.1

gehörenden Niveaulinie der Funktion F haben die Richtungselemente den gleichen Anstieg c. Daher heißen diese Niveaulinien die *Isoklinen* der Differentialgleichung (4). In Abb. 5.1 sind die Isoklinen Halbgeraden.

Die Differentialgleichung (4) besitzt für jede in einem Gebiet stetige Funktion F unendlich viele Lösungen. Ergänzen wir die durch diese Differentialgleichung ausgesprochene Bedingung für die gesuchte Funktion f, indem wir einen Punkt $(a, b) \in D(F)$ vorgeben und fordern, daß die *Anfangsbedingung* $f(a) = b$ erfüllt ist, so sprechen wir von einem *Anfangswertproblem*. In Kurzfassung formulieren wir dieses Anfangswertproblem durch das Formelpaar

$$y' = F(x, y), \qquad y(a) = b. \tag{6}$$

Die zweite Bedingung bedeutet, daß die Lösungskurve durch den Punkt (a, b) gehen soll. Ist f eine Lösung des Anfangswertproblems, so können wir von der Gleichung $f'(x) = F\big(x, f(x)\big)$ durch Integration zu

$$f(x) - f(a) = \int_a^x F\big(t, f(t)\big)\, dt$$

und, unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung, zu

$$f(x) = b + \int_a^x F\big(t, f(t)\big)\, dt \tag{7}$$

übergehen. Erfüllt umgekehrt eine stetige Funktion f diese Bedingung, so ist f stetig differenzierbar, da dies für die rechte Seite der Fall ist. Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt $f'(x) = F\big(x, f(x)\big)$, und offensichtlich ist $f(a) = b$, d. h., f ist eine Lösung des Anfangswertproblems (6). Die Bedingung (7) ist somit zum Anfangswertproblem (6) äquivalent. Man nennt (7) eine *Integralgleichung*, weil die gesuchte Funktion f unter dem Integralzeichen erscheint.

5.2. Existenz- und Einzigkeitssatz

Wir beschäftigen uns nun mit der Integralgleichung 5.1. (7), wobei F eine in einem Gebiet $G \subseteq \mathsf{R}_2$ stetige Funktion und $(a, b) \in G$ ist. Eine Funktion g heiße *zulässig*, wenn g in einem Intervall I mit $a \in I$ stetig ist und wenn aus $x \in I$ stets $\big(x, g(x)\big) \in G$ folgt. Dann ist $F\big(x, g(x)\big)$ für alle $x \in I$ definiert und stetig. Wir können daher jeder zulässigen Funktion g die durch

$$g^*(x) = b + \int_a^x F\big(t, g(t)\big)\, dt \qquad (x \in I) \tag{1}$$

definierte Funktion g^* zuordnen. Unser Problem besteht hiernach darin, zulässige Funktionen f zu finden, für die $f^* = f$ ist.

Der Definitionsbereich I einer Lösung f heißt ein *Lösungsintervall*. Eine Lösung f heiße *maximal*, wenn jedes Lösungsintervall im Definitionsbereich von f enthalten ist.

Um zu möglichst einfachen Existenz- und Einzigkeitsaussagen zu kommen, stellen wir an die stetige Funktion F eine zusätzliche Bedingung. Wir fordern, daß zu jedem in G enthaltenen Rechtecksbereich R eine sogenannte *Lipschitzkonstante* (Rudolf Lipschitz (1832—1903)) $K = K(R)$ existiert, derart, daß stets die *Lipschitzbedingung*

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leqq K\, |y_1 - y_2| \qquad \big((x, y_1), (x, y_2) \in R\big) \tag{2}$$

erfüllt ist. Besitzt F in G eine stetige partielle Ableitung $\partial_2 F$, so ist die Lipschitzbedingung, wie man sich leicht überlegt, stets erfüllt.

Nunmehr können wir den *Existenz- und Einzigkeitssatz* für explizite gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung formulieren.

Satz 1. *Es sei F eine in einem Gebiet G des R_2 stetige Funktion, und zu jedem (abgeschlossenen) Rechtecksbereich $R \subset G$ gebe es eine Lipschitzkonstante $K = K(R)$, für die die Lipschitzbedingung* (2) *erfüllt ist. Dann gibt es zu jedem Punkt $(a, b) \in G$ genau eine maximale Lösung f des Anfangswertproblems $y' = F(x, y)$, $y(a) = b$.*

Den Beweis von Satz 1 führen wir in mehreren Schritten und geben gleichzeitig ein Verfahren zur Konstruktion einer Lösung an. Wir wählen zwei reelle Zahlen α, β derart, daß

$$R := \{(x, y) : |x - a| \leqq \alpha \wedge |y - b| \leqq \beta\} \subset G \tag{3}$$

gilt, und bestimmen eine reelle Zahl A mit

$$|F(x, y)| \leqq A \qquad \big((x, y) \in R\big). \tag{4}$$

Es sei $M(\alpha, \beta)$ die Menge aller stetigen Funktionen von dem Intervall $I_\alpha := \{x : |x - a| \leqq \alpha\}$ in das Intervall $I_\beta{}^* := \{y : |y - b| \leqq \beta\}$. Jede Funktion $g \in M(\alpha, \beta)$ ist zulässig, und wegen (4) ist

$$|g^*(x) - b| = \left| \int_a^x F\big(t, g(t)\big)\, dt \right| \leqq |x - a| \cdot A \qquad (|x - a| \leqq \alpha).$$

Wenn wir α der zusätzlichen Bedingung

$$\alpha A \leqq \beta \tag{5}$$

unterwerfen, ist g^* wieder eine stetige Funktion von I_a in $I_\beta{}^*$, d. h., aus $g \in M(\alpha, \beta)$ folgt stets $g^* \in M(\alpha, \beta)$. Die Menge $M(\alpha, \beta)$ ist eine Teilmenge des vollständigen metrischen Raumes C_{I_a} aller auf dem abgeschlossenen Intervall I_a stetigen Funktionen (vgl. 2.6.3.). Die Menge $M(\alpha, \beta)$ ist abgeschlossen, denn ist (g_n) eine gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen aus $M(\alpha, \beta)$ mit dem Grenzwert g, so gilt

$$|g(x) - b| = \lim_{n \to \infty} |g_n(x) - b| \leqq \beta,$$

d. h., es ist auch $g \in M(\alpha, \beta)$. Für zwei zulässige Funktionen g, h von I_a in $I_\beta{}^*$ ist wegen der Lipschitzbedingung

$$\begin{aligned} |g^*(x) - h^*(x)| &= \left| \int_a^x (F(t, g(t)) - F(t, h(t)))\, dt \right| \\ &\leqq \left| \int_a^x |F(t, g(t)) - F(t, h(t))|\, dt \right| \\ &\leqq K \left| \int_a^x |g(t) - h(t)|\, dt \right| \\ &\leqq K\, |x - a| \max_{t \in I_a} |g(t) - h(t)|. \end{aligned}$$

Mit der in 2.6.3. eingeführten Tschebyschew-Metrik gilt daher

$$\varrho(g^*, h^*) \leqq K\alpha\varrho(g, h).$$

Wählen wir nun noch α so klein, daß

$$K\alpha \leqq q < 1 \tag{6}$$

ist, so ist die Abbildung

$$\varphi : g \mapsto \varphi(g) = g^*$$

eine kontrahierende Abbildung von der abgeschlossenen Menge $M(\alpha, \beta)$ in sich, so daß wir den Banachschen Fixpunktsatz (vgl. 2.4.5.) anwenden können. Hiernach gibt es genau einen Fixpunkt f von φ, d. h., es gibt genau eine stetige Funktion f von I_a in $I_\beta{}^*$ mit $f = f^*$, also mit

$$f(x) = b + \int_a^x F(t, f(t))\, dt \qquad (|x - a| \leqq \alpha). \tag{7}$$

Setzen wir

$$\begin{aligned} f_0(x) &:= b, \\ f_{n+1}(x) &:= f_n{}^*(x) = b + \int_a^x F(t, f_n(t))\, dt, \end{aligned} \tag{8}$$

so konvergiert die Folge der Funktionen f_n unter den Voraussetzungen (4), (5), (6) auf dem Intervall I_a gleichmäßig gegen die Lösung f.

Für unsere weiteren Betrachtungen benötigen wir einen Hilfssatz.

Satz 2. *Ist f eine in einem Intervall I mit $a \in I$ stetige reellwertige Funktion, so folgt aus*

$$0 \leqq f(x) \leqq K \left| \int_a^x f(t)\, dt \right| \quad (x \in I) \tag{9}$$

stets $f(x) = 0$ $(x \in I)$.

Beweis. Es sei zuerst $x \geqq a$. Aus (9) folgt, wenn wir mit $e^{-K(x-a)}$ multiplizieren,

$$e^{-K(x-a)} f(x) - Ke^{-K(x-a)} \int_a^x f(t)\, dt \leqq 0.$$

Auf der linken Seite steht die Ableitung der Funktion

$$g(x) := e^{-K(x-a)} \int_a^x f(t)\, dt,$$

d. h., es ist $g'(x) \leqq 0$,

$$g(x) = g(x) - g(a) = \int_a^x g'(t)\, dt \leqq 0,$$

$$K \left| \int_a^x f(t)\, dt \right| = K \int_a^x f(t)\, dt = Kg(x)\, e^{K(x-a)} \leqq 0.$$

Setzen wir dies in (9) ein, so erhalten wir $0 \leqq f(x) \leqq 0$, und die Behauptung ist für $x \geqq a$ bewiesen. Den Fall $x < a$ führen wir hierauf durch die Substitution

$$\bar{x} = -x,\ \bar{a} = -a,\ \bar{f}(x) = f(-x)$$

zurück.

Jetzt können wir zeigen, daß es in jedem Lösungsintervall I höchstens eine Lösung gibt. Sind nämlich f_1, f_2 Lösungen in I, so gilt

$$|f_1(x) - f_2(x)| \leqq \left| \int_a^x |F(t, f_1(t)) - F(t, f_2(t))|\, dt \right| \leqq K \left| \int_a^x |f_1(t) - f_2(t)|\, dt \right|,$$

und nach Satz 2 ist $f_1(x) - f_2(x) = 0$ für $x \in I$.

Es sei nun I die Vereinigungsmenge aller Lösungsintervalle. Ist $x \in I$, so gibt es eine im Intervall mit den Randpunkten a, x definierte Lösung. Daher ist I selbst ein Intervall mit $a \in I$. Wir definieren in I eine Funktion f, indem wir für $x \in I$ eine beliebige in x definierte Lösung g wählen und $f(x) = g(x)$ setzen. Nach dem soeben Bewiesenen ist diese Definition von der Wahl der Lösung g mit $a, x \in D(g)$ unabhängig, und f ist eine Lösung von (7). Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Man kann noch zeigen, daß der Graph der maximalen Lösung in keiner beschränkten abgeschlossenen Teilmenge von G enthalten ist. Ist G beschränkt, so besagt dies, daß die maximale Lösung bis zur Begrenzung von G führt.

Der Existenz- und Einzigkeitssatz kann mit geringen Modifikationen auf Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen übertragen werden.

5.3. Einige elementar integrierbare Differentialgleichungen

In 5.2. haben wir ein konstruktives Verfahren zur Bestimmung der Lösung eines Anfangswertproblems angegeben. Die Lösung ergab sich hierbei als Grenzwert der gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge 5.2. (8), deren Glieder rekursiv zu berechnen sind. Man wird also mit diesem Verfahren die Lösung im allgemeinen nur näherungsweise bestimmen können. Ferner ist zu bedenken, daß bei jedem Teilschritt ein Integral zu berechnen ist, das wiederum nur in wenigen Fällen elementar integrierbar sein wird und daher nur näherungsweise berechnet werden kann. In der numerischen Mathematik werden zahlreiche Verfahren entwickelt, die eine bequemere Berechnung von Näherungslösungen ermöglichen. Es ist verständlich, daß man von jeher nach Methoden gesucht hat, wenigstens gewisse Klassen von Differentialgleichungen mit elementaren Methoden zu lösen. Der Begriff „elementar" ist hierbei nicht ganz leicht zu präzisieren. Man nennt jedenfalls alle diejenigen Differentialgleichungen elementar integrierbar, deren Lösungsfunktion mit Hilfe der elementaren Funktionen und ihrer Integrale — auch dann, wenn diese nicht elementar integrierbar sind (vgl. 4.3.1.) — dargestellt werden können.

Als erstes Beispiel betrachten wir die Methode der *Trennung der Variablen*. Sie kann auf Anfangswertprobleme der Form

$$y' = g(x)\,h(y), \qquad y(a) = b \tag{1}$$

angewendet werden, wobei g bzw. h in einem Intervall stetig ist, das den Punkt a bzw. b im Innern enthält. Ist $h(b) = 0$, so ist die konstante Funktion $y = b$ offensichtlich eine Lösung des Anfangswertproblems. Wenn h sogar differenzierbar ist, so erfüllt die Funktion $F(x, y) = g(x)\,h(y)$ die Lipschitzbedingung, und die Lösung ist eindeutig bestimmt. Ist die Lipschitzbedingung nicht erfüllt, so kann (1) im Fall $h(b) = 0$ auch mehrere Lösungen haben.

Es sei nun $h(b) \neq 0$, und f sei eine Lösung von (1) auf I. Dann ist $f'(x) = g(x)\,h\big(f(x)\big)$. Ist $h\big(f(x)\big) \neq 0$ für $x \in I$, so folgt

$$\frac{f'(x)}{h\big(f(x)\big)} = g(x),$$

und Integration ergibt

$$\int_a^x \frac{f'(\xi)}{h\big(f(\xi)\big)}\,d\xi = \int_a^x g(\xi)\,d\xi.$$

Mit der Substitutionsregel erhalten wir

$$\int_b^{f(x)} \frac{d\eta}{h(\eta)} = \int_a^x g(\xi)\, d\xi. \tag{2}$$

Ist H eine Stammfunktion der Funktion $\frac{1}{h}$, so folgt

$$H\big(f(x)\big) - H(b) = \int_a^x g(\xi)\, d\xi. \tag{3}$$

Da H als Integral einer Funktion von konstantem Vorzeichen streng monoton ist, existiert eine Umkehrfunktion G, und wir erhalten

$$f(x) = G\Big(H(b) + \int_a^x g(\xi)\, d\xi\Big). \tag{4}$$

Definieren wir umgekehrt die Funktion f durch (4), so können wir der Reihe nach auf (3), (2) und (1) schließen. Das Anfangswertproblem (1) besitzt also in einer Umgebung von a genau eine Lösung.

Den soeben exakt geschilderten Lösungsweg kann man sich in formaler Schreibweise wie folgt einprägen. Wir multiplizieren die Differentialgleichung mit $\frac{dx}{h(y)}$ und erhalten

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)\, dx.$$

Integration beider Seiten führt zu

$$\int_b^y \frac{d\eta}{h(\eta)} = \int_a^x g(\xi)\, d\xi$$

(vgl. (2)), und „Auflösung" dieser Gleichung nach y ergibt die gesuchte Lösung.

Beispiel 1. Das Anfangswertproblem

$$y' = (\cosh x)\,(y^2 + 1), \qquad y(0) = 0$$

hat wegen

$$\frac{y'}{y^2+1} = \cosh x, \quad \int_0^{f(x)} \frac{d\eta}{\eta^2+1} = \int_0^x \cosh \xi\, d\xi, \quad \arctan f(x) = \sinh x$$

die Lösung $f(x) = \tan(\sinh x)$.

Wir behandeln als weitere Klasse von elementar integrierbaren Differentialgleichungen den Typ

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right), \qquad y(a) = b \qquad (a \neq 0). \tag{5}$$

Wir betrachten nur Lösungsintervalle, die die Zahl 0 nicht enthalten. Für jede Lösungsfunktion $y = f(x)$ führen wir die Funktion $z = g(x)$ mit $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, also $f(x) = xg(x)$, $f'(x) = g(x) + xg'(x)$ ein. Hiernach ist f genau dann Lösung von (5), wenn g eine Lösung der Differentialgleichung

$$z + xz' = F(z)$$

oder

$$z' = \frac{1}{x}\left(F(z) - z\right), \qquad z(a) = \frac{b}{a} \tag{6}$$

ist. Damit haben wir die Behandlung des Anfangswertproblems (5), in dem eine *Differentialgleichung mit homogenen Variablen* vorliegt, auf die Methode der Trennung der Variablen zurückgeführt.

Beispiel 2. Wir schreiben das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{3x^2 - y^2}{2xy}, \qquad y(2) = 4$$

in der Form

$$y' = \frac{3 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2 \cdot \frac{y}{x}}, \qquad y(2) = 4,$$

und führen die Substitution $z = \frac{y}{x}$, $y' = z + xz'$ durch. Wir erhalten

$$z + xz' = \frac{3 - z^2}{2z},$$

$$z' = \frac{3}{2} \cdot \frac{1 - z^2}{z} \cdot \frac{1}{x}, \qquad z(2) = 2,$$

$$\int_2^z \frac{2\zeta}{\zeta^2 - 1}\, d\zeta = -3 \int_2^x \frac{1}{\xi}\, d\xi \qquad (z > 1),$$

$$\ln(z^2 - 1) - \ln 3 = -3(\ln x - \ln 2),$$

$$\frac{z^2 - 1}{3} = \left(\frac{x}{2}\right)^{-3}, \qquad z^2 = 1 + \frac{24}{x^3}.$$

Drücken wir z wieder durch y aus, so ergibt sich mit

$$y = \sqrt{x^2 + \frac{24}{x}} \qquad (x > 0)$$

die Lösung des Anfangswertproblems.

Von besonderer Bedeutung ist die sogenannte *lineare Differentialgleichung* $y' = -g(x)\,y + h(x)$ oder

$$y' + g(x)\,y = h(x), \tag{7}$$

in der $h(x)$ als inhomogenes Glied oder, wegen gewisser physikalischer Anwendungen, als *Störfunktion* bezeichnet wird. Die Differentialgleichung

$$y' + g(x)\,y = 0 \tag{8}$$

heißt die zu der im Fall $h \neq 0$ *inhomogenen* Differentialgleichung (7) gehörende *homogene* Differentialgleichung. Die Lösungen von (7) und (8) stehen in einem ähnlichen Zusammenhang, wie dies von den inhomogenen und homogenen linearen Gleichungssystemen bekannt ist. Es sei f_1 eine *partikuläre* (fest gewählte) Lösung von (7). Ist f_0 eine beliebige Lösung von (8), so ist

$$f_1'(x) + g(x)\,f_1(x) = h(x), \qquad f_0'(x) + g(x)\,f_0(x) = 0,$$

und Addition zeigt, daß die Funktion $f(x) = f_1(x) + f_0(x)$ wieder eine Lösung von (7) ist.

Haben wir umgekehrt neben der partikulären Lösung f_1 eine beliebige andere Lösung f der inhomogenen Differentialgleichung (7), so ist die Differenz $f_0(x) = f(x) - f_1(x)$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung (8).

Man drückt den hiermit bewiesenen Sachverhalt stichwortartig wie folgt aus: Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ergibt sich, indem man zu einer partikulären Lösung dieser Differentialgleichung die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung addiert.

Wir beschäftigen uns zunächst mit der homogenen Differentialgleichung (8), deren Lösungen wir durch Trennung der Variablen ermitteln können. Ist die Anfangsbedingung $y(a) = b$ vorgegeben, so ist im Fall $b = 0$ die Nullfunktion $y = 0$ die einzige Lösung dieses Anfangswertproblems, und im Fall $b \neq 0$ erhalten wir

$$\int_b^y \frac{d\eta}{\eta} = -\int_a^x g(\xi)\,d\xi,$$

$$\ln\left|\frac{y}{b}\right| = -\int_a^x g(\xi)\,d\xi,$$

$$y = b\exp\left(-\int_a^x g(\xi)\,d\xi\right), \tag{9}$$

und dies ist offensichtlich auch für $b = 0$ die Lösung von (8) mit der Anfangsbedingung $y(a) = b$. Durch Variation von a und b erhalten wir die Lösungsmannigfaltigkeit von (8), die bei linearen homogenen Differentialgleichungen als *allgemeine Lösung* bezeichnet wird.

Aus (9) gewinnen wir durch einen Kunstgriff auch eine partikuläre Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung (7). Wir versuchen eine Lösung von (7) in der Form (9) anzusetzen, wobei wir die Konstante b durch eine Funktion $\beta(x)$ ersetzen. Der Ansatz

$$y = \beta(x) \exp\left(-\int_a^x g(\xi)\, d\xi\right) \tag{10}$$

wird daher auch als *Variation der Konstanten* bezeichnet. Wenn (10) eine Lösung von (7) sein soll, dann muß sich durch Einsetzen von (10) in (7) eine Identität ergeben, d. h., $\beta(x)$ muß mit der Abkürzung

$$G(x) := \exp\left(-\int_a^x g(\xi)\, d\xi\right) \tag{11}$$

der Bedingung

$$\beta'(x)\, G(x) + \beta(x)\, G'(x) + g(x)\, \beta(x)\, G(x) = h(x)$$

genügen. Wegen

$$G'(x) = -g(x)\, G(x)$$

ist dies mit

$$\beta'(x)\, G(x) = h(x),$$

$$\beta(x) = \beta(a) + \int_a^x \frac{h(t)}{G(t)}\, dt$$

äquivalent. Da es nur auf ein partikuläres Integral ankommt, können wir $\beta(a) = 0$ setzen und erhalten

$$\beta(x) = \int_a^x h(t) \exp\left(\int_a^t g(\xi)\, d\xi\right) dt. \tag{12}$$

Da $y = bG(x)$ die allgemeine Lösung der homogenen und $y = \beta(x)\, G(x)$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist, erhalten wir mit $y = G(x)\,\big(b + \beta(x)\big)$, d. h. mit

$$y = \exp\left(-\int_a^x g(\xi)\, d\xi\right)\left(b + \int_a^x h(t) \exp\left(\int_a^t g(\xi)\, d\xi\right) dt\right) \tag{13}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, die von den Parametern a und b abhängt. Offensichtlich ist $y(a) = b$, und folglich ist (13) für vorgegebene a, b die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' + g(x)\, y = h(x), \qquad y(a) = b. \tag{14}$$

Beispiel 3. Im Anfangswertproblem

$$y' + 3xy = -x, \qquad y(0) = 1$$

liegt eine lineare Differentialgleichung mit $g(x) = 3x$, $h(x) = -x$ vor. Wegen

$$\int_0^x 3\xi\, d\xi = \frac{3x^2}{2}, \quad \int_0^x (-t)\, e^{\frac{3t^2}{2}}\, dt = -\frac{1}{3}\left(e^{\frac{3x^2}{2}} - 1\right)$$

erhalten wir die Lösung

$$y = \frac{1}{3}\left(4e^{-\frac{3x^2}{2}} - 1\right).$$

Als weiteres Beispiel für eine Klasse elementar integrierbarer Differentialgleichungen skizzieren wir die Behandlung der *homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten reellen Koeffizienten*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \tag{15}$$

Hier führt der sogenannte *e-Ansatz*

$$y = e^{rx} \tag{16}$$

zum Ziel. Wegen $y^{(k)} = r^k e^{rx}$ gelangen wir durch Einsetzen in (15) zu

$$e^{rx}(r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n) = 0. \tag{17}$$

Wegen $e^{rx} \neq 0$ ist (16) genau dann eine Lösung der Differentialgleichung, wenn r eine Nullstelle des *charakteristischen Polynoms*

$$p(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n$$

ist. Besitzt dieses Polynom n verschiedene reelle Nullstellen $r_1, \ldots, r_n$, so ist jede der n Funktionen

$$y = e^{r_j x} \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{18}$$

und damit auch jede Linearkombination

$$y = c_1 e^{r_1 x} + \cdots + c_n e^{r_n x} \tag{19}$$

eine Lösung der Differentialgleichung. Die Lösung wird eindeutig festgelegt, wenn man nicht nur wie bei Differentialgleichungen erster Ordnung den Funktionswert

b_0 an der Stelle a, sondern auch die Funktionswerte b_i der ersten $n-1$ Ableitungen der Funktion an der Stelle a vorgibt. Diese Anfangsbedingungen lauten also

$$y(a) = b_0,\ y'(a) = b_1, \ldots, y^{(n-1)}(a) = b_{n-1}.$$

In (19) bzw. in die Ableitungen von (19) eingesetzt liefern sie ein Gleichungssystem von n linearen Gleichungen für die Koeffizienten $c_1, \ldots, c_n$. Es ist eindeutig lösbar, denn die Koeffizientendeterminante ist — von einem Faktor abgesehen — eine Vandermondesche Determinante.

Beispiel 4. Vorgegeben sei das Anfangswertproblem

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0,$$
$$y(0) = 3, \qquad y'(0) = -2, \qquad y''(0) = 6.$$

Das charakteristische Polynom $p(r) = r^3 - 2r^2 - r + 2$ hat die Nullstellen $r_1 = 2$, $r_2 = 1$, $r_3 = -1$, und

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^x + c_3e^{-x}$$

ist eine dreiparametrige Lösungsschar der Differentialgleichung. Wegen

$$y' = 2c_1e^{2x} + c_2e^x - c_3e^{-x},$$
$$y'' = 4c_1e^{2x} + c_2e^x + c_3e^{-x}$$

führen die Anfangsbedingungen zum Gleichungssystem

$$c_1 + c_2 + c_3 = 3,$$
$$2c_1 + c_2 - c_3 = -2,$$
$$4c_1 + c_2 + c_3 = 6$$

mit der Lösung $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 3$. Somit ist

$$y = e^{2x} - e^x + 3e^{-x}$$

Lösung des Anfangswertproblems.

Besitzt das charakteristische Polynom eine k-fache reelle Nullstelle r_0, so sind neben $y = e^{r_0x}$ auch die Funktionen $y = xe^{r_0x}, \ldots, y = x^{k-1}e^{r_0x}$ Lösungen der homogenen Differentialgleichung, wie man durch Einsetzen bestätigen kann. Wir gehen auf diesen Fall nicht näher ein.

Wir beschäftigen uns noch mit dem Auftreten einer komplexen Nullstelle $r = r_1 + ir_2$ ($r_1, r_2 \in \mathrm{R}$, $r_2 \neq 0$). Die Lösungsfunktion (16) ist dann komplex. Mit r ist auch die konjugiert komplexe Zahl $\bar{r}$ eine Nullstelle von $p(r)$. Wegen der Homogenität der Differentialgleichung sind dann auch die Funktionen

$$y = \frac{1}{2}\,(e^{rx} + e^{\bar{r}x}), \qquad y = \frac{1}{2i}\,(e^{rx} - e^{\bar{r}x}),$$

d. h. die reellen Funktionen

$$y = \operatorname{Re}(e^{rx}), \qquad y = \operatorname{Im}(e^{rx})$$

Lösungen der Differentialgleichung.

Beispiel 5. Für das Anfangswertproblem

$$y^{(4)} - y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -1, \quad y'''(0) = 1$$

besitzt das charakteristische Polynom $p(r) = r^4 - 1$ die Nullstellen $r_1 = 1, r_2 = -1, r_3 = i, r_4 = -i$. Daher ist

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \operatorname{Re}(e^{ix}) + c_4 \operatorname{Im}(e^{ix}),$$

d. h.

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

für alle $c_j \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung. Das Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten ergibt sich wegen

$$\begin{aligned} y' &= c_1 e^x - c_2 e^{-x} - c_3 \sin x + c_4 \cos x, \\ y'' &= c_1 e^x + c_2 e^{-x} - c_3 \cos x - c_4 \sin x, \\ y''' &= c_1 e^x - c_2 e^{-x} + c_3 \sin x - c_4 \cos x \end{aligned}$$

zu

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 3, \\ c_1 - c_2 + c_4 &= 1, \\ c_1 + c_2 - c_3 &= -1, \\ c_1 - c_2 - c_4 &= 1, \end{aligned}$$

und das Anfangswertproblem besitzt die (sogar eindeutig bestimmte) Lösung

$$y = e^x + 2 \cos x.$$

Die inhomogene Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten reellen Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = h(x)$$

kann nach dem Prinzip der Variation der Konstanten behandelt werden. Im Fall von n verschiedenen reellen Nullstellen hat man in (19) die Konstanten c_j durch Funktionen $\gamma_j(x)$ zu ersetzen. Diese Funktionen lassen sich bei vorgegebenen Anfangswerten so bestimmen, daß sich eine Lösung des Anfangswertproblems ergibt.

Als letztes Beispiel für eine elementare Lösungsmethode behandeln wir den sogenannten *Potenzreihenansatz*. Er stützt sich auf den folgenden Satz, den wir hier ohne Beweis mitteilen:

Satz. *Es seien g, g_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ in einer Umgebung von $a \in \mathsf{R}$ analytische Funktionen. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$y^{(n)} + g_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + g_1(x)\, y' + g_0(x)\, y = g(x), \tag{20}$$

$$y^{(k)}(a) = b_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1;\, b_k \in \mathsf{R}) \tag{21}$$

in einer Umgebung von a genau eine Lösung, und diese ist in a analytisch.

Auf Grund dieses Satzes kann man für die Lösung den Ansatz

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k \tag{22}$$

machen, wobei

$$c_k = \frac{y^{(k)}(a)}{k!}$$

gilt. Der Vergleich mit (21) zeigt, daß die ersten n Koeffizienten durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind, und zwar ist

$$c_k = \frac{b_k}{k!} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Die nachfolgenden Koeffizienten c_k der Potenzreihenentwicklung (22) können dann aus (20) mit der Methode des Koeffizientenvergleichs rekursiv berechnet werden.

Beispiel 6. Für das Anfangswertproblem

$$y'' + 2y' + x^2 y = e^x, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = \frac{1}{2}$$

machen wir den Ansatz

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

aus dem sofort $c_0 = 1$, $c_1 = \frac{1}{2}$ folgt. Wir setzen die Potenzreihe in die gegebene Differentialgleichung ein und erhalten

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, c_k x^{k-2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Wegen des Einzigkeitssatzes für die Potenzreihenentwicklung analytischer Funktionen müssen die Koeffizienten gleicher Potenzen x^n auf beiden Seiten überein-

stimmen. Dies führt zu den folgenden Gleichungen:

$$x^0\colon\quad 2\cdot 1\cdot c_2 + 2\cdot 1\cdot c_1 = \frac{1}{0!},$$

$$x^1\colon\quad 3\cdot 2\cdot c_3 + 2\cdot 2\cdot c_2 = \frac{1}{1!},$$

$$x^n\colon\quad (n+2)(n+1)\,c_{n+2} + 2(n+1)\,c_{n+1} + c_{n-2} = \frac{1}{n!} \qquad (n \geqq 2).$$

Wegen $c_0 = 1$, $c_1 = \frac{1}{2}$ berechnen wir rekursiv

$$c_2 = 0,\quad c_3 = \frac{1}{6},\quad c_4 = -\frac{1}{8},\quad c_5 = \frac{1}{30}, \ldots.$$

5.4. Aufgaben

1. Man zeichne die durch die Punkte (0, 0), (1, 0), (1, 1) gehenden Isoklinen der (nachweisbar nicht elementar integrierbaren) Differentialgleichung

$$y' = x^2 - y^2$$

vom Riccatischen Typ[1]) und verschaffe sich hiermit einen Überblick über den ungefähren Verlauf der Lösungskurven durch die oben genannten Punkte. Man berechne die ersten vier Näherungsfunktionen 5.2. (8) für die Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

2. Man bestimme alle Kurven $y = f(x)$, deren Tangentenabschnitt auf der Ordinatenachse gleich $x - y$ ist.

3. Man löse die Anfangswertprobleme

$$y' = \frac{y}{x}, \qquad y(3) = 4;$$

$$y' = \sqrt{1+y}, \qquad y(1) = 3;$$

$$y' - y\tan x = \cos x, \qquad y(0) = 1;$$

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V(t), \quad I(0) = I_0 \qquad (L, R \text{ konstant});$$

$$y''' - 7y' + 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2;$$

$$y'' + k^2 y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 2;$$

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0, \qquad y(0) = y'(0) = y''(0) = 3.$$

---

[1]) Die bedeutendsten Arbeiten von Jacopo Riccati (1676—1754) zur Theorie der Differentialgleichungen stammen aus den Jahren 1722/23 und sind möglicherweise durch ein Manuskript von Jakob Bernoulli zu der Differentialgleichung $y' = x^2 + y^2$ angeregt worden.

Namen- und Sachverzeichnis