



J. Böhm, W. Börner,  
E. Hertel, O. Krötenheerdt,  
W. Mögling, L. Stammler

## Geometrie

II. Analytische Darstellung  
der euklidischen Geometrie,  
Abbildungen als Ordnungsprinzip  
in der Geometrie,  
geometrische Konstruktionen



---

# Mathematik für Lehrer

## Band 7

---

Herausgegeben von:

W. Engel, S. Brehmer, M. Schneider, H. Wussing

Unter Mitarbeit von:

G. Asser, J. Böhm, J. Flachsmeyer, G. Geise, T. Glocke,  
K. Härtig, G. Kasdorf, O. Krötenheerdt, H. Lugowski,  
P.-H. Müller, G. Porath

---

# Studienbücherei

---

## Geometrie

II. Analytische Darstellung  
der euklidischen Geometrie,  
Abbildungen als Ordnungsprinzip  
in der Geometrie,  
geometrische Konstruktionen

Mit 124 Abbildungen

J. Böhm, W. Börner,  
E. Hertel, O. Krötenheerdt,  
W. Mögling, L. Stammler



VEB Deutscher Verlag  
der Wissenschaften  
Berlin 1975

**Verlagslektor: Dipl.-Math. E. Arndt**

**Umschlaggestaltung: R. Wendt**

**© VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975**

**Printed in the German Democratic Republic**

**Lizenz-Nr. 206 · 435/95/75**

**Gesamtherstellung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer“, 582 Bad Langensalza**

**LSV 1044**

**Bestellnummer 570 193 5**

**EVP 14,80 Mark**



# Inhalt

<b>2.</b>	<b>Analytische Darstellung der euklidischen Geometrie .....</b>	<b>9</b>
2.1.	Die Methode der analytischen Geometrie .....	9
2.1.1.	Analytische Geometrie und verwandte Disziplinen .....	9
2.1.2.	Abszissen auf einer Geraden .....	11
2.1.3.	Koordinaten in der Ebene und im Raum .....	12
2.1.4.	Höherdimensionale Räume .....	15
2.1.5.	RENÉ DESCARTES, PIERRE DE FERMAT und ihre Beiträge zur Heraus- bildung der analytischen Geometrie .....	16
2.1.6.	Aufgaben .....	18
2.2.	Vektoren, ihre Addition und Vervielfachung .....	18
2.2.1.	Die Komponenten eines Vektors .....	18
2.2.2.	Addition von Vektoren .....	20
2.2.3.	Vervielfachung von Vektoren .....	21
2.2.4.	Vektorraum und Punktraum .....	23
2.2.5.	Aufgaben .....	25
2.3.	Länge, Winkelgröße, Flächeninhalt, Volumen .....	25
2.3.1.	Das Skalarprodukt .....	25
2.3.2.	Betrag eines Vektors .....	27
2.3.3.	Orientierung von Vektorpaaren in der Ebene. Die Graßmannsche Er- gänzung .....	28
2.3.4.	Trigonometrische Funktionen. Elementarwinkelgröße .....	30
2.3.5.	Flächeninhalt, Größe orientierter Elementarwinkel .....	32
2.3.6.	Orientierung von Vektortripeln. Das Vektorprodukt .....	34
2.3.7.	Volumen .....	36
2.3.8.	Übertragung auf höherdimensionale Räume .....	37
2.3.9.	Aufgaben .....	37

2.4.	Lineare Parameterdarstellungen .....	38
2.4.1.	Geraden, Strahlen, Strecken; Teilverhältnis .....	38
2.4.2.	Ebenen, Halbebenen, Dreiecksflächen; Raum, Halbräume, Tetraederkörper .....	42
2.4.3.	Lineare Mannigfaltigkeiten .....	44
2.4.4.	Durchschnitt und lineare Hülle. Der Dimensionssatz .....	46
2.4.5.	Durchschnittsberechnung. Parallele und windschiefe Mannigfaltigkeiten .....	47
2.4.6.	Lagemöglichkeiten linearer Mannigfaltigkeiten im $R^2$ und $R^3$ .....	49
2.4.7.	Aufgaben .....	50
2.5.	Lineare Gleichungen .....	51
2.5.1.	Stellungsvektor, Hessesche Normalform, Lot; Neigungswinkel .....	51
2.5.2.	Parallele und konzentrische Hyperebenen .....	56
2.5.3.	Symmetriehyperebenen .....	59
2.5.3.1.	Mittelsenkrechte .....	59
2.5.3.2.	Winkelhalbierende und Mittelparallele .....	60
2.5.4.	Spezielle Hyperebenengleichungen .....	61
2.5.5.	Aufgaben .....	63
2.6.	Konvexe Polygone .....	64
2.6.1.	Konvexe Hülle, Schwerpunkt .....	64
2.6.2.	Die Sätze von Ceva und MENELAOS .....	65
2.6.3.	Sätze für Dreiecke .....	69
2.6.4.	Aufgaben .....	72
2.7.	Bewegungen und Koordinatentransformationen .....	73
2.7.1.	Invarianz von Skalarprodukten, Summen und Vielfachen .....	73
2.7.2.	Orthogonale Matrizen .....	74
2.7.3.	Verschiebungen, spezielle Spiegelungen und Drehungen .....	76
2.7.4.	Koordinatentransformationen .....	77
2.7.5.	Aufgaben .....	78
2.8.	Kurven zweiter Ordnung .....	79
2.8.1.	Der Kreis .....	79
2.8.2.	Ellipse, Parabel, Hyperbel .....	82
2.8.3.	Diskussion der Kurven zweiter Ordnung .....	87
2.8.4.	Tangenten, Pol und Polare .....	89
2.8.5.	Aufgaben .....	94
2.9.	Ausblick auf weitere Themen der analytischen Geometrie .....	95
8.	<b>Abbildungen als Ordnungsprinzip in der Geometrie .....</b>	<b>97</b>
3.1.	Das Erlanger Programm .....	97
3.2.	Bewegungen .....	98
3.3.	Ähnlichkeitstransformationen .....	103
3.3.1.	Zentralstreckungen .....	103
3.3.2.	Allgemeine Ähnlichkeitstransformationen .....	110
3.3.3.	Aufgaben .....	122

3.4	Affine Transformationen .....	122
3.4.1.	Orthogonalstreckungen .....	123
3.4.2.	Analytische Definition der ebenen affinen Abbildungen .....	127
3.4.3.	Synthetische Definition und konstruktive Behandlung der affinen Abbildungen .....	129
3.4.4.	Fixpunkte von Affinitäten .....	130
3.4.5.	Axiale Affinitäten .....	131
3.4.6.	Der Inhaltsmaßstab von Affinitäten .....	136
3.4.7.	Fixpunktkonstruktionen .....	138
3.4.8.	Die Affinitäten als Gruppe .....	141
3.4.9.	Ausblick auf singuläre affine Abbildungen .....	142
3.4.10.	Ausblick auf affine Abbildungen in höherdimensionalen Räumen .....	143
3.4.11.	Aufgaben .....	144
3.5.	Projektive Transformationen .....	145
3.5.1.	Zentralkollineationen .....	146
3.5.2.	Ausblick auf Kollineationen .....	155
3.5.3.	Aufgaben .....	156
3.6.	Spiegelungen an Kreisen .....	156
3.6.1.	Aufgaben .....	162
4.	<b>Theorie der geometrischen Konstruktionen .....</b>	<b>163</b>
4.1.	Einleitung und historische Bemerkungen .....	163
4.2.	Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal .....	169
4.2.1.	Konstruktion von Strecken der Maßzahlen $a + b$ , $a - b$ , $n \cdot a$ , $a/n$ , $a \cdot b$ , $a/b$ , $\sqrt{a}$ aus Strecken der Maßzahlen $1$ , $a$ , $b$ .....	169
4.2.2.	Über die Behandlung von Konstruktionsaufgaben .....	172
4.2.3.	Der I. Teil der Behandlung jeder Konstruktionsaufgabe .....	173
4.2.4.	Der II. Teil der Behandlung jeder Konstruktionsaufgabe .....	175
4.2.5.	Einige Beispiele für Konstruktionsaufgaben .....	176
4.2.6.	Das Berührungsproblem des APOLLONIUS .....	186
4.3.	Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal in algebraischer Behandlung .....	188
4.3.1.	Algebraische Fassung geometrischer Konstruktionsprobleme .....	188
4.3.2.	Entscheidung über die Lösbarkeit geometrischer Konstruktionsaufgaben durch algebraische Betrachtungen .....	192
4.3.3.	Konstruierbare Zahlen und zwei Hilfssätze aus der Algebra .....	194
4.4.	Die Unlösbarkeit einiger Konstruktionsaufgaben mit Zirkel und Lineal .....	197
4.4.1.	Die „Verdoppelung des Würfels“ (auch das „Delische Problem“ genannt) .....	197
4.4.2.	Die „Dreiteilung des Winkels“ .....	198
4.4.3.	„Konstruktion des regelmäßigen 7-Ecks“ .....	199
4.4.4.	„Konstruktion eines Dreiecks aus $a$ , $b$ , $w_a$ “ .....	200
4.4.5.	„Konstruktion eines Dreiecks aus $w_a$ , $w_b$ , $w_c$ “ .....	202
4.4.6.	Eine vollständige Aufzählung aller lösbaren und unlösbaren Dreiecks-konstruktionsaufgaben aus Seiten, Winkeln, Höhen, Seitenhalbierenden und Winkelhalbierenden .....	203

4.5.	Konstruktionen mit anderen Hilfsmitteln .....	205
4.5.1.	Eine Winkeldreiteilung .....	206
4.5.2.	Die Mohr-Mascheroni-Konstruktionen mit dem Zirkel allein .....	207
4.5.3.	Konstruktionen mit dem Lineal allein .....	208
4.5.4.	Konstruktionen in begrenzter Ebene .....	209
4.5.5.	Bemerkungen über das Parallellineal, das Winkellineal und das Einschiebelineal .....	210
	<b>Literatur</b> .....	212
	<b>Namen- und Sachverzeichnis</b> .....	214

## 2. Analytische Darstellung der euklidischen Geometrie

### 2.1. Die Methode der analytischen Geometrie

#### 2.1.1. Analytische Geometrie und verwandte Disziplinen

Die Methode der analytischen Geometrie besteht darin, *mittels eines Koordinatensystems eine bijektive Abbildung zwischen geometrischen Objekten und Objekten, die aus Zahlen gebildet werden, herzustellen*. Dadurch entsteht eine neuartige Möglichkeit, im Bereich der Geometrie Schlüsse zu ziehen: Man geht von den geometrischen Voraussetzungen eines Schlusses zunächst durch die genannte Abbildung ( $\kappa$ ) zu Voraussetzungen für Zahlen über. Aus diesen gewinnt man nach den für Zahlen geltenden Gesetzen Schlußfolgerungen ( $\rho$ ), die man abschließend in die Geometrie zurück überträgt ( $\kappa^{-1}$ ) (vgl. Abb. 2.1).

Der Name „*analytische Geometrie*“ für dieses Verfahren ist mit dem heutigen mathematischen Sprachgebrauch des Wortes „analytisch“ nicht gut zu erklären. Er lehnt sich einerseits an das der Philosophie entnommene Begriffspaar „analytisch“–„synthetisch“ an, spiegelt also die Vorstellung wider, daß das Schlußfolgern für Zahlen mehr rechnerisch-zergliedernd (analysierend) sei, während ein rein geometrisches Schließen mehr konstruktiv (synthetisierend) vorgehe. So nennt man auch heute noch geometrische Verfahren dann „*synthetisch*“, wenn sie ohne Koordinaten, nur mit geometrischen Objekten, Sätzen und Konstruktionen arbeiten.

Andererseits entspricht der Name „analytische Geometrie“ dem mathematischen Sprachgebrauch aus der Zeit (etwa bis 1850), als man alle zahlenmäßigen Untersuchungen noch gemeinsam „*Analysis*“ nannte. Man unterschied darin die „*analysis finitorum*“ („Untersuchung des Endlichen“, arithmetisch-algebraische Aussagen) von der „*analysis infinitorum*“ („Untersuchung des Unendlichen“; daraus entstand – ursprünglich also als Abkürzung – der Name *Analysis* für Differential-, Integralrechnung usw.).

Hiernach könnte man daran denken, die analytische Geometrie heute etwa „*algebraische Geometrie*“ zu nennen, zumal sich diejenigen geometrischen Untersuchungen und Verallgemeinerungen, die wesentlich von der *Analysis* (im heutigen Sinne) Gebrauch machen, zu einer eigenständigen Disziplin, der *Differentialgeometrie*, ausgebildet

haben. Jedoch ist der Name *algebraische Geometrie* bereits für eine andere neuere Disziplin üblich geworden. Diese ist aus der algebraischen Diskussion von sogenannten Kurven und Flächen höheren als zweiten Grades entstanden; in ihr werden (oft weitgehend) verallgemeinerte „geometrische“ Objekte mit modernen algebraischen und topologischen Methoden untersucht.

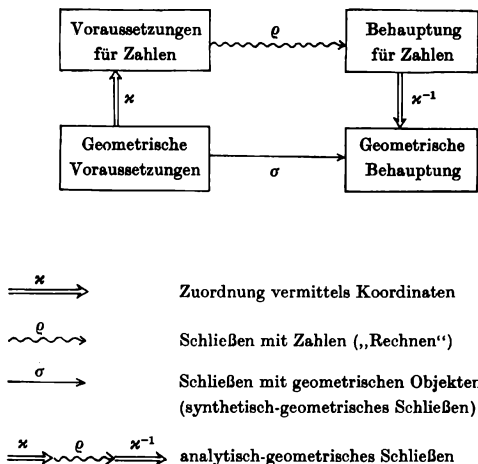


Abb. 2.1

Daher wird auch heute noch die traditionelle Bezeichnung „analytische Geometrie“ beibehalten für die — unmittelbar an das Einführen von Koordinaten anschließende — Theorie der sogenannten Gebilde ersten und zweiten Grades. Darin benötigt man als „analytischen“ (d. h. arithmetisch-algebraischen) Bestandteil hauptsächlich die *lineare Algebra* mit ihren Hilfsmitteln (vgl. das schematisch vereinfachte Diagramm Abb. 2.2).

In den folgenden Abschnitten soll nach Gewinnung der Koordinaten möglichst schnell mit Hilfe des Vektorbegriffs der Anschluß an die lineare Algebra hergestellt werden. Die Aussagen über lineare Unterräume (Vektorräume), Gleichungssysteme, Matrizen, Determinanten, skalares und vektorielles Produkt aus MfL Band 3 sollen dann für das weitere analytisch-geometrische Arbeiten genutzt

werden. Die in MfL Band 3 zur Veranschaulichung vorgreifend eingefügten geometrischen Bemerkungen werden dagegen im folgenden nicht vorausgesetzt.

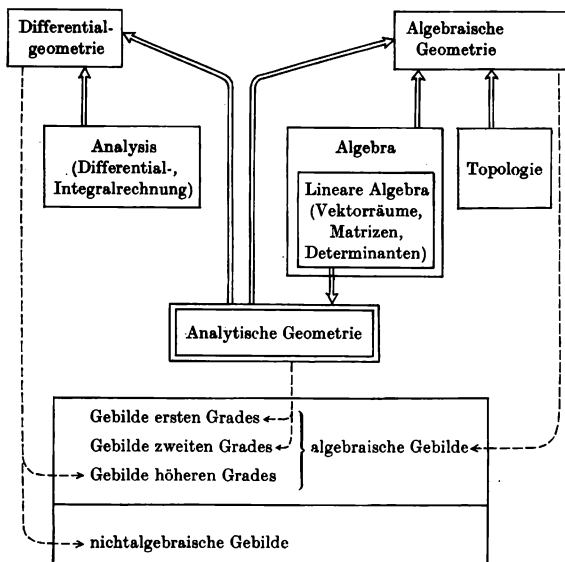


Abb. 2.2

### 2.1.2. Abszissen auf einer Geraden

Für die Geometrie auf einer Geraden  $g$  vermittelt bereits der Satz von der Zahlengeraden (vgl. 1.1.4.) eine bijektive Abbildung  $\alpha: g \rightarrow \mathbb{R}$ . Die in jenem Satz willkürlich auf  $g$  zu wählenden Punkte  $O, E$  nennen wir *Anfangspunkt* (*Nullpunkt* oder *Ursprung*) bzw. *Einheitspunkt* (*Einspunkt*). Man nennt das System aus  $g$  und den Punkten  $O, E$  (sowie, zuweilen noch mit in die Bezeichnung einbezogen,

der Abbildung  $\kappa$ ) ein *Koordinatensystem* von  $g$ . Darin heißt  $g$  die *Achse*, ferner  $OE^+$ ,  $OE^-$  die *positive* bzw. *negative Halbachse* des Koordinatensystems.

Für  $P \in g$  heißt die Zahl  $\kappa(P)$  die *Koordinate* oder *Abszisse* von  $P$ . Besonders einfach läßt sie sich mit Hilfe des Begriffes der *gerichteten Strecke*  $AB$  (Strecke mit festgelegter Reihenfolge der Endpunkte  $A, B \in g$ ) und ihrer (*vorzeichenfähigen*) *Länge*  $m(AB)$  beschreiben. Diese Länge  $m(AB)$  ist dadurch definiert, daß ihr Betrag  $|m(AB)| := |AB|$  gesetzt wird und daß  $m(AB)$  im Fall  $A \neq B$ , d. h.  $|AB| \neq 0$ , positiv bzw. negativ sein soll, je nachdem, ob die Strahlen  $OE^+$ ,  $AB^+$  gleichorientiert bzw. entgegengesetzt orientiert sind. Wir bemerken, daß hiernach für  $A, B, A', B' \in g$  genau dann  $m(AB) = m(A'B')$  gilt, wenn die Vektorengleichheit  $\mathfrak{v}(AB) = \mathfrak{v}(A'B')$  besteht; denn die Verschiebungen (Vektoren) sind die einzigen kongruenz- und orientierungserhaltenden Abbildungen in  $g$ .

Nach der Definition von  $\kappa$  in 1.1.4. ergibt sich nun: Die Abszisse von  $P (\in g)$  ist die Maßzahl von  $m(OP)$ , bezogen auf die Maßeinheit  $m(OE)$  ( $= |OE|$ ). Um diesen Zusammenhang noch übersichtlicher zu formulieren, pflegt man in der analytischen Geometrie den folgenden „abstrakten Standpunkt der Längenmessung“ einzunehmen: Die Maßeinheit  $|OE|$  wird der Zahl 1 „gleichgesetzt“. Damit hat man *jede Länge*  $|AB|$  bzw.  $m(AB)$  mit ihrer Maßzahl „gleichgesetzt“. Man „schreibt“ also die bijektive Abbildung  $L \rightarrow \mathbb{R}$  von der Menge  $L$  aller Längen  $m(AB)$  auf die Menge  $\mathbb{R}$ , die jeder Länge ihre Maßzahl zuordnet, „als Identität“  $L = \mathbb{R}$ . Ein solcher Vorgang des *Identifizierens* dient in der Mathematik auch sonst zuweilen zur Vereinfachung der Ausdrucksweise. Von diesem „abstrakten Standpunkt“ aus können wir abschließend feststellen: Die Abszisse  $x := \kappa(P)$  von  $P (\in g)$  ist

$$x = m(OP). \quad (1)$$

### 2.1.3. Koordinaten in der Ebene und im Raum

In der analytischen Geometrie der Ebene werden die Punkte auf Zahlenpaare  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  abgebildet, in der analytischen Geometrie des Raumes auf Zahlentripel  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Um die Gewinnung dieser Abbildungen weitgehend gemeinsam zu fassen, bezeichnen wir die Ebene mit  $\mathbb{R}^2$  und den Raum mit  $\mathbb{R}^3$ . Unter Verwendung eines Buchstabens  $n$ , der die Werte 2 und 3 (später, ab 2.1.4., auch größere Werte) annimmt, können wir die Zielstellung einheitlich angeben: Die Punkte des  $n$ -dimensionalen euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^n$  sollen auf  $n$ -Tupel  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  abgebildet werden. (Das hochgestellte  $n$  bedeutet bei  $\mathbb{R}^n$  die Dimension, bei  $\mathbb{R}^n$  die Anzahl der „Faktoren“ in  $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ .) Der Leser formuliere jede von jetzt an auftretende Aussage über den  $\mathbb{R}^n$  in diesem Sinne einmal für  $n = 2$ , einmal



für  $n = 3$ . (Auch der Fall  $n = 1$ , also die Gerade  $R^1$ , läßt sich den meisten folgenden Aussagen unterordnen, häufig allerdings erst in sinngemäßer Vereinfachung.)

Wir wählen im  $R^n$  eine Gerade  $g_1$  und auf ihr zwei Punkte  $O, E_1 (\neq O)$ . Wie in 2.1.2. setzen wir  $|OE_1| = 1$ . Ist  $n > 1$ , so gibt es im  $R^n$  eine zu  $g_1$  senkrechte Gerade  $g_2$  durch  $O$ . Ist  $n = 3$ , so gibt es im  $R^n$  eine zu  $\varepsilon(g_1g_2)$  senkrechte Gerade  $g_3$  durch  $O$ . Auf jeder der Geraden  $g_\nu$  ( $\nu = 2, 3$ ) gibt es genau zwei Punkte im Abstand 1 von  $O$ ; je einen von diesen wählen wir und bezeichnen ihn mit  $E_\nu$ . Der Punkt  $O$  heißt *Anfangspunkt* (*Ursprung*), die Gerade  $g_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ) jeweils die  $\nu$ -te *Achse*, der Punkt  $E_\nu$  ihr *Einheitspunkt*. Nennen wir die Strahlen  $OE_\nu^+, OE_\nu^-$  *positive* bzw. *negative Halbachse* von  $g_\nu$ , so können wir auf der Geraden  $g_\nu$  mit dieser Orientierung wieder (vorzeichenfähige) Längen  $m(AB)$  gerichteter Strecken  $AB \subset g_\nu$  definieren. Das System aus  $O$ , den  $g_\nu$ , den  $E_\nu$  (zuweilen auch noch aus der zu definierenden Abbildung  $\kappa$ ) heißt ein *Koordinatensystem* des  $R^n$ .

Ist nun  $P \in R^n$  gegeben, so wird als Bild  $\kappa(P)$  das folgendermaßen gewonnene  $n$ -Tupel  $(x_1, \dots, x_n)$  definiert: Im Fall  $n = 2$  (Abb. 2.3) sei  $u := g_1$  gesetzt. Die zu  $g_2$  parallele Gerade  $h$  durch  $P$  schneidet  $u$  in genau einem Punkt  $Q$ . Seine Koordinate (bezüglich des Koordinatensystems mit dem Anfangspunkt  $O$  und dem

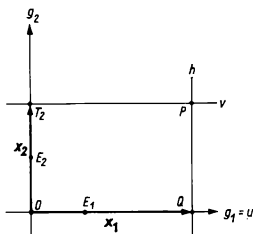


Abb. 2.3

Einheitspunkt  $E_1$  auf der Achse  $g_1$ ) sei  $x_1$ . Die zu  $u$  parallele Gerade  $v$  durch  $P$  schneidet  $g_2$  in genau einem Punkt  $T_2$ . Seine Koordinate (bezüglich des Koordinatensystems mit  $O, E_2$  auf  $g_2$ ) sei  $x_2$ . Damit sind  $x_1, x_2$  definiert.

Im Fall  $n = 3$  (Abb. 2.4) sei  $u := \varepsilon(g_1g_2)$ . Die zu  $g_3$  parallele Gerade  $h$  durch  $P$  schneidet  $u$  in genau einem Punkt  $Q$ . Sein Koordinatenpaar (bezüglich des Koordinatensystems mit dem Anfangspunkt  $O$  und den Einheitspunkten  $E_1, E_2$  auf den Achsen  $g_1, g_2$ ) sei  $(x_1, x_2)$ . Die zu  $u$  parallele Ebene  $v$  durch  $P$  schneidet  $g_3$  in genau einem Punkt  $T_3$ . Seine Koordinate (bezüglich des Koordinatensystems mit  $O, E_3$  auf  $g_3$ ) sei  $x_3$ . Damit sind  $x_1, x_2, x_3$  definiert.

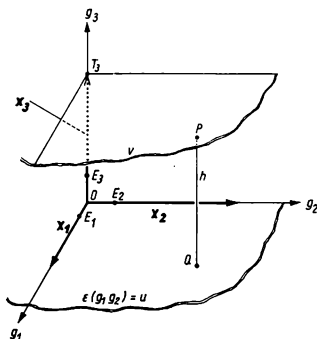


Abb. 2.4

Den Beweis, daß  $\kappa$  bijektiv ist, kann man schrittweise für  $n = 2$  und dann  $n = 3$  erbringen. Es genügt dazu (vgl. 2.1.6., Aufgabe 1) nachzuweisen, daß der  $R^n$  durch die in beiden Fällen genannten Konstruktionen bijektiv auf die Menge aller Paare  $(Q, T_n)$  mit  $Q \in u$ ,  $T_n \in g_n$  abgebildet wird. Nun wird in der Tat ein solches Paar  $(Q, T_n)$  genau dann durch diese Konstruktionen aus einem Punkt  $P \in R^n$  erhalten, wenn  $P$  sowohl auf der zu  $g_n$  parallelen Geraden  $h$  durch  $Q$  als auch auf der zu  $u$  parallelen Geraden bzw. Ebene  $v$  durch  $T_n$  liegt. Da  $h$  und  $v$  genau einen Schnittpunkt haben, ist hiermit die behauptete Bijektivität bewiesen. Die Zahlen  $x_1, x_2, x_3$  heißen *erste, zweite, dritte Koordinate* (oder *Abszisse, Ordinate, Applikate*) von  $P$ . Zur Vereinfachung schreibt man auch  $x := x_1, y := x_2, z := x_3$ .

Um (1) zu verallgemeinern, nennen wir im Fall  $n = 2$  den Punkt  $Q$  auch  $T_1$  (Abb. 2.5). Dann ist  $OT_1PT_2$  das achsenparallele Rechteck mit  $OP$  als Diagonale. (Wir gebrauchen dabei die Bezeichnung „Rechteck“ auch in Entartungsfällen  $P \in g_1$  oder  $P \in g_2$ . Ähnliches gilt schon für die „Strecke“  $OP$  in (1), wo  $P = O$  zugelassen war, sowie auch später für den „Quader“.) Ferner bestimmen wir im Fall  $n = 3$  (Abb. 2.6) analog wie eben das achsenparallele Rechteck  $OT_1QT_2$ , wonach  $T_1, T_2, T_3$  Eckpunkte der von  $O$  ausgehenden Kanten in dem achsenparallelen Quader mit  $OP$  als Körperdiagonale sind. Aus der Betrachtung der so ermittelten Rechtecke bzw. Quader folgt

**Satz 1.** Die  $v$ -te Koordinate eines Punktes  $P \in R^n$  ist

$$x_v = m(OT_v),$$

wobei  $T_v$  der Fußpunkt des Lotes von  $P$  auf  $g_v$  ist.

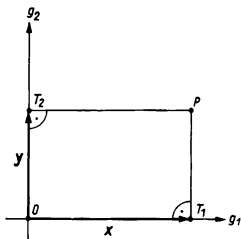


Abb. 2.5

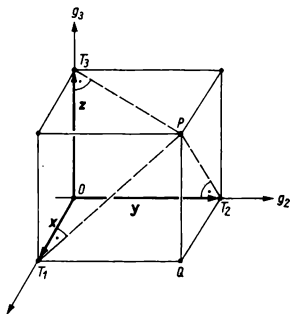


Abb. 2.6

Zuweilen schreibt man  $\kappa: R^n \rightarrow R^n$  als „Identifikation“, also statt  $\kappa(P) = (x_1, \dots, x_n)$  bzw.  $P = \kappa^{-1}(x_1, \dots, x_n)$  einfach  $P = (x_1, \dots, x_n)$ . Wir wollen diese erneute Identifikation begrifflich und in den Formeln nicht vornehmen, sprachlich allerdings statt der Ausdrucksweise „der Punkt mit dem Koordinaten- $n$ -Tupel  $(x_1, \dots, x_n)$ “ die kürzere Wendung „der Punkt  $(x_1, \dots, x_n)$ “ zulassen. In der Schule wird noch die Schreibweise  $P(x_1, \dots, x_n)$  gebraucht, d. h. die Zuordnung  $\kappa$  durch bloßes Hintereinanderschreiben ausgedrückt.

#### 2.1.4. Höherdimensionale Räume

Die Abbildung von Punkten auf  $n$ -Tupel ( $n = 1, 2, 3$ ) kann man zum Anlaß nehmen, auch für  $n > 3$  den Begriff des  *$n$ -dimensionalen euklidischen Raumes*  $R^n$  zu bilden. Seine Punkte werden durch  $n$ -Tupel  $(x_1, \dots, x_n)$  charakterisiert; wir sprechen wieder von „dem Punkt mit dem Koordinaten- $n$ -Tupel  $(x_1, \dots, x_n)$ “ oder kürzer von „dem Punkt  $(x_1, \dots, x_n)$ “. Zum geschichtlichen Auftreten der Betrachtung höherdimensionaler Räume vgl. MfL Band 4, 1.5.

Im folgenden ergibt sich nunmehr für das Verständnis von Aussagen über den  $R^n$  außer den beiden Möglichkeiten  $n = 2, 3$  noch eine dritte: Wird ein geometrischer Begriff im  $R^n$  ( $n \leq 3$ ) analytisch charakterisiert und bleibt der Wortlaut dieser Charakterisierung auch für  $n > 3$  sinnvoll, so fasse man ihn für  $n > 3$  als *Definition* eines analogen Begriffes im  $R^n$  ( $n > 3$ ) auf. Das weitere analytisch herleitende Arbeiten mit den so charakterisierten ( $n \leq 3$ ) bzw. definierten ( $n > 3$ ) Begriffen erfolgt dann für alle  $n$  einheitlich. Jedoch sei dem Leser geraten, auch dabei stets die Fälle  $n = 2, 3$  zu vermerken.

Die folgenden einfachen Beispiele mögen diese Arbeitsweise erläutern: Als Folgerung aus Satz 1 ergibt sich, daß man im  $R^n$  ( $n \leq 3$ ) die  $v$ -te Achse  $g_v$  charakterisieren kann als

$$g_v = \{x^{-1}(x_1, \dots, x_n) : \mu \neq v \Rightarrow x_\mu = 0\}. \quad (2)$$

Hierauf definieren wir: Im  $R^n$  ( $n > 3$ ) heißt die Menge (2) die  $v$ -te Achse des Koordinatensystems. Ebenso läßt sich die Aussage, der Punkt auf  $g_v$  mit  $x_v = 1$  sei der Einheitspunkt der  $v$ -ten Achse, im  $R^n$  ( $n \leq 3$ ) aus Satz 1 folgern, im  $R^n$  ( $n > 3$ ) aber als Definition des Begriffes Einheitspunkt verwenden. Für alle  $n \geq 2$  einheitlich kann man aus (2) z. B. die Aussage herleiten, daß  $g_1 \cap \dots \cap g_n$  der Punkt  $(0, \dots, 0)$  ist. Er ist der Anfangspunkt oder Ursprung des Koordinatensystems (dies gilt wieder für  $n \leq 3$  als Satz, für  $n > 3$  als Definition).

### 2.1.5. René Descartes, Pierre de Fermat und ihre Beiträge zur Herausbildung der analytischen Geometrie

Die Zeit, in der sich der Grundgedanke der analytischen Geometrie herausbildete, läßt zugleich erkennen, welche gesellschaftlichen Bedingungen die Entstehung dieses mathematischen Grundgedankens ermöglichten und erforderten. Es war die Zeit des erstarkenden Frühkapitalismus, in der ein rascher Aufschwung der Produktivkräfte sowohl durch verstärkte Arbeitsteilung als auch durch bis dahin ungekannte Ausnutzung von Naturkräften und Naturgesetzen stattfand. Für diese Entwicklung typisch sind die Manufakturen und die zur Verrichtung zahlreicher mechanischer Leistungen konstruierten Maschinen. Im Interesse der sich formierenden neuen Klasse der Bourgeoisie erhielten die Naturwissenschaften einen Aufschwung, der sie in großer Breite über den seit der Antike erreichten Stand hinauswachsen ließ. Man begann die Grundgesetze der Mechanik, Kinematik, Optik usw. umfassender zu formulieren und anzuwenden. Es zeigte sich, daß hierfür eine Mathematisierung der Naturwissenschaft erforderlich war und daß innerhalb der Mathematik vor allem die neuartigen praxisbezogenen Anforderungen an die Geometrie von dieser die Gewinnung einheitlicher Methoden und eine engere Verbindung zu den übrigen mathematischen Disziplinen verlangten.

Vorformen und Elemente der analytischen Geometrie fanden sich z. B. bei der Behandlung der Kegelschnitte durch APOLLONIUS VON PERGA (etwa 260–170 v. u. Z.), ferner bei philosophisch-scholastisch orientierten grafischen Darstellungen variabler „Quantitäten“ durch N. ORESME (1323–1382), bei kinematischen und astronomischen Kurvenuntersuchungen durch J. KEPLER (1571–1630), G. GALILEI (1564–1642), E. TORRICELLI (1608–1647) u. a. Eine wichtige Voraussetzung für das Entstehen der analytischen Geometrie waren auch die in der Behandlung allgemeiner Gleichungstypen unter Verwendung von Buchstabensymbolen seit F. VIÈTE (latinisiert: VIETA, 1540–1603) in der Algebra erreichten Fortschritte.

Nach diesen Vorläufern haben wir als Begründer der analytischen Geometrie R. DESCARTES und P. DE FERMAT anzusehen. RENÉ DESCARTES (latinisiert: CARTESIUS), 1596 in Frankreich geboren, hatte einige Zeit im Heer MORITZ VON ORANIENS am Dreißigjährigen Krieg teilgenommen, lebte dann in den von den Spaniern befreiten Niederlanden und starb 1650 in Schweden. Im Jahr 1637 veröffentlichte er anonym ein Buch „Discours de la méthode“, in dem er die Methode einer einheitlichen wissenschaft-

lichen Erkenntnis darzulegen versuchte. Anders als die scholastisch-kirchliche Philosophie war sie (*idealistisch*-) *rational fundiert* (cogito, ergo sum: ich denke, also bin ich). In dieses allgemein philosophische Prinzip ordnete nun DESCARTES im letzten Teil des „Discours“ Beispiele geometrischer Untersuchungen nach dem einheitlichen Verfahren ein, *vermittels Strecken*-(Koordinaten)-*relationen* geometrische Örter als Geraden, Kegelschnitte usw. nachzuweisen oder durch Gleichungen höheren Grades zu kennzeichnen.

Kurz zuvor hatte PIERRE DE FERMAT eine Abhandlung „*Ad locos planos et solidos isagoge*“ (Einführung in die Theorie der Geraden, Kreise (= Kurven der ebenen Elementargeometrie) und Kegelschnitte (= Schnitte des räumlichen Kegels)) verfaßt, die aber erst 1679 postum veröffentlicht wurde. FERMAT lebte 1601–1665 als Jurist in Toulouse. Er ist bedeutend als Vorläufer der Differential- und Integralrechnung, in zahlentheoretischen Untersuchungen sowie (zusammen mit PASCAL) als Begründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung. In der „Isagoge“ bringt er das Prinzip, *Kurven durch Gleichungen zu erfassen*, explizit zum Ausdruck; algebraisch-bezeichnungstechnisch geht er nicht wesentlich über die Vietaschen Verbesserungen hinaus. DESCARTES' „Discours“ hingegen enthält wichtige Neuerungen des formalisierten Ausdrucks (z. B. die Exponentenschreibweise  $x^n$  und  $\sqrt[n]{x}$ ). Ferner befreit er sich von der Vorstellung, Potenzen  $x^2$  oder  $x^3$  könnten nur durch Flächeninhalte bzw. Volumina geometrisch gedeutet werden. Erst damit ergab sich ja die Möglichkeit, in einer Gleichung wie z. B.  $y = x^2$  sowohl  $x$  als auch  $y$  durch Längen (Koordinaten) darzustellen.

Wie FERMAT führte auch DESCARTES bereits Tangenten- und Flächeninhaltsuntersuchungen an Kurven höheren Grades durch, z. B. an dem sogenannten *kartesischen Blatt*  $x^3 + y^3 - cxy = 0$ . Bei der Untersuchung der Lösungsmenge algebraischer Gleichungen überwindet er die vor ihm zum Teil immer noch auftretende Nichtbeachtung negativer Lösungen. Er formuliert einen heute *kartesische Zeichenregel* genannten Satz zur Abschätzung der Anzahlen positiver und negativer Lösungen. An DESCARTES erinnern die Bezeichnungen *kartesische Koordinaten* und (wegen der dabei auftretenden Menge  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ) *kartesisches Produkt*.

Aus der weiteren Geschichte der analytischen Geometrie können hier nur wenige Stichworte genannt werden. Das Prinzip, Kurveneigenschaften allein aus der Gleichung zu gewinnen, setzte sich in der Darstellungsweise erst allmählich durch. Bei NEWTON finden wir als ein in sich geschlossenes Beispiel dieser Art die Klassifizierung aller Kurven dritter Ordnung. In EULERS „*Introductio in analysin infinitorum*“ (Einführung in die Analysis unendlich kleiner Größen; 1748) finden sich zahlreiche analytisch-geometrische Kurven- und Flächenuntersuchungen. Die von LEIBNIZ und G. CRAMER (1704–1752) eingeführten *Determinanten* spielten in der analytischen Geometrie eine Rolle, sobald man dort zur Verwendung von Gleichungssystemen übergang. Einige besonders übersichtlich zu formulierende Ergebnisse der analytischen und algebraischen Geometrie in dieser Hinsicht verdanken wir O. HESSE (1811–1874). Im weiteren Verlauf erkannte man die Möglichkeit, die Gesetze linearer Gleichungssysteme abstrakt als ein Rechnen mit *Matrizen* wiederzugeben. Grundlegende matrizen-theoretische Sätze stammen von A. CAYLEY (1821–1895) und J. J. SYLVESTER (1814–1897). Etwas eher begann die *Herausbildung des Vektorbegriffs* in zwei zunächst völlig getrennt verlaufenden Entwicklungslinien. Die eine knüpft an die von W. R. HAMILTON (1805–1865) eingeführten Quaternionen an, geht also zur geometrischen Anwendung von zunächst mehr algebraisch orientierten Vorstellungen aus. Die andere Entwicklung knüpft an H. GRASSMANN'S (1809–1877) Buch „*Lineale Ausdehnungslehre*“ an. Darin werden Operationen mit Vektoren (und Verallgemeinerungen) sogleich rein geometrisch definiert. V. PONCELET (1788–1867), A. F. MÖBIUS

(1790–1868), J. PLÜCKER (1801–1868) entwickelten, auch mit *komplexen* Koordinaten, die *mehrdimensionale* und sogenannte *projektive* Geometrie. Im 20. Jh. entstanden Theorien *abstrakter Vektorräume* sowie neuartige Anwendungen, z. B. *Optimierungsverfahren*.

## 2.1.6. Aufgaben

1. Man führe den Beweis der Bijektivität von  $\kappa$  für  $n = 2, 3$  schrittweise mit Hilfe der in 2.1.3. gezeigten Bijektion  $R^n \rightarrow u \times g_n$  durch.
2. Man beweise aus Satz 1, daß im  $R^3$  die Menge  $\{\kappa^{-1}(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0\}$  die Ebene  $\varepsilon(g_2g_3)$  ist.
3. Man beweise aus Aufgabe 2 und einer analogen Darstellung von  $\varepsilon(g_1g_3)$ , daß  $\varepsilon(g_1g_3) \cap \varepsilon(g_2g_3) = g_3$  gilt.
4. Man beweise aus Satz 1, daß im  $R^n$  ( $n = 2, 3$ ) die in 2.1.3. genannte Gerade bzw. Ebene  $v$  die Menge  $\{\kappa^{-1}(z_1, \dots, z_n) : z_n = x_n\}$  ist.

## 2.2. Vektoren, ihre Addition und Vervielfachung

### 2.2.1. Die Komponenten eines Vektors

Nachdem wir die Punkte des  $R^n$  analytisch-geometrisch erfaßt haben, wollen wir dasselbe für die Vektoren durchführen. Das ist deswegen leicht möglich, weil man den  $R^n$  bijektiv auf die Menge aller Vektoren des  $R^n$  abbilden kann, indem man jeweils einem Punkt  $P \in R^n$  den Vektor  $p := v(OP)$  zuordnet (das ist diejenige Verschiebung  $p$ , die  $O$  in  $P$  überführt). Wir nennen  $p$  den *Ortsvektor* von  $P$  (bezüglich des Koordinatensystems mit dem Ursprung  $O$ ). Das Koordinaten- $n$ -Tupel  $(x_1, \dots, x_n)$  von  $P$  nennen wir das  $n$ -Tupel der *Komponenten* von  $p$  und schreiben

$$p = \langle x_1, \dots, x_n \rangle. \quad (1)$$

In der Literatur findet sich u. a. auch die Schreibweise  $p = \{x_1, \dots, x_n\}$ , die wir hier wegen der Verwechslungsmöglichkeit mit der Bezeichnung einer Menge (vgl. MfL Band 1, 1.3.) vermeiden. Später, in 2.2.4.(2), können wir noch eine andere Schreibweise einführen, die ebenfalls weithin üblich ist. Zuweilen wird in der Literatur ein Vektor  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  mit seinem Komponenten- $n$ -Tupel  $(x_1, \dots, x_n)$  identifiziert, wobei dann eine besondere Bezeichnung wie etwa (1) überflüssig wird. Wir wollen jedoch diese Identifikation um der begrifflichen Klarheit willen unterlassen.

Zum Gebrauch des Terminus „Komponenten“ beachte man ferner die Bemerkung zu 2.2.4.(2).

Um die Komponenten eines Vektors auch dann geometrisch charakterisieren zu können, wenn der Vektor  $p = v(AB)$  durch ein Punktepaar  $(A, B)$  mit beliebigem  $A$  repräsentiert wird, zeigen wir als Vorbereitung

**Satz 1.** *Haben die Lote von Punkten  $A, B, A', B' \in R^n$  auf eine Gerade  $g$  des  $R^n$  ( $n = 2, 3$ ) die Fußpunkte  $F, G, F', G'$  und gilt  $v(AB) = v(A'B')$ , so gilt auch  $v(FG) = v(F'G')$ .*

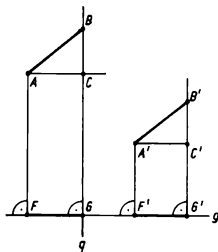


Abb. 2.7

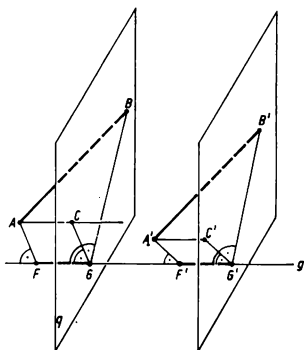


Abb. 2.8

**Beweis** (Abb. 2.7, 2.8). Es sei  $q$  in den Fällen  $n = 2, 3$  die zu  $g$  senkrechte Gerade bzw. Ebene durch  $B$ . Die Parallele durch  $A$  zu  $g$  schneidet  $q$  in genau einem Punkt  $C$ . Dann ist  $G$  auch der Fußpunkt des Lotes von  $C$  auf  $g$ , also ist  $FGCA$  ein (eventuell entartetes) Rechteck; daher gilt  $v(AC) = v(FG)$ . Definieren wir  $C'$  durch  $v(AC) = v(A'C')$ , so gilt wegen

$$v(AC) + v(CB) = v(AB) = v(A'B') = v(A'C') + v(C'B')$$

auch

$$v(CB) = v(C'B').$$

Also liegt  $C'$  in der zu  $q$  parallelen, d. h. zu  $g$  senkrechten Geraden bzw. Ebene durch  $B'$ . Somit ist  $G'$  auch der Fußpunkt des Lotes von  $C'$  auf  $g$ . Da  $C'$  nach seiner Definition auf der Parallelen durch  $A'$  zu  $g$  liegt, ist folglich  $F'G'C'A'$  ein Rechteck und daher  $v(A'C') = v(F'G')$ .

Hiermit ergibt sich die gewünschte Charakterisierung:

**Satz 2.** *Die (einzige) Komponente eines Vektors  $v(AB)$  im  $R^1$  ist*

$$x_1 = m(AB).$$

Die  $v$ -te Komponente eines Vektors  $v(AB)$  im  $R^n$  ( $n = 2, 3$ ) ist

$$x_v = m(F_v G_v),$$

wobei  $F_v, G_v$  die Fußpunkte der Lote von  $A, B$  auf  $g_v$  sind ( $v = 1, \dots, n$ ).

Beweis. Es sei  $P$  durch  $v(OP) = v(AB)$  definiert. Im  $R^1$  folgt damit  $x_1 = m(OP) = m(AB)$ . Im  $R^n$  ( $n = 2, 3$ ) erhält man aus 2.1.3., Satz 1, zunächst  $x_v = m(OT_v)$ , wobei  $T_v$  der Fußpunkt des Lotes von  $P$  auf  $g_v$  ist. Nach Satz 1 gilt aber  $v(OT_v) = v(F_v G_v)$ , womit  $x_v = m(OT_v) = m(F_v G_v)$  bewiesen ist.

## 2.2.2. Addition von Vektoren

Die Addition von Vektoren, d. h. die Komposition von Verschiebungen (vgl. 1.1.1.), läßt sich folgendermaßen analytisch charakterisieren:

**Satz 3.** Ist  $a = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ ,  $b = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ , so ist

$$a + b = \langle a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n \rangle.$$

**Folgerung.** Liegen Punkte  $U, V, W$  auf einer orientierten Geraden  $g$ , so gilt

$$m(UW) = m(UV) + m(VW).$$

Beweis. Es seien  $A, B, C \in R^n$ ;  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  durch  $v(OA) = a$ ,  $v(OB) = b$ ,  $v(OC) = b$  und  $\langle c_1, \dots, c_n \rangle = v(OC) = a + b$  definiert. Zu zeigen ist  $c_v = a_v + b_v$  ( $v = 1, \dots, n$ ).

Fall 1:  $n = 1$ . Ist  $a_1 = 0$ , so folgt  $A = O$ ,  $C = B$ ,  $c_1 = b_1 = a_1 + b_1$ . Ist  $b_1 = 0$ , so folgt  $B = O$ ,  $C = A$ ,  $c_1 = a_1 = a_1 + b_1$ . Sind  $a_1, b_1 \neq 0$  und von gleichem Vorzeichen (Abb. 2.9a), so sind die Strahlen  $OA^+$ ,  $OB^+$  und somit auch die Strahlen  $OA^+$ ,  $AC^+$  gleichorientiert. Daraus folgt  $Zw(OAC)$ , also  $|c_1| = |OC| = |a_1| + |b_1| = |a_1 + b_1|$ . Da  $OA^+$ ,  $OC^+$  ebenfalls gleichorientiert sind, hat  $c_1$  auch dasselbe Vorzeichen wie  $a_1$ , also wie  $a_1 + b_1$ .

Sind  $a_1, b_1 \neq 0$  und von entgegengesetztem Vorzeichen, so sind  $OA^+$ ,  $AC^+$  entgegengesetzt orientiert. Ist dann  $|a_1| > |b_1|$  (Abb. 2.9b), so folgt  $Zw(OCA)$ , also

$$|c_1| = |OC| = |a_1| - |b_1| = |a_1 + b_1|;$$

ferner sind  $OA^+$ ,  $OC^+$  gleichorientiert, somit hat  $c_1$  das Vorzeichen von  $a_1$ , also von  $a_1 + b_1$ . Ist  $|a_1| = |b_1|$ , so folgt  $C = O$  und damit  $c_1 = 0 = a_1 + b_1$ . Ist  $|a_1| < |b_1|$  (Abb. 2.9c), so folgt  $Zw(COA)$ , also

$$|c_1| = |b_1| - |a_1| = |a_1 + b_1|;$$

ferner sind  $OA^+$ ,  $OC^+$  entgegengesetzt orientiert, somit hat  $c_1$  das Vorzeichen von  $(-a_1)$ , also von  $a_1 + b_1$ .

Bereits aus dem somit gezeigten Fall 1 und dem ersten Teil von Satz 2, angewandt auf die Geometrie in der Geraden  $g$ , erhält man die Folgerung.



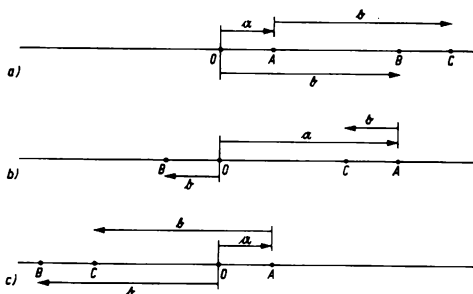


Abb. 2.9

Fall 2:  $n = 2$  oder 3 (Abb. 2.10). Nach Satz 2 gilt  $a_v = m(OF_v)$ ,  $b_v = m(F_vH_v)$ ,  $c_v = m(OH_v)$ , wobei  $F_v, H_v$  die Fußpunkte der Lote von  $A, C$  auf  $g_v$  sind ( $v = 1, \dots, n$ ). Wegen der Folgerung ergibt sich daraus die Behauptung.

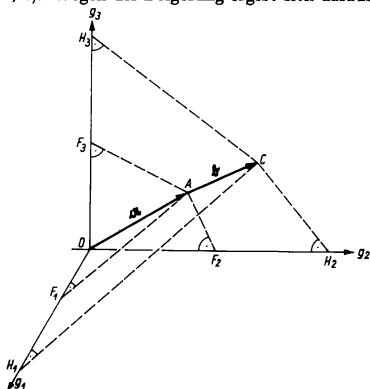


Abb. 2.10

### 2.2.3. Vervielfachung von Vektoren

Für die Menge der Punktepaare  $(A, B)$  läßt sich eine Operation mit dem Operatorenbereich  $\mathbb{R}$  definieren, die *Vervielfachung* oder *Streckung* genannt werden

kann: Durch Streckung von  $(A, B)$  mit  $t \in \mathbb{R}$  entstehe das Paar  $(A, C)$  mit folgendermaßen definiertem  $C$ : Ist  $B = A$ , so sei auch  $C := A$ . Ist  $B \neq A$ , so sei  $C$  derjenige Punkt, für den erstens  $|AC| = |t| \cdot |AB|$  gilt und der zweitens auf dem Strahl  $AB^+$  oder auf dem Strahl  $AB^-$  liegt, je nachdem, ob  $t \geq 0$  oder  $t \leq 0$  ist.

Der Leser zeige (vgl. 2.2.5., Aufgabe 1), daß hierdurch jedem Vektor  $v(AB)$  eindeutig ein Vektor  $v(AC)$  zugeordnet ist. Auch von diesem sagen wir, daß er aus  $v(AB)$  durch *Vervielfachung* oder *Streckung* mit  $t$  entstanden sei, und schreiben  $v(AC) = t \cdot v(AB)$ . Die analytische Charakterisierung dieser Operation lautet:

**Satz 4.** Ist  $a = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ , so ist  $ta = \langle ta_1, \dots, ta_n \rangle$ .

**Beweis.** Es seien  $A, C \in \mathbb{R}^n$ ;  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  durch  $v(OA) = a$  und  $\langle c_1, \dots, c_n \rangle = v(OC) = ta$  definiert. Zu zeigen ist  $c_v = ta_v$  ( $v = 1, \dots, n$ ).

Im Fall  $n = 1$  folgt dies unmittelbar aus den Definitionen von  $a_1$  und  $c_1$ . Im Fall  $n = 2$  oder  $3$  seien  $F_v, H_v$  die Fußpunkte der Lote von  $A, C$  auf  $g_v$  ( $v = 1, \dots, n$ ). Wir betrachten ein  $v$ . Gilt  $a_v = 0$ , so gibt es eine zu  $g_v$  senkrechte Gerade, auf der  $O, A, C$  liegen; daher ist  $c_v = 0 = ta_v$ . Gilt  $a_v \neq 0$ , so seien  $f, h$  die zu  $g_v$  senkrechten Geraden durch  $A, C$  (Abb. 2.11, 2.12). Dann schneidet  $f$  den Strahl  $OF_v^+$  in  $F_v$  und den Strahl  $OA^+$  in  $A$ ; ferner schneidet  $h$  die Gerade  $g_v$  in  $H_v$ , sowie je nach dem Vorzeichen von  $t$  den Strahl  $OA^+$  oder den Strahl  $OA^-$  in  $C$ . Folglich liegt  $H_v$  je nach dem Vorzeichen von  $t$  auf  $OF_v^+$  oder  $OF_v^-$ . Nach dem Strahlensatz ist ferner

$$|OH_v| : |OF_v| = |OC| : |OA| = |t|.$$

Damit ist die Behauptung  $m(OH_v) = t \cdot m(OF_v)$  gezeigt.

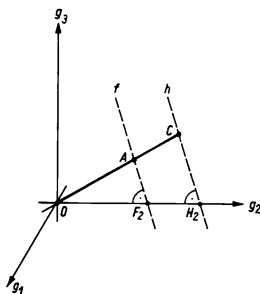


Abb. 2.11

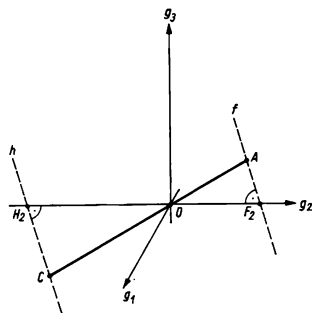


Abb. 2.12

## 2.2.4. Vektorraum und Punktraum

Wegen der Komponentendarstellung (1) sowie Satz 3 und 4 bildet die Menge der Vektoren des  $R^n$  einen zum Zahlenraum  $R^n$  (vgl. MfL Band 3) isomorphen Vektorraum über  $R$ .

Der Ortsvektor des Ursprungs, d. h. die identische Verschiebung  $v(OO)$ , ist das Nullelement dieses Vektorraums und wird *Nullvektor* genannt und mit  $o$  bezeichnet. Die Ortsvektoren der Einheitspunkte  $E_i$ ,

$$e_1 := v(OE_1) = \langle 1, 0, \dots, 0 \rangle,$$

$$e_2 := v(OE_2) = \langle 0, 1, \dots, 0 \rangle,$$

$$\dots$$

$$e_n := v(OE_n) = \langle 0, 0, \dots, 1 \rangle.$$

bilden eine orthonormierte Basis (vgl. MfL Band 3, 7.3.). Bei Zugrundelegung dieser Basis sind die Komponenten eines Vektors  $\xi$  die Koeffizienten, mit denen  $\xi$  als Linearkombination der  $e_i$  dargestellt ist:

$$\begin{aligned}\xi &= \langle x_1, \dots, x_n \rangle = x_1 \langle 1, 0, \dots, 0 \rangle + x_2 \langle 0, 1, \dots, 0 \rangle + \dots + x_n \langle 0, 0, \dots, 1 \rangle \\ &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.\end{aligned}\quad (2)$$

Für (2) schreiben wir in den Fällen  $n = 2, 3$  auch  $\langle x, y \rangle = x_i + y_j$  bzw.  $\langle x, y, z \rangle = x_i + y_j + z_k$ .

**Bemerkung.** Weit verbreitet ist auch der Sprachgebrauch, in (2) nicht die Zahlen  $x_1, \dots, x_n$ , sondern die Vektoren  $x_1 e_1, \dots, x_n e_n$  als die *Komponenten* von  $\xi$  zu bezeichnen.

Um die algebraische Struktur des Vektorraums im Sinne des Grundprinzips der analytischen Geometrie zu nutzen, wollen wir Übergangsmöglichkeiten zwischen Vektoren und Punkten formulieren: Einerseits kann man Aussagen über Punkte oft dadurch günstig fassen, daß man zu ihren Ortsvektoren übergeht. Zum anderen besteht nun folgende Gewinnungsmöglichkeit eines Vektors  $v(AB)$  aus  $A, B$ :

**Satz 5.** Haben Punkte  $A, B$  die Ortsvektoren  $a = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ ,  $b = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ , so gilt für  $v := v(AB)$

$$a + v = b, \quad (3)$$

also

$$v = b - a = \langle b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n \rangle. \quad (4)$$

**Beweis.** Wegen  $v(OA) + v(AB) = v(OB)$  gilt (3); hieraus folgt (4) nach den Gesetzen der linearen Algebra.

Zuweilen werden in der Literatur (vgl. etwa [3]) Punkte mit ihren Ortsvektoren identifiziert. Man hat dann statt (3) die Schreibweise  $A + v = B$  als Ausdruck dafür, daß  $A$  durch die Verschiebung  $v$  in  $B$  übergeht. Das Pluszeichen bezeichnet dabei keine Verknüpfung innerhalb einer Menge, sondern die Anwendung einer Ope-

ration auf die Menge  $R^n$ , wobei der Operator  $v$  aus der Menge aller Verschiebungen genommen ist. Dieses Pluszeichen ist somit begrifflich von dem in (3) zu unterscheiden, das eine Verknüpfung in der Menge der Vektoren bezeichnet. Wir wollen die genannte Identifizierung sowie die Schreibweise  $A + v = B$  nicht verwenden, zuweilen aber sagen,  $B$  sei durch „Anheften von  $v$  an  $A$ “ entstanden.

Die Summe aus zwei oder drei Vektoren besitzt eine geometrische Deutung, die sich analytisch-geometrisch folgendermaßen ergibt:

Gegeben seien  $a = v(PU)$ ,  $b = v(PV)$ . Wir wollen den durch  $a + b = v(PW)$  definierten Punkt  $W$  geometrisch beschreiben (Abb. 2.13). Ist  $p$  der Ortsvektor von  $P$ , so haben  $U, V, W$  nach (3) die Ortsvektoren  $p + a$ ,  $p + b$ ,  $p + a + b$ . Nach (4) gilt daher

$$v(PU) = (p + a) - p = (p + a + b) - (p + b) = v(WV),$$

$$v(PV) = (p + b) - p = (p + a + b) - (p + a) = v(UW),$$

also ist  $PUWV$  ein *Parallelogramm*, das auch zur Strecke oder zum Punkt entartet sein kann, falls nämlich  $P, U, V$  kollinear sind. Es ist durch  $P, a, b$  eindeutig bestimmt und heißt das von  $a, b$  *aufgespannte* Parallelogramm mit der Anfangsecke  $P$ .

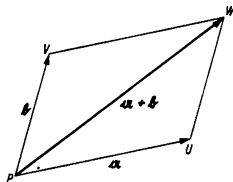


Abb. 2.13

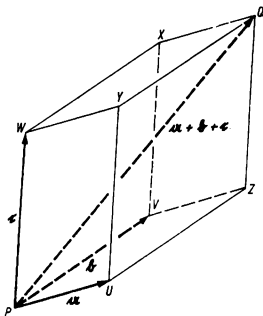


Abb. 2.14

Gegeben seien  $a = v(PU)$ ,  $b = v(PV)$ ,  $c = v(PW)$ . Definiert man  $X, Y, Z, Q$  durch  $b + c = v(PX)$ ,  $a + c = v(PY)$ ,  $a + b = v(PZ)$ ,  $a + b + c = v(PQ)$ , so beschreiben wir  $Q$  (Abb. 2.14): Wie eben errechnet man

$$v(PU) = v(VZ) = v(WY) = v(XQ),$$

$$v(PV) = v(UZ) = v(WX) = v(YQ),$$

$$v(PW) = v(UY) = v(VX) = v(ZQ).$$

Also ist  $PUZVWYQX$  ein von den Parallelogrammflächen  $PVXW$ ,  $UZQY$ ,  $PUYW$ ,  $VZQX$ ,  $PUZV$ ,  $WYQX$  begrenzter Körper, das von  $a$ ,  $b$ ,  $c$  aufgespannte Spat mit der Anfangsecke  $P$ .

In der Physik treten Vektoren einerseits als Ortsvektoren von Punkten auf. Von grundlegender Bedeutung sind andererseits folgende Anwendungsfälle: Bewegt sich ein Massenpunkt von  $A$  nach  $B$ , so heißt  $v(AB)$  der zugehörige *Weg-Vektor*. Beim Überlagern zweier Bewegungen addieren sich die Weg-Vektoren. Das von ihnen aufgespannte Parallelogramm, das diese Addition wiedergibt, heißt daher das *Parallelogramm der Wege*. Von den Weg-Vektoren kann man durch Operationen wie ein-, zweimaliges Differenzieren nach der Zeit, Multiplizieren mit der Masse usw. zu Geschwindigkeits-, Beschleunigungs-, Kraftvektoren usw. übergehen. Deren Überlagerung führt dann zum *Parallelogramm der Geschwindigkeiten, der Kräfte usw.*

## 2.2.5. Aufgaben

1. Man beweise: Gehen aus  $(A, B)$ ,  $(A', B')$  durch Streckung mit  $t$  die Paare  $(A, C)$  bzw.  $(A', C')$  hervor und gilt  $v(AB) = v(A'B')$ , so gilt auch  $v(AC) = v(A'C')$ . Hinweis: Man beweise, daß erstens  $|AC| = |A'C'|$  gilt und daß zweitens  $AC$ ,  $A'C'$  gleichen Richtungssinn haben.
2. Man berechne die Eckpunkte des von  $a = \langle 2, 1, -3 \rangle$ ,  $b = \langle 1, 3, 2 \rangle$ ,  $c = \langle 1, 1, -1 \rangle$  aufgespannten Spats mit dem Anfangspunkt  $(-2, 2, 3)$ .
3. Es seien  $a_1, \dots, a_k$  die Ortsvektoren gegebener Punkte  $A_1, \dots, A_k$ ; es sei  $S$  der Punkt mit dem Ortsvektor  $\bar{s} := (1/k)(a_1 + \dots + a_k)$ . Man beweise  $v(SA_1) + \dots + v(SA_k) = 0$ . Man berechne und zeichne  $A_1, \dots, A_k$ ,  $S$ ,  $v(SA_1), \dots, v(SA_k)$  und bestätige damit die Behauptung für  $a_1 = \langle 2, 3 \rangle$ ,  $a_2 = \langle -1, 2 \rangle$ ,  $a_3 = \langle -1, -1 \rangle$ ,  $a_4 = \langle 4, -4 \rangle$ .

## 2.3. Länge, Winkelgröße, Flächeninhalt, Volumen

### 2.3.1. Das Skalarprodukt

Gegeben seien im  $R^n$  ( $n \leq 3$ ) zwei Vektoren  $a, b$ . Wir wollen ihr *Skalarprodukt* ab geometrisch definieren. (Anschließend erfolgt dann in Satz 2 die analytische Charakterisierung, die wieder für  $n > 3$  als Definition dienen kann und die schon in früheren Bänden als Definition überhaupt auftrat.)

Es seien  $P, U, V$  mit

$$b(PU) = a, \quad b(PV) = b \quad (1)$$

gewählt. Ist  $U = P$ , d. h.  $a = 0$ , so setzen wir  $ab := 0$ . Ist  $U \neq P$ , so sei eine Orientierung von  $g := g(PU)$  gewählt, und dann sei

$$ab := m(PU) \cdot m(PV) \quad (2)$$

gesetzt, wobei  $F$  der Fußpunkt des Lotes von  $V$  auf  $g$  ist (Abb. 2.15). Da sich  $|PU|$ ,  $|PF|$  und das Produkt der Vorzeichen von  $m(PU)$ ,  $m(PF)$  bei anderer Wahl von  $P, U, V$  mit (1) und bei anderer Orientierung von  $g$  nicht ändern, hängt (2) in der Tat nur von  $a$  und  $b$  ab.

Man nennt  $a, b$  *orthogonal* genau dann, wenn für  $P, U, V$  mit (1) zwei Geraden  $g \perp h$  mit  $P, U \in g$ ;  $P, V \in h$  existieren. Für  $a, b \neq 0$  kann man ferner *Elementarwinkelgrößen zwischen Vektoren* definieren durch  $|\angle(a, b)| := |\angle UPV|$ , da  $|\angle UPV|$  von Verschiebungen, d. h. von anderer Wahl der  $P, U, V$  mit (1), unabhängig ist. Entsprechend kann  $m(\angle(a, b)) := m(\angle UPV)$  eingeführt werden, was wir später benötigen.

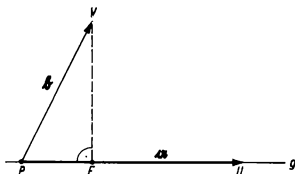


Abb. 2.15

Unmittelbar aus der Definition (2) entnimmt man nun

**Satz 1.** Genau dann ist  $ab = 0$ , wenn  $a, b$  orthogonal sind. Genau dann ist  $ab > 0$  bzw.  $ab < 0$ , wenn  $a, b \neq 0$  sind und  $|\angle(a, b)| < 90^\circ$  bzw.  $|\angle(a, b)| > 90^\circ$  gilt.

Als typischer Anwendungsfall skalarer Produkte in der Physik sei erwähnt: Ist  $a$  ein Weg-Vektor und  $b$  ein Kraft-Vektor, so ist  $ab$  die bei Einwirkung der Kraft  $b$  auf eine den Weg  $a$  zurücklegende Masse verrichtete Arbeit.

**Satz 2.** Ist  $a = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ ,  $b = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ , so ist

$$ab = a_1b_1 + \dots + a_nb_n.$$

**Beweis.** Nach (2) gilt  $e_\mu^2 = 1$ , nach Satz 1 gilt  $e_\mu e_\nu = 0$  ( $\mu, \nu = 1, \dots, n$ ;  $\mu \neq \nu$ ). Daher und wegen 2.2.4.(2) genügt es nach MfL Band 3, 7.1., Folgendes nachzuweisen: Für beliebige Vektoren  $a, b, c$  und beliebige Zahlen  $t$  gilt

$$(ta)b = a(tb) = t \cdot ab, \quad (3)$$

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (4)$$

$$ab = ba. \quad (5)$$

In allen Fällen mit  $a = 0$  oder  $b = 0$  oder  $t = 0$  sind (3), (4), (5) richtig. In den übrigen Fällen kann man folgendermaßen schließen:

Zu (3): Außer den obigen  $P, U, V, g, F$  seien  $S, T$  durch  $v(PS) = ta$ ,  $v(PT) = tb$  definiert, und  $G$  sei der Fußpunkt des Lotes von  $T$  auf  $g$ . Nach 2.2.3., Satz 4

(angewandt auf ein Koordinatensystem, in dem  $g$  eine Achse ist), gilt dann

$$m(PS) = t \cdot m(PU), \quad m(PG) = t \cdot m(PF),$$

also

$$(ta)b = m(PS) \cdot m(PF) = t \cdot m(PU) \cdot m(PF) = t \cdot ab$$

und

$$a(tb) = m(PU) \cdot m(PG) = t \cdot m(PU) \cdot m(PF) = t \cdot ab.$$

Zu (4): Ferner seien  $W, Z$  durch  $b(PW) = b(VZ) = c$ , also  $b(PZ) = b + c$  definiert (Abb. 2.16), und  $K, L$  seien die Fußpunkte der Lote von  $W, Z$  auf  $g$ . Nach 2.2.1., Satz 1, gilt dann  $b(PK) = b(FL)$ ; daher folgt

$$\begin{aligned} a(b + c) &= m(PU) \cdot m(PL) = m(PU) \cdot (m(PF) + m(FL)) \\ &= m(PU) \cdot m(PF) + m(PU) \cdot m(PK) = ab + ac. \end{aligned}$$

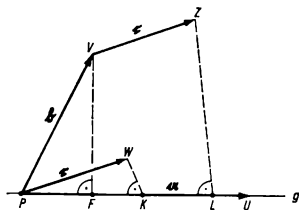


Abb. 2.16

Zu (5): In dem Spezialfall  $|PU| = |PV|$ ,  $|\angle UPV| \leq 90^\circ$  ist die Behauptung richtig (vgl. 2.3.9., Aufgabe 1). Bei beliebigen  $a, b \neq 0$  gibt es ein  $t \neq 0$ , so daß für  $ta$  und  $b$  dieser Spezialfall vorliegt. Nach (3) folgt dann

$$ab = \frac{1}{t} \cdot (ta)b = \frac{1}{t} \cdot b(ta) = ba.$$

Damit ist Satz 2 bewiesen (der Leser notiere den weiteren Beweisverlauf aus MfL Band 3, 7.1., mit den notwendigen Bezeichnungsänderungen).

**Folgerung.** Das Skalarprodukt eines Vektors  $a$  mit  $e_\nu = \langle 0, \dots, 1, \dots, 0 \rangle$  ist die  $\nu$ -te Komponente  $a_\nu$  von  $a$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ).

### 2.3.2. Betrag eines Vektors

Als *Länge* oder *Betrag* eines Vektors  $a = b(PQ)$  kann man die Zahl  $|a| := |PQ|$  definieren, da  $|PQ|$  von Verschiebungen, d. h. von anderer Wahl der  $P, Q$  mit  $a = b(PQ)$ , unabhängig ist. (Wegen des in 2.1.2. eingeführten „abstrakten Standpunktes“ tritt  $|PQ|$  als Zahl ohne Maßeinheit auf.) Die analytische Charakteri-

sierung lautet:

Satz 3. Ist  $a = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ , so ist

$$|a| = \sqrt{a^2} = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}.$$

Beweis. Nach Satz 2 und (2) ist

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 = a^2 = (m(PQ))^2 = |PQ|^2 = |a|^2,$$

woraus wegen  $|a| \geq 0$  die Behauptung folgt.

Bemerkung. Die Rechenregeln für skalare Produkte und Beträge von Vektoren wurden schon in MfL Band 3 und Band 4 ausgeführt. Beispielsweise führen sie zu dem dort genannten analytisch-geometrischen Beweis der *Dreiecksungleichung*. Ferner enthält Satz 3 für  $n = 2$  den Satz des PYTHAGORAS.

Aus Satz 3 und 2.2.4., Satz 5, folgt als Formel für die Länge der Strecke  $PQ$  mit den Endpunkten  $(p_1, \dots, p_n)$ ,  $(q_1, \dots, q_n)$

$$|PQ| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + \dots + (q_n - p_n)^2}.$$

### 2.3.3. Orientierung von Vektorpaaren in der Ebene. Die Graßmannsche Ergänzung

Wir betrachten geordnete Paare  $(a, b)$ ,  $(a', b')$ , ... von Vektoren in der orientierten Ebene  $R^2$  und denken sie repräsentiert durch Tripel  $(P, U, V)$ ,  $(P', U', V')$ , ... mit  $a = v(PU)$ ,  $b = v(PV)$ ,  $a' = v(P'U')$ ,  $b' = v(P'V')$ , ... Der Leser bestätige bei allen folgenden Definitionen, daß sie von Verschiebungen, d. h. von der Wahl dieser  $P, U, V$ , ... unabhängig sind.

Zwei Paare  $(a, b)$ ,  $(a', b')$ , für die weder  $P, U, V$  noch  $P', U', V'$  kollinear sind, heißen einander *gleichorientiert*, wenn die Fahnen  $PU^+V^+$ ,  $P'U'^+V'^+$  gleichorientiert sind (vgl. 1.1.2.2.). Ein Vektorpaar  $(a, b)$  heißt *positiv* bzw. *negativ orientiert*, wenn es zum Paar  $(i, j)$  bzw. zum Paar  $(i, -j)$  gleichorientiert ist. Legt man hierbei ein in „anschaulich-üblicher“ Weise gewähltes Koordinatensystem zugrunde ( $OE_1^+$  „nach rechts“,  $OE_2^+$  „nach oben“), so ist  $(a, b)$  genau dann positiv orientiert, wenn  $a, b$  „entgegen dem Uhrzeigersinn aufeinander folgen“.

Unter dem *Orientierungssinn* eines beliebigen Vektorpaares  $(a, b)$  verstehen wir die Zahl 1, -1 oder 0, je nachdem, ob  $(a, b)$  positiv oder negativ orientiert ist oder ob  $P, U, V$  kollinear sind. In Anlehnung an das Symbol  $\operatorname{sgn} x$  für das Vorzeichen einer reellen Zahl  $x$  (vgl. MfL Band 4, 1.1.) bezeichnen wir den Orientierungssinn von  $(a, b)$  mit  $\operatorname{sgn}(a, b)$ . Beispielsweise ist

$$\operatorname{sgn}(i, j) = \operatorname{sgn}(j, -i) = 1.$$

Sind allgemeiner zwei Vektoren  $a = \langle x, y \rangle = v(OA) \neq 0$ ,  $b = \langle x', y' \rangle = v(OB) \neq 0$  zueinander orthogonal, so ist  $\operatorname{sgn}(a, b)$  eine der Zahlen 1, -1, über die folgendes gilt (Abb. 2.17):



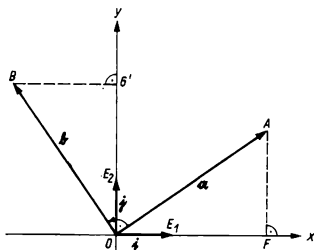


Abb. 2.17

Ist  $x > 0$  (bzw.  $x < 0$ ), so sind für den Fußpunkt  $F$  des Lotes von  $A$  auf  $g_1$  die Strahlen  $OF^+$  und  $OE_1^+$  (bzw.  $OE_1^-$ ) gleichorientiert. In diesem Fall sind die Vektorpaare  $(a, b)$  und  $(i, j)$  genau dann gleichorientiert, wenn für den Fußpunkt  $G'$  des Lotes von  $B$  auf  $g_2$  auch die Strahlen  $OG'^+$  und  $OE_2^+$  (bzw.  $OE_2^-$ ) gleichorientiert sind, d. h. genau dann, wenn auch  $y' > 0$  (bzw.  $y' < 0$ ) ist. Ist  $y > 0$  (bzw.  $y < 0$ ), so sind analog genau dann  $(a, b)$  und  $(j, -i)$  gleichorientiert, wenn  $x' < 0$  (bzw.  $x' > 0$ ) ist. Im Fall  $x = 0$  ist  $y' = 0$  und umgekehrt. Im Fall  $y = 0$  ist  $x' = 0$  und umgekehrt. Beide Fälle schließen einander aus.

Diese Aussagen ergeben das Kriterium: Für zwei orthogonale Vektoren  $a = \langle x, y \rangle \neq 0$ ,  $b = \langle x', y' \rangle \neq 0$  gilt genau dann  $\text{sgn}(a, b) = 1$ , wenn

$$\text{sgn } x = \text{sgn } y' \quad \text{und} \quad \text{sgn } y = -\text{sgn } x'$$

gelten.

Ist  $a$  ein gegebener Vektor im  $R^2$ , so wird durch folgende Forderungen eindeutig ein Vektor  $\hat{a}$  charakterisiert, der die *Graßmannsche Ergänzung* (der positiv um  $90^\circ$  gedrehte Vektor) zu  $a$  genannt wird (Abb. 2.17 mit  $b := \hat{a}$ ): *Erstens* soll  $\hat{a}$  die gleiche Länge wie  $a$  haben:  $|\hat{a}| = |a|$ . Im Fall  $a = 0$  ist hierdurch bereits  $\hat{a} = 0$  definiert. *Zweitens* soll  $\hat{a}$  zu  $a$  orthogonal sein:  $a\hat{a} = 0$ . (Für  $a = \hat{a} = 0$  ist diese Forderung von selbst erfüllt.) *Drittens* soll das Paar  $(a, \hat{a})$  im Fall  $a \neq 0$  (also  $\hat{a} \neq 0$ ) positiv orientiert sein:  $\text{sgn}(a, \hat{a}) = 1$ . Mit  $a = \langle x, y \rangle$ ,  $\hat{a} = \langle x', y' \rangle$  besagt diese Forderung  $\text{sgn } x = \text{sgn } y'$ ,  $\text{sgn } y = -\text{sgn } x'$  (und in dieser Gestalt ist sie auch von selbst für  $a = \hat{a} = 0$  erfüllt).

**Satz 4.** Die Graßmannsche Ergänzung zu  $a = \langle x, y \rangle$  ist  $\hat{a} = \langle -y, x \rangle$ .

**Beweis.** Der Vektor  $\langle x', y' \rangle := \langle -y, x \rangle$  erfüllt die Bedingungen

$$|\langle x', y' \rangle| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = |a|,$$

$$\langle x, y \rangle \langle x', y' \rangle = -xy + xy = 0$$

und

$$\text{sgn } x = \text{sgn } y', \quad \text{sgn } y = -\text{sgn } x'.$$

Da andererseits nur die Graßmannsche Ergänzung  $\hat{a}$  diese Bedingungen erfüllt, folgt  $\hat{a} = \langle x', y' \rangle$ .

### 2.3.4. Trigonometrische Funktionen. Elementarwinkelgröße

Die sogenannte „Definition am Einheitskreis“ für trigonometrische Funktionen läßt sich folgendermaßen fassen: Gegeben sei eine Größe  $\varphi$  orientierter Elementarwinkel. Dann gibt es im  $\mathbb{R}^2$  genau einen Vektor  $p$  mit  $|p| = 1$  und  $m(\hat{x}(i, p)) = \varphi$ . Ist dieser Vektor  $p = \langle p, q \rangle$ , so definiert man (Abb. 2.18):

$$\cos \varphi := p, \quad \sin \varphi := q. \quad (6)$$

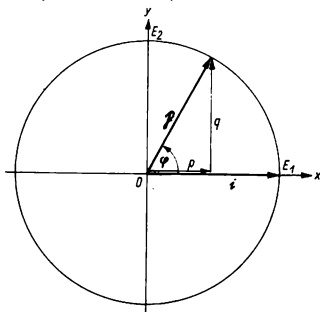


Abb. 2.18

Ist nun  $a = v(OA_1)$  ein Vektor mit  $|a| = 1$ , so ist die Graßmannsche Ergänzung  $\hat{a}$  nach ihrer Definition der Ortsvektor des Bildpunktes von  $E_2$  bei derjenigen Drehung um  $O$ , die  $E_1$  in  $A_1$  überführt. Es sei  $b$  der Ortsvektor des Bildpunktes von  $(p, q)$  bei dieser Drehung. Dann ist einerseits  $m(\hat{x}(a, b)) = \varphi$ ; andererseits folgt aus  $p = pi + qj$  auch  $b = pa + q\hat{a}$ . (Wir werden diesen Schluß später für beliebige Bewegungen ausführen, vgl. 2.7.1., Satz 2 und 3.) Somit folgt

**Satz 5.** Sind  $a, b$  Vektoren mit  $|a| = |b| = 1$  und  $m(\hat{x}(a, b)) = \varphi$ , so sind die eindeutig bestimmten Koeffizienten  $p, q$  in der Darstellung  $b = pa + q\hat{a}$  die Zahlen  $p = \cos \varphi$ ,  $q = \sin \varphi$ .

Bereits aus (6) und  $p^2 = 1$  folgt  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ . Weiterhin kann man den Kosinus und Sinus auf andere Arten von Winkelgrößen übertragen: Ist  $\omega$  eine Drehprozeßgröße und  $\varphi$  die Größe  $\omega \bmod 360^\circ$  orientierter Elementarwinkel, so sind durch  $\cos \omega := \cos \varphi$ ,  $\sin \omega := \sin \varphi$  die trigonometrischen Funktionen für beliebige reelle Zahlen mit der Maßeinheit Grad definiert (und zwar mit der Periode  $360^\circ$ ). Beschränkt man diese Erklärung auf Werte  $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$  bzw.

$0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$  bzw.  $-360^\circ < \omega < 360^\circ$ , so hat man Definitionen des Kosinus und Sinus für *Elementarwinkelgrößen* bzw. *Winkelgrößen* bzw. *Größen orientierter Winkel*. Aus (6) ergeben sich dann auch speziell die bekannten Kosinus- und Sinuswerte aller  $k \cdot 90^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Ferner definiert man für

$$\tan \omega := \frac{\sin \omega}{\cos \omega} \quad (\omega \neq k \cdot 180^\circ + 90^\circ; k \in \mathbb{Z}),$$

$$\cot \omega := \frac{\cos \omega}{\sin \omega} \quad (\omega \neq k \cdot 180^\circ),$$

Sodann lassen sich an (6) die *trigonometrischen Formeln für rechtwinklige Dreiecke* anschließen: Ist  $ABC$  bei  $C$  rechtwinklig mit  $a := |BC|$ ,  $b := |AC|$ ,  $c := |AB|$ ,

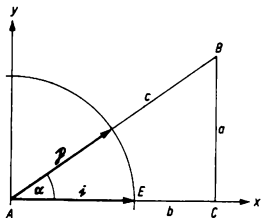


Abb. 2.19

$\alpha := |\angle BAC|$ , so kann man das Koordinatensystem so wählen, daß  $A, B, C$  die Koordinaten  $(0, 0)$ ,  $(b, a)$ ,  $(b, 0)$  haben (Abb. 2.19). Für den Vektor  $p$  mit  $|p| = 1$  und  $m(\angle(i, p)) = \alpha \bmod 360^\circ$  gilt dann  $\langle b, a \rangle = v(AB) = cp$ , also  $b = c \cdot \cos \alpha$ ,  $a = c \cdot \sin \alpha$ , woraus auch

$$\frac{a}{b} = \tan \alpha, \quad \frac{b}{a} = \cot \alpha$$

folgt.

Alle weiteren goniometrischen Formeln beruhen (vgl. 2.3.9., Aufgabe 2) auf den *Additionstheoremen*:

**Satz 6.** Für je zwei Größen  $\alpha, \beta$  orientierter Elementarwinkel gilt

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta, \quad (7)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta. \quad (8)$$

**Beweis.** Es seien  $a, b$  Vektoren mit  $|a| = |b| = 1$  und

$$m(\angle(i, a)) = \alpha, \quad m(\angle(i, b)) = \beta.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} b &= \cos \beta \cdot a + \sin \beta \cdot \hat{a} = \cos \beta \cdot \langle \cos \alpha, \sin \alpha \rangle + \sin \beta \cdot \langle -\sin \alpha, \cos \alpha \rangle \\ &= \langle \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta, \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \rangle. \end{aligned}$$

Wegen  $m(\angle(i, b)) = \alpha + \beta$  (vgl. 1.1.3.2.) ist damit der Satz bewiesen. Er überträgt sich auf die anderen Arten von Winkelgrößen, sofern  $\alpha, \beta$  und  $\alpha + \beta$  die dafür erforderlichen Einschränkungen erfüllen.

Um das Skalarprodukt  $ab$  für  $a, b \neq 0$  durch  $|a|, |b|$  und  $\gamma := |\angle(a, b)|$  auszudrücken, seien  $P, U, V, F$  wie in 2.3.1. Im Fall  $\gamma < 90^\circ$  gilt dann  $|PF| = |PV| \cdot \cos \gamma$ , im Fall  $\gamma > 90^\circ$  aber  $|PF| = |PV| \cdot \cos(180^\circ - \gamma) = -|PV| \cdot \cos \gamma$  (vgl. 2.3.9., Aufgabe 2), in beiden Fällen also  $|ab| = |PU| \cdot |PV| \cdot |\cos \gamma|$ , was auch im Fall  $\gamma = 90^\circ$  zutrifft. In allen drei Fällen ist nach Satz 1 ferner  $\operatorname{sgn} ab = \operatorname{sgn} \cos \gamma$ . Also gilt

Satz 7. Für  $a, b \neq 0$  ist  $ab = |a| \cdot |b| \cdot \cos |\angle(a, b)|$ .

Hiermit kann man umgekehrt bei gegebenen  $a, b \neq 0$  zunächst  $\cos |\angle(a, b)|$  und daraus wegen  $0^\circ \leq |\angle(a, b)| \leq 180^\circ$  eindeutig die Elementarwinkelgröße  $|\angle(a, b)|$  ermitteln.

Zu einem gegebenen Vektor  $a \neq 0$  benötigt man öfter den Vektor  $\frac{1}{|a|}a$ . Sein Betrag ist  $\left| \frac{1}{|a|}a \right| = \frac{1}{|a|}|a| = 1$ ; sein Richtungssinn stimmt mit dem von  $a$  überein. Man sagt daher, man habe  $a$  zu dem *gleichgerichteten Einheitsvektor*  $\frac{a}{|a|}$  „normiert“. Wegen der Folgerung zu Satz 2 ist seine  $v$ -te Komponente

$$\frac{1}{|a|}ae_v = \frac{ae_v}{|a||e_v|} = \cos |\angle(a, e_v)|$$

der  $v$ -te *Richtungskosinus* von  $a$ , das ist der Kosinus der Größe des Elementarwinkels zwischen  $a$  und der  $v$ -ten positiven Koordinatenhalbachse ( $v = 1, \dots, n$ ).

### 2.3.5. Flächeninhalt, Größe orientierter Elementarwinkel

Im  $R^2$  wird außer dem Flächeninhalt  $|PUWV|$  auch der (vorzeichenfähige) *Flächeninhalt*  $m(PUWV)$  des von zwei Vektoren  $a, b$  aufgespannten Parallelogramms  $PUWV$  (vgl. 2.2.4.) dadurch definiert, daß sein Betrag  $|m(PUWV)| := |PUWV|$  und sein Vorzeichen  $\operatorname{sgn} m(PUWV) := \operatorname{sgn}(a, b)$  gesetzt wird.

Satz 8 Ist  $a = \langle a_1, a_2 \rangle$ ,  $b = \langle b_1, b_2 \rangle$ , so gilt

$$m(PUWV) = \det(a, b) := \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Insbesondere gilt  $\operatorname{sgn}(a, b) = \operatorname{sgn} \det(a, b)$ .

Beweis. Für  $a = 0$  oder  $b = 0$  ist die Behauptung richtig. Für  $a, b \neq 0$  sei  $\hat{U}$  durch  $v(P\hat{U}) = \hat{a}$  definiert, und  $H$  sei der Fußpunkt des Lotes von  $V$  auf  $g(P\hat{U})$  (Abb. 2.20). Dann ist  $|\hat{a}b| = |P\hat{U}| \cdot |PH| = |PU| \cdot |PH| = |PUWV|$ . Ferner gilt  $\operatorname{sgn} \hat{a}b = 1, -1, 0$ , je nachdem, ob  $|\angle(\hat{a}, b)| < 90^\circ, > 90^\circ, = 90^\circ$  ist, d. h. je nachdem, ob  $\operatorname{sgn}(a, b) = 1, -1, 0$  ist. Das besagt  $\operatorname{sgn} \hat{a}b = \operatorname{sgn} m(PUWV)$ , und daher gilt insgesamt  $m(PUWV) = \hat{a}b = -a_2b_1 + a_1b_2 = \det(a, b)$ .

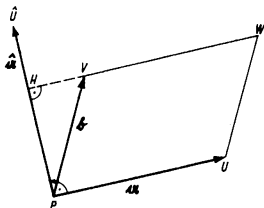


Abb. 2.20

Hinweis: Zum Rechnen mit Determinanten vgl. MfL Band 3, 8.2. Wir benötigen beispielsweise später in 2.6.2. Rechenregeln wie etwa  $\det(a, b) = \det(a + \mu b, b)$  ( $\mu \in \mathbb{R}$ ).

Zur Flächeninhaltsberechnung für  $PUWV$  aus den Seiten und dem eingeschlossenen Winkel dient die unten folgende Formel (10). Mit Beachtung der Vorzeichen gilt genauer

Satz 9. Für Vektoren  $a, b \neq 0$  in  $\mathbb{R}^2$  ist  $\det(a, b) = |a| \cdot |b| \cdot \sin m(\angle(a, b))$ .

Beweis. Wir vermerken die — später nochmals verwendete — Identität

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - (xx' + yy' + zz')^2 \\ = x^2y'^2 + x^2z'^2 + y^2x'^2 + y^2z'^2 + z^2x'^2 + z^2y'^2 - 2xyx'y' - 2xxz'z' - 2yzy'z' \\ = (xy' - yx')^2 + (xz' - zx')^2 + (yz' - zy')^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Für  $x := a_1, y := a_2, z := 0, x' := b_1, y' := b_2, z' := 0$  ergibt sie

$$a^2b^2 - (ab)^2 = (\det(a, b))^2,$$

also

$$\begin{aligned} |a| \cdot |b| \cdot |\sin m(\angle(a, b))| &= \sqrt{|a|^2 \cdot |b|^2 - (|a| \cdot |b| \cdot \cos |\angle(a, b)|)^2} \\ &= |\det(a, b)|. \end{aligned}$$

Stellt man ferner den zu  $b$  gleichgerichteten Einheitsvektor  $\frac{b}{|b|}$  als Linearkombination aus dem Vektor  $\frac{a}{|a|}$  und dessen Graßmannscher Ergänzung dar, so erhält

letztere den Koeffizienten  $\sin m(\vec{x}(a, b))$ . Daraus folgt

$$\operatorname{sgn} \sin m(\vec{x}(a, b)) = \operatorname{sgn}(a, b),$$

und der Satz ist bewiesen.

Aus der Gleichung  $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$  folgt

$$\cos |\vec{x}(a, b)| = \cos m(\vec{x}(a, b)).$$

Hiernach kann man bei gegebenen  $a, b \neq 0$  aus Satz 7 und 9 zunächst  $\cos m(\vec{x}(a, b))$  und  $\sin m(\vec{x}(a, b))$  und damit eindeutig  $m(\vec{x}(a, b))$  ermitteln.

Ferner läßt sich die aus den Sätzen 8 und 9 sowie aus (9) folgende Formel

$$|PUWV| = \sqrt{a^2 b^2 - (ab)^2} = |a| \cdot |b| \cdot \sin |\vec{x}(a, b)| \quad (10)$$

auch im  $R^3$ , nach zunächst willkürlich festgesetzter Orientierung einer Koordinatenebene durch  $P, U, V$ , herleiten; sie ist andererseits von der Wahl und der Orientierung dieser Ebene unabhängig und gilt daher allgemein im  $R^3$  (bzw. kann im  $R^n$  ( $n > 3$ ) als Definition von  $|PUWV|$  dienen).

Die *Gramsche Determinante*

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix} = a^2 b^2 - (ab)^2$$

wurde schon in MfL Band 3, 8.3., erwähnt.

### 2.3.6. Orientierung von Vektortripeln. Das Vektorprodukt

Wir betrachten geordnete Tripel  $(a, b, c), (a', b', c'), \dots$  von Vektoren im orientierten dreidimensionalen Raum  $R^3$  und denken sie repräsentiert durch Quadrupel  $(P, U, V, W), (P', U', V', W'), \dots$  von Punkten des  $R^3$  mit  $a = v(PU), b = v(PV), c = v(PW), a' = v(P'U'), b' = v(P'V'), c' = v(P'W'), \dots$  Die folgenden Definitionen sind von Verschiebungen unabhängig.

Zwei Tripel  $(a, b, c), (a', b', c')$ , für die weder  $P, U, V, W$  noch  $P', U', V', W'$  komplanar sind, heißen einander *gleichorientiert*, wenn die Orientierungsfiguren  $PU^+V^+W^+, P'U'^+V'^+W'^+$  gleichorientiert sind. Ein Tripel  $(a, b, c)$  heißt *positiv bzw. negativ orientiert*, wenn es zum Tripel  $(i, j, k)$  bzw. zum Tripel  $(i, j, -k)$  gleichorientiert ist. Bei „anschaulich-üblichem“ Koordinatensystem besagt positive Orientierung, daß „auf  $a, b$  im Windungssinn einer Rechtsschraube  $c$  folgt“. Unter dem *Orientierungssinn*  $\operatorname{sgn}(a, b, c)$  eines beliebigen Tripels  $(a, b, c)$  verstehen wir die Zahl 1,  $-1$  oder 0, je nachdem, ob  $(a, b, c)$  positiv oder negativ orientiert ist oder ob  $P, U, V, W$  komplanar sind. Beispielsweise ist

$$\operatorname{sgn}(i, j, k) = \operatorname{sgn}(i, k, -j) = \operatorname{sgn}(j, k, i) = 1.$$

Sind  $P, U, V$  nicht kollinear und ist  $c \neq 0$  zu  $\varepsilon(PUV)$  orthogonal, so ist  $\operatorname{sgn}(a, b, c)$  eine der Zahlen 1,  $-1$ . Für  $a = \langle x, y, z \rangle = v(OA), b = \langle x', y', z' \rangle = v(OB),$

$c = \langle x^*, y^*, z^* \rangle = v(OC)$  gilt dabei (Abb. 2.21): Ist  $xy' - yx' > 0$  (bzw.  $xy' - yx' < 0$ ), so ist für die Fußpunkte  $F, G$  der Lote von  $A, B$  auf  $\varepsilon(g_1g_2)$ , d. h. für die Vektoren  $v(OF) = \langle x, y, 0 \rangle$ ,  $v(OG) = \langle x', y', 0 \rangle$ , das Paar  $(v(OF), v(OG))$  positiv (bzw. negativ) orientiert. In diesem Fall sind genau dann  $(a, b, c)$  und  $(i, j, k)$  gleichorientiert, wenn für den Fußpunkt  $H^*$  des Lotes von  $C$  auf  $g_3$  die Strahlen  $OH^{**}$  und  $OE_3^+$  (bzw.  $OE_3^-$ ) gleichorientiert sind, d. h. genau dann, wenn auch  $z^* > 0$  (bzw.  $z^* < 0$ ) ist. Ist  $xz' - zx' > 0$  (bzw.  $< 0$ ), so sind  $(a, b, c)$ ,

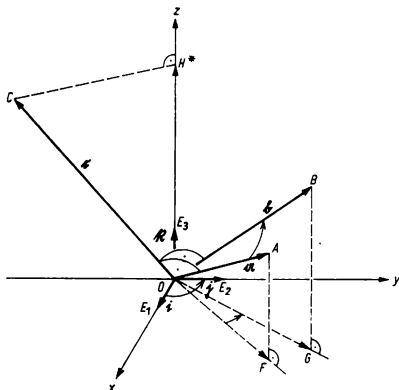


Abb. 2.21

$(i, j, -k)$  genau für  $y^* < 0$  (bzw.  $> 0$ ) gleichorientiert. Ist  $yz' - zy' > 0$  (bzw.  $< 0$ ), so sind  $(a, b, c)$ ,  $(j, k, i)$  genau für  $x^* > 0$  (bzw.  $< 0$ ) gleichorientiert. Im Fall  $xy' - yx' = 0$  ist  $\varepsilon(OAB) \perp \varepsilon(g_1g_2)$ , also  $C \in \varepsilon(g_1g_2)$ , d. h.  $z^* = 0$  und umgekehrt. Im Fall  $xz' - zx' = 0$  ist  $y^* = 0$  und umgekehrt. Im Fall  $yz' - zy' = 0$  ist  $x^* = 0$  und umgekehrt. Alle drei Fälle treten nicht gleichzeitig ein.

Diese Aussagen ergeben das Kriterium: Für zwei Vektoren  $a = \langle x, y, z \rangle = v(PU)$ ,  $b = \langle x', y', z' \rangle = v(PV)$  mit nicht kollinearen  $P, U, V$  und für einen zu beiden orthogonalen Vektor  $c = \langle x^*, y^*, z^* \rangle \neq 0$  gilt genau dann  $\text{sgn}(a, b, c) = 1$ , wenn

$$\text{sgn}(xy' - yx') = \text{sgn } z^*,$$

$$\text{sgn}(xz' - zx') = -\text{sgn } y^*$$

und

$$\text{sgn}(yz' - zy') = \text{sgn } x^*$$

gelten.

Sind  $a, b$  zwei gegebene Vektoren im  $R^3$ , so wird durch folgende Forderungen eindeutig ein Vektor charakterisiert, der das *Vektorprodukt*  $a \times b$  genannt wird (Abb. 2.21 mit  $c := a \times b$ ): *Erstens soll die Länge von  $a \times b$  der Flächeninhalt des von  $a, b$  aufgespannten Parallelogramms  $PUWV$  sein*, nach (10) also  $|a \times b| = |a| \cdot |b| \cdot \sin |\sphericalangle(a, b)|$ . Im Fall kollinear  $P, U, V$  ist hierdurch bereits  $a \times b = 0$  definiert. *Zweitens soll  $a \times b$  zu  $a$  und  $b$  orthogonal sein*:  $a(a \times b) = b(a \times b) = 0$ . (Für  $a \times b = 0$  ist diese Forderung von selbst erfüllt.) *Drittens soll das Tripel  $(a, b, a \times b)$  im Fall  $a \times b \neq 0$  positiv orientiert sein*. (Das obige Kriterium hierfür ist auch bei  $a \times b = 0$  erfüllt.)

Satz 10. Ist  $a = \langle x, y, z \rangle$ ,  $b = \langle x', y', z' \rangle$ , so ist

$$a \times b = \left\langle \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \right\rangle.$$

Beweis. Der angegebene Vektor erfüllt die drei an  $a \times b$  gestellten Forderungen: Erstens ist nach (9) sein Betrag  $\sqrt{a^2 b^2 - (ab)^2}$ . Zweitens ist

$$a(a \times b) = x \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = \det(a, a, b) = 0$$

und ebenso  $b(a \times b) = 0$ . Drittens sind die Vorzeichenbedingungen des obigen Kriteriums erfüllt.

Ist  $O$  der Drehpunkt eines starren Körpers und  $a$  der Ortsvektor des Angriffspunktes einer Kraft  $b$ , so charakterisiert  $a \times b$  das entstehende *Drehmoment*: Dieses hat die Größe  $|a \times b|$ , und der Richtungssinn von  $a \times b$  ist der der *Drehachse* (wobei man den letzten so wählt, daß er dem Drehsinn des Körpers „als Rechtsschraube folgt“).

### 2.3.7. Volumen

Im  $R^3$  wird außer dem Volumen  $|PUZVWYQX|$  auch das (*vorzeichenfähige*) Volumen  $m(PUZVWYQX)$  des von drei Vektoren  $a, b, c$  aufgespannten Spats (vgl. 2.2.4.) dadurch definiert, daß sein Betrag  $|m(P...X)| := |P...X|$  und sein Vorzeichen  $\text{sgn } m(P...X) := \text{sgn}(a, b, c)$  gesetzt wird.

Satz 11. Ist  $a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ,  $b = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ ,  $c = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ , so gilt

$$m(P...X) = \det(a, b, c).$$

Beweis. Für kollineare  $P, U, V$ , d. h.  $a \times b = 0$ , ist die Behauptung richtig. Es sei  $a \times b = v(PT) \neq 0$ , und  $H$  sei der Fußpunkt des Lotes von  $W$  auf  $g(PT)$  (Abb. 2.22). Dann ist  $|(a \times b)c| = |PT| \cdot |PH| = |PUZV| \cdot |PH| = |PUZVWYQX|$ . Ferner zeigt eine Diskussion der Fälle  $|\sphericalangle(a \times b, c)| \leq 90^\circ$ ,





2. Man löse (7), (8) nach  $\cos \beta$  und  $\sin \beta$  auf und schreibe das Ergebnis mit  $\gamma := \alpha + \beta$  als Formeln für  $\cos(\gamma - \alpha)$ ,  $\sin(\gamma - \alpha)$ . In diesen wähle man  $\gamma := 0^\circ$  und bezeichne  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ ,  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ . Ähnlich gewinne man  $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$  und weitere entsprechende Formeln für  $k \cdot 90^\circ \pm \alpha$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Aus (7), (8) entnehme man

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

also, wenn  $\cos \alpha \neq 0$  ist,

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}, \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha},$$

folglich

$$\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

und daraus (Vorzeichendiskussion!)

$$\tan \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}.$$

(Das letzte gewinnt man auch aus der Formel für  $\sin(\gamma - \alpha)$  mit  $\gamma := 2\alpha$ .)

3. Man berechne die Seitenlängen und die Größen der orientierten Elementarwinkel zwischen den Seiten des Dreiecks  $(-2, -2)$   $(4, 0)$   $(0, 6)$ .
4. Man berechne das Volumen und den Flächeninhalt der Oberfläche des Spats aus 2.2.5., Aufgabe 2, sowie die Größen der Elementarwinkel, die seine Seitenkanten miteinander und mit den positiven Halbachsen des Koordinatensystems bilden.
5. Für  $a \neq 0$  beweise man  $\cos^2 |\vec{x}(a, e_1)| + \dots + \cos^2 |\vec{x}(a, e_n)| = 1$ .
6. Für die Seitenlängen  $a, b, c$  eines Dreiecks  $ABC$  und  $s := \frac{1}{2}(a + b + c)$  beweise man: Mit  $a := v(BC)$ ,  $b := v(CA)$  gilt

$$c^4 = ((a + b)^2)^2 = (a^2)^2 + 4a^2(ab) + 2a^2b^2 + 4(ab)^2 + 4(ab)b^2 + (b^2)^2.$$

Hieraus gewinne man die *Heronische Formel*

$$|ABC|^2 = s(s - a)(s - b)(s - c) \\ \left( = \frac{1}{16}(-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2) \right).$$

## 2.4. Lineare Parameterdarstellungen

### 2.4.1. Geraden, Strahlen, Strecken; Teilverhältnis

Der folgende Satz gibt eine Möglichkeit zur rechnerischen Erfassung von Geraden, Strahlen und Strecken im  $R^n$  ( $n \leq 3$ ) (bzw. zur Definition dieser Begriffe im  $R^n$  ( $n > 3$ )) (Abb. 2.23).

**Satz 1.** Es sei  $p = v(OP)$ ,  $a = v(PQ) \neq 0$ . Dann entsteht eine bijektive Abbildung von  $R$  auf  $g(PQ)$ , wenn man je einer Zahl  $t \in R$  den Punkt  $X$  mit dem Ortsvektor

$$x = p + ta \tag{1}$$

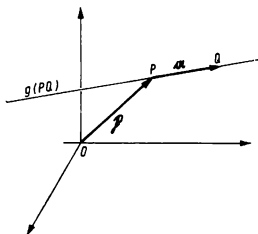


Abb. 2.23

zuordnet. Dabei ist die Menge aller Punkte  $X$  mit (1) und  $t \geq 0$  der Strahl  $PQ^+$ . Ferner ist die Menge aller  $X$  mit (1) und  $0 \leq t \leq 1$  die Strecke  $PQ$ .

Beweis. Nach der Definition des Vervielfachens in 2.2.3. ist  $g(PQ)$  bzw.  $PQ^+$  bzw.  $PQ$  die Menge aller derjenigen  $X$ , die mit den jeweils angegebenen  $t$  durch die Bedingung  $v(PX) = t \cdot v(PQ)$ , d. h.  $x - p = ta$ , charakterisiert sind.

Zusatz. Ist  $p = v(OP)$ ,  $P = Q$ , also  $a := v(PQ) = v$ , so führt (1) für jedes  $t \in \mathbb{R}$  auf denselben Punkt  $X = P = Q$ .

In der Ausdrucksweise der Analysis (vgl. MfL Band 5) haben wir in (1) die speziellen Kurven Gerade, Strahl, Strecke durch *Parameterdarstellungen* erfaßt. Aus Symmetriegründen verwendet man bei der Darstellung von  $g(PQ)$  und  $PQ$  manchmal statt eines Parameters  $t$  zwei voneinander abhängige Variable  $\lambda, \mu$ :

Satz 2. Es sei  $p = v(OP) \neq q = v(OQ)$ . Dann entsteht eine bijektive Abbildung von der Menge aller derjenigen Paare  $(\lambda, \mu)$  reeller Zahlen, die die Bedingung

$$\lambda + \mu = 1 \quad (2)$$

erfüllen, auf die Gerade  $g(PQ)$ , wenn man je einem solchen Paar den Punkt  $X$  mit dem Ortsvektor

$$x = \lambda p + \mu q \quad (3)$$

zuordnet. Dabei ist die Menge aller  $X$  mit (3), (2) und

$$\lambda \geq 0, \quad \mu \geq 0 \quad (4)$$

die Strecke  $PQ$ .

Beweis. Wegen  $a = v(PQ) = q - p$  ist (1) gleichwertig mit  $x = (1 - t)p + tq$ , und darin ist die Bedingung  $0 \leq t \leq 1$  gleichwertig mit  $1 - t \geq 0, t \geq 0$ .

Zusatz 1. Ist  $P = Q$ , so führt (3) für jedes Paar  $(\lambda, \mu)$  mit (2) auf denselben Punkt  $X = P = Q$ .

**Zusatz 2.** Ist  $p = \beta + u$ ,  $q = \beta + v$ , so ist (3) gleichbedeutend mit  $\xi = \beta + \lambda u + \mu v$ .

Die Zahlen  $\lambda, \mu$  aus (3) stehen in Beziehung zu dem Begriff des *Teilverhältnisses* (vgl. Satz 3). Bereits in der Schulgeometrie tritt dieser Begriff als die Zahl  $|PX| : |QX|$  auf (übrigens selbst dann als Zahl ohne Maßeinheit, wenn man nicht den „abstrakten Standpunkt“ aus 2.1.2. einnimmt, sondern  $|PX|, |QX|$  mit einer Maßeinheit, etwa dem Meter, angibt). Wir wollen hier auch Vorzeichen einbeziehen, denken uns zunächst  $g(PQ)$  orientiert und definieren als Teilverhältnis die Zahl

$$TV(P, Q; X) := m(PX) : m(QX) \quad (X \in g(PQ), \neq Q). \quad (5)$$

Dabei hängt (5) in Wirklichkeit nicht von der Orientierung der Geraden  $g(PQ)$  ab, sondern nur von der Lage des Punktes  $X (\neq Q)$  auf ihr; denn bei anderer Orientierung bleibt das Vorzeichen des Quotienten (5) unverändert.

**Satz 3.** In (3) gilt, wenn  $X \neq Q$ , also  $\lambda \neq 0$  ist,

$$\mu : \lambda = -TV(P, Q; X).$$

**Beweis.** Nach (3) gilt

$$v(PX) = \xi - p = \mu(q - p) = \mu v(PQ),$$

$$v(QX) = \xi - q = -\lambda(q - p) = -\lambda v(PQ),$$

also

$$m(PX) = \mu m(PQ), \quad m(QX) = -\lambda m(PQ),$$

woraus die Behauptung durch Division folgt.

Aus Satz 3 liest man folgende *Eigenschaften des Teilverhältnisses* ab: Wegen  $\lambda + \mu \neq 0$  gilt stets  $TV(P, Q; X) \neq 1$ . Für  $X = P$  ist  $TV(P, Q; X) = 0$ . Da wegen  $\lambda + \mu > 0$  niemals gleichzeitig  $\lambda < 0$ ,  $\mu < 0$  sind, folgt nach (4): Genau dann ist  $TV(P, Q; X) < 0$ , wenn  $X$  im Innern der Strecke  $PQ$  liegt; genau dann ist  $TV(P, Q; X) > 0$ , wenn  $X (\in g(PQ))$  außerhalb der Strecke  $PQ$  liegt.

Zuweilen ist es vorteilhaft, statt  $TV(P, Q; X)$  die Zahl

$$m(PX) : m(QX) = -TV(P, Q; X)$$

zu verwenden; diese ist also genau für die Punkte  $X$  im Innern von  $PQ$  positiv.

**Satz 4.** Zu beliebig gegebenen  $l, m \in \mathbb{R}$  mit  $l \neq 0$ ,  $l + m \neq 0$  gibt es genau einen Punkt  $X \in g(PQ)$  mit  $m(PX) : m(QX) = m : l$ , d. h. mit  $TV(P, Q; X) = -m : l$ . Er hat den Ortsvektor

$$\xi = \frac{1}{l+m} (lp + mq). \quad (6)$$

**Beweis.** Es gibt genau ein Paar  $(\lambda, \mu)$  mit (2) und  $\mu : \lambda = m : l$ , nämlich

$$\mu = \frac{m}{l+m}, \quad \lambda = \frac{l}{l+m},$$

Hiermit wende man Satz 2 an.

Der Punkt  $X$  mit (6) tritt in der Physik als *Schwerpunkt* des Massensystems auf, das aus einer im Punkt  $P$  befindlichen Masse von  $l$  Gramm und einer im Punkt  $Q$  befindlichen Masse von  $m$  Gramm besteht: Dieses Massensystem kann (hinsichtlich seines Schwerungsverhaltens) durch eine in  $X$  angebrachte Masse von  $(l+m)$  Gramm ersetzt werden.

Der Punkt  $X$  mit  $m(PX) = m(XQ)$ , d. h. mit  $TV(P, Q; X) = -1$ , ist der *Mittelpunkt* von  $PQ$ . Er hat den Ortsvektor  $\bar{x} = \frac{1}{2}(\bar{p} + \bar{q})$ .

Die Ausnahmenvorschriften  $l \neq 0$  (d. h.  $X \neq Q$ ) und  $l + m \neq 0$  (d. h.  $TV(P, Q; X) \neq 1$ ) können in der sogenannten *projektiven Geometrie* folgendermaßen beseitigt werden: Erstens erweitert man die Menge  $\mathbb{R}$  um ein neues Element, das Verhältnis 1:0. Dieses Teilverhältnis, das keiner reellen Zahl gleich ist, schreibt man dem Punkt  $X = Q$  zu. Zweitens erweitert man die Gerade  $g$  um ein neues Element, ihren sogenannten *uneigentlichen Punkt*. Für diesen werden zwar keine Längen  $m(PX)$ ,  $m(QX)$  definiert, aber man schreibt ihm (bezüglich des vorliegenden Koordinatensystems) das Teilverhältnis 1 zu.

Nachdem wir nun Geraden durch (1) bzw. (2), (3) rechnerisch erfassen können, gelangen wir auch zu rechnerischen Kriterien für die Kollinearität.

Satz 5. Genau dann sind  $P, Q, X \in \mathbb{R}^n$  kollinear, wenn die Vektoren  $\alpha := v(PQ)$  und  $\beta := v(PX)$  linear abhängig sind.

Beweis. Kollinearität liegt genau dann vor, wenn entweder  $P = Q$  (d. h.  $\alpha = 0$ ) gilt oder für  $\alpha \neq 0$  gemäß Satz 1 ein  $t \in \mathbb{R}$  mit  $\beta = t\alpha$  (d. h.  $\beta = t\alpha$ ) existiert. Das sind aber genau alle Möglichkeiten für die lineare Abhängigkeit der Vektoren  $\alpha, \beta$ .

Satz 6. Genau dann sind im  $\mathbb{R}^2$  gelegene Punkte  $(p_1, p_2), (q_1, q_2), (x_1, x_2)$  kollinear, wenn

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & x_1 \\ p_2 & q_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0$$

gilt.

Beweis. Kollinearität liegt nach Satz 2 und seinem Zusatz 1 genau dann vor, wenn man die Reihenfolge der Punkte so wählen kann, daß ein Paar  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  mit

$$\begin{aligned} 1 \cdot \lambda + 1 \cdot \mu + 1 \cdot (-1) &= 0, \\ p_1 \cdot \lambda + q_1 \cdot \mu + x_1 \cdot (-1) &= 0, \\ p_2 \cdot \lambda + q_2 \cdot \mu + x_2 \cdot (-1) &= 0 \end{aligned}$$

existiert. Dies trifft genau dann zu, wenn

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & x_1 \\ p_2 & q_2 & x_2 \end{pmatrix}$$

die Koeffizientenmatrix eines nichttrivial lösbaren homogenen linearen Gleichungssystems ist.

### 2.4.2. Ebenen, Halbebenen, Dreiecksflächen; Raum, Halbräume, Tetraederkörper

**Satz 7.** Es seien  $P, Q, S$  nicht kollinear; es sei  $\mathfrak{p} := \mathfrak{v}(OP)$ ,  $\mathfrak{a} := \mathfrak{v}(PQ)$ ,  $\mathfrak{b} := \mathfrak{v}(PS)$ . Dann entsteht eine bijektive Abbildung von  $\mathbb{R}^2$  auf die Ebene  $\varepsilon := \varepsilon(PQS)$ , wenn man je einem Zahlenpaar  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  den Punkt  $X$  mit dem Ortsvektor

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{p} + u\mathfrak{a} + v\mathfrak{b} \quad (7)$$

zuordnet. Dabei ist die Menge aller  $X$  mit (7) und  $u \geq 0$  die Halbebene  $PSQ^+$ .

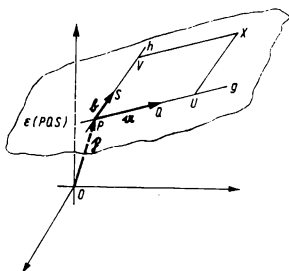


Abb. 2.24

**Beweis** (Abb. 2.24). Für jedes  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  liegen nach Satz 1 die Punkte  $U, V$  mit den Ortsvektoren  $\mathfrak{p} + u\mathfrak{a}$  bzw.  $\mathfrak{p} + v\mathfrak{b}$  auf  $g := g(PQ)$  bzw. auf  $h := g(PS)$ , und  $PUXV$  (mit  $\mathfrak{v}(OX) = \mathfrak{x}$  aus (7)) ist das von  $u\mathfrak{a}$  und  $v\mathfrak{b}$  aufgespannte Parallelogramm mit der Anfangsecke  $P$ ; daher liegt  $X$  in  $\varepsilon(gh) = \varepsilon$ . Also bildet die durch (7) definierte Abbildung  $\mathbb{R}^2$  in  $\varepsilon$  ab. Sie ist surjektiv; denn für jedes  $X \in \varepsilon$  gibt es  $U \in g$  und  $V \in h$  so, daß  $PUXV$  ein (eventuell entartetes) Parallelogramm ist, und wendet man Satz 1 auf  $U$  und  $V$  an, so erhält man  $u$  und  $v$  mit (7). Die Abbildung ist auch injektiv, da aus  $\mathfrak{p} + u_1\mathfrak{a} + v_1\mathfrak{b} = \mathfrak{p} + u_2\mathfrak{a} + v_2\mathfrak{b}$  zunächst  $(u_2 - u_1)\mathfrak{a} + (v_2 - v_1)\mathfrak{b} = 0$  und dann wegen der linearen Unabhängigkeit (Satz 5)  $u_1 = u_2$  und  $v_1 = v_2$  folgt. Schließlich liegt  $X$  genau dann in  $PSQ^+$ , wenn  $U \in PQ^+$  ist, also nach Satz 1 genau im Fall  $u \geq 0$ .

**Satz 8.** Es seien  $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{s}$  die Ortsvektoren dreier nicht kollinear Punkte  $P, Q, S$ . Dann entsteht eine bijektive Abbildung von der Menge aller Tripel  $(\lambda, \mu, \nu)$  reeller Zahlen mit

$$\lambda + \mu + \nu = 1 \quad (8)$$

auf die Ebene  $\varepsilon(P, Q, S)$ , wenn man je einem solchen Tripel den Punkt  $X$  mit dem Ortsvektor

$$\vec{x} = \lambda \vec{p} + \mu \vec{q} + \nu \vec{s} \quad (9)$$

zuordnet. Dabei ist die Menge aller  $X$  mit  $\lambda \geq 0, \mu \geq 0, \nu \geq 0$  die Dreiecksfläche  $PQS$ .

Beweis. Wegen  $\alpha = q - p, \beta = s - p$  ist (7) gleichwertig zu

$$\vec{x} = (1 - u - v) \vec{p} + u \vec{q} + v \vec{s},$$

also zu (9) mit (8). Hierbei ist  $PSQ^+$  durch  $\mu (= u) \geq 0$  charakterisiert. Analog kann man  $PQS^+$  durch  $\nu (= v) \geq 0$  charakterisieren. Schreibt man (9) als  $\vec{x} = \vec{s} + \lambda(\vec{p} - \vec{s}) + \mu(\vec{q} - \vec{s})$ , so erhält man ebenso  $\lambda \geq 0$  als Charakterisierung von  $SQP^+$ . Also ist die Dreiecksfläche  $PQS = PSQ^+ \cap PQS^+ \cap SQP^+$  (Abb. 2.25) durch  $\lambda, \mu, \nu \geq 0$  charakterisiert.

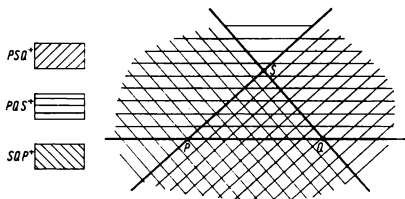


Abb. 2.25

Die  $\lambda, \mu, \nu$  haben die in 2.6.1. motivierbare Bezeichnung *baryzentrische Koordinaten* von  $X$ . Als Beispiel für die durch sie erreichbare Symmetrie in der Schreibweise nennen wir

**Satz 9.** Sind für  $p, q, s$  wie in Satz 8 drei Punkte  $U_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) durch ihre Ortsvektoren

$$u_i = \mu_{i0} \vec{p} + \mu_{i1} \vec{q} + \mu_{i2} \vec{s} \quad (\mu_{i0} + \mu_{i1} + \mu_{i2} = 1)$$

gegeben, so sind sie genau dann kollinear, wenn  $\det(\mu_{ij}) = 0$  ist.

Beweis. Haben  $P, Q, S$  in einem Koordinatensystem der Ebene  $\varepsilon(PQS)$  die Koordinaten  $(p_1, p_2), (q_1, q_2), (s_1, s_2)$ , so sind die  $U_i$  nach Satz 6 genau für

$$\begin{vmatrix} \mu_{00} + \mu_{01} + \mu_{02} & \mu_{00} p_1 + \mu_{01} q_1 + \mu_{02} s_1 & \mu_{00} p_2 + \mu_{01} q_2 + \mu_{02} s_2 \\ \mu_{10} + \mu_{11} + \mu_{12} & \mu_{10} p_1 + \mu_{11} q_1 + \mu_{12} s_1 & \mu_{10} p_2 + \mu_{11} q_2 + \mu_{12} s_2 \\ \mu_{20} + \mu_{21} + \mu_{22} & \mu_{20} p_1 + \mu_{21} q_1 + \mu_{22} s_1 & \mu_{20} p_2 + \mu_{21} q_2 + \mu_{22} s_2 \end{vmatrix} = 0$$

kollinear. Diese Determinante ist das Produkt aus  $\det(\mu_{ij})$  und der Determinante in Satz 6. Da die letztgenannte nach der Voraussetzung über  $P, Q, S$  nicht verschwindet, folgt die Behauptung.

Auf die geometrische Bedeutung von  $\lambda, \mu, \nu$  gehen wir in 2.6.2. ein.

Die folgenden Aussagen lassen sich in naheliegender Analogiebildung zu den Sätzen 1 bis 8 herleiten; die einzelnen Beweise können wir dem Leser überlassen.

*Komplanar sind Punkte  $P, Q, S, X$  ( $\in R^n$ ) genau dann, wenn  $a := v(PQ)$ ,  $b := v(PS)$ ,  $c := v(PX)$  linear abhängig sind. Im  $R^3$  ist die Bedingung*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & s_1 & x_1 \\ p_2 & q_2 & s_2 & x_2 \\ p_3 & q_3 & s_3 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

*notwendig und hinreichend dafür, daß  $(p_1, p_2, p_3), \dots, (x_1, x_2, x_3)$  komplanar sind.*

*Für nicht komplanare  $P, Q, S, T$  definiere man  $X$  mit dem Ortsvektor*

$$\begin{aligned} \underline{x} &= p + u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + w\mathbf{c} \\ ((u, v, w) \in R^3; \mathbf{a} &:= v(PQ), \mathbf{b} := v(PS), \mathbf{c} := v(PT)); \end{aligned} \quad (11)$$

*dies ergibt eine bijektive Abbildung von  $R^3$  auf den  $R^3$ . Dabei charakterisiert  $u \geq 0$  den Halbraum  $PSTQ^+$ . Den  $R^3$  erhält man auch — statt durch (11) — durch*

$$\underline{x} = \lambda p + \mu q + \nu s + \vartheta t \quad (\lambda + \mu + \nu + \vartheta = 1); \quad (12)$$

*dabei charakterisiert  $\lambda, \mu, \nu, \vartheta \geq 0$  den Tetraederkörper  $PQST$ .*

## 2.4.3. Lineare Mannigfaltigkeiten

Die Parameterdarstellungen (1), (7), (11) haben die gemeinsame Gestalt

$$\underline{x} = p + u_1 \mathbf{a}_1 + \dots + u_k \mathbf{a}_k \quad (u_1, \dots, u_k \in R) \quad (13)$$

mit  $k = 1, 2, 3$ . Die bei (1), (7), (11) auftretenden Voraussetzungen über die dort genannten Punkte  $P, Q, \dots$  besagen (nach jeweils zuvor genannten Kriterien), daß  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  in (13) als linear unabhängig vorausgesetzt werden. Daher sind Geraden, Ebenen und der  $R^3$  dasselbe wie die in MfL Band 3, 5.3., betrachteten linearen Mannigfaltigkeiten der Dimension 1, 2 bzw. 3. Man kann (13) auch für  $k = 0$  sinngemäß als  $\underline{x} = p$  betrachten und damit den Punkt  $X = P$  als lineare Mannigfaltigkeit der Dimension 0 erhalten. Im  $R^n$  mit  $n > 3$  läßt sich ferner (13) mit mehr als drei linear unabhängigen  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  bilden (höherdimensionale lineare Mannigfaltigkeiten). Speziell heißt für jedes  $n$  eine  $(n - 1)$ -dimensionale lineare Mannigfaltigkeit im  $R^n$  eine *Hyperbene*.

Werden  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  in (13) nicht als linear unabhängig vorausgesetzt, so entstehen lineare Mannigfaltigkeiten, deren Dimension sich nach MfL Band 3, 5.3., als  $\text{Rang}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$  bestimmen läßt. (Einen einfachen Spezialfall hiervon,  $k = 1$  und  $\mathbf{a}_1 = 0$ , enthielt bereits der Zusatz zu Satz 1.) Entsprechend wird die Dimension der durch (3), (9), (12) dargestellten linearen Mannigfaltigkeiten kleiner, wenn



die dort auftretenden Voraussetzungen über  $P, Q, \dots$  nicht erfüllt sind (speziell bei (3) vgl. Zusatz 1 zu Satz 2). Der Leser zeige auch, daß die durch (3), (9), (12); (13) gegebenen Abbildungen von der Menge der Parameter-Tupel auf die lineare Mannigfaltigkeit in diesen sogenannten *Entartungsfällen* nicht mehr injektiv sind.

Geht eine lineare Mannigfaltigkeit durch den Ursprung  $O$ , so kann man in (13)  $p = o$  wählen. Die Vektoren in (13) bilden dann einen *linearen Unterraum* (*Vektorraum*), eine Unterstruktur der algebraischen Struktur „Vektorraum“ (MfL Band 3, 3.4.).

Eine lineare Mannigfaltigkeit durch  $O$  wird beim Identifizieren von Punkt und Ortsvektor identisch mit dem betreffenden Vektorraum. So erklären sich die in MfL Band 3, 3.4., genannten Veranschaulichungen linearer Unterräume durch Ursprungsgeraden, -ebenen usw.

Wird nun wieder für beliebiges  $p = v(OP)$  die Menge (lineare Mannigfaltigkeit)  $M$  aller Punkte  $X$  mit Ortsvektoren (13) betrachtet, so können wir dies mit Hilfe des Vektorraums

$$\mathfrak{L} := \{u_1 a_1 + \dots + u_k a_k : (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^k\}$$

als

$$M = \{X : v(PX) \in \mathfrak{L}\}$$

wiedergeben. Wir sagen,  $M$  sei durch *Anheften von  $\mathfrak{L}$  an  $P$*  entstanden. Nach MfL Band 3, 5.3., entsteht  $M$  auch, wenn man denselben Vektorraum  $\mathfrak{L}$  an irgendeinen anderen Punkt  $Q \in M$  anheftet.

Die Bezeichnung „linear“ (bei Mannigfaltigkeiten, Vektorräumen, überhaupt in der linearen Algebra) wird geometrisch plausibel durch

**Satz 10.** *Eine nichtleere Punktmenge  $M$  ist genau dann eine lineare Mannigfaltigkeit, wenn sie (falls sie mehr als einen Punkt enthält) zu je zweien ihrer Punkte deren Verbindungsgerade enthält.*

Zum Beweis ist zu zeigen, daß für  $P \in M$  die Vektormenge  $\mathfrak{L} := \{v(PX) : X \in M\}$  genau dann ein Vektorraum ist, wenn  $M$  die genannte Eigenschaft ( $U \in M \wedge V \in M \wedge U \neq V \Rightarrow g(UV) \subseteq M$ ) hat. Setzt man  $p := v(OP)$ ,  $u := v(PU)$ ,  $v := v(PV)$ , so ist diese Eigenschaft wegen des Zusatzes 2 zu Satz 2 gleichbedeutend damit, daß  $\mathfrak{L}$  die Eigenschaft

$$u \in \mathfrak{L} \wedge v \in \mathfrak{L} \wedge (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \wedge \lambda + \mu = 1 \Rightarrow \lambda u + \mu v \in \mathfrak{L} \quad (14)$$

hat. Zu beweisen ist somit, daß für Vektormengen  $\mathfrak{L}$  mit  $o \in \mathfrak{L}$  die Eigenschaft (14) genau dann vorliegt, wenn  $\mathfrak{L}$  ein Vektorraum ist, d. h. genau dann, wenn sogar

$$u \in \mathfrak{L} \wedge v \in \mathfrak{L} \wedge (l, m) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow lu + mv \in \mathfrak{L} \quad (15)$$

gilt.

Aus (15) folgt sofort (14). Umgekehrt sei (14) vorausgesetzt. Wendet man dies auf  $v = o$  an, so erhält man den Schluß ( $u \in \mathfrak{L} \wedge \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda u \in \mathfrak{L}$ ). Daher kann man nun (14) auf  $2u, 2v$  (mit  $u, v \in \mathfrak{L}$ ) statt  $u, v$  sowie auf  $\lambda := \frac{1}{2}$  und

$\mu := \frac{1}{2}$  anwenden und erhält den Schluß ( $u \in \mathcal{L} \wedge v \in \mathcal{L} \Rightarrow u + v \in \mathcal{L}$ ). Die beiden erhaltenen Schlüsse führen zur Behauptung (15).

#### 2.4.4. Durchschnitt und lineare Hülle. Der Dimensionssatz

Nach MfL Band 3, 3.4., ist der Durchschnitt jeder Familie von Vektorräumen im  $R^n$  wieder ein Vektorraum. Daraus ergab sich: Zu jeder Vektormenge  $\mathfrak{B}$  im  $R^n$  existiert genau ein (bezüglich der Relation  $\subseteq$ ) kleinster Vektorraum  $\mathcal{L}_0$ , der  $\mathfrak{B}$  umfaßt, und zwar ist  $\mathcal{L}_0$  der Durchschnitt aller  $\mathfrak{B}$  umfassenden Vektorräume  $\mathcal{L}$  im  $R^n$ . Für  $\mathcal{L}_0$  wurde die Bezeichnung *lineare Hülle* (im Sinne eines Vektorraums) gebraucht.

Nach MfL Band 3, 5.3., ist ferner der Durchschnitt jeder Familie linearer Mannigfaltigkeiten im  $R^n$  entweder leer oder eine lineare Mannigfaltigkeit. Daraus folgt analog: Zu jeder Punktmenge  $N \subseteq R^n$  existiert genau eine (bezüglich  $\subseteq$ ) kleinste lineare Mannigfaltigkeit  $M_0$ , die  $N$  umfaßt, und zwar ist  $M_0$  der Durchschnitt aller  $N$  umfassenden linearen Mannigfaltigkeiten  $M \subseteq R^n$ . Für  $M_0$  gebrauchen wir die Bezeichnung *H(N)*, *lineare Hülle* (im Sinne einer linearen Mannigfaltigkeit) von  $N$ . Sind  $A, B$  lineare Mannigfaltigkeiten, so schreiben wir statt  $H(A \cup B)$  kürzer  $H(AB)$ . Zur Berechnung dieser Hülle dient

Satz 11. Sind  $A, B$  lineare Mannigfaltigkeiten mit den Parameterdarstellungen

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{p} + u_1 a_1 + \dots + u_f a_f \quad (u_1, \dots, u_f \in \mathbb{R}) \quad (16)$$

bzw.

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{q} + v_1 b_1 + \dots + v_g b_g \quad (v_1, \dots, v_g \in \mathbb{R}) \quad (17)$$

( $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$  Ortsvektoren gegebener Punkte  $P, Q$ ;  $a_1, \dots, a_f, b_1, \dots, b_g$  gegebene Vektoren), so hat  $H(AB)$  die Parameterdarstellung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{p} + w_0(\mathfrak{q} - \mathfrak{p}) + w_1 a_1 + \dots + w_f a_f + w_{f+1} b_1 + \dots + w_{f+g} b_g \\ (w_0, \dots, w_{f+g} \in \mathbb{R}), \quad (18)$$

also insbesondere die Dimension  $h = \text{Rang}(\mathfrak{q} - \mathfrak{p}, a_1, \dots, a_f, b_1, \dots, b_g)$ .

Beweis. Ist  $H(AB)$  durch Anheften eines Vektorraums  $\mathcal{L}$  an  $P$  entstanden, so enthält  $\mathcal{L}$  die Vektoren  $a_1, \dots, a_f, \mathfrak{q} - \mathfrak{p}, \mathfrak{q} + b_1 - \mathfrak{p}, \dots, \mathfrak{q} + b_g - \mathfrak{p}$  und deren Linearkombinationen mit Koeffizienten  $w_1, \dots, w_f, w_0 - w_{f+1} - \dots - w_{f+g}, w_{f+1}, \dots, w_{f+g}$ , also enthält  $H(AB)$  alle Punkte mit Ortsvektoren (18). Andererseits bilden diese Punkte selbst schon eine  $A$  und  $B$  umfassende lineare Mannigfaltigkeit, die folglich auch  $H(AB)$  umfaßt und demnach gleich  $H(AB)$  ist.

Einer der wichtigsten Sätze der analytischen Geometrie und linearen Algebra ist der *Dimensionssatz*:

Satz 12. Haben zwei lineare Mannigfaltigkeiten  $A, B$  nichtleeren Durchschnitt  $D := A \cap B$ , so gilt für die Dimensionen  $f, g, d, h$  von  $A, B, D$  bzw.  $H := H(AB)$  die Gleichung  $f + g = d + h$ .

**Beweis.** Nach Voraussetzung existiert ein Punkt  $P \in D$ . Es seien  $A, B, D, H$  durch Anheften von  $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{D}, \mathfrak{H}$  an  $P$  gebildet. Der Vektorraum  $\mathfrak{D} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}$  (vgl. MfL Band 3, 5.3.) hat eine Basis aus  $d$  Vektoren  $\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_d$ . Diese kann wegen  $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{F}$  nach dem Austauschsatz (vgl. MfL Band 3, 4.2.) durch  $f-d$  weitere Vektoren  $\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_{f-d}$  zu einer Basis von  $\mathfrak{F}$  ergänzt werden, ebenso durch  $g-d$  Vektoren  $\mathfrak{y}_1, \dots, \mathfrak{y}_{g-d}$  zu einer Basis von  $\mathfrak{G}$ .

In Satz 11 seien  $q := p$  sowie als  $a_1, \dots, a_f$  bzw.  $b_1, \dots, b_g$  die ebengenannten Basen von  $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$  gewählt; hiernach wird  $\mathfrak{H}$  durch  $\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_d, \mathfrak{z}_{f-d}, \mathfrak{y}_1, \dots, \mathfrak{y}_{g-d}$  erzeugt. Können wir nun zeigen, daß diese  $f+g-d$  Vektoren linear unabhängig sind, so ist ihre Anzahl gleich der Dimension  $h$  von  $H$ , und der Satz ist bewiesen. Es sei also eine Gleichung

$$t_1 \mathfrak{z}_1 + \dots + t_d \mathfrak{z}_d + r_1 \mathfrak{z}_1 + \dots + r_{f-d} \mathfrak{z}_{f-d} + s_1 \mathfrak{y}_1 + \dots + s_{g-d} \mathfrak{y}_{g-d} = 0$$

( $t_1, \dots, t_d, r_1, \dots, r_{f-d}, s_1, \dots, s_{g-d} \in \mathbb{R}$ ) angenommen. Es genügt, hieraus  $s_1 = \dots = s_{g-d} = 0$  zu schließen; denn dann folgt wegen der linearen Unabhängigkeit der  $\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_d, \mathfrak{z}_{f-d}$  auch  $t_1 = \dots = t_d = r_1 = \dots = r_{f-d} = 0$ . Nun liegt der Vektor

$$v := t_1 \mathfrak{z}_1 + \dots + t_d \mathfrak{z}_d + r_1 \mathfrak{z}_1 + \dots + r_{f-d} \mathfrak{z}_{f-d} = -s_1 \mathfrak{y}_1 - \dots - s_{g-d} \mathfrak{y}_{g-d}$$

sowohl in  $\mathfrak{F}$  als auch in  $\mathfrak{G}$ , also in  $\mathfrak{D}$ ; es gibt daher  $u_1, \dots, u_d \in \mathbb{R}$  mit

$$u_1 \mathfrak{z}_1 + \dots + u_d \mathfrak{z}_d = v = -s_1 \mathfrak{y}_1 - \dots - s_{g-d} \mathfrak{y}_{g-d}.$$

Hieraus folgt wegen der linearen Unabhängigkeit der  $\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_d, \mathfrak{y}_1, \dots, \mathfrak{y}_{g-d}$  die Behauptung  $s_1 = \dots = s_{g-d} = 0$ .

Der Grundgedanke dieses Beweises besteht darin, je eine Basis von  $\mathfrak{F}$  und  $\mathfrak{G}$  so zu finden, daß ihr Durchschnitt eine Basis von  $\mathfrak{D}$  bildet (hierzu dient der Austauschsatz) und ihre Vereinigungsmenge eine Basis von  $\mathfrak{H}$  (hierbei ist nach der Anwendung von Satz 11 die lineare Unabhängigkeit die entscheidende nachzuweisende Aussage). Der Dimensionssatz ist dann nur noch die Anzahlformel MfL Band 1, 3.6. (11), für diese mengentheoretische Situation.

## 2.4.5. Durchschnittsberechnung. Parallele und windschiefe Mannigfaltigkeiten

Die theoretische Strukturaussage des Dimensionssatzes soll nun ergänzt werden durch praktische Berechnungsmöglichkeiten für  $D := A \cap B$ : Sind  $A, B$  durch (16) bzw. (17) gegeben, so ist  $D$  die Menge aller derjenigen Punkte  $X$ , zu denen  $f+g$  Zahlen  $u_1, \dots, u_f, v_1, \dots, v_g$  existieren, für die beide Gleichungen (16), (17), gelten. Daher entsteht  $D$  durch Einsetzen der Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$u_1 a_1 + \dots + u_f a_f - v_1 b_1 - \dots - v_g b_g = q - p \quad (19)$$

in (16) oder — was dann auf dasselbe hinausläuft — in (17). Insbesondere ist genau dann  $D \neq \emptyset$ , wenn (19) lösbar ist.

Nach MfL Band 3, 6.5., trifft dies *genau im Fall*

$$\text{Rang}(a_1, \dots, a_f, b_1, \dots, b_p) = \text{Rang}(a_1, \dots, a_f, b_1, \dots, b_p, q - p)$$

zu. Hieraus läßt sich nach Satz 11 ein zweiter Beweis des Dimensionssatzes gewinnen (2.4.7., Aufgabe 2). Außerdem aber können wir nun den Dimensionssatz noch durch analoge Aussagen für den Fall  $D = \emptyset$  vervollständigen. Wir wollen dies jedoch (vgl. die Sätze 13 und 14) nur für zwei spezielle Lagemöglichkeiten von  $A, B$  ausführen, die zunächst definiert seien:

*Zwei lineare Mannigfaltigkeiten  $A, B$ , entstanden durch Anheften von Vektorräumen  $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$  an Punkte  $P, Q$ , heißen genau dann zueinander parallel, wenn*

$$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G} \vee \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}$$

*gilt. (Man beachte, daß dies auch für  $A \cap B \neq \emptyset$  möglich ist. Es ist dann gleichbedeutend mit  $A \subseteq B \vee B \subseteq A$ ; der Dimensionssatz besteht hierbei in der Gleichung  $f + g = \min(f, g) + \max(f, g)$ .)*

*Zwei lineare Mannigfaltigkeiten  $A, B$  heißen genau dann zueinander windschief, wenn  $A \cap B = \emptyset$  gilt und Parameterdarstellungen (16), (17) von  $A, B$  derart existieren, daß das Vektorsystem  $a_1, \dots, a_f, b_1, \dots, b_p$  linear unabhängig ist. (Wir beweisen, daß dies äquivalent mit*

$$A \cap B = \emptyset \wedge \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G} = \{0\}$$

*ist: Durch Anheften von  $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$  an einen gemeinsamen Punkt  $S$  bilde man zwei lineare Mannigfaltigkeiten  $A', B'$ . Für diese zeigt der Dimensionssatz, daß  $\text{Rang}(a_1, \dots, a_f, b_1, \dots, b_p) = f + g$  äquivalent ist mit  $A' \cap B' = \{S\}$ .)*

In den folgenden Beweisen seien o. B. d. A. sogleich (16) mit linear unabhängigen  $a_1, \dots, a_f$  und (17) mit linear unabhängigen  $b_1, \dots, b_p$  gewählt.

**Satz 13.** *Haben zwei lineare Mannigfaltigkeiten  $A, B$  leeren Durchschnitt, so gilt für die Dimensionen  $f, g, h$  von  $A, B$  bzw.  $H(A, B)$  genau dann  $h = \max(f, g) + 1$ , wenn  $A, B$  parallel sind.*

**Beweis.** Aus  $A \cap B = \emptyset$  und Satz 11 folgt

$$\begin{aligned} \max(f, g) &\leq \text{Rang}(a_1, \dots, a_f, b_1, \dots, b_p) \\ &< \text{Rang}(a_1, \dots, a_f, b_1, \dots, b_p, q - p) = h. \end{aligned} \quad (20)$$

Sind  $A, B$  parallel, etwa mit  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$ , also  $a_1, \dots, a_f \in \mathfrak{G}$ , so geht (20) in

$$g < \text{Rang}(b_1, \dots, b_p, q - p) = h$$

über. Wegen  $\text{Rang}(b_1, \dots, b_p, q - p) \leq g + 1$  folgt damit  $h = g + 1 = \max(f, g) + 1$ .

Wird umgekehrt  $h = \max(f, g) + 1$  vorausgesetzt, etwa für  $f \leq g$  also  $h = g + 1$ , so folgt aus (20), d. h. aus  $g \leq \text{Rang}(a_1, \dots, a_f, b_1, \dots, b_p) < g + 1$  zunächst  $\text{Rang}(a_1, \dots, a_f, b_1, \dots, b_p) = g$  und daraus  $a_1, \dots, a_f \in \mathfrak{G}$ , also  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$ .

**Satz 14.** Für lineare Mannigfaltigkeiten  $A, B$  und die Dimensionen  $f, g, h$  von  $A, B$  bzw.  $H(AB)$  gilt genau dann  $h = f + g + 1$ , wenn  $A, B$  windschief sind.

**Beweis.** Nach Satz 11 gilt

$$h = \text{Rang}(a_1, \dots, a_f, b_1, \dots, b_g, q - p) \leq f + g + 1.$$

Darin gilt genau dann das Gleichheitszeichen, wenn das Vektorsystem  $a_1, \dots, a_f, b_1, \dots, b_g, q - p$  linear unabhängig ist. Dies ist äquivalent damit, daß erstens das System  $a_1, \dots, a_f, b_1, \dots, b_g$  den Rang  $f + g$  hat und zweitens  $A \cap B = \emptyset$  gilt.

In der projektiven Geometrie ordnet sich Satz 13 dem Dimensionssatz unter, weil die parallelen linearen Mannigfaltigkeiten gemeinsame uneigentliche Punkte besitzen, die ihren Durchschnitt, eine lineare Mannigfaltigkeit der Dimension  $d = \min(f, g) - 1$ , bilden. Beispielsweise haben zwei voneinander verschiedene, zueinander parallele Geraden als Durchschnitt genau einen uneigentlichen Punkt.

Windschiefe lineare Mannigfaltigkeiten haben auch in der projektiven Geometrie keine gemeinsamen Punkte; Satz 14 läßt sich aber formal dadurch dem Dimensionssatz unterordnen, daß man definiert, der leere Durchschnitt windschiefer linearer Mannigfaltigkeiten sei eine lineare Mannigfaltigkeit der „Dimension“  $d = -1$ .

## 2.4.6. Lagemöglichkeiten linearer Mannigfaltigkeiten im $R^2$ und $R^3$

Die Ergebnisse aus 2.4.4. und 2.4.5. befähigen uns, alle Möglichkeiten aufzuzählen, die bei linearen Mannigfaltigkeiten  $A, B \subseteq R^3$  für die Dimensionen  $f, g, h$  von  $A, B, H(AB)$  sowie für das Vorliegen von  $A \cap B = \emptyset$  oder  $A \cap B \neq \emptyset$  und im letzten Fall für die Dimension  $d$  von  $A \cap B$  bestehen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man  $f \leq g$  annehmen und dann wie folgt vorgehen:

Man stelle alle Tripel ganzer Zahlen  $f, g, h$  mit  $0 \leq f \leq g \leq h \leq 3$  und  $h \leq f + g + 1$  fest. Zu jedem dieser Tripel ist genau dann  $A \cap B \neq \emptyset$  möglich, wenn sogar  $h \leq f + g$  gilt, und dann erhält man  $d$  aus dem Dimensionssatz. Ferner ist genau dann  $A \cap B = \emptyset$  möglich, wenn  $g + 1 \leq h$  gilt. Wie Tabelle 2.1 zeigt, trifft dies im  $R^3$  nur für Anwendungsfälle von Satz 13 oder 14 zu. Die Lagemöglichkeiten im  $R^2$  entnimmt man der Tabelle 2.1, indem man alle Fälle mit  $h = 3$  wegläßt. Die Buchstaben  $P, Q$  bedeuten Punkte;  $k, l$  Geraden;  $\varepsilon, \delta$  Ebenen.

Damit ist zugleich gezeigt, daß die in 2.4.5. gegebenen Definitionen paralleler und windschiefer linearer Mannigfaltigkeiten mit den Definitionen aus MfL Band 6 für den  $R^2$  und  $R^3$  übereinstimmen: *Komplanare Geraden  $k, l$  sind genau dann parallel, wenn sie identisch oder disjunkt sind. Dasselbe gilt für Ebenen  $\varepsilon, \delta \in R^3$ . Eine Gerade  $k$  und eine Ebene  $\varepsilon$  im  $R^3$  sind genau dann parallel, wenn sie inzident oder disjunkt sind. Geraden  $k, l \subset R^3$  sind genau dann windschief, wenn sie nicht komplanar sind oder, äquivalent hiermit, wenn sie disjunkt und nicht parallel sind.*

Tabelle 2.1

$f$	$g$	$h$	$d$	$A$ und $B$	Hülle	Durchschnitt
0	0	0	0	$P, P$	$P$	$P$
0	0	1	—	$P, Q$ mit $P \neq Q$	$k(PQ)$	$\emptyset$
0	1	1	0	$P, k$ mit $P \in k$	$k$	$P$
0	1	2	—	$P, k$ mit $P \notin k$	$\varepsilon(Pk)$	$\emptyset$
0	2	2	0	$P, \varepsilon$ mit $P \in \varepsilon$	$\varepsilon$	$P$
0	2	3	—	$P, \varepsilon$ mit $P \notin \varepsilon$	$R^3$	$\emptyset$
0	3	3	0	$P, R^3$	$R^3$	$P$
1	1	1	1	$k, k$	$g$	$k$
1	1	2	0	$k, l$ komplanar, nicht parallel	$\varepsilon(kl)$	$P = k \cap l$
1	1	2	—	$k, l$ parallel, mit $k \neq l$	$\varepsilon(kl)$	$\emptyset$
1	1	3	—	$k, l$ windschief	$R^3$	$\emptyset$
1	2	2	1	$k, \varepsilon$ mit $k \subset \varepsilon$	$\varepsilon$	$k$
1	2	3	0	$k, \varepsilon$ nicht parallel	$R^3$	$P = k \cap \varepsilon$
1	2	3	—	$k, \varepsilon$ parallel, mit $k \not\subset \varepsilon$	$R^3$	$\emptyset$
1	3	3	1	$k, R^3$	$R^3$	$k$
2	2	2	2	$\varepsilon, \varepsilon$	$\varepsilon$	$\varepsilon$
2	2	3	1	$\varepsilon, \delta$ nicht parallel	$R^3$	$k = \varepsilon \cap \delta$
2	2	3	—	$\varepsilon, \delta$ parallel, mit $\varepsilon \neq \delta$	$R^3$	$\emptyset$
2	3	3	2	$\varepsilon, R^3$	$R^3$	$\varepsilon$
3	3	3	3	$R^3, R^3$	$R^3$	$R^3$

## 2.4.7. Aufgaben

- Man beweise Satz 6 aus Satz 5 unter Verwendung der Bedingung  $\det(q - p, \xi - p) = 0$ .
- In (19) setze man  $a_1, \dots, a_f$  als linear unabhängig und  $b_1, \dots, b_g$  als linear unabhängig voraus. Ist (19) lösbar, so schließe man aus Satz 11: Jede Lösung  $U := (u_1, \dots, u_f, v_1, \dots, v_g)$  läßt sich kombinieren aus einer speziellen Lösung  $U^{(0)}$  und  $f + g - h$  linear unabhängigen Lösungen  $U^{*(i)}$  ( $i = 1, \dots, f + g - h$ ) des zugehörigen homogenen Systems. Man beweise, daß nun die durch Einsetzen der  $U^{*(i)}$  in  $u_1 a_1 + \dots + u_f a_f$  (oder, was dasselbe ergibt, in  $v_1 b_1 + \dots + v_g b_g$ ) entstehenden  $f + g - h$  Vektoren eine Basis von  $\mathfrak{D}$  bilden.
- In der Ebene seien  $P \neq Q$  und  $Z$  die Punkte  $(0, 0)$ ,  $(g, 0)$  bzw.  $(g, 1)$ . Man berechne für  $X \in g(PQ)$  (Angabe nach 2.1.3.) die Gerade  $g(ZX)$  (Darstellung nach Satz 2) und dann ihren Schnittpunkt  $(0, q)$  mit der  $y$ -Achse. Diesem Ergebnis der Projektion der  $x$ -Achse auf die  $y$ -Achse aus dem Projektionszentrum  $Z$  (Abb. 2.26) entnehme man  $q = \text{TV}(P, Q; X)$ . Man verdeutliche sich hieran die Ausnahmebedingungen  $X \neq Q$  und  $q \neq 1$  sowie ihre Überwindung in der projektiven Geometrie. (Deren Name läßt sich aus der ausnahmsfreien Möglichkeit solcher Projektionen erklären.)
- Aus gegebenen Ortsvektoren von  $P, Q$  sowie gegebenem  $\text{TV}(P, Q; X)$  berechne man  $X$  und dann  $\text{TV}(P, X; Q)$ ,  $\text{TV}(Q, X; P)$  (Ausnahmefälle beachten!). Hieraus

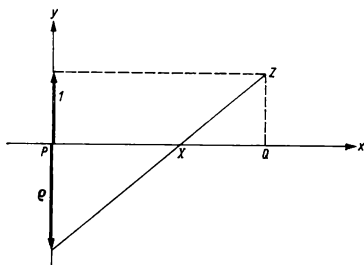


Abb. 2.26

und aus der in 2.4.1. gezeigten Aussage ( $TV(P, Q; X) < 0 \Leftrightarrow Zw(PXQ)$ ) beweise man  $TV(P, Q; X) > 1 \Leftrightarrow Zw(PQX)$  und  $0 < TV(P, Q; X) < 1 \Leftrightarrow Zw(QPX)$ . Man leite diese drei Aussagen auch geometrisch aus Aufgabe 3 her.

5. Ist  $PUZVWYQX$  ein Spat, so nenne man die linearen Hüllen  $A$  und  $B$  geeignet gewählter Eckenmengen derart, daß für jeden der Fälle aus 2.4.6. ein Beispiel entsteht. Man berechne für das Spat aus 2.2.5., Aufgabe 2, in allen diesen Beispielen jeweils  $H$  nach Satz 11 und  $D$  nach 2.4.5.

## 2.5. Lineare Gleichungen

### 2.5.1. Stellungsvektor, Hessesche Normalform, Lot; Neigungswinkel

Nach MfL Band 3, 5.3., ist für gegebene  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  mit  $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$  die Lösungsmenge  $M$  der linearen Gleichung

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0 = 0 \quad (1)$$

eine Hyperebene im  $\mathbb{R}^n$ . Dabei ist  $M$  durch (1) eindeutig bestimmt, umgekehrt aber (1) durch  $M$  nur bis auf einen von 0 verschiedenen Faktor.

Bei gegebener Gleichung (1) nennen wir  $M$  „die Hyperebene mit der Gleichung (1)“ oder auch kurz „die Hyperebene (1)“. Bei gegebener Hyperebene  $M$  wird jede zugehörige Gleichung (1) „eine (nicht: die) Gleichung von  $M$ “ genannt.

Für die ebene Geometrie haben wir somit zur analytisch-geometrischen Erfassung von Geraden  $g \subset \mathbb{R}^2$  außer den Parameterdarstellungen 2.4.1.(1); (3), (2) auch die Möglichkeit,  $g$  als Lösungsmenge von

$$ax + by + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}; (a, b) \neq (0, 0)) \quad (1')$$

anzugeben. Ebenso dienen in der räumlichen Geometrie zur Erfassung von Ebenen  $\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$  deren Gleichungen

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}; (a, b, c) \neq (0, 0, 0)) \quad (1'')$$

Führen wir die Vektoren  $\mathfrak{x} := \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ ,  $\mathfrak{N} := \langle a_1, \dots, a_n \rangle$  ein, so erhält (1) die Gestalt

$$\mathfrak{N}\mathfrak{x} + a_0 = 0. \quad (2)$$

Ist nun  $\mathfrak{x}_0$  der Ortsvektor eines Punktes  $X_0 \in M$ , so erfüllt er (2), d. h., so gilt  $a_0 = -\mathfrak{N}\mathfrak{x}_0$ . Setzt man dies in (2) ein, so erhält man als weitere Gestalt der Hyperebenengleichung

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) = 0. \quad (3)$$

Sie besagt:  $M$  ist die Menge aller derjenigen Punkte  $X \in R^n$ , für die die Vektoren  $\mathfrak{N}$  und  $\mathfrak{v}(X_0X)$  orthogonal sind, also die zu  $\mathfrak{N}$  senkrechte Hyperebene durch  $X_0$  (Abb. 2.27).

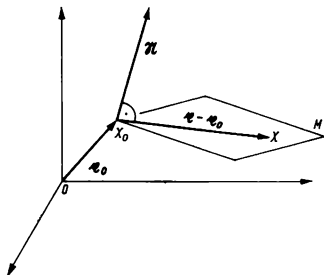


Abb. 2.27

Der aus (1) ablesbare Vektor  $\mathfrak{N}$  (speziell  $\mathfrak{N} = \langle a, b \rangle$  für Geraden (1') im  $R^2$  bzw.  $\mathfrak{N} = \langle a, b, c \rangle$  für Ebenen (1'') im  $R^3$ ) hat also die Eigenschaften, von 0 verschieden und zu allen Vektoren  $\mathfrak{v}(X_0X)$  mit  $X_0, X \in M$  orthogonal (kurz: zu  $M$  orthogonal) zu sein. Man nennt jeden Vektor mit diesen beiden Eigenschaften einen *Stellungsvektor* von  $M$ . Durch  $M$  ist  $\mathfrak{N}$  bis auf Vervielfachung mit einer von 0 verschiedenen Zahl eindeutig bestimmt. Heftet man daher den eindimensionalen Vektorraum mit der Basis  $\{\mathfrak{N}\}$  an irgendeinen Punkt  $P \in R^n$  an, so erhält man die (durch  $M$  und  $P$  eindeutig bestimmte) zu  $M$  senkrechte Gerade  $s$  durch  $P$ . (Ist  $P \in M$ , so heißt sie üblicherweise die *Senkrechte* in  $P$  auf  $M$ ; für beliebiges  $P \in R^n$  heißt sie das *Lot* von  $P$  auf  $M$ .) Aus der Geometrie des  $R^2$  und  $R^3$  wissen wir und für den  $R^n$  werden wir sogleich zeigen, daß sich  $s$  und  $M$  in genau einem Punkt  $Q$ , dem *Fußpunkt* des Lotes, schneiden. (Zuweilen nennt man auch nur die Strecke  $PQ$  das Lot von  $P$  auf  $M$ .) Die Länge  $|QP|$  heißt der *Abstand* zwischen  $P$  und  $M$ .

Zum Nachweis der eindeutigen Existenz von  $Q$  und zur Berechnung von  $|QP|$  gelangt man vorteilhaft nach folgender Vorbereitung: Man multipliziere die Gleichung



chung (1) bzw. (3) mit der Zahl

$$\frac{1}{|\mathfrak{N}|} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

Es ergibt sich als spezielle Gestalt der Gleichung von  $M$

$$\frac{1}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}} (a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + a_0) = 0 \quad (4)$$

bzw. mit der Abkürzung  $\mathfrak{n} := \frac{\mathfrak{N}}{|\mathfrak{N}|}$

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) = 0 \quad (|\mathfrak{n}| = 1). \quad (5)$$

Die Gleichung (4) bzw. (5) heißt *Hessesche Normalform* der Gleichung von  $M$ . Ihre linke Seite ist durch  $M$  bis auf Multiplikation mit der Zahl  $-1$  eindeutig bestimmt; jede Hyperebene hat also genau zwei (nur im Vorzeichen unterschiedene) Hessesche Normalformen. Nach 2.3.4. sind die Komponenten von  $\mathfrak{n}$ , d. h. die Koeffizienten der  $x_i$  in der Hesseschen Normalform, die Kosinus der Größen der Elementarwinkel von  $\mathfrak{N}$  gegen die positiven Koordinatenhalbachsen (Abb. 2.28).

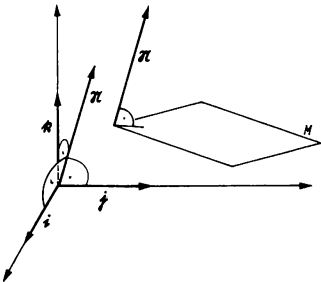


Abb. 2.28

**Satz 1.** Das Lot  $s$  von einem Punkt  $P$  auf eine Hyperebene  $M$  schneidet diese in genau einem Punkt  $Q$ . Orientiert man  $s$  gleichsinnig mit  $\mathfrak{n}$  (aus einer Hesseschen Normalform (5) von  $M$ ), so ist die Zahl

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{p} - \mathfrak{x}_0) \quad (6)$$

(mit  $\mathfrak{p} := \mathfrak{v}(OP)$ ) der hierdurch mit Vorzeichen versehene Abstand  $m(QP)$  zwischen  $P$  und  $M$ .

**Beweis.** Nach seiner Definition ist das Lot  $s$  durch die Parameterdarstellung  $\mathfrak{x} = \mathfrak{p} + t\mathfrak{n}$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) gegeben. Sein Durchschnitt mit  $M$  ergibt sich durch Ein-

setzen aller derjenigen Parameterwerte  $t^*$ , für die  $p + t^*n$  die Gleichung (5) erfüllt. Diese Forderung,  $n(p + t^*n - x_0) = 0$ , wird wegen  $n^2 = 1$  von genau einer Zahl,  $t^* = -n(p - x_0)$ , erfüllt. Daher besteht der Durchschnitt genau aus dem Punkt  $Q$  mit dem Ortsvektor

$$q = p + t^*n, \quad (7)$$

womit die erste Behauptung gezeigt ist.

Nun kann man  $s$  auch durch die Parameterdarstellung

$$x = q + un \quad (u \in \mathbb{R}) \quad (8)$$

geben; wegen (7) wird speziell  $p = q - t^*n$ . Bei der Darstellung (8) ist wegen  $|n| = 1$  und nach der im Satz genannten Orientierung von  $s$  stets  $m(QX) = u$ ; speziell wird  $m(QP) = -t^* = n(p - x_0)$ , w. z. b. w.

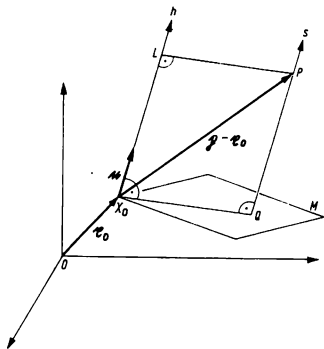


Abb. 2.29

Zur besseren Veranschaulichung von (6) sei noch ein zweiter Beweis angegeben, der die Definition des Skalarproduktes mehr synthetisch verwendet, insbesondere die eindeutige Existenz von Lotfußpunkten schon benutzt (Abb. 2.29): Man errichte die Senkrechte  $h$  in  $x_0$  auf  $M$  und fälle das Lot  $PL$  von  $P$  auf  $h$ . Dann ist  $PQx_0L$  ein Rechteck. Wir orientieren auch  $h$  gleichsinnig mit  $n$ ; nach 2.3.1.(2) ist dann  $n(p - x_0) = 1 \cdot m(x_0L) = m(QP)$ , w. z. b. w.

Anders als der zweite Beweis zeigte der erste in seinem ersten Teil zugleich eine Berechnungsmöglichkeit für Lotfußpunkte. Allgemeiner kann man diesen Beweisschritt als Beispiel eines Verfahrens zur *Durchschnittsermittlung linearer Mannigfaltigkeiten* nehmen, von denen die eine in Parameterdarstellung, die andere durch Gleichungen gegeben ist.

Der Hauptnutzen von Satz 1 besteht jedoch darin, den Abstand  $m(QP)$  angeben zu können, ohne erst  $Q$  berechnen zu müssen:

Man findet den Abstand (6) eines Punktes  $P$  von einer Hyperebene, indem man in die linke Seite der Hesseschen Normalform (5) statt der Variablen  $x_1, \dots, x_n$  die Koordinaten  $p_1, \dots, p_n$  von  $P$  einsetzt. Es ist also speziell

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (ap + bq + c)$$

der Abstand zwischen einem Punkt  $(p, q)$  in der Ebene und der Geraden (1'), ebenso

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} (ap + bq + cr + d)$$

der Abstand zwischen einem Punkt  $(p, q, r)$  und der Ebene (1'').

Wendet man diese Regel auf  $P := O$  an, so erhält man: Das von  $x_1, \dots, x_n$  freie Glied in der Hesseschen Normalform ist der Abstand des Ursprungs  $O$  von der Hyperebene.

Um das Vorzeichen  $\operatorname{sgn} m(QP)$  des Abstandes (6) zwischen  $P$  und  $M$  geometrisch zu deuten, lasse man  $Q$  auf ganz  $M$  variieren und denke sich demgemäß in (8) für  $q$  eine Parameterdarstellung von  $M$  eingesetzt. In der entstehenden Parameterdarstellung des  $R^n$  beachte man die Bedeutung von  $\operatorname{sgn} u$  nach 2.4.2.(7), (11) (bzw. nach entsprechenden Verallgemeinerungen für den  $R^n$  ( $n > 3$ )). So erhält man: Der Ausdruck (6) hat für alle  $P$  in je einem der beiden durch  $M$  getrennten offenen Halbräume des  $R^n$  einheitliches Vorzeichen. Dieselbe Aussage gilt (wie man durch Multiplikation von (6) mit  $|\mathfrak{N}|$  sieht) auch für den Ausdruck  $a_1 p_1 + \dots + a_n p_n + a_0$ .

Es seien nun  $M, M'$  zwei Hyperebenen mit Stellungsvektoren  $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}'$ . Wir können durch eventuelle Multiplikation eines Stellungsvektors mit  $-1$  erreichen, daß  $|\angle(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}')| \leq 90^\circ$  gilt. Ist dies geschehen, so nennen wir  $|\angle(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}')|$  die Größe des Neigungs- (oder Schnitt-)winkels zwischen den Hyperebenen  $M, M'$ , kurz (Abb. 2.30):

$$|\angle(M, M')| := |\angle(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}')| \quad (\leq 90^\circ).$$

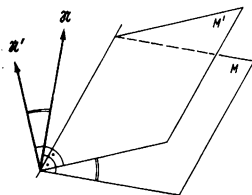


Abb. 2.30

Bei beliebigen (auch eventuell einen stumpfen Elementarwinkel bildenden) Stellungsvektoren  $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}'$  kann diese Größe aus ihrem Kosinus

$$\cos |\angle(M, M')| = |\cos |\angle(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}')|| = \frac{|\mathfrak{N}\mathfrak{N}'|}{|\mathfrak{N}| \cdot |\mathfrak{N}'|} \quad (9)$$

berechnet werden.

## 2.5.2. Parallele und konzentrische Hyperebenen

Eine Hyperebene  $M$  mit (1) bzw. (3) als Gleichung sei durch Anheften eines Vektorraums  $\mathfrak{B}$  an einen ihrer Punkte  $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  gebildet. Dann ist  $\mathfrak{B}$  die Menge aller Vektoren  $\mathbf{v} = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ , für die die Punkte  $(x_1^{(0)} + v_1, \dots, x_n^{(0)} + v_n)$  zu  $M$  gehören. Daraus folgt (vgl. 2.5.5., Aufgabe 1), daß  $\mathfrak{B}$  die Lösungsmenge der zu (1) bzw. (3) gehörigen homogenen Gleichung  $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$ , d. h.  $\mathfrak{N}\mathbf{v} = 0$ , ist.

Eine zweite Hyperebene  $M'$  mit  $\mathfrak{N}'$  als Stellungsvektor ist nun (nach der Definition paralleler linearer Mannigfaltigkeiten in 2.4.5. und wegen der Gleichheit der Dimensionen) genau dann zu  $M$  parallel, wenn sie durch Anheften desselben Vektorraums entsteht. Dies ist somit genau dann der Fall, wenn  $\mathfrak{B}$  auch die Lösungsmenge von  $\mathfrak{N}'\mathbf{v} = 0$  ist. Damit ist gezeigt:

**Satz 2.** *Zwei Hyperbenen  $M, M'$  mit Stellungsvektoren  $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}'$  sind genau dann parallel, wenn  $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}'$  linear abhängig sind.*

Sind zwei Hyperebenen im  $R^n$  ( $n \geq 2$ ) nicht parallel, so haben sie einen Durchschnitt der Dimension  $n - 2$ . (Der Leser beweise diese Behauptung.) Allgemein kann man schrittweise zeigen: Sind  $m$  ( $\leq n$ ) Hyperebenen  $M_1, \dots, M_m$  im  $R^n$  so gelegen, daß der Reihe nach für  $\mu = 2, \dots, m$  jeweils  $M_\mu$  nicht parallel zu  $M_1 \cap \dots \cap M_{\mu-1}$  ist, so hat  $M_1 \cap \dots \cap M_m$  die Dimension  $n - m$ . Statt dieser schrittweise formulierten Bedingung kann man im Fall  $m = n$  folgende Bedingung angeben:

**Satz 3.** *Genau dann haben  $n$  Hyperebenen des  $R^n$  mit Stellungsvektoren  $\mathfrak{N}_1, \dots, \mathfrak{N}_n$  genau einen gemeinsamen Punkt, wenn  $\det(\mathfrak{N}_1, \dots, \mathfrak{N}_n) \neq 0$  gilt.*

**Beweis.** Sind  $\mathfrak{N}_1 \mathbf{x} + a_{10} = 0, \dots, \mathfrak{N}_n \mathbf{x} + a_{n0} = 0$  Gleichungen der Hyperebenen, so ist dieses Gleichungssystem genau im Fall  $\det(\mathfrak{N}_1, \dots, \mathfrak{N}_n) \neq 0$  eindeutig lösbar.

Nach Satz 2 sind zwei Hyperebenen „im allgemeinen“ nicht parallel. Hiermit meint man: Für die Parallelität ist eine „besondere Bedingung“, das Nullwerden aller zweireihigen Unterdeterminanten der Matrix  $(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}')$ , erforderlich. Ähnlich haben  $n$  Hyperebenen nach Satz 3 „im allgemeinen“ genau einen gemeinsamen Punkt. Nun geht eine weitere  $(n + 1)$ -te Hyperebene „im allgemeinen“ nicht durch diesen Punkt. Dafür also, daß  $n + 1$  Hyperebenen des  $R^n$  überhaupt (mindestens) einen gemeinsamen Punkt haben, wird wieder eine „besondere Bedingung“ erforderlich sein. Mit dieser Vorüberlegung (die sich der Leser speziell für  $n = 3$  deutlich mache) ist die Behandlung der folgenden Aussagen motiviert:



Die letztere Möglichkeit liegt genau dann vor, wenn sowohl  $\text{Rang}(a_1, a_2, a_3) > 1$  (Existenz mindestens eines nichtparallelen Ebenenpaares) als auch  $\text{Rang}(a_1, a_2, a_3) < 3$  (Nichtexistenz eines Ebenentripels mit genau einem gemeinsamen Punkt) gilt. Hiermit gleichwertig ist es, zu fordern: Es treten Schnittgeraden nichtparalleler Ebenenpaare auf, aber keine solche Schnittgerade hat mit einer weiteren Ebene genau einen gemeinsamen Punkt. Der Leser zeige, daß die zuletzt genannte Teilforderung genau dann erfüllt ist, wenn zu je einer solchen Schnittgeraden höchstens noch parallele Schnittgeraden vorkommen.

In der projektiven Geometrie haben die genannten parallelen Mannigfaltigkeiten gemeinsame uneigentliche Punkte; d. h. die Bedingung  $\det(a_0, a_1, \dots, a_n) = 0$  ist für die projektive Geometrie ein notwendiges und hinreichendes Konzentritätskriterium.

Um dies und einige frühere Bemerkungen über projektive Geometrie (vgl. 2.4.1., 2.4.5.) zu erläutern, sei eine kurze zusammenfassende Beschreibung der analytisch-geometrischen Erfassung projektiv-geometrischer Sachverhalte eingeschaltet.

Ein Punkt des projektiven Raumes  $S^n$  wird durch ein Verhältnis  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  angegeben. Darunter versteht man eine Äquivalenzklasse in der Menge  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus (0, 0, \dots, 0)$  bezüglich der Äquivalenzrelation der Proportionalität. (Zwei  $(n+1)$ -Tupel  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ ,  $(x'_0, x'_1, \dots, x'_n)$  heißen *proportional*, wenn ein  $c \neq 0$  mit  $x'_0 = cx_0, \dots, x'_n = cx_n$  existiert.) Die Punkte  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  mit  $x_0 \neq 0$  werden mit den Punkten  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_n \\ x_0 \end{pmatrix}$  des euklidischen  $\mathbb{R}^n$  identifiziert. Die Punkte mit  $x_0 = 0$  dagegen sind die „uneigentlichen“, dem  $\mathbb{R}^n$  nicht angehörenden Punkte des  $S^n$ .

Die baryzentrischen Koordinaten (vgl. 2.4.2.) erweisen sich (bei geeignetem Koordinatensystem) als spezielle projektive Koordinaten  $\lambda : \mu : \nu$ .

Eine andersartige Beziehung zum projektiven Raum  $S^n$  erhält man, wenn man einen euklidischen „Hilfsraum“  $\mathbb{R}^{n+1}$  heranzieht. In ihm legt nämlich je ein Verhältnis  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  stets eine gesamte Ursprungsgerade fest, die folglich mit dem Punkt  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  des  $S^n$  identifiziert werden kann. So kann man sich z. B. die projektive Ebene  $S^2$  vorstellen als das Bündel aller Ursprungsgeraden des  $\mathbb{R}^3$ ; jede Gerade des Bündels „ist“ ein „Punkt“ des  $S^2$ . Eine gewohntere Form erhält diese Veranschaulichung, wenn man (statt der identifizierenden Ausdrucksweise) nur sagt, der Punkt „sei die Projektion“ der Geraden auf die projektive Ebene. Diese Ebene kann man sich dann wieder „konkret“ (nur ohne „konkret sichtbare“ uneigentliche Punkte) als irgendeine Ebene vorstellen, die nicht durch den Ursprung geht. (Vgl. auch 2.4.7., Aufgabe 3, wo das Bündel aller Geraden durch  $Z$  auf die projektiven Geraden  $x = 0$  und  $y = 0$  projiziert wurde.)

Schreibt man eine Gleichung einer Hyperebene  $M \subset \mathbb{R}^n$ , also

$$a_0 + a_1 \frac{x_1}{x_0} + \dots + a_n \frac{x_n}{x_0} = 0$$

mit  $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ , in der Form

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0, \quad (11)$$

so heißt die Menge aller Punkte des  $S^n$ , die diese Gleichung erfüllen, eine *Hyperebene* des  $S^n$ . (Ähnlich entsteht allgemein für ein Polynom  $f$  des Grades  $m$  aus der Gleichung

$f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) = 0$  durch Multiplikation mit  $x_0^m$  eine Gleichung  $F(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$ , in der  $F$  ein homogenes Polynom  $m$ -ten Grades ist. In diesem Sinne heißt die neue Variable  $x_0$ , die beim Übergang vom  $\mathbb{R}^n$  zum  $S^n$  auftrat, eine „homogenisierende Variable“.) Außer den genannten Hyperebenen gibt es im  $S^n$  noch die Hyperebene

(11) mit  $(a_1, \dots, a_n) = (0, \dots, 0)$  und  $a_0 \neq 0$ , also kurz die Hyperebene  $x_0 = 0$ , die die Menge aller uneigentlichen Punkte ist.

Nunmehr sind Punkte  $P$  und Hyperebenen  $M$  des  $S^n$  in völlig gleichartiger Weise durch Verhältnisse  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  bzw.  $(a_0 : a_1 : \dots : a_n)$  charakterisiert. Die Bedingung der Inzidenz  $P \in M$  ist (11); auch in ihr treten die  $x_i$  und die  $a_i$  in gleichartiger Weise auf. Daraus folgt das *Dualitätsprinzip der projektiven Geometrie*: Jede wahre Inzidenzaussage über Punkte und Hyperebenen geht in eine wahre Aussage über, wenn man die Begriffe

Punkt — Hyperebene

$\in$  —  $\ni$

und aus ihnen in gleichartiger Weise gebildete Begriffe jeweils untereinander vertauscht. In dieser Weise dual zueinander sind z. B. synthetisch-geometrische Satzpaare wie etwa für die projektive Ebene  $S^2$ :

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Durch je zwei Punkte } P \neq Q \text{ geht} \\ \text{genau eine Gerade} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Je zwei Geraden } g \neq h \text{ schneiden} \\ \text{sich in genau einem Punkt.} \end{array} \right\}$

Aber auch analytisch-geometrisch duale Satzpaare lassen sich zusammenstellen, z. B. das obgenannte Konzentritätskriterium  $\det(a_{ij}) = 0$  für  $n+1$  Hyperebenen

$\sum_{j=0}^n a_{ij}x_j = 0$  ( $i = 0, \dots, n$ ) und die Kollinearitäts- bzw. Komplanaritätskriterien 2.4.1.,

Satz 6, bzw. 2.4.2. (10) für die dort genannten drei Punkte  $(1 : p_1 : p_2)$ ,  $(1 : q_1 : q_2)$ ,  $(1 : x_1 : x_2)$  (vgl. auch 2.4.2., Satz 9) bzw. vier Punkte  $(1 : p_1 : p_2 : p_3)$ , ...,  $(1 : x_1 : x_2 : x_3)$ .

Die Gleichung (11), die im  $S^n$  eine  $(n-1)$ -dimensionale lineare Mannigfaltigkeit darstellt, bedeutet in dem „Hilfsraum“  $R^{n+1}$  eine  $n$ -dimensionale Ursprungsmannigfaltigkeit. Analog sind den im  $R^{n+1}$  durch homogene lineare Gleichungssysteme gegebenen  $(m+1)$ -dimensionalen Ursprungsmannigfaltigkeiten die  $m$ -dimensionalen linearen Mannigfaltigkeiten im  $S^n$  zugeordnet. Dem Nullpunkt  $O \in R^{n+1}$  läßt sich dabei nur die leere Menge des  $S^n$  zuordnen, z. B., wenn sie als Durchschnitt windschiefer linearer Mannigfaltigkeiten  $A, B \subset S^n$  auftritt (da dann der entsprechende Durchschnitt im  $R^{n+1}$  genau aus dem Nullpunkt besteht). Damit haben wir die formale Festsetzung der „Dimension“  $-1$  für die leere Menge motiviert. Der *Dimensionsatz*  $f + g = d + h$  gilt nunmehr im projektiven Raum ohne Ausnahme, da die entsprechenden Ursprungsmannigfaltigkeiten im  $R^{n+1}$  stets nichtleeren Durchschnitt haben und für sie aus 2.4.4., Satz 12, selbst die Gleichung  $(f+1) + (g+1) = (d+1) + (h+1)$  folgt.

## 2.5.3. Symmetriehyperebenen

Zu den aus der Elementargeometrie bekannten „geometrischen Örtern“ und „Grundkonstruktionen“ gehören außer den schon behandelten Loten und Senkrechten auch gewisse Symmetriekonstruktionen, die wir nun als Anwendungsbeispiele der allgemein bereitgestellten analytisch-geometrischen Methoden behandeln wollen.

### 2.5.3.1. Mittelsenkrechte

Gegeben seien  $p_1 = v(OP_1) \neq v(OP_2) = p_2$ . Die Menge aller Punkte  $X$  mit  $|P_1X| = |P_2X|$  wird für  $\xi = v(OX)$  charakterisiert durch  $(\xi - p_1)^2 = (\xi - p_2)^2$  oder,

gleichwertig hiermit, durch

$$2\bar{x} \cdot (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) = \mathbf{p}_2^2 - \mathbf{p}_1^2. \quad (12)$$

Wegen  $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 \neq 0$  ist (12) die Gleichung einer Hyperebene. Diese geht, da (12) von  $\bar{x} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$  erfüllt wird, durch den Mittelpunkt der Strecke  $P_1P_2$ , und sie steht senkrecht auf ihr, da sie  $\mathbf{b}(P_1P_2) = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$  als Stellungsvektor hat. Daher ist sie die *mittelsenkrechte Hyperebene der Strecke  $P_1P_2$*  (Abb. 2.31).

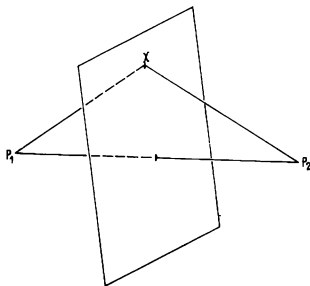


Abb. 2.31

### 2.5.3.2. Winkelhalbierende und Mittelparallele

Gegeben seien zwei Hyperebenen  $M_1 \neq M_2$  mit  $f_i(\bar{x}) := \mathbf{n}_i(\bar{x} - \mathbf{p}_i) = 0$  ( $i = 1, 2$ ) als Hesseschen Normalformen. Die Menge aller Punkte  $X$ , deren Abstand von  $M_1$  gleich ihrem Abstand von  $M_2$  ist, wird nach Satz 1 durch  $|f_1(\bar{x})| = |f_2(\bar{x})|$  charakterisiert. Sie ist daher die Vereinigungsmenge aus der Menge  $H_1$  aller  $X$  mit

$$f_1(\bar{x}) - f_2(\bar{x}) = 0 \quad (13)$$

und der Menge  $H_2$  aller  $X$  mit

$$f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}) = 0. \quad (14)$$

a) Sind  $M_1, M_2$  nicht parallel, so ist  $\mathbf{n}_1 \neq \mathbf{n}_2$  und  $\mathbf{n}_1 \neq -\mathbf{n}_2$ . Daher sind (13), (14), nämlich  $(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2)\bar{x} = \mathbf{n}_1\mathbf{p}_1 - \mathbf{n}_2\mathbf{p}_2$  bzw.  $(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2)\bar{x} = \mathbf{n}_1\mathbf{p}_1 + \mathbf{n}_2\mathbf{p}_2$ , Hyper-ebenen-gleichungen. Man bestätigt sofort: Jede der Hyperebenen  $H_1, H_2$  hat mit jeder der Hyperebenen  $M_1, M_2$  denselben  $(n-2)$ -dimensionalen Durchschnitt wie  $M_1, M_2$  untereinander. Aus den Stellungsvektoren  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2$  von  $M_1, M_2, H_1, H_2$  berechnet man ferner nach (9) leicht, daß  $|\angle(M_1, H_k)| = |\angle(M_2, H_k)|$  ( $k = 1, 2$ ) gelten. Daher sind  $H_1, H_2$  die beiden *winkelhalbierenden Hyperebenen* zu  $M_1, M_2$  (Abb. 2.32).



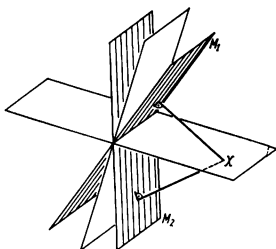


Abb. 2.32

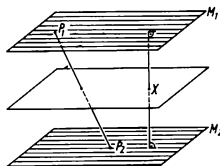


Abb. 2.33

b) Sind  $M_1, M_2$  parallel, so läßt sich durch eventuelle Multiplikation eines der Stellungsvektoren mit  $-1$  erreichen, daß  $n := n_1 = n_2$  gilt. Damit gehen (13), (14) in  $0 = n(p_1 - p_2)$  bzw.  $2n\xi = n(p_1 + p_2)$  über. Ist  $p_i = v(OP_i)$  ( $i = 1, 2$ ), also  $P_i \in M_i$ , so ist  $P_1 \in M_2$ , d. h.  $n(p_1 - p_2) = f_2(p_1) \neq 0$  und daher  $H_1$  leer. Dagegen ist  $H_2$  eine Hyperebene. Sie geht durch den Mittelpunkt von  $P_1P_2$  und hat  $2n$  als Stellungsvektor. Folglich ist sie die *mittelparallele Hyperebene* zu  $M_1, M_2$  (Abb. 2.33).

#### 2.5.4. Spezielle Hyperebenengleichungen

Die folgenden Sätze nennen noch einige Gestalten von Hyperebenengleichungen, in denen spezielle geometrische Größen auftreten, durch die sich eine Hyperebene festlegen läßt.

**Satz 5.** Für eine Gerade  $g \subset \mathbb{R}^2$  sei im Fall  $O \in g$  ein beliebiger Stellungsvektor  $n$  gewählt, im Fall  $O \notin g$  aber  $n := v(OQ)$ , wobei  $Q$  der Fußpunkt des Lotes von  $O$  auf  $g$  ist. Sind dann  $\alpha := m(\hat{x}(i, n))$  und  $d := |OQ|$  gegeben (Abb. 2.34), so ist  $x \cos \alpha + y \sin \alpha - d = 0$  *Hessesche Normalform* von  $g$ .

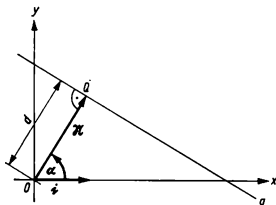


Abb. 2.34

Beweis. Der erste bzw. zweite Richtungskosinus von  $\mathfrak{N}$  ist

$$\cos |\angle(\mathfrak{N}, i)| = \cos m(\hat{x}(i, \mathfrak{N})) = \cos \alpha$$

bzw.

$$\cos |\angle(\mathfrak{N}, j)| = \cos (m(\hat{x}(i, j)) - m(\hat{x}(i, \mathfrak{N}))) = \sin \alpha;$$

wird das Lot von  $O$  auf  $g$  gleichsinnig mit  $\mathfrak{N}$  orientiert, so ist der Abstand  $m(QO) = -d$ .

**Zusatz.** Ersetzt man  $\mathfrak{N}$  durch  $(-\mathfrak{N})$ , so geht  $\cos m(\hat{x}(i, \mathfrak{N}))$  über in

$$\begin{aligned} \cos (m(\hat{x}(i, -\mathfrak{N}))) &= \cos (m(\hat{x}(i, \mathfrak{N})) + m(\hat{x}(\mathfrak{N}, -\mathfrak{N}))) \\ &= -\cos m(\hat{x}(i, \mathfrak{N})), \end{aligned}$$

ebenso  $\cos m(\hat{x}(j, \mathfrak{N}))$  in  $-\cos m(\hat{x}(j, \mathfrak{N}))$ ; ferner  $m(QO)$  wegen der Umorientierung in  $-m(QO)$ . Dabei entsteht also die mit  $-1$  multiplizierte Hessesche Normalform.

**Satz 6.** Für eine Gerade  $g \subset R^2$  seien  $P, Q \in g$  mit  $a := v(PQ) \neq 0$ ,  $\operatorname{sgn}(i, a) \geq 0$  gewählt. Wird dann  $\sigma := |\angle(i, a)| \neq 90^\circ$  vorausgesetzt und sind  $\sigma$  sowie der (folglich eindeutig existierende) Schnittpunkt  $(0, b)$  von  $g$  mit der  $y$ -Achse gegeben (Abb. 2.35), so ist  $y = mx + b$  (mit  $m := \tan \sigma$ ) Gleichung von  $g$ .

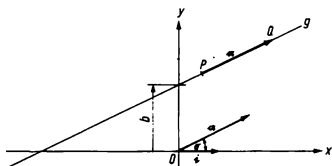


Abb. 2.35

Beweis. Wegen  $\operatorname{sgn}(i, a) \geq 0$  ist  $m(\hat{x}(i, a)) = \sigma \bmod 360^\circ$ . Da man in Satz 5 oder seinem Zusatz  $\mathfrak{N} := \hat{a}$  wählen kann, wird dann für

$$\alpha := m(\hat{x}(i, \hat{a})) = (\sigma + 90^\circ) \bmod 360^\circ; \varepsilon := 1 \text{ oder } \varepsilon := -1.$$

$x(-\sin \sigma) + y \cos \sigma - \varepsilon d = 0$  eine Hessesche Normalform von  $g$ . Sie wird von  $(0, b)$  erfüllt; daher gilt  $\varepsilon d = b \cos \sigma$ . Setzt man dies ein und dividiert durch  $\cos \sigma$ , so erhält man  $(-m)x + y - b = 0$ .

Man nennt  $\sigma$  den Anstiegswinkel und  $m$  den Anstieg von  $g$ ; die Gleichung  $y = mx + b$  wird Normalform genannt.

**Satz 7.** Ist die lineare Hülle von  $n$  Punkten  $(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, (x_{n1}, \dots, x_{nn})$  des  $R^n$  eine Hyperebene  $M$ , so hat sie

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_n \\ 1 & x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

als Gleichung.

Der Beweis folgt aus 2.4.1., Satz 6, bzw. der Aussage über 2.4.2.(10) bzw. der entsprechend herzuleitenden Aussage im  $R^n$ .

Man kann den Satz auch daraus erhalten, daß die Determinante aus (15) durch Subtraktion der ersten Zeile von den übrigen und anschließende Entwicklung nach der ersten Spalte in  $\det(a_1, \dots, a_n)$  übergeht, wobei  $a_r := \langle x_{r1} - x_1, \dots, x_{rn} - x_n \rangle$  der von  $(x_1, \dots, x_n)$  zu  $(x_{r1}, \dots, x_{rn})$  führende Vektor ist ( $r = 1, \dots, n$ ). Die linke Seite von (15) ist also das Volumen des von  $a_1, \dots, a_n$  aufgespannten Parallelotops; sie verschwindet genau dann, wenn dieses entartet, d. h.  $(x_1, \dots, x_n)$  in  $M$  liegt.

Diese Herleitung zeigt auch nochmals, daß für Punkte außerhalb  $M$  das Vorzeichen der linken Seite von (15) die beiden durch  $M$  getrennten Halbräume charakterisiert (vgl. diese Charakterisierung durch  $a_1 p_1 + \dots + a_n p_n + a_0$  in 2.5.1.).

Für  $n = 2$  ist (15), d. h.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

bei gegebenen  $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ , die sogenannte *Zweipunktegleichung* der Geraden,  $(x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0$ . Von ihr kann man, wenn  $x_1 \neq x_2$  ist, zur *Punkt-Richtungsgleichung*  $y - y_1 = m(x - x_1)$  übergehen, wobei ein Vergleich

mit Satz 6 zeigt, daß  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  der Anstieg ist.

## 2.5.5. Aufgaben

1. Für gegebene  $a_0$  und  $\mathfrak{R} := \langle a_1, \dots, a_n \rangle$  beweise man: Ist  $\mathfrak{x}^{(0)} := \langle x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)} \rangle$  Lösung von  $\mathfrak{R}\mathfrak{x} + a_0 = 0$  und  $\mathfrak{v} := \langle v_1, \dots, v_n \rangle$  Lösung von  $\mathfrak{R}\mathfrak{v} = 0$ , so ist  $\mathfrak{x}^{(0)} + \mathfrak{v}$  Lösung von  $\mathfrak{R}\mathfrak{x} + a_0 = 0$ . Sind  $\mathfrak{x}^{(0)}$  und  $\mathfrak{x}^{(0)} + \mathfrak{v}$  Lösungen von  $\mathfrak{R}\mathfrak{x} + a_0 = 0$ , so ist  $\mathfrak{v}$  Lösung von  $\mathfrak{R}\mathfrak{v} = 0$ .
2. Man berechne ohne Ermittlung der Höhenfußpunkte die Höhenlängen in dem Dreieck aus 2.3.9., Aufgabe 3.
3. Für dasselbe Dreieck ermittle man Gleichungen der Mittelsenkrechten der Seiten sowie Gleichungen der winkelhalbierenden Geraden der Innen- und der Außenwinkel.
4. Man stelle ohne Zeichnung oder sonstige Anschauungsmittel fest, welche der in Aufgabe 3 gefundenen Geraden Innen- und welche Außenwinkelhalbierende sind. Hinweis: Man ermittle nach 2.4.2., Satz 8, einen Punkt im Innern des Dreiecks und vergleiche die Vorzeichen, die entstehen, wenn man diesen Punkt sowie Punkte der Winkelhalbierenden in die bei Aufgabe 3 verwendeten Hesseschen Normalformen der Dreiecksseiten einsetzt.
5. Man weise die in Aufgabe 3 gefundenen Mittelsenkrechten als konzentrisch nach, ebenso die Innenwinkelhalbierenden, ferner je zwei Halbierende von Außenwinkeln und die Halbierende des dritten Innenwinkels.
6. Man gewinne eine Gleichung der Ebene durch  $(-2, 2, 3)$ ,  $(0, 3, 0)$ ,  $(-3, 5, 5)$  a) nach Satz 7, b) nach (3) unter Verwendung von  $\mathfrak{R} := \langle 2, 1, -3 \rangle \times \langle -1, 3, 2 \rangle$ .
7. Man berechne für je zwei nichtparallele Seitenflächen des Spats aus 2.2.5., Aufgabe 2, die Größe ihres Neigungswinkels.

## 2.6. Konvexe Polygone

### 2.6.1. Konvexe Hülle, Schwerpunkt

In formaler Analogie zu 2.4.3., Satz 10, steht die Definition: Eine Punktmenge  $C \subseteq R^n$  heißt *konvex*, wenn sie zu je zweien ihrer Punkte auch deren Verbindungsstrecke enthält. Aus dieser Definition folgt: *Der Durchschnitt jeder Familie konvexer Mengen im  $R^n$  ist wieder eine konvexe Menge.* Hieraus läßt sich mit denselben Schlußverfahren wie bei Vektorräumen und linearen Mannigfaltigkeiten herleiten: *Zu jeder Punktmenge  $N \subseteq R^n$  existiert genau eine (bezüglich  $\subseteq$ ) kleinste konvexe Menge  $C_0$ , die  $N$  umfaßt, und zwar ist  $C_0$  der Durchschnitt aller  $N$  umfassenden konvexen Mengen  $C \subseteq R^n$ .* Man nennt  $C_0$  die *konvexe Hülle* von  $N$ . Die konvexe Hülle einer einpunktigen Menge  $\{P\}$  ist  $\{P\}$ ; die konvexe Hülle von  $\{P, Q\}$  ist die Strecke  $PQ$ .

Wir können die formale Analogie noch fortsetzen: Die *lineare* Hülle einer endlichen Punktmenge  $\{P_0, \dots, P_k\}$  läßt sich, z. B. durch wiederholte Anwendung von 2.4.4., Satz 11, nachweisen als Menge aller  $X$  mit Ortsvektoren

$$\xi = p_0 + t_1(p_1 - p_0) + \dots + t_k(p_k - p_0) \quad (t_1, \dots, t_k \in R)$$

(worin  $p_i := v(OP_i)$  ist) oder — in symmetrischer Schreibweise — mit

$$\xi = \mu_0 p_0 + \mu_1 p_1 + \dots + \mu_k p_k \quad (\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_k = 1). \quad (1)$$

Entsprechend hierzu gilt nun

**Satz 1.** Die konvexe Hülle  $C_0$  von  $\{P_0, \dots, P_k\}$  ist die Menge aller  $X$ , deren Ortsvektoren eine Darstellung (1) mit

$$\mu_0 \geq 0, \dots, \mu_k \geq 0 \quad (2)$$

besitzen.

**Beweis.** Für einpunktige Mengen  $\{P_0\}$  ist die Behauptung richtig. Sie gelte bereits für  $k$ -punktige Mengen  $\{P_1, \dots, P_k\}$  statt für  $(k+1)$ -punktige  $\{P_0, \dots, P_k\}$ . Aus dieser Annahme schließen wir zuerst, daß  $C_0$  die Menge aller  $X$  mit (1), (2) umfaßt: Es sei  $X$  ein Punkt mit (1), (2). Dann wählen wir, falls  $\mu_0 = 1$ , also  $\sigma := \mu_1 + \dots + \mu_k = 0$  ist,  $k$  Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$  mit  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ . Falls aber  $\mu_0 < 1$ , also  $\sigma := \mu_1 + \dots + \mu_k > 0$  ist, definieren wir  $\lambda_1 := \mu_1/\sigma, \dots, \lambda_k := \mu_k/\sigma$ . Hiernach gilt in beiden Fällen

$$\xi = \mu_0 p_0 + \sigma(\lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_k p_k)$$

sowie

$$\mu_0 + \sigma = \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1;$$

$\mu_0, \sigma, \lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ . Daher liegt  $X$  auf der Verbindungsstrecke von  $P_0$  mit einem Punkt der konvexen Hülle von  $\{P_1, \dots, P_k\}$ ; folglich gilt  $X \in C_0$ .

Andererseits rechnet man leicht nach, daß die Punkte mit (1), (2) selbst eine konvexe Menge bilden. Diese enthält  $P_0, \dots, P_k$ , also auch  $C_0$  und ist demnach gleich  $C_0$ .

Jede einzelne der Forderungen  $\mu_0 \geq 0, \dots, \mu_k \geq 0$  sondert aus der linearen Hülle (1) einen Halbraum aus; somit ist  $C_0$  bereits der Durchschnitt von  $(P_0, \dots, P_k$  umfassenden) Halbräumen. Daher sind die hier in Satz 1 charakterisierten konvexen Hüllen endlicher Punktmengen in der Ebene bzw. im Raum dasselbe wie die in 1.1.5. bzw. 1.2.5. betrachteten konvexen Polygone bzw. konvexen Polyeder.

Durch vollständige Induktion folgt aus der physikalischen Deutung von 2.4.1.(6) deren Verallgemeinerung:

**Satz 2.** *Besteht ein Massensystem aus den in  $P_i$  befindlichen Massen von  $m_i$  Gramm ( $i = 1, \dots, k$ ), so hat der Schwerpunkt den Ortsvektor (1) mit  $\mu_i := \frac{m_i}{m_1 + \dots + m_k}$ .*

Für  $m_1 = \dots = m_k = 1$  vergleiche man bereits 2.2.5., Aufgabe 3.

## 2.6.2. Die Sätze von Ceva und Menelaos

Es seien  $a, b, c$  die Ortsvektoren dreier nichtkollinearer Punkte  $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ . Nachdem wir die Bildung von  $X$  mit dem Ortsvektor  $\bar{x} = \lambda a + \mu b + \nu c$  ( $\lambda + \mu + \nu = 1$ ) zur Darstellung der Ebene sowie (bei  $\lambda, \mu, \nu \geq 0$ ) des Dreiecks untersucht und als Schwerpunkt physikalisch gedeutet haben, wollen wir zu speziell geometrischen Deutungen kommen.

**Satz 3.** *Für  $\bar{x} = \lambda a + \mu b + \nu c$  ( $\lambda + \mu + \nu = 1$ ) gilt*

$$\begin{aligned}\lambda &= m(XBC) : m(ABC), & \mu &= m(AXC) : m(ABC), \\ \nu &= m(ABX) : m(ABC).\end{aligned}\tag{3}$$

**Beweis** (vgl. 2.3.5. und den dort gegebenen Hinweis). Ersetzt man in  $2m(XBC)$   $= \det(b - \bar{x}, c - \bar{x}) = \det(\bar{x} - c, b - \bar{x})$  den zweiten Vektor  $b - \bar{x}$  durch die Summe  $(b - \bar{x}) + (\bar{x} - c) = b - c$  und dann den ersten Vektor  $\bar{x} - c$  durch  $(\bar{x} - c) - \mu(b - c) = \lambda(a - c)$ , so erhält man

$$2m(XBC) = \lambda \det(a - c, b - c) = 2\lambda m(ABC).$$

Entsprechend folgen die anderen Formeln.

Eine weitere geometrische Deutung erhält man unter der Voraussetzung, daß  $X \neq A, B, C$  ist und auch  $U := g(AX) \cap g(BC)$ ,  $V := g(BX) \cap g(CA)$ ,

$W := g(CX) \cap g(AB)$  sämtlich existieren und von allen Punkten  $A, B, C$  verschieden sind (Abb. 2.36), durch die entstehenden *Teilverhältnisse*. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \text{TV}(B, C; U) &= -\nu : \mu, & \text{TV}(C, A; V) &= -\lambda : \nu, \\ \text{TV}(A, B; W) &= -\mu : \lambda. \end{aligned} \quad (4)$$

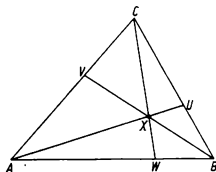


Abb. 2.36

Man kann dies synthetisch-geometrisch aus (3) beweisen, etwa mit Hilfe der Lote von  $B, C$  auf  $g(AX)$  (der Leser führe dies aus). Analytisch-geometrisch ergibt sich (4) z. B. so: Es gibt  $\beta, \gamma; \alpha, \xi$  mit  $\beta + \gamma = \alpha + \xi = 1$  und

$$u := v(OU) = \beta b + \gamma c = \alpha a + \xi x = (\alpha + \lambda \xi) a + \mu \xi b + \nu \xi c.$$

Wegen der in 2.4.2., Satz 8, gezeigten Bijektivität ergibt sich  $\beta = \mu \xi$ ,  $\gamma = \nu \xi$  und hieraus (da aus  $\beta + \gamma \neq 0$  nun  $\xi \neq 0$  folgt) nach 2.4.1., Satz 3, also

$$\text{TV}(B, C; U) = -\gamma : \beta = -\nu : \mu.$$

Aus (4) folgt unmittelbar der sogenannte *Satz von Ceva*:

**Satz 4.** *Bilden  $A, B, C$  ein Dreieck und sind  $U, V, W$  auf  $g(BC), g(CA), g(AB)$  verschieden von  $A, B, C$  so gelegen, daß  $g(AU), g(BV), g(CW)$  konzentrisch sind, so gilt*

$$\text{TV}(B, C; U) \cdot \text{TV}(C, A; V) \cdot \text{TV}(A, B; W) = -1. \quad (5)$$

Nach den Betrachtungen aus 2.5.2. naheliegend ist der

**Zusatz.** *Ist  $g(AU) \parallel g(BV) \parallel g(CW)$ , so gilt ebenfalls (5).*

**Beweis.** Es sei  $b = v(OD) \neq 0$  ein Vektor parallel zu  $g(AU), g(BV), g(CW)$ . Wegen  $O, D \in \varepsilon(ABC)$  gibt es  $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$  mit  $b = \sigma(b - a) + \tau(c - a)$ , d. h., es gibt  $\varrho, \sigma, \tau$  mit  $\varrho + \sigma + \tau = 0$  und  $b = \varrho a + \sigma b + \tau c$ . Dann gibt es  $\beta, \gamma; \zeta$  mit  $\beta + \gamma = 1$  und

$$u = \beta b + \gamma c = a + \zeta b = (1 + \varrho \zeta) a + \sigma \zeta b + \tau \zeta c.$$

Hieraus folgt wie vorhin  $\text{TV}(B, C; U) = -\tau : \sigma$ , entsprechend die anderen Teilverhältnisse und damit (5).

Zusammen mit seinem Zusatz ist Satz 4 umkehrbar:

Satz 5. Bilden  $A, B, C$  ein Dreieck und sind  $U, V, W$  auf  $g(BC), g(CA), g(AB)$  verschieden von  $A, B, C$  so gelegen, daß (5) gilt, so sind  $g(AU), g(BV), g(CW)$  konzentrisch oder paarweise parallel.

Beweis. Falls  $g(AU) \parallel g(BV)$  (wegen  $U \notin g(AB)$  aber  $g(AU) \nparallel g(AB)$ ) ist, sei  $W'$  der Schnitt von  $g(AB)$  mit der Parallelen durch  $C$  zu  $g(AU)$ . Falls aber  $X := g(AU) \cap g(BV)$  eindeutig existiert, sei  $\xi := v(OX) = \lambda a + \mu b + \nu c$  mit  $\lambda + \mu + \nu = 1$ . Wie im Beweis von (4) folgt

$$\text{TV}(B, C; U) = -\nu : \mu, \quad \text{TV}(C, A; V) = -\lambda : \nu,$$

nach Voraussetzung (5) also  $1 \neq \text{TV}(A, B; W) = -\mu : \lambda$ , d.h.  $\lambda + \mu \neq 0$ . Somit sind die Vektoren  $\xi - c = \lambda(a - c) + \mu(b - c)$  und  $b - a = -(a - c) + (b - c)$  linear unabhängig; demnach existiert eindeutig  $W' := g(CX) \cap g(AB)$ .

In beiden Fällen läßt sich Satz 4 bzw. sein Zusatz auf  $A, B, C; U, V, W'$  anwenden, also gilt (5) mit  $W'$  statt  $W$ . Zusammen mit der Voraussetzung (5) folgt hieraus  $\text{TV}(A, B; W') = \text{TV}(A, B; W)$ . Wegen der Eindeutigkeitsaussage in 2.4.1., Satz 4, folgt damit  $W' = W$ . Aus der Definition von  $W'$  erhält man dann die Behauptung.

Statt nach einer „besonderen Lage“ der Geraden  $g(AU), g(BV), g(CW)$  zu fragen, kann man dies auch für die Punkte  $U, V, W$  selbst tun. Hierzu gilt eine bemerkenswert ähnliche Aussage, der sogenannte Satz von Menelaos, den wir sogleich zusammen mit seiner Umkehrung formulieren als

Satz 6. Bilden  $A, B, C$  ein Dreieck und sind  $U, V, W$  auf  $g(BC), g(CA), g(AB)$  verschieden von  $A, B, C$ , so gilt genau dann

$$\text{TV}(B, C; U) \cdot \text{TV}(C, A; V) \cdot \text{TV}(A, B; W) = 1, \quad (6)$$

wenn  $U, V, W$  kollinear sind (Abb. 2.37).

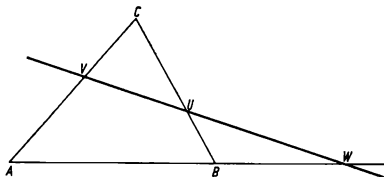


Abb. 2.37

Beweis. Sind  $q, r, s$  die Teilverhältnisse in (6), so haben  $U, V, W$  nach 2.4.1., Sätze 3, 4, die Ortsvektoren

$$u = \frac{1}{1-q}(b - qc), \quad v = \frac{1}{1-r}(c - ra), \quad w = \frac{1}{1-s}(a - sb).$$

Nach 2.4.2., Satz 9, sind daher  $U, V, W$  genau dann kollinear, wenn

$$\frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{1-r} \cdot \frac{1}{1-s} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -q \\ -r & 0 & 1 \\ 1 & -s & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ist, d. h. genau für  $1 - qrs = 0$ .

Vgl. 2.6.4., Aufgabe 1. Bei stärkerer Verwendung baryzentrischer Koordinaten bzw. ihrer projektiven dualen Entsprechung können auch die Aussagen um den Satz von Ceva (Satz 4, Zusatz, Satz 5 sowie 2.6.4., Aufgabe 2) ähnlich einfach bewiesen werden.

Liegen auf einer Geraden  $g$  vier Punkte  $A, B, P, Q$  mit  $P \neq B, Q \neq A, Q \neq B$ , so kann man die Teilverhältnisse  $TV(A, B; P)$  und  $TV(A, B; Q)$  bilden, und das letzte ist nicht 0. Daher existiert die Zahl

$$DV(A, B; P, Q) := \frac{TV(A, B; P)}{TV(A, B; Q)} = \frac{m(AP) : m(BP)}{m(AQ) : m(BQ)},$$

das sogenannte *Doppelverhältnis von  $P, Q$  bezüglich  $A, B$* . Ist speziell  $DV(A, B; P, Q) = -1$ , (d. h., teilen  $P$  und  $Q$  die Strecke  $AB$  innerlich und äußerlich in betragsgleichem Verhältnis  $|AP| : |BP| = |AQ| : |BQ|$ ), so heißen  $(A, B)$  und  $(P, Q)$  *harmonische Punktepaare*.

Ist z. B. dieses Verhältnis 5:1, so führt etwa  $|AB| = 12$  auf  $|AP| = 10, |AQ| = 15$ . Gleichartige Instrumentalsaiten dieser Längen geben Terz, Quinte und Grundton eines Durdreiklanges.

Allgemein besagt

$$\frac{|BP|}{|AP|} = \frac{|BQ|}{|AQ|}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{|AB|}{|AP|} - 1 = 1 - \frac{|AB|}{|AQ|},$$

daß  $\frac{1}{|AB|}$  das arithmetische Mittel von  $\frac{1}{|AP|}$  und  $\frac{1}{|AQ|}$ , d. h.  $|AB|$  das *harmonische Mittel*  $\frac{2|AP| \cdot |AQ|}{|AP| + |AQ|}$  von  $|AP|$  und  $|AQ|$  ist.

Aus den Sätzen von Ceva und MENELAOS ergibt sich nun folgende Beschreibung des Auftretens harmonischer Punktepaare nur durch Inzidenzen (Abb. 2.38).

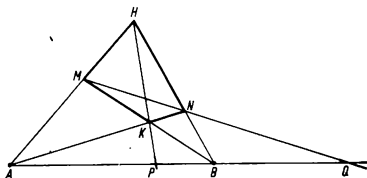


Abb. 2.38



Satz 7. Sind  $H, K, M, N$  paarweise verschieden und so gelegen, daß

$$A := g(HM) \cap g(KN), \quad B := g(HN) \cap g(KM),$$

$$P := g(AB) \cap g(HK), \quad Q := g(AB) \cap g(MN)$$

eindeutig existieren, so gilt  $DV(A, B; P, Q) = -1$ .

Beweis. Man wende Satz 4 und 6 auf  $A, B, H$  sowie auf  $g(AN), g(BM), g(HP)$  bzw.  $M, N, Q$  an.

### 2.6.3. Sätze für Dreiecke

Im  $R^2$  sei ein Dreieck  $ABC$  durch  $u := v(OA) = \langle u_1, u_2 \rangle$ ,  $v := v(OB) = \langle v_1, v_2 \rangle$ ,  $w := v(OC) = \langle w_1, w_2 \rangle$  gegeben. Die Seitenlängen und Innenwinkelgrößen seien wie üblich  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$  genannt. Wir wollen einige elementargeometrische Sätze analytisch-geometrisch herleiten.

Setzt man  $c := v(AB)$ ,  $b := v(AC)$  (Abb. 2.39), so ist  $|\angle(b, c)| = \alpha$  sowie  $b - c = v(BC)$ . Hiermit erhält man den *Kosinussatz*

$$a^2 = (b - c)^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha.$$

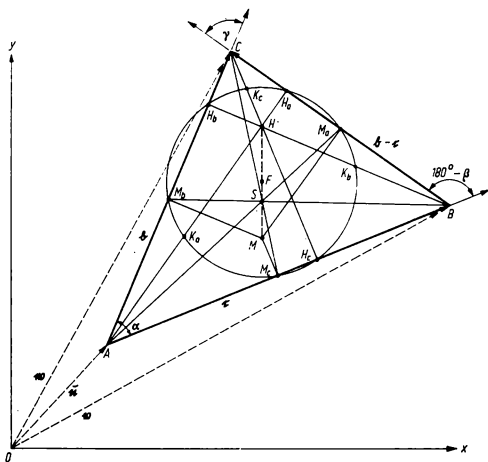


Abb. 2.39

Aus  $\mathbf{v} = (\mathbf{b} - \mathbf{c}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = \mathbf{b} \times (\mathbf{b} - \mathbf{c}) - \mathbf{c} \times (\mathbf{b} - \mathbf{c})$  folgt wegen

$$|\angle(\mathbf{b}, \mathbf{b} - \mathbf{c})| = \gamma, \quad |\angle(\mathbf{c}, \mathbf{b} - \mathbf{c})| = 180^\circ - \beta$$

ferner  $ba \cdot \sin \gamma = ca \cdot \sin \beta$ , also der Sinussatz

$$b : c = \sin \beta : \sin \gamma.$$

Der Schwerpunkt  $S$  des Systems aus den mit einander gleichen Massen belegten Punkten  $A, B, C$  hat den Ortsvektor  $\bar{s} = \frac{1}{3} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w})$ . Mit den Ortsvektoren  $\mathbf{m}_a, \mathbf{m}_b, \mathbf{m}_c$  der Seitenmitten  $M_a, M_b, M_c$  gilt somit

$$\bar{s} = \frac{1}{3}\mathbf{u} + \frac{2}{3}\mathbf{m}_a = \frac{1}{3}\mathbf{v} + \frac{2}{3}\mathbf{m}_b = \frac{1}{3}\mathbf{w} + \frac{2}{3}\mathbf{m}_c.$$

Also liegt  $S$  auf allen drei Seitenhalbierenden  $AM_a, BM_b, CM_c$  und teilt jede von ihnen im Verhältnis 1:2.

Um den Schwerpunkt der Dreiecksfläche (wenn diese gleichmäßig mit Masse belegt ist) zu ermitteln, kann man die Dreiecksfläche nach Art der Integralrechnung beliebig genau durch elementargeometrische Addition genügend schmaler Rechtecke annähern, deren längere Seiten zu einer Dreiecksseite parallel sind. Die Masse jedes solchen Rechtecks werde in dessen Schwerpunkt „zusammengezogen“. Nach Grenzwertbildung läßt sich herleiten, daß der gesuchte Dreiecksschwerpunkt auf der Seitenhalbierenden der betreffenden Seite liegen muß. Daher stimmt er mit dem Schnittpunkt  $S$  der Seitenhalbierenden überein.

Sind  $H_a, H_b, H_c$  die Höhenfußpunkte, so hat  $g(AH_a)$  den Vektor  $\mathbf{v}(BC)$  als Stellungsvektor und daher  $(\mathbf{w} - \mathbf{v})(\mathbf{x} - \mathbf{u}) = 0$  als Gleichung. Ebenso sind  $(\mathbf{u} - \mathbf{w})(\mathbf{x} - \mathbf{v}) = 0$ ,  $(\mathbf{v} - \mathbf{u})(\mathbf{x} - \mathbf{w}) = 0$  Gleichungen von  $g(BH_b)$ ,  $g(CH_c)$ . Die Summe der Stellungsvektoren ist  $\mathbf{v}$ , die Summe der von den  $\mathbf{x}$ , freien Glieder  $(\mathbf{u} - \mathbf{w})(-\mathbf{v})$ ,  $(\mathbf{v} - \mathbf{u})(-\mathbf{w})$ ,  $(\mathbf{w} - \mathbf{v})(-\mathbf{u})$  beträgt 0, ferner ist

$$D := \det(\mathbf{w} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{w}) = 2m(ABC) \neq 0;$$

nach 2.5.2., Satz 4, sind also  $g(AH_a)$ ,  $g(BH_b)$ ,  $g(CH_c)$  konzentrisch. Die Auflösung des Gleichungssystems ergibt nach leichten Umformungen den Höhen-schnittpunkt  $H$  mit dem Ortsvektor

$$\mathbf{h} = \frac{1}{D} \left\langle \begin{vmatrix} 1 & u_1(v_1+w_1) + u_2(v_2+w_2) & u_2 \\ 1 & v_1(w_1+u_1) + v_2(w_2+u_2) & v_2 \\ 1 & w_1(u_1+v_1) + w_2(u_2+v_2) & w_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1(v_1+w_1) + u_2(v_2+w_2) \\ 1 & v_1 & v_1(w_1+u_1) + v_2(w_2+u_2) \\ 1 & w_1 & w_1(u_1+v_1) + w_2(u_2+v_2) \end{vmatrix} \right\rangle.$$

Durch ähnliche Überlegungen erkennt man die Mittelsenkrechten  $2\mathbf{x}(\mathbf{w} - \mathbf{v}) = \mathbf{w}^2 - \mathbf{v}^2$ ,  $2\mathbf{x}(\mathbf{u} - \mathbf{w}) = \mathbf{u}^2 - \mathbf{w}^2$ ,  $2\mathbf{x}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \mathbf{v}^2 - \mathbf{u}^2$  als konzentrisch und findet für ihren Schnittpunkt, den Umkreismittelpunkt  $M$ , den Ortsvektor

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2D} \left\langle \begin{vmatrix} 1 & u_1^2 + u_2^2 & u_2 \\ 1 & v_1^2 + v_2^2 & v_2 \\ 1 & w_1^2 + w_2^2 & w_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 + u_2^2 \\ 1 & v_1 & v_1^2 + v_2^2 \\ 1 & w_1 & w_1^2 + w_2^2 \end{vmatrix} \right\rangle.$$

Durch Anwendung einfacher Determinantenregeln folgt nun  $\eta + 2m = 3s$ . Das besagt: *Der Schwerpunkt liegt auf der Verbindungsstrecke vom Höhengschnittpunkt zum Umkreismittelpunkt und teilt diese Strecke im Verhältnis 1:2.* Für  $H \neq M$  heißt die Gerade  $g(HM)$  nach EULER, der diesen Satz entdeckte, die *Eulersche Gerade*.

Für die Höhenlängen  $h_b := |BH_b|$ ,  $h_c := |CH_c|$  gilt  $2|ABC| = bh_b = ch_c$ , also

$$h_b : h_c = c : b.$$

Sind  $n_b, n_c$  zu  $b = v - u$  bzw.  $c = v - u$  orthogonale Einheitsvektoren, so sind  $f_b(\xi) := n_b(\xi - u) = 0$ ,  $f_c(\xi) := n_c(\xi - u) = 0$  Hessesche Normalformen von  $g(AC)$ ,  $g(AB)$ , und bei geeigneter Orientierung von  $n_b, n_c$  folgt  $h_b = f_b(v) = n_b c$ ,  $h_c = f_c(v) = n_c b$ ; ferner hat die Innenwinkelhalbierende durch  $A$  hierbei  $f_b(\xi) = f_c(\xi)$  als Gleichung. Hat ihr Schnittpunkt  $W_a$  mit  $BC$  den Ortsvektor  $w_a = \sigma v + \tau w$  ( $\sigma + \tau = 1$ ), so folgt  $w_a - u = \sigma c + \tau b$ , und da  $w_a$  die Gleichung  $f_b(w_a) = f_c(w_a)$  erfüllt, gilt

$$n_b(\sigma c + \tau b) = n_c(\sigma c + \tau b),$$

also  $\sigma n_b c = \tau n_c b$ , also  $\tau : \sigma = n_b c : n_c b = h_b : h_c = c : b$ , d. h., je eine Innenwinkelhalbierende teilt die Gegenseite im Betragsverhältnis der anliegenden Seiten:  $|BW_a| : |CW_a| = c : b$ ,  $|CW_b| : |AW_b| = a : c$ ,  $|AW_c| : |BW_c| = b : a$ .

Hieraus folgt nach Satz 5 (und wegen  $\alpha/2 + \beta/2 \neq 180^\circ$ , also  $g(AW_a) \neq g(BW_b)$ ), daß  $g(AW_a)$ ,  $g(BW_b)$ ,  $g(CW_c)$  konzentrisch sind. Hat ihr Schnittpunkt, der *Inkreismittelpunkt*  $Q$  den Ortsvektor  $q = \lambda u + \mu v + \nu w$  ( $\lambda + \mu + \nu = 1$ ), so folgt nach (4) ferner  $\lambda : \mu : \nu = a : b : c$ ; daher ist

$$q = \frac{1}{a+b+c} (au + bv + cw).$$

Den Schwerpunkt  $R$  des (gleichmäßig mit Masse belegten) Dreiecksrandes kann man als Schwerpunkt des Systems aus den Seitenmittelpunkten  $M_a, M_b, M_c$  erhalten, wenn diese mit Massen belegt werden, die sich wie  $a:b:c$  verhalten. Nach Satz 2 hat

$R$  somit den Ortsvektor  $r = \frac{1}{a+b+c} (am_a + bm_b + cm_c)$ . Da sich die Seitenlängen des Mittendreiecks  $M_a M_b M_c$  ebenfalls wie  $a:b:c$  verhalten, folgt (durch Vergleich mit der Formel für  $q$ ), daß  $R$  der *Inkreismittelpunkt* des Mittendreiecks ist.

Wir zeigen noch: *Der Mittelpunkt des Umkreises von  $M_a M_b M_c$  ist der Mittelpunkt  $F$  der Strecke  $HM$ ; dieser Kreis geht auch durch  $H_a, H_b, H_c$  sowie durch die Mittelpunkte  $K_a, K_b, K_c$  der Strecken  $AH, BH, CH$ .* Er heißt der *Neunpunktekreis* oder *Feuerbachsche Kreis* von  $ABC$ . Zum Beweis für  $|FM_a| = |FK_a| = \frac{1}{2}|MA|$  entnehme man aus  $\dagger := \frac{1}{2}(\eta + m)$ , daß

$$2\dagger = \eta + m = 3s - m = u + v + w - m,$$

also

$$\dagger - \frac{1}{2}(v + w) = \frac{1}{2}(u - m) \quad \text{und} \quad \dagger - \frac{1}{2}(u + \eta) = \frac{1}{2}(m - u)$$

gilt. Ein Beweis für  $|FH_a| = \frac{1}{2}|MA|$  ergibt sich mit  $\xi_a := v(OH_a)$  aus

$$\begin{aligned}(2(\xi_a - \frac{1}{2}))^2 &= (2\xi_a - u - v - w + m)^2 \\ &= (m - u)^2 + (2\xi_a - v - w)(2(m - u) + 2\xi_a - v - w) \\ &= (m - u)^2 + (2\xi_a - v - w)(2m - v - w + 2(\xi_a - u))\end{aligned}$$

und  $v(M_a H_a) \perp v(M_a M)$ ,  $v(AH_a)$ .

## 2.6.4. Aufgaben

1. Man beweise die Aussage „dann“ in Satz 6 (Satz von MENELAOS), indem man nach dem Strahlensatz die Teilverhältnisse aus (6) durch Verhältnisse der Abstände von  $A, B, C$  zu  $g(UV)$  ausdrückt. Die Aussage „nur dann“ beweise man ähnlich wie Satz 5. Um dabei  $W'$  als Schnitt nichtparalleler Geraden  $g(UV)$ ,  $g(AB)$  bilden zu können, schließe man aus (6) und  $TV(A, B; W) \neq 1$  zunächst  $TV(B, C; U) \neq TV(A, C; V)$ .
2. Man beweise folgenden zweiten Zusatz zu (4) und Satz 4: Existieren für  $X \neq A, B, C$  mit  $\xi = \lambda a + \mu b + \nu c$  ( $\lambda + \mu + \nu = 1$ ) eindeutig  $V := g(BX) \cap g(CA)$  und  $W := g(CX) \cap g(AB)$ , ist aber  $g(AX) \parallel g(BC)$ , so bleiben (4), (5) nach Weglassen der ersten Gleichung bzw. des ersten Faktors gültig. Welche Aussage über  $TV(A, B; W)$  verbleibt, wenn entsprechend auch an die Stelle von  $g(BV)$  die Parallele  $g(BX) \parallel g(CA)$  tritt?
3. Man beweise aus Satz 5, daß in jedem Dreieck die Seitenhalbierenden konzentrisch sind. Dasselbe zeige man für die Höhen, wobei man den Fall des rechtwinkligen Dreiecks gesondert betrachte (warum?) und sonst  $|AH_b| : |AH_c| = c : b$  verwende (und zuvor beweise).
4. Mit gleichen Methoden (mit (4), Satz 5 und Aufgabe 2) wie für  $Q$  zeige man, daß die Halbierenden der Außenwinkel bei  $B, C$  und des Innenwinkels bei  $A$  konzentrisch sind und daß ihr Schnittpunkt  $Q_a$ , der Mittelpunkt eines Ankreises, den Ortsvektor

$$q_a = \frac{1}{-a + b + c} (-au + bv + cw)$$

hat.

5. Welche Punktetripel aus den Schnittpunkten von Innen- und Außenwinkelhalbierenden mit den Gegenseiten sind kollinear?
6. Man berechne für das Dreieck aus 2.3.9., Aufgabe 3, die Punkte, Geradengleichungen und Vektoren aus 2.6.3. sowie aus den Aufgaben 3 bis 5.
7. Man beweise für die Ortsvektoren  $a, b, c, d$  nicht komplanarer Punkte  $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ : Ist  $\xi := v(OX) = \lambda a + \mu b + \nu c + \vartheta d$  ( $\lambda + \mu + \nu + \vartheta = 1$ ), so ist  $\lambda = m(XBCD) : m(ABCD)$  usw.

Hinweis: In  $\det(\xi - b, \xi - c, \xi - d)$  ersetze man den zweiten Vektor durch seine Differenz zum dritten, den dritten durch seine Differenz zum ersten, und dann addiere man zum ersten die durch Vervielfachung mit  $\nu$  bzw.  $\vartheta$  entstandenen Vektoren.

Ferner beweise man: Ist  $g(AX) \cap \varepsilon(BCD) = P$  und  $v(OP) = \rho b + \sigma c + \tau d$  ( $\rho + \sigma + \tau = 1$ ), so ist  $\rho : \sigma : \tau = \mu : \nu : \vartheta$ . Hieraus und aus (4) bestimme man die Teilverhältnisse, die auf den Strecken  $AB, AC, AD, BC, BD, CD$  durch den Schnitt mit den Ebenen  $\varepsilon(XCD), \varepsilon(XBD), \varepsilon(XBC), \varepsilon(XAD), \varepsilon(XAC), \varepsilon(XAB)$  entstehen.

## 2.7. Bewegungen und Koordinatentransformationen

### 2.7.1. Invarianz von Skalarprodukten, Summen und Vielfachen

Von einer Abbildung  $\varphi$  des  $R^n$  in sich sagen wir, sie lasse Vektorgleichheiten bestehen oder kurz, sie *erhalte Vektoren*, wenn für Punkte  $A, B, C, D \in R^n$  aus  $v(AB) = v(CD)$  stets  $v(\varphi(A)\varphi(B)) = v(\varphi(C)\varphi(D))$  folgt. Man kann dann als *Bild des Vektors*  $v(AB)$  den Vektor  $\varphi(v(AB)) := v(\varphi(A)\varphi(B))$  definieren.

Abbildungen, die Vektoren erhalten, werden genauer in 3.4. unter der üblichen Bezeichnung *Affinitäten* behandelt.

Ist diese Voraussetzung erfüllt, so sagen wir weiterhin,  $\varphi$  *erhalte Skalarprodukte*, wenn für Vektoren  $a, b$  des  $R^n$  stets  $ab = \varphi(a)\varphi(b)$  gilt. Die folgende Charakterisierung des Begriffs „Bewegung“ sei wieder für die Ebene und den Raum als Satz ausgesprochen; für den  $R^n$  mit  $n > 3$  kann sie als Definition dieses Begriffes dienen.

**Satz 1.** *Eine Abbildung des  $R^n$  ( $n \leq 3$ ) in sich ist genau dann eine Bewegung, wenn sie Vektoren und Skalarprodukte erhält.*

**Beweis** (vgl. auch 2.7.5., Aufgabe 1). Es sei erstens  $\varphi$  als Bewegung vorausgesetzt. Die Vektorgleichheit  $v(AB) = v(CD)$  ist charakterisiert durch die Gleichheit der Längen  $|AB| = |CD|$  und, wenn diese nicht 0 sind, die Gleichgerichtetheit der Strahlen  $AB^+, CD^+$ . Da diese Bedingungen für die Bilder von  $A, B, C, D$  bestehen bleiben, erhält  $\varphi$  Vektoren. Daß  $\varphi$  auch Skalarprodukte erhält, ergibt sich aus 2.3.4., Satz 7, weil die darin vorkommenden Längen  $|a| := |PU|$ ,  $|b| := |PV|$  und Elementarwinkelgrößen  $|\sphericalangle(a, b)| := |\sphericalangle UPV|$  (vgl. 2.3.1., 2.3.2.) bei  $\varphi$  erhalten bleiben.

Wird umgekehrt von einer Abbildung  $\varphi$  vorausgesetzt, daß sie Vektoren und Skalarprodukte erhält, so gilt dies insbesondere für Skalarprodukte von Vektoren mit sich selbst, also bleibt jede Länge

$$|AB| = \sqrt{v(AB)^2} = \sqrt{\varphi(v(AB))^2} = |\varphi(A)\varphi(B)|$$

erhalten. Somit geht nach dem Kongruenzsatz (sss) jedes Dreieck in ein kongruentes über; daher ist  $\varphi$  eine Bewegung.

**Satz 2.** *Ist  $\varphi$  eine Bewegung und sind  $a, b$  Vektoren, so gilt*

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b).$$

**Beweis.** Es sei  $a = v(UV)$ ,  $b = v(VW)$ . Dann ist

$$\begin{aligned}\varphi(a) + \varphi(b) &= v(\varphi(U)\varphi(V)) + v(\varphi(V)\varphi(W)) \\ &= v(\varphi(U)\varphi(W)) = \varphi(a + b).\end{aligned}$$

**Satz 3.** *Ist  $\varphi$  eine Bewegung,  $a$  ein Vektor und  $t$  eine reelle Zahl, so gilt*

$$\varphi(ta) = t\varphi(a).$$

Der Beweis folgt aus der Definition von  $ta$  in 2.2.3., da die dort auftretenden Beziehungen  $|AC| = |t| \cdot |AB|$  und  $C \in AB^+$  oder  $C \in AB^-$  bei  $\varphi$  erhalten bleiben.

### 2.7.2. Orthogonale Matrizen

Eine Abbildung des  $R^n$  in sich kann analytisch-geometrisch durch ein Funktionen- $n$ -Tupel

$$x'_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \quad \dots, \quad x'_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$$

beschrieben werden, das jedem Punkt  $(x_1, \dots, x_n)$  seinen Bildpunkt  $(x'_1, \dots, x'_n)$  zuordnet.

Zur zusammenfassenden Schreibweise seien die Koordinaten von Punkten  $X, X', \dots$  in Spaltenvektoren

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \dots$$

angeordnet, ebenso auch die Komponenten von Vektoren. Wir sprechen dann kurz von dem Punkt  $x$  oder dem Vektor  $a$ . Für das Skalarprodukt zweier Vektoren  $a, b$  hat man nun die Schreibweise  $a^T b$ ; die Zahl wird also als Matrix vom Typ  $1 \times 1$  geschrieben, die sich als Produkt zweier Matrizen vom Typ  $1 \times n$  bzw.  $n \times 1$  ergibt (vgl. MfL Band 3, 6.). Da jede Matrix des Typs  $1 \times 1$  mit ihrer Transponierten übereinstimmt, haben wir  $a^T b = (a^T b)^T = b^T a$  als Ausdruck des Kommutativgesetzes der skalaren Multiplikation.

**Satz 4.** Eine Abbildung des  $R^n$  in sich ist genau dann eine Bewegung, wenn ein Vektor  $v$  und eine orthogonale Matrix  $M$  so existieren, daß jeweils ein Punkt  $x$  den Bildpunkt

$$x' = v + Mx \quad (1)$$

hat. Ist dies der Fall, so hat jeweils ein Vektor  $a$  den Bildvektor

$$a' = Ma. \quad (2)$$

**Beweis.** Erstens sei  $\varphi$  als Bewegung vorausgesetzt. Wir definieren  $v := v(O\varphi(O))$ ,  $m_\nu = \varphi(e_\nu)$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ) und  $M$  als die aus den Spaltenvektoren  $m_1, \dots, m_n$  zusammengesetzte Matrix. Dann ist

$$m_i^T m_j = \varphi(e_i)^T \varphi(e_j) = e_i^T e_j = \delta_{ij},$$

also  $M$  orthogonal. Für  $X \in R^n$  und  $X' := \varphi(X)$  gilt ferner

$$\begin{aligned} v(OX') &= v(O\varphi(O)) + v(\varphi(O) \varphi(X)) = v + \varphi(v(OX)) \\ &= v + \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = v + x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) \\ &= v + x_1 m_1 + \dots + x_n m_n = v + Mx, \end{aligned}$$

also (1).

Umgekehrt sei  $\varphi$  die durch (1) definierte Abbildung. Gilt für Punkte  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{p}, \mathbf{q}$  dann  $\mathbf{y} - \mathbf{x} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ , so folgt

$$\begin{aligned}\mathbf{y}' - \mathbf{x}' &= (\mathbf{v} + \mathbf{M}\mathbf{y}) - (\mathbf{v} + \mathbf{M}\mathbf{x}) = \mathbf{M}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \mathbf{M}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \\ &= (\mathbf{v} + \mathbf{M}\mathbf{q}) - (\mathbf{v} + \mathbf{M}\mathbf{p}) = \mathbf{q}' - \mathbf{p}'.\end{aligned}$$

Also erhält  $\varphi$  Vektoren; zugleich ist (2) gezeigt. Wegen der Orthogonalität von  $\mathbf{M}$  ist ferner  $\mathbf{M}^T \mathbf{M} = \mathbf{E}$  die  $n$ -reihige Einheitsmatrix. Für je zwei Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  gilt somit

$$\mathbf{a}'^T \mathbf{b}' = (\mathbf{M}\mathbf{a})^T (\mathbf{M}\mathbf{b}) = \mathbf{a}^T \mathbf{M}^T \mathbf{M} \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b},$$

also erhält  $\varphi$  Skalarprodukte.

**Satz 5.** Die Bewegung (1) ist gleichsinnig oder ungleichsinnig, je nachdem, ob  $\det \mathbf{M} = 1$  oder  $\det \mathbf{M} = -1$  ist.

**Beweis.** Nach Definition des vorzeichenfähigen Flächeninhalts bzw. Volumens in 2.3.5., 2.3.7. (bzw. der Verallgemeinerung in 2.3.8.) ist eine Bewegung genau dann gleichsinnig, wenn bei ihr für je  $n$  Punkte  $X_1, \dots, X_n$  das Vorzeichen von  $m(OX_1 \dots X_n)$  erhalten bleibt. Für die Spaltenvektoren  $\mathbf{a}_v = \mathbf{v}(OX_v)$ , ihre Bildvektoren  $\mathbf{a}'_v = \mathbf{v}(O'X'_v)$  ( $v = 1, \dots, n$ ) und die aus ihnen zusammengesetzten Matrizen  $\mathbf{A}, \mathbf{A}'$  gilt nach (2) aber  $\mathbf{A}' = \mathbf{M}\mathbf{A}$  und daher

$$\begin{aligned}m(O'X'_1 \dots X'_n) &= \det \mathbf{A}' = \det \mathbf{M} \cdot \det \mathbf{A} \\ &= \det \mathbf{M} \cdot m(OX_1 \dots X_n),\end{aligned}$$

womit die Behauptung gezeigt ist.

### 2.7.3. Verschiebungen, spezielle Spiegelungen und Drehungen

Wir gewinnen nun für einige einfache Bewegungen ihre analytische Darstellung (1) direkt aus ihrer geometrischen Definition (oder einer gleichwertigen geometrischen Charakterisierung).

**2.7.3.1.** Ist  $\mathbf{v}$  ein gegebener Vektor, d. h. eine gegebene *Verschiebung*, so besteht zwischen den Ortsvektoren  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$  je eines Punktes  $X$  und seines Bildes  $X'$  (bei dieser Verschiebung  $\mathbf{v}$ ) nach 2.2.4., Satz 5, die Beziehung

$$\mathbf{x}' = \mathbf{v} + \mathbf{x}.$$

Verschiebungen sind also in (1) durch  $\mathbf{M} = \mathbf{E}$  gekennzeichnet.

**2.7.3.2.** Die *Spiegelung*  $\sigma_k$  an der *Hyperebene*  $x_k = 0$  ( $k$  einer der Indizes  $1, \dots, n$ ) kann charakterisiert werden als diejenige Abbildung des  $R^n$  in sich, bei der für jeden Punkt  $X \in R^n$  die Strecke  $X\sigma_k(X)$  auf der Hyperebene  $x_k = 0$  senkrecht steht und von ihr halbiert wird. Wie man nach 2.5.3.1. bestätigt, ist diese Cha-

Charakterisierung erfüllt für

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_{k-1}' \\ x_k' \\ x_{k+1}' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ -x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Die Spiegelung  $\sigma_k$  wird also in (1) durch  $v = o$  und die Matrix  $M$  mit den Elementen  $m_{vv} = 1$  ( $v = 1, \dots, n; v \neq k$ ),  $m_{kk} = -1$ ,  $m_{ij} = 0$  ( $i, j = 1, \dots, n; i \neq j$ ) gekennzeichnet.

2.7.3.3. Die Drehung  $\delta_{o, \omega}$  in der Ebene  $R^2$  um den Punkt  $O$  und mit gegebener zugeordneter Größe  $\omega$  orientierter Elementarwinkel (vgl. 1.1.3.2.) ist diejenige Abbildung, die jeweils einen Punkt  $X$  mit  $r := |OX|$  auf den Punkt  $X'$  mit  $|OX'| = r$  und  $m(\angle XOX') = \omega$  abbildet. Setzen wir  $\alpha := m(\angle E_1 OX)$  (Abb. 2.40), so hat

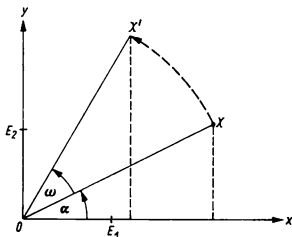


Abb. 2.40

nach 2.3.4. einerseits  $X$  die Koordinaten  $x = r \cdot \cos \alpha$ ,  $y = r \cdot \sin \alpha$ ; andererseits ist  $m(\angle E_1 OX') = \alpha + \omega$ , also hat  $X'$  die Koordinaten

$$x' = r \cdot \cos(\alpha + \omega) = r \cdot \cos \alpha \cdot \cos \omega - r \cdot \sin \alpha \cdot \sin \omega,$$

$$y' = r \cdot \sin(\alpha + \omega) = r \cdot \cos \alpha \cdot \sin \omega + r \cdot \sin \alpha \cdot \cos \omega,$$

d. h.

$$x' = x \cdot \cos \omega - y \cdot \sin \omega, \quad y' = x \cdot \sin \omega + y \cdot \cos \omega. \quad (3)$$

Dieselben Formeln, ergänzt durch

$$z' = z,$$



beschreiben im  $R^3$  die Drehung  $\delta_{z,\omega}$  mit zugeordneter Größe  $\omega$  orientierter Elementarwinkel und mit der  $z$ -Achse als Drehachse (Fixpunktgerade).

2.7.3.4. Weitere Bewegungen gewinnt man, indem man Verschiebungen, Spiegelungen  $\sigma_z$  und Drehungen um Koordinatenachsen nacheinander ausführt (vgl. etwa 2.7.5., Aufgabe 4). Auf diese Weise lassen sich sogar *alle* Bewegungen des  $R^2$  bzw.  $R^3$  zusammensetzen, worauf wir nicht näher eingehen. Für den  $R^2$  und ohne Berücksichtigung von Verschiebungen (also mit  $v = o$  in (1)) wurde dies übrigens bereits — abgesehen von der erst hier in MfL Bände 6 und 7 vollzogenen geometrischen Fundierung des Verfahrens — in MfL Band 3, 7.5., erhalten.

## 2.7.4. Koordinatentransformationen

Eine *Koordinatentransformation* wird ausgeführt, indem man außer einem zunächst vorliegenden („alten“) Koordinatensystem ein weiteres („neues“) heranzieht, womit also jedem Punkt  $X \in R^n$  sowohl seine Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  bezüglich des „alten“ als auch seine Koordinaten  $x'_1, \dots, x'_n$  bezüglich des „neuen“ Koordinatensystems zugeordnet sind, und indem man nun eine funktionale Abhängigkeit der  $x'_i$  von den  $x_i$  (oder umgekehrt) bildet. Zwischen den Begriffen Bewegung und Koordinatentransformation besteht folgender Zusammenhang:

Ist  $\varphi$  eine Bewegung und sind die bei  $\varphi$  entstehenden Bilder der „alten“ Koordinatenachsen  $g_i$  gerade die „neuen“  $g'_i := \varphi(g_i)$ , so wird aus dem „alten“ Koordinaten- $n$ -Tupel  $(x_1, \dots, x_n)$  eines Punktes  $X$  sein „neues“  $(x'_1, \dots, x'_n)$  genau so gefunden, als habe man (wie bisher bis 2.7.3. in einem festbleibenden Koordinatensystem rechnend) aus einem Punkt  $x$  sein Bild bei der zu  $\varphi$  entgegengesetzten Bewegung,

$$x' = \varphi^{-1}(x) \quad (4)$$

zu errechnen.

Um dies zu beweisen, wenden wir die Bewegung  $\varphi$  nicht nur auf die „alten“ Koordinatenachsen, sondern auch auf den Punkt  $X$  an. Es entsteht ein Punkt  $\varphi(X)$ , der nach 2.1.3., Satz 1, bezüglich des „neuen“ Koordinatensystems dasselbe Koordinaten- $n$ -Tupel  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  hat wie  $X$  bezüglich des „alten“. Wendet man nun auf  $\varphi(X)$  die Bewegung  $\varphi^{-1}$  an, so erhält man einerseits gerade wieder den Punkt  $X$ , andererseits aber für ihn (im „neuen“ Koordinatensystem rechnend) eben das durch (4) definierte Koordinaten- $n$ -Tupel  $x'$ .

Wir lösen nun (4) nach  $x$  auf und beachten außerdem noch Satz 4. Dann können wir das Ergebnis formulieren als

**Satz 6.** *Entstehen aus den Koordinatenachsen  $g_i$  bei der durch (1) ausgedrückten Bewegung  $\varphi$  die Achsen  $g'_i := \varphi(g_i)$  eines „neuen“ Koordinatensystems, so besteht zwischen den Koordinaten- $n$ -Tupeln  $x, x'$  ein und desselben Punktes  $X$  bezüglich*

des „alten“ bzw. „neuen“ Koordinatensystems die Beziehung

$$\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{M}\mathbf{x}' \quad (5)$$

Entsprechend besteht zwischen den Komponenten- $n$ -Tupeln  $\mathbf{a}, \mathbf{a}'$  ein und desselben Vektors  $\mathbf{a}$  bezüglich des „alten“ bzw. „neuen“ Koordinatensystems die Beziehung

$$\mathbf{a} = \mathbf{M}\mathbf{a}' \quad (6)$$

Zur Anwendung einer Koordinatentransformation auf einzelne Punkte oder auf Parameterdarstellungen  $\mathbf{x}_v = \psi_v(t)$  ( $v = 1, \dots, n$ ) von Kurven,  $\mathbf{x}_v = \chi_v(u, v)$  ( $v = 1, \dots, n$ ) von Flächen usw. ist die Form (4), d. h.  $\mathbf{x}' = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{v} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}$  günstiger, da sich dann sofort durch Einsetzen in (4) der einzelne Punkt bzw. die Parameterdarstellung im „neuen“ Koordinatensystem ergibt. Ist dagegen eine Punktmenge (z. B. eine Hyperebene) als Menge aller  $X \in \mathbb{R}^n$  gegeben, deren Koordinaten- $n$ -Tupel  $\mathbf{x}$  eine Gleichung  $f(\mathbf{x}) = 0$  (z. B.  $N^T\mathbf{x} + a_0 = 0$ ) erfüllt, so ist zur Durchführung der Koordinatentransformation die Form (5) günstiger, da sie sogleich  $f(\mathbf{v} + \mathbf{M}\mathbf{x}') = 0$  als Gleichung derselben Punktmenge bezüglich des „neuen“ Koordinatensystems aufzuschreiben gestattet.

Mit Hilfe des Transformationsbegriffes kann man zu einer genaueren Formulierung des Unterschiedes zwischen  $n$ -Tupeln („Punkten“ des Zahlenraumes  $\mathbb{R}^n$  nach MfL Band 3) und Punkten (im Sinne der Geometrie) gelangen, wobei diese Formulierung auch für  $n > 3$  verwendbar ist: Ein „geometrischer“ Punkt  $X$  ist nicht durch ein einzelnes  $n$ -Tupel  $\mathbf{x}$  anzugeben, sondern durch eine Zuordnung, die jedem Koordinatensystem oder — noch etwas abstrakter — jedem Paar  $(\mathbf{v}, \mathbf{M})$  aus Spaltenvektor  $\mathbf{v}$  und orthogonaler Matrix  $\mathbf{M}$  das  $n$ -Tupel  $\mathbf{x}'$  zuordnet, für das (5) gilt. (Das spezielle  $n$ -Tupel  $\mathbf{x}$ , das wir bisher immer zur Angabe von  $X$  verwendeten, war gerade das dem Paar  $(\mathbf{o}, \mathbf{E})$  zugeordnete.) Entsprechend wird ein „geometrischer“ Vektor  $\mathbf{a}$  durch eine Zuordnung angegeben, die jedem Koordinatensystem das  $n$ -Tupel  $\mathbf{a}'$  zuordnet, für das (6) gilt.

Eine „Eigenschaft eines geometrischen Vektors“ liegt erst dann vor, wenn sie Eigenschaft aller zugeordneten  $n$ -Tupel ist, d. h., wenn sie nicht von der Wahl des Koordinatensystems abhängt. So ist z. B. die Länge

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^T \mathbf{a}} = \sqrt{\mathbf{a}'^T \mathbf{M}^T \mathbf{M} \mathbf{a}'} = \sqrt{\mathbf{a}'^T \mathbf{a}'}$$

eine solche Eigenschaft; allgemeiner ist z. B. das Skalarprodukt eine „Eigenschaft zweier geometrischer Vektoren“.

## 2.7.5. Aufgaben

1. Man beweise die Aussage, daß jede Bewegung  $\varphi$  Vektoren erhält, aus dem Hilfssatz in 1.1.3.1., wonach für jede Verschiebung  $\tau$  auch  $\tau' := \varphi \circ \tau \circ \varphi^{-1}$  Verschiebung ist.

2. Man zeige: Wird  $x' = \varphi(x)$  zu (3) spezialisiert, so spezialisiert sich (4) zu

$$x' = x \cdot \cos \omega + y \cdot \sin \omega, \quad y' = -x \cdot \sin \omega + y \cdot \cos \omega, \quad (7)$$

den Formeln einer Koordinatentransformation bei Drehung des Koordinatensystems um  $O$  mit zugeordneter Größe  $\omega$  orientierter Elementarwinkel.

3. Man wende (3) und (7) auf die Punkte aus 2.3.9., Aufgabe 3, an.

4. Gegeben sei  $\tau := \frac{1}{2\sqrt{2}} \langle 1, -1, 2 \rangle$  und eine Größe  $\omega$  orientierter Elementarwinkel durch  $p := \cos \frac{\omega}{2} := \frac{1}{2}$  (also  $\omega = ?$ ). Man wähle geeignete Größen  $\alpha, \beta$  orientierter Elementarwinkel so, daß durch die Komposition  $\delta_{y, \beta} \circ \delta_{z, \alpha}$  der Drehung  $\delta_{z, \alpha}$  und der anschließend ausgeführten Drehung  $\delta_{y, \beta}$  die  $x$ -Achse in die Gerade  $\xi = t\tau$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) übergeht. Dann ist

$$\delta_{y, \beta} \circ \delta_{z, \alpha} \circ \delta_{x, \omega} \circ \delta_{z, -\alpha} \circ \delta_{y, -\beta}$$

die Drehung mit  $\omega$  als zugeordneter Größe orientierter Elementarwinkel und mit der Geraden  $\xi = t\tau$  als Drehachse. Man berechne die Gestalt (1) dieser Drehung.

5. Man beweise, daß im  $R^3$  die Beziehung  $a \times b = c$  eine orientierungsabhängige „Eigenschaft dreier geometrischer Vektoren“ ist, d. h., daß sie bei (6) mit  $\det M = 1$  in  $a' \times b' = c'$  übergeht.
6. Eine Quaternion  $\Omega = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$  wird definiert als Paar  $(a_0, a)$  aus einer Zahl  $a_0$  und einem Vektor  $a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ . Summe und Produkt werden definiert durch

$$(a_0, a) + (b_0, b) := (a_0 + b_0, a + b),$$

$$(a_0, a)(b_0, b) := (a_0 b_0 - a \cdot b, a_0 b + b_0 a + a \times b).$$

Man beweise, daß alle Körperaxiome außer dem Kommutativgesetz der Multiplikation erfüllt sind.

Es sei  $\Omega = (p, \tau)$  eine gegebene Quaternion mit  $p^2 + \tau^2 = 1$ . Man beweise: Definiert man zu gegebenem Vektor  $\xi = v(OX)$  und beliebigem  $z \in \mathbb{R}$  die Quaternion

$$(z', \xi') := \Omega \cdot (z, \xi) \cdot \Omega^{-1}, \quad (8)$$

so ist  $v(OX') := \xi'$  von  $z$  unabhängig und  $z' = z$ . Für je zwei Vektoren  $\xi, \eta$  und ihre Bilder  $\xi', \eta'$  wende man dies auf  $(-\xi'\eta', \xi' \times \eta') = (0, \xi')(0, \eta') = \Omega \cdot (-\xi\eta, \xi \times \eta) \cdot \Omega^{-1}$  an und zeige so: Die Abbildung  $\xi \mapsto \xi'$  erhält Skalarprodukte. Speziell für  $\xi := \tau$  (und  $z := p$ ) gewinne man  $\xi' = \tau$ ; hiernach erweise man die Gerade  $\xi = t\tau$  als Fixpunktgerade, die Abbildung  $X \mapsto X'$  also als Drehung um diese Achse. Wird dagegen  $\tau\xi = 0$  und  $\xi^2 = 1$  vorausgesetzt, so errechne man  $\xi\xi' = p^2 - \tau^2 = 2p^2 - 1$  und  $\xi \times \xi' = 2p\tau$ , also  $\text{sgn det}(\xi, \xi', \tau) = \text{sgn } p$ . Hieraus entnehme man, daß  $p$  der Kosinus der halben (der Drehung zugeordneten) Größe  $\omega$  orientierter Elementarwinkel ist. Man schreibe (8) mit  $p, \tau$  aus Aufgabe 4 in der Gestalt (1) und vergleiche die Ergebnisse.

## 2.8. Kurven zweiter Ordnung

### 2.8.1. Der Kreis

Bei gegebenem Mittelpunkt  $M \in R^2$  mit  $m := v(OM) = \langle a, b \rangle$  und gegebenem Radius  $r > 0$  wird die *Kreislinie*  $k$  definiert als Menge aller derjenigen Punkte  $X \in R^2$  (mit  $\xi := v(OX) = \langle x, y \rangle$ ), für die  $|MX| = r$ , d. h.

$$(\xi - m)^2 - r^2 = 0 \quad (1).$$

gilt. Wir nennen  $k$  wie in 1.3.3. auch kurz *Kreis*, und zwar den Kreis mit (1) als Gleichung oder einfach den Kreis (1). Diese *Kreisgleichung* lautet also

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad (2)$$

mit

$$c := a^2 + b^2 - r^2. \quad (3)$$

Umgekehrt stellt jede Gleichung (2) mit gegebenen  $a, b, c$  einen Kreis (1) dar, sobald ein  $r > 0$  mit (3) existiert. Dies trifft genau im Fall  $a^2 + b^2 - c > 0$  zu und ergibt dann  $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ . Ist dagegen  $a^2 + b^2 - c = 0$ , so wird (2) genau von dem Punkt  $M$  erfüllt („Entartungsfall“  $r = 0$ ), und ist  $a^2 + b^2 - c < 0$ , so ist die Menge aller  $X$  mit (2) leer.

Man kann in denjenigen Formeln der analytischen Geometrie, die nur Rechenoperationen und Axiome für Körper benötigen, statt reeller Zahlen Elemente irgendeines anderen Körpers zulassen. Es entsteht dann ein anderer „Raum“, für den zwar gewisse Aussagen über den euklidischen  $R^n$  gültig bleiben (z. B. die in 2.4.3. bis 2.4.6. lediglich aus Körperaxiomen herleitbaren Dimensionsaussagen), andere aber nicht, je nach den Eigenschaften des zugrunde gelegten Körpers. (Bestehen z. B. in dem Körper andere oder keine Anordnungs-eigenschaften, so erhält man andere Aussagen oder aber überhaupt keine sinnvollen Definitionen für die Begriffe der Strecke, des Strahls, der konvexen Punktmenge usw.) In vielen Fällen, so auch bei der Diskussion von (2), liegt es nahe, statt  $R$  den Körper  $C$  der komplexen Zahlen zuzulassen. In dem dann entstehenden „Raum“ gilt folgendes über (2):

Im Fall  $a^2 + b^2 - c = 0$  geht (2) in  $(x + iy - a - ib)(x - iy - a + ib) = 0$  über und stellt daher nicht nur den Punkt  $M$  dar, sondern die Vereinigungsmenge der beiden „Geraden“  $x + iy - a - ib = 0$  (Menge aller „Punkte“  $(x, y)$  mit  $\bar{x} = m + t \cdot \langle 1, i \rangle$  ( $t \in C$ )) und  $x - iy - a + ib = 0$  (Menge aller „Punkte“  $(x, y)$  mit  $\bar{x} = m + t \cdot \langle 1, -i \rangle$  ( $t \in C$ )).

Im Fall  $a^2 + b^2 - c < 0$  ist gleichfalls die Menge aller „Punkte“ mit (2) nicht leer; da es eine (bis auf den Faktor  $-1$  eindeutig bestimmte) rein imaginäre Zahl  $r$  mit (3) gibt, kann diese Menge „Kreis“ mit imaginärem „Radius“ genannt werden.

Wir bleiben auch im folgenden stets, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes erwähnt wird, bei der Zugrundelegung des Körpers  $R$ .

Die Menge aller Punkte  $P \in R^2$  mit  $|MP| < r$  heißt *offene Kreisfläche* oder *Kreisinneres*, ihre Vereinigungsmenge mit  $k$  heißt (*abgeschlossene*) *Kreisfläche*. Die Menge aller  $P$  mit  $|MP| > r$  heißt das *Außere* des Kreises. Der folgende Satz wird je nachdem, ob  $|MP| \leq r$  oder  $|MP| > r$  ist, *Sehnen-* oder *Sekantensatz* genannt:

**Satz 1.** Für jede (orientierte) Gerade  $g$  durch  $P$ , für die  $g \cap k = \{X_1, X_2\}$  existiert, hat das Produkt  $m(PX_1) \cdot m(PX_2)$  denselben, nur von  $P$  und  $k$  abhängigen Wert.

**Beweis.** Ist  $p := v(OP)$ , ist  $A$  ein Punkt auf  $g$  mit  $|PA| = 1$  und ist  $g$  gleichsinnig mit  $a := v(PA)$  orientiert, so ist bei der Parameterdarstellung  $\bar{x} = p + ta$  ( $t \in R$ ) von  $g$  stets  $t = m(PX)$ . Daher ist das genannte Produkt gleich  $t_1 \cdot t_2$ , wobei  $t_1, t_2$  die Lösungen der Gleichung  $(p + ta - m)^2 - r^2 = 0$  sind (falls solche existieren). Diese quadratische Gleichung hat bei  $t^2$  den Koeffizienten  $a^2 = 1$ ,

also ist  $t_1 \cdot t_2$  nach dem Satz von VIETA das von  $t$  freie Glied

$$(p - m)^2 - r^2. \quad (4)$$

Da (4) nur von  $P$  und  $k$  abhängt, ist der Satz bewiesen.

Man nennt das Produkt  $m(PX_1) \cdot m(PX_2)$  die *Potenz* von  $P$  bezüglich  $k$ . Sie ergibt sich nach (4) durch Einsetzen der Koordinaten von  $P$  in die linke Seite der Kreisgleichung (1) (oder (2)). Hiernach gilt

**Satz 2.** Für zwei Kreise  $(x - m_i)^2 - r_i^2 = 0$  ( $i = 1, 2$ ) mit  $m_1 \neq m_2$  ist die Menge aller Punkte  $X$ , die bezüglich beider Kreise gleiche Potenz haben, die Gerade  $2(m_1 - m_2) \cdot x + m_2^2 - m_1^2 - r_2^2 + r_1^2 = 0$ .

Diese Gerade heißt die *Potenzlinie* der beiden Kreise. Sie steht auf der Verbindungsgeraden ihrer Mittelpunkte senkrecht. Haben die Kreise zwei Punkte  $S \neq T$  gemeinsam, so ist  $g(ST)$  ihre Potenzlinie; sonst vgl. 2.8.5., Aufgabe 2.

Jeder Winkel mit  $M$  als Scheitel heißt *Zentriwinkel* von  $k$ . Der Durchschnitt der Kreislinie  $k$  mit der Vereinigungsmenge aus Winkelinnerem  $I$  und Schenkeln  $s, s'$  heißt ein *Kreisbogen*  $b$  mit den Endpunkten  $A := s \cap k$ ,  $B := s' \cap k$  (Abb. 2.41). Ist  $P \in I \cap k$  und  $W \in k \setminus b$ , so heißt  $\sphericalangle(AWB; P^+)$  ein *Peripheriewinkel*

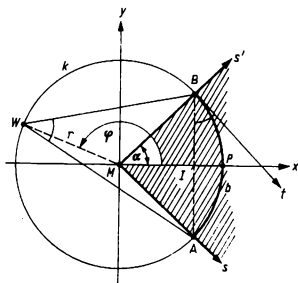


Abb. 2.41

von  $k$ , und zwar ein auf dem Bogen  $b$  stehender oder ein zum Zentriwinkel  $\sphericalangle(AMB; P^+)$  gehöriger. Hierfür gilt der *Peripheriewinkelsatz*:

**Satz 3.** Jeder zu einem Zentriwinkel gehörige Peripheriewinkel ist halb so groß wie dieser.

**Beweis.** Es sei  $P$  auf dem halbierenden Strahl  $h$  von  $\sphericalangle(AMB; P^+)$  gewählt. Nach geeigneter Wahl des Koordinatensystems ist  $M = O$  und  $P$  der Punkt  $(r, 0)$ ; für  $\alpha := \frac{1}{2} |\sphericalangle(AMB; P^+)|$  haben  $A, B$  die Ortsvektoren

$$a = r \cdot \langle \cos \alpha, -\sin \alpha \rangle, \quad b = r \cdot \langle \cos \alpha, \sin \alpha \rangle.$$

Für  $\varphi := m(\angle PMW; B^+)$  gilt  $\alpha < \varphi < 360^\circ - \alpha$  und

$$w := v(OW) = r \cdot \langle \cos \varphi, \sin \varphi \rangle.$$

Nun rechnet man nach (etwa mit 2.4.1., Satz 1), daß der Punkt

$$\left( r \cdot \cos \alpha, \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos \varphi} \cdot r \cdot \sin \varphi \right)$$

wegen  $\cos \varphi < \cos \alpha < 1$  sowohl auf dem Strahl  $WP^+$  als auch im Innern der Strecke  $AB$  liegt. Demnach ist  $\angle(AWB; P^+)$  nicht überstumpf, also

$$|\angle(AWB; P^+)| = |\angle AWB| = |\angle(u, v)|$$

mit

$$u := v(WA) = r \cdot \langle \cos \alpha - \cos \varphi, -\sin \alpha - \sin \varphi \rangle,$$

$$v := v(WB) = r \cdot \langle \cos \alpha - \cos \varphi, \sin \alpha - \sin \varphi \rangle.$$

Daher ist der Satz bewiesen, wenn man  $\frac{uv}{|u| \cdot |v|} = \cos \alpha$  erhält, was in der Tat aus

$$\begin{aligned} |u| \cdot |v| &= r^2 \sqrt{2(1 - \cos \alpha \cdot \cos \varphi + \sin \alpha \cdot \sin \varphi)} \sqrt{2(1 - \cos \alpha \cdot \cos \varphi - \sin \alpha \cdot \sin \varphi)} \\ &= 2r^2 \sqrt{(1 - \cos \alpha \cdot \cos \varphi)^2 - (1 - \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \varphi)} \\ &= 2r^2 |\cos \alpha - \cos \varphi| = 2r^2 (\cos \alpha - \cos \varphi), \\ uv &= r^2 ((\cos \alpha - \cos \varphi)^2 - (1 - \cos^2 \alpha) + (1 - \cos^2 \varphi)) \\ &= 2r^2 (\cos \alpha - \cos \varphi) \cos \alpha = |u| \cdot |v| \cos \alpha \end{aligned}$$

folgt.

## 2.8.2. Ellipse, Parabel, Hyperbel

Gegeben seien eine positive Zahl  $\varepsilon$  sowie im  $R^2$  eine Gerade  $l_1$  und ein Punkt  $F_1 \notin l_1$ . Die Menge  $c$  aller Punkte  $X \in R^2$ , deren Abstand zu  $F_1$  gleich ihrem mit  $\varepsilon$  multiplizierten Abstand zu  $l_1$  ist, heißt für  $0 < \varepsilon < 1$  eine *Ellipse*, für  $\varepsilon = 1$  eine *Parabel*, für  $\varepsilon > 1$  eine *Hyperbel*. Der Punkt  $F_1$  heißt *Brennpunkt*, die Gerade  $l_1$  *Leitlinie*, das Lot von  $F_1$  auf  $l_1$  heißt *Achse* von  $c$ . Schneidet sie  $l_1$  in  $G_1$ , so heißt der zu  $c$  gehörende Punkt  $S_1$  der Strecke  $F_1 G_1$  (eindeutig existierend nach 2.4.1., Satz 4) *Scheitel* von  $c$ .

Wir wählen ein Koordinatensystem so, daß  $F_1$  der Punkt  $(f, 0)$  mit einer positiven Zahl  $f$  ist und daß  $l_1$  die Gleichung  $x = -f/\varepsilon$  hat (womit wir  $S_1 = O$  erreicht haben) (Abb. 2.42). Die Bedingung

$$\sqrt{(x - f)^2 + y^2} = \varepsilon \left| x + \frac{f}{\varepsilon} \right|$$

ist dann äquivalent mit

$$x^2 - 2fx + f^2 + y^2 = \varepsilon^2 x^2 + 2\varepsilon fx + f^2$$

und dies mit

$$y^2 = 2(\varepsilon + 1)fx + (\varepsilon^2 - 1)x^2.$$

Setzen wir  $p := (\varepsilon + 1)f$ , also  $p - 2f = (\varepsilon - 1)f$ , so lautet die erhaltene Gleichung, die *Scheitelgleichung* von  $c$ ,

$$y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)x^2 \quad (5)$$

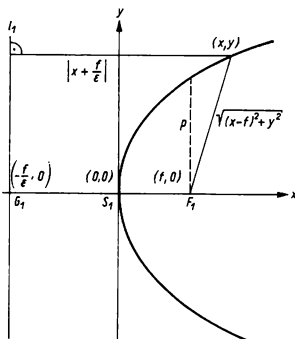


Abb. 2.42

oder auch

$$y^2 = 2px + \frac{1}{f^2} p(p - 2f) x^2.$$

Aus  $x := f$  folgt hiernach  $y^2 = p^2$ ; auf  $c$  haben also genau die beiden Punkte  $(f, p)$  und  $(f, -p)$  die gleiche Abszisse wie  $F_1$ ; somit ist  $p$  der halbe Abstand zwischen diesen beiden Punkten und heißt der *Halbparameter* von  $c$ .

Die *Parabel*  $y^2 = 2px$  hat mit der  $x$ -Achse nur den Nullpunkt gemeinsam; *Ellipse und Hyperbel* (5) außerdem noch den Punkt  $(2p/(1-\varepsilon^2), 0)$ . Im folgenden sei vereinbart, für  $\varepsilon \neq 1$  zur gemeinsamen Behandlung von Ellipse und Hyperbel *Doppelvorzeichen* zu verwenden, und zwar gelte stets das obere Vorzeichen für die Ellipse, das untere für die Hyperbel. Wir setzen  $a := \pm p/(1-\varepsilon^2)$ , dann ist  $a > 0$ , und der ebengenannte Punkt ist  $(\pm 2a, 0)$ ; damit kann (5) in der Form  $y^2 = (\varepsilon^2 - 1) \cdot x \cdot (x \mp 2a)$  geschrieben werden.

Wir machen nun den Mittelpunkt  $(\pm a, 0)$  zwischen  $(0, 0)$  und  $(\pm 2a, 0)$  zum Ursprung eines „neuen“ Koordinatensystems, indem wir die Verschiebung

$x = x' \pm a$ ,  $y = y'$  durchführen. Anschließend ändern wir die „neuen“ Koordinatenbezeichnungen  $x'$ ,  $y'$  wieder in  $x$ ,  $y$  ab. (Da wir die früheren Bezeichnungen  $x$ ,  $y$  nicht gleichzeitig mit den jetzigen verwenden, resultieren hieraus keine Fehler.) Es entsteht die Gleichung  $y^2 = (\varepsilon^2 - 1)(x^2 - a^2)$ . Aus ihr ist ersichtlich, daß die Ellipse und die Hyperbel bei der Spiegelung an der  $y$ -Achse in sich übergehen. Der Nullpunkt heißt der *Mittelpunkt der Ellipse bzw. Hyperbel*  $c$ ; symmetrisch (bezüglich des Mittelpunktes) zu den bisher betrachteten  $F_1$ ,  $l_1$  liegen ein *zweiter Brennpunkt*  $F_2$  und eine *zweite Leitlinie*  $l_2$ , mit denen folglich  $c$  ebenso charakterisiert werden kann wie eingangs mit  $F_1$  und  $l_1$ . Insbesondere liegt zwischen ihnen, ebenso wie  $S_1$  zwischen  $F_1$  und  $l_1$ , ein *zweiter Scheitel*  $S_2$  von  $c$  symmetrisch zu  $S_1$ . Da  $S_1$  die „neuen“ Koordinaten  $(\mp a, 0)$  hat, lautet der zweite Scheitel  $(\pm a, 0)$ . Die Länge  $|S_1 S_2| = 2a$  heißt die *Hauptachse(nlänge)* von  $c$ .

Wir setzen nun  $b := a\sqrt{\pm(1 - \varepsilon^2)}$  und können die vorhin erhaltene Gleichung als  $y^2 = \mp(b^2/a^2)(x^2 - a^2)$  und damit schließlich in der bekannten Gestalt der *Mittelpunktsgleichung*

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (6)$$

schreiben. Man nennt  $2b$  die *Nebenachse(nlänge)* von  $c$ . Aus  $b^2 = \pm a^2(1 - \varepsilon^2)$  ergibt sich

$$p = \pm a(1 - \varepsilon^2) = \frac{b^2}{a}; \quad (7)$$

setzen wir ferner

$$e := a\varepsilon, \quad (8)$$

so folgt einerseits

$$a^2 - e^2 = \pm b^2, \quad (9)$$

andererseits

$$f = \frac{p}{1 \mp \varepsilon} = \pm a(1 - \varepsilon) = \pm a \mp e.$$

Der Brennpunkt  $F_1$  hat somit die „neuen“ Koordinaten  $(f \mp a, 0) = (\mp e, 0)$ , der zweite, symmetrisch hierzu gelegene Brennpunkt  $F_2$  ist also  $(\pm e, 0)$ . Damit ist  $e$  der Abstand je eines Brennpunktes vom Mittelpunkt und heißt die *Exzentrizität* von  $c$ ; die Zahl  $\varepsilon$ , durch die (zusammen mit  $F_1$  und  $l_1$ ) der Kegelschnitt definiert wurde, ist hiernach zugleich das Verhältnis  $\varepsilon = e/a$  von Exzentrizität und halber Hauptachse und wird als *numerische Exzentrizität* bezeichnet. Die Gleichung von  $l_1$  im „neuen“ System ist  $x = -(f/\varepsilon) \mp a$ , wegen  $f \pm a\varepsilon = f \pm e = \pm a$  also  $x = \mp a/\varepsilon$ ; symmetrisch hierzu hat  $l_2$  die Gleichung  $x = \pm a/\varepsilon$ .

Für die Ellipse (Abb. 2.43) ist

$$-\frac{a}{\varepsilon} < -a < -e < 0 < e < a < \frac{a}{\varepsilon},$$



daher besteht auf der  $x$ -Achse die Anordnung

$$G_1 < S_1 < F_1 < O < F_2 < S_2 < G_2.$$

Aus (6) folgt ferner, daß nur für  $-a \leq x \leq a$  Punkte  $(x, y)$  auf  $c$  existieren können. Ist  $X \in c$  und  $H_1$  der Fußpunkt des Lotes von  $X$  auf  $l_1$ , so gilt folglich  $Zw(H_1 X H_2)$  und daher

$$\begin{aligned} |F_1 X| + |F_2 X| &= \varepsilon(|H_1 X| + |H_2 X|) = \varepsilon|H_1 H_2| \\ &= \varepsilon|G_1 G_2| = \varepsilon \cdot \frac{2a}{\varepsilon} = 2a. \end{aligned}$$

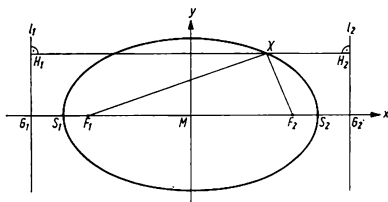


Abb. 2.43

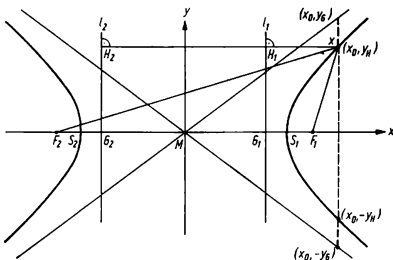


Abb. 2.44

Für die Hyperbel (Abb. 2.44) ist

$$-e < -a < -\frac{a}{\varepsilon} < 0 < \frac{a}{\varepsilon} < a < e,$$

daher gilt

$$F_2 < S_2 < G_2 < O < G_1 < S_1 < F_1.$$

Aus (6) folgt, daß nur für  $x \leq -a$  oder  $x \geq a$  Punkte  $(x, y)$  auf  $c$  existieren. Also gilt für  $X \in c$  entweder  $Zw(XH_2H_1)$  oder  $Zw(H_2H_1X)$  und daher in beiden Fällen

$$\begin{aligned} ||F_1X| - |F_2X|| &= \varepsilon ||H_1X| - |H_2X|| = \varepsilon |H_1H_2| \\ &= \varepsilon |G_1G_2| = \varepsilon \cdot \frac{2a}{\varepsilon} = 2a. \end{aligned}$$

Für alle Ellipsenpunkte  $X$  ist also die Summe, für alle Hyperbelpunkte  $X$  der Betrag der Differenz der Abstände von  $X$  zu den Brennpunkten konstant gleich  $2a$ . Diese Eigenschaft charakterisiert die Ellipse bzw. Hyperbel (vgl. 2.8.5., Aufgabe 6).

Die Formeln (7), (8), (9) bleiben auch für den bisher ausgeschlossenen Wert  $\varepsilon = 0$  sinnvoll; sie ergeben dann  $e = 0$ ,  $a = b = p$ , und (6) wird zu  $x^2 + y^2 = a^2$ . Es entsteht also der Kreis mit dem Radius (= halbe Hauptachse = halbe Nebenachse = Halbparameter)  $a$  und dem Mittelpunkt  $(= F_1 = F_2) = O$ . Auch die Eigenschaft  $|F_1X| + |F_2X| = 2a$  bleibt somit erhalten, so daß es gerechtfertigt ist, den Kreis als Spezialfall der Ellipse unterzuordnen; dagegen existiert für den Kreis keine Leitlinie.

Eine besondere Beziehung zur Hyperbel  $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$  haben die Geraden

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0. \quad (11)$$

Liegen nämlich für gegebene Abszisse  $x_0$  (mit  $x_0 < -a$  oder  $x_0 > a$ ) die Punkte  $(x_0, y_H)$ ,  $(x_0, -y_H)$  auf der Hyperbel und  $(x_0, y_G)$ ,  $(x_0, -y_G)$  auf (10), (11) (wobei  $y_H, y_G > 0$  gewählt seien), so gilt

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_H^2}{b^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{|x_0|}{a} - \frac{y_G}{b} = 0.$$

Subtrahiert man von der ersten Gleichung die mit  $\left(\frac{|x_0|}{a} + \frac{y_G}{b}\right)$  multiplizierte zweite, so ergibt sich

$$\frac{y_G^2}{b^2} - \frac{y_H^2}{b^2} = 1, \quad \text{also} \quad y_G - y_H = \frac{b^2}{y_G + y_H} > 0.$$

Nun ist  $y_G = (b/a)|x_0|$ ; für  $|x_0| > a/\sqrt{2}$  folgt ferner  $y_H > b$ , also

$$0 < y_G - y_H < \frac{b}{\frac{|x_0|}{a} + 1}.$$

Damit ist

$$\lim_{|x_0| \rightarrow \infty} (y_G - y_H) = 0,$$

also auch

$$\lim_{|x_0| \rightarrow \infty} (-y_G - (-y_H)) = 0$$

gezeigt, d. h., für  $x_0 \rightarrow +\infty$  und für  $x_0 \rightarrow -\infty$  nähert sich die Hyperbel mit je einem ihrer Teilbögen unbegrenzt sowohl der Geraden (10) als auch der Geraden (11) an, ohne (wegen  $y_G - y_H \neq 0$  für alle  $x_0$ ) einen gemeinsamen Punkt mit (10), (11) zu besitzen: Die Geraden (10), (11) sind *Asymptoten* der Hyperbel.

### 2.8.3. Diskussion der Kurven zweiter Ordnung

Die bisher erhaltenen Gleichungen von Ellipsen (einschließlich Kreisen), Parabeln und Hyperbeln (vgl. auch 2.8.5., Aufgabe 7) haben sämtlich die Form einer Gleichung zweiten Grades,

$$a_{00} + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0 \quad (12)$$

mit geeigneten Zahlen  $a_{ij}$ , wobei  $(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0, 0, 0)$  ist. Diese Kurven heißen daher *Kurven zweiter Ordnung*. Wir wollen untersuchen, unter welchen Bedingungen umgekehrt eine Kurve zweiter Ordnung, d. h. die Menge  $c$  aller  $X$  mit (12), eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist. Mit Hilfe der Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad X := \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad (13)$$

kann man (12) in der Form

$$X^T A X = 0$$

schreiben.

Ist  $a_{12} \neq 0$ , so gibt es eine Größe  $\omega$  orientierter Elementarwinkel mit  $\cot 2\omega = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$ . Führt man hiermit die Drehung

$$x = x' \cdot \cos \omega - y' \cdot \sin \omega, \quad y = x' \cdot \sin \omega + y' \cdot \cos \omega \quad (14)$$

durch, so erhält in der aus (12) entstehenden Gleichung das Glied mit  $x' y'$  den Koeffizienten

$$\begin{aligned} & -2a_{11} \cdot \cos \omega \cdot \sin \omega + 2a_{12}(\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) + 2a_{22} \cdot \cos \omega \cdot \sin \omega \\ & = 2a_{12} \cdot \cos 2\omega - (a_{11} - a_{22}) \cdot \sin 2\omega = 0. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen anschließend  $x', y'$  wieder mit  $x, y$  und die Koeffizienten der erhaltenen Gleichung wieder wie in (12). Damit ist gezeigt, daß man in (12) durch eine Drehung (14) stets

$$a_{12} = 0$$

erreichen kann. (Vgl. auch 2.8.5., Aufgabe 8.)

Auf die Matrizen (13) wirkt sich (14) so aus, daß nach Einführung von

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix}, \quad X' := \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$X = MX'$  gilt, wonach  $X^T A X = X'^T M^T A M X'$  wird. Die Koeffizienten der erhaltenen Gleichung sind folglich ebenso aus der Matrix  $M^T A M$  abzulesen wie die der ursprünglichen Gleichung (12) aus  $A$ . Da  $M$  orthogonal ist, gilt

$$\det(M^T A M) = \det A (\det M)^2 = \det A.$$

Die folgende Fallunterscheidung  $\det A = 0, \neq 0$  bleibt also von der Drehung (14) unberührt. Auf die Frage, wie man die weitere Fallunterteilung an der ursprünglichen Matrix  $A$  ablesen kann, gehen wir nicht mehr ein; hierzu vgl. etwa [10].

Fall 1:  $\det A = 0$ .

1.1. Ist  $a_{11} = a_{22} = 0$ , so ist (12) eine lineare Gleichung. Deren Diskussion ist bekannt: Für  $a_{00} = a_{01} = a_{02} = 0$  ist  $c$  die ganze Ebene  $R^2$ ; für  $a_{00} \neq 0, a_{01} = a_{02} = 0$  ist  $c$  leer; für  $(a_{01}, a_{02}) \neq (0, 0)$  ist  $c$  eine Gerade.

1.2. Ist genau eine der Zahlen  $a_{11}, a_{22}$  nicht 0, etwa  $a_{11} \neq 0, a_{22} = 0$ , so folgt aus  $0 = \det A = -a_{02}^2 a_{11}$  auch  $a_{02} = 0$ . Multipliziert man (12) mit  $a_{11}$ , so entsteht gleichwertig  $(a_{01} + a_{11}x)^2 + a_{00}a_{11} - a_{01}^2 = 0$ . Je nachdem, ob  $d := a_{00}a_{11} - a_{01}^2$  positiv ist oder nicht, ist somit  $c$  leer oder die Vereinigungsmenge paralleler Geraden  $a_{11}x + a_{01} + \sqrt{|d|} = 0, a_{11}x + a_{01} - \sqrt{|d|} = 0$ , die im Fall  $d = 0$  zu einer Geraden zusammenfallen.

1.3. Ist  $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0$ , so sind die letzten beiden Zeilen in  $A$  linear unabhängig. Von ihnen hängt wegen  $\det A = 0$  die erste linear ab, also ist

$$A = \begin{pmatrix} r^2 p + s^2 q & rp & sq \\ rp & p & 0 \\ sq & 0 & q \end{pmatrix}$$

mit Zahlen  $p, q, r, s$ , von denen  $p, q \neq 0$  sind. Hiernach lautet (12) nun

$$p(x+r)^2 + q(y+s)^2 = 0.$$

Je nachdem, ob  $p, q$  gleiches Vorzeichen haben oder nicht, ist somit  $c$  der Punkt  $(-r, -s)$  oder die Vereinigungsmenge nichtparalleler Geraden

$$\sqrt{|p|}(x+r) + \sqrt{|q|}(y+s) = 0, \quad \sqrt{|p|}(x+r) - \sqrt{|q|}(y+s) = 0.$$

Fall 2:  $\det A \neq 0$ . Dies ist nur für  $(a_{11}, a_{22}) \neq (0, 0)$  möglich.

2.1. Ist genau eine der Zahlen  $a_{11}, a_{22}$  nicht 0, etwa  $a_{11} \neq 0, a_{22} = 0$ , so folgt aus  $0 \neq \det A = -a_{02}^2 a_{11}$  nun  $a_{02} \neq 0$ . Nach Division durch  $a_{11}$  wird (12) äquivalent mit

$$\left(x + \frac{a_{01}}{a_{11}}\right)^2 = -2 \frac{a_{02}}{a_{11}} \left(y + \frac{a_{00}a_{11} - a_{01}^2}{2a_{02}a_{11}}\right),$$

so daß  $c$  als Parabel nachgewiesen ist.

2.2. Ist  $a_{11} \neq 0$ ,  $a_{22} \neq 0$ , so lautet (12)

$$a_{11} \left( x + \frac{a_{01}}{a_{11}} \right)^2 + a_{22} \left( y + \frac{a_{02}}{a_{22}} \right)^2 = -a_{00} + \frac{a_{01}^2}{a_{11}} + \frac{a_{02}^2}{a_{22}}, \quad (15)$$

worin die rechte Seite  $D := -(\det A)/(a_{11}a_{22}) \neq 0$  ist. Dividiert man (15) durch  $D$ , so erkennt man: Für  $a_{11}/D < 0$ ,  $a_{22}/D < 0$  ist  $c$  leer. Für  $a_{11}/D > 0$ ,  $a_{22}/D > 0$  ist (15) eine *Ellipse*. Für  $(a_{11}/D) \cdot (a_{22}/D) < 0$ , also o. B. d. A.  $a_{11}/D > 0$ ,  $a_{22}/D < 0$  ist (15) eine *Hyperbel*.

Damit ist die Fallunterscheidung abgeschlossen. Durch  $\det A \neq 0$  und die Forderung, nicht leer zu sein, ist somit  $c$  als Parabel, Ellipse oder Hyperbel (*reguläre* oder *nicht ausgeartete* Kurven zweiter Ordnung) charakterisiert; für den Fall  $\det A = 0$  kommen nur noch *Ausartungsfälle* hinzu ( $\emptyset$ , eine oder zwei Geraden oder der  $R^2$ ).

Der Fall  $c = \emptyset$  erklärt sich, wenn man zur projektiven Geometrie mit komplexem Grundkörper übergeht, in 1.1. dadurch, daß die *uneigentliche Gerade* auftritt. In 1.2. dagegen erhält man statt  $\emptyset$ , daß  $c$  die Vereinigungsmenge *konjugiert komplexer „paralleler Geraden“* ist. Der in 1.3. vorkommende Punkt ist der (reelle) Schnittpunkt zweier *konjugiert komplexer „nichtparalleler Geraden“*, deren Vereinigungsmenge  $c$  ist. Somit bedeutet in der projektiven Geometrie mit Grundkörper  $C$  der Fall  $\det A = 0$  (mit  $A \neq O$ ) stets ein „Zerfallen“ von  $c$  in *zwei Geraden* (die auch uneigentlich, komplex oder miteinander zusammenfallend sein können).

## 2.8.4. Tangenten, Pol und Polare

**Satz 4.** *Jede reguläre Kurve zweiter Ordnung (12) hat in jedem ihrer Punkte  $(x_1, y_1)$  die Gerade*

$$a_{00} + a_{01}(x + x_1) + a_{02}(y + y_1) + a_{11}xx_1 + a_{12}(xy_1 + x_1y) + a_{22}yy_1 = 0 \quad (16)$$

als *Tangente*.

Zum Beweis setzen wir Methoden der Tangentenermittlung in der Differentialrechnung aus MfL Band 5 voraus.

Für die Parabel  $2px - y^2 = 0$  erhalten wir  $x = \varphi(y) := (1/2p)y^2$  (mit  $y \in \mathbb{R}$  als unabhängiger Variablen), also  $\varphi'(y_1) = (1/p)y_1$  und daher als Tangentengleichung

$$x - x_1 = \frac{1}{p}y_1(y - y_1),$$

d. h. wie behauptet

$$px - yy_1 = (px_1 - y_1^2) - px_1.$$

Für die Ellipse bzw. Hyperbel (6) kann man z. B. die *Parameterdarstellung*

$$x(t) = a \frac{1 \mp t^2}{1 \pm t^2}, \quad y(t) = b \frac{2t}{1 \pm t^2} \quad (17)$$

( $t \in \mathbb{R}$  bei der Ellipse;  $t \in \mathbb{R}, t \neq 1, -1$  bei der Hyperbel) heranziehen, die *alle Punkte von (6) außer*  $(-a, 0)$  *erfaßt, wie sich folgendermaßen bestätigen läßt:* Alle Punkte (17) erfüllen (6), liegen also auf der Kurve. Umgekehrt ist für jedes  $x_1$  (mit  $-a < x_1 \leq a$  bei der Ellipse bzw. mit  $x_1 < -a$  oder  $x_1 \geq a$  bei der Hyperbel) die Zahl

$$w := \pm \frac{a - x_1}{a + x_1} = \pm \frac{a^2 - x_1^2}{(a + x_1)^2}$$

nichtnegativ, und die Gleichung

$$a \cdot \frac{1 \mp t_1^2}{1 \pm t_1^2} = x_1$$

hat genau die Lösungen  $t_{11} = \sqrt{w}$  und  $t_{12} = -\sqrt{w}$ ; somit erfaßt (17) zwei (genau im Fall  $w = 0$  zusammenfallende) Kurvenpunkte mit der Abszise  $x_1$ , also, da es nach (6) nur zwei solche gibt (genau im Fall  $x_1 = a$  zusammenfallend), alle behaupteten Kurvenpunkte.

Aus (17) errechnet man nun für jeden Parameterwert  $t_1$ , also für jeden Kurvenpunkt  $(x_1, y_1) := (x(t_1), y(t_1)) \neq (-a, 0)$  zunächst

$$\dot{x}(t_1) = \mp 2a \frac{2t_1}{(1 \pm t_1^2)^2} = \mp \frac{2a}{b(1 \pm t_1^2)} y_1,$$

$$\dot{y}(t_1) = 2b \frac{1 \mp t_1^2}{(1 \pm t_1^2)^2} = \frac{2b}{a(1 \pm t_1^2)} x_1;$$

daher erhält man als Tangentengleichung  $(x - x_1) \dot{y}(t_1) - (y - y_1) \dot{x}(t_1) = 0$  nach Multiplikation mit  $(1 \pm t_1^2)/(2ab)$ , wie behauptet,

$$\frac{xx_1}{a^2} \pm \frac{yy_1}{b^2} = \left( \frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{y_1^2}{b^2} \right) 1.$$

In dem Scheitel  $(-a, 0)$  erhält man die zur Tangente  $x = a$  des anderen Scheitels  $(a, 0)$  symmetrische Tangente  $x = -a$ , also ebenfalls die behauptete Gerade.

Nach der Diskussion in 2.8.3. kann aus den Parabeln  $2px - y^2 = 0$  sowie den Ellipsen und Hyperbeln (6) durch geeignete Koordinatentransformation jede reguläre Kurve (12) erhalten werden. Diese Transformation, angewandt auf  $x, y$  und zugleich auf  $x_1, y_1$ , wirkt sich aber auf die Koeffizienten von (16) genau so aus wie die gleiche Transformation auf dieselben Koeffizienten von (12). Damit ist Satz 4 allgemein bewiesen.

**Satz 5.** *Für jeden Ellipsen- bzw. Hyperbelpunkt  $P_1$  ist die Tangente in  $P_1$  eine winkelhalbierende Gerade der Geraden  $g(P_1F_1)$ ,  $g(P_1F_2)$  (Abb. 2.45). Für jeden Parabelpunkt  $P_1$  ist die Tangente in  $P_1$  eine winkelhalbierende Gerade von  $g(P_1F_1)$  und der Achsenparallelen durch  $P_1$ .*

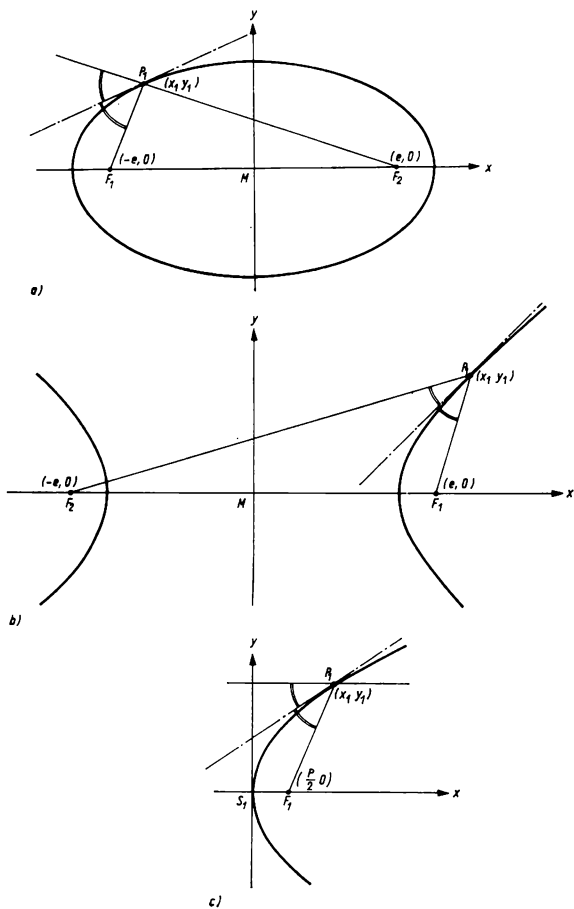


Abb. 2.45

Beweis. Ist  $P_1$  einer der Scheitel  $S_1, S_2$  oder ist die Ellipse ein Kreis, so sind die beiden genannten Geraden identisch, und die Tangente steht senkrecht darauf (vgl. 2.8.5., Aufgabe 10). Diese Fälle seien jetzt ausgeschlossen.

Für die Ellipse bzw. Hyperbel (6) hat  $g(P_1 F_1)$  die Gleichung

$$(x - x_1) y_1 - (y - y_1) (x_1 \pm e) = 0.$$

Nach (6) und (9) gilt

$$y_1^2 = (a^2 - e^2) \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)$$

und daher

$$y_1^2 + (x_1 \pm e)^2 = a^2 - x_1^2 - e^2 + \frac{e^2 x_1^2}{a^2} + x_1^2 \pm 2ex_1 + e^2 = \left(a \pm \frac{ex_1}{a}\right)^2.$$

Hiernach und wegen (8) hat  $g(P_1 F_1)$  die Hessesche Normalform

$$(x - x_1) \frac{y_1}{a \pm ex_1} - (y - y_1) \frac{x_1 \pm e}{a \pm ex_1} = 0.$$

Ebenso hat  $g(P_1 F_2)$  diese Gleichung mit vertauschten Doppelvorzeichen als Hessesche Normalform. Nach ihrer Subtraktion entsteht wegen

$$\frac{y_1}{a \pm ex_1} - \frac{y_1}{a \mp ex_1} = \mp \frac{2ex_1 y_1}{a^2 - e^2 x_1^2}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{x_1 \pm e}{a \pm ex_1} - \frac{x_1 \mp e}{a \mp ex_1} &= \pm \frac{2(ae - e^2 x_1^2)}{a^2 - e^2 x_1^2} = \pm \frac{2e}{a^2 - e^2 x_1^2} (a^2 - x_1^2) \\ &= \frac{2e}{a^2 - e^2 x_1^2} \frac{a^2}{b^2} y_1^2 \end{aligned}$$

eine Gleichung, die durch Multiplikation mit  $\mp \frac{a^2 - e^2 x_1^2}{2a^2 e y_1}$  in

$$(x - x_1) \frac{x_1}{a^2} \pm (y - y_1) \frac{y_1}{b^2} = 0$$

übergeht, also die Tangente darstellt.

Für die Parabel  $y^2 = 2px$  hat  $g(P_1 F_1)$  wegen  $f = p/(e + 1) = p/2$  die Gleichung

$$(x - x_1) y_1 - (y - y_1) \left(x_1 - \frac{p}{2}\right) = 0,$$

also wegen

$$y_1^2 + \left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x_1 + \frac{p}{2}\right)^2$$

die Hessesche Normalform

$$(x - x_1) \frac{2y_1}{2x_1 + p} - (y - y_1) \frac{2x_1 - p}{2x_1 + p} = 0.$$



Die Achsenparallele durch  $P_1$  hat die Hessesche Normalform  $y - y_1 = 0$ . Durch Subtraktion entsteht wegen

$$-\frac{2x_1 - p}{2x_1 + p} - 1 = -\frac{4x_1}{2x_1 + p} = -\frac{2y_1^2}{p(2x_1 + p)}$$

eine Gleichung, die durch Multiplikation mit  $\frac{p(2x_1 + p)}{2y_1}$  in

$$(x - x_1)p - (y - y_1)y_1 = 0$$

übergeht, also die Tangente darstellt.

Mit Hilfe der Matrizen (13) und  $X_1 := (1, x_1, y_1)^T$  läßt sich (16) in der Form  $X_1^T A X = 0$  schreiben. Wir betrachten diese Gleichung nun bei *beliebig* gegebenem Punkt  $(x_1, y_1)$ . Sie ist auch dann eine lineare Gleichung in  $x$  und  $y$ . Die Koeffizienten bei  $x$  und  $y$  lauten  $a_{01} + a_{11}x_1 + a_{12}y_1$  bzw.  $a_{02} + a_{12}x_1 + a_{22}y_1$ . Sie sind dann und nur dann beide 0, wenn folgendes gilt: Bringt man  $(x_1, y_1)$  durch eine Verschiebung in  $(0, 0)$ , so gilt für die dabei in (12) entstehenden Koeffizienten (die wir wieder  $a_{ij}$  nennen)  $a_{01} = a_{02} = 0$ . Das besagt: Zu jedem Kurvenpunkt  $(x, y)$  liegt auch  $(-x, -y)$  auf der Kurve, d. h., diese ist eine Ellipse oder Hyperbel und  $(0, 0)$  ihr Mittelpunkt.

Damit ist gezeigt: Für jeden Punkt  $(x_1, y_1)$ , der nicht im Mittelpunkt der regulären Kurve zweiter Ordnung (12) liegt, ist  $X_1^T A X = 0$  eine eindeutig bestimmte Gerade. Sie heißt die *Polare von  $(x_1, y_1)$* . Insbesondere ist nach Satz 4 die Polare jedes Kurvenpunktes dasselbe wie die Tangente in diesem Punkt.

Man kann umgekehrt zeigen: Zu jeder Geraden  $u_1 + v_1x + w_1y = 0$ , die bei Ellipsen und Hyperbeln nicht durch den Mittelpunkt geht bzw. bei Parabeln nicht parallel zur Achse ist, gibt es genau einen Punkt  $(x_1, y_1)$ , dessen Polare die gegebene Gerade ist. Bei Einführung von  $U_1 := (u_1, v_1, w_1)^T$  erfüllt dieser Punkt die Gleichung  $X_1^T A = U_1^T$ , d. h.  $A X_1 = U_1$ . Er heißt der *Pol* der Geraden.

Für Pole und Polaren gilt der grundlegende

**Satz 6.** *Geht eine Gerade  $g$  (bei Parabeln: nicht parallel zur Achse) durch einen Punkt  $P$  (bei Ellipsen und Hyperbeln: verschieden vom Mittelpunkt), so liegt der Pol von  $g$  auf der Polaren von  $P$ .*

**Beweis.** Hat  $g$  die Gleichung  $u_1 + v_1x + w_1y = 0$  und  $P$  die Koordinaten  $(x_2, y_2)$ , so gilt  $A X_1 = U_1$  für den Pol  $(x_1, y_1)$  von  $g$  und  $A X_2 = U_2$  für die Polare  $u_2 + v_2x + w_2y = 0$  von  $P$ . Wegen  $P \in g$  ist  $U_1^T X_2 = 0$ . Daraus folgt

$$U_2^T X_1 = X_2^T A A^{-1} U_1 = 0,$$

w. z. b. w.

Aus Satz 6 ergeben sich folgende Konstruktionsmöglichkeiten (Abb. 2.46, vgl. auch 2.8.5., Aufgabe 13):

**Folgerung 1.** Schneidet  $g$  die Kurve zweiter Ordnung in zwei Punkten  $P_1 \neq P_2$ , so schneiden sich die in  $P_1, P_2$  an die Kurve gelegten Tangenten im Pol  $Q$  von  $g$ .

**Folgerung 2.** Gehen durch einen Punkt  $Q$  zwei Tangenten an die Kurve, so ist die Verbindungsgerade der Berührungspunkte die Polare von  $Q$ .

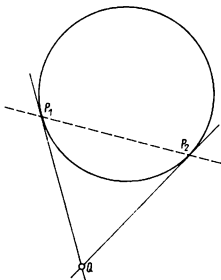


Abb. 2.46

### 2.8.5. Aufgaben

1. Man beweise, daß jede Kreisfläche eine konvexe Punktmenge ist.
2. Man beweise: Sind  $k_1, k_2, k_3$  Kreise mit paarweise verschiedenen Mittelpunkten und ist  $g_{ij}$  die Potenzlinie von  $k_i$  und  $k_j$ , so sind die Geraden  $g_{23}, g_{31}, g_{12}$  konzentrisch oder zu je zweien parallel. Man verwende diesen Satz, um die Potenzlinie zweier Kreise mit  $k_1 \cap k_2 = \emptyset$  zu finden.
3. Man beweise den Peripheriewinkelsatz für den Spezialfall  $M \in WA$  durch die Wahl eines Koordinatensystems, in dem  $W, A, B$  die Punkte  $(-r, 0), (r, 0), (r \cdot \cos 2\alpha, r \cdot \sin 2\alpha)$  sind, unter Anwendung der Gleichung

$$\tan \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

und der (zuvor gesondert zu zeigenden) Ungleichung  $|\angle(AWB; P^*)| < 90^\circ$ .

4. Man beweise durch Umkehrung einzelner Beweisschritte aus 2.8.1. die folgende Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes: Jeder Punkt  $W$ , dessen Abszisse kleiner als die von  $A$  ist und für den  $|\angle(AWB; P^*)| = \alpha$  gilt, liegt auf  $k$ . Welches ist dagegen die Menge aller Punkte  $W \in R^2, \neq A, B$  mit  $|\angle(AWB; P^*)| = \alpha$ ?
5. Man übertrage Satz 1 auf die Schnittpunkte  $X_1, X_2$ , die eine Kugel  $(x - m)^2 - r^2 = 0$  im  $R^3$  mit den Geraden  $g$  durch einen Punkt  $P$  hat, und beweise nach entsprechender Definition der Potenz von  $P$  bezüglich der Kugel das Analogon zu Satz 2 (Potenzebene zweier Kugeln).
6. Man beweise, daß jeder Punkt  $X$  mit  $|F_1X| \pm |F_2X| = 2a$  auf der Ellipse bzw. Hyperbel (6) liegt.  
Hinweis: Wie ändert sich  $|F_1X| \pm |F_2X|$ , wenn man  $X$  von einem Ellipsen- bzw. Hyperbelpunkt aus parallel zur  $y$ -Achse bzw. zur  $x$ -Achse verschiebt?

7. Man zeige, daß aus (6) für  $\varepsilon = \sqrt{2}$  die *gleichseitige Hyperbel*  $x^2 - y^2 = a^2$  wird, deren Asymptoten aufeinander senkrecht stehen. Welche Gleichung entsteht nach einer Drehung, bei der die Asymptoten zu Koordinatenachsen werden?
8. Man zeige ohne Trigonometrie, daß es auf reell lösbare quadratische Gleichungen führt,  $\sigma, \tau$  mit  $\sigma^2 + \tau^2 = 1$  so zu bestimmen, daß bei der Transformation  $x = \sigma x' - \tau y', y = \tau x' + \sigma y'$  in (12) das Glied mit  $x'y'$  den Koeffizienten 0 erhält.
9. Man untersuche unter Verwendung des Ansatzes von Aufgabe 8, was für eine Kurve

$$(a^2 - 2a)x + (a^2 - 4)y + x^2 + 2axy + y^2 = 0$$

ist, wobei man die Fälle  $a \cong -1, 0, 1, 2$  unterscheide.

10. Man beweise aus Satz 4, daß jede Kreistangente auf der Verbindungsgeraden vom Berührungspunkt zum Mittelpunkt senkrecht steht.
11. Man beweise: Ist  $t$  ein vom Berührungspunkt  $B$  ausgehender Strahl auf einer Tangente an einem Kreis  $k$ , sind  $A, P \in k$  (voneinander und von  $B$  verschieden) so gelegen, daß  $|\angle(t, BA^+; P^+)| < 180^\circ$  ist, und ist  $b$  der Bogen mit  $A, B$  als Endpunkten und mit  $P \in b$ , so hat der sogenannte *Sehnen-Tangentenwinkel*  $\angle(t, BA^+; P^+)$  dieselbe Größe wie die über  $b$  stehenden Peripheriewinkel.
12. Man beweise: Die Strecke zwischen den Schnittpunkten einer Hyperbeltangente mit den Asymptoten wird vom Berührungspunkt halbiert.
13. Man entnehme aus Satz 6 und seinen Folgerungen Konstruktionsmöglichkeiten für den Pol einer Geraden  $g$ , die die Kurve zweiter Ordnung nicht schneidet, desgleichen für die Polare eines Punktes, von dem aus keine Tangenten an die Kurve existieren.  
Hinweis: Man beginne mit der Wahl zweier Punkte auf  $g$ , auf die sich Folgerung 2 anwenden läßt.
14. Man beweise: Schneidet eine Gerade durch  $P$  eine Kurve zweiter Ordnung in  $A, B$  und die Polare von  $P$  in  $Q$ , so sind  $(A, B)$  und  $(P, Q)$  harmonische Punktepaare.

## 2.9. Ausblick auf weitere Themen der analytischen Geometrie

Fast jedes der hier behandelten Themen hat in der analytischen Geometrie einen weiteren systematischen Ausbau erfahren. Die meisten Aussagen in 2.1. und 2.2. lassen sich ohne die Begriffe der Orthogonalität und der Länge (nur mit Hilfe von *Längenverhältnissen*) beibehalten, was zu einem analytischen Aufbau der *affinen Geometrie* führt. Zu 2.4. wurden beispielsweise weitergehende determinantentheoretische Möglichkeiten der *Erfassung linearer Mannigfaltigkeiten* gebildet, etwa für Geraden im  $R^3$ . Außer den in 2.7. genannten Transformationen betrachtet man auch solche, die zu *andersartigen Koordinatensystemen* führen, (schiefwinklige Koordinaten, Polarkoordinaten usw.). Die bei Transformationen invarianten Eigenschaften von Vektoren, Matrizen, Koeffizienten- $n$ -Tupeln usw. werden in der *Tensorrechnung* ausgebaut, die zugleich die Theorie der skalaren

und vektoriiellen Produkte fortsetzt und ihrerseits die Grundlage der Vektor- und Tensoranalysis bildet.

In der analytischen Geometrie der Ebene kann man zu *Kurven höheren Grades* übergehen. Bekannt sind z. B. die sogenannten *Parabeln* höheren Grades  $y = x^n$  ( $n = 3, 4, \dots$ ) und *Hyperbeln* höheren Grades (vgl. 2.8.5., Aufgabe 7)  $y = x^{-n}$  ( $n = 2, 3, \dots$ ). Stärkeren Einsatz algebraischer Hilfsmittel erfordert die Untersuchung von Kurven, die nicht explizit als  $y = f(x)$ , sondern (wie 2.8.3.(12)) implizit durch Nullsetzen eines Polynoms definiert sind, wenn dieses von höherem Grad ist. Hierbei und erst recht bei Einbeziehung nichtalgebraischer Funktionen ist die Analysis als wesentliches Hilfsmittel heranzuziehen.

In der analytischen Geometrie des Raumes kann man durch Ausbau matrizen-theoretischer Hilfsmittel die *Flächen zweiter Ordnung* ähnlich diskutieren, wie dies in 2.8.3. für die Kurven geschah. Flächen höherer Ordnung und andere in höher-dimensionalen Räumen durch algebraische Gleichungssysteme definierte Punkt-mengen werden dann in der *algebraischen Geometrie* behandelt. Jede solche Punkt-menge bleibt unverändert, wenn man zu dem Gleichungssystem solche Gleichungen hinzufügt, die durch Multiplikation mit beliebigen Polynomen oder durch Addition entstehen. Daher ist für algebraisch-geometrische Untersuchungen der Begriff des (*Polynom*-)*Ideals* grundlegend. Das Auftreten von Parameterdarstellungen wie z. B. 2.8.4.(17) vermittelt mit Ausnahme endlich vieler Punkte bijektive und in beiden Richtungen stetige Abbildungen zwischen algebraischen Punkt-mengen (hier: zwischen der reellen  $t$ -Achse und der Kurve zweiter Ordnung). Damit kann man sich den Einfluß der *Topologie* auf die algebraische Geometrie plausibel machen. Die Anwendungen und Anknüpfungen reichen von stark praxisbezo-genen Themen wie der Kartographie bis zu immer weitergehenden Abstrak-tionen und Verallgemeinerungen.

### 3. Abbildungen als Ordnungsprinzip in der Geometrie

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit den geometrischen Abbildungen. Dabei soll eine eindeutig umkehrbare Abbildung einer Punktmenge auf sich eine Transformation genannt werden. Nach den Bewegungen, die bereits in den ersten beiden Kapiteln eingeführt worden sind, werden nacheinander die äquiformen, die affinen und (im Überblick) die projektiven Transformationen der Ebene auf sich behandelt. Im Gegensatz zum vorangegangenen Kapitel, in dem vorwiegend analytisch gearbeitet wurde, soll jetzt der synthetischen Behandlung der Vorrang eingeräumt werden, und auf die konstruktive Erfassung der Abbildungen wird besonderer Wert gelegt. Die Einführung einer neuen Abbildung erfolgt stets durch die Angabe einer als Definition aufzufassenden Konstruktionsvorschrift. Aus ihr werden möglichst viele Sätze und Schlußfolgerungen hergeleitet, ohne daß der Formelapparat der analytischen Geometrie in Anspruch genommen wird. Das schließt allerdings nicht aus, daß auch gelegentlich mit analytischen Methoden gearbeitet wird, wo es dem zu behandelnden Problem angemessen erscheint, vor allem bei der Aufstellung der jeweiligen Abbildungsgleichungen.

#### 3.1. Das Erlanger Programm

In den ersten beiden Dritteln des 19. Jahrhunderts hatte sich die Mathematik so stürmisch entwickelt, daß es einem einzelnen Mathematiker nicht mehr möglich war, alle ihre Disziplinen, die sich herausgebildet hatten und die, bereichert durch neue Erkenntnisse, immer umfangreicher geworden waren, in ihrer Gesamtheit

zu überschauen. Selbst für Teilgebiete wie die Geometrie fiel das schwer, und deshalb ging das Bestreben der Mathematiker dahin, die Fülle der Erkenntnisse unter vereinheitlichenden Prinzipien zu ordnen.

Eine solche Ordnung für die Geometrie wurde von dem deutschen Mathematiker FELIX KLEIN (1849–1925) durch die Einführung des Gruppenbegriffs in die Geometrie erreicht. Seine grundlegenden Gedanken hierzu legte KLEIN im Jahre 1872 anlässlich seiner Berufung als Professor für Mathematik an die Universität in Erlangen in seiner Antrittsvorlesung dar, die unter dem Namen *Erlanger Programm* bekannt geworden ist. Sie trägt den Titel „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen“. KLEIN erklärte, daß jedem Gebiet der Geometrie eine Transformationsgruppe zugeordnet werden kann (z. B. der auf dem Kongruenzbegriff aufgebauten Geometrie die Gruppe der Bewegungen) und daß die jeweilige Geometrie durch die Invarianten dieser Gruppe vollständig bestimmt wird, d. h. durch solche Eigenschaften, die durch die Transformation nicht geändert werden. Betrachtet man eine Untergruppe, so nimmt die Anzahl der Invarianten zu, und die Geometrie dieser Transformationsgruppe wird inhaltlich reicher. Geht man dagegen zu einer erweiterten Gruppe über, so wird die Anzahl der Invarianten geringer, und die Geometrie wird allgemeiner, jedoch inhaltlich ärmer. Wie bereits angekündigt, soll hier dieser zuletzt genannte Weg, ausgehend von den Bewegungen als Transformationsgruppe und der zugehörigen Kongruenzgeometrie, beschritten werden. Durch die Einführung des Gruppenbegriffs in die Geometrie wurde eine Synthese von Geometrie und Algebra ermöglicht, und der Gruppenbegriff, dessen Anwendungsbereich sich bis dahin auf Permutationsgruppen beschränkt hatte, erfuhr auf diese Weise eine inhaltliche Bereicherung, indem nun Gruppen mit unendlich vielen Elementen in die Betrachtungen einbezogen wurden.

Die Forderung, bei der Behandlung einer Geometrie neben den Invarianten auch die Transformationen selbst bei der Gewinnung von Erkenntnissen zu benutzen, sollte überall in der mathematischen Ausbildung erfüllt werden. Das in ihr enthaltene wesentliche didaktische Anliegen ist in den Lehrplänen unserer Schulen berücksichtigt worden.

### 3.2. Bewegungen

Vorbemerkung: In den Abschnitten 3.2. bis 3.6. treten keine überstumpfen Winkel und keine nicht orientierten Elementarwinkel auf. Zur Abkürzung der Bezeichnungen wird daher festgelegt, daß mit  $\sphericalangle(h, k)$  bzw.  $\sphericalangle ABC$  stets der nicht überstumpfe Winkel mit den Schenkeln  $h$  und  $k$  bzw. mit den Schenkeln  $BA^+$  und  $BC^+$  gemeint sein soll.

Die Bewegungen sind in Kapitel 1 axiomatisch eingeführt worden, es wurden dort die Verschiebungen, die Drehungen (einschließlich der Punktspiegelungen als Spezialfall) sowie die Geradenspiegelungen synthetisch behandelt. Die Gruppeneigenschaft aller Bewegungen wurde axiomatisch gesichert, und auf wichtige Untergruppen wurde eingegangen. In Kapitel 2 wurden schließlich die Abbildungsgleichungen für diese Bewegungen aufgestellt.

Jetzt soll zunächst untersucht werden, ob es außer Verschiebung, Drehung und Geradenspiegelung noch weitere Bewegungen gibt. Hierzu werden zwei kongruente Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  in beliebiger Lage zueinander betrachtet. Dann gibt es nach der Definition der Kongruenz stets eine Bewegung  $\varphi$ , durch die das Dreieck  $ABC$  auf das Dreieck  $A'B'C'$  abgebildet wird, und es wird gefragt, ob zur Bestimmung von  $\varphi$  die bisher bekannten Bewegungen ausreichen.

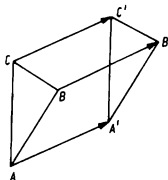


Abb. 3.1

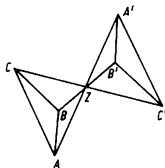


Abb. 3.2

Zunächst werde vorausgesetzt, daß die Dreiecke gleichsinnig kongruent sind. Ist  $AB$  parallel zu  $A'B'$ , so ist auch  $AC$  parallel zu  $A'C'$  und  $BC$  parallel zu  $B'C'$ , und  $\varphi$  ist eine Verschiebung, nämlich der Vektor  $\vec{v}(AA')$  (Abb. 3.1), oder eine Punktspiegelung mit dem Schnittpunkt von  $g(AA')$  und  $g(BB')$  als Zentrum (Abb. 3.2). Ist dagegen  $AB$  nicht parallel zu  $A'B'$ , so sind auch  $AC$  und  $A'C'$  sowie  $BC$  und  $B'C'$  nicht zueinander parallel. Schneiden sich die Mittelsenkrechten der Strecken  $AA'$  und  $BB'$  in einem Punkt  $Z$ , so ist  $\varphi$  eine Drehung mit dem Zentrum  $Z$  und der zugeordneten Größe  $m(\angle AZA')$  orientierter Elementarwinkel (Abb. 3.3), da  $\angle AZA'$  und  $\angle BZB'$  gleichsinnig kongruent sind, was aus der Kongruenz der Dreiecke  $ABZ$  und  $A'B'Z$  folgt. Wegen der vorausgesetzten Kongruenz der Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  ordnen sich die Punkte  $C$  und  $C'$  mit in die Betrachtungen ein, und die Mittelsenkrechte auf der Strecke  $CC'$  verläuft ebenfalls durch  $Z$ . Es kann der Spezialfall eintreten, daß genau zwei der drei Mittelsenkrechten zusammenfallen (Abb. 3.4). Weitere Sonderfälle gibt es nicht, wie man sich leicht überlegt. Jede gleichsinnige Bewegung ist daher eine Verschiebung oder Drehung.

Jetzt seien die beiden Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  ungleichsinnig kongruent (Abb. 3.5). Dann wird zunächst das Dreieck  $ABC$  so verschoben, daß etwa  $B$  auf  $B'$  abgebildet wird, und man erhält das Dreieck  $A''B'C''$ . Dieses Dreieck

wird an der Winkelhalbierenden  $w$  von  $\angle C''B'C'$  gespiegelt und geht damit in das Dreieck  $A'B'C'$  über. Die gesuchte Bewegung  $\varphi$  setzt sich in diesem Fall aus einer Verschiebung und einer Geradenspiegelung zusammen. Die Transformation  $\varphi$  kann auch noch auf eine andere Weise gewonnen werden: Durch den Mittelpunkt der Strecke  $BB'$  wird die Parallele zur Winkelhalbierenden  $w$  ge-

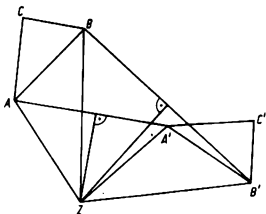


Abb. 3.3

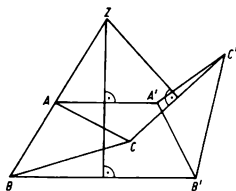


Abb. 3.4

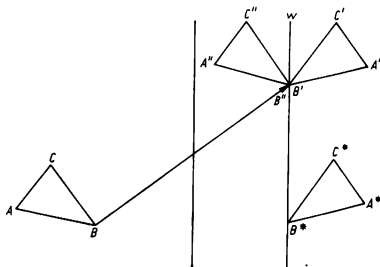


Abb. 3.5

zogen. Dann wird das Dreieck  $ABC$  an dieser Parallelen gespiegelt, und man erhält das Dreieck  $A^*B^*C^*$ . Man prüft leicht nach, daß das Dreieck  $A^*B^*C^*$  durch die Verschiebung, die den Punkt  $B^*$  in den Punkt  $B'$  überführt, auf das Dreieck  $A'B'C'$  abgebildet werden kann. Damit liegt eine Geradenspiegelung  $\sigma$  und eine Verschiebung  $\tau$  mit der Verschiebungsrichtung parallel zur Spiegelgeraden (der *Achse der Spiegelung*) vor. Eine solche Transformation, die offenbar die allgemeinste ungleichsinnige Bewegung ist, heiße *Spiegelschiebung*, *Schubspiegelung* oder *Gleitspiegelung*. Es ist leicht einzusehen, daß es dabei auf die



Reihenfolge der Transformationen  $\sigma$  und  $\tau$  nicht ankommt, also Kommutativität vorliegt. Die Bezeichnungen Spiegelschiebung bzw. Schubspiegelung sind daher völlig gleichberechtigt.

Man erkennt sofort, daß die Schubspiegelung keinen Fixpunkt, jedoch eine Fixgerade, nämlich die Achse der Geradenspiegelung, besitzt.

Damit ist die eingangs gestellte Frage beantwortet: Zwei kongruente Dreiecke mit gleichem Umlaufssinn lassen sich durch eine Drehung oder Verschiebung, zwei Dreiecke mit ungleichem Umlaufssinn durch eine Schubspiegelung, die im Spezialfall eine gewöhnliche Geradenspiegelung sein kann, aufeinander abbilden.

Die Abbildungsgleichungen für eine Schubspiegelung lassen sich leicht aus den Gleichungen für Geradenspiegelung und Verschiebung durch Zusammensetzen gewinnen, so daß hierauf nicht weiter eingegangen zu werden braucht.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß jede Bewegung das Produkt von zwei oder drei Geradenspiegelungen ist.

**Satz 1.** *Jede Verschiebung  $\tau$  läßt sich als Zusammensetzung von zwei Geradenspiegelungen darstellen, deren Achsen parallel sind und senkrecht zur Verschiebungsrichtung verlaufen. Ihr Abstand beträgt die halbe Länge des Vektors  $\tau$ .*

Zum Beweis dieses Satzes werde eine beliebige Verschiebung betrachtet, die den Punkt  $A$  auf den Punkt  $A'$  abbilden möge. Eine Geradenspiegelung  $\sigma_1$  wird durch die Angabe ihrer Achse  $s_1$  (Abb. 3.6) senkrecht zu  $g(AA')$  beliebig gewählt. In Abb. 3.6 sind drei mögliche Fälle eingezeichnet. Es ist dann  $\sigma_1(A) = A''$ .

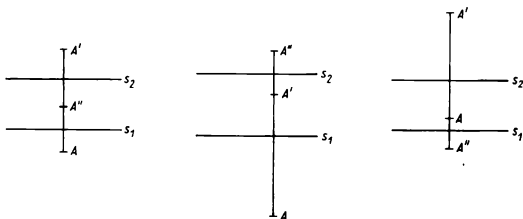


Abb. 3.6

Die Achse  $s_2$  der Spiegelung  $\sigma_2$  ist die Mittelsenkrechte auf der Strecke  $A''A'$ , so daß  $\sigma_2(A'') = A'$  gilt. Man überlegt sich leicht, daß dann der Abstand der beiden Achsen  $|AA'|/2$  beträgt.

Auch die Umkehrung dieses Satzes ist richtig, wie man leicht beweisen kann. So erhält man durch die Zusammensetzung zweier Geradenspiegelungen mit parallelen Achsen mit dem Abstand  $a$  stets eine Verschiebung, deren zugeordnete Original- und Bildpunkte den Abstand  $2a$  haben.

**Satz 2.** Jede Drehung läßt sich als Zusammensetzung von zwei Geradenspiegelungen darstellen, deren Achsen sich im Zentrum  $Z$  der Drehung schneiden und Trägergeraden der Schenkel eines orientierten Elementarwinkels der Größe  $u/2$  sind, wenn der Drehung die Größe  $u$  orientierter Elementarwinkel zugeordnet ist.

**Beweis.** Die Drehung sei durch das Zentrum  $Z$  und durch  $u = m(\angle(h, h'))$  als zugeordnete Größe orientierter Elementarwinkel bestimmt (Abb. 3.7.). Die durch den Strahl  $h$  bestimmte Gerade  $s_1$  sei die Achse der ersten Geradenspiegelung  $\sigma_1$ , die Halbierende des orientierten Elementarwinkels  $\angle(h, h')$  die Achse  $s_2$  der zweiten Geradenspiegelung  $\sigma_2$ . Man prüft leicht nach, daß die Zusammensetzung von  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  gerade die vorgegebene Drehung ergibt.

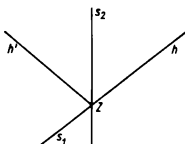


Abb. 3.7

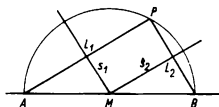


Abb. 3.8

Auch hier gilt die Umkehrung des Satzes: Die Zusammensetzung zweier Geradenspiegelungen, deren Achsen einen orientierten Elementarwinkel der Größe  $v$  einschließen, ergibt eine Drehung, deren Zentrum der Schnittpunkt der Achsen ist und deren zugeordnete Größe orientierter Elementarwinkel  $2v$  ist.

Da sich jede ungleichsinnige Bewegung aus einer Geradenspiegelung und einer Verschiebung, die als Produkt von zwei weiteren Geradenspiegelungen dargestellt werden kann, zusammensetzen läßt, kann zusammenfassend festgestellt werden:

**Satz 3.** Jede gleichsinnige Bewegung kann als das Produkt von zwei, jede ungleichsinnige Bewegung als das Produkt von drei Geradenspiegelungen dargestellt werden.

Zum Abschluß dieses Abschnitts soll zur Anwendung des Satzes 2 der Satz von Thales bewiesen werden.

Gegeben seien ein Halbkreis mit dem Durchmesser  $AB$  und dem Mittelpunkt  $M$  und ein Punkt  $P$  auf seiner Peripherie. Es soll gezeigt werden, daß dann  $g(AP)$  senkrecht auf  $g(BP)$  steht (Abb. 3.8).

Die Lote  $s_1$  und  $s_2$  von  $M$  auf  $g(AP)$  und  $g(BP)$  haben die Fußpunkte  $L_1$  und  $L_2$ , die bekanntlich Mittelpunkte der Strecken  $AP$  und  $BP$  sind.  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  seien die Geradenspiegelungen an  $s_1$  und  $s_2$ . Dann ist  $\sigma_1(A) = P$  und  $\sigma_2(P) = B$ . Die Zusammensetzung beider Spiegelungen ist nach der Umkehrung von Satz 2 eine Drehung mit dem Zentrum  $M$ , deren zugeordnete Größe orientierter Elementarwinkel nach Voraussetzung die gestreckte Winkelgröße ist. Nach Satz 2 und 1.1.3.2.2.

stehen dann  $s_1$  und  $s_2$  aufeinander senkrecht. Das Viereck  $PL_1ML_2$  besitzt damit drei rechte Winkel. Daher muß auch  $g(AP)$  senkrecht auf  $g(BP)$  stehen. Nach demselben Prinzip kann man auch die Verallgemeinerung des Satzes von THALES, den in 2.8.1. analytisch hergeleiteten Peripheriewinkelsatz, beweisen.

### Aufgaben

1. In einen gegebenen Kreis mit dem Durchmesser  $d$  ist eine Sehne von gegebener Länge  $s$  einzuzeichnen, die zu einer gegebenen Geraden parallel verläuft ( $d > s$ ).
2. Über den Seiten  $AB$  und  $BC$  eines gegebenen Dreiecks  $ABC$  werden nach außen die Quadrate  $AA'B'B$  und  $BB'C'C$  konstruiert. Es ist zu beweisen, daß die Verlängerung der Höhe  $h_b$  des Dreiecks  $ABC$  im Dreieck  $BB'B''$  die Seite  $B'B''$  halbiert.
3. Gegeben sind drei voneinander verschiedene parallele Geraden. Es ist ein gleichseitiges Dreieck so zu konstruieren, daß auf jeder der Geraden ein Eckpunkt des Dreiecks liegt.
4. Gegeben sind ein Kreis  $K$ , ein Punkt  $P$  innerhalb  $K$  und eine Winkelgröße  $\alpha$ . Es ist durch  $P$  diejenige Sehne zu konstruieren, die  $\alpha$  als Peripheriewinkelgröße besitzt. Unter welcher Voraussetzung ist diese Aufgabe lösbar?
5. Zwei Punktspiegelungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  mit verschiedenen Zentren sind zusammenzusetzen. Was für eine Bewegung entsteht? Ist die Zusammensetzung kommutativ?

## 3.3. Ähnlichkeitstransformationen

### 3.3.1. Zentralstreckungen

Eine *Zentralstreckung* wird als eine Abbildung der Ebene auf sich definiert, die folgendermaßen durch die Angabe eines (*Zentrum* genannten) Punktes  $Z$  sowie einer reellen Zahl  $t \neq 0$  bestimmt ist: Zu einem beliebig vorgegebenen Originalpunkt  $P \neq Z$  findet man den Bildpunkt  $P'$  auf Grund der Folgerungen  $P' \in g(ZP)$  und

$$m(ZP') = t \cdot m(ZP) \quad (\text{nach Wahl einer Orientierung}). \quad (1)$$

Ist  $t > 0$ , so liegt  $P'$  auf dem Strahl  $ZP^+$ ; ist  $t < 0$ , so liegt  $P'$  auf dem Strahl  $ZP^-$ . Dem Punkt  $Z$  wird dabei als Bild wieder  $Z$  selbst zugeordnet,  $Z$  ist daher Fixpunkt der Abbildung. Um zum Bild  $P'$  des Punktes  $P$  zu kommen, hat man also die Länge der gerichteten Originalstrecke  $ZP$  mit der reellen Zahl  $t$  zu multiplizieren, und man erhält die Länge der gerichteten Bildstrecke  $ZP'$ . Der Faktor  $t$  wird daher auch *Streckfaktor* genannt. Die Gleichung (1) kann auch in der Form

$$\frac{m(ZP')}{m(ZP)} = TV(P', P; Z) = t \quad (2)$$

geschrieben werden und besagt dann, daß der Bildpunkt  $P'$  auf  $g(ZP)$  so zu bestimmen ist, daß  $TV(P', P; Z)$  gleich  $t$  wird. Durch diese Abbildungsvorschrift wird jedem Punkt der Ebene eindeutig umkehrbar ein Bildpunkt zugeordnet. Statt des Streckfaktors  $t$  kann ein Paar zugeordneter Punkte  $P$  und  $P'$  vorgegeben werden, wobei  $Z$ ,  $P$  und  $P'$  kollinear sein müssen. Aus der Gleichung (2) läßt sich dann  $t$  bestimmen.

Es sollen nun Eigenschaften der Zentralstreckung hergeleitet werden. Aus der Definition folgt, daß alle Geraden durch das Zentrum auf sich selbst abgebildet werden, also Fixgeraden sind, und daß  $Z$  für  $t \neq 1$  der einzige Fixpunkt ist. Sind  $P$  und  $Q$  zwei Originalpunkte, die nicht mit  $Z$  kollinear sind,  $P'$  und  $Q'$

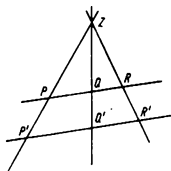


Abb. 3.9

ihre Bilder, so sind  $g(PQ)$  und  $g(P'Q')$  zueinander parallel (Abb. 3.9). Der Beweis ergibt sich aus den Gleichungen

$$\frac{m(ZP')}{m(ZP)} = \frac{m(ZQ')}{m(ZQ)} = t$$

unter Anwendung einer Umkehrung des Strahlensatzes.

Nimmt man auf  $g(PQ)$  einen weiteren Punkt  $R$  an, so gilt für dessen Bild  $R'$

$$\frac{m(ZR')}{m(ZR)} = t = \frac{m(ZP')}{m(ZP)},$$

und hieraus folgt auf Grund einer Umkehrung des Strahlensatzes, daß  $R'$  auf  $g(P'Q')$  liegt, und es gilt

$$t = \frac{m(ZR')}{m(ZR)} = \frac{m(P'R')}{m(PR)} = \frac{m(Q'R')}{m(QR)}, \quad \text{also} \quad \frac{m(PR)}{m(QR)} = \frac{m(P'R')}{m(Q'R')}$$

und schließlich  $TV(P, Q; R) = TV(P', Q'; R')$ .

Diese Gleichung gilt für jeden beliebigen Punkt  $R$  auf  $g(PQ)$  und den entsprechenden Bildpunkt  $R'$  auf  $g(P'Q')$ . Daher wird  $g(PQ)$  eindeutig umkehrbar auf  $g(P'Q')$  abgebildet, und das Teilverhältnis von drei Punkten einer nicht durch das Zentrum  $Z$  verlaufenden Geraden bleibt invariant.

Sind  $Z$ ,  $P$  und  $P'$  vorgegeben, so läßt sich jetzt zu  $Q$  das Bild  $Q'$  auf folgende Weise konstruieren (Abb. 3.9):  $Q'$  ist der Schnittpunkt von  $g(ZQ)$  mit der Parallelen

zu  $g(PQ)$  durch  $P'$ . Liegt  $Q$  auf  $g(ZP)$ , so hat man diese Konstruktion unter Einschaltung der Hilfspunkte  $R$  und  $R'$  zweimal anzuwenden (Abb. 3.10).

Es soll jetzt gezeigt werden, daß die oben hergeleiteten Eigenschaften für Geraden, die nicht durch das Zentrum verlaufen, auch für Geraden durch  $Z$

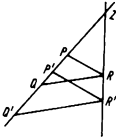


Abb. 3.10

gelten, d. h., daß auch in diesem Fall  $m(P'Q')/m(PQ) = t$  ist und daß das Teilverhältnis von drei Originalpunkten einer Fixgeraden erhalten bleibt. Es seien  $Z, P, Q$  kollinear. Dann gilt

$$m(P'Q') = m(P'Z) + m(ZQ') = t \cdot m(PZ) + t \cdot m(ZQ) = t \cdot m(PQ),$$

also ist auch hier  $m(P'Q')/m(PQ) = t$ . Sind  $S$  und  $S'$  zwei weitere zugeordnete Punkte auf  $g(PQ)$ , so gilt für sie analog  $m(S'Q')/m(SQ) = t$ , und aus beiden Gleichungen folgt

$$\frac{m(PQ)}{m(SQ)} = \frac{m(P'Q')}{m(S'Q')} \quad \text{bzw.} \quad \text{TV}(P, S; Q) = \text{TV}(P', S'; Q').$$

Die Invarianz des Teilverhältnisses gilt demnach auch für Punktetripel auf Fixgeraden der Zentralstreckung.

Die bisher gezeigten Eigenschaften der Zentralstreckung werden zusammengefaßt im

**Satz 1.** *Bei jeder Zentralstreckung werden Geraden durch das Zentrum  $Z$  auf sich selbst abgebildet (Fixgeraden). Jede nicht durch  $Z$  verlaufende Gerade wird auf eine zu ihr parallele Gerade abgebildet. Die Länge einer gerichteten Bildstrecke ist das Produkt aus der Länge der gerichteten Originalstrecke und dem Streckfaktor. Das Teilverhältnis von drei kollinearen Punkten bleibt invariant.*

Bildet man ein Dreieck  $ABC$  durch Zentralstreckung auf das Bilddreieck  $A'B'C'$  ab, so sind nach Satz 1 entsprechende Dreiecksseiten parallel, und es gelten daher die Gleichungen

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|},$$

d. h., die Verhältnisse der Längen entsprechender Seiten sind gleich, außerdem sind entsprechende Winkel der Dreiecke kongruent, was aus den Sätzen über Elementarwinkel an geschnittenen Parallelen folgt.

Zwei Dreiecke, die diese beiden Eigenschaften erfüllen, sollen zueinander ähnlich heißen. Es wird also definiert:

**Definition 1.** Zwei Dreiecke heißen *zueinander ähnlich*, wenn die Verhältnisse der Längen entsprechender Seiten gleich und die entsprechenden Winkel kongruent sind.

Die Definition 1 läßt sich sofort auf beliebige Polygone übertragen. Durch Zentralstreckung wird ein beliebiges Polygon auf ein zu ihm ähnliches abgebildet. Man kann leicht zeigen, daß die so definierte Ähnlichkeit eine Äquivalenzrelation ist.

**Definition 2.** Zwei ähnliche Polygone, von denen das eine durch eine Zentralstreckung auf das andere abgebildet werden kann, heißen in *Ähnlichkeitslage*.

Aus dieser Definition folgt, daß zwei ähnliche Polygone sich genau dann in Ähnlichkeitslage befinden, wenn die Verbindungsgeraden entsprechender Original- und Bildpunkte durch einen Punkt, das Zentrum der Streckung, verlaufen.

Bei jeder Zentralstreckung bleibt infolge der Winkelkongruenz und der Verhältnissgleichheit entsprechender Seiten die „Gestalt“ einer Figur erhalten, jedoch nicht ihre Größe. Daher ist es gerechtfertigt, Zentralstreckungen auch *Ähnlichkeitstransformationen* (oder *äquiforme Transformationen*) zu nennen. Der Streckfaktor  $t$  ist eine von Null verschiedene reelle Zahl. Ist  $1 < t < \infty$ , so ist  $m(ZP') > m(ZP)$ , es liegt dann eine Vergrößerung vor. Für  $t = 1$  erhält man die Identität. Gilt  $0 < t < 1$ , so ist das Bild gegenüber dem Original verkleinert. Für  $-\infty < t < -1$  bzw.  $-1 < t < 0$  gilt das Analoge, wobei zu beachten ist, daß jedesmal noch eine Punktspiegelung am Zentrum  $Z$  dazukommt. Für  $t = -1$  liegt dann die Punktspiegelung selbst, also eine spezielle Bewegung, vor. Mit anderen Worten: Für  $t > 0$  ist  $Z$  äußerer Punkt der Strecke  $PP'$ , für  $t < 0$  dagegen innerer Punkt. In Abb. 3.11 ist bei vorgegebenem  $Z$  und  $t = -2$  das Dreieck  $ABC$  auf das Dreieck  $A'B'C'$  abgebildet worden.

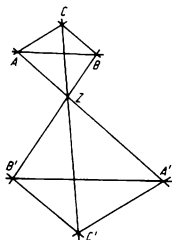


Abb. 3.11

**Satz 2.** *Bei jeder Zentralstreckung ist der Umlaufssinn eines beliebigen Originaldreiecks gleich dem Umlaufssinn seines Bilddreiecks.*

Die Zentralstreckung ist demnach eine *gleichsinnige* Abbildung.

Der Beweis für Satz 2 kann unter Verwendung der Ergebnisse aus 1.1.2.2. geführt werden.

Im folgenden sollen nun die Abbildungsgleichungen der Zentralstreckung hergeleitet werden. Ordnet man nach Festlegung eines Ursprungs den Punkten  $P$ ,  $P'$  und  $Z$  die Ortsvektoren  $\underline{r}$ ,  $\underline{r}'$  und  $\underline{s}$  zu, so erhält man nach den Gesetzen der Vektorrechnung die folgende Gleichung (Abb. 3.12):

$$\underline{r}' - \underline{s} = t(\underline{r} - \underline{s}) \quad (3)$$

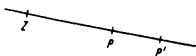


Abb. 3.12

und hieraus

$$\underline{r}' = \underline{s} + t(\underline{r} - \underline{s}).$$

Das ist die Gleichung der Zentralstreckung in vektorieller Darstellung, die noch auf die Gestalt

$$\underline{r}' = t\underline{r} + \underline{\hat{s}} \quad (4)$$

mit  $\underline{\hat{s}} = (1 - t) \underline{s}$  gebracht werden kann. Ist das Zentrum der Streckung der Ursprung des Koordinatensystems, so erhält man  $\underline{r}' = t\underline{r}$ . Legt man ein kartesisches Koordinatensystem zugrunde und setzt man

$$\underline{r} = \langle x, y \rangle, \quad \underline{r}' = \langle x', y' \rangle \quad \text{und} \quad \underline{\hat{s}} = \langle e, f \rangle,$$

so erhält man die Gleichungen

$$x' = tx + e, \quad y' = ty + f. \quad (5)$$

Die Gleichungen enthalten drei Parameter:  $t$ ,  $e$  und  $f$ . Zwei davon werden für die Wahl des Zentrums verbraucht, einer für den Streckfaktor. Sind die Gleichungen einer Zentralstreckung in der Gestalt (5) vorgegeben, so erhält man die Koordinaten  $(x_F, y_F)$  des Zentrums, das Fixpunkt ist, indem man in (5)  $x = x' = x_F$  und  $y = y' = y_F$  setzt und die Gleichungen nach  $x_F$  bzw.  $y_F$  auflöst. Es ergibt sich

$$x_F = \frac{e}{1-t}, \quad y_F = \frac{f}{1-t}.$$

Dabei ist  $t \neq 1$  vorauszusetzen.  $t = 1$  führt für den Fall  $e = f = 0$  auf die Identität, sonst auf eine Verschiebung.

Durch Zentralstreckung soll nun unter Verwendung der Gleichung (4) ein Kreis abgebildet werden. Er habe die Gleichung  $(\underline{r} - \underline{a})^2 = r^2$ . Setzt man in seine Gleichung die nach  $\underline{r}$  aufgelöste Gleichung (4) der Streckung ein, so erhält man

$(x' - \bar{s} - tq)^2 = t^2 r^2$ , und das ist wieder die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt  $m' = \bar{s} + tq$  und dem Radius  $r' = |t| \cdot r$ .

Man hat so den

**Satz 3.** *Durch Zentralstreckung wird ein Kreis  $k$  wieder auf einen Kreis  $k'$  abgebildet. Das Bild des Mittelpunkts des Originalkreises ist der Mittelpunkt des Bildkreises. Die Radiuslänge des Bildkreises ist gleich der mit dem Betrag des Streckfaktors multiplizierten Radiuslänge des Originalkreises.*

Konstruktiv wird  $k$  durch Zentralstreckung in  $k'$  übergeführt, indem man den Mittelpunkt  $M$  und einen Punkt  $P$  auf der Peripherie von  $k$  abbildet. Durch  $M'$  und  $P'$  ist dann der Bildkreis  $k'$  eindeutig bestimmt (Abb. 3.13).

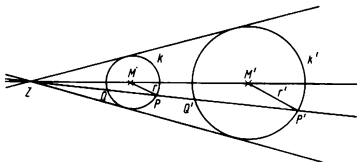


Abb. 3.13

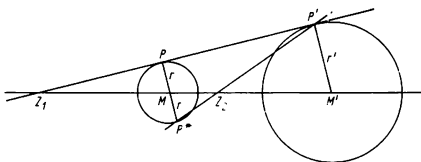


Abb. 3.14

Durch einfache Überlegungen erkennt man, daß die Tangenten von  $Z$  an  $k$  den Kreis  $k'$  in den entsprechenden Bildpunkten berühren, während die Sekanten von  $Z$  zum Kreis  $k$  den Kreis  $k'$  in den entsprechenden Bildpunkten schneiden.

Zu zwei Kreisen in allgemeiner Lage kann man stets zwei Streckzentren finden. Man erhält sie durch die in Abb. 3.14 angedeutete Konstruktion. Durch diese Zentren verlaufen dann die gemeinsamen Tangenten beider Kreise, sofern sie existieren. Liegen die Kreise konzentrisch oder haben sie gleiche Radien, so existiert nur ein Streckzentrum.

Die Zentralstreckung kann man zur Lösung von Konstruktionsaufgaben verwenden. Als Beispiel werde hier ein Sonderfall des Berührungproblems des APOLLONIUS angeführt: Es sind Kreise zu konstruieren, die zwei gegebene Geraden  $g_1$  und  $g_2$  berühren



und durch einen gegebenen Punkt  $P$  verlaufen. Schneiden sich  $g_1$  und  $g_2$  in  $Z$ , so dient  $Z$  als Zentrum einer Zentralstreckung. Es wird zunächst ein Kreis  $k$  gezeichnet, der  $g_1$  und  $g_2$  berührt (Abb. 3.15). Die Gerade durch  $P$  und  $Z$  schneide den Kreis  $k$  in den Punkten  $Q_1$  und  $Q_2$ . Einer der gesuchten Kreise ergibt sich, wenn man den Kreis  $k$  der durch  $Z$  und durch die Zuordnung  $Q \mapsto P$  bestimmten Zentralstreckung unterwirft, der zweite, wenn man anstelle von  $Q_1$  den Punkt  $Q_2$  verwendet.

Sind  $g_1$  und  $g_2$  parallel, so tritt an die Stelle der Zentralstreckung eine Verschiebung. Die Aufgabe ist in diesem Fall nicht mehr für jede Lage von  $P$  lösbar.

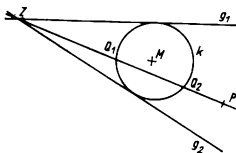


Abb. 3.15

Im folgenden sollen die Zentralstreckungen nach gruppentheoretischen Aspekten untersucht werden.

Es seien zwei Zentralstreckungen  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  mit demselben Zentrum  $Z$  und den Streckfaktoren  $t_1$  und  $t_2$  gegeben. Ihre Gleichungen lauten nach (3)

$$\xi' = \zeta + t_1(\xi - \zeta) \quad \text{und} \quad \xi' = \zeta + t_2(\xi - \zeta).$$

Die Zusammensetzung ergibt

$$\xi'' = \zeta + t_2 t_1 (\xi - \zeta).$$

Das ist im Allgemeinfall wieder eine Zentralstreckung mit dem Zentrum  $Z$ , im Sonderfall  $t_2 t_1 = 1$  die Identität. Man erkennt, daß wegen  $t_2 t_1 = t_1 t_2$  die Hintereinanderausführung kommutativ ist.

Es gilt

**Satz 4.** Die Menge der Zentralstreckungen einer Ebene mit gemeinsamem Zentrum bildet eine kommutative Gruppe.

Da das Assoziativgesetz (wie stets beim Zusammensetzen von Abbildungen) gilt und da die identische Abbildung der genannten Menge angehört, bleibt zum Beweis des Satzes noch zu zeigen, daß zu jeder Zentralstreckung mit dem Zentrum  $Z$  die inverse Abbildung existiert und wieder eine Zentralstreckung ist, was unter der getroffenen Voraussetzung  $t \neq 0$  stets gewährleistet ist:

$$\text{Aus } \xi' = \zeta + t(\xi - \zeta) \quad \text{folgt} \quad \xi = \zeta + \frac{1}{t}(\xi' - \zeta).$$

Es sollen nun zwei Zentralstreckungen  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  mit verschiedenen Zentren  $Z_1$  und  $Z_2$  und beliebigen Streckfaktoren zusammengesetzt werden. Ihre Gleichungen lauten

$$\xi' = \zeta_1 + t_1(\xi - \zeta_1) \quad \text{und} \quad \xi' = \zeta_2 + t_2(\xi - \zeta_2).$$

Führt man erst  $\zeta_1$ , dann  $\zeta_2$  aus, so erhält man

$$\xi'' = t_2 t_1 (\xi - \delta_1) + \delta_2 + t_2 (\delta_1 - \delta_2).$$

Das stellt für  $t_2 t_1 \neq 1$  wieder eine Zentralstreckung, für  $t_2 t_1 = 1$  eine Verschiebung dar. Man erkennt, daß die Zusammensetzung nicht kommutativ ist, daß also im allgemeinen  $\zeta_2 \circ \zeta_1 \neq \zeta_1 \circ \zeta_2$  gilt. Nimmt man zu den Zentralstreckungen noch die Verschiebungen hinzu und berücksichtigt man, daß die Zusammensetzung von Zentralstreckung und Verschiebung wieder eine Zentralstreckung ergibt, so kann man folgenden Satz aussprechen:

**Satz 5.** *Die Menge der Zentralstreckungen und Verschiebungen einer Ebene bildet eine (nichtkommutative) Gruppe.*

Der Beweis bleibe dem Leser als Aufgabe überlassen.

### 3.3.2. Allgemeine Ähnlichkeitstransformationen

In der Definition 1 wurde als Bedingung für die Ähnlichkeit von Dreiecken die Kongruenz entsprechender Winkel und die Gleichheit entsprechender Seitenverhältnisse gefordert. Analog den vier Kongruenzsätzen für Dreiecke gibt es vier *Ähnlichkeitssätze*, die besagen, daß man zur Feststellung der Ähnlichkeit zweier Dreiecke nicht alle Forderungen der Definition 1 zu überprüfen braucht.

**Satz 6 (Ähnlichkeitssatz ww, Hauptähnlichkeitssatz).** *Gelten für zwei Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  die Kongruenzen  $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$  und  $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$ , so sind die beiden Dreiecke ähnlich.*

**Satz 7 (Ähnlichkeitssatz sss).** *Gelten für zwei Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  die Gleichungen*

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|},$$

*so sind die Dreiecke ähnlich.*

**Satz 8 (Ähnlichkeitssatz sws).** *Gilt für zwei Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  die Gleichung*

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}$$

*und ist  $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$ , so sind die beiden Dreiecke ähnlich.*

**Satz 9 (Ähnlichkeitssatz ssw).** *Gilt für zwei Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  die Gleichung*

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|},$$

*ist  $|AB| < |AC|$  und  $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$ , so sind die beiden Dreiecke ähnlich.*

Es werde hier lediglich der Hauptähnlichkeitssatz bewiesen, die Beweise der übrigen drei Ähnlichkeitssätze werden dem Leser überlassen.

Zum Beweis des Satzes 6 gemäß Definition 1 ist zu zeigen, daß  $\triangle ACB \cong \triangle A'C'B'$  ist und daß die Verhältnisse entsprechender Seiten gleich sind. Die Kongruenz der genannten Winkel folgt aus dem Winkelsummensatz für Dreiecke. Nun wird das Dreieck  $A'B'C'$  durch eine Bewegung  $\varphi$  so abgebildet, daß  $\varphi(A') = A$ ,  $\varphi(B') = B^* \in AB^+$  und  $\varphi(C') = C^* \in AC^+$  ist. Dann ist das Dreieck  $A'B'C'$  dem Dreieck  $AB^*C^*$  kongruent, und aus der Kongruenz der entsprechenden Winkel folgt nach der Umkehrung des Satzes über Elementarwinkel an geschnittenen Parallelen, daß  $g(BC)$  parallel zu  $g(B^*C^*)$  ist. Damit kann der Strahlensatz angewendet werden, und es folgt die Gleichheit der entsprechenden Seitenverhältnisse.

Mit Hilfe der Ähnlichkeitssätze können weitere bekannte Sätze, die zum Bestand des Schulstoffs gehören, bewiesen werden, auf deren Herleitung aber verzichtet werden soll, z. B. Sätze über Höhen, Seiten- und Winkelhalbierende im Dreieck, Sätze über Sekanten und Tangenten an einen Kreis.

Die bisher behandelten Zentralstreckungen erwiesen sich als Transformationen, bei denen Original- und Bilddreiecke zueinander ähnlich sind. Solche Transformationen werden Ähnlichkeitstransformationen genannt. Zwei ähnliche Dreiecke in beliebiger Lage zueinander können im allgemeinen nicht durch eine Zentralstreckung aufeinander abgebildet werden. Es sollen daher in diesem Abschnitt weitere Ähnlichkeitstransformationen gesucht werden, durch die zwei zueinander ähnliche Dreiecke in beliebiger Lage aufeinander abgebildet werden. Dabei gibt es zwei Fälle: Die beiden Dreiecke können gleichen oder verschiedenen Umlaufssinn haben, und es ist zweckmäßig, beide Fälle getrennt zu behandeln.

Zunächst werde der Fall betrachtet, daß beide Dreiecke den gleichen Umlaufssinn haben (Abb. 3.16). Dann werden auf  $A'B^+$  ein Punkt  $B^*$  und auf  $A'C^+$  ein Punkt  $C^*$  so gewählt, daß die Dreiecke  $ABC$  und  $A'B^*C^*$  kongruent sind. Es gibt eine Drehung, die das Dreieck  $ABC$  auf das Dreieck  $A'B^*C^*$  abbildet. (Eine Verschiebung ist hier auszuschließen, da in diesem Fall wegen der Parallelität der Dreiecksseiten die Dreiecke durch Zentralstreckung aufeinander abgebildet werden können.) Die Dreiecke  $A'B^*C^*$  und  $A'B'C'$  sind jetzt in Ähnlichkeitslage, Dreieck  $A'B^*C^*$  kann daher durch eine Zentralstreckung mit dem Zentrum  $A'$  und dem Streckfaktor  $t = m(A'C^*)/m(A'C')$  auf das Dreieck  $A'B'C'$  abge-

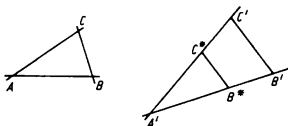


Abb. 3.16

bildet werden. Die Zusammensetzung beider Transformationen liefert dann die gesuchte Ähnlichkeitstransformation. Sie wird in diesem Fall auch Drehstreckung genannt, und es handelt sich um eine gleichsinnige Ähnlichkeitstransformation, wie man leicht nachprüft. Ihre Gleichung erhält man durch Zusammensetzung der Gleichungen von Drehung und Zentralstreckung, die jetzt entsprechend der Darstellung in 2.7.2. unter Verwendung von Spaltenvektoren und Matrizen wie folgt geschrieben werden sollen:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{s}_1 \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (\text{Drehung})$$

und

$$\mathbf{x}'' = t\mathbf{x}' + \mathbf{s}_2 \quad (\text{Zentralstreckung}).$$

Es ergibt sich

$$\mathbf{x}'' = t\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{s} \quad \text{mit} \quad \mathbf{s} = t\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2.$$

Die Koeffizientenmatrix der gleichsinnigen Ähnlichkeitstransformation hat dann die Gestalt

$$\begin{pmatrix} t \cos \alpha & -t \sin \alpha \\ t \sin \alpha & t \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

die Transformationsdeterminante ist

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 > 0$$

Für die Koordinaten  $x'$  und  $y'$  eines Bildpunktes gelten also die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x' &= ax + by + e, \\ y' &= -bx + ay + f. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

In ihnen sind die gleichsinnigen Bewegungen und die Zentralstreckungen als Spezialfälle enthalten (Drehung:  $a = \cos \alpha$ ,  $b = -\sin \alpha$ ,  $\alpha \neq 0$ ; Verschiebung:  $a = 1$ ,  $b = 0$ ; Zentralstreckung:  $a \neq 0, 1$ ,  $b = 0$ ).

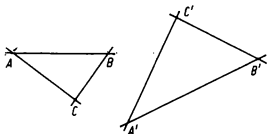


Abb. 3.17

Es werde nun der Fall betrachtet, daß beide Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  verschiedenen Umlaufssinn haben (Abb. 3.17). Er wird auf den ersten Fall zurückgeführt, indem zunächst das Dreieck  $ABC$  an  $g(AB)$  gespiegelt und dann die

Drehstreckung des ersten Falles angewendet wird. Man hat also hier drei Transformationen zusammzusetzen, eine Spiegelung, eine Drehung und eine Zentralstreckung.

Die so zusammengesetzte Transformation ist, wie man sich leicht überlegt, eine ungleichsinnige Ähnlichkeitstransformation. Zur analytischen Behandlung wählt man  $g(AB)$  als  $x$ -Achse eines kartesischen Koordinatensystems, so daß die Spiegelung durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}x^* &= x, \\y^* &= -y\end{aligned}$$

beschrieben wird. Setzt man diese Spiegelung mit der Drehstreckung (6) zusammen, so erhält man

$$\left. \begin{aligned}x' &= ax - by + e, \\y' &= -bx - ay + f\end{aligned} \right\} \quad (7)$$

mit der Transformationsdeterminante  $-a^2 - b^2 < 0$ . In diesem Fall ist es aber denkbar, daß die in (6) enthaltene Drehung zu einer Verschiebung entartet, daß also  $\alpha = 0$  wird. Setzt man in den Gleichungen (7)  $-b = b'$  und schreibt für  $b'$  schließlich wieder  $b$ , so erhält man die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned}x' &= ax + by + e, \\y' &= bx - ay + f.\end{aligned} \right\} \quad (8)$$

In ihnen sind die ungleichsinnigen Bewegungen mit enthalten. So erhält man für  $a = 1$  und  $b = 0$  die Gleichungen einer Spiegelung, wenn  $e = f = 0$  ist, oder einer Spiegelschiebung, wenn  $e^2 + f^2 \neq 0$  ist.

Umgekehrt kann man zeigen, daß jedes Paar von Abbildungsgleichungen der Gestalt (6) oder (8) sich in eine Bewegung und eine Zentralstreckung aufspalten läßt.

Die Gleichungen (6) und (8) enthalten jeweils vier Parameter:  $a, b, e$  und  $f$ . Man errechnet, daß jeweils eine Transformation (6) bzw. (8) eindeutig bestimmt ist, wenn man zwei geordnete Punktepaare  $(A, A')$  und  $(B, B')$  mit  $A \neq B$  vorgibt und dabei festlegt, daß  $A$  und  $B$  Originalpunkte,  $A'$  und  $B'$  die zugehörigen Bildpunkte sein sollen. Eine solche Zuordnung von Original- und Bildpunkten werde hier und im folgenden durch Pfeile veranschaulicht, wobei die Pfeilspitze stets dem Bildpunkt zugeordnet wird. Für diese Pfeile wird gelegentlich der Begriff „Abbildungspfeile“ verwendet.

Da eine Ähnlichkeitstransformation sich aus einer Bewegung und einer Zentralstreckung zusammensetzt, besitzt sie alle Eigenschaften, die sowohl für die Bewegung als auch für die Zentralstreckung zutreffen: Geradentreue, Winkeltreue, Invarianz des Teilverhältnisses von drei kollinearen Punkten. Original- und Bildgerade sind im allgemeinen nicht zueinander parallel. Die Eigenschaft der Parallelität von Original- und Bildgerade besitzt zwar die Zentralstreckung, aber nicht

jede Bewegung, so daß sie nicht allgemein für die Ähnlichkeitstransformationen gilt.

Für die folgenden Betrachtungen werde vorausgesetzt, daß  $g(AB)$  nicht mit  $g(A'B')$  zusammenfällt. Zum Originalpunkt  $C$ , der zunächst nicht auf  $g(AB)$  liegen soll, erhält man den Bildpunkt  $C'$  der gleichsinnigen Ähnlichkeitstransformation als dritten Eckpunkt eines Dreiecks  $A'B'C'$ , das man als gleichsinnig ähnliches zum Dreieck  $ABC$  mit  $A'B'$  als Grundlinie konstruiert (Abb. 3.18). Fällt  $C$  mit  $C'$  zusammen, so ist  $C = C'$  Fixpunkt der Abbildung. Spiegelt man  $C'$  an  $g(A'B')$ , so erhält man  $C''$  als Bild von  $C$  in der durch  $(A, A')$  und  $(B, B')$  bestimmten ungleichsinnigen Ähnlichkeitstransformation. Liegt  $C$  auf  $g(AB) = g$ , so muß  $C'$  auf  $g(A'B') = g'$  liegen, und wegen der Invarianz der Teilverhältnisse gilt  $TV(A, B; C) = TV(A', B'; C')$ .  $C'$  muß daher so konstruiert werden, daß

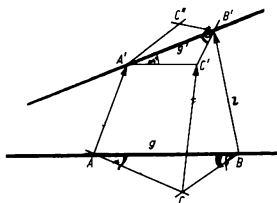


Abb. 3.18

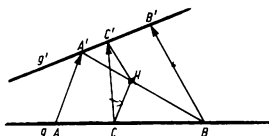


Abb. 3.19

diese Gleichung erfüllt ist. Ist  $g$  parallel zu  $g'$ , so liegt ein linearer Ausschnitt aus einer Zentralstreckung oder Verschiebung vor, und die Konstruktion bedarf keiner weiteren Erläuterung. Sind dagegen  $g$  und  $g'$  nicht zueinander parallel, so wird wie folgt konstruiert:

Durch  $C$  wird eine Parallele zu  $g(AA')$  gezogen, die  $g(A'B')$  im Punkt  $H$  schneide. Die Parallele zu  $g(BB')$  durch  $H$  schneidet dann  $g(A'B')$  im Punkt  $C'$  (Abb. 3.19). Die Richtigkeit der Konstruktion folgt nach zweimaliger Anwendung des Strahlensatzes aus

$$TV(A, B; C) = TV(A', B'; H) = TV(A', B'; C').$$

Dabei kann  $C$  sowohl innerer als auch äußerer Punkt der Strecke  $AB$  sein.

Auf diese Weise kann man zu jedem Originalpunkt auf  $g$  seinen Bildpunkt auf  $g'$  eindeutig bestimmen.

Ist  $g(AA')$  parallel zu  $g(BB')$ , so wird die Konstruktion besonders einfach, da sich hier  $C'$  als Schnittpunkt von  $g'$  mit der Parallelen zu  $g(AA')$  durch  $C$  ergibt. Der Schnittpunkt von  $g$  und  $g'$  ist in diesem Fall Fixpunkt.

Es soll noch eine zweite Konstruktion zur Gewinnung von Bildpunkten auf  $g'$  angegeben werden, und dazu ist es zweckmäßig, den Begriff *Streifen* zu benutzen.

**Definition 3.** Sind zwei Halbebenen  $H_1$  und  $H_2$  mit den parallelen Begrenzungsgeraden  $h_1$  und  $h_2$  gegeben und ist  $h_1 \in H_2$  und  $h_2 \in H_1$ , so nennt man den Durchschnitt beider Halbebenen einen *Streifen*,  $h_1$  und  $h_2$  die *Begrenzungsgeraden* des Streifens.

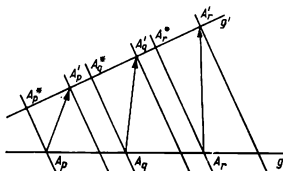


Abb. 3.20

Die Originalgerade  $g$  und die Bildgerade  $g'$  werden durch verschiebungsgleiche Streifen mit den Begrenzungsgeraden  $h_i$  und  $h'_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) geschnitten.  $h_i$  schneide  $g$  in  $A_i$  und  $g'$  in  $A'_i$ ,  $h'_i$  schneide  $g'$  in  $A'_i$  (Anordnung der Punkte gemäß Abb. 3.20). Um  $A_i$  und  $A'_i$  als zugeordnete Punkte einer Ähnlichkeitstransformation nachzuweisen, ist

$$\underline{TV(A_p, A_q; A_r) = TV(A'_p, A'_q; A'_r)} \quad \text{für } p, q, r \in \mathbb{N}$$

zu zeigen. Wegen der Parallelität der Begrenzungsgeraden ist zunächst

$$\underline{TV(A_p, A_q; A_r) = TV(A_p^*, A_q^*; A_r^*)},$$

und wegen der Verschiebungsgleichheit der Streifen gilt

$$\underline{m(A_p^* A_q^*) = m(A_q^* A_r^*) = m(A_r^* A_p^*)}.$$

Die Punkte  $A_p^*, A_q^*, A_r^*$  können daher durch eine Verschiebung auf die Punkte  $A'_p, A'_q, A'_r$  abgebildet werden, und dabei ist

$$\underline{TV(A_p^*, A_q^*; A_r^*) = TV(A'_p, A'_q; A'_r)},$$

so daß schließlich

$$\underline{TV(A_p, A_q; A_r) = TV(A'_p, A'_q; A'_r)}$$

gilt. Die Begrenzungsgeraden jedes Streifens der Schar schneiden also aus Original- und Bildgeraden jeweils ein zugeordnetes Punktepaar aus.

Ist umgekehrt eine Ähnlichkeitstransformation durch die beiden geordneten Punktepaare  $(A, A')$  und  $(B, B')$  gegeben, so kann man, falls  $g(AA')$  nicht parallel zu  $g(BB')$  ist, stets genau eine Schar verschiebungsgleicher Streifen finden, die auf der Originalgeraden  $g = g(AB)$  und der Bildgeraden  $g' = g(A'B')$  weitere zugeordnete Punktepaare erzeugt. Man verschiebt den durch  $A$  und  $A'$  bestimmten Abbildungspfeil so, daß  $A$  in  $B$  übergeht (Abb. 3.21). Der Punkt  $A'$  wird dabei auf einen Punkt  $A''$  abgebildet, und durch  $g(BA'')$  ist eine Begrenzungsgerade des erzeugenden Streifens bestimmt. Die zugehörige zweite Begrenzungsgerade

ist die Parallele zu  $g(B'A'')$  durch  $B$ . Verschiebt man diesen Streifen, so erhält man auf die oben beschriebene Weise jeweils einander zugeordnete Punktepaare der beiden Geraden  $g$  und  $g'$ . Die Konstruktion ist eindeutig und erfaßt die beiden vorgegebenen Punktepaare  $(A, A')$  und  $(B, B')$ .

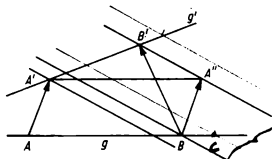


Abb. 3.21

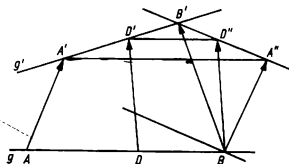


Abb. 3.22

Auf die möglichen Spezialfälle ( $g$  parallel zu  $g'$  oder  $g(AA')$  parallel zu  $g(BB')$ ), für die die Konstruktion besonders einfach wird, werde hier nur hingewiesen.

Die Konstruktion mit Hilfe des erzeugenden Streifens findet Anwendung, wenn man zu zwei durch  $(A, A')$  und  $(B, B')$  aufeinander bezogenen Geraden  $g = g(AB)$  und  $g' = g(A'B')$  einen Abbildungspfeil von vorgegebener Richtung zu bestimmen hat (Abb. 3.22), wobei jetzt von den oben erwähnten Spezialfällen abgesehen wird. Der durch  $(B, D')$  mit  $D' \in g(B'A'')$  festgelegte Pfeil habe die vorgegebene Richtung. Er kann so verschoben werden, daß er sich in die Abbildung von  $g$  auf  $g'$  einordnet: Die Parallele zu  $g(AB)$  durch  $D''$  schneidet die Gerade  $g'$  in  $D'$ , die Parallele zu  $g(BD')$  durch  $D'$  schneidet die Gerade  $g$  in  $D$ . Durch die Punkte  $D$  und  $D'$  ist damit der Abbildungspfeil der gewünschten Richtung zu den beiden vorgegebenen Geraden  $g$  und  $g'$  bestimmt. Diese Aufgabe hat nur in genau einem Fall keine Lösung, nämlich dann, wenn die vorgegebene Richtung die gleiche wie die der Begrenzungsgeraden des erzeugenden Streifens ist.

Im folgenden sollen die gleichsinnigen und ungleichsinnigen Ähnlichkeitstransformationen auf Fixpunkte untersucht werden, und zwar zunächst durch analytische Betrachtungen. Zuerst werden gleichsinnige Ähnlichkeitstransformationen behandelt.

Zur Fixpunktbestimmung setzt man in den Gleichungen (6)  $x = x' = x_F$  und  $y = y' = y_F$ , und man erhält das folgende lineare Gleichungssystem für  $x_F$  und  $y_F$ :

$$\begin{aligned} (a-1)x_F + by_F &= -e, \\ -bx_F + (a-1)y_F &= -f. \end{aligned}$$

Die Koeffizientendeterminante ist  $(a-1)^2 + b^2$ . Für  $a \neq 1$  oder  $b \neq 0$  ist sie stets größer als Null, mithin existiert in diesem Fall stets genau eine Lösung des Gleichungssystems und somit ein Fixpunkt. Der Fall  $a = 1$  und  $b = 0$



führt auf die Verschiebung und kann daher hier ausgeschlossen werden. Jede von einer Verschiebung verschiedene gleichsinnige Ähnlichkeitstransformation besitzt daher genau einen Fixpunkt.

Zur Untersuchung der Fixpunkte einer ungleichsinnigen Ähnlichkeitstransformation erhält man aus den Gleichungen (8) das lineare Gleichungssystem

$$(a - 1)x_F + by_F = -e$$

$$bx_F - (a + 1)y_F = -f$$

Die Koeffizientendeterminante ist hier  $-a^2 - b^2 + 1$ . Ist sie von Null verschieden, so gibt es genau eine Lösung des linearen Gleichungssystems und mithin genau einen Fixpunkt. Ist dagegen  $a^2 + b^2 = 1$ , so liegt eine ungleichsinnige Bewegung vor, die entweder als Spiegelung eine Fixpunktgerade oder als Spiegelschiebung keinen Fixpunkt besitzt. Auf einen Beweis hierzu werde verzichtet.

Zusammenfassend kann man daher sagen:

**Satz 10.** *Jede Ähnlichkeitstransformation, die nicht Bewegung ist, besitzt genau einen Fixpunkt.*

Im folgenden soll gezeigt werden, wie die Fixpunkte von Ähnlichkeitstransformationen konstruktiv bestimmt werden können. Dabei wird in jedem Fall genau ein Fixpunkt vorausgesetzt, die (bereits früher behandelten) Bewegungen sollen ausgeschlossen sein.

Gegeben sei eine gleichsinnige Ähnlichkeitstransformation durch die beiden geordneten Punktepaare  $(A, A')$  und  $(B, B')$  (Abb. 3.23), wobei  $g(AA')$  nicht

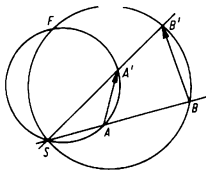


Abb. 3.23

parallel zu  $g(BB')$  und  $g(AB)$  nicht parallel zu  $g(A'B')$  vorausgesetzt werde. Der Schnittpunkt von  $g(AB)$  und  $g(A'B')$  sei  $S$ . (Im Fall der Parallelität von  $g(AA')$  und  $g(BB')$  ist  $S$  bereits der Fixpunkt sowohl der gleichsinnigen als auch der ungleichsinnigen Ähnlichkeitstransformation.) Dann schneiden sich die Umkreise der Dreiecke  $SAA'$  und  $SBB'$  außer in  $S$  noch in einem weiteren Punkt, dem gesuchten Fixpunkt  $F$  der gleichsinnigen Ähnlichkeitstransformation. Zum Beweis der Richtigkeit der Konstruktion hat man zu zeigen, daß  $F$  auf sich selbst

abgebildet wird. Das ist sicher dann der Fall, wenn in Analogie zur Abb. 3.18 das Dreieck  $ABF$  als Originaldreieck dem Dreieck  $A'B'F$  als Bilddreieck ähnlich ist.

Der Beweis hierfür werde für die in Abb. 3.23 gezeigte Anordnung der Punktepaare  $(A, A')$  und  $(B, B')$  bezüglich  $S$  geführt. Für andere mögliche Anordnungen ist der Beweis geringfügig abzuändern.

Es ist  $\angle SBF \cong \angle SB'F$  als Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen. Aus dem gleichen Grund gilt  $\angle SAF \cong \angle SA'F$ . Aus der Kongruenz dieser beiden Winkel folgt die Kongruenz ihrer Nebenwinkel, so daß  $\angle FAB \cong \angle FA'B'$  gilt. Damit stimmen die Dreiecke in zwei Winkelgrößen überein, sie sind nach dem Hauptähnlichkeitssatz ähnlich, und außerdem haben sie den gleichen Umlaufsinn.  $F$  ist daher tatsächlich der gesuchte Fixpunkt. Sind  $g(AB)$  und  $g(A'B')$  zueinander parallel, so erhält man den Fixpunkt  $F$  als Schnittpunkt von  $g(AA')$  mit  $g(BB')$ . Es liegt dann der Spezialfall der Zentralstreckung vor.

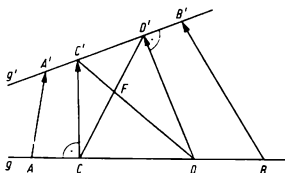


Abb. 3.24

Jetzt soll eine analoge Konstruktion für die ungleichsinnige Ähnlichkeitstransformation angegeben werden (Abb. 3.24).

In der gegebenen Zuordnung von zwei Geraden  $g = g(AB)$  und  $g' = g(A'B')$  durch die geordneten Punktepaare  $(A, A')$  und  $(B, B')$  werden diejenigen beiden Abbildungspfeile mit Hilfe des erzeugenden Streifens konstruiert, von denen der eine auf  $g$ , der andere auf  $g'$  senkrecht steht. In Abb. 3.24 stehen  $CC'$  auf  $g$  und  $DD'$  auf  $g'$  senkrecht. Den Fixpunkt  $F$  erhält man dann als Schnittpunkt von  $g(CD')$  und  $g(DC')$ . Zum Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion hat man nach Überlegungen analog denen für die gleichsinnige Ähnlichkeitstransformation zu zeigen, daß die Dreiecke  $CDF$  und  $C'D'F$  ungleichsinnig ähnlich sind. Entsprechend Abb. 3.24 gilt  $\angle CDF \cong \angle C'D'F$  nach dem Scheitelwinkelsatz. Nach Konstruktion ist das Viereck  $CDD'C'$  ein Sehnenviereck. Daher sind die Winkel  $\angle CDF$  und  $\angle C'D'F$  als Peripheriewinkel über demselben Bogen kongruent. Die Dreiecke, deren Umlaufssinn verschieden ist, stimmen demnach in zwei Winkelgrößen überein, sind also ähnlich, und  $F$  ist der gesuchte Fixpunkt. (Für andere mögliche Lagen der Punktepaare  $(A, A')$  und  $(B, B')$  ist der Beweis unwesentlich abzuändern.) Die Konstruktion versagt, wenn die Begrenzungsgeraden des zu benutzenden erzeugenden Streifens entweder auf  $g$  oder auf  $g'$  senkrecht

stehen. Dann hat man ein anderes geeignetes Sehnenviereck  $CDD'C'$  zu konstruieren. Das gilt auch für den Fall, wenn  $g$  und  $g'$  parallel sind (Abb. 3.25). Man konstruiert dann so, daß etwa ein gleichschenkeliges Trapez, also ebenfalls ein Sehnenviereck, entsteht ( $CBB'C'$  in der Abb. 3.25), und verfährt dann weiter analog. Fallen  $g$  und  $g'$  zusammen (Abb. 3.26), so erhält man den Fixpunkt  $F$  durch eine Konstruktion, die auf Abb. 3.10 zurückgreift: Die Punkte  $H$  und  $H'$  werden so gewählt, daß das Dreieck  $ABH$  dem Dreieck  $A'B'H'$  ähnlich ist. Dann schneidet  $g(HH')$  die gemeinsame Trägergerade  $g = g'$  im gesuchten Fixpunkt  $F$ .

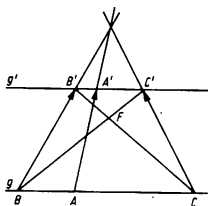


Abb. 3.25

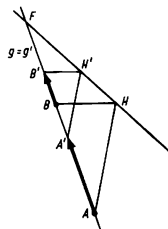


Abb. 3.26

Nachdem die Fixpunkte analytisch und synthetisch bestimmt worden sind, soll noch nach *Fixgeraden* gefragt werden, nach solchen Geraden also, die bei der Transformation auf sich abgebildet werden, ohne daß sie punktweise fest bleiben müssen. Die Betrachtungen beschränken sich wiederum auf solche Ähnlichkeitstransformationen, die nicht Bewegungen sind, die also genau einen Fixpunkt  $F$  besitzen. Es wird zunächst gezeigt, daß jede Fixgerade durch diesen Fixpunkt verlaufen muß. Der Beweis wird indirekt geführt. Angenommen, es gäbe eine Fixgerade, die nicht durch  $F$  verläuft; dann darf es auf ihr keinen weiteren Fixpunkt geben, da  $F$  der einzige Fixpunkt sein soll. Die Abbildungspfeile auf ihr müssen demnach alle die gleiche Länge und den gleichen Richtungssinn haben, da sonst entsprechend Abb. 3.26 ein Fixpunkt konstruiert werden kann. In Abb. 3.27 sind zwei solche Abbildungspfeile,  $AA'$  und  $BB'$ , eingezeichnet. Dann muß das Dreieck  $FAB$  als Originaldreieck dem Bilddreieck  $FA'B'$  ähnlich sein,

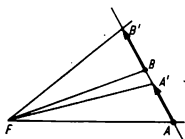


Abb. 3.27

und es muß  $\sphericalangle FBA \cong \sphericalangle FB'A'$  gelten. Nach dem Außenwinkelsatz, angewendet auf das Dreieck  $FB'B$ , gilt jedoch  $\sphericalangle FBA > \sphericalangle FB'A'$ , womit ein Widerspruch bereits gezeigt ist. Alle möglicherweise auftretenden Fixgeraden müssen also durch den Fixpunkt  $F$  verlaufen. Die Bestimmung der Fixgeraden erfolgt analytisch. Zur Vereinfachung wird  $F$  als Nullpunkt (Ursprung) eines kartesischen Koordinatensystems gewählt. Dann erhält man als Abbildungsgleichungen für die gleichsinnige Ähnlichkeitstransformation

$$\begin{aligned}x' &= ax + by, \\y' &= -bx + ay\end{aligned}$$

mit  $b \neq 0$ , da sonst eine Zentralstreckung vorliegt, von der bereits bekannt ist, daß für  $a \neq 1$  genau alle Geraden durch ihr Zentrum Fixgeraden sind. Jetzt wird ein beliebiger Punkt  $P \neq F$  mit den Koordinaten  $(p, q)$  abgebildet. Sein Bildpunkt  $P'$  hat die Koordinaten  $(ap + bq, -bp + aq)$ . Es werde angenommen, daß  $P$  und  $P'$  auf einer Fixgeraden liegen. Dann müssen die Punkte  $F, P$  und  $P'$  kollinear sein, d. h., es muß nach 2.4., Satz 6,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ p & q & 1 \\ ap + bq & -bp + aq & 1 \end{vmatrix} = 0$$

gelten. Hieraus folgt  $p^2 + q^2 = 0$ . Dieser Gleichung müssen die Koordinaten  $p$  und  $q$  genügen, wenn eine Fixgerade vorliegen soll. Sie ist nur für  $p = q = 0$  erfüllt; da aber  $P \neq F$  vorausgesetzt war, liegt ein Widerspruch vor. Es kann daher bei gleichsinnigen Ähnlichkeitstransformationen keine Fixgerade mit  $b \neq 0$  geben.

Jetzt werden ähnliche Überlegungen für die ungleichsinnigen Ähnlichkeitstransformationen

$$\begin{aligned}x' &= ax + by, \\y' &= bx - ay\end{aligned}$$

angestellt. Sie führen auf die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ p & q & 1 \\ ap + bq & bp - aq & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

und hieraus folgt

$$bq^2 + 2apq - bp^2 = 0.$$

Man erhält für  $b \neq 0$

$$q = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{b} p$$

und hieraus die Gleichungen von zwei Fixgeraden

$$y = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} x \quad \text{und} \quad y = \frac{-a - \sqrt{a^2 + b^2}}{b} x,$$

die in diesem Fall stets reell sind. Man überzeugt sich leicht, daß es sich tatsächlich um Fixgeraden handelt, wenn man diese beiden Geraden durch die ungleichsinnige Ähnlichkeitstransformation abbildet. Wie man nach kurzer Rechnung schnell erkennt, stehen beide Fixgeraden aufeinander senkrecht. Ist  $b = 0$ , so erhält man als Fixgeraden die beiden Koordinatenachsen.

Als Zusammenfassung ergibt sich

**Satz 11.** *Jede gleichsinnige Ähnlichkeitstransformation mit genau einem Fixpunkt, die nicht Zentralstreckung ist, besitzt keine Fixgerade. Jede ungleichsinnige Ähnlichkeitstransformation mit genau einem Fixpunkt besitzt stets zwei Fixgeraden, die aufeinander senkrecht stehen.*

Die Fixgeraden einer ungleichsinnigen Ähnlichkeitstransformation lassen sich leicht konstruieren (Abb. 3.28), wenn man den Fixpunkt auf die oben geschilderte Weise vorher bestimmt. Es sei  $g(AA')$  senkrecht auf  $g$ ,  $g(BB')$  senkrecht auf  $g'$ .

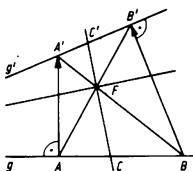


Abb. 3.28

Die gesuchten Fixgeraden sind die Winkelhalbierenden des Winkels  $\angle AFB$  und seines Nebenwinkels. Die Winkelhalbierende des Winkels  $\angle AFB$  schneide  $g$  in  $C$ ,  $g'$  in  $C'$ . Der Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion ist erbracht, wenn gezeigt wird, daß  $C'$  das Bild von  $C$  ist, d. h., wenn das Dreieck  $CBF$  dem Dreieck  $C'B'F$  ungleichsinnig ähnlich ist. Das ist aber in der Tat der Fall, wie man leicht durch Überlegungen wie beim Beweis für die Richtigkeit der Fixpunkt-konstruktion erkennt.

Am Schluß dieses Abschnitts über die Ähnlichkeitstransformationen sollen wieder einige gruppentheoretische Überlegungen stehen.

**Satz 12.** *Die Menge aller Ähnlichkeitstransformationen einer Ebene bildet eine Gruppe.*

Da das Assoziativgesetz bei Zusammensetzungen von Transformationen stets erfüllt ist, und die identische Abbildung die Rolle des Einselements übernimmt,

hat man noch zu zeigen, daß bei Zusammensetzungen zweier Ähnlichkeitstransformationen wieder eine Ähnlichkeitstransformation entsteht und daß zu jeder Ähnlichkeitstransformation die inverse Element der Menge ist. Dieses folgt sofort aus der Tatsache, daß die Ähnlichkeit eine Äquivalenzrelation ist. Es läßt sich natürlich auch leicht durch eine analytische Rechnung nachprüfen.

Aus der Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen sollen folgende Untergruppen erwähnt werden:

Die gleichsinnigen Ähnlichkeitstransformationen bilden eine Untergruppe, die ungleichsinnigen dagegen nicht. Außerdem sind die in den Sätzen 4 und 5 behandelten Gruppen Untergruppen der Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen. Auch die Gruppe der Bewegungen ist eine Untergruppe, denn alle Bewegungen können als spezielle Ähnlichkeitstransformationen aufgefaßt werden, ihre Gleichungen erhält man bekanntlich durch spezielle Wahl der Koeffizienten in den Gleichungen (6) und (8).

### 3.3.3. Aufgaben

1. Gegeben sind zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$ , die auf derselben Seite einer Geraden  $g$  liegen. Es ist ein Kreis zu konstruieren, der durch  $P_1$  und  $P_2$  verläuft und  $g$  berührt.
2. Die drei Eckpunkte eines Dreiecks sind unzugänglich. Es sind die drei Seitenhalbierenden und die drei Höhen des Dreiecks zu konstruieren.
3. In ein gegebenes Dreieck ist ein Quadrat so einzubeschreiben, daß auf einer Seite des Dreiecks zwei, auf den beiden anderen Seiten des Dreiecks je ein Eckpunkt des Quadrates liegen.
4. Es ist ein Kreis  $k$  zu konstruieren, der einen gegebenen Kreis  $k'$  in einem gegebenen Punkt  $P$  und eine gegebene Gerade  $g$  berührt. Welche Sonderfälle bezüglich der Lage von  $k'$ ,  $P$  und  $g$  sind zu beachten?
5. Gegeben sei eine gleichsinnige Ähnlichkeitstransformation durch die beiden Originalpunkte  $A$  und  $B$  sowie die zugeordneten Bildpunkte  $A'$  und  $B'$ . Dazu werde die durch  $A$  und  $A'$  als Originalpunkte und  $B$  und  $B'$  als zugehörige Bildpunkte bestimmte gleichsinnige Ähnlichkeitstransformation betrachtet. Es ist zu beweisen, daß beide Transformationen den gleichen Fixpunkt besitzen. Gilt diese Aussage auch dann, wenn die beiden Ähnlichkeitstransformationen als ungleichsinnig vorausgesetzt werden?

### 3.4. Affine Transformationen

In diesem Abschnitt werden Punkttransformationen der Ebene behandelt, durch die sich ein beliebig vorgegebenes Dreieck in ein vorgegebenes Bilddreieck überführen läßt. Mußte beim Übergang von den Bewegungen zu den Ähnlichkeitstransformationen die Streckentreue aufgegeben werden, so soll jetzt auch noch

auf die Winkeltreue verzichtet werden. Das Vorgehen ist dem bei den Ähnlichkeitstransformationen analog. Auch hier werden zunächst spezielle Abbildungen behandelt, die Orthogonalstreckungen (Kontraktionen).

### 3.4.1. Orthogonalstreckungen

Zur Einführung der Ähnlichkeitstransformationen diene die Zentralstreckung, gegeben durch das Zentrum und das Teilverhältnis  $t$ . Eine Orthogonalstreckung wird durch Vorgabe einer Fixpunktgeraden (Achse  $s$ ) und eines Teilverhältnisses  $k \neq 0$  bestimmt. An die Stelle des Zentrums tritt damit eine Achse, deren sämtliche Punkte Fixpunkte sind. Ein beliebiger Originalpunkt  $P$  wird wie folgt abgebildet: Schneidet das Lot von  $P$  auf die Achse diese im Punkt  $F$ , so soll  $P'$  auf diesem Lot liegen, und es soll gelten

$$m(FP') = k \cdot m(FP) \quad \text{oder} \quad TV(P', P; F) = k \quad (\text{Abb. 3.29}).$$

Es bestehen demnach analoge Beziehungen wie bei der Zentralstreckung. Bildet man weiterhin den Punkt  $Q$  auf den Punkt  $Q'$  ab (zunächst  $Q \notin g(PP')$  und  $g(PQ)$

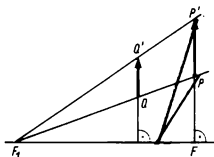


Abb. 3.29

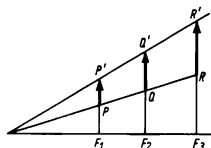


Abb. 3.30

nicht parallel zu  $s$ ), so schneiden sich nach einer Umkehrung des Strahlensatzes  $g(PQ)$  und  $g(P'Q')$  auf der Achse. Die weiteren Betrachtungen verlaufen analog denen bei der Zentralstreckung. Durch die gegebene Konstruktionsvorschrift kann zu jedem Punkt eindeutig sein Bild und zu jedem Bildpunkt eindeutig sein Original konstruiert werden. An die Stelle des Teilverhältnisses  $k$  können zur Festlegung der Transformation auch ein Originalpunkt  $P$  und sein Bildpunkt  $P'$  treten, wobei deren Verbindungsgerade auf der Achse senkrecht stehen muß. Zum Punkt  $Q$  findet man dann das Bild, indem man den Schnittpunkt  $F_1$  von  $g(PQ)$  und der Achse mit  $P'$  verbindet und diese Verbindungsgerade mit dem Lot von  $Q$  auf die Achse schneidet. Der Schnittpunkt ist dann  $Q'$  (Abb. 3.29). Liegt  $Q$  auf  $g(PP')$ , so hat man analog der entsprechenden Betrachtung bei der Zentralstreckung unter Verwendung von geeigneten Hilfspunkten  $R$  und  $R'$  diese Konstruktion zweimal durchzuführen.

Bildet man drei kollineare Punkte ab, etwa  $P, Q, R$  (Abb. 3.30), so folgt wegen

$$\frac{m(F_1P')}{m(F_1P)} = \frac{m(F_2Q')}{m(F_2Q)} = \frac{m(F_3R')}{m(F_3R)} = k,$$

daß auch  $P', Q'$  und  $R'$  kollinear sind, und wegen der Parallelität der Abbildungspfeile gilt  $TV(P, Q; R) = TV(P', Q'; R')$ . Das Teilverhältnis von drei kollinearen Punkten bleibt also auch bei dieser Transformation erhalten. Die Eigenschaft der Winkeltreue ist dagegen nicht mehr gewährleistet, wie man erkennt, wenn man das Dreieck  $F_1F_2R$  als Originaldreieck und das Dreieck  $F_1F_2R'$  als Bilddreieck betrachtet. Jedoch bleibt die Parallelität von Geraden erhalten, d. h., zwei parallele Originalgeraden werden auf zwei Geraden abgebildet, die wieder parallel sein müssen; denn hätten sie einen gemeinsamen Schnittpunkt  $S'$ , so müßte der zugehörige Originalpunkt  $S$  wegen der Eineindeutigkeit der Abbildung auf beiden Originalgeraden liegen, die sich demnach schneiden müßten, was ein Widerspruch zur Voraussetzung wäre.

Es handelt sich bei der Orthogonalstreckung also um eine Transformation, bei der Geraden in Geraden übergehen und bei der die Parallelität von Geraden und das Teilverhältnis von drei kollinearen Punkten Invarianten sind.

Es soll nun gezeigt werden, daß zwei beliebig vorgegebene Dreiecke durch Zusammensetzung von Orthogonalstreckungen und Ähnlichkeitstransformationen

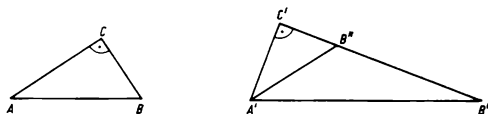


Abb. 3.31

stets aufeinander abgebildet werden können. Zunächst wird der Spezialfall behandelt, daß beide Dreiecke rechtwinklig sind. Das rechtwinklige Dreieck  $ABC$  mit  $|\sphericalangle ACB| = 90^\circ$  soll auf das ebenfalls rechtwinklige Dreieck  $A'B'C'$  mit  $|\sphericalangle A'C'B'| = 90^\circ$  abgebildet werden (Abb. 3.31). Das geschieht auf die folgende Weise: Zunächst wird das Dreieck  $ABC$  durch eine Ähnlichkeitstransformation so abgebildet, daß  $C$  auf  $C'$ ,  $A$  auf  $A'$  und  $B$  auf einen Punkt  $B''$  des Strahls  $C'B'$  fällt. Daran schließt sich eine Orthogonalstreckung mit  $g(C'A')$  als Achse an. Der Streckfaktor  $k$  wird so gewählt, daß  $B''$  auf  $B'$  abgebildet wird. Damit ist das Dreieck  $ABC$  in der geforderten Weise auf das Dreieck  $A'B'C'$  abgebildet worden.

Jetzt soll der Allgemeinfall betrachtet werden.  $ABC$  und  $A'B'C'$  seien zwei beliebige Dreiecke. Dann wird das Dreieck  $ABC$  durch eine geeignete Orthogonalstreckung auf ein rechtwinkliges Dreieck  $ABC''$  abgebildet (Abb. 3.32).



Nimmt man  $g(AB)$  als Achse der Orthogonalstreckung, so erhält man  $C''$  als Schnittpunkt des Lotes von  $C$  auf die Achse mit dem Thaleskreis über  $AB$ . Voraussetzung für die Konstruktion ist die Existenz eines solchen Schnittpunktes, die aber durch passende Wahl der Achse stets gesichert werden kann. (Falls das Dreieck  $ABC$  stumpfwinklig ist, muß die Achse dem stumpfen Winkel gegenüber liegen.) Jetzt wird das rechtwinklige Dreieck  $ABC''$  auf das rechtwinklige Dreieck  $A'B'C'''$  abgebildet, wobei sich der Punkt  $C'''$  als Schnitt des Lotes von  $C'$  auf

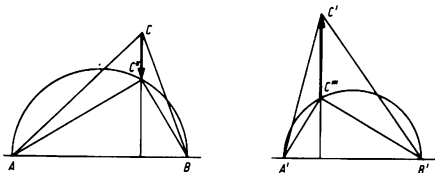


Abb. 3.32

$A'B'$  mit dem Thaleskreis über  $A'B'$  ergibt. (Falls diese Konstruktion nicht möglich ist, muß durch eine weitere Orthogonalstreckung das Dreieck  $A'B'C'$  zunächst in ein für diese Konstruktion geeignetes Dreieck übergeführt werden.) Es schließt sich nun noch die Orthogonalstreckung mit  $A'B'$  als Achse an, die  $C'''$  in den Punkt  $C'$  überführt.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß es stets möglich ist, zwei beliebige Dreiecke durch eine endliche Folge von Ähnlichkeitstransformationen und Orthogonalstreckungen ineinander überzuführen. Die Orthogonalstreckung führt damit auf eine neue Klasse von Transformationen, die die Eigenschaften haben, daß Geraden auf Geraden abgebildet werden, daß Parallelität von Geraden und Teilverhältnisse kollinearier Punkte erhalten bleiben. Diese Transformationen heißen affin, ihre weiteren Eigenschaften sollen im folgenden untersucht werden.

Zur analytischen Behandlung ist es zunächst notwendig, Abbildungsgleichungen der Orthogonalstreckung aufzustellen. Nimmt man als Fixpunktgerade die Abszissenachse, so erhält man als Gleichungen der Orthogonalstreckung

$$\left. \begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= ky, \end{aligned} \right\} \quad k \neq 0. \quad (1)$$

Dabei führt  $k = 1$  auf die Identität,  $k = -1$  auf die Spiegelung an der  $x$ -Achse.

Bildet man mit Hilfe der Gleichungen (1) den Kreis mit der Gleichung  $x^2 + y^2 = r^2$  ab, so erhält man als Bild eine Ellipse mit der Gleichung

$$x'^2 + \frac{y'^2}{k^2} = r^2.$$

Die Orthogonalstreckung ist also im Gegensatz zu den Ähnlichkeitstransformationen nicht kreistreu.

Die Gleichung einer Orthogonalstreckung, die die Gerade  $g$  mit der Gleichung  $px + qy + r = 0$  zur Achse hat, wird im folgenden mit Hilfe der Vektorrechnung unter Benutzung eines kartesischen Koordinatensystems hergeleitet (Abb. 3.33).

Es sei  $P$  ein Originalpunkt,  $P'$  der zugehörige Bildpunkt,  $P^*$  der Fußpunkt des Lotes von  $P$  auf die Achse. Die Ortsvektoren der Punkte seien  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}'$  und  $\mathbf{r}^*$ ,  $k$  sei der Streckfaktor der Orthogonalstreckung. Dann ist

$$\mathbf{r}' - \mathbf{r}^* = k(\mathbf{r} - \mathbf{r}^*).$$

Außerdem gilt

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^* + d\mathbf{n}^0,$$

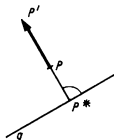


Abb. 3.33

wobei  $d$  der Abstand der Punkte  $P$  und  $P^*$  und  $\mathbf{n}^0$  ein Einheitsnormalenvektor der Achse ist. Eliminiert man aus beiden Gleichungen  $\mathbf{r}^*$ , so erhält man

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (k - 1)d\mathbf{n}^0$$

als Gleichung der Orthogonalstreckung in vektorieller Darstellung. Geht man zur Schreibweise in kartesischen Koordinaten über, so ergibt sich

$$\langle x', y' \rangle = \langle x, y \rangle + (k - 1) \left\langle \frac{px + qy + r}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right\rangle$$

oder

$$x' = x + (k - 1) \cdot p \frac{px + qy + r}{p^2 + q^2},$$

$$y' = y + (k - 1) \cdot q \frac{px + qy + r}{p^2 + q^2}.$$

Damit hat man die allgemeine Gleichung einer Orthogonalstreckung erhalten, die für  $k = -1$  in die Gleichung einer Geradenspiegelung übergeht. Sie enthält neben  $k$  noch zwei wesentliche Parameter, die sich aus der Gleichung der Achse  $px + qy + r = 0$  ergeben. Man erkennt, daß es sich um Abbildungsgleichungen handelt,

die in  $x$  und  $y$  linear sind. Setzt man eine Ähnlichkeitstransformation mit einer solchen Orthogonalstreckung zusammen, so bleiben die Koordinaten der Bildpunkte lineare Funktionen von  $x$  und  $y$ , und man erhält Abbildungsgleichungen der Gestalt

$$x' = ax + by + e,$$

$$y' = cx + dy + f$$

oder in vektorieller Schreibweise

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}$$

$$\text{mit } \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

### 3.4.2. Analytische Definition der ebenen affinen Abbildungen

**Definition 1.** Eine lineare Abbildung mit den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x' &= ax + by + e, \\ y' &= cx + dy + f \end{aligned} \right\} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c} \quad (2)$$

heißt affine Abbildung. Sie heißt regulär, wenn  $\det \mathbf{A} = ad - bc \neq 0$  gilt, singulär, wenn  $\det \mathbf{A} = ad - bc = 0$  ist.

Man erkennt, daß in der Menge der durch die Gleichungen (2) bestimmten Abbildungen die Ähnlichkeitstransformationen und auch die Orthogonalstreckungen bei spezieller Wahl der Koeffizienten als Sonderfälle enthalten sind.

Setzt man die gegebene affine Abbildung (2) als regulär voraus — solche regulären Abbildungen sollen zunächst ausschließlich betrachtet werden —, so lassen sich die Gleichungen (2) eindeutig nach  $x$  und  $y$  auflösen, und man erhält die Gleichungen der zu (2) inversen Abbildung in der Gestalt

$$\left. \begin{aligned} x &= Ax' + By' + E, \\ y &= Cx' + Dy' + F \end{aligned} \right\} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}' - \mathbf{c}), \quad (3)$$

wobei die neuen Koeffizienten  $A, B, C, D, E$  und  $F$  eindeutig durch die Koeffizienten von (2) bestimmt sind. Punkte werden daher eindeutig umkehrbar abgebildet, und es liegt eine affine Transformation oder Affinität vor.

Es soll nun untersucht werden, ob alle Abbildungen (2) die bei der Behandlung der Orthogonalstreckungen herausgestellten Eigenschaften — Geradentreue, Paralleleninvarianz und Teilverhältnisinvarianz — besitzen.

Zunächst werde die Gerade mit der Parameterdarstellung (vgl. 2.4.(1))

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a} \quad (-\infty < t < \infty),$$

abgebildet. Man erhält

$$\mathbf{r}' = A\mathbf{r}_0 + \mathbf{c} + tA\mathbf{a},$$

also wieder eine Parameterdarstellung einer Geraden. det  $A = ad - bc \neq 0$  sichert, daß tatsächlich wieder eine Gerade und nicht nur ein Punkt entsteht.

Die beiden parallelen Geraden mit den Parameterdarstellungen

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t_1\mathbf{a} \quad \text{und} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t_2\mathbf{a}$$

werden auf die beiden Geraden mit den Parameterdarstellungen

$$\mathbf{r}' = A\mathbf{r}_1 + \mathbf{c} + t_1A\mathbf{a} \quad \text{und} \quad \mathbf{r}' = A\mathbf{r}_2 + \mathbf{c} + t_2A\mathbf{a}$$

abgebildet, die Bildgeraden besitzen den gleichen Richtungsvektor  $A\mathbf{a}$  und sind demnach wieder parallel.

Es bleibt noch zu zeigen, daß das Teilverhältnis dreier kollinear Punkte invariant bleibt. Betrachtet werden die drei kollinearen Punkte  $A$ ,  $B$  und  $P$  mit dem Teilverhältnis  $t = \text{TV}(A, B; P)$ . Variiert  $P$  auf  $g(AB)$ , so verändert sich auch das Teilverhältnis  $t$ . Das kommt in der aus 2.4.1., Satz 2 und 3, sich ergebenden Parameterdarstellung

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{a} - t\mathbf{b}}{1 - t} \quad (t \neq 1)$$

zum Ausdruck. Dabei sind  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{r}$  die Ortsvektoren der kollinearen Punkte  $A$ ,  $B$  und  $P$ . Bildet man diese Gerade mit Hilfe der Gleichungen (2) ab, so erhält man

$$\mathbf{r}' = A \frac{\mathbf{a} - t\mathbf{b}}{1 - t} + \mathbf{c}$$

oder

$$\mathbf{r}' = \frac{A\mathbf{a} + \mathbf{c} - t(A\mathbf{b} + \mathbf{c})}{1 - t}.$$

$A\mathbf{a} + \mathbf{c}$  und  $A\mathbf{b} + \mathbf{c}$  sind nach (2) die Ausdrücke für die Bilder  $A'$  und  $B'$  der Punkte  $A$  und  $B$ , so daß sich

$$\mathbf{r}' = \frac{\mathbf{a}' - t\mathbf{b}'}{1 - t}$$

und hieraus schließlich wieder  $t = \text{TV}(A', B'; P')$  ergibt.

Damit ist gezeigt, daß das Teilverhältnis von drei kollinearen Originalpunkten gleich dem der Bildpunkte ist. Die bei der Orthogonalstreckung herausgestellten Eigenschaften gelten also auch für die durch die Gleichungen (2) eingeführte affine Abbildung. Die Abbildungsgleichungen enthalten sechs Parameter.

**Satz 1.** *Eine reguläre affine Abbildung wird durch die Vorgabe von drei nicht kollinearen Originalpunkten  $P_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) und drei ebenfalls nicht kollinearen Bildpunkten  $P'_i$  eindeutig bestimmt.*

Zum Beweis ist zu zeigen, daß es Abbildungsgleichungen (2) mit eindeutig bestimmten Koeffizienten gibt, durch die die Punkte  $P_i$  auf die Punkte  $P'_i$  abgebildet werden.

Die Punkte  $P_i$  haben die Koordinaten  $(x_i, y_i)$ , die Punkte  $P'_i$  die Koordinaten  $(x'_i, y'_i)$ . Man erhält nach dem Einsetzen in die Gleichungen (2) für die unbekannten Koeffizienten die folgenden beiden Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{ll} x'_1 = ax_1 + by_1 + e, & y'_1 = cx_1 + dy_1 + f, \\ x'_2 = ax_2 + by_2 + e, & \text{und} \quad y'_2 = cx_2 + dy_2 + f, \\ x'_3 = ax_3 + by_3 + e, & y'_3 = cx_3 + dy_3 + f. \end{array}$$

Das erste System kann eindeutig nach  $a, b$  und  $e$ , das zweite eindeutig nach  $c, d$  und  $f$  aufgelöst werden, da die Koeffizientendeterminante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

wegen der getroffenen Voraussetzung stets von Null verschieden ist. Da die drei Bildpunkte als nicht kollinear vorausgesetzt worden sind, existiert auch eine inverse Abbildung. Damit ist dieser Satz, der auch *Hauptsatz der affinen Geometrie* genannt wird, bewiesen.

### 3.4.3. Synthetische Definition und konstruktive Behandlung der affinen Abbildungen

Bisher wurden die affinen Abbildungen durch die Gleichungen (2) definiert und die bekannten Eigenschaften, deren Gültigkeit nach der Behandlung des Spezialfalles der Orthogonalstreckung nahelagen, bewiesen. Es besteht nun auch die Möglichkeit, die affinen Abbildungen durch diese Eigenschaften zu definieren.

**Definition 2.** Eine Abbildung einer Ebene auf sich heißt affin, wenn Geraden auf Geraden abgebildet werden und das Teilverhältnis von je drei kollinearen Punkten invariant bleibt.

Die Eigenschaft, daß parallele Geraden auf parallele Geraden abgebildet werden, wird nicht mit in die Definition aufgenommen, da sie unter Benutzung der Definition bewiesen werden kann. Der Beweis, der hierzu bei der Behandlung der Orthogonalstreckungen geführt worden ist, gilt auch in diesem Zusammenhang.

Demnach wird durch eine affine Transformation ein Parallelogramm wieder in ein Parallelogramm übergeführt. Dabei werden die Diagonalschnittpunkte aufeinander abgebildet, da wegen der Invarianz der Teilverhältnisse Streckenmittelpunkte in Streckenmittelpunkte übergehen müssen.

Aus der synthetischen Definition der affinen Abbildungen lassen sich nun die Abbildungsgleichungen (2) herleiten, so daß auf diese Weise die Gleichwertigkeit

beider Definitionen für den regulären Fall bewiesen werden kann, was aber nicht weiter ausgeführt werden soll.

Zur konstruktiven Behandlung der affinen Abbildungen ist es erforderlich, entsprechend dem Hauptsatz drei Originalpunkte  $A, B, C$  und die entsprechenden Bildpunkte  $A', B', C'$  in allgemeiner Lage vorzugeben. Zu einem vierten Originalpunkt  $D$  ist der Bildpunkt  $D'$  zu konstruieren (Abb. 3.34).  $D$  wird mit einem

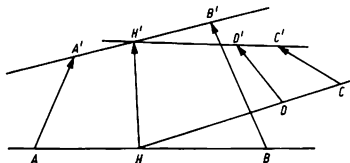


Abb. 3.34

er drei Punkte  $A, B, C$  verbunden, so daß diese Verbindungsgerade die Gerade durch die beiden anderen Punkte schneidet. Das ist stets auf mindestens eine Weise möglich; es geht auf genau eine Weise, wenn die vier Punkte  $A, B, C, D$  ein Parallelogramm bilden, dann ist aber die Konstruktion von  $D'$  besonders einfach. Entsprechend der Abb. 3.34 schneide  $g(CD)$  die Gerade  $g(AB)$  im Punkt  $H$ . Sein Bild  $H'$  läßt sich nach Abb. 3.19 konstruieren. Durch  $C'$  und  $H'$  ist dann eine Bildgerade bestimmt, auf der der gesuchte Punkt  $D'$  liegen muß. Man erhält ihn durch Übertragung des Teilverhältnisses in analoger Weise wie  $H'$ .

#### 3.4.4. Fixpunkte von Affinitäten

Die Affinität (2) soll auf Fixpunkte untersucht werden. Um sie zu bestimmen, setzt man  $x = x' = x_F$  und  $y = y' = y_F$ . Man erhält damit aus (2) das folgende lineare Gleichungssystem in  $x_F$  und  $y_F$ :

$$\begin{aligned} (1 - a) x_F - by_F &= e, \\ -cx_F + (1 - d) y_F &= f. \end{aligned}$$

Die Untersuchung der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Matrix führt auf vier Möglichkeiten:

1. Die Affinität (2) besitzt genau einen Fixpunkt.
2. Die Affinität (2) besitzt keinen Fixpunkt.
3. Die Affinität (2) besitzt eine einparametrische Schar von Fixpunkten, die alle, der Theorie über lineare Gleichungssysteme entsprechend auf einer Geraden liegen. Diese Gerade heiße *Achse* der Affinität.

4. Die Affinität (2) besitzt eine zweiparametrische Schar von Fixpunkten, d. h., jeder Punkt der Ebene ist Fixpunkt, und es handelt sich um die identische Abbildung. Dieser Trivialfall tritt für  $a = d = 1$  und  $b = c = e = f = 0$  ein.

Aus dem Hauptsatz folgt sofort in diesem Zusammenhang

**Satz 2.** Jede Affinität mit drei nichtkollinearen Fixpunkten ist die Identität.

Spezielle Affinitäten mit genau einem Fixpunkt sind bereits bekannt, z. B. die gleichsinnige Ähnlichkeitstransformation mit ihren Sonderfällen, der Zentralstreckung und der Drehung. Eine Affinität ohne Fixpunkt ist beispielsweise die Verschiebung, eine Affinität mit einer Achse die Orthogonalstreckung.

**Definition 3.** Die Affinitäten mit einer Achse heißen *axiale Affinitäten* (*Hauptaffinitäten*, *perspektive Affinitäten*).

Wegen ihrer vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten sollen sie jetzt näher behandelt werden.

### 3.4.5. Axiale Affinitäten

Eine axiale Affinität wird entsprechend dem Hauptsatz durch zwei Fixpunkte  $F_1$  und  $F_2$ , wodurch die Achse festgelegt ist, und ein geordnetes Punktepaar  $(A, A')$  bestimmt. Die Konstruktion von Bildpunkten zu weiteren Originalpunkten gestaltet sich hier besonders einfach (Abb. 3.35): Zum vorgegebenen Originalpunkt  $B$

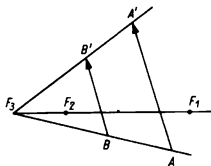


Abb. 3.35

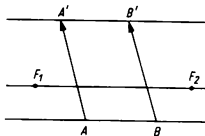


Abb. 3.36

soll der Bildpunkt  $B'$  konstruiert werden.  $g(AB)$  schneide die Achse in  $F_3$ . Dann erhält man  $B'$  als den Schnittpunkt von  $g(F_3A')$  mit der Parallelen zu  $g(AA')$  durch  $B$ . Die Richtigkeit der Konstruktion ergibt sich aus der Übereinstimmung der Teilverhältnisse:

$$TV(A, B; F_3) = TV(A', B'; F_3).$$

Ist  $g(AB)$  parallel zur Achse, so versagt diese Konstruktion. In diesem Fall erhält man  $B'$  als Schnittpunkt der Parallelen zu  $g(AB)$  durch  $A'$  mit der Parallelen zu  $g(AA')$  durch  $B$  (Abb. 3.36).

Aus dieser Konstruktion folgt sofort

**Satz 3.** *Die Verbindungsgeraden von zugeordneten Original- und Bildpunkten sind bei einer axialen Affinität zueinander parallel.*

Hieraus ergibt sich, daß die axiale Affinität neben der Achse als Fixpunktgerade noch eine einparametrische Schar von Fixgeraden besitzt, auf denen alle zugeordneten Original- und Bildpunkte liegen. Stehen diese Fixgeraden außerdem noch senkrecht auf der Achse, so liegt eine Orthogonalstreckung vor.

Eine weitere wesentliche Eigenschaft der axialen Affinität enthält

**Satz 4.** *Wird der beliebige Originalpunkt  $A$  durch eine axiale Affinität auf den Bildpunkt  $A' \neq A$  abgebildet und ist  $F_1$  der Schnittpunkt von  $g(AA')$  mit der Achse, so wird die Strecke  $AA'$  durch  $F_1$  in einem Verhältnis geteilt, das für alle (von den Fixpunkten verschiedenen) zugeordneten Paare von Original- und Bildpunkten der axialen Affinität konstant ist.*

Diese zur Definition der Orthogonalstreckung benutzte Eigenschaft kann damit auf die allgemeinen axialen Affinitäten übertragen werden. Zum Beweis werde

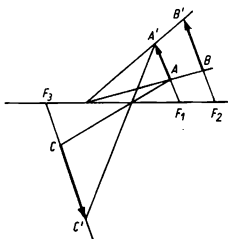


Abb. 3.37

Abb. 3.37 betrachtet, in die drei Abbildungspfeile eingezeichnet worden sind. Die Schnittpunkte ihrer Trägergeraden mit der Achse seien  $F_1$ ,  $F_2$  und  $F_3$ . Nach dem Strahlensatz gilt dann

$$\underline{TV(A', A; F_1) = TV(B', B; F_2) = TV(C', C; F_3) = k.}$$

**Definition 4.** Dieses Teilverhältnis  $k$  heiße *charakteristisches Teilverhältnis oder Inhaltsmaßstab der axialen Affinität*.

Für  $k$  sind zunächst alle reellen Zahlen mit Ausnahme von 0 und  $+1$  denkbar. Ist  $k = -1$ , so werden alle Strecken zwischen Original- und Bildpunkten von der Achse halbiert.



**Definition 5.** Eine axiale Affinität, bei der die Strecken zwischen Original- und Bildpunkten von der Achse halbiert werden, heiße *Affinspiegelung*.

Stehen dazu die Trägergeraden der Abbildungspfeile senkrecht auf der Achse, so liegt eine gewöhnliche Geradenspiegelung vor, die schon als spezielle Orthogonalstreckung erwähnt wurde und die von nun an im Unterschied zur Affinspiegelung *Orthogonalspiegelung* genannt werde.

**Satz 5.** *Jede Affinspiegelung ist eine involutorische Abbildung.*

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich sofort aus der Definition der Affinspiegelung.

Als weitere Folgerung aus Satz 4 und den Ergebnissen von 1.1.2.2. erhält man

**Satz 6.** *Eine axiale Affinität mit positivem charakteristischem Teilverhaltis  $k$  ist eine gleichsinnige Abbildung, mit negativem  $k$  eine ungleichsinnige Abbildung.*

Im ersten Fall liegen Originalpunkt und zugehöriger Bildpunkt stets auf derselben Seite der Achse, im zweiten Fall liegen sie auf verschiedenen Seiten der Achse.

In den folgenden Betrachtungen werde entsprechend den Ausführungen in Kapitel 2 der Flächeninhalt eines Polygons mit seiner Maßzahl identifiziert.

**Satz 7.** *Liegen zwei durch eine axiale Affinität aufeinander bezogene Dreiecke vor, so erhält man den Inhalt des Bilddreiecks  $A'B'C'$  durch Multiplikation des Inhaltes des Originaldreiecks  $ABC$  mit dem Inhaltsmaßstab.*

Es gilt also  $m(A'B'C') = km(ABC)$ . (4)

Damit ist die Bezeichnung „Inhaltsmaßstab“ für die Zahl  $k$  gerechtfertigt. Da der Inhaltsmaßstab eine positive oder negative reelle Zahl ist, erklärt sich auch in diesem Zusammenhang die Verwendung vorzeichenfahiger Flächeninhalte, und zwar gemäß Satz 6 so, daß den Flächeninhalten von zwei Dreiecken mit gleichem Umlaufssinn gleiche Vorzeichen, den Flächeninhalten von zwei Dreiecken mit verschiedenem Umlaufssinn verschiedene Vorzeichen zukommen.

Der Beweis zu Satz 7 wird zunächst für den Spezialfall geführt, daß  $A$  und  $B$  auf der Achse liegen, also Fixpunkte sind (Abb. 3.38). Die Gerade  $g(CC')$  schneide die Achse im Punkt  $F$ .  $CH$  und  $C'H'$  seien die Höhen der Dreiecke  $ABC$  und  $ABC'$  senkrecht zur Achse. Dann ist bei geeigneter gleichsinniger Orientierung von  $g(CH)$ ,  $g(C'H')$

$$m(ABC) = \frac{m(AB) \cdot m(CH)}{2} \quad \text{und} \quad m(ABC') = \frac{m(AB) \cdot m(C'H')}{2}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{m(ABC')}{m(ABC)} = \frac{m(C'H')}{m(CH)} = \frac{m(C'F)}{m(CF)} = k$$

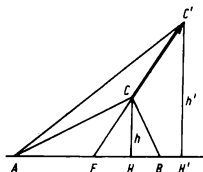


Abb. 3.38

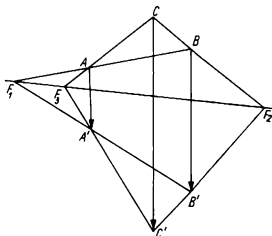


Abb. 3.39

und schließlich

$$m(ABC') = km(ABC).$$

Mit Hilfe dieses Spezialfalles wird nun der Allgemeinfall bewiesen. Mit den Bezeichnungen der Abb. 3.39 gilt

$$m(ABC) + m(BF_1F_2) = m(AF_1F_3) + m(CF_3F_2) \quad (5)$$

und

$$m(A'B'C') + m(B'F_1F_2) = m(A'F_1F_3) + m(C'F_3F_2).$$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$m(A'B'C') = m(A'F_1F_3) + m(C'F_3F_2) - m(B'F_1F_2).$$

Auf die Dreiecksinhalte auf der rechten Seite der Gleichung kann nun der oben betrachtete Spezialfall angewendet werden, so daß man

$$m(A'B'C') = km(AF_1F_3) + km(CF_3F_2) - km(BF_1F_2)$$

erhält. Unter Verwendung von Gleichung (5) ergibt sich schließlich

$$m(A'B'C') = km(ABC),$$

und damit ist der Satz bewiesen.

Es ist offensichtlich, daß sich dieser Satz auf zwei durch eine axiale Affinität aufeinander bezogene Polygone erweitern läßt. Außerdem ergibt sich, daß jede Affinspiegelung den elementaren Inhalt nicht ändert.

Der zunächst ausgeschlossene Fall  $k = 1$  führt einmal auf den Trivialfall der identischen Abbildung, zum anderen auf einen bisher noch nicht erwähnten Sonderfall der axialen Affinitäten. Er tritt ein, wenn der neben den zwei Fixpunkten nötige Abbildungspfeil  $AA'$  parallel zur Achse verläuft (Abb. 3.40). Die Konstruktion des Bildpunktes  $B'$  zum vorgegebenen Originalpunkt  $B$  erfolgt hier in analoger Weise wie im Allgemeinfall: Wenn  $g(AB)$  mit der Achse einen Punkt  $F$  gemeinsam hat, schneidet die Parallele zur Achse durch  $B$  die Gerade

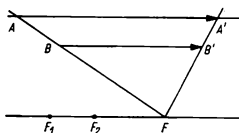


Abb. 3.40

$g(AA')$  im gesuchten Punkt  $B'$ . Die Forderung nach Teilverhältnisinvarianz ist bei dieser Konstruktion ebenfalls erfüllt. Liegt  $B$  auf  $g(AA')$ , so liegt auch  $B'$  auf dieser Geraden, und es gilt

$$m(AA') = m(BB').$$

Wie man sich an Hand von Abb. 3.40 überzeugt, gilt jetzt

$$m(F_1 F_2 A) = m(F_1 F_2 A'), \quad (6)$$

und damit handelt es sich in diesem Fall auch um eine inhaltstreue Transformation. Das charakteristische Teilverhältnis  $k$  existiert in diesem Fall nicht, da die Trägergeraden der Abbildungspfeile die Achse nicht schneiden, doch erweist es sich als sinnvoll, dieser axialen Affinität in Übereinstimmung mit Gleichung (6) das Teilverhältnis  $k = 1$  definitorisch zuzuordnen, das bisher ausgeschlossen war.

**Definition 6.** Affine Transformationen, die den elementaren Inhalt nicht ändern, heißen *äquiaffine Transformationen*.

Als Beispiel für spezielle äquiaffine Transformationen sind die Bewegungen zu nennen.

Aus den Betrachtungen über den Inhaltsmaßstab folgt

**Satz 8.** Bildet man ein Dreieck  $ABC$  hintereinander durch zwei beliebige axiale Affinitäten  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  mit den Inhaltsmaßstäben  $k_1$  und  $k_2$  ab, so gilt für den Flächeninhalt des Bilddreiecks  $A''B''C''$

$$m(A''B''C'') = k_2 k_1 m(ABC).$$

Der Flächeninhalt des Bilddreiecks ist also gleich dem Flächeninhalt des Originaldreiecks, multipliziert mit dem Produkt der Inhaltsmaßstäbe.

**Beweis.**  $\alpha_1$  führe das Dreieck  $ABC$  in das Dreieck  $A'B'C'$  über,  $\alpha_2$  das Dreieck  $A'B'C'$  in das Dreieck  $A''B''C''$ . Dann gilt

$$m(A'B'C') = k_1 \cdot m(ABC)$$

$$m(A''B''C'') = k_2 m(A'B'C') = k_2 k_1 m(ABC).$$

Dieser Satz läßt sich sofort auf die Zusammensetzung von endlich vielen axialen Affinitäten und auf Polygone übertragen.

Eine Anwendung der axialen Affinitäten erfolgt bei einem erneuten Beweis des Satzes von MENELAOS, der hier im Sinne des Erlanger Programms unter Benutzung von Transformationen und ohne Verwendung von Hilfslinien geführt wird (Abb. 3.41).

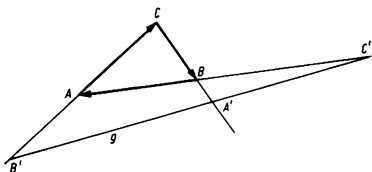


Abb. 3.41

Die Gerade  $g$  schneide die Seiten des gegebenen Dreiecks  $ABC$  oder deren Verlängerungen in den Punkten  $C'$ ,  $A'$  und  $B'$ , und die Behauptung lautet dann

$$\text{TV}(A, B; C') \text{TV}(B, C; A') \text{TV}(C, A; B') = 1.$$

Der Beweis wird mit Hilfe von drei axialen Affinitäten  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  geführt, die alle die Gerade  $g$  als Achse haben sollen. Es sei  $\alpha_1(A) = C$ ,  $\alpha_2(C) = B$ ,  $\alpha_3(B) = A$ . Die Hintereinanderausführung aller drei axialen Affinitäten ergibt dann die Identität.  $k_1$ ,  $k_2$  und  $k_3$  seien die drei Inhaltsmaßstäbe, so daß  $k_1 = \text{TV}(C, A; B')$ ,  $k_2 = \text{TV}(B, C; A')$ ,  $k_3 = \text{TV}(A, B; C')$  gilt. Bei der Zusammensetzung multiplizieren sich nach Satz 8 die Inhaltsmaßstäbe, und da man als Zusammensetzung die Identität erhält, ergibt sich  $k_3 k_2 k_1 = 1$  und somit  $\text{TV}(A, B; C') \text{TV}(B, C; A') \text{TV}(C, A; B') = 1$ .

### 3.4.6. Der Inhaltsmaßstab von Affinitäten

Um den Begriff des Inhaltsmaßstabes auf allgemeine Affinitäten übertragen zu können, wird der folgende Satz ausgesprochen, der einen Zusammenhang zwischen axialen Affinitäten und allgemeinen Affinitäten herstellt.

**Satz 9.** *Jede Affinität läßt sich aus höchstens drei axialen Affinitäten zusammensetzen.*

**Beweis.** Eine beliebige Affinität sei durch die drei nicht kollinearen Originalpunkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  sowie durch die drei ebenfalls nicht kollinearen Bildpunkte  $A'$ ,  $B'$  und  $C'$  gegeben. Dann ist das Dreieck  $ABC$  durch Zusammensetzung von drei axialen Affinitäten  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  auf das Dreieck  $A'B'C'$  abzubilden (Abb. 3.42). Die Achse von  $\alpha_1$  werde durch die Punkte  $A$  und  $B$  bestimmt,  $C$  werde auf  $C'$  abgebildet, so daß  $\alpha_1$  das Dreieck  $ABC$  in das Dreieck  $ABC'$  überführt.  $\alpha_2$  habe  $g(AC')$  als Achse, und  $B$  werde durch  $\alpha_2$  auf  $B'$  abgebildet, so daß durch  $\alpha_2$  das Dreieck  $ABC'$  in das Dreieck  $AB'C'$  übergeht.  $\alpha_3$  habe  $g(B'C')$  als Achse, und  $A$

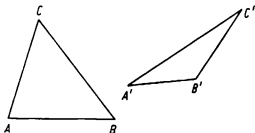


Abb. 3.42

werde in  $A'$  übergeführt, so daß schließlich das Dreieck  $AB'C'$  auf das Dreieck  $A'B'C'$  abgebildet wird.

Es ist noch zu bemerken, daß unter Umständen eine andere Reihenfolge der axialen Affinitäten gewählt werden muß, wenn die spezielle Lage der Original- und Bildpunkte das verlangt, wie es z. B. in Abb. 3.43 der Fall ist. Nähme man

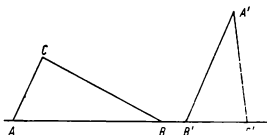


Abb. 3.43

hier  $g(AB)$  als Achse und bildete  $C$  auf  $C'$  ab, so wäre die entstehende Abbildung singulär. Daher wird man hier etwa zunächst  $g(AC)$  als Achse nehmen und  $B$  auf  $B'$  abbilden. Bei der Zusammensetzung der drei axialen Affinitäten multiplizieren sich dann nach Satz 8 die Inhaltsmaßstäbe, und das Produkt kann als Inhaltsmaßstab der resultierenden Affinität angesehen werden. Somit läßt sich für jede beliebige (reguläre) Affinität ein Inhaltsmaßstab definieren, und die Gleichung (4) gilt für beliebige Affinitäten.

Im folgenden soll der Inhaltsmaßstab einer beliebigen Affinität mit den Gleichungen (2) bestimmt werden. Zu diesem Zweck werden ein Originaldreieck  $P_1P_2P_3$  und das zugehörige Bilddreieck  $P'_1P'_2P'_3$  betrachtet. Ordnet man den Punkten  $P_i$  die Koordinaten  $(x_i, y_i)$  und den Punkten  $P'_i$  die Koordinaten  $(x'_i, y'_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) zu, so erhält man für den Inhalt des Originaldreiecks

$$2m(P_1P_2P_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (y_2 - y_3)x_1 + (y_3 - y_1)x_2 + (y_1 - y_2)x_3$$

und analog für den Inhalt des Bilddreiecks

$$2m(P'_1P'_2P'_3) = (y'_2 - y'_3)x'_1 + (y'_3 - y'_1)x'_2 + (y'_1 - y'_2)x'_3.$$

Setzt man in diese Gleichung die folgenden, aus den Abbildungsgleichungen (2) entstandenen Ausdrücke

$$x'_i = ax_i + by_i + e \quad \text{und} \quad y'_i = cx_i + dy_i + f$$

ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 2m(P'_1P'_2P'_3) &= [c(x_2 - x_3) + d(y_2 - y_3)](ax_1 + by_1 + e) \\ &\quad + [c(x_3 - x_1) + d(y_3 - y_1)](ax_2 + by_2 + e) \\ &\quad + [c(x_1 - x_2) + d(y_1 - y_2)](ax_3 + by_3 + e). \end{aligned}$$

Multipliziert man die Klammern aus und faßt man jeweils alle mit  $ac$ ,  $ad$ ,  $bc$ ,  $bd$ ,  $ec$  und  $ed$  behafteten Terme zusammen, so verschwinden die Koeffizienten von  $ac$ ,  $bc$ ,  $ec$  und  $ed$ , und man erhält

$$2m(P'_1P'_2P'_3) = ad[(y_2 - y_3)x_1 + (y_3 - y_1)x_2 + (y_1 - y_2)x_3] \\ + bc[(y_3 - y_2)x_1 + (y_1 - y_3)x_2 + (y_2 - y_1)x_3]$$

und hieraus

$$2m(P'_1P'_2P'_3) = (ad - bc)[(y_2 - y_3)x_1 + (y_3 - y_1)x_2 + (y_1 - y_2)x_3].$$

Die eckige Klammer der rechten Seite dieser Gleichung ist der Inhalt des Originaldreiecks, so daß schließlich

$$m(P'_1P'_2P'_3) = (ad - bc) \cdot m(P_1P_2P_3)$$

gilt (vgl. auch 2.7.2., Beweis zu Satz 5). Das Ergebnis werde zusammengefaßt im

Satz 10. Der Inhaltsmaßstab der Affinität mit den Gleichungen (2) ist deren Transformationsdeterminante  $ad - bc$ .

Für  $ad - bc > 0$  liegt eine gleichsinnige Affinität vor, für  $ad - bc < 0$  eine ungleichsinnige Affinität. Ist  $ad - bc = \pm 1$ , so handelt es sich um eine (gleichsinnige oder ungleichsinnige) äquiaffine Transformation.

Haben zwei Originaldreiecke die Inhalte  $F_1$  und  $F_2$ , die entsprechenden durch eine Affinität mit dem Inhaltsmaßstab  $k$  entstandenen Bilddreiecke die Inhalte  $F'_1$  und  $F'_2$ , so gilt  $F'_1 = kF_1$  und  $F'_2 = kF_2$ . Aus beiden Gleichungen folgt

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{F'_1}{F'_2}.$$

Damit hat man eine weitere Invariante der affinen Transformation erhalten, nämlich das Inhaltsverhältnis, und es gilt

Satz 11. Das Inhaltsverhältnis zweier Dreiecke bleibt bei affinen Transformationen erhalten.

Auch dieser Satz läßt sich auf beliebige Polygone übertragen.

### 3.4.7. Fixpunktkonstruktionen

Bei der analytischen Ermittlung der Fixpunkte einer affinen Transformation hatte sich ergeben, daß es Affinitäten mit genau einem Fixpunkt, mit einer Fixpunktgeraden und fixpunktfreie Affinitäten gibt. Es sei eine Affinität durch drei nicht kollineare Originalpunkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und drei zugeordnete ebenfalls nicht kollineare Bildpunkte  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  gegeben, wobei  $A \neq A'$ ,  $B \neq B'$ ,  $C \neq C'$  vorausgesetzt werde. Mögliche Fixpunkte dieser Affinität sind konstruktiv zu bestimmen. Prinzip dieser Konstruktion ist es, zwei Abbildungspfeile zu ermitteln, deren

Trägergeraden parallel sind. Existiert dann ein Schnittpunkt der Verbindungsgeraden der Originalpunkte mit der Verbindungsgeraden der Bildpunkte, so ist er ein Fixpunkt der Affinität (vgl. Abb. 3.35).

Sind die drei vorgegebenen Abbildungspfeile parallel, so erhält man auf diese Weise im allgemeinen drei Fixpunkte, die, da nach Voraussetzung die Identität nicht vorliegen kann, auf einer Achse liegen müssen. In diesem Fall handelt es sich um eine axiale Affinität.

Sind zwei der vorgegebenen drei Abbildungspfeile parallel, etwa  $AA'$  und  $BB'$ , so erhält man, wenn  $g(AB)$  nicht parallel zur Geraden  $g(A'B')$  verläuft, genau einen Fixpunkt (Abb. 3.44). Einen zweiten Fixpunkt kann es in diesem Fall nicht geben, da sonst eine Fixgerade existieren und eine axiale Affinität vorliegen müßte, in der bekanntlich alle Abbildungspfeile parallel sein müßten, was aber ausgeschlossen war. Sind zusätzlich Original- und Bildgerade der beiden parallelen

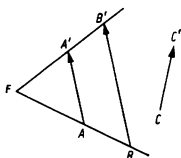


Abb. 3.44

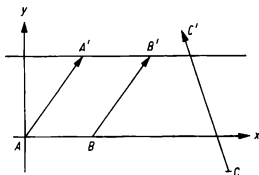


Abb. 3.45

Abbildungspfeile parallel, so erhält man zunächst keinen Fixpunkt. Das tritt genau dann ein, wenn die Abbildungspfeile  $AA'$  und  $BB'$  gleichen Richtungssinn und gleiche Länge haben, also verschiebungsgleich sind. Durch die folgende Rechnung soll nachgewiesen werden, daß die so bestimmte Affinität überhaupt keinen Fixpunkt besitzt. Die beiden verschiebungsgleichen Abbildungspfeile werden durch die Punkte  $A$  und  $A'$  sowie  $B$  und  $B'$  gegeben. Der dritte Abbildungspfeil  $CC'$  ist nicht zu ihnen parallel, eine axiale Affinität ist damit ausgeschlossen. Nimmt man o. B. d. A. den Punkt  $A$  zum Nullpunkt eines kartesischen Koordinatensystems und  $g(AB)$  als  $x$ -Achse dieses Systems, ordnet man dem Punkt  $B$  die Koordinaten  $(1, 0)$  zu und nimmt man weiterhin für  $A'$  die Koordinaten  $(x'_1, y'_1)$  an, so erhält man für den Punkt  $B'$  die Koordinaten  $(x'_1 + 1, y'_1)$  (Abb. 3.45). Setzt man diese Koordinaten in die Abbildungsgleichungen (2) ein, so ergibt sich

$$a = 1, \quad c = 0, \quad e = x'_1, \quad f = y'_1$$

und somit

$$x' = x + by + e,$$

$$y' = dy + f.$$

Nimmt man jetzt analytisch eine Fixpunktuntersuchung vor, wie sie in 3.4.4. durchgeführt wurde, so erhält man

$$x_F = x_F + by_F + e,$$

$$y_F = dy_F + f.$$

Gilt  $bf - (d - 1)e \neq 0$ , so hat das Gleichungssystem keine Lösung und die vorgegebene Affinität damit keinen Fixpunkt. Ist dagegen  $bf - (d - 1)e = 0$ , so erhält man eine axiale Affinität oder eine Verschiebung, die aber nach Voraussetzung ausgeschlossen sind.

Man kann also zusammenfassend den folgenden Satz aussprechen:

**Satz 12.** *Sind zwei von drei vorgegebenen Abbildungspfeilen einer Affinität verschiebungsgleich oder können in einer Affinität zwei solcher Abbildungspfeile konstruiert werden, ohne daß eine axiale Affinität vorliegt, so besitzt die Affinität keinen Fixpunkt.*

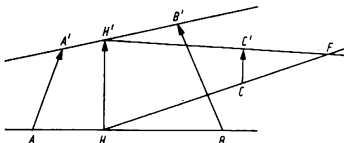


Abb. 3.46

Es bleibt nun noch der Allgemeinfall zu betrachten, daß die drei vorgegebenen Abbildungspfeile keiner Einschränkung bezüglich der Parallelität unterworfen werden (Abb. 3.46).

Die Gerade  $g(AB)$  wird auf  $g(A'B')$  abgebildet. Auf diesen beiden Geraden konstruiert man mit Hilfe des erzeugenden Streifens (vgl. 3.3.2.) ein zugeordnetes Punktepaa ( $HH'$ ) so, daß  $g(HH')$  parallel zu  $g(CC')$  verläuft. Der Schnittpunkt von  $g(HC)$  mit  $g(H'C')$  ist dann der gesuchte Fixpunkt. Sind diese beiden Geraden parallel, so existiert nach Satz 12 in der gegebenen Affinität kein Fixpunkt.

In engem Zusammenhang mit den Fixpunkten steht die Frage nach den Fixgeraden von Affinitäten. Sie soll hier nicht ausführlich behandelt werden. Die Frage ist für Ähnlichkeitstransformationen bereits in 3.3.2., für axiale Affinitäten in 3.4.5. beantwortet worden.

Liegt eine Affinität mit genau einem Fixpunkt vor, so wird in Analogie zu den Ähnlichkeitstransformationen auch hier zunächst gezeigt, daß eventuell vorhandene Fixgeraden durch den Fixpunkt verlaufen müssen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werde der Fixpunkt als Nullpunkt eines kartesischen Koordinatensystems angenommen, so daß dann die Abbildungsgleichungen

$$x' = ax + by,$$

$$y' = cx + dy$$



lauten. Um Zentralstreckungen auszuschließen, dürfen  $b$  und  $c$  nicht gleichzeitig verschwinden. Jetzt wird der Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $(p, q) \neq (0, 0)$  der affinen Abbildung unterworfen. Sein Bildpunkt  $P'$  hat die Koordinaten  $(ap + bq, cp + dq)$ , und eine Fixgerade liegt dann vor, wenn  $O$ ,  $P$  und  $P'$  kollinear sind, d. h., wenn

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ p & q & 1 \\ ap + bq & cp + dq & 1 \end{vmatrix} = 0$$

gilt. Hieraus folgt  $bq^2 + (a - d)pq - cp^2 = 0$  und schließlich für  $b \neq 0$

$$q = \left( \frac{d - a}{2b} \pm \sqrt{\frac{(d - a)^2 + 4bc}{4b^2}} \right) p.$$

Ist die Diskriminante größer als Null, so erhält man zwei reelle Fixgeraden, ist sie gleich Null, eine reelle Fixgerade, und ist sie kleiner als Null, keine reelle Fixgerade durch analoge Überlegungen wie beim Beweis des Satzes 11 in 3.3.

Betrachtet man schließlich eine fixpunktfreie Affinität, die keine Verschiebung ist, so besitzt diese höchstens eine Fixgerade. Auf den Beweis dieses Sachverhaltes soll hier ebenso verzichtet werden wie auf die konstruktive Ermittlung dieser Fixgeraden.

### 3.4.8. Die Affinitäten als Gruppe

**Satz 13.** *Die Menge der regulären affinen Abbildungen einer Ebene auf sich bildet mit der Hintereinanderausführung als Operation eine Gruppe.*

**Beweis.** Aus den Gleichungen (2) folgt, daß bei der Zusammensetzung zweier affiner Transformationen wegen der Linearität der Abbildungsgleichungen wiederum eine affine Transformation entsteht. Aus der Forderung der Regularität ( $ad - bc \neq 0$ ) folgt, daß zu jeder affinen Transformation stets eine inverse affine Abbildung existiert. Das Assoziativgesetz gilt hier wie bei allen Transformationen, und als Einselement dient die identische Abbildung.

Fragt man nun nach Untergruppen dieser Gruppe, so sind sofort die Ähnlichkeitstransformationen zu nennen. Außerdem bilden die gleichsinnigen Affinitäten ( $ad - bc > 0$ ) eine Untergruppe, die ungleichsinnigen Affinitäten dagegen nicht, da die Zusammensetzung zweier ungleichsinniger Affinitäten eine gleichsinnige Affinität ergibt. Auch die äquiaffinen Transformationen ( $ad - bc = \pm 1$ ) bilden eine Untergruppe, von ihnen sind die gleichsinnigen äquiaffinen Transformationen wieder eine Untergruppe, die ungleichsinnigen dagegen nicht. Weiterhin bilden die axialen Affinitäten mit fester Achse eine Untergruppe. Daß axiale Affinitäten mit beliebigen Achsen keine Gruppe bilden, folgt aus Satz 9.

Es gibt auch Untergruppen der affinen Gruppe mit endlich vielen Elementen. Als Beispiel werde eine Gruppe angeführt, die aus zwei Elementen besteht, nämlich aus einer Affinspiegelung und der Identität.

### 3.4.9. Ausblick auf singuläre affine Abbildungen

Wie bereits in 3.4.2. ausgeführt, werden die singulären affinen Abbildungen durch die Gleichungen (2) sowie durch die Bedingung  $ad - bc = 0$  charakterisiert. Das hat zur Folge, daß zu diesen Abbildungen keine Inversen existieren.

Ist  $a = b = c = d = 0$ , so erhält man

$$x' = e,$$

$$y' = f$$

für alle  $x$  und  $y$ . In diesem Fall werden alle Punkte der Ebene auf den einzigen Punkt mit den Koordinaten  $(e, f)$  abgebildet (Abb. 3.47). Verschwinden dagegen

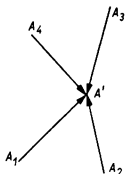


Abb. 3.47

nicht alle Koeffizienten  $a, b, c, d$  und sei etwa  $a \neq 0$ , so erhält man  $d = bc/a$ . Führt man diesen Ausdruck in die Gleichungen (2) ein, so ergibt sich

$$x' = ax + by + e,$$

$$y' = cx + \frac{bc}{a}y + f = \frac{c}{a}(ax + by) + f.$$

Setzt man  $ax + by = t_0$ , so erkennt man, daß alle Punkte der Geraden  $ax + by = t_0$  auf einen Punkt  $P'$  mit den Koordinaten  $(t_0 + e, (c/a)t_0 + f)$  abgebildet werden, wodurch der singuläre Charakter dieser Abbildung zum Ausdruck kommt. Ersetzt man  $t_0$  durch ein variables  $t$ , das alle reellen Zahlen durchlaufen kann, so wird die Schar paralleler Geraden mit der Gleichung  $ax + by = t$ , die jeden Punkt der Ebene genau einmal erfaßt, auf eine Gerade abgebildet, die die Parameterdarstellung

$$x' = t + e,$$

$$y' = \frac{c}{a}t + f$$

oder die parameterfreie Darstellung

$$cx' - ay' - ce + af = 0$$

besitzt. Diese Gerade heiße die *Senkgerade*  $s$  der singulären affinen Abbildung. Damit ist gezeigt, daß in diesem Fall alle Punkte der Ebene auf die Punkte einer Geraden abgebildet werden, daß jeder Punkt der Senkgeraden Bild einer Originalgeraden ist und daß demzufolge die Abbildung nicht eindeutig umgekehrt werden kann. In Abb. 3.48 wird diese singuläre affine Abbildung veranschaulicht. Jede Gerade der Parallelenschar mit der Gleichung  $ax + by = t$  wird auf einen Punkt

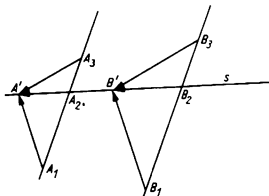


Abb. 3.48

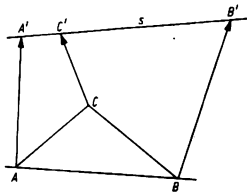


Abb. 3.49

der Senkgeraden abgebildet. Eine beliebige andere Gerade wird dagegen punktweise eindeutig umkehrbar auf die Senkgerade, ein beliebiges Dreieck  $ABC$  auf das entartete Dreieck  $A'B'C'$  abgebildet (Abb. 3.49), wobei auch noch zwei der Bildpunkte auf der Senkgeraden zusammenfallen können.

In Analogie zu den regulären affinen Abbildungen können auch die singulären analytisch und synthetisch nach Fixpunkten untersucht werden, was aber hier nicht näher ausgeführt werden soll. So gibt es singuläre affine Abbildungen, die fixpunktfrei sind, die genau einen Fixpunkt oder die Senkgerade als Fixpunktgerade besitzen.

### 3.4.10. Ausblick auf affine Abbildungen in höherdimensionalen Räumen

Bisher beschränkten sich die Betrachtungen auf Abbildungen einer Ebene auf sich. Die Frage liegt nahe, ob affine Abbildungen in höherdimensionalen Räumen eingeführt werden können. Eine Verallgemeinerung der affinen Abbildung auf den dreidimensionalen Raum  $R^3$  ist analytisch ohne weiteres möglich. Man definiert sie durch die Abbildungsgleichungen

$$\left. \begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{10} , \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{20} , \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{30} , \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

durch die ein Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $(x, y, z)$  auf den Punkt  $P'$  mit den Koordinaten  $(x', y', z')$  abgebildet wird, wobei ein kartesisches Koordinatensystem zugrunde gelegt wird. Die vektorielle Darstellung lautet auch hier  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}$ , wobei jetzt  $\mathbf{A}$  eine dreireihige Matrix ist und  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}'$  und  $\mathbf{c}$  dreizeilige Spaltenvektoren sind. Ist die Koeffizientendeterminante  $\det \mathbf{A} = \det(a_{ik})$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) von Null verschieden, so ist die Abbildung regulär, ist sie gleich Null, dann ist die Abbildung singulär. Beträgt dabei der Rang der Koeffizientenmatrix 2, so wird der dreidimensionale Raum auf eine Ebene abgebildet. Dieser Fall spielt in der Darstellenden Geometrie eine große Rolle, denn die dort zu behandelnde schräge Parallelprojektion ist eine singuläre affine Abbildung des Raumes auf eine Ebene, in diesem Fall auf die Zeichenebene. Ist der Rang dagegen 1, so wird der Raum auf eine Gerade, ist er 0, so wird der Raum auf einen Punkt abgebildet. Man kann nun zeigen, daß auch bei der regulären Abbildung mit den Gleichungen (7) Geraden auf Geraden abgebildet werden. Darüber hinaus werden Ebenen in Ebenen übergeführt, und die Parallelität überträgt sich ebenfalls, d. h., parallele Geraden werden auf parallele Geraden und parallele Ebenen auf parallele Ebenen abgebildet. Auch das Teilverhältnis von drei kollinearen Punkten bleibt invariant. Fordert man zunächst die Winkeltreue, so liegt eine räumliche Ähnlichkeitstransformation vor, verlangt man darüber hinaus die Längentreue, so hat man eine räumliche Bewegung. Wird dagegen nur  $\det \mathbf{A} = \det(a_{ik}) = \pm 1$  gefordert, so liegt eine räumliche inhaltstreue Transformation (äquiaffine Transformation) vor.

Diese Überlegungen lassen sich auf Räume höherer Dimension übertragen, wo eine affine Abbildung durch die Gleichung

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}_{mn}\mathbf{x} + \mathbf{c} \quad (8)$$

definiert werden kann. Dabei ist  $\mathbf{A}$  eine Matrix von  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten.  $\mathbf{x}$  ein  $n$ -dimensionaler Spaltenvektor, und  $\mathbf{x}'$  und  $\mathbf{c}$  sind  $m$ -zeilige Spaltenvektoren. Durch die Gleichungen (8) wird demnach ein  $n$ -dimensionaler Raum  $R^n$  in einen  $m$ -dimensionalen Raum  $R^m$  affin abgebildet. Ist  $n = m$ , stimmen Original- und Bildraum überein und ist die Koeffizientendeterminante von Null verschieden, so liegt eine affine Transformation eines  $n$ -dimensionalen Raumes auf sich vor.

### 3.4.11. Aufgaben

1. Das Dreieck mit den Eckpunkten  $A = (-2, 1)$ ,  $B = (8, -4)$ ,  $C = (7, 6)$  soll affin auf das Dreieck mit den Eckpunkten  $A' = (-11, 3)$ ,  $B' = (14, -2)$ ,  $C' = (2, 27)$  abgebildet werden. Wie lauten die Transformationsgleichungen? Die Abbildung ist auf Fixpunkte zu untersuchen.
2. Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck  $ABC$ . Die Seite  $AB$  wird über den Punkt  $B$  hinaus um sich selbst bis zum Punkt  $C'$  verlängert. In entsprechender Weise werden auf der Verlängerung von  $BC$  der Punkt  $A'$  und auf der Verlängerung von  $CA$  der Punkt  $B'$  konstruiert. Durch welche spezielle affine Transformation wird das Dreieck  $ABC$  auf das Dreieck  $A'B'C'$  abgebildet?

3. Gegeben sind in einer Ebene ein Kreis und eine Ellipse in beliebiger Lage zueinander. Es ist analytisch und synthetisch eine affine Transformation zu bestimmen, durch die der Kreis auf die Ellipse abgebildet wird.
4. Die drei nicht kollinearen Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  werden durch eine affine Transformation  $\varphi$  so abgebildet, daß  $\varphi(A) = B$ ,  $\varphi(B) = C$ ,  $\varphi(C) = A$  gilt. Es ist also  $\varphi(\varphi(\varphi(A))) = A$  oder  $\varphi^3(A) = A$ . Es ist zu zeigen:
  - a) Der Schwerpunkt des Dreiecks  $ABC$  ist einziger Fixpunkt dieser affinen Transformation.
  - b) Es handelt sich um eine zyklische Affinität dritter Ordnung, d. h., für jeden beliebigen Originalpunkt  $P$  gilt  $\varphi^3(P) = P$ .
5. Es ist zu beweisen: Die Menge aller Affinitäten einer Ebene, die einen gemeinsamen Fixpunkt besitzen, bildet eine Untergruppe der Gruppe der affinen Transformationen dieser Ebene.

### 3.5. Projektive Transformationen

Die Behandlung der Transformationen begann mit den Bewegungen. Anschließend wurden die Ähnlichkeitstransformationen auf dem Wege über die Zentralstreckungen eingeführt. Deren Zusammensetzung mit den Bewegungen ergab die allgemeinen Ähnlichkeitstransformationen. Es folgte die Behandlung der affinen Transformationen, die man als Zusammensetzung von den als neue Erzeugende eingeführten Orthogonalstreckungen mit den allgemeinen Ähnlichkeitstransformationen erhielt. Unter gruppentheoretischem Aspekt ergab sich, daß die Ähnlichkeitstransformationen eine Untergruppe der affinen Transformationen und die Bewegungen eine Untergruppe der Ähnlichkeitstransformationen sind. Die Invarianten der affinen Transformationen — z. B. Kollinearität, Parallelität, Teilverhältnisse — sind natürlich auch Invarianten der betreffenden Untergruppen, die infolge der Spezialisierung noch weitere Invarianten aufzuweisen haben: die Winkeltreue bei den Ähnlichkeitstransformationen und die Längentreue bei den Bewegungen.

Das bisherige Vorgehen beim Aufbau der geometrischen Transformationen soll auch bei der Einführung von projektiven Transformationen beibehalten werden. Als neue Transformationen der Ebene auf sich werden die *Zentralkollineationen* eingeführt, die mit den affinen Transformationen zusammengesetzt werden. Man erhält auf diese Weise allgemeine projektive Transformationen, die eine Gruppe bilden, in der die affinen Transformationen als Untergruppe enthalten sind. Diese Gruppe enthält also Transformationen, die noch allgemeiner als die Affinitäten sind, die Invarianten dieser Gruppe sind daher inhaltlich ärmer als die der affinen Transformationen.

## 3.5.1. Zentralkollineationen

Die Zentralkollineationen werden wie folgt definiert:

Gegeben seien eine Achse  $s$ , ein Zentrum  $Z$  sowie ein geordnetes Punktepaar  $(A, A')$  so, daß  $Z$  auf  $g(AA')$  liegt, wobei weder  $A$  noch  $A'$  mit einem Punkt der Achse oder mit dem Zentrum  $Z$  zusammenfallen sollen (Abb. 3.50). Alle Punkte der Achse sowie  $Z$  seien Fixpunkte. Zum gegebenen Originalpunkt  $B$  ( $B \notin g(AA')$ ,  $B \notin s$ ) wird dann der Bildpunkt  $B'$  in der folgenden Weise konstruiert:  $g(AB)$  schneide  $s$  in  $F$ . Dann erhält man  $B'$  als Schnittpunkt von  $g(FA')$  mit  $g(BZ)$ . Ist  $g(AB)$  parallel zu  $s$ , so erhält man  $B'$  als den Schnittpunkt der Parallelen zur

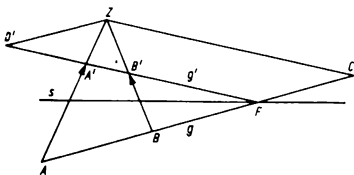


Abb. 3.50

Achse  $s$  durch  $A'$  mit  $g(ZB)$ . Auf diese Weise können weitere Punkte der Geraden  $g(AB) = g$  abgebildet werden, deren Bildpunkte alle auf  $g(A'B') = g'$  liegen, und umgekehrt können zu Punkten auf  $g'$  die Originalpunkte auf  $g$  konstruiert werden. Es sei  $E$  ein weiterer Originalpunkt auf  $g(AA')$ , sein Bild  $E'$  findet man durch die soeben beschriebene Konstruktion unter Benutzung des Abbildungspfeiles  $BB'$  (Abb. 3.50). Damit werden alle Geraden durch das Zentrum  $Z$  auf sich selbst abgebildet, sie sind also Fixgeraden.

Durch die gegebene Konstruktionsvorschrift kann zunächst ein Punkt der Geraden  $g$  nicht abgebildet werden: Es existiert auf  $g$  genau ein Punkt  $C$ , für den  $g(CZ)$  parallel zu  $g(FA')$  ist, d. h.,  $C$  besitzt keinen Bildpunkt. Andererseits gibt es auf der Geraden  $g'$  einen Punkt  $D'$ , für den  $g(ZD')$  parallel zu  $g$  ist und der demzufolge keinen Originalpunkt hat.  $C$  heiße *Verschwindungspunkt* der Geraden  $g$ ,  $D'$  *Fluchtpunkt* der Geraden  $g'$  bezüglich der zugrunde gelegten Zentralkollineation. Bildet man eine andere Gerade  $h$  durch analoge Konstruktion auf die Gerade  $h'$  ab, so erhält man auch auf  $h$  einen Verschwindungspunkt und auf  $h'$  einen Fluchtpunkt.

Diese Sonderstellung des Verschwindungs- und Fluchtpunktes soll sogleich beiseite gelassen werden. Es liegt zunächst nahe, dem Verschwindungspunkt den Fluchtpunkt und umgekehrt zuzuordnen. Das würde sich jedoch für die folgenden Betrachtungen nicht als zweckmäßig erweisen. Man führt daher auf  $g'$  einen *uneigentlichen Punkt*  $C_\infty$  ein, den man als Schnittpunkt der beiden parallelen Geraden  $g(FA')$  und  $g(CZ)$  bezeichnet. In analoger Weise definiert man auf  $g$  einen



mit der Achse  $s$ . Der Schnittpunkt von  $g(F_1A')$  mit  $g(ZD)$  ist dann der gesuchte Bildpunkt  $D'$ . Es wird nun behauptet, daß  $D'$  uneigentlicher Punkt der Geraden  $g(F_1A')$  ist. Zum Beweis hat man zu zeigen, daß  $g(F_1A')$  zu  $g(ZD)$  parallel ist. Das ergibt sich mit Hilfe des Strahlensatzes:

$$\text{Aus } |AC| : |AF| = |AZ| : |AA'| \quad \text{und} \quad |AC| : |AF| = |AD| : |AF_1| \text{ folgt} \\ |AZ| : |AA'| = |AD| : |AF_1|$$

und hieraus die Parallelität von  $g(F_1A')$  und  $g(ZD)$ . Demnach ist der Bildpunkt  $D'$  von  $D$  der uneigentliche Punkt von  $g(F_1A')$ . Da  $D$  ein beliebiger Punkt der Geraden  $v$  ist, wird jeder Punkt von  $v$  (auch der Schnittpunkt von  $v$  mit  $g(AZ)$  und der uneigentliche Punkt von  $v$ , wie man zusätzlich zeigen kann) auf einen uneigentlichen Punkt der projektiven Ebene abgebildet, und umgekehrt ist jeder uneigentliche Punkt Bild eines Punktes von  $v$ , wie man sich leicht überlegt. Das Bild der Geraden  $v$  ist damit die uneigentliche Gerade der projektiven Ebene. In der euklidischen Ebene hat die Gerade  $v$  kein Bild, weshalb ihr hier der Name *Verschwindungsgerade* gegeben wird.

In analoger Weise erhält man bei der Zentralkollineation eine *Fluchtgerade*  $f$ , die in der euklidischen Ebene kein Original besitzt, in der projektiven Ebene dagegen ist ihr Original die uneigentliche Gerade.

Zur Konstruktion der Fluchtgeraden werde wieder eine Zentralkollineation betrachtet, die durch ihre Achse  $s$ , das Zentrum  $Z$  und das geordnete Punktepaar  $(A, A')$  gegeben sei.  $C'$  sei Fluchtpunkt der durch  $A'$  und einen Punkt  $F \in g(AZ)$  der Achse bestimmten Geraden. Dann wird die Parallele zur Achse durch  $C'$  als Fluchtgerade definiert und mit  $f$  bezeichnet, denn man kann zeigen, daß das Original  $D$  eines beliebigen Punktes  $D' \in g(AA')$  auf ihr uneigentlicher Punkt ist (Abb. 3.52).  $g(D'A')$  schneide  $s$  in  $F_1$ . Dann erhält man  $D$  als Schnitt von  $g(F_1A)$

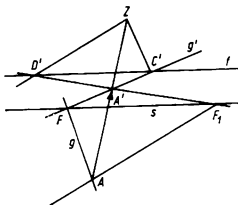


Abb. 3.52

mit  $g(ZD')$ . Man kann auch hier wieder nachweisen, daß der Schnittpunkt uneigentlich ist, d. h., daß beide Geraden parallel sind. Es gilt nämlich

$$|A'C'| : |A'F| = |A'Z| : |A'A| \quad \text{und} \quad |A'C'| : |A'F| = |A'D'| : |A'F_1|.$$

Hieraus folgt  $|A'Z| : |A'A| = |A'D'| : |A'F_1|$ , und damit ergibt sich die Parallelität von  $g(F_1A)$  und  $g(ZD')$ . Auch hier fügen sich der Schnittpunkt von  $f$  mit



$g(AZ)$  sowie der uneigentliche Punkt von  $f$  mit in die Betrachtungen ein, wie leicht nachzuweisen ist.

Damit ist gezeigt, daß bei der Zentralkollineation die uneigentliche Gerade die Rolle sowohl einer Original- als auch einer Bildgeraden übernehmen kann, sie ordnet sich in die Abbildung ein. Es wurde bereits betont, daß in der projektiven Ebene sich schneidende und parallele Geraden nicht mehr prinzipiell voneinander unterschieden werden müssen. Die Herausstellung und gesonderte Bearbeitung des Falles der Parallelität, was in der affinen Geometrie nötig war, entfällt demnach hier. So braucht man jetzt den eingangs bei der Definition der Zentralkollineation erwähnten Sonderfall nicht mehr besonders zu behandeln (vgl. Abb. 3.50). Ist  $g(AB)$  parallel zu  $s$ , so wird  $F$  uneigentlicher Punkt von  $s$ , und die Gerade durch ihn und  $A'$  schneidet  $g(ZB)$  in  $B'$ .

Bisher wurde die Zentralkollineation durch das Zentrum  $Z$ , die Achse und einen Abbildungspfeil bestimmt, auf dessen Trägergerade  $Z$  liegt. Eine andere Möglichkeit dafür ist die folgende: Gegeben sind ein Zentrum  $Z$  sowie drei Abbildungspfeile  $AA'$ ,  $BB'$  und  $CC'$ , deren Trägergeraden durch  $Z$  verlaufen (Abb. 3.53). Wird bei dieser Lage von  $A, B, C, A', B', C'$  noch die eindeutige Existenz der Schnittpunkte

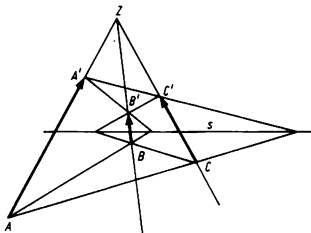


Abb. 3.53

$g(AB) \cap g(A'B')$ ,  $g(BC) \cap g(B'C')$ ,  $g(CA) \cap g(C'A')$  vorausgesetzt, so besagt der Satz von DESARGUES (der hier ohne Beweis angeführt sei), daß diese Schnittpunkte kollinear sind. Mit der durch sie gelegten Geraden  $s$  als Achse und mit  $Z$  als Zentrum gewinnt man daher die Zentralkollineation, die die vorgegebenen Abbildungspfeile realisiert.

Die nächste Frage gilt den Invarianten der Zentralkollineation. Vergleicht man mit den affinen Transformationen, so stellt man fest, daß nach wie vor Geraden auf Geraden abgebildet werden, daß also die Kollinearität auch eine Invariante der Zentralkollineation ist, was bereits im Namen zum Ausdruck kommt. Das Teilverhältnis von drei kollinearen Punkten ist jedoch offensichtlich nicht mehr invariant, wie Abb. 3.50 zeigt, da hier  $TV(A, B; F) \neq TV(A', B'; F)$  ist. Die Teilverhältnisse wären nur gleich, wenn  $g(AA')$  parallel zu  $g(BB')$  wäre, was aber auf Grund der Konstruktionsvorschrift ausgeschlossen ist.

Es werden nun zwei parallele Originalgeraden betrachtet, d. h. Geraden mit einem gemeinsamen uneigentlichen Punkt. Sein Bild ist im allgemeinen ein

eigentlicher Punkt, und die beiden parallelen Geraden werden somit auf zwei Geraden mit eigentlichem Schnittpunkt abgebildet. Demnach ist bei der Zentralkollineation auch die Paralleleninvarianz nicht mehr vorhanden.

An die Stelle des Teilverhältnisses als Invariante tritt bei der Zentralkollineation das *Doppelverhältnis* von vier kollinearen Punkten. Das wird an einem linearen Ausschnitt aus der Zentralkollineation gezeigt (Abb. 3.54), wobei zunächst nur

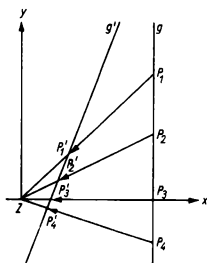


Abb. 3.54

eigentliche Original- und Bildpunkte betrachtet werden sollen.  $g$  sei eine Originalgerade,  $g'$  die zugehörige Bildgerade. Ist  $g$  parallel zu  $g'$ , so besteht auf Grund des Strahlensatzes sogar Teilverhältnisinvarianz. Dieser Fall wird daher im folgenden als trivial ausgeschlossen.

Die Trägergeraden aller Abbildungspfeile verlaufen durch das Zentrum  $Z$ . Es sei  $Z$  der Nullpunkt eines kartesischen Koordinatensystems, dessen Achsen so gewählt werden, daß  $g$  die Parallele zur  $y$ -Achse mit der Gleichung  $x = 1$  und  $g'$  eine beliebige von  $g$  verschiedene Gerade mit der Gleichung  $ax + by + c = 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $c \neq 0$ , ist. In dieser Wahl des Koordinatensystems liegt keine Einschränkung der Allgemeinheit. Alle Geraden durch  $Z$  mit der Gleichung  $y = mx$ ,  $-\infty < m < \infty$ , schneiden aus  $g$  und  $g'$  jeweils ein zugeordnetes Punktepaar aus,  $m$  ist dabei Parameter. Der Originalpunkt  $P$  hat die Koordinaten  $(1, m)$ , der Bildpunkt  $P'$  die Koordinaten  $\left(\frac{-c}{a+bm}, \frac{-cm}{a+bm}\right)$ , wobei zunächst noch  $a+bm \neq 0$  vorauszusetzen ist. Um nachzuweisen, daß das Doppelverhältnis eine Invariante der Zentralkollineation ist, werden vier Originalpunkte  $P_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) auf  $g$  und ihre vier Bildpunkte  $P'_i$  auf  $g'$  betrachtet, und es ist zu zeigen, daß

$$DV(P_1, P_2; P_3, P_4) = DV(P'_1, P'_2; P'_3, P'_4)$$

gilt.  $m_i$  seien die zu den Punkten  $P_i$  und  $P'_i$  gehörenden Parameterwerte. Dann ist

$$DV(P_1, P_2; P_3, P_4) = DV(m_1, m_2; m_3, m_4),$$

da das Doppelverhältnis der Originalpunkte gleich dem Doppelverhältnis ihrer Ordinaten ist. Das Doppelverhältnis der Bildpunkte kann gleich dem Doppelverhältnis ihrer Abszissen gesetzt werden. (Die dabei benutzte Parallelprojektion läßt sogar die Teilverhältnisse und daher erst recht die Doppelverhältnisse invariant.) Also gilt

$$\begin{aligned} DV(P'_1, P'_2; P'_3, P'_4) &= DV(x'_1, x'_2; x'_3, x'_4) = \frac{x'_3 - x'_1}{x'_3 - x'_2} : \frac{x'_4 - x'_1}{x'_4 - x'_2} \\ &= \frac{\frac{-c}{a + bm_3} + \frac{c}{a + bm_1}}{\frac{-c}{a + bm_3} + \frac{c}{a + bm_2}} : \frac{\frac{-c}{a + bm_4} + \frac{c}{a + bm_1}}{\frac{-c}{a + bm_4} + \frac{c}{a + bm_2}} \\ &= \frac{m_3 - m_1}{m_3 - m_2} : \frac{m_4 - m_1}{m_4 - m_2} = DV(m_1, m_2; m_3, m_4), \end{aligned}$$

und damit ist

$$DV(P_1, P_2; P_3, P_4) = DV(P'_1, P'_2; P'_3, P'_4).$$

Es gilt also

**Satz 1.** *Bei der Zentralkollineation bleibt das Doppelverhältnis von vier kollinearen eigentlichen Punkten invariant.*

Auszunehmen sind zunächst noch der uneigentliche Punkt auf  $g$ , dessen Bild der Fluchtpunkt auf  $g'$  ist, im vorliegenden Fall der Schnittpunkt von  $g'$  mit der  $y$ -Achse, sowie der Verschwindungspunkt auf  $g$ , der die Koordinaten  $(1, -a/b)$  hat. Das ist erforderlich, weil an dieser Stelle die uneigentlichen Punkte noch nicht koordinatenmäßig erfaßt werden können, was offenbar für eine koordinatengeometrische Behandlung der Zentralkollineation notwendig ist. Ein Weg hierzu werde im folgenden kurz angedeutet (vgl. auch 2.5.2.):

Der projektiven Ebene liege nach wie vor ein kartesisches Koordinatensystem zugrunde, und es sei  $P(X, Y)$  ein beliebiger Punkt der Ebene. Man führt nun eine reelle Zahl  $t \neq 0$  ein, indem man

$$X = \frac{x}{t} \quad \text{und} \quad Y = \frac{y}{t} \tag{1}$$

setzt, man ordnet also dem Punkt  $P$  drei Koordinaten  $x, y$  und  $t$  zu, wobei es allerdings nur auf deren Verhältnis ankommt. Man nennt diese Zahlen  $x, y$  und  $t$  *homogene Koordinaten* des Punktes  $P$  und schreibt dafür auch  $x : y : t$ .

Derselbe Punkt  $P$  läßt sich auch durch  $kx : ky : kt$ ,  $k$  reell,  $k \neq 0$ , beschreiben. Variiert  $t$  bei festem  $x$  und  $y$ , so erhält man für  $t \neq 0$  alle eigentlichen Punkte der durch den Nullpunkt und  $P$  bestimmten Geraden. Dem uneigentlichen Punkt dieser Geraden wird dann  $t = 0$  als einzige noch zur Verfügung stehende reelle Zahl zugeordnet, so daß er die Koordinaten  $x : y : 0$  erhält.

Die Gleichung einer Geraden  $aX + bY + c = 0$  lautet wegen der Gleichungen (1) nach dem Übergang zu homogenen Koordinaten  $ax + by + ct = 0$ .

Ihr uneigentlicher Punkt hat die Koordinaten  $-b : a : 0$ . Variiert man  $c$ , so erhält man eine Parallelgeradenschar, deren Geraden alle denselben uneigentlichen Punkt  $-b : a : 0$  besitzen, was der Definition des uneigentlichen Punktes entspricht.

Nach wie vor ist  $x = 0$  die Gleichung der  $y$ -Achse, deren Punkte durch  $0 : y : t$  bestimmt sind. Für  $t \neq 0$  erhält man eigentliche Punkte, für  $y \neq 0$  und  $t = 0$  den uneigentlichen Punkt der  $y$ -Achse. Analoges gilt für die  $x$ -Achse. Ihre Gleichung ist  $y = 0$ , ihre Punkte werden durch  $x : 0 : t$  bestimmt.

Die Gleichung  $t = 0$  charakterisiert alle uneigentlichen Punkte, sie ist daher die Gleichung der uneigentlichen Geraden, ihre Punkte sind durch  $x : y : 0$  gegeben. Der Ursprung des Koordinatensystems wird durch  $0 : 0 : 1$  charakterisiert. Zu beachten ist, daß für homogene Koordinaten stets  $x^2 + y^2 + t^2 > 0$  gelten muß, d. h., mindestens eine der drei Koordinaten muß von Null verschieden sein.

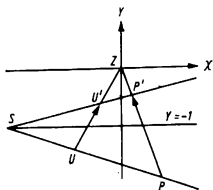


Abb. 3.55

Mit Hilfe der homogenen Koordinaten kann man die uneigentlichen Punkte gleichberechtigt neben den eigentlichen in analytischen Rechnungen verwenden. So kann man zeigen, daß der Satz 1 allgemein für eigentliche und uneigentliche Punkte gilt, daß das Doppelverhältnis von vier kollinearen Punkten ohne Einschränkung eine Invariante der Zentralkollineation ist. Das gilt auch dann, wenn Original- und Bildgerade zusammenfallen, also eine Fixgerade vorliegt.

Im folgenden soll nun die Zentralkollineation analytisch behandelt werden, und zwar zunächst unter Benutzung von inhomogenen Koordinaten, d. h., die uneigentlichen Punkte werden vorläufig nicht mit erfaßt.

Zu diesem Zweck wird das Zentrum  $Z$  in den Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems mit einer  $X$ - und einer  $Y$ -Achse gelegt. Die Achse der Zentralkollineation erhalte die Gleichung  $Y = -1$ , worin keine Einschränkung der Allgemeinheit liegt (Abb. 3.55). Zur vollständigen Bestimmung der Zentralkollineation ist noch die Angabe eines Originalpunktes und des zugehörigen Bildpunktes erforderlich, die mit dem Zentrum kollinear sein müssen. Der Originalpunkt  $P$  habe die Koordinaten  $(p, q)$ , sein Bildpunkt  $P'$  die Koordinaten  $(kp, kq)$ .

Die Punkte  $P$  und  $P'$  müssen beide vom Zentrum verschieden sein, also muß  $p^2 + q^2 > 0$ ,  $k \neq 0$  gelten.  $P$  und  $P'$  müssen voneinander verschieden sein, das wird durch  $k \neq 1$  gewährleistet. Ferner dürfen weder  $P$  noch  $P'$  auf der Achse liegen, daher muß  $q \neq -1$  und  $kq \neq -1$  gelten. Jetzt wird der beliebig gewählte Punkt  $U$  mit den Koordinaten  $(u, v)$  abgebildet.  $U$  darf ebenfalls nicht auf der Achse liegen oder mit dem Zentrum zusammenfallen und soll außerdem zunächst nicht auf der durch  $P$  und  $P'$  bestimmten Geraden liegen. Die Koordinaten  $(u', v')$  seines Bildpunktes  $U'$  werden nun berechnet. Sie stellen Funktionen der Koordinaten  $u$  und  $v$  dar und führen auf die gesuchten Abbildungsgleichungen.

Die Gerade  $g(PU)$  schneide die Achse im Punkt  $S$ . (Der Fall des uneigentlichen Schnittpunktes werde zunächst ausgeschlossen.) Die Koordinaten von  $S$  können berechnet werden, und man erhält

$$S = \left( \frac{-(1+q)u + pv + p}{v - q}, -1 \right).$$

Die Gleichung der durch  $U$  und  $Z$  bestimmten Geraden lautet

$$vX - uY = 0. \quad (2)$$

Diese Gerade ist mit  $g(SP')$  zu schneiden, die die Gleichung

$$(1+kq)(v-q)X + [-(1+q)u + (1-k)pv + p(1+kq)]Y = k(1+q)(pv - qu) \quad (3)$$

besitzt. Man hat also, um die Koordinaten  $(u', v')$  von  $U'$  zu erhalten, das durch die Gleichungen (2) und (3) gegebene lineare Gleichungssystem nach  $X$  und  $Y$  aufzulösen, und man erhält

$$X = u' = \frac{k(1+q)u}{(1-k)v + (1+kq)}, \quad Y = v' = \frac{k(1+q)v}{(1-k)v + (1+kq)}. \quad (4)$$

Nach Voraussetzung sind die Koeffizienten von  $u$  und  $v$  sowie das Freiglied  $1 + kq$  von Null verschieden.

Die Gleichungen (4) sind damit die gesuchten Abbildungsgleichungen. Die zunächst ausgeschlossenen Fälle, daß  $S$  uneigentlich wird oder  $U$  auf  $g(ZP)$  liegt, ordnen sich mit in die Gleichungen (4) ein, was leicht nachzuprüfen ist.  $U$  kann daher in der ganzen Ebene variieren,  $U'$  ändert sich mit  $U$ . Aus diesem Grund werden jetzt für die Koordinaten von  $U$  und  $U'$  die laufenden Koordinaten  $(X, Y)$  bzw.  $(X', Y')$  eingeführt. Außerdem wird aus Gründen der Übersichtlichkeit  $k(1+q) = A$  und  $(1-k) = B$  gesetzt. Dann ist  $1 + kq = A + B$ . Die Gleichungen (4) lauten dann

$$X' = \frac{AX}{BY + A + B}, \quad Y' = \frac{AY}{BY + A + B}. \quad (5)$$

Durch sie werden die in der Definition der Zentralkollineation geforderten Eigenschaften realisiert: Das Zentrum  $Z$  mit den Koordinaten  $(0, 0)$  wird auf sich abge-

bildet, die Gerade mit der Gleichung  $Y = -1$  bleibt punktweise fest, und die Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ X & Y & 1 \\ \frac{AX}{BY+A+B} & \frac{AY}{BY+A+B} & 1 \end{vmatrix}$$

verschwindet, was gleichbedeutend damit ist, daß jeder Originalpunkt mit seinem Bildpunkt auf einer Geraden durch das Zentrum liegt. Es muß zunächst noch  $BY + A + B \neq 0$  vorausgesetzt werden. Alle Punkte auf der Geraden mit der Gleichung  $BY + A + B = 0$  besitzen kein Bild, es handelt sich um die Verschwindungsgerade, die in Übereinstimmung mit den synthetisch erhaltenen Ergebnissen zur Achse parallel ist.

Löst man die Gleichungen (5) nach  $X$  und  $Y$  auf, so erhält man die Gleichungen der zur gegebenen Zentralkollineation inversen Abbildung

$$X = \frac{(A+B) X'}{-BY' + A}, \quad Y = \frac{(A+B) Y'}{-BY' + A}. \quad (6)$$

Da dabei Zentrum und Achse erhalten bleiben, handelt es sich wieder um eine Zentralkollineation, und  $-BY' + A = 0$  ist die Gleichung der Fluchtgeraden der Zentralkollineation, ebenfalls zur Achse parallel in Übereinstimmung mit den synthetischen Überlegungen. Um die uneigentlichen Elemente mit in die Betrachtungen aufnehmen zu können, werden jetzt homogene Koordinaten eingeführt. Man setzt  $X = x/t$ ,  $Y = y/t$ ,  $X' = x'/t'$  und  $Y' = y'/t'$  und erhält aus den Gleichungen (5)

$$\frac{x'}{t'} = \frac{Ax}{By + (A+B)t}, \quad \frac{y'}{t'} = \frac{Ay}{By + (A+B)t}. \quad (7)$$

Führt man einen Proportionalitätsfaktor  $r \neq 0$  ein, so kann man die Gleichungen (7) in der Form

$$\left. \begin{aligned} rx' &= Ax, \\ ry' &= Ay, \\ rt' &= By + (A+B)t \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

schreiben. Die Gleichungen der inversen Abbildungen lauten nach Einführung von homogenen Koordinaten in die Gleichungen (6) mit dem Proportionalitätsfaktor  $s \neq 0$

$$\left. \begin{aligned} sx &= (A+B)x', \\ sy &= (A+B)y', \\ st &= -By' + At'. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Jetzt erkennt man, daß die uneigentliche Gerade mit der Gleichung  $t = 0$  sowohl als Original- als auch als Bildgerade in die Abbildung einbezogen wird. Ist sie Originalgerade, gilt also  $t = 0$ , so erhält man aus (9) die Gleichung der Fluchtgeraden  $-By' + At' = 0$ . Ist dagegen  $t' = 0$ , so erhält man aus (8) die Gleichung der Verschwindungsgeraden  $By + (A + B)t = 0$ .

### 3.5.2. Ausblick auf Kollineationen

Setzt man nun die Zentralkollineation mit den Gleichungen (7) bzw. (8) mit affinen Abbildungen mit den Gleichungen (2) von 3.4. zusammen, so erhält man

$$\frac{x'}{t'} = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}t}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}t}, \quad \frac{y'}{t'} = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}t}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}t} \quad (10)$$

bzw.

$$\left. \begin{aligned} rx' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}t, \\ ry' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}t, \\ rt' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}t, \end{aligned} \right\} r \neq 0. \quad (11)$$

Die Gleichungen (10) bzw. (11) stellen Abbildungen dar, die allgemeiner als die Zentralkollineationen sind. Es sind dies die sogenannten *Kollineationen*. Ist die Koeffizientendeterminante  $\det(a_{ik})$  von Null verschieden, so ist die Abbildung regulär. In diesem Fall liegt eine eindeutig umkehrbare Abbildung der projektiven Ebene auf sich, eine projektive Transformation, vor. Ist die Determinante gleich Null, so ist die Abbildung singulär.

In analogem Vorgehen wie bei den Affinitäten kann gezeigt werden, daß bei regulären Kollineationen Geraden auf Geraden abgebildet werden und daß die Doppelverhältnisse von vier kollinearen Punkten invariant bleiben. Die uneigentliche Gerade nimmt keine Sonderstellung ein.

Es ist leicht nachzuweisen, daß die Menge aller regulären Kollineationen der Ebene auf sich mit den Gleichungen (11) eine Gruppe bildet, die als Untergruppe die Gruppe der ebenen affinen Transformationen enthält. In diesem Fall gilt  $a_{31} = a_{32} = 0$ , was, abgesehen von einem Proportionalitätsfaktor,  $t = t'$  zur Folge hat. Das heißt, daß die uneigentliche Gerade Fixgerade ist. Die affinen Transformationen können daher auch als diejenigen Kollineationen der Ebene auf sich aufgefaßt werden, bei denen die uneigentliche Gerade Fixgerade ist. Bereits die Zentralkollineationen enthalten spezielle affine Transformationen: Wird das Zentrum  $Z$  uneigentlich, dann verlaufen die Trägergeraden aller Abbildungspfeile parallel, und es liegt eine axiale Affinität vor. Wird dagegen die Achse uneigentliche Gerade, so liegt eine Zentralstreckung vor, und sind schließlich Zentrum und Achse gleichzeitig uneigentliche Elemente, so handelt es sich um eine Verschiebung.

An dieser Stelle sollen die Darlegungen über projektive Transformationen abgebrochen werden. Auf eine ausführliche Behandlung der durch die Gleichungen

(11) dargestellten Transformationen analog dem Vorgehen bei den affinen Transformationen wird hier verzichtet. Dieses Kapitel sollte lediglich in die Zentralkollineationen als vor allem für die Darstellende Geometrie bedeutsame Abbildungen einführen, einen ersten Einblick in die Geometrie der projektiven Ebene vermitteln und dabei die uneigentlichen Punkte und die uneigentliche Gerade synthetisch und analytisch vorstellen.

### 3.5.3. Aufgaben

1. Es ist zu untersuchen, wieviel uneigentliche Punkte Ellipse, Hyperbel und Parabel besitzen. Zu diesem Zweck sind diese Kegelschnitte der Reihe nach mit der uneigentlichen Geraden zu schneiden.
2. Es ist zu zeigen: Bildet man einen Kreis durch eine Zentralkollineation ab, so erhält man eine Kurve zweiter Ordnung. Schneidet der Kreis die Verschwindungsgerade, so erhält man eine Hyperbel, berührt er sie, eine Parabel, meidet er sie, eine Ellipse.
3. Von einer Zentralkollineation sind die Achse, ein zugeordnetes Punktepaar  $(A, A')$  sowie
  - a) die Verschwindungsgerade,
  - b) die Fluchtgerade
 gegeben. In beiden Fällen ist das Zentrum zu konstruieren.
4. Gegeben sind zwei Zentralkollineationen mit gemeinsamem Zentrum, aber verschiedenen Achsen. Es ist zu beweisen, daß die Hintereinanderausführung beider Transformationen wieder eine Zentralkollineation ergibt. Danach ist zu zeigen, daß die Menge aller Zentralkollineationen mit gemeinsamem Zentrum eine Gruppe bildet.

## 3.6. Spiegelungen an Kreisen

Abschließend soll eine Abbildung der Ebene auf sich eingeführt werden, die *Spiegelung am Kreis* oder *Inversion* genannt wird. Diese Abbildung wird wie folgt definiert: Gegeben ist ein fester Kreis  $k_i$  mit dem Radius  $r$  und dem Mittelpunkt  $M$ , der auch *Inversionskreis* genannt wird. Zu einem beliebigen Originalpunkt  $P \neq M$  findet man den Bildpunkt  $P'$  auf folgende Weise:  $P'$  liege auf dem Strahl  $MP$ , und es gelte

$$|MP| \cdot |MP'| = r^2. \quad (1)$$

Die Punkte  $P$  und  $P'$  heißen dann zueinander *invers* bezüglich des Kreises  $k_i$ , und aus Gleichung (1) folgt, daß es sich bei der Inversion um eine involutorische Abbildung handelt. Weiterhin kann aus Gleichung (1) über die Lage von  $P'$  folgende Aussage gemacht werden: Liegt  $P$  innerhalb  $k_i$ , ist also  $|MP| < r$ , so muß  $|MP'| > r$  gelten und daher  $P'$  außerhalb  $k_i$  liegen. Liegt dagegen  $P$  außer-



halb  $k_i$ , so muß  $P'$  innerhalb  $k_i$  liegen. Ist schließlich  $P$  ein Punkt von  $k_i$ , gilt also  $|MP| = r$ , so ist auch  $|MP'| = r$ , und  $P$  und  $P'$  fallen zusammen, d. h., es liegt in diesem Fall ein Fixpunkt der Abbildung vor. Damit gilt

**Satz 1.** *Eine Inversion hat als Fixpunkte genau die Punkte des Inversionskreises.*

Gegeben seien der Inversionskreis  $k_i$  und ein Punkt  $P$ , der zunächst als innerer Punkt von  $k_i$  angenommen werde. Zur Konstruktion von  $P'$  errichte man in  $P$  auf  $MP$  die Senkrechte, die den Kreis im Punkt  $T$  schneidet (Abb. 3.56). Die

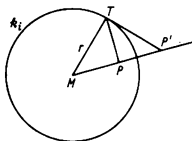


Abb. 3.56

Tangente in  $T$  an  $k_i$  schneidet dann den Strahl  $MP^+$  im gesuchten Punkt  $P'$ . Wendet man den Kathetensatz auf das rechtwinklige Dreieck  $MP'T$  an, so erhält man die Gleichung (1) und hat damit die Richtigkeit der Konstruktion bestätigt. Liegt  $P$  außerhalb  $k_i$ , so zieht man von  $P$  eine Tangente an  $k_i$  und erhält  $P'$  als Fußpunkt des Lotes vom Berührungspunkt  $T$  auf den Strahl  $MP^+$ . Es gilt dann ebenfalls Gleichung (1).

Dem Punkt  $M$  kann auf diese Weise kein Bildpunkt zugeordnet werden, er wird zunächst durch die Definition und damit auch durch die Konstruktion nicht erfaßt. Um diese Ausnahme zu beseitigen, nimmt man zur euklidischen Ebene einen uneigentlichen Punkt  $P_\infty$  hinzu, den man als das Bild von  $M$  erklärt. Die durch diesen uneigentlichen Punkt erweiterte euklidische Ebene heißt *inversionsgeometrische Ebene*. Sie besitzt im Gegensatz zur projektiven Ebene nur ein uneigentliches Element. Dem uneigentlichen Punkt der inversionsgeometrischen Ebene wird als Bild der Mittelpunkt  $M$  des Inversionskreises zugeordnet, und damit wird auch in diesem Spezialfall der involutorische Charakter der Abbildung gewahrt.

Im folgenden soll untersucht werden, wie Geraden und Kreise abgebildet werden. Aus der Definition der Inversion ergibt sich

**Satz 2.** *Jede Gerade durch das Inversionszentrum wird auf sich abgebildet, ist also Fixgerade.*

Für die Abbildung von Geraden, die nicht durch das Inversionszentrum verlaufen, gilt

**Satz 3.** Jede Gerade, die nicht durch das Inversionszentrum  $M$  verläuft, wird auf einen Kreis durch  $M$  abgebildet.

Zum Beweis werde eine beliebige Gerade  $g$ , auf der  $M$  nicht liegt, betrachtet (Abb. 3.57). Von  $M$  wird das Lot auf  $g$  gefällt, und der Lotfußpunkt  $A$  wird am Inversionskreis  $k_i$  gespiegelt. Sein Bildpunkt sei  $A'$ . Der auf  $g$  beliebig ange-

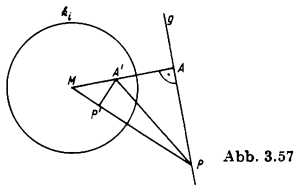


Abb. 3.57

nommene Punkt  $P$  ( $P \neq A$ ) wird durch die Inversion auf den Punkt  $P'$  abgebildet. Dann gilt entsprechend der Gleichung (1)

$$|MA| \cdot |MA'| = |MP| \cdot |MP'| = r^2.$$

Nach der Umkehrung des Sekantensatzes liegen  $A, A', P$  und  $P'$  auf einem Kreis. Da  $\angle PAA' = 90^\circ$  gilt, ist  $A'P$  nach der Umkehrung des Satzes von THALES Durchmesser dieses Kreises, und es gilt deshalb  $\angle PP'A' = \angle A'P'M = 90^\circ$ .

Der Punkt  $P'$  liegt daher ebenfalls nach der Umkehrung des Satzes von THALES auf dem Kreis mit dem Durchmesser  $MA'$ . Durchläuft  $P$  die Gerade  $g$ , so erhält man für  $P'$  alle Punkte dieses Kreises, und damit ist der Satz bewiesen.

Da es sich bei der Inversion um eine involutorische Transformation handelt, gilt auch umgekehrt: Jeder Kreis durch das Inversionszentrum wird auf eine Gerade abgebildet. Das Inversionszentrum  $M$  geht dabei in den uneigentlichen Punkt der inversionsgeometrischen Ebene über, den man sich in diesem Zusammenhang als gemeinsamen Punkt aller Geraden der inversionsgeometrischen Ebene vorzustellen hat.

Zur Konstruktion des Bildkreises von  $g$  reicht die Kenntnis von zwei Bildpunkten  $A'$  und  $P'$  aus, da man als notwendigen dritten Punkt den Mittelpunkt  $M$  des Inversionskreises benutzen kann. Schneidet  $g$  den Inversionskreis  $k_i$  in den beiden Punkten  $S$  und  $T$ , so ist nach Satz 1 der Bildkreis  $g'$  bereits durch  $M, S$  und  $T$  bestimmt.

Es werde noch auf eine Folgerung aus Satz 3 hingewiesen: Die Tangente  $t$  in  $M$  an den Kreis  $g'$  ist zur Geraden  $g$  parallel. Hätten nämlich  $t$  und  $g$  einen gemeinsamen Schnittpunkt  $S$ , so läge das Bild  $S'$  von  $S$  nach Satz 2 auf  $t$ , nach Satz 3 auch auf  $g'$ , d. h., die Gerade  $t$  und der Kreis  $g'$  hätten außer  $M$  noch einen weiteren Punkt  $S'$  gemeinsam, und dann wäre  $t$  entgegen der Voraussetzung nicht Tangente an  $g'$ .

Als nächstes sollen Kreise durch Inversion abgebildet werden, und zwar zunächst ein Kreis, der durch zwei zueinander inverse Punkte verläuft. Für diesen Spezialfall gilt

**Satz 4.** *Jeder Kreis  $k$  durch zwei bezüglich des Inversionskreises  $k_i$  zueinander inverse Punkte wird auf sich selbst abgebildet.*

Zum Beweis dieses Satzes werde Abb. 3.58 betrachtet, in der  $P$  und  $P'$  die beiden bezüglich des Kreises  $k_i$  zueinander inversen Punkte sind. Durch  $P$  und

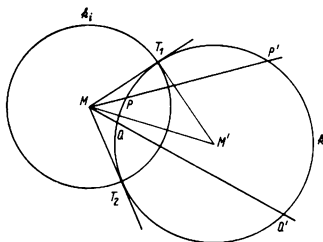


Abb. 3.58

$P'$  werde ein beliebiger Kreis  $k$  gezogen.  $Q$  sei ein von  $P$  und  $P'$  verschiedener Punkt auf ihm,  $Q'$  der zweite Schnittpunkt von  $k$  mit dem Strahl  $MQ^+$ . Dann gilt nach dem Sekantensatz

$$|MP| \cdot |MP'| = |MQ| \cdot |MQ'|,$$

und nach Gleichung (1) ist  $|MP| \cdot |MP'| = r^2$ . Also ist auch

$$|MQ| \cdot |MQ'| = r^2,$$

und  $Q$  und  $Q'$  sind daher bezüglich  $k_i$  zueinander invers.

Da  $Q$  beliebig auf  $k$  angenommen werden kann, ist damit gezeigt, daß  $k_i$  durch Inversion in sich übergeführt wird. Als Folgerung aus Satz 4 kann festgestellt werden, daß alle Kreise durch  $P$  und  $P'$  bei der Inversion in Ruhe bleiben.

Eine weitere Eigenschaft dieser Kreise beinhaltet

**Satz 5.** *Jeder Kreis  $k$  durch zwei bezüglich des Inversionskreises  $k_i$  zueinander inverse Punkte  $P$  und  $P'$  schneidet  $k_i$  rechtwinklig.*

Als Schnittwinkel zweier Kreise ist dabei der Schnittwinkel zwischen den im Schnittpunkt an beide Kreise gezogenen Tangenten zu verstehen.

Zum Beweis des Satzes werden von  $M$  aus die Tangenten an  $k$  gezogen.  $T_1$  und  $T_2$  seien die Berührungspunkte (Abb. 3.58). Da sowohl beide Tangenten als Geraden durch das Inversionszentrum als auch der Kreis  $k$  auf sich abgebildet werden, müssen  $T_1$  und  $T_2$  Fixpunkte sein, d. h., die Berührungspunkte liegen

auf dem Inversionskreis  $k_i$ , und die Strecken  $MT_1$  und  $MT_2$  sind Radien des Inversionskreises. Die Tangenten in  $T_1$  bzw.  $T_2$  an  $k_i$  stehen daher auf den entsprechenden Tangenten an  $k$  senkrecht, und die beiden Kreise schneiden sich rechtwinklig.

Jetzt soll ein Kreis  $k$  in beliebiger Lage zum Inversionskreis  $k_i$  abgebildet werden. Es gilt

**Satz 6.** *Das inversionsgeometrische Bild jedes Kreises  $k$ , der nicht durch den Mittelpunkt  $M$  des Inversionskreises  $k_i$  verläuft, ist wieder ein Kreis.*

Der Kreis  $k$  mit dem Mittelpunkt  $N$  soll am Inversionskreis  $k_i$  gespiegelt werden (Abb. 3.59). Die Gerade  $g(MN)$  schneide  $k$  in den Punkten  $A$  und  $B$ . Die

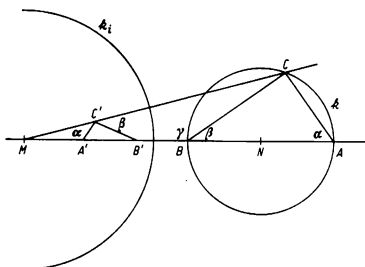


Abb. 3.59

Punkte  $A'$  und  $B'$  seien ihre durch Inversionen an  $k_i$  entstandenen Bilder.  $C$  sei ein weiterer von  $A$  und  $B$  verschiedener Punkt auf  $k$ ,  $C'$  sein Bild. Dann gilt

$$|MA| \cdot |MA'| = |MC| \cdot |MC'| = |MB| \cdot |MB'| = r^2.$$

Hieraus folgt

$$\frac{|MA|}{|MC|} = \frac{|MC'|}{|MA'|} \quad \text{und} \quad \frac{|MB|}{|MC|} = \frac{|MC'|}{|MB'|}.$$

Damit ist nach Satz 8 von 3.3. das Dreieck  $MAC$  dem Dreieck  $MC'A'$  und das Dreieck  $MBC$  dem Dreieck  $MC'B'$  ähnlich, wenn man noch beachtet, daß  $\sphericalangle CMA$  in jedem der vier Dreiecke enthalten ist. Hieraus folgt für die Größen von Innenwinkeln der genannten Dreiecke

$$|\sphericalangle MAC| = |\sphericalangle MC'A'| = \alpha, \quad |\sphericalangle MBC| = |\sphericalangle MC'B'| = \gamma,$$

und hieraus ergibt sich  $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle B'C'C| = \beta$ .

Da  $\alpha + \beta = 90^\circ$  ist, gilt  $\sphericalangle A'C'B' = 90^\circ$ , und damit liegt  $C'$  nach Umkehrung des Satzes von THALES auf dem Kreis  $k'$  mit  $A'B'$  als Durchmesser. Variiert  $C$  auf  $k$ , so durchläuft  $C'$  den Kreis  $k'$ , und damit ist der Satz bewiesen.

**Satz 7.** *Die Inversion ist winkeltreu.*

In diesem Satz wird ausgesagt, daß der Schnittwinkel zweier Originalkreise kongruent dem Schnittwinkel der entsprechenden Bildkreise nach Abbildung durch eine Inversion ist. Zum Beweis werden die beiden Kreise  $k$  und  $l$  betrachtet, die sich in den Punkten  $S$  und  $T$  schneiden mögen (Abb. 3.60). Die Tangenten  $a$  und  $b$  in  $S$  an  $k$  und  $l$  schließen dann den Schnittwinkel  $\delta$  der beiden Kreise ein. Die beiden Tangenten werden jetzt durch Inversion am Kreis  $k_i$  abgebildet. Ihre Bilder  $a'$  und  $b'$  sind nach Satz 3 zwei Kreise, die sich außer im Inversionszentrum  $M$  noch in  $S'$ , dem Bild des Punktes  $S$ , schneiden. Diese Kreise besitzen in  $M$  Tangenten, die nach der Folgerung aus Satz 3 zu  $a$  und  $b$  parallel sind, d. h., also einen zu  $\delta$  kongruenten Schnittwinkel bilden. Die Tangenten in  $S'$  an  $a'$  und  $b'$  haben ebenfalls einen hierzu kongruenten Schnittwinkel. Jetzt wird  $k$  auf

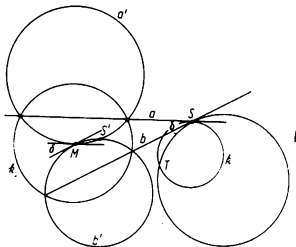


Abb. 3.60

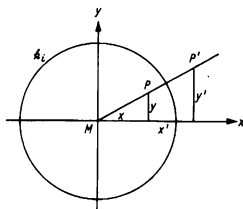


Abb. 3.61

den Kreis  $k'$  abgebildet. Da  $k$  und  $a$  den Punkt  $S$  als einzigen Punkt gemeinsam haben, besitzen ihre Bilder  $k'$  und  $a'$  als einzigen gemeinsamen Punkt das Bild  $S'$  von  $S$ , d. h., sie berühren sich in  $S'$ , haben dort also eine gemeinsame Tangente. Analoges gilt auch für die Bilder  $l'$  und  $b'$  des Kreises  $l$  und seiner Tangente  $b$ . Damit sind die Tangenten in  $S'$  an  $a'$  und  $b'$  auch gleichzeitig Tangenten an  $k'$  und  $l'$ . Wie bereits gezeigt, ist ihr Schnittwinkel zu  $\delta$  kongruent, und damit ist bewiesen, daß die Bildkreise  $k'$  und  $l'$  ebenfalls einen zu  $\delta$  kongruenten Schnittwinkel haben, die Inversion also eine winkeltreue Abbildung ist.

Damit sind wesentliche Eigenschaften der Spiegelung am Kreis synthetisch behandelt worden. Im folgenden sollen nun die Abbildungsgleichungen der Inversion hergeleitet werden.

Zu diesem Zweck werde  $M$  als Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems angenommen (Abb. 3.61). Der Inversionskreis  $k_i$  besitzt dann die Gleichung  $x^2 + y^2 = r^2$ . Der Originalpunkt  $P$  habe die Koordinaten  $(x, y)$ , der Bildpunkt  $P'$

die Koordinaten  $(x', y')$ . Dann gilt

$$x' = tx, \quad y' = ty, \quad t > 0, \quad (2)$$

wobei der Faktor  $t$  noch zu bestimmen ist.

Aus Gleichung (1) folgt  $|MP|^2 \cdot |MP'|^2 = r^4$  und hieraus

$$(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) = r^4.$$

Unter Verwendung der Gleichungen (2) erhält man  $t^2(x^2 + y^2)^2 = r^4$  und schließlich

$$t = \frac{r^2}{x^2 + y^2}.$$

Damit ist  $t$  bestimmt, und aus (2) ergeben sich die gesuchten Abbildungsgleichungen

$$x' = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Alle Eigenschaften der Inversion, die bisher synthetisch hergeleitet worden sind, können nun mit Hilfe dieser Gleichungen erneut und ohne Schwierigkeiten bewiesen werden, worauf hier verzichtet werden soll.

Vergleicht man die Inversion mit den vorher behandelten Transformationen, so stellt man fest, daß sie keine geradentreue Transformation ist. Faßt man die Geraden als Kreise mit unendlich großem Radius auf, so gilt ohne Ausnahme, daß Kreise auf Kreise abgebildet werden. Die Spiegelung am Kreis steht in enger Beziehung zur Orthogonalspiegelung an einer Geraden, die als Inversion an einem Kreis mit unendlich großem Radius aufgefaßt werden kann.

Auf die Zusammensetzung von Inversionen und gruppentheoretische Überlegungen soll hier verzichtet werden. Auch auf die vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten der Inversion wird hier nicht näher eingegangen. Es werde lediglich darauf hingewiesen, daß sie z. B. zur Lösung des *Berührungsproblems des Apollonius* benutzt werden kann, worauf im folgenden Kapitel näher eingegangen wird.

### 3.6.1. Aufgaben

1. Die Sätze 1 bis 4 sowie 6 sind analytisch zu beweisen.
2. Die Menge aller konzentrischen Kreise mit einem beliebigen Mittelpunkt ist durch Inversion am Einheitskreis abzubilden. Sind die Bildkreise wieder konzentrisch?
3. Durch einen Punkt  $P$  außerhalb eines Kreises  $k$  sind Kreise zu konstruieren, die  $k$  orthogonal schneiden. Wo liegen ihre Mittelpunkte?

## 4. Theorie der geometrischen Konstruktionen

### 4.1. Einleitung und historische Bemerkungen

Geometrische Konstruktionen waren und sind nicht nur ein beliebter Gegenstand des Geometrieunterrichts der Schule; sie haben auch in der Entwicklung der Mathematik eine nicht unbedeutende Rolle gespielt. Interessante Konstruktionsprobleme sind uns bereits aus dem Altertum bekannt. Eines davon ist das Berührungsproblem des APOLLONIUS (262 ?—190 ? v. u. Z.), bei dem zu drei gegebenen Kreisen ein vierter Kreis zu suchen ist, der die drei gegebenen Kreise berührt. Weitere klassische Konstruktionsprobleme sind die Dreiteilung des Winkels, die Verdoppelung des Würfels und die Quadratur des Kreises. Es ist möglich, mit Zirkel und Lineal jeden Kreis zu konstruieren, der drei gegebene Kreise berührt, falls überhaupt solche Kreise existieren. (Wenn wir von „Konstruktionen mit Zirkel und Lineal“ sprechen, meinen wir Konstruktionen, bei denen außer Zirkel und Lineal keine weiteren Konstruktionsinstrumente erforderlich sind; nähere Erläuterungen über die Verwendung der Konstruktionsinstrumente werden später gegeben.) Über zwei Jahrtausende lang haben sich Mathematiker vergeblich bemüht, die Dreiteilung des Winkels, die Verdoppelung des Würfels und die Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal durchzuführen, bis schließlich am Ende des 18. Jahrhunderts in der Mathematik eine neue Fragestellung in den Vordergrund rückte, nämlich die Fragestellung: „Wie kann man beweisen, daß gewisse Aufgaben unlösbar sind?“. Ende des 18. Jahrhunderts konnte bewiesen werden, daß die Dreiteilung des Winkels und die Verdoppelung des Würfels mit Zirkel und Lineal unmöglich sind; der Beweis für die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal gelang erst 1882 durch den Nachweis der Transzendenz der Zahl  $\pi$  durch F. LINDEMANN (1852—1939). Zu den interessanten Konstruktionsaufgaben gehört auch die Konstruktion regelmäßiger  $n$ -Ecke. Bis zum Ende des 18. Jahrhunderts waren für die regelmäßigen  $p$ -Ecke mit  $p$  als

Primzahl Konstruktionen mit Zirkel und Lineal nur für  $p = 3$  und  $p = 5$  bekannt; eine entsprechende Konstruktion des regelmäßigen 7-Ecks war trotz großer Bemühungen nicht gelungen. Im Jahre 1796 gelang dem knapp 19jährigen C. F. GAUSS (1777–1855) der Nachweis, daß für Primzahlen  $p$  das regelmäßige  $p$ -Eck mit Zirkel und Lineal dann und nur dann konstruiert werden kann, wenn  $p$  eine Fermatsche Primzahl ist, d. h. eine Primzahl der Form  $2^{2^k} + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ; bis heute sind nur fünf Fermatsche Primzahlen bekannt, nämlich 3, 5, 17, 257 und 65537. GAUSS konnte auch alle natürlichen Zahlen  $n$  charakterisieren, für die die Konstruktion des regelmäßigen  $n$ -Ecks mit Zirkel und Lineal möglich ist. Geometrische Konstruktionsaufgaben führten also am Ende des 18. Jahrhunderts mit zu den ersten Unmöglichkeitbeweisen in der Mathematik.

Es ist möglich, Theorien geometrischer Konstruktionen für Konstruktionsinstrumente der verschiedensten Art zu entwickeln. Häufig verwendete Konstruktionsinstrumente sind z. B. Zirkel, Lineal (ohne Maßeinheiten), Zeichendreieck oder die Zeichenmaschine als Vereinigung mehrerer einfacherer Instrumente (das Lineal mit Maßeinheiten und der Winkelmesser sind Meßinstrumente, die in der Konstruktionspraxis zwar eine Rolle spielen können, die aber nicht in die folgenden Betrachtungen einbezogen werden sollen); seltener verwendete Konstruktionsinstrumente sind z. B. das Parallellineal, das Winkellineal, das Einschiebelineal (vgl. 4.5.) oder Geräte zum Konstruieren gewisser Punkte und Kurven; und schließlich sei auch noch auf Instrumente verwiesen, mit deren Hilfe Konstruktionen auf einer Kugelfläche oder in einer nichteuklidischen Ebene durchgeführt werden können. Forschungen der neueren Zeit befassen sich mit zugehörigen Theorien. Für theoretische Untersuchungen geometrischer Konstruktionen ist es notwendig, genau zu erklären, in welcher Weise die Konstruktionsinstrumente zu verwenden sind. Wir werden im Rahmen dieses Buches eine Theorie der geometrischen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal in der euklidischen Ebene entwickeln. In einem abschließenden Abschnitt werden wir über geometrische Konstruktionen mit einigen anderen Konstruktionsinstrumenten berichten. Für weiterführende Studien zur Theorie geometrischer Konstruktionen verweisen wir auf die Literatur am Ende dieses Bandes.

Das Zeichendreieck ist ein Konstruktionsinstrument, welches in Verbindung mit Zirkel und Lineal gewisse Konstruktionen, die auch mit Zirkel und Lineal allein ausgeführt werden können, vereinfacht, welches aber keine prinzipiell neuen Konstruktionen gestattet. Dies rechtfertigt unser Vorgehen, von den gebräuchlichsten Konstruktionsinstrumenten das Zeichendreieck bei unseren Betrachtungen auszuschließen. Eine ähnliche Situation findet sich bei axiomatisch aufgebauten Theorien. Wird zu einem System unabhängiger Axiome ein aus diesen Axiomen beweisbarer Satz als weiteres Axiom hinzugenommen, so vereinfachen sich die Beweise gewisser Sätze, aber es kann kein Satz bewiesen werden, der nicht auch schon mit den ursprünglich gegebenen Axiomen bewiesen werden konnte.



Die Theorie der geometrischen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal ist ein mathematisches Gebiet, in dem geometrisches und algebraisches Denken fast gleichermaßen erforderlich sind und sich gegenseitig beeinflussen. Wir werden in unseren Ausführungen besonders diesen Aspekt der Theorie der geometrischen Konstruktionen betonen. Bei der Behandlung geometrischer Konstruktionsaufgaben wollen wir unser Augenmerk besonders auf Überlegungen richten, die zu Aussagen über die Existenz und die Menge aller Lösungen einer gegebenen Aufgabe führen; damit lassen sich auch für die mathematische Gesamtausbildung wertvolle Beziehungen zu anderen mathematischen Gebieten, wie etwa zur Lösungstheorie bei Gleichungen und Gleichungssystemen, aufzeigen; auch auf Konstruktionsaufgaben, für die zwar Lösungen existieren, die aber prinzipiell nicht mit vorgegebenen Konstruktionsinstrumenten gefunden werden können, werden wir eingehen. Ein besonderes Anliegen ist es uns auch, bei der Durchführung geometrischer Konstruktionen in 4.2. das Augenmerk auf gewisse Ablaufpläne für die Konstruktionen zu richten und diese Ablaufpläne als Algorithmen mit Elementen der Flußbildtechnik zu behandeln. Darauf sollte auch in der Schule neben der Betonung gewissenhafter, sauber ausgeführter Konstruktionen Wert gelegt werden.

In jeder Theorie geometrischer Konstruktionen wäre auch die Frage nach den unvermeidlichen Abweichungen praktisch durchgeführter Konstruktionen gegenüber den ideal gedachten Konstruktionen von gewissem Interesse; denn kein gezeichneter Punkt ist ein idealer Punkt, und keine gezeichnete Linie ist eine ideale Linie. Schranken für solche unvermeidlichen Abweichungen sind von den verwendeten Konstruktionsinstrumenten und vom Ausführenden der Konstruktion abhängig; jede Verbesserung der Konstruktionsinstrumente und jedes Bemühen des Ausführenden der Konstruktion um größere Genauigkeit führen zu immer besseren Annäherungen an eine ideal gedachte Konstruktion, ohne diese jemals zu erreichen. Auf solche und verwandte Fragen kann jedoch im Rahmen unserer Ausführungen nicht weiter eingegangen werden.

Wir wollen nun erklären, in welcher Weise Zirkel und Lineal in einer gegebenen euklidischen Ebene zu verwenden sind. In der gegebenen Ebene wollen wir noch zwei voneinander verschiedene Punkte  $O$  und  $E$  als gegeben voraussetzen (ohne diese beiden Punkte könnte keine Konstruktion beginnen); der Strecke  $OE$  wird die Längenmaßzahl 1 zugeordnet; die Strecke  $OE$  spielt also die Rolle einer Einheitsstrecke.

*Mit dem Lineal soll es möglich sein, die Gerade durch zwei gegebene, voneinander verschiedene Punkte anzugeben (in der Praxis wird es sich dabei stets nur um eine endlich lange gerade Linie als Teil der gesamten Geraden handeln); andere Funktionen, wie etwa das Vergleichen von Längen, hat das Lineal nicht zu erfüllen.*

*Mit dem Zirkel soll es möglich sein, den Kreis um einen gegebenen Punkt durch einen anderen gegebenen Punkt anzugeben; andere Funktionen hat der Zirkel nicht zu erfüllen.*

Durch den Gebrauch von Zirkel und Lineal in der angegebenen Weise ist es möglich, die folgenden Konstruktionsschritte auszuführen:

- a) Konstruktion der Geraden durch zwei gegebene, voneinander verschiedene Punkte;
- b) Konstruktion des Schnittpunktes zweier nichtparalleler Geraden, von denen eine durch zwei voneinander verschiedene Punkte gegeben ist;
- c) Konstruktion des Kreises um einen gegebenen Punkt durch einen anderen gegebenen Punkt;
- d) Konstruktion der zwei Schnittpunkte eines gegebenen Kreises und einer den Kreis schneidenden Geraden, welche durch zwei voneinander verschiedene Punkte gegeben ist, bzw. Konstruktion der zwei Schnittpunkte einer gegebenen Geraden und eines die Gerade schneidenden Kreises, welcher durch seinen Mittelpunkt und einen anderen Punkt gegeben ist;
- e) Konstruktion der zwei Schnittpunkte eines gegebenen Kreises und eines diesen Kreis schneidenden zweiten Kreises, welcher durch seinen Mittelpunkt und einen anderen Punkt gegeben ist.

In unseren Ausführungen zur Theorie der geometrischen Konstruktionen soll mit dem Wort „Kreis“ stets die Kreislinie gemeint sein. Die Existenz und die Eindeutigkeit der durch die Konstruktionsschritte a) bis e) konstruierten geometrischen Objekte (Punkte, Geraden, Kreise) sind auf Grund des Axiomensystems der euklidischen Geometrie der Ebene, welches wir im ersten Band der beiden Geometriebände behandelt haben, gewährleistet. Die Existenz und die Eindeutigkeit sind im Fall a) unmittelbar durch ein Axiom gesichert, und in den Fällen b) und c) können sie aus den behandelten Axiomen und Begriffsbildungen leicht gefolgert werden. In den Fällen d) und e) muß zur Begründung der Existenz und Eindeutigkeit wesentlich auf die sogenannten Stetigkeitsaxiome (Archimedisches Axiom und Vollständigkeitsaxiom) zurückgegriffen werden; es ist möglich, mit Hilfe des behandelten Axiomensystems die folgenden beiden Sätze zu beweisen (auf die Ausführung der Beweise wollen wir verzichten):

1. Enthält eine Gerade einen Punkt im Inneren eines Kreises, dann trifft sie den Kreis, und zwar in genau zwei Punkten.
2. Enthält ein Kreis einen inneren und einen äußeren Punkt eines zweiten Kreises, dann schneiden sich die beiden Kreise, und zwar in genau zwei Punkten.

**Definition 1.** Jede Folge von endlich vielen Konstruktionsschritten der Arten a) bis e) heißt eine *Konstruktion mit Zirkel und Lineal*. (Wir werden, wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, auch kurz von einer Konstruktion sprechen.)

Von der Behandlung der Konstruktionen mit Zirkel und Lineal in der Schule sind die folgenden einfachen Konstruktionsaufgaben bekannt:

1. Eine gegebene Strecke  $AB$  ist zu halbieren. Diese Aufgabe ist gleichbedeutend mit der Aufgabe, den Mittelpunkt der Strecke  $AB$  zu konstruieren.
2. Ein gegebener Winkel  $\sphericalangle(s, t; P^+)$  ist zu halbieren. Diese Aufgabe ist gleichbedeutend mit der Aufgabe, die Winkelhalbierende des Winkels  $\sphericalangle(s, t; P^+)$  zu konstruieren. (In den Betrachtungen dieses Abschnittes wollen wir die Winkelhalbierenden nicht als Geraden, sondern als Strahlen definieren.)
3. In einem gegebenen Punkt  $P$  einer gegebenen Geraden  $g$  ist die Senkrechte zu errichten. (Unter einer Senkrechten im Sinne dieser Aufgabenstellung wollen wir eine Gerade verstehen.)
4. Von einem gegebenen Punkt  $P$  ist auf eine nicht durch  $P$  gehende Gerade  $g$  das Lot zu fällen. (Unter einem Lot im Sinne dieser Aufgabenstellung wollen wir nicht einen Strahl, auch nicht eine Strecke, sondern ebenfalls eine Gerade verstehen.)
5. Zu einer gegebenen Geraden  $g$  ist durch einen nicht auf  $g$  gelegenen Punkt  $P$  die Parallele zu konstruieren.
6. Auf einem gegebenen Strahl ist vom Anfangspunkt aus die Strecke, welche gleiche Länge wie eine gegebene Strecke besitzt, abzutragen.
7. An einem gegebenen Strahl ist vom Anfangspunkt aus nach einer angegebenen Seite der Elementarwinkel, welcher gleiche Größe wie ein gegebener Elementarwinkel besitzt, anzutragen.

Die Existenz und die Eindeutigkeit der nach den Aufgaben 1 bis 7 zu konstruierenden geometrischen Objekte sind auf Grund des Satzes vom Mittelpunkt, des Satzes von der Winkelhalbierenden, des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für Lote, des Parallelenaxioms, des Streckenabtragungssatzes und des Winkelabtragungssatzes gewährleistet (vgl. die entsprechenden Sätze in MfL Band 6). Daß die von der Schule bekannten Konstruktionen tatsächlich zur Lösung der genannten einfachen Konstruktionsaufgaben führen, kann mit Hilfe weiterer bewiesener Sätze der Geometrie begründet werden; im Fall der Aufgabe 1 sind dafür z. B. gewisse Kongruenzsätze für Dreiecke in Verbindung mit dem Satz über gleichschenklige Dreiecke geeignet.

Es bereitet keine Schwierigkeiten, Folgen von endlich vielen Konstruktions-schritten der Arten a) bis e) anzugeben, die zur Lösung der gestellten Aufgaben führen. An dieser Stelle muß bemerkt werden, daß beim Konstruieren häufig mit sogenannten „beliebigen“ Elementen gearbeitet wird, z. B. mit einem „beliebigen“ Punkt auf einer gegebenen Geraden, mit einer „beliebigen“ Geraden durch einen gegebenen Punkt, mit einem „beliebigen“ Kreis um einen gegebenen Punkt. Derartige „beliebige“ Elemente sind für die Arbeitsökonomie zweckmäßig, aber für unsere theoretischen Untersuchungen sind sie störend. Sie können vermieden werden, wenn an die Stelle der Konstruktion eines derartigen „belie-

bigen“ Elements ein oder mehrere Konstruktionsschritte der Arten a) bis e) gesetzt werden. Bei den Konstruktionen in 4.2. wollen wir die Konstruktion „beliebiger“ Elemente zulassen; bei der algebraischen Behandlung geometrischer Konstruktionsaufgaben in 4.3. und 4.4. sollen sie aber ausgeschlossen werden.

**Aufgabe 1.** Man überlege sich zu den oben erwähnten Konstruktionsaufgaben 1 bis 7 Konstruktionen, in denen keine „beliebigen“ Elemente, sondern nur Konstruktionsschritte der Arten a) bis e) vorkommen.

Es ist zu empfehlen, von den Schülern im Geometrieunterricht der Schule die Konstruktionen zu den Aufgaben 1 bis 7 mit allen Konstruktionsschritten der Arten a) bis e) — eventuell auch mit Verwendung sogenannter „beliebiger“ Elemente — einmal beschreiben zu lassen, dann aber beim Beschreiben anderer Konstruktionen, bei denen Teilkonstruktionen entsprechend der Aufgabenstellungen 1 bis 7 auftreten, diese als Teilkonstruktionen kurz zu nennen, ohne sie weiter in Konstruktionsschritte der Arten a) bis e) zu zerlegen. Von dieser Stelle an möchten wir dann auch den Gebrauch des Zeichendreiecks als Konstruktionsinstrument neben Zirkel und Lineal bei den geometrischen Konstruktionen in der Schule empfehlen. Wir haben zwar das Zeichendreieck aus unseren theoretischen Betrachtungen ausgeschlossen, wir wollen aber darauf verweisen, daß die Funktionen des Zeichendreiecks über die Konstruktionsaufgaben 3, 4 und 5 durch die Funktionen des Zirkels und des Lineals ersetzt werden können.

Als Konstruktionsaufgaben in der Theorie der geometrischen Konstruktionen betrachten wir Aufgaben, aus endlich vielen Strecken gegebener Maßzahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$  endlich viele Strecken der Maßzahlen  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}_+^*$  zu konstruieren, wobei sich jedes  $x_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) entsprechend der Aufgabenstellung in einer vorgeschriebenen Abhängigkeit von den  $a_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) befindet. Jede solche Konstruktionsaufgabe kann in Teilaufgaben zerlegt werden, so daß in jeder Teilaufgabe nur eine Strecke der Maßzahl  $x \in \mathbb{R}_+^*$  zu bestimmen ist.

Diese Betrachtungsweise geometrischer Konstruktionsaufgaben erweist sich für theoretische Untersuchungen als zweckmäßig, sie ist jedoch für den Geometrieunterricht der Schule nicht zu empfehlen. Alle in der Schule üblichen Aufgaben zu den Konstruktionen mit Zirkel und Lineal können in dieser Weise umformuliert werden; jeden gegebenen Winkel einer gegebenen Größe  $\alpha$  denken wir uns dabei mittelbar durch eine Strecke gegeben, etwa durch eine Strecke der Maßzahl  $\sin \alpha$ ; auch die in Konstruktionsaufgaben gesuchten Winkel werden mittelbar durch Strecken angegeben. In den von uns betrachteten Konstruktionsaufgaben sind entartete Strecken der Maßzahl 0 ausgeschlossen. Falls bei Konstruktionsaufgaben derartige entartete Strecken auftreten können, wird auf diesen Sachverhalt besonders hingewiesen.

**Aufgabe 2.** Man überlege sich, wie durch eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal aus einer Strecke der Maßzahl  $\sin \alpha$  ein Winkel der Größe  $\alpha$  und wie aus einem Winkel der Größe  $\alpha$  eine Strecke der Maßzahl  $\sin \alpha$  gefunden werden kann.

**Definition 2.** Jedes System von Strecken der Maßzahlen  $x_1, \dots, x_m$ , welches aus den Strecken der Maßzahlen  $a_1, \dots, a_n$  entsprechend einer gegebenen Konstruktionsaufgabe konstruiert werden kann, heißt eine *Lösung* dieser Konstruktionsaufgabe.

**Definition 3.** Eine Konstruktionsaufgabe heißt genau dann *gelöst*, wenn die Menge aller Lösungen (auch *Lösungsmenge* oder *Lösungsgesamtheit* genannt) konstruiert ist.

**Definition 4.** Eine Konstruktionsaufgabe heißt genau dann *mit Zirkel und Lineal lösbar*, wenn eine Lösung mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann.

Mit den eingeführten Begriffsbildungen können wir von Konstruktionsaufgaben sprechen, die nicht mit Zirkel und Lineal lösbar sind, für die aber dennoch Lösungen existieren; solche Lösungen könnten z. B. durch eine Folge von unendlich vielen Konstruktionsschritten der Arten a) bis e) mit Zirkel und Lineal oder durch Verwendung anderer Konstruktionsinstrumente gefunden werden.

**Definition 5.** Eine mit Zirkel und Lineal lösbare Konstruktionsaufgabe heißt genau dann *mit Zirkel und Lineal gelöst*, wenn alle mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Lösungen konstruiert sind.

## 4.2. Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Im vorliegenden Abschnitt werden nur Konstruktionen mit Zirkel und Lineal behandelt; auch alle formulierten Konstruktionsaufgaben sind mit Zirkel und Lineal lösbar. Deshalb wollen wir in diesem Abschnitt bei allen Konstruktionen und bei allen Konstruktionsaufgaben den Zusatz „mit Zirkel und Lineal“ weglassen. Bei den Formulierungen für Konstruktionsaufgaben werden wir neben Strecken auch andere geometrische Objekte (z. B. Dreiecke,  $n$ -Ecke, Winkel, Systeme von Kreisen usw.) verwenden. Diese geometrischen Objekte können aber stets entsprechend unserer Auffassung von Konstruktionsaufgaben als Systeme von endlich vielen Strecken, die gegebenenfalls noch durch Kreise oder Kreisbögen zu ergänzen sind, angesehen werden.

### 4.2.1. Konstruktion von Strecken der Maßzahlen $a + b$ , $a - b$ , $n \cdot a$ , $a/n$ , $a \cdot b$ , $a/b$ , $\sqrt{a}$ aus Strecken der Maßzahlen 1, $a$ , $b$

Wir denken uns außer der Einheitsstrecke  $OE$  noch eine Strecke der Maßzahl  $a$  und eine Strecke der Maßzahl  $b$  gegeben. Zur Lösung aller Konstruktionsaufgaben dieses Abschnittes tragen wir auf dem Strahl  $OE^+$  vom Anfangspunkt  $O$  aus die

Strecke der Maßzahl  $a$  ab; der Anfangspunkt dieser Strecke möge mit  $A_0 (= O)$  und der Endpunkt möge mit  $A_1$  bezeichnet werden. Wir lösen nun die folgenden Konstruktionsaufgaben.

1. Zu konstruieren ist eine Strecke der Maßzahl  $a + b$ .

Wir tragen auf dem Strahl  $A_1 A_0^-$  vom Anfangspunkt  $A_1$  aus die Strecke der Maßzahl  $b$  ab; der Anfangspunkt möge mit  $B_0 (= A_1)$  und der Endpunkt möge mit  $B_1$  bezeichnet werden. Die Strecke  $A_0 B_1$  ist eine Strecke der Maßzahl  $a + b$ .

2. Zu konstruieren ist eine Strecke der Maßzahl  $a - b$ . Bei dieser Aufgabe wird  $a > b$  vorausgesetzt.

Wir tragen auf dem Strahl  $A_1 A_0^+$  vom Anfangspunkt  $A_1$  aus die Strecke der Maßzahl  $b$  ab; der Anfangspunkt möge mit  $B_0 (= A_1)$  und der Endpunkt möge mit  $B_1$  bezeichnet werden. Die Strecke  $A_0 B_1$  ist eine Strecke der Maßzahl  $a - b$ .

3. Zu konstruieren ist eine Strecke der Maßzahl  $n \cdot a$ . Bei dieser Aufgabe wird  $n$  als natürliche Zahl  $> 1$  vorausgesetzt (im Fall  $n = 1$  müßte die folgende Beschreibung der Konstruktion etwas modifiziert werden, und außerdem läge in diesem Fall gar keine echte Konstruktionsaufgabe vor).

Wir tragen auf dem Strahl  $A_1 A_0^-$  vom Anfangspunkt  $A_1$  aus die Strecke der Maßzahl  $a$  ab; der Endpunkt dieser Strecke möge mit  $A_2$  bezeichnet werden. Ist  $n > 2$ , so werden in entsprechender Weise weitere Strecken der Maßzahl  $a$  abgetragen, und zwar noch  $(n - 2)$ -mal. Allgemein können wir formulieren: Nach  $(n - 1)$ -maligem Abtragen einer Strecke der Maßzahl  $a$  auf dem Strahl  $OE^+$  von  $O$  aus erhalten wir den Punkt  $A_{n-1}$ ; auf dem Strahl  $A_{n-1} A_0^-$  tragen wir von  $A_{n-1}$  aus nochmals die Strecke der Maßzahl  $a$  ab; der Endpunkt dieser Strecke möge mit  $A_n$  bezeichnet werden. Die Strecke  $A_0 A_n$  ist eine Strecke der Maßzahl  $n \cdot a$ .

4. Zu konstruieren ist eine Strecke der Maßzahl  $a/n$ . Bei dieser Aufgabe wird  $n$  als natürliche Zahl  $> 1$  vorausgesetzt (man vergleiche die Bemerkung über  $n$  zur vorangegangenen Aufgabe).

Im Punkt  $O$  der Geraden durch  $O$  und  $E$  errichten wir die Senkrechte, und auf einem der beiden von  $O$  ausgehenden Strahlen dieser Senkrechten wird von  $O$  aus eine Strecke der Maßzahl  $1$  und auf demselben Strahl ebenfalls von  $O$  aus eine Strecke der Maßzahl  $n \cdot 1$  (man vergleiche die vorangegangene Konstruktionsaufgabe) abgetragen; der Endpunkt der Strecke der Maßzahl  $1$  möge mit  $E_1$  und der Endpunkt der Strecke der Maßzahl  $n \cdot 1$  möge mit  $E_n$  bezeichnet werden. Wir konstruieren nun zur Geraden durch  $E_n$  und  $A_1$  die Parallele durch  $E_1$ , und diese Parallele schneidet die Strecke  $A_0 A_1$  in einem inneren Punkt  $P$ . Die Strecke  $A_0 P$  ist eine Strecke der Maßzahl  $a/n$ ; denn wenn wir die Maßzahl dieser Strecke zunächst mit  $x$  bezeichnen, gilt nach dem Strahlensatz  $x : 1 = a : n$ , d. h., es ist  $x = a/n$ . (Mit dem soeben beschriebenen Konstruktionsverfahren kann auch die Streckenhalbierung durchgeführt werden.)

5. Zu konstruieren ist eine Strecke der Maßzahl  $a \cdot b$ . Bei dieser Aufgabe wird  $a \neq 1$  vorausgesetzt (im Fall  $a = 1$  müßte die Beschreibung der Konstruktion etwas modifiziert werden, und außerdem ergäbe der Fall  $a = 1$ , genauso wie der Fall  $b = 1$ , keine echte Konstruktionsaufgabe).

Im Punkt  $O$  der Geraden durch  $O$  und  $E$  errichten wir die Senkrechte, und auf einem der beiden von  $O$  ausgehenden Strahlen dieser Senkrechten wird von  $O$  aus die Strecke der Maßzahl  $b$  abgetragen; der Endpunkt dieser Strecke möge mit  $B_1$  bezeichnet werden. Wir konstruieren nun zur Geraden durch  $B_1$  und  $E$  die Parallele durch  $A_1$ , und diese Parallele schneidet den Strahl  $OB_1^+$  in einem Punkt  $P \neq O$ . Die Strecke  $OP$  ist eine Strecke der Maßzahl  $a \cdot b$ ; denn wenn wir die Maßzahl dieser Strecke zunächst mit  $x$  bezeichnen, gilt nach dem Strahlensatz  $x : a = b : 1$ , d. h., es ist  $x = a \cdot b$ . (In dieser Konstruktionsaufgabe sind die Aufgaben 3 und 4 als Sonderfälle enthalten.)

6. Zu konstruieren ist eine Strecke der Maßzahl  $a/b$ . Bei dieser Aufgabe wird  $b \neq 1$  vorausgesetzt (man vergleiche die Bemerkung über  $a$  zur vorangegangenen Aufgabe).

Im Punkt  $O$  der Geraden durch  $O$  und  $E$  errichten wir die Senkrechte, und auf einem der beiden von  $O$  ausgehenden Strahlen dieser Senkrechten wird von  $O$  aus die Strecke der Maßzahl 1 und ebenfalls von  $O$  aus die Strecke der Maßzahl  $b$  abgetragen; der Endpunkt der Strecke der Maßzahl 1 möge mit  $E_1$  und der Endpunkt der Strecke der Maßzahl  $b$  möge mit  $B_1$  bezeichnet werden. Wir konstruieren nun zur Geraden durch  $B_1$  und  $A_1$  die Parallele durch  $E_1$ , und diese Parallele schneidet den Strahl  $OA_1^+$  in einem Punkt  $P \neq O$ . Die Strecke  $OP$  ist eine Strecke der Maßzahl  $a/b$ ; denn wenn wir die Maßzahl dieser Strecke zunächst mit  $x$  bezeichnen, gilt nach dem Strahlensatz  $x : 1 = a : b$ , d. h., es ist  $x = a/b$ .

7. Zu konstruieren ist eine Strecke der Maßzahl  $\sqrt{a}$ .

Auf dem Strahl  $OE^-$  wird von  $O$  aus die Strecke der Maßzahl 1 abgetragen; der Endpunkt dieser Strecke möge mit  $E_1$  bezeichnet werden. Wir halbieren die Strecke  $E_1A_1$  und konstruieren um den Mittelpunkt dieser Strecke den Kreis  $k$  durch  $E_1$ . Nun errichten wir im Punkt  $O$  der Geraden durch  $O$  und  $E$  die Senkrechte; wir wählen einen der beiden von  $O$  ausgehenden Strahlen dieser Senkrechten, und dieser schneidet  $k$  in einem Punkt  $P$ . Die Strecke  $OP$  ist eine Strecke der Maßzahl  $\sqrt{a}$ ; denn wenn wir die Maßzahl dieser Strecke zunächst mit  $x$  bezeichnen, gilt in dem rechtwinkligen Dreieck  $E_1A_1P$  (dieses Dreieck ist rechtwinklig nach dem Satz des THALES) die Beziehung  $x^2 = 1 \cdot a$ , d. h., es ist  $x = \sqrt{a}$ . (Der beschriebene Weg zur Lösung der vorliegenden Konstruktionsaufgabe beruht auf dem Höhensatz.)

**Aufgabe 1.** Man löse die vorliegende Konstruktionsaufgabe unter Verwendung des Kathetensatzes und danach unter Verwendung des Sekanten-Tangentensatzes!

In den seoben behandelten Konstruktionsaufgaben ging es jeweils um die Konstruktion einer Strecke, deren Maßzahl  $x$  sich aus den Maßzahlen gegebener

Strecken durch endlich viele rationale Operationen (Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen, Divisionen) bzw. durch eine Quadratwurzeloperation errechnen läßt. Daß solche Strecken existieren und jeweils bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt sind, kann aus den Axiomen der euklidischen Geometrie der Ebene gefolgert werden. Wir wollen jede Konstruktion entsprechend der Konstruktionsaufgaben 1 bis 6 *rationale Konstruktion* nennen; jede Konstruktion entsprechend der Konstruktionsaufgabe 7 wollen wir *Quadratwurzelkonstruktion* nennen. Aus der Lösbarkeit der Konstruktionsaufgaben 1 bis 7 kann unmittelbar der nachstehende Satz gefolgert werden.

**Satz 1.** *Ist  $x$  eine nichtnegative reelle Zahl, die sich durch endlich viele rationale Operationen und endlich viele Quadratwurzeloperationen aus den Maßzahlen endlich vieler gegebener Strecken errechnen läßt, so kann aus den gegebenen Strecken durch eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal eine Strecke der Maßzahl  $x$  konstruiert werden.*

Nach diesem Satz ist die Darstellbarkeit der Zahl  $x$  durch endlich viele rationale Operationen und endlich viele Quadratwurzeloperationen aus den Maßzahlen endlich vieler gegebener Strecken ein hinreichendes Kriterium für die Konstruierbarkeit einer Strecke der Maßzahl  $x$  aus den endlich vielen gegebenen Strecken mit Zirkel und Lineal; wir werden später zeigen, daß dieses Kriterium auch notwendig ist.

**Aufgabe 2.** Aus einer Einheitsstrecke ist eine Strecke der Maßzahl  $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$  zu konstruieren. (Wird eine Einheitsstrecke so in zwei Teile geteilt, daß die Maßzahl der größeren Teilstrecke gleich  $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$  ist, so ist die größere Teilstrecke mittlere Proportionale zwischen der Gesamtstrecke und der kleineren Teilstrecke, d. h., es gilt

$$1 : (\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}) : (1 - (\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2})).$$

Derartige Streckenteilungen werden „stetige“ Teilungen oder Teilungen nach dem „Goldenen Schnitt“ genannt; der Goldene Schnitt spielt in der Kunst und in der Ästhetik eine bedeutende Rolle.)

#### 4.2.2. Über die Behandlung von Konstruktionsaufgaben

Zur Behandlung von Konstruktionsaufgaben gibt es zahlreiche Empfehlungen. So wird z. B. in der Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band IV (Geometrie), unter der Überschrift „Ein allgemeines Lösungsschema für Konstruktionsaufgaben“ empfohlen, in der Regel die Behandlung von Konstruktionsaufgaben in die Teile „Analysis“, „Konstruktion“, „Beweis“, „Diskussion“ zu zerlegen; in früherer Literatur (vgl. etwa P. CRANTZ und M. HAUPTMANN, Planimetrie, Teubner, Leipzig 1953, S. 51) wird die Behandlung von Konstruktionsaufgaben häufig nach dem Schema: „Analysis“, „Konstruktion (mit Konstruktionsbeschreibung)“, „Behauptung“, „Beweis“, „Determination“ behandelt. Welches Schema für die Be-



handlung einer Konstruktionsaufgabe gewählt wird und wie die einzelnen Teile genannt werden, spielt eine untergeordnete Rolle; wichtig sind eine mathematisch einwandfreie Behandlung der Aufgabe und im Fall der Lösbarkeit eine übersichtliche Darstellung des Lösungsweges bis zur Angabe der Menge aller Lösungen entsprechend der Aufgabenstellung.

Wir empfehlen bei der Behandlung der Konstruktionsaufgaben eine Zweiteilung der Arbeit entsprechend der beiden Arbeitsteile beim Lösen von Bestimmungsgleichungen. Beim Lösen von Bestimmungsgleichungen kennen wir als ersten Teil die sogenannte „Auflösung“ (mit dem Schluß: „Wenn  $x$  Lösung ist, dann ist  $x = \dots$ “) und als zweiten Teil die sogenannte „Probe“ (mit dem Schluß: „Wenn  $x = \dots$ , dann ist  $x$  Lösung“); die Bezeichnung „Probe“ sollte jedoch vermieden werden, weil sie die logische Bedeutung dieses zweiten Teiles verschleiert. Auf Grund der weitgehenden Übereinstimmung zwischen Bestimmungsgleichung und Konstruktionsaufgaben bezüglich ihrer logischen Struktur zerlegen wir die Behandlung jeder Konstruktionsaufgabe ebenfalls in zwei Teile. Zum I. Teil zählen wir das Aufsuchen eines Lösungsweges, die Angabe eines Konstruktionsplanes und die Durchführung der Konstruktion; die Behandlung soll so erfolgen, daß der Schluß gewährleistet ist: „Wenn ein geometrisches Objekt  $X$  Lösung ist, dann ist  $X$  nach dem Konstruktionsplan konstruierbar“. Zum II. Teil zählen wir die Angabe aller Lösungen mit allen notwendigen Beweisführungen; die Behandlung soll so erfolgen, daß der Schluß gewährleistet ist: „Wenn ein geometrisches Objekt  $X$  nach dem Konstruktionsplan konstruierbar ist, dann ist  $X$  Lösung“.

#### 4.2.3. Der I. Teil der Behandlung jeder Konstruktionsaufgabe

Wir beginnen die Behandlung jeder Konstruktionsaufgabe mit der Annahme, wir hätten die Aufgabe bereits gelöst. Jede Lösung müßte dann aus einem endlichen System gegebener Strecken entsprechend der Aufgabenstellung durch eine Aneinanderreihung von endlich vielen Konstruktionsschritten der Arten a) bis e) (vgl. 4.1.) konstruiert werden können. Es kommt nun darauf an, für jede Lösung einen Lösungsweg, d. h. eine Aneinanderreihung endlich vieler Konstruktionsschritte, die auch zu gewissen Schrittkombinationen zusammengefaßt sein können, zu finden, um dann einen Konstruktionsplan zur Durchführung der Konstruktion angeben zu können; beim Aufschreiben eines Konstruktionsplanes muß also bereits ein Lösungsweg bekannt sein. Mitunter ist ein Lösungsweg unmittelbar zu erkennen; andernfalls empfiehlt es sich, zunächst eine Überlegungsfigur (auch Planfigur, Überlegungsskizze oder Analysisfigur genannt) anzufertigen; eine Überlegungsfigur ist eine skizzenhafte Darstellung einer oder mehrerer Lösungen aus der Menge aller Lösungen in Verbindung mit den gegebenen Strecken der Aufgabenstellung (jede Überlegungsfigur soll möglichst frei sein von störenden Spezialisierungen). Gelegentlich werden zur Überlegungsfigur noch gewisse algebraische

Beziehungen zwischen den Maßzahlen der gegebenen Strecken und den Maßzahlen der gesuchten Strecken hinzugenommen, um das Auffinden eines Lösungsweges zu erleichtern.

Ergibt sich nach der Annahme, wir hätten eine Konstruktionsaufgabe bereits gelöst, durch richtige Schlüsse ein offensichtlicher Widerspruch, dann ist die vorgegebene Aufgabe nicht lösbar; derartige Konstruktionsaufgaben werden in 4.4. behandelt.

Haben wir aber einen Lösungsweg erkannt (entweder unmittelbar oder mit Hilfe einer Überlegungsfigur bzw. mit Hilfe algebraischer Beziehungen), so folgt die Aufstellung eines Konstruktionsplanes, d. h. eines Ablaufplanes für die Durchführung der Konstruktion im Sinne eines Algorithmus, wobei symbolische Abkürzungen und Elemente von Flußdiagrammen Anwendung finden sollten. Auch in der Schule sollte auf das Aufstellen klarer und gut durchdachter Konstruktionspläne großer Wert gelegt werden; denn im Erwerb von Fähigkeiten und Fertigkeiten dieser Art sehen wir eines der Erziehungsziele des modernen Mathematikunterrichts.

Jeder Konstruktionsplan besteht aus endlich vielen, hintereinander angeordneten Arbeitsschritten, das sind Konstruktionsschritte der Arten a) bis e) (vgl. 4.1.) bzw. Kombinationen solcher Schritte (wie z. B. die Konstruktionen zu den Aufgaben 1 bis 7 in 4.1.); auch die Bezeichnung eines Schnittpunktes, der im Verlauf einer Konstruktion entstanden ist, werden wir als einen Arbeitsschritt ansehen. Die Konstruktion eines „beliebigen“ Punktes auf einer gegebenen Geraden, die Konstruktion einer „beliebigen“ Geraden durch einen gegebenen Punkt und die Konstruktion eines „beliebigen“ Kreises um einen gegebenen Punkt wollen wir ebenfalls als Arbeitsschritte eines Konstruktionsplanes zulassen, obwohl sie entsprechend den Ausführungen in 4.1. vermieden werden können. In Konstruktionsplänen werden wir häufig die Konstruktion eines Punktes (eines Hilfspunktes oder eines Punktes, der entsprechend der Aufgabenstellung zu konstruieren ist) als einen Arbeitsschritt ansehen. Zur genaueren Beschreibung eines solchen Arbeitsschrittes werden wir entweder zwei sich schneidende Geraden oder einen Kreis und eine schneidende Gerade oder zwei sich schneidende Kreise verwenden; im Fall eines Kreises und einer schneidenden Geraden und im Fall zweier sich schneidender Kreise müssen stets beide Schnittpunkte in die Betrachtungen einbezogen werden. Gegebenenfalls kann einer der beiden Schnittpunkte durch eine Zusatzbedingung wieder ausgeschlossen werden; andernfalls beginnt nach einem solchen Arbeitsschritt eine Verzweigung des Konstruktionsplanes. Gelegentlich werden wir statt einer Geraden einen Strahl oder eine Strecke auf dieser Geraden verwenden. Beispiele für Konstruktionspläne bringen wir zu den Konstruktionsaufgaben in 4.2.5.

Auf der Grundlage eines richtigen Konstruktionsplanes bereitet es keine Schwierigkeiten, jede Lösung einer gegebenen Konstruktionsaufgabe zu konstruieren. Trotz der erzieherischen Bedeutung der Ausführung der Konstruktion sind wir

nicht der Meinung, daß in der Schule beim Lösen jeder Konstruktionsaufgabe die Konstruktion auch tatsächlich auszuführen ist. Bei gewissen Konstruktionsaufgaben sollte allerdings auf eine sauber und gewissenhaft ausgeführte Konstruktion großer Wert gelegt werden; auch auf eine Konstruktionsbeschreibung auf der Grundlage des Konstruktionsplanes sollte gelegentlich wegen der Pflege der Sprache im Mathematikunterricht nicht verzichtet werden. Wir werden im folgenden bei der Behandlung von Konstruktionsaufgaben keine Konstruktionsbeschreibungen und auch keine Konstruktionen ausführen.

Als Kernstück des I. Teils jeder Konstruktionsaufgabe betrachten wir den Konstruktionsplan, mit dessen Hilfe es möglich sein muß, jede Lösung zu konstruieren. Damit ist der Schluß gewährleistet: „Wenn ein geometrisches Objekt Lösung einer gegebenen Konstruktionsaufgabe ist, dann ist es nach dem Konstruktionsplan konstruierbar“.

#### 4.2.4. Der II. Teil der Behandlung jeder Konstruktionsaufgabe

Im II. Teil der Behandlung jeder Konstruktionsaufgabe ist die Menge aller Lösungen (abgesehen von kongruenten Lösungen, eventuell auch abgesehen von ähnlichen oder anderen geometrisch verwandten Lösungen) anzugeben. Dazu gehört der Beweis, daß jedes geometrische Objekt, welches nach dem Konstruktionsplan konstruiert werden kann, Lösung der gegebenen Konstruktionsaufgabe ist. Damit ist dann der Schluß gewährleistet: „Wenn ein geometrisches Objekt  $X$  nach dem Konstruktionsplan konstruierbar ist, dann ist  $X$  Lösung“.

Es gibt Konstruktionsaufgaben für die ein Konstruktionsplan zu einem (bis auf Kongruenz) eindeutig bestimmten geometrischen Objekt führt, welches auf Grund bekannter geometrischer Sätze und Axiome unmittelbar als Lösung zu erkennen ist; auch bei mehreren geometrischen Objekten, auf die ein Konstruktionsplan führen kann, ist mitunter unmittelbar einzusehen, daß alle diese Objekte Lösungen der gestellten Konstruktionsaufgabe sind. Bei anderen Konstruktionsaufgaben erfordert die Behauptung, daß jedes nach dem Konstruktionsplan konstruierte geometrische Objekt tatsächlich Lösung ist, eine Beweisführung mit Hilfe bekannter Sätze, Axiome und Schlußweisen der Geometrie. Wir vertreten die Auffassung, daß geometrische Konstruktionsaufgaben sehr gut geeignet sind, in der Schule frühzeitig einfache geometrische Beweisführungen zu üben und Elemente des axiomatischen Denkens zu pflegen.

Neben Konstruktionsaufgaben, bei denen die gegebenen Objekte (Strecken oder auch andere geometrische Objekte) „spezielle“ Größen besitzen, gibt es Konstruktionsaufgaben, bei denen die Größen der gegebenen Objekte „allgemein“ oder „unbestimmt“ angegeben sind. Bei Konstruktionsaufgaben der erstgenannten Art ist der II. Teil der Behandlung der Konstruktionsaufgabe mit der Angabe aller Lösungen und den eventuell notwendigen Beweisführungen abgeschlos-

sen, und es erübrigen sich zusätzliche Untersuchungen über die Größen der gegebenen Objekte; das ist z. B. der Fall, wenn die Aufgabe lautet, aus einer gegebenen Einheitsstrecke ein regelmäßiges 6-Eck zu konstruieren, oder wenn die Aufgabe lautet, aus Strecken der Längen 3 cm, 4 cm, 6 cm ein Dreieck zu konstruieren, in dem eine Höhe 3 cm, eine andere Höhe 4 cm und die dritte Höhe 6 cm lang ist. Bei Konstruktionsaufgaben der zweitgenannten Art gehört zum II. Teil der Behandlung der Konstruktionsaufgabe eine zusätzliche Untersuchung über die Größen der gegebenen Objekte. Es kann vorkommen, daß nur beim Erfülltsein gewisser Bedingungen zwischen diesen Größen die Konstruktionsaufgabe lösbar ist; es kann auch vorkommen, daß beim Erfülltsein gewisser Bedingungen zwischen den Größen der gegebenen Objekte genau eine Lösung existiert und daß beim Erfülltsein anderer Bedingungen mehrere (eventuell auch unendlich viele) paarweise inkongruente Lösungen existieren. Die Angabe derartiger Bedingungen darf bei der Angabe der Lösungsmenge bei solchen Konstruktionsaufgaben nicht fehlen (häufig sind auf Grund derartiger Bedingungen auch bereits unterschiedliche Konstruktionspläne vorhanden). Konstruktionsaufgaben der zweitgenannten Art wollen wir an zwei Beispielen erläutern. Wenn die Aufgabe z. B. lautet, aus Strecken der Längen  $a$  cm,  $b$  cm und  $(\sin 60^\circ)$  cm alle paarweise inkongruenten Dreiecke  $ABC$  zu konstruieren, für die die Seiten  $BC$  bzw.  $CA$  eine Länge von  $a$  cm bzw.  $b$  cm haben und für die  $|\angle ABC| = 60^\circ$  ist, stellen wir fest:

für  $0 < b < a \cdot \sin 60^\circ$  existiert keine Lösung,

für  $b = a \cdot \sin 60^\circ$  existiert (bis auf Kongruenz) genau eine Lösung,

für  $a \cdot \sin 60^\circ < b < a$  existieren genau zwei inkongruente Lösungen,

– für  $b \geq a$  existiert (bis auf Kongruenz) genau eine Lösung.

Als zweites Beispiel betrachten wir die Aufgabe, aus Strecken der Maßzahlen  $a$ ,  $h_e$ ,  $\sin \beta$  ein Dreieck  $ABC$  zu konstruieren, in dem die Seite  $BC$  die Maßzahl  $a$ , die Höhe zur Seite  $AB$  die Maßzahl  $h_e$  und  $\angle ABC$  die Größe  $\beta$  besitzt. Offensichtlich existiert keine Lösung, falls  $h_e \neq a \cdot \sin \beta$  ist. Ist jedoch  $h_e = a \cdot \sin \beta$ , so existieren unendlich viele paarweise inkongruente Lösungen; laut Aufgabenstellung genügt es, ein einziges solches Dreieck zu konstruieren, und dafür kann ein beliebiges von den unendlich vielen ausgewählt werden.

#### 4.2.5. Einige Beispiele für Konstruktionsaufgaben

In den vorliegenden Ausführungen haben wir neben Strecken und Streckenlängen sehr oft die Maßzahl einer Strecke  $AB$  bezüglich der vorgegebenen Einheitsstrecke  $OE$  zu betrachten. Demzufolge wäre es gerechtfertigt, zu dem Symbol  $AB$  einer Strecke und dem Symbol  $|AB|$  der Streckenlänge noch ein Symbol für die Maßzahl der Strecke  $AB$  bezüglich der Einheitsstrecke  $OE$  einzuführen. Da wir bei den

algebraischen Betrachtungen geometrischer Sachverhalte nicht mit Streckenlängen, sondern mit Maßzahlen arbeiten, können wir die Einführungen eines neuen Symbols vermeiden, indem wir in den folgenden Ausführungen zur Theorie der geometrischen Konstruktionen mit  $|AB|$  die Maßzahl der Strecke  $AB$  bezüglich der Einheitsstrecke  $OE$  bezeichnen (vgl. 2.1.2.). Im folgenden wird häufig die Formulierung „Kreis um  $M$  mit  $r = |AB|$ “ oder „Kreis um  $M$  mit  $r = 1$ “ verwendet werden; dabei ist  $r$  nicht als Radius, sondern als Radiusmaßzahl zu lesen.

Beispiel 1. Zu einem Einheitskreis ist ein einbeschriebenes regelmäßiges Sechseck zu konstruieren (ein  $n$ -Eck heißt genau dann einem Kreis einbeschrieben, wenn jeder Eckpunkt des  $n$ -Ecks auf der Kreislinie liegt).

I. Wir nehmen an, die Aufgabe wäre gelöst (vgl. Abb. 4.1), und wir suchen einen Lösungsweg. Offensichtlich ist jede Lösung kongruent zu einer Lösung, die

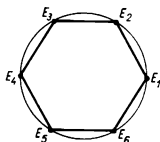


Abb. 4.1

nach dem folgenden Konstruktionsplan konstruiert werden kann. (Die Konstruktion, die ebenfalls zum I. Teil der Behandlung jeder Konstruktionsaufgabe gehört, werden wir in diesem und in den folgenden Beispielen nicht ausführen).

Konstruktionsplan:

(Jeder Konstruktionsplan besteht aus einer Folge von Arbeitsschritten entsprechend den Ausführungen in 4.2.3.)

a) Konstruktion des Kreises  $k$  um  $O$  durch  $E$ ;

b) Konstruktion des Punktes  $E_2$ :

1. auf  $k$ , 2. auf dem Kreis um  $E$  mit  $r = |OE|$  (Entscheidung für einen der beiden Schnittpunkte);

c) Umbenennung des Punktes  $E$  in  $E_1$ ;

d) Konstruktion der Punkte  $E_{i+1}$  ( $i = 2, \dots, 5$ ):

1. auf  $k$ , 2. auf dem Kreis um  $E_i$  mit  $r = |OE|$  (Entscheidung für den von  $E_{i-1}$  verschiedenen Punkt).

II. Jedes Sechseck  $E_1E_2 \dots E_6$ , welches nach dem angegebenen Konstruktionsplan konstruiert werden kann, ist offensichtlich Lösung. Beim Arbeitsschritt b) ist durch die beiden entstehenden Schnittpunkte die Weiterführung der Konstruktion auf zwei Wegen möglich; beide Wege führen jedoch zu kongruenten Sechsecken. Die vorliegende Konstruktionsaufgabe besitzt bis auf Kongruenz eine eindeutig bestimmte Lösung.

**Bemerkung zu Beispiel 1.** Mit Hilfe eines einem Einheitskreis einbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks ist es leicht, ein beliebiges regelmäßiges  $(2^v \cdot 3)$ -Eck ( $v = 0, 2, 3, \dots$ ) zu konstruieren (für  $v = 0$  brauchen wir z. B. nur die Punkte  $E_1, E_3, E_5$  auszuwählen).

**Aufgabe 3.** Es ist ein Konstruktionsplan zur Konstruktion eines regelmäßigen  $(2^{v+1} \cdot 3)$ -Ecks aufzustellen, wenn ein dem Kreis  $k$  um  $O$  durch  $E$  einbeschriebenes regelmäßiges  $(2^v \cdot 3)$ -Eck  $E_1 E_2 \dots E_{2^v \cdot 3}$  gegeben ist.

**Beispiel 2.** Zu einem Einheitskreis ist ein einbeschriebenes regelmäßiges Viereck zu konstruieren.

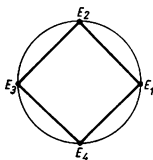


Abb. 4.2

I. Wir nehmen an, die Aufgabe wäre gelöst (vgl. Abb. 4.2), und wir suchen nach einem Lösungsweg. Offensichtlich ist jede Lösung kongruent zu einer Lösung, die nach dem folgenden Konstruktionsplan konstruiert werden kann.

**Konstruktionsplan:**

- a) Konstruktion des Kreises  $k$  um  $O$  durch  $E$ ;
- b) Konstruktion des Punktes  $E_3$ :
  1. auf  $k$ , 2. auf dem Strahl  $OE^-$ ;
- c) Konstruktion der Senkrechten  $s$  zur Geraden durch  $O$  und  $E$  in  $O$ ;
- d) Bezeichnung der beiden Schnittpunkte von  $s$  und  $k$  in beliebiger Reihenfolge mit  $E_2$  und  $E_4$ ;
- e) Umbenennung des Punktes  $E$  in  $E_1$ .

II. Jedes Viereck  $E_1 E_2 E_3 E_4$ , welches nach dem angegebenen Konstruktionsplan konstruiert werden kann, ist offensichtlich Lösung. Die vorliegende Konstruktionsaufgabe besitzt bis auf Kongruenz eine eindeutig bestimmte Lösung.

**Bemerkung zu Beispiel 2.** Mit Hilfe eines einem Einheitskreis einbeschriebenen regelmäßigen Vierecks ist es leicht, ein beliebiges regelmäßiges  $(2^v)$ -Eck ( $v = 3, 4, \dots$ ) zu konstruieren.

**Beispiel 3.** Zu einem Einheitskreis ist ein einbeschriebenes regelmäßiges Zehneck zu konstruieren.

I. Wir nehmen an, die Aufgabe wäre gelöst (vgl. Abb. 4.3), und wir suchen nach einem Lösungsweg. Ist  $H$  im Inneren der Strecke  $ME_1$  derjenige Punkt, für den

$|HE_2| = |E_1E_2|$  gilt, so sind die gleichschenkligen Dreiecke  $E_1ME_2$  und  $HE_2E_1$  ähnlich, und es gilt

$$|\sphericalangle E_1ME_2| = |\sphericalangle HE_2E_1| = 36^\circ; \quad (1)$$

und weil  $|\sphericalangle E_1E_2M| = 72^\circ$  ist, ist auch  $|\sphericalangle HE_2M| = 36^\circ$ , und folglich ist das Dreieck  $MHE_2$  gleichschenkelig, und es gilt

$$|HM| = |HE_2| = |E_1E_2|.$$

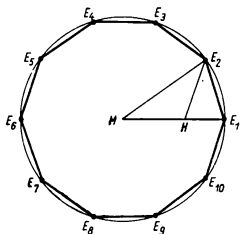


Abb. 4.3

Aus diesen Beziehungen und auf Grund der Ähnlichkeit der Dreiecke  $E_1ME_2$  und  $HE_2E_1$  folgt

$$1 : |E_1E_2| = |E_1E_2| : (1 - |E_1E_2|), \quad (2)$$

d. h.

$$|E_1E_2|^2 + |E_1E_2| - 1 = 0.$$

Auf Grund des vorliegenden geometrischen Sachverhaltes kommt für  $|E_1E_2|$  nur der Wert

$$|E_1E_2| = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1) \quad (3)$$

in Betracht (vgl. Aufgabe 2 in 4.2.1.). Somit ist jede Lösung der vorliegenden Konstruktionsaufgabe kongruent zu einer Lösung, die nach dem folgenden Konstruktionsplan konstruiert werden kann.

Konstruktionsplan:

- a) Konstruktion des Kreises  $k$  um  $O$  durch  $E$ ;
- b) Konstruktion einer Strecke der Maßzahl  $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ ;
- c) Konstruktion des Punktes  $E_2$ :
  1. auf  $k$ , 2. auf dem Kreis um  $E$  mit  $r = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$  (Entscheidung für einen der beiden Schnittpunkte);
- d) Umbenennung des Punktes  $E$  in  $E_1$ ;
- e) Konstruktion der Punkte  $E_{i+1}$  ( $i = 2, \dots, 9$ ):
  1. auf  $k$ , 2. auf dem Kreis um  $E_i$  mit  $r = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$  (Entscheidung für den von  $E_{i-1}$  verschiedenen Punkt).

II. Jedes Zehneck  $E_1 E_2 \dots E_{10}$ , welches nach dem angegebenen Konstruktionsplan konstruiert werden kann, ist Lösung, da man aus (3) auf (2) und hieraus auf (1) schließen kann. Beim Arbeitsschritt c) ist durch die beiden entstehenden Schnittpunkte die Weiterführung der Konstruktion auf zwei Wegen möglich; beide Wege führen jedoch zu kongruenten Zehneck.

Bemerkung zu Beispiel 3. Mit Hilfe der Konstruktion eines einem Einheitskreis einbeschriebenen regelmäßigen Zehnecks ist es leicht, ein beliebiges regelmäßiges  $(2^v \cdot 5)$ -Eck ( $v = 0, 2, 3, \dots$ ) zu konstruieren.

Wie bereits in 4.1. erwähnt wurde, hat C. F. GAUSS alle natürlichen Zahlen  $n \geq 3$  charakterisiert, für die die Konstruktion eines regelmäßigen  $n$ -Ecks mit Zirkel und Lineal aus einer vorgegebenen Einheitsstrecke möglich ist; die Konstruktion ist dann und nur dann möglich, wenn in der Primfaktorzerlegung von  $n$  alle von 2 verschiedenen Primfaktoren voneinander verschiedene Fermatsche Primzahlen sind. Für die Zahlen  $n = 3, 4, \dots, 20$  bedeutet dies, daß die Konstruktion der regelmäßigen 3-, 4-, 5-, 6-, 8-, 10-, 12-, 15-, 16-, 17-, 20-Ecke mit Zirkel und Lineal möglich ist, während es für die regelmäßigen 7-, 9-, 11-, 13-, 14-, 18-, 19-Ecke prinzipiell keine exakte Konstruktion mit Zirkel und Lineal geben kann (Näherungskonstruktionen sind selbstverständlich möglich). Für die regelmäßigen 7-Ecke werden wir in einem späteren Abschnitt die Unmöglichkeit der Konstruktion (mit Zirkel und Lineal) beweisen. Von besonderer Überraschung für GAUSS und die Mathematiker seiner Zeit war die Entdeckung der Konstruierbarkeit der regelmäßigen 17-Ecke; zur Erinnerung an diese mathematische Leistung wurde auf dem Grabstein für GAUSS ein regelmäßiges 17-Eck angebracht. Ebenfalls zum Gedenken an diese hervorragende Jugendleistung von GAUSS wurde als Abzeichen für die „Olympiaden Junger Mathematiker“ in der Deutschen Demokratischen Republik ein regelmäßiges 17-Eck mit Zirkel und Lineal gewählt. GAUSS hat eine Konstruktion für ein regelmäßiges 17-Eck angegeben; dabei verwendet er eine Hilfsstrecke der Maßzahl

$$\begin{aligned} \cos \frac{360^\circ}{17} = & -\frac{1}{16} + \frac{1}{16} \sqrt{17} + \frac{1}{16} \sqrt{34 - 2 \cdot \sqrt{17}} \\ & + \frac{1}{8} \sqrt{17 + 3 \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2 \cdot \sqrt{17}} - 2 \sqrt{34 + 2 \sqrt{17}}} . \end{aligned}$$

In den folgenden drei Beispielen werden Dreieckskonstruktionen behandelt. Wir wollen bei Dreiecken  $ABC$  hier und auch an späteren Stellen folgende Bezeichnungen verwenden:

$$\begin{array}{lll} a := |BC|, & b := |CA|, & c := |AB|; \\ \alpha := |\sphericalangle BAC|, & \beta := |\sphericalangle CBA|, & \gamma := |\sphericalangle ACB|; \\ H_A, H_B, H_C & \text{Höhenfußpunkte,} \\ S_A, S_B, S_C & \text{Schnittpunkte der Seitenhalbierenden mit den Gegen-} \\ & \text{seiten,} \end{array}$$



$W_A, W_B, W_C$  Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit den Gegenseiten

(der Index gibt jeweils die Ecke an, durch die die betreffende Linie verläuft).

**Beispiel 4.** Zu gegebenen Strecken der Maßzahlen  $h_a, h_b, h_c$  und einer Einheitsstrecke sind alle paarweise inkongruenten Dreiecke  $ABC$  zu konstruieren, für die  $|AH_A| = h_a, |BH_B| = h_b, |CH_C| = h_c$  gilt.

I. Wir nehmen an, die Aufgabe wäre gelöst, und wir suchen nach einem Lösungsweg. Für jedes Dreieck  $ABC$  gilt

$$a \cdot |AH_A| = b \cdot |BH_B| = c \cdot |CH_C|,$$

d. h.

$$a : \frac{1}{|AH_A|} = b : \frac{1}{|BH_B|} = c : \frac{1}{|CH_C|};$$

und folglich ist jedes Dreieck  $ABC$  ähnlich zu jedem Dreieck  $A'B'C'$ , für welches

$$|B'C'| = \frac{1}{|AH_A|}, \quad |C'A'| = \frac{1}{|BH_B|}, \quad |A'B'| = \frac{1}{|CH_C|}$$

gilt. Somit ist jede Lösung der vorliegenden Konstruktionsaufgabe kongruent zu einer Lösung, die nach dem folgenden Konstruktionsplan konstruiert werden kann (vgl. Abb. 4.4).

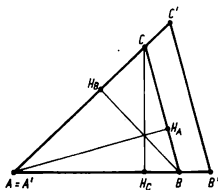


Abb. 4.4

**Konstruktionsplan:**

- Konstruktion einer Strecke der Maßzahl  $1/h_a$ , einer Strecke der Maßzahl  $1/h_b$  und einer Strecke der Maßzahl  $1/h_c$ ;
- Konstruktion eines Dreiecks  $A'B'C'$  mit

$$|B'C'| = \frac{1}{h_a}, \quad |A'C'| = \frac{1}{h_b} \quad \text{und} \quad |A'B'| = \frac{1}{h_c},$$

falls ein solches existiert;

- Umbenennung des Punktes  $A'$  in  $A$ ;
- Konstruktion des Lotes  $l$  von  $A$  auf die Gerade  $g$  durch  $B'$  und  $C'$ ;
- Konstruktion des Punktes  $H_A$ :

1. auf  $l$ , 2. auf dem Kreis um  $A$  mit  $r = h_a$  (Entscheidung für einen der beiden Schnittpunkte);

im weiteren Verlauf des Konstruktionsplanes sind zwei Fälle zu unterscheiden; liegt  $H_A$  nicht auf  $g$ , so folgen die Arbeitsschritte f), g), liegt  $H_A$  auf  $g$ , so folgt der Arbeitsschritt f') (auf Schwierigkeiten, die bei derartigen Entscheidungen auftreten, können wir hier nicht eingehen);

f) Konstruktion des Punktes  $B$ :

1. auf der Parallelen zu  $g$  durch  $H_A$ , 2. auf der Geraden durch  $A$  und  $B'$ ;

g) Konstruktion des Punktes  $C$ :

1. auf der Parallelen zu  $g$  durch  $H_A$ , 2. auf der Geraden durch  $A$  und  $C'$ .

f') Umbenennung des Punktes  $B'$  in  $B$  und des Punktes  $C'$  in  $C$ .

II. Die gegebene Konstruktionsaufgabe ist genau dann lösbar, wenn die Summe von je zwei der Zahlen  $1/h_a$ ,  $1/h_b$ ,  $1/h_c$  größer ist als die dritte Zahl. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist die Lösung bis auf Kongruenz sogar eindeutig bestimmt, und jedes Dreieck  $ABC$ , welches nach dem angegebenen Konstruktionsplan konstruiert werden kann, ist Lösung.

Beispiel 5. Zu gegebenen Strecken der Maßzahlen  $s_a, s_b, s_c$  sind alle paarweise inkongruenten Dreiecke  $ABC$  zu konstruieren, für die  $|AS_A| = s_a$ ,  $|BS_B| = s_b$ ,  $|CS_C| = s_c$  gilt.

I. Wir nehmen an, die Aufgabe wäre gelöst, und wir suchen nach einem Lösungsweg. Jedes Dreieck  $ABC$  können wir zu einem Parallelogramm  $ABCD$  ergänzen, in dem  $S_A$  Diagonalschnittpunkt ist. Der Schnittpunkt  $M$  der Seitenhalbierenden im Dreieck  $ABC$  und der Schnittpunkt  $H$  der Seitenhalbierenden im Dreieck  $BDC$  bilden mit  $B$  ein Dreieck, für das

$$|BM| = \frac{2}{3} \cdot |BS_B|, \quad |BH| = \frac{2}{3} \cdot |CS_C|, \quad |MH| = \frac{2}{3} \cdot |AS_A|$$

gilt (vgl. Abb. 4.5). Somit ist jede Lösung der vorliegenden Konstruktionsaufgabe kongruent zu einer Lösung, die nach dem folgenden Konstruktionsplan konstruiert werden kann.

Konstruktionsplan:

a) Konstruktion einer Strecke der Maßzahl  $\frac{2}{3}s_b$  und einer Strecke der Maßzahl  $\frac{2}{3}s_c$ ;

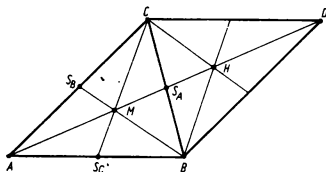


Abb. 4.5

- b) Konstruktion einer Strecke  $AM$  der Maßzahl  $\frac{2}{3}s_a$ ;  
 c) Konstruktion des Hilfspunktes  $H$ :  
 1. auf dem Strahl  $MA^-$ , 2. auf dem Kreis um  $M$  mit  $r = \frac{2}{3}s_a$ ;  
 d) Konstruktion des Punktes  $B$  (falls diese Konstruktion ausführbar ist):  
 1. auf dem Kreis um  $M$  mit  $r = \frac{2}{3}s_b$ , 2. auf dem Kreis um  $H$  mit  $r = \frac{2}{3}s_c$   
 (Entscheidung für einen der beiden Schnittpunkte);  
 e) Konstruktion des Mittelpunktes  $S_A$  der Strecke  $MH$ ;  
 f) Konstruktion des Punktes  $C$ :  
 1. auf dem Strahl  $S_AB^-$ , 2. auf dem Kreis um  $S_A$  mit  $r = |BS_A|$ .

II. Die Konstruktionsaufgabe ist genau dann lösbar, wenn die Summe von je zwei der Zahlen  $\frac{2}{3}s_a, \frac{2}{3}s_b, \frac{2}{3}s_c$  (also auch der Zahlen  $s_a, s_b, s_c$ ) größer als die dritte Zahl ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist die Lösung bis auf Kongruenz sogar eindeutig bestimmt, und jedes Dreieck  $ABC$ , welches nach dem angegebenen Konstruktionsplan konstruiert werden kann, ist Lösung.

Beispiel 6. Zu gegebenen Strecken der Maßzahlen  $h_a, s_a, w_a$ , für die nicht  $h_a = s_a = w_a$  gelten möge, sind alle paarweise inkongruenten Dreiecke  $ABC$  zu konstruieren, für die  $|AH_A| = h_a, |AS_A| = s_a, |AW_A| = w_a$  gilt. (Im Fall  $h_a = s_a = w_a$  würden die Punkte  $H_A, S_A, W_A$  zusammenfallen, und es wären alle Dreiecke mit  $|AB| = |AC|$  und  $|AH_A| = h_a$  Lösung.)

I. Wir nehmen an, die Aufgabe wäre gelöst, und wir suchen nach einem Lösungsweg. In jedem Dreieck  $ABC$  ist entweder  $|AH_A| < |AW_A| < |AS_A|$  oder  $|AH_A| = |AW_A| = |AS_A|$ , und in jedem dieser beiden Fälle halbiert der Strahl  $AW_A^+$

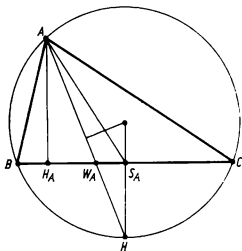


Abb. 4.6

auf dem Umkreis des Dreiecks  $ABC$  denjenigen von  $B$  und  $C$  bestimmten Kreisbogen, auf dem  $A$  nicht liegt (vgl. Abb. 4.6). Somit ist jede Lösung der vorliegenden Konstruktionsaufgabe kongruent zu einer Lösung, die nach dem folgenden Konstruktionsplan konstruiert werden kann.

Konstruktionsplan:

a) Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks  $AH_A S_A$  mit

$$|\angle AH_A S_A| = 90^\circ, \quad |AH_A| = h_a \quad \text{und} \quad |AS_A| = s_a;$$

b) Konstruktion des Punktes  $W_A$ :

1. auf dem Strahl  $H_A S_A^+$ , 2. auf dem Kreis um  $A$  mit  $r = w_a$ ;

c) Konstruktion des Hilfspunktes  $H$  (Schnittpunkt des Strahls  $AW_A^+$  mit dem Umkreis):

1. auf dem Strahl  $AW_A^+$ , 2. auf der Senkrechten  $s$  zur Geraden  $g$  durch  $H_A$  und  $S_A$  im Punkt  $S_A$ ;

d) Konstruktion des Umkreismittelpunktes  $M$ :

1. auf  $s$ , 2. auf der Mittelsenkrechten zur Strecke  $AH$ ;

e) Konstruktion des Punktes  $B$ :

1. auf  $g$ , 2. auf dem Kreis um  $M$  durch  $A$  (Entscheidung für einen der beiden Schnittpunkte);

f) Bezeichnung des im Arbeitsschritt e) erhaltenen zweiten Schnittpunktes mit  $C$ .

II. Die Konstruktionsaufgabe ist genau dann lösbar, wenn  $h_a < w_a < s_a$  ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist die Lösung bis auf Kongruenz sogar eindeutig bestimmt; und jedes Dreieck  $ABC$ , welches nach dem angegebenen Konstruktionsplan konstruiert werden kann, ist Lösung.

Beispiel 7. Zu einem gegebenen Punkt  $P_1$  ist der inverse Punkt  $P_2$  bezüglich eines gegebenen Kreises  $k$  mit dem Mittelpunkt  $M$  und der Radiusmaßzahl  $r$  zu konstruieren; es sei  $P_1 \neq M$  vorausgesetzt (der inverse Punkt  $P_2$  zu  $P_1$  bezüglich  $k$  ist derjenige Punkt auf dem Strahl  $MP_1^+$ , für den das Produkt  $|MP_1| \cdot |MP_2|$  gleich  $r^2$  ist; vgl. 3.6., insbesondere S. 157).

I. Wir nehmen an, die Aufgabe wäre gelöst, und wir suchen nach einem Lösungsweg. Es empfiehlt sich eine Fallunterscheidung für die Lage von  $P_1$  bezüglich  $k$  (außerhalb  $k$ , innerhalb  $k$ , auf  $k$ ; vgl. Abb. 4.7). Offensichtlich ist der

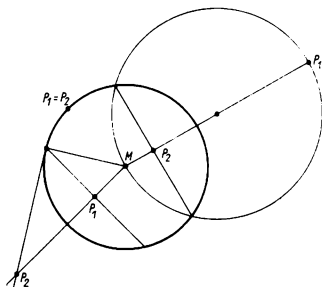


Abb. 4.7

inverse Punkt  $P_2$  von  $P_1$  in jedem der drei Fälle eindeutig bestimmt; liegt  $P_1$  auf  $k$ , so ist  $P_2 = P_1$ , und in jedem der beiden anderen Fälle kann  $P_2$  mit Hilfe des Kathetensatzes gefunden werden. Der Punkt  $P_2$  läßt sich nach dem folgenden Konstruktionsplan konstruieren.

Konstruktionsplan:

Fall 1:  $P_1$  liege außerhalb  $k$ .

- a) Konstruktion des Strahls  $MP_1^+$ ;
- b) Konstruktion des Mittelpunktes  $H_1$  der Strecke  $MP_1$ ;
- c) Konstruktion des Kreises  $k_1$  um  $H_1$  durch  $P_1$ ;
- d) Bezeichnung der beiden Schnittpunkte von  $k$  und  $k_1$  mit  $S_1$  und  $S_2$  in beliebiger Reihenfolge;
- e) Konstruktion des Punktes  $P_2$ :
  1. auf dem Strahl  $MP_1^+$ , 2. auf der Geraden durch  $S_1$  und  $S_2$ .

Fall 2:  $P_1$  liege innerhalb  $k$ .

- a') Konstruktion des Strahls  $MP_1^+$ ;
- b') Konstruktion des Hilfspunktes  $S_1$ :
  1. auf  $k$ , 2. auf der Senkrechten zur Geraden durch  $M$  und  $P_1$  in  $P_1$  (Entscheidung für einen der beiden Schnittpunkte);
- c') Konstruktion des Punktes  $P_2$ :
  1. auf dem Strahl  $MP_1^+$ , 2. auf der Senkrechten zur Geraden durch  $M$  und  $S_1$  in  $S_1$ .

Fall 3:  $P_1$  liege auf  $k$ .

- a'') Bezeichnung des Punktes  $P_1$  mit  $P_2$ .

II. Jede Konstruktion nach dem vorliegenden Konstruktionsplan führt zu dem eindeutig bestimmten Punkt  $P_2$ , für den  $|MP_1| \cdot |MP_2| = r^2$  ist. Die durch den Arbeitsschritt d) bzw. b') bewirkte Verzweigung in der Konstruktion wird jeweils durch den folgenden Arbeitsschritt wieder zusammengeführt.

Bemerkung zu Beispiel 7. Da die Inversion am Kreis (vgl. 3.6.) eine kreistreue Abbildung ist, falls man auch die Geraden als Kreise ansieht, kann der zu einem Kreis  $k_1$  inverse Kreis  $k_1'$  bezüglich des Inversionskreises  $k$  im allgemeinen dadurch gefunden werden, daß zu drei Punkten  $P_1, P_2, P_3$  auf  $k_1$  die inversen Punkte  $P_1', P_2', P_3'$  bezüglich  $k$  konstruiert werden (falls  $k$  und  $k_1$  gemeinsame Punkte besitzen, sind diese mit ihren inversen Punkten identisch); der Kreis  $k_1'$  ist der durch  $P_1', P_2', P_3'$  bestimmte Kreis (der Mittelpunkt von  $k_1'$  ist nicht notwendig der inverse Punkt des Mittelpunktes von  $k_1$ ).

Aufgabe 4. Zu jedem Konstruktionsplan der Beispiele 1 bis 7 ist eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal auszuführen.

#### 4.2.6. Das Berührungsproblem des Apollonius

Als Berührungsproblem des APOLLONIUS wird die Aufgabe bezeichnet, zu drei gegebenen Kreisen alle diejenigen Kreise zu konstruieren, die jeden der drei gegebenen Kreise berühren; bei dieser Aufgabenstellung sind auch Punkte und Geraden als „entartete“ Kreise zugelassen. Aus einer Untersuchung aller denkbaren Lagebeziehungen der drei gegebenen Kreise erkennt man, daß zur Menge aller gesuchten Kreise maximal acht Kreise gehören; bei den dazu erforderlichen Überlegungen empfiehlt es sich, in einer Fallunterscheidung jeweils die Anzahl derjenigen existierenden Kreise zu bestimmen, die drei, zwei, einen, keinen der drei gegebenen Kreise im Inneren enthalten und jeden dieser drei Kreise berühren.

Wir wollen in diesem Abschnitt das Berührungsproblem des APOLLONIUS bei einer Lage der vorgegebenen Kreise lösen, bei der die Menge der gesuchten Kreise aus tatsächlich acht Kreisen besteht; außerdem wollen wir noch annehmen, daß je zwei der drei gegebenen Kreise außerhalb des dritten Kreises liegen. Bei der zu behandelnden Konstruktionsaufgabe beschränken wir uns auf die Konstruktion desjenigen Kreises, der alle drei gegebenen Kreise berührt und im Inneren enthält. Auf dem von uns gewählten Lösungsweg wird die gegebene Aufgabe zunächst in eine äquivalente Aufgabe umgewandelt, bei der die ursprünglich gegebenen Kreise  $k_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) durch Kreise  $k'_i$  mit unveränderten Mittelpunkten, aber veränderten Radien ersetzt sind, und zwar so, daß zwei der Kreise  $k'_i$  sich in einem Punkt  $M$  berühren und jede Radiusmaßzahl  $r'_i$  gegenüber der Radiusmaßzahl  $r_i$  um denselben Wert vergrößert ist. Durch Inversion der Kreise  $k'_i$  am Einheitskreis um  $M$  entsteht wiederum eine äquivalente Aufgabe für „Kreise“  $k''_i$ , von denen auf Grund der Eigenschaften der Inversion am Einheitskreis um  $M$  zwei „Kreise“ zu parallelen Geraden „entartet“ sind; diese Aufgabe kann leicht gelöst werden. Dann bereitet es aber auch keine Schwierigkeiten, die Aufgabe für die Kreise  $k'_i$  und schließlich die ursprüngliche Aufgabe für die Kreise  $k_i$  zu lösen (vgl. Abb. 4.8 und 4.9). Die Konstruktion der anderen sieben Kreise kann in analoger Weise erfolgen; dabei entstehen die  $r'_i$  nicht in jedem Fall nur durch Vergrößerung der  $r_i$ , sondern in gewissen Fällen auch durch Verkleinerung um denselben Wert. In analoger Weise können auch die entsprechenden Konstruktionsaufgaben bei anderer Lage der vorgegebenen (nicht entarteten) Kreise gelöst werden; befinden sich unter den vorgegebenen Kreisen „entartete“ Kreise (Punkte oder Geraden), so treten beim Lösen der entsprechenden Konstruktionsaufgaben Vereinfachungen auf. Für die Konstruktionsaufgabe, die wir lösen wollen, setzen wir bezüglich der drei gegebenen Kreise noch voraus, daß jede Tangente an zwei dieser Kreise mit dem dritten Kreis keinen gemeinsamen Punkt besitzt (in diesem Fall besteht die Menge aller Lösungen für das Berührungsproblem des APOLLONIUS aus acht Kreisen).

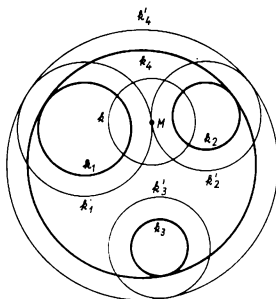


Abb. 4.8

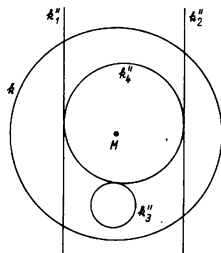


Abb. 4.9

I. Wir nehmen an, wir hätten die Aufgabe bereits gelöst, und wir suchen nach einem Lösungsweg. Offensichtlich ist die Lösung eindeutig bestimmt, und der folgende Konstruktionsplan, der wesentlich auf den Eigenschaften der Inversion am Kreis beruht, ist zur Konstruktion der Lösung geeignet. Die drei gegebenen Kreise seien mit  $k_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) die jeweiligen Mittelpunkte mit  $M_i$  und die jeweiligen Radiusmaßzahlen mit  $r_i$  bezeichnet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir die Numerierung so wählen, daß

$$|M_1 M_2| - r_1 - r_2 \leq |M_1 M_3| - r_1 - r_3$$

und

$$|M_1 M_2| - r_1 - r_2 \leq |M_2 M_3| - r_2 - r_3$$

ist (vgl. Abb. 4.8).

Konstruktionsplan:

a) Konstruktion von Strecken der Maßzahlen

$$r'_i = r_i + \frac{1}{2}(|M_1 M_2| - r_1 - r_2) \quad (i = 1, 2, 3);$$

b) Konstruktion des Kreises  $k'_i$  um  $M_i$  mit  $r = r'_i$  ( $i = 1, 2, 3$ );

c) Konstruktion des Hilfspunktes  $M$ :

1. auf dem Strahl  $M_1 M_2^+$ , 2. auf  $k'_1$ ;

der Punkt  $M$  ist Berührungspunkt der Kreise  $k'_1$  und  $k'_2$ ;

d) Konstruktion des Hilfskreises  $k$  um  $M$  mit  $r = 1$ ;

e) Konstruktion des zu  $k_i$  inversen Kreises  $k''_i$  bezüglich  $k$ ,  $i = 1, 2, 3$  (vgl. die

Bemerkung zu Beispiel 7 in 4.2.5.);

auf Grund der Eigenschaften der Inversion an einem Kreis sind  $k'_1$  und  $k''_2$  parallele Geraden, und  $k''_3$  ist ein nicht entarteter Kreis zwischen diesen beiden Geraden (Berührung mit  $k'_1$  oder  $k''_2$  ist nicht ausgeschlossen);

- f) Bezeichnung des Mittelpunktes von  $k_3''$  mit  $M_3''$  und der Radiusmaßzahl dieses Kreises mit  $r_3''$  (es ist  $M_3'' \neq M$ );
- g) Konstruktion einer Senkrechten  $s$  zu  $k_1''$  (wir wählen das Lot von  $M_3''$  auf  $k_1''$ );
- h) Bezeichnung des Schnittpunktes von  $s$  und  $k_1''$  mit  $S_1$  und des Schnittpunktes von  $s$  und  $k_2''$  mit  $S_2$ ;
- i) Konstruktion des Hilfspunktes  $M_4''$ ;  
1. auf der Mittelsenkrechten zur Strecke  $S_1S_2$ , 2. auf dem Kreis um  $M_3''$  mit  $r = r_3'' + \frac{1}{2} \cdot |S_1S_2|$  (Entscheidung für denjenigen der beiden Schnittpunkte, dessen Abstandsmaßzahl von  $M$  kleiner als  $\frac{1}{2} \cdot |S_1S_2|$  ist; es gibt genau einen solchen Punkt);
- j) Konstruktion des Kreises  $k_4''$  um  $M_4''$  mit  $r = \frac{1}{2} \cdot |S_1S_2|$ ;
- k) Konstruktion des zu  $k_4''$  inversen Kreises  $k_4'$  bezüglich  $k$ ;
- l) Bezeichnung des Mittelpunktes von  $k_4'$  mit  $M_4$  und der Radiusmaßzahl dieses Kreises mit  $r_4'$ ;
- m) Konstruktion des Kreises  $k_4$  um  $M_4$  mit  $r_4 = r_4' - \frac{1}{2} \cdot (|M_1M_2| - r_1 - r_2)$ ;
- n) Konstruktion des Berührungspunktes  $B_i$  des Kreises  $k_4$  mit dem Kreis  $k_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ):  
1. auf  $k_i$ , 2. auf dem Strahl  $M_iM_4^-$ .

II. Jede Konstruktion nach dem vorliegenden Konstruktionsplan führt zu dem eindeutig bestimmten Kreis  $k_4$ , also zur eindeutig bestimmten Lösung der gegebenen Konstruktionsaufgabe, denn offensichtlich liegen  $k_1'', k_2'', k_3''$  im Äußeren von  $k_4'$  und werden von  $k_4'$  berührt, während  $M$  im Inneren von  $k_4'$  liegt; dann liegen auf Grund der Eigenschaften der Inversion am Kreis  $k$  die Kreise  $k_1', k_2', k_3'$  im Inneren von  $k_4'$  und werden von  $k_4'$  berührt, und folglich liegen auch die Kreise  $k_1, k_2, k_3$  im Inneren von  $k_4$  und werden von  $k_4$  berührt.

**Aufgabe 5.** Drei Kreise  $k_1, k_2, k_3$  mögen dieselben Voraussetzungen wie in der soeben behandelten Konstruktionsaufgabe erfüllen. Man gebe einen Konstruktionsplan zur Konstruktion desjenigen Kreises  $k_4$  an, der jeden der drei gegebenen Kreise berührt und der nur den Kreis  $k_1$  im Inneren enthält.

### 4.3. Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal in algebraischer Behandlung

#### 4.3.1. Algebraische Fassung geometrischer Konstruktionsprobleme

Für die algebraische Behandlung geometrischer Konstruktionen mit Zirkel und Lineal in der euklidischen Ebene denken wir uns ein kartesisches Koordinaten-



system unter Verwendung der bereits fixierten Punkte  $O$  und  $E$  (vgl. 4.1.) eingeführt. Der Punkt  $O$  sei Koordinatenursprung, und die Gerade durch  $O$  und  $E$  sei  $x$ -Achse mit  $E_1 = E$  als Einheitspunkt; für den Einheitspunkt  $E_2$  auf der  $y$ -Achse gilt  $|OE_1| = |OE_2|$  (vgl. 2.1.3.).

Entsprechend unserer Auffassung von Konstruktionsaufgaben (vgl. 4.1.) sind bei jeder Konstruktionsaufgabe aus endlich vielen gegebenen Strecken der Maßzahlen  $m_1, m_2, \dots, m_n$  endlich viele Strecken der Maßzahlen  $m'_1, m'_2, \dots, m'_{n'}$  zu konstruieren, wobei sich jedes  $m'_j$  ( $j = 1, \dots, n'$ ) entsprechend der Aufgabenstellung in einer vorgeschriebenen Abhängigkeit von den  $m_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) befindet; jede solche Konstruktionsaufgabe kann in Teilaufgaben zerlegt werden, so daß in jeder Teilaufgabe nur eine Strecke der Maßzahl  $m'$  zu konstruieren ist. Die gegebenen Strecken jeder Konstruktionsaufgabe denken wir uns durch ihre Endpunkte festgelegt, und diese Endpunkte können wir durch ihre Koordinaten in dem eingeführten kartesischen Koordinatensystem erfassen; auch die zu konstruierenden Strecken können in diesem Sinne durch ihre Endpunkte und diese wiederum durch ihre Koordinaten beschrieben werden. Jede Gerade, die im Verlauf einer Konstruktion auftritt, beschreiben wir durch eine Gleichung der Form  $ax + by + c = 0$ ; jeden Kreis, der im Verlauf einer Konstruktion auftritt, beschreiben wir durch eine Gleichung der Form  $x^2 + y^2 + ax + bx + c = 0$ . Zur Vereinfachung der Sprechweise wollen wir im folgenden die Formulierung „der Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $(x, y)$ “ durch die kürzere Sprechweise „der Punkt  $(x, y)$ “ ersetzen; in entsprechender Weise werden wir auch die Formulierungen „die Gerade  $ax + by + c = 0$ “ und „der Kreis  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ “ verwenden.

Wir suchen nun nach einer algebraischen Charakterisierung aller Strecken, die mit Zirkel und Lineal aus gegebenen Strecken konstruiert werden können. Eine solche Charakterisierung liefert der folgende Satz, der die Umkehrung des Satzes 1 in 4.2.1. ist.

**Satz 2.** *Wenn aus gegebenen Strecken der Maßzahlen  $m_1, m_2, \dots, m_n$  durch eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal eine Strecke der Maßzahl  $m'$  konstruiert werden kann, dann läßt sich  $m'$  aus  $m_1, m_2, \dots, m_n$  durch endlich viele rationale Operationen (Multiplikationen, Divisionen, Additionen, Subtraktionen) und endlich viele Quadratwurzeloperationen errechnen.*

**Beweis.** Nach Definition 1 in 4.1. ist jede Konstruktion mit Zirkel und Lineal eine Aneinanderreihung von endlich vielen Konstruktionsschritten der Arten a) bis e). Wir verfolgen zunächst diese fünf Arten der Konstruktionsschritte mit Hilfe des eingeführten kartesischen Koordinatensystems.

**Konstruktionsschritt der Art a):**

Die gegebenen Punkte seien  $(a_1, b_1)$  und  $(a_2, b_2)$ .

Eine Gleichung der Geraden durch diese Punkte ist  $ax + by + c = 0$  mit  $a := b_1 - b_2$ ,  $b := a_2 - a_1$ ,  $c := a_1 b_2 - b_1 a_2$ .

Konstruktionsschritt der Art b):

Die gegebenen sich schneidenden Geraden seien  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$  und  $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ . Die Koordinaten des Schnittpunktes  $(x_s, y_s)$  ergeben sich durch  $x_s = e/d$  und  $y_s = f/d$  mit  $d := a_1b_2 - b_1a_2$ ,  $e := b_1c_2 - c_1b_2$ ,  $f := c_1a_2 - a_1c_2$ ;  $d = a_1b_2 - b_1a_2$  ist bei sich schneidenden Geraden stets ungleich 0.

Konstruktionsschritt der Art c):

Der gegebene Mittelpunkt sei  $(a_M, b_M)$ , und der gegebene Punkt des zu konstruierenden Kreises sei  $(a_1, b_1)$ . Eine Gleichung des zu konstruierenden Kreises ist  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  mit

$$a := -2a_M, \quad b := -2b_M, \quad c := a_M^2 + b_M^2 - (a_M - a_1)^2 - (b_M - b_1)^2.$$

Konstruktionsschritt der Art d):

Die gegebene Gerade sei  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ , und der von dieser Geraden geschnittene gegebene Kreis sei  $x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$ . Die Koordinaten der beiden Schnittpunkte  $(x_s, y_s)$  und  $(x'_s, y'_s)$  ergeben sich im Fall  $b_1 \neq 0$  durch

$$\begin{aligned} x_s &= -\frac{B}{2A} + \frac{1}{2A} \cdot \sqrt{B^2 - 4AC}, & y_s &= -\frac{a_1}{b_1} \cdot x_s - \frac{c_1}{b_1}, \\ x'_s &= -\frac{B}{2A} - \frac{1}{2A} \cdot \sqrt{B^2 - 4AC}, & y'_s &= -\frac{a_1}{b_1} \cdot x'_s - \frac{c_1}{b_1} \end{aligned}$$

mit

$$A := a_1^2 + b_1^2, \quad B := b_1^2 \cdot a_2 + 2a_1c_1 - a_1b_1b_2, \quad C := c_1^2 - b_1c_1b_2 + b_1^2 \cdot c_2;$$

im Fall  $b_1 = 0$  ist  $a_1 \neq 0$ , und die Koordinaten der Schnittpunkte ergeben sich durch

$$\begin{aligned} x_s &= -\frac{c_1}{a_1}, & y_s &= -\frac{B}{2A} + \frac{1}{2A} \cdot \sqrt{B^2 - 4AC}, \\ x'_s &= -\frac{c_1}{a_1}, & y'_s &= -\frac{B}{2A} - \frac{1}{2A} \cdot \sqrt{B^2 - 4AC} \end{aligned}$$

mit

$$A := a_1^2, \quad B := a_1^2b_2, \quad C := c_1^2 - a_1c_1a_2 + a_1^2c_2.$$

Es ist in beiden Fällen  $A > 0$ , und bei Existenz zweier Schnittpunkte, die wir bei Konstruktionsschritten der Art d) voraussetzen, ist in beiden Fällen auch  $B^2 - 4AC > 0$ .

Konstruktionsschritt der Art e):

Die gegebenen sich schneidenden Kreise seien  $x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$  und  $x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$ . Die beiden Schnittpunkte  $(x_s, y_s)$  und  $(x'_s, y'_s)$  sind gleichzeitig die Schnittpunkte des Kreises  $x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$  mit der Geraden  $(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0$ , weil die Gerade die Potenzgerade der beiden Kreise ist, und somit führt unsere Betrachtung des Konstruk-

tionsschrittes der Art e) zu entsprechenden Ergebnissen wie die Betrachtung des Konstruktionsschrittes der Art d).

Die Ergebnisse der durchgeführten Überlegungen können wir in der folgenden Weise interpretieren: Wenn eine Strecke der Maßzahl  $m'$  aus gegebenen Strecken der Maßzahlen  $m_1, m_2, \dots, m_n$  durch eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal (d. h. durch endlich viele Konstruktionsschritte der Arten a) bis e)) konstruiert werden kann, dann läßt sich die Zahl  $m'$  aus  $m_1, m_2, \dots, m_n$  durch endlich viele rationale Operationen und endlich viele Quadratwurzeloperationen errechnen. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Auf Grund des soeben bewiesenen Satzes 2 und des Satzes 1 in 4.1. ist die Darstellbarkeit der Zahl  $m'$  aus Zahlen  $m_1, m_2, \dots, m_n$  durch endlich viele rationale Operationen und endlich viele Quadratwurzeloperationen ein notwendiges und auch ein hinreichendes Kriterium für die Konstruierbarkeit einer Strecke der Maßzahl  $m'$  aus gegebenen Strecken der Maßzahlen  $m_1, m_2, \dots, m_n$  mit Zirkel und Lineal. Damit haben wir die Möglichkeit geschaffen, bei geometrischen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal die Frage nach der Lösbarkeit gegebener Konstruktionsaufgaben in die Sprache der Algebra zu übersetzen und mit Mitteln der Algebra zu untersuchen. Auf diese Weise konnte bei zahlreichen konkreten Konstruktionsaufgaben bewiesen werden, daß sie nicht lösbar sind. Wenn für eine Konstruktionsaufgabe trotz intensiver Bemühungen auf geometrischem Wege keine Lösung gefunden werden kann, liegt die Vermutung nahe, daß diese Aufgabe unlösbar ist; die Entscheidung darüber kann — auch bei Verwendung algebraischer Hilfsmittel — in konkreten Fällen sehr schwierig oder auch „praktisch“ unmöglich sein. Es gibt aber auch Konstruktionsaufgaben, für die zunächst keine Lösung bekannt war und für die die Lösbarkeit erst nach Übertragung in die Sprache der Algebra erkannt werden konnte. So wurde z. B. in einer 1961 veröffentlichten Sammlung über lösbare Dreiecks-Konstruktionsaufgaben die Aufgabe, mit Zirkel und Lineal ein Dreieck  $ABC$  aus Strecken der Maßzahlen  $h_a = |AH_A|$ ,  $s_b = |BS_B|$ ,  $w_a = |AW_A|$  (und einer Einheitsstrecke) zu konstruieren, als unlösbar registriert, ohne einen Beweis für die Unlösbarkeit zu erwähnen. Bei einem späteren Versuch, einen Beweis mit algebraischen Hilfsmitteln für die Unlösbarkeit dieser Aufgabe zu führen, ergab sich wider Erwarten ein Beweis für die Lösbarkeit; wir werden in 4.3.2. diesen Beweis ausführen.

In den meisten Abhandlungen zur Theorie der geometrischen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal werden umfangreiche Hilfsmittel aus der Algebra, insbesondere aus der Körpertheorie bzw. aus der Galois-Theorie herangezogen, um die Unlösbarkeit gewisser Konstruktionsaufgaben zu beweisen. Wir wählen im Rahmen unserer Abhandlung solche Beispiele für unlösbare Konstruktionsaufgaben aus, für die die Beweise der Unlösbarkeit mit wenigen elementaren Hilfsmitteln aus der Algebra geführt werden können; diese Hilfsmittel behandeln wir in 4.3.3. Für weiterführende Studien algebraischer Hilfsmittel in der Theorie der geometrischen Konstruktionen verweisen wir auf Literatur am Schluß dieses Buches.

### 4.3.2. Entscheidung über die Lösbarkeit geometrischer Konstruktionsaufgaben durch algebraische Betrachtungen

Wir beweisen in diesem Abschnitt mit algebraischen Hilfsmitteln die Lösbarkeit für zwei Konstruktionsaufgaben. Eine Ausführung der Konstruktion — eventuell gar noch in einer zweckmäßigen Form — und die Bestimmung der Lösungsgesamtheit sollen uns dabei nicht interessieren; uns genügt der Nachweis für die Möglichkeit der Konstruktion. Als erstes Beispiel wählen wir die in 4.3.1. erwähnte Dreiecks-Konstruktionsaufgabe. Das zweite Beispiel steht in Verbindung zu gewissen Betrachtungen über die Lagerung inkongruenter Kreise in einem Viereck.

**Beispiel 1.** Mit Zirkel und Lineal ist ein Dreieck  $ABC$  aus gegebenen Strecken der Maßzahlen  $h_a = |AH_A|$ ,  $s_b = |BS_B|$ ,  $w_a = |AW_A|$  (und einer Einheitsstrecke) zu konstruieren. Einfache Überlegungen zeigen (vgl. Abb. 4.10), daß für  $w_a > h_a$ ,  $s_b \geq \frac{1}{2}h_a$  und für  $w_a = h_a$ ,  $s_b > \frac{1}{2}h_a$  jeweils mindestens ein Dreieck mit den geforderten Eigenschaften existiert.

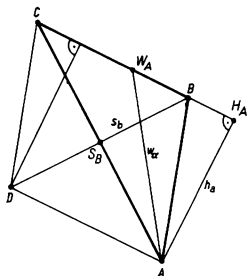


Abb. 4.10

**Beweis der Lösbarkeit.** Wir nehmen an, die Aufgabe sei bereits gelöst. Das Dreieck  $ABC$  denken wir uns durch  $D$  zu dem Parallelogramm ergänzt, in dem  $S_B$  der Diagonalschnittpunkt ist. Es sei  $x$  die Maßzahl der Strecke  $BH_A$ , und  $p$  sei Maßzahl der Strecke  $BW_A$ . Dann gelten die folgenden Beziehungen:

$$(a - x)^2 = 4s_b^2 - h_a^2, \quad (1)$$

$$(p + x)^2 = w_a^2 - h_a^2, \quad (2)$$

$$c^2 = h_a^2 + x^2, \quad (3)$$

$$b^2 = h_a^2 + (a + x)^2, \quad (4)$$

$$\frac{a-p}{p} = \frac{b}{c}; \quad (5)$$

die Beziehung (5) gilt, weil in jedem Dreieck jede Winkelhalbierende die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt.

Aus (1) bzw. (2) folgt

$$a = K + x \quad \text{mit} \quad K := \sqrt{4s_b^2 - h_a^2} \quad (1')$$

bzw.

$$p = L - x \quad \text{mit} \quad L := \sqrt{w_a^2 - h_a^2}. \quad (2')$$

Mit (2'), (3) und (4) folgt aus (5)

$$\left( \frac{a}{L-x} - 1 \right)^2 = 1 + \frac{a^2 + 2ax}{h_a^2 + x^2}$$

und schließlich

$$\frac{a^2}{(L-x)^2} - \frac{2a}{L-x} = \frac{a^2 + 2ax}{h_a^2 + x^2}.$$

Nach Division durch  $a$  erhält man unter Verwendung von (1')

$$\frac{K+x}{(L-x)^2} - \frac{2}{L-x} = \frac{K+3x}{h_a^2 + x^2}$$

und daraus

$$(K - 2L + 3x) \cdot (h_a^2 + x^2) = (K + 3x) \cdot (L^2 - 2Lx + x^2),$$

d. h.

$$(4L) \cdot x^2 + (3h_a^2 - 3L^2 + 2KL) \cdot x + (Kh_a^2 - 2Lh_a^2 - KL^2) = 0.$$

Jede der beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichungen in  $x$  kann durch endlich viele rationale Operationen und endlich viele Quadratwurzeloperationen aus  $h_a$ ,  $s_b$ ,  $w_a$  (und 1) berechnet werden. Die Diskriminante der quadratischen Gleichung ist auf Grund der eingangs genannten Bedingungen stets größer als Null. Da mindestens einer der beiden  $x$ -Werte als Maßzahl der Strecke  $BH_A$  in Betracht kommt, ist es möglich, die Strecke  $BH_A$  eines zu konstruierenden Dreiecks  $ABC$  aus den gegebenen Strecken mit Zirkel und Lineal zu konstruieren. Dann kann aber auch das Dreieck  $ABC$  selbst aus den gegebenen Strecken mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.

**Beispiel 2.** Zu einem gegebenen Kreis  $k_1$  der Radiusmaßzahl  $r_1$  (und einer Einheitsstrecke) ist mit Zirkel und Lineal ein größtmöglicher Kreis  $k_2$ , der den folgenden Bedingungen genügt, zu konstruieren: 1.  $k_2$  berührt  $k_1$  und liegt im Äußeren von  $k_1$ , 2.  $k_2$  und  $k_1$  liegen in einem gleichschenkligen Trapez mit drei gleichlangen Seiten, von denen jede mit ihrem Mittelpunkt  $k_1$  berührt, während

die vierte Seite mit ihrem Mittelpunkt  $k_2$  berührt (vgl. Abb. 4.11). Einfache Überlegungen zeigen, daß  $r_2$  in Abhängigkeit von  $r_1$  eindeutig bestimmt ist.

**Beweis der Lösbarkeit.** Wir nehmen an, die Aufgabe sei bereits gelöst. Wir bezeichnen den Mittelpunkt von  $k_1$  mit  $M_1$ , den Mittelpunkt von  $k_2$  mit  $M_2$ .

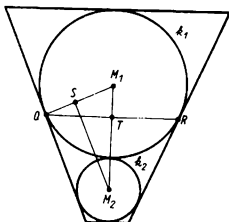


Abb. 4.11

und die Mittelpunkte der Trapezschenkel mit  $Q$  bzw.  $R$ . Der Schnittpunkt des Lotes von  $M_2$  auf die Gerade durch  $M_1$  und  $Q$  sei  $S$ , und der Schnittpunkt der Geraden durch  $M_1$  und  $M_2$  mit der Geraden durch  $Q$  und  $R$  sei  $T$ . Dann ist  $|M_1T| = r_2$ , weil die Maßzahl des Abstandes der beiden parallelen Trapezseiten gleich  $2r_1 + 2r_2$  ist, und somit gilt, da die Dreiecke  $M_1QT$  und  $M_1M_2S$  ähnlich sind,

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}.$$

Daraus folgt

$$r_2^2 + 2r_1r_2 - r_1^2 = 0$$

und schließlich

$$r_2 = -r_1(-) \sqrt{r_1^2 + r_1^2}$$

(das Minuszeichen kommt für den vorliegenden geometrischen Sachverhalt nicht in Betracht). Somit ist

$$r_2 = (\sqrt{2} - 1) \cdot r_1.$$

Es kann also  $r_2$  durch endlich viele rationale Operationen und endlich viele Quadratwurzeloperationen aus  $r_1$  (und 1) berechnet werden, und demzufolge ist es möglich, einen Kreis  $k_2$  entsprechend der Aufgabenstellung mit Zirkel und Lineal zu konstruieren.

#### 4.3.3. Konstruierbare Zahlen und zwei Hilfssätze aus der Algebra

Zur Vorbereitung der Beweise für die Unlösbarkeit einiger Konstruktionsaufgaben, die wir in 4.4. behandeln, beweisen wir zunächst zwei Hilfssätze aus der Algebra.

Es erweist sich dabei als vorteilhaft, für gewisse Zahlen den Begriff der Konstruierbarkeit in Anlehnung an den geometrischen Begriff der Konstruierbarkeit einzuführen.

**Definition 6.** Eine Zahl  $x$  heißt genau dann aus den Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  konstruierbar, wenn  $x$  aus  $a_1, a_2, \dots, a_n$  durch endlich viele rationale Operationen und endlich viele Quadratwurzeloperationen errechnet werden kann.

So ist z. B.  $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$  eine aus rationalen Zahlen konstruierbare Zahl; da jede rationale Zahl aus der Zahl 1 konstruierbar ist, kann die Zahl unseres Beispiels auch als eine aus der Zahl 1 konstruierbare Zahl angesehen werden. Die Zahl  $\frac{1}{2}\sqrt{\pi} + \pi \cdot \sqrt{3 - \sqrt{2}}$  ist eine aus den beiden Zahlen 1 und  $\pi$  konstruierbare Zahl. Bei Reihenentwicklungen für reelle Zahlen kann nichts über die Konstruierbarkeit aus gegebenen Zahlen, etwa aus den rationalen Zahlen, ausgesagt werden, weil in Reihenentwicklungen unendlich viele Operationen auftreten; man denke z. B. an

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots,$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Für den Beweis des folgenden Hilfssatzes erinnern wir an den Begriff der Körpererweiterung eines gegebenen Körpers durch Adjunktion eines Elementes. Adjungiert man zu einem Körper  $K$  ein durch eine Quadratwurzeloperation entstandenes Element  $\sqrt{k}$  ( $k \in K$ ,  $\sqrt{k} \notin K$ ), so entsteht ein echter Erweiterungskörper  $K'$ ; jedes Element von  $K'$  gestattet die Darstellung  $a + b \cdot \sqrt{k}$  mit geeigneten  $a, b \in K$ . Aus  $a + b \sqrt{k} = 0$  folgt hierbei wegen  $\sqrt{k} \notin K$  stets  $b = 0$  und  $a = 0$ .

**Hilfssatz 1.** Wenn eine kubische Gleichung

$$x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (1)$$

mit rationalen Koeffizienten keine rationale Lösung besitzt, dann ist keine ihrer Lösungen aus rationalen Zahlen konstruierbar.

**Beweis.** Der nachfolgende indirekte Beweis beruht auf Beweisgedanken von E. LANDAU (1877–1938).

Nach Voraussetzung liegt keine der drei Lösungen von (1) im Körper der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$ ; im folgenden Beweis wollen wir den Körper der rationalen Zahlen mit  $K_0$  bezeichnen.

Angenommen, es gäbe eine aus rationalen Zahlen konstruierbare Lösung der Gleichung (1); diese Lösung sei mit  $x_1$  bezeichnet. Dann läge diese Lösung in einem durch  $n$  Quadratwurzeladjunktionen aus  $K_0$  entstandenen Erweiterungskörper  $K_n$  mit minimalem  $n \geq 1$ . Für  $x_1$  gäbe es damit eine Darstellung der Form

$$x_1 = p + q \cdot \sqrt{w} \quad (p, q, w \in K_{n-1}, \sqrt{w} \notin K_{n-1}).$$

Dann müßte auch

$$x_2 = p - q \cdot \sqrt{w} \in K_n$$

eine Lösung von (1) sein; denn wegen  $x_1 = p + q \sqrt{w}$

$$x_1^3 + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 = a + b \cdot \sqrt{w}$$

mit

$$a := p^3 + 3pq^2w + a_2 \cdot (p^2 + q^2w) + a_1p + a_0 \in K_{n-1},$$

$$b := 3p^2q + q^3w + a_2 \cdot 2pq + a_1q \in K_{n-1},$$

und weil  $x_1$  Lösung von (1) ist, wäre  $a + b \cdot \sqrt{w} = 0$ , d. h.  $a = 0$  und  $b = 0$ , und somit wäre

$$x_2^3 + a_2 x_2^2 + a_1 x_2 + a_0 = a - b \cdot \sqrt{w} = 0.$$

Die beiden Lösungen  $x_1$  und  $x_2$  wären verschieden, d. h., es wäre  $x_1 - x_2 = 2q\sqrt{w} \neq 0$ ; denn andernfalls wäre  $q = 0$ , und das wäre gleichbedeutend mit  $x_1 = x_2 = p \in K_{n-1}$  im Widerspruch zu den Eigenschaften von  $K_n$ .

Nach dem Vietaschen Wurzelsatz wäre

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a_2,$$

d. h.

$$x_3 = -a_2 - (x_1 + x_2) = -a_2 - 2p.$$

Damit läge  $x_3$  in  $K_{n-1}$  und wäre eine aus rationalen Zahlen konstruierbare Lösung von (1). Eine Wiederholung der soeben für  $x_1$  durchgeführten Betrachtungen mit der Lösung  $x_3$  würde dann zu einem offensichtlichen Widerspruch zu den Eigenschaften von  $K_n$  führen. Also war die Annahme falsch, d. h., es gibt keine aus rationalen Zahlen konstruierbare Lösung der Gleichung (1), wenn diese Gleichung keine rationale Lösung besitzt.

Bei den Anwendungen des Hilfssatzes 1 in den Unlösbarkeitsbeweisen von 4.4. berufen wir uns nicht auf die Aussage des Hilfssatzes in der Form der vorliegenden Implikation, sondern wir verwenden die Kontraposition dieser Implikation: Wenn eine kubische Gleichung  $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$  mit rationalen Koeffizienten eine aus rationalen Zahlen konstruierbare Lösung besitzt, dann ist mindestens eine ihrer Lösungen rational.

**Hilfssatz 2.** Wenn eine kubische Gleichung  $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$  mit ganzzahligen Koeffizienten eine rationale Lösung  $x_1$  besitzt, dann ist  $x_1$  ganzzahlig und ein Teiler von  $a_0$ .

**Beweis.** Es sei  $x_1$  eine rationale Lösung der Gleichung

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}).$$



Dann gestattet  $x_1$  die Darstellung  $x_1 = l/m$  mit  $l, m \in \mathbb{Z}$ ,  $m > 0$ ,  $\text{ggT}(l, m) = 1$ . Weil  $x_1$  eine Lösung ist, folgt

$$l^3 + a_2 l^2 m + a_1 l m^2 + a_0 m^3 = 0. \quad (2)$$

Aus (2) folgt

$$l^3 = -m \cdot (a_2 l^2 + a_1 l m + a_0 m^2),$$

und daraus folgt  $m = 1$ . Aus (2) folgt aber auch

$$a_0 m^3 = -l \cdot (l^2 + a_2 l m + a_1 m^2),$$

und daraus folgt, daß  $l$  ein Teiler von  $a_0$  ist.

Aus der Darstellung  $x_1 = l/m$  folgt nun unmittelbar die Behauptung des Hilfssatzes 2.

#### 4.4. Die Unlösbarkeit einiger Konstruktionsaufgaben mit Zirkel und Lineal

Die im folgenden behandelten Aufgaben sind bei den Mathematikern unter kurzen Formulierungen bekannt, die auch wir zur Bezeichnung dieser Aufgaben verwenden wollen. Dabei müssen wir uns aber darüber im klaren sein, daß diese kurzen Formulierungen einer Präzisierung bedürfen, weil in ihnen wesentliche Voraussetzungen und wesentliche Bedingungen der eigentlichen Aufgabenstellung nicht explizit zum Ausdruck kommen; wir werden in jedem Fall eine solche präzisierte Aufgabenformulierung vornehmen. Wenn diese nicht explizit genannten Voraussetzungen und Bedingungen einer solchen Aufgabe außer acht gelassen werden, dann sind Mißverständnisse und Fehlinterpretationen leicht möglich; eine solche Aufgabe, für die wir die Unlösbarkeit beweisen, könnte dann sogar lösbar werden. Die vielen „Würfelverdoppeler“ und „Winkeldreiteiler“, die es auch heute in den Reihen der Nichtmathematiker noch immer gibt, haben häufig die eigentliche Aufgabenstellung gar nicht verstanden, oder sie verwenden Zirkel und Lineal in anderer Weise, als es in der Theorie der geometrischen Konstruktionen üblich ist.

##### 4.4.1. Die „Verdoppelung des Würfels“ (auch das „Delische Problem“ genannt)

Zu einer Strecke der Maßzahl  $a$ , die als Kantenmaßzahl eines Würfels mit der Volumenmaßzahl  $a^3$  angesehen werden kann, (und zu einer Einheitsstrecke) ist mit Zirkel und Lineal eine Strecke der Maßzahl  $a \cdot \sqrt[3]{2}$ , die als Kantenmaßzahl eines Würfels der Volumenmaßzahl  $2 \cdot a^3$  angesehen werden kann, zu konstruieren.

Beweis der Unlösbarkeit. Offensichtlich ist die formulierte Konstruktionsaufgabe genau dann lösbar, wenn es möglich ist, aus einer Einheitsstrecke mit Zirkel und Lineal eine Strecke der Maßzahl  $\sqrt[3]{2}$  zu konstruieren.

Wäre die gegebene Konstruktionsaufgabe lösbar, dann wäre nach Satz 2 in 4.3.1. auch die Zahl  $x := \sqrt[3]{2}$  eine aus der Zahl 1 konstruierbare Zahl, und es hätte die Gleichung

$$x^3 - 2 = 0 \quad (1)$$

eine aus rationalen Zahlen konstruierbare Lösung.

Nach Hilfssatz 1 (wir verwenden hier und auch in den folgenden Beispielen die Kontraposition der im Hilfssatz 1 formulierten Implikation) müßte dann die Gleichung (1) mindestens eine rationale Lösung besitzen, und diese wäre nach Hilfssatz 2 ein Teiler von 2. Damit ergäbe sich ein Widerspruch; denn keine der Zahlen  $-2, -1, +1, +2$  ist Lösung von (1). Also ist die gegebene Konstruktionsaufgabe nicht lösbar.

#### 4.4.2. Die „Dreiteilung des Winkels“

Zu jeder gegebenen Winkelgröße  $\varphi$  ist mit Zirkel und Lineal ein Winkel der Größe  $\frac{1}{3} \cdot \varphi$  zu konstruieren. (Einen Winkel der Größe  $\varphi$  denken wir uns mittelbar durch eine Strecke gegeben, etwa durch eine Strecke der Maßzahl  $\sin \varphi$ .)

Beweis der Unlösbarkeit. Die Unlösbarkeit der formulierten Konstruktionsaufgabe ist bewiesen, wenn wir für einen speziellen Winkel, z. B. für einen Winkel der Größe  $\varphi := 30^\circ$  bewiesen haben, daß es nicht möglich ist, aus einer Strecke der Maßzahl  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$  mit Zirkel und Lineal eine Strecke der Maßzahl  $\sin 10^\circ$  zu konstruieren.

Wäre die gegebene Konstruktionsaufgabe lösbar, dann wäre nach Satz 2 in 4.3.1. auch die Zahl  $x := \sin 10^\circ$  eine aus der Zahl  $\frac{1}{2}$  konstruierbare Zahl, und es hätte auf Grund der aus der Trigonometrie bekannten Formel  $\sin 3\alpha = 3 \cdot \sin \alpha - 4 \cdot \sin^3 \alpha$  die Gleichung

$$4x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 0 \quad (2)$$

eine aus rationalen Zahlen konstruierbare Lösung. Dann müßte aber auch die Gleichung

$$y^3 - 3y + 1 = 0, \quad (3)$$

die durch die Substitution  $y = 2x$  aus der Gleichung (2) hervorgeht, eine aus rationalen Zahlen konstruierbare Lösung haben. Nach Hilfssatz 1 müßte dann die Gleichung (3) mindestens eine rationale Lösung besitzen, und diese wäre nach Hilfssatz 2 ein Teiler von 1. Damit ergäbe sich ein Widerspruch, denn weder  $-1$

noch  $+1$  ist Lösung von (3). Also ist die gegebene Konstruktionsaufgabe nicht lösbar.

Bemerkung. Es gibt selbstverständlich Winkel spezieller Größen  $\varphi$ , so daß mit Zirkel und Lineal Winkel der Größe  $\frac{1}{3} \cdot \varphi$  konstruiert werden können; das ist z. B. für jede Winkelgröße  $\varphi = 360^\circ/2n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) der Fall. Diese Tatsache steht aber nicht im Widerspruch zum Beweis der Unlösbarkeit der oben formulierten Konstruktionsaufgabe. Wenn wir außer Zirkel und Lineal noch gewisse andere Konstruktionsinstrumente zulassen, dann gibt es Verfahren, mit denen zu jedem Winkel jeder Größe  $\varphi$  ein Winkel der Größe  $\frac{1}{3} \cdot \varphi$  exakt konstruiert werden kann; wir werden in 4.5.1. ein derartiges Verfahren behandeln.

#### 4.4.3. „Konstruktion des regelmäßigen 7-Ecks“

Zu einem Einheitskreis ist mit Zirkel und Lineal ein eingeschriebenes regelmäßiges 7-Eck zu konstruieren.

**Beweis der Unlösbarkeit.** Wir verwenden für den folgenden Beweis eine Betrachtung über komplexe Zahlen. Die Gleichung  $z^7 - 1 = 0$  besitzt außer der Lösung  $z_0 = 1$  noch die sechs weiteren komplexen Lösungen

$$z_\nu = \cos \frac{\nu \cdot 360^\circ}{7} + i \cdot \sin \frac{\nu \cdot 360^\circ}{7} \quad (\nu = 1, \dots, 6);$$

die Lösungen  $z_1$  und  $z_6$ , die Lösungen  $z_2$  und  $z_5$  und die Lösungen  $z_3$  und  $z_4$  sind jeweils Paare konjugiert komplexer Zahlen, und es ist

$$\frac{1}{z_1} = z_6, \quad \frac{1}{z_2} = z_5, \quad \frac{1}{z_3} = z_4.$$

Die sieben Lösungen  $z_0, z_1, \dots, z_6$  werden die siebenten Einheitswurzeln genannt. Bei Abbildung der siebenten Einheitswurzeln in die Gaußsche Zahlenebene ergeben die Bildpunkte die Ecken eines regelmäßigen 7-Ecks; die Ecken liegen auf dem Einheitskreis um den Punkt  $(0, 0)$ , und eine Ecke ist der Einheitspunkt  $(1, 0)$  auf der reellen Achse (vgl. Abb. 4.12). Aus  $z^7 - 1 = 0$  folgt wegen

$$z^7 - 1 = (z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) \cdot (z - 1)$$

für die von 1 verschiedenen siebenten Einheitswurzeln die Gleichung

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

und daraus

$$z^3 + \frac{1}{z^3} + z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1 = 0,$$

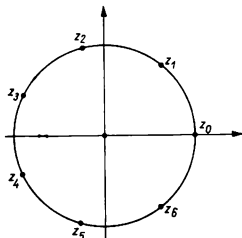


Abb. 4.12

d. h.

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - 3 \cdot \left(z + \frac{1}{z}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0;$$

mit Hilfe der Substitution  $y = (z + 1/z)$  entsteht schließlich die Gleichung

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0 \quad (4)$$

mit den Lösungen

$$\begin{aligned} y_\nu &= z_\nu + \frac{1}{z_\nu} \\ &= \cos \frac{\nu \cdot 360^\circ}{7} + i \cdot \sin \frac{\nu \cdot 360^\circ}{7} + \cos \frac{\nu \cdot 360^\circ}{7} - i \cdot \sin \frac{\nu \cdot 360^\circ}{7} \\ &= 2 \cdot \cos \frac{\nu \cdot 360^\circ}{7} \quad (\nu = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Wäre die gegebene Konstruktionsaufgabe lösbar, dann könnte auch mit Zirkel und Lineal eine Strecke der Maßzahl  $2 \cdot \cos(360^\circ/7)$  aus einer Einheitsstrecke konstruiert werden, und nach Satz 2 in 4.3.1. wäre die Zahl  $y_\nu = 2 \cdot \cos(360^\circ/7)$  eine aus 1 konstruierbare Zahl. Dann hätte aber auch die Gleichung (4) eine aus rationalen Zahlen konstruierbare Lösung. Nach Hilfssatz 1 müßte die Gleichung (4) mindestens eine rationale Lösung besitzen, und diese wäre nach Hilfssatz 2 ein Teiler von 1. Damit ergäbe sich ein Widerspruch; denn weder die Zahl  $-1$  noch die Zahl  $+1$  ist eine Lösung von (4). Also ist die gegebene Konstruktionsaufgabe nicht lösbar.

#### 4.4.4. „Konstruktion eines Dreiecks aus $a, b, w_a$ “

Zu jedem Tripel reeller Zahlen  $a, b, w_a$ , für welche ein Dreieck  $ABC$  mit  $a = |BC|$ ,  $b = |AC|$ ,  $w_a = |AW_a|$  existiert, ist ein solches mit Zirkel und Lineal aus gegebenen Strecken der Maßzahlen  $a, b, w_a$  (und einer Einheitsstrecke) zu konstruieren.

**Beweis der Unlösbarkeit.** Die Unlösbarkeit der formulierten Konstruktionsaufgabe ist bewiesen, wenn wir für ein spezielles Zahlentripel  $a, b, w_a$ , für welches ein Dreieck  $ABC$  mit  $a = |BC|$ ,  $b = |AC|$ ,  $w_a = |AW_A|$  existiert, zeigen können, daß es nicht möglich ist, ein solches Dreieck  $ABC$  aus gegebenen Strecken der Maßzahlen  $a, b, w_a$  (und 1) mit Zirkel und Lineal zu konstruieren. Es ist leicht einzusehen, daß für  $a := 1, b := 1, w_a := 1$  ein Dreieck mit den geforderten Eigenschaften existiert; denn wenn man  $|BC| = |AC| = 1$  annimmt und  $|\sphericalangle(ACB)|$  von einer Größe in hinreichend kleiner Umgebung von  $0^\circ$  bis zu einer Größe in hinreichend kleiner Umgebung von  $180^\circ$  wachsen läßt, dann wächst  $|AW_A|$  von einem Wert, der offensichtlich kleiner ist als 1, bis zu einem Wert, der offensichtlich größer ist als 1, und aus Stetigkeitsgründen muß es dann auch ein Dreieck mit  $|AW_A| = 1$  geben.

Wäre die gegebene Konstruktionsaufgabe und damit auch die Aufgabe mit den speziellen Zahlenwerten lösbar, dann wäre auch die Zahl  $c = |AB|$  eine aus der Zahl 1 konstruierbare Zahl.

Für jedes Dreieck  $ABC$  gilt

$$\frac{1}{2} \cdot w_a \cdot b \cdot \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \cdot w_a \cdot c \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha,$$

d. h.

$$w_a \cdot (b + c) = 2bc \cdot \cos \frac{\alpha}{2};$$

wegen

$$2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha \quad \text{und} \quad \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

folgt schließlich für jedes Dreieck  $ABC$  die Beziehung

$$w_a^2 \cdot (b + c)^2 = bc \cdot ((b + c)^2 - a^2).$$

Mit  $a = b = w_a = 1$  ergibt sich

$$(1 + c)^2 = c \cdot ((1 + c)^2 - 1),$$

d. h.

$$c^3 + c^2 - 2c - 1 = 0. \tag{5}$$

Wäre also  $c$  aus der Zahl 1 konstruierbar, dann müßte die Gleichung (5) eine aus rationalen Zahlen konstruierbare Lösung besitzen. Nach Hilfssatz 1 müßte dann die Gleichung (5) auch mindestens eine rationale Lösung haben, und diese wäre nach Hilfssatz 2 ein Teiler von 1. Damit ergäbe sich ein Widerspruch, denn weder  $-1$  noch  $+1$  ist Lösung von (5). Also ist die gegebene Konstruktionsaufgabe nicht lösbar.

**Bemerkung.** Mit dem Beweis der Unlösbarkeit der oben formulierten Konstruktionsaufgabe ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, daß es Zahlentripel  $a, b, w_a$  gibt, für die die spezielle Konstruktionsaufgabe lösbar ist.

#### 4.4.5. „Konstruktion eines Dreiecks aus $w_a, w_\beta, w_\gamma$ “

Zu jedem Tripel reeller Zahlen  $w_a, w_\beta, w_\gamma$ , für welche ein Dreieck  $ABC$  mit  $w_a = |AW_A|$ ,  $w_\beta = |BW_B|$ ,  $w_\gamma = |CW_C|$  existiert, ist ein solches mit Zirkel und Lineal aus gegebenen Strecken der Maßzahlen  $w_a, w_\beta, w_\gamma$  (und einer Einheitsstrecke) zu konstruieren.

**Beweis der Unlösbarkeit.** Die Unlösbarkeit der formulierten Konstruktionsaufgabe ist bewiesen, wenn wir für ein spezielles Zahlentripel  $w_a, w_\beta, w_\gamma$ , für welches ein Dreieck  $ABC$  mit  $w_a = |AW_A|$ ,  $w_\beta = |BW_B|$ ,  $w_\gamma = |CW_C|$  existiert, zeigen können, daß es nicht möglich ist, ein solches Dreieck  $ABC$  aus gegebenen Strecken der Maßzahlen  $w_a, w_\beta, w_\gamma$  (und 1) mit Zirkel und Lineal zu konstruieren. Es ist leicht einzusehen, daß für  $w_a = \frac{1}{2}$ ,  $w_\beta = w_\gamma = 2$ , ein gleichschenkliges Dreieck mit den geforderten Eigenschaften existiert; denn wenn man mit  $|AW_A| = \frac{1}{2}$  alle möglichen gleichschenkligen Dreiecke  $ABC$  mit  $|AB| = |AC|$  betrachtet und  $|\sphericalangle(BAC)|$  von einer Größe in hinreichend kleiner Umgebung von  $0^\circ$  bis zu einer Größe in hinreichend kleiner Umgebung von  $180^\circ$  wachsen läßt, dann wächst  $|BW_B| = |CW_C|$  von einem Wert, der offensichtlich kleiner ist als 2, bis zu einem Wert, der offensichtlich größer ist als 2, und aus Stetigkeitsgründen muß es dann auch ein gleichschenkliges Dreieck mit  $|BW_B| = |CW_C| = 2$  geben. Wäre die gegebene Konstruktionsaufgabe und damit auch die Aufgabe mit den speziellen Zahlenwerten lösbar, dann wäre auch die Zahl  $x = 4 \cdot \sin(\beta/2)$  eine aus den Zahlen  $\frac{1}{2}$  und 2 konstruierbare Zahl. In jedem gleichschenkligen Dreieck  $ABC$  mit  $|AB| = |AC|$  ergibt sich bei Anwendung des Sinussatzes auf das Teildreieck  $ABW_B$  die Beziehung

$$b \cdot \sin 2\beta = w_\beta \cdot \sin \frac{3}{2}\beta;$$

außerdem gilt

$$b \cdot \sin \beta = w_a.$$

Mit  $w_a = \frac{1}{2}$  und  $w_\beta = 2$  folgt

$$\frac{1}{2} \cdot \sin 2\beta = 2 \cdot \sin \frac{3}{2}\beta \cdot \sin \beta$$

und daraus

$$\cos \beta = 2 \cdot \sin \frac{3}{2}\beta,$$

d. h.

$$1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{\beta}{2} = 6 \cdot \sin \frac{\beta}{2} - 8 \cdot \sin^3 \frac{\beta}{2};$$

mit der Substitution  $x = 4 \cdot \sin(\beta/2)$  folgt schließlich

$$x^3 - x^2 - 12x + 8 = 0. \quad (6)$$

Wäre also  $x = 4 \cdot \sin(\beta/2)$  eine aus den Zahlen  $\frac{1}{2}$  und 2 konstruierbare Zahl, dann müßte die Gleichung (6) eine aus rationalen Zahlen konstruierbare Lösung

besitzen. Nach Hilfssatz 1 müßte dann die Gleichung (6) auch mindestens eine rationale Lösung haben, und diese wäre nach Hilfssatz 2 ein Teiler von 8. Damit ergäbe sich ein Widerspruch; denn keine der Zahlen  $-8, -4, -2, -1, +1, +2, +4, +8$  ist Lösung von (6). Also ist die gegebene Konstruktionsaufgabe nicht lösbar.

Bemerkung. Es gibt selbstverständlich auch Zahlentripel  $w_a, w_b, w_\gamma$ , so daß die spezielle Konstruktionsaufgabe lösbar ist.

#### 4.4.6. Eine vollständige Aufzählung aller lösbaren und unlösbaren Dreiecks-konstruktionsaufgaben aus Seiten, Winkeln, Höhen, Seitenhalbierenden und Winkelhalbierenden

Wir haben in den vorangegangenen Abschnitten mit algebraischen Hilfsmitteln die Lösbarkeit und auch die Unlösbarkeit gewisser Konstruktionsaufgaben bewiesen. In den von uns ausgewählten Dreiecks-Konstruktionsaufgaben waren die Maßzahlen der gegebenen Strecken „allgemein“ (oder „unbestimmt“) angegeben. Es gibt unübersehbar viele derartige „allgemeine“ Dreiecks-Konstruktionsaufgaben, und die Entscheidung über die Lösbarkeit ist in vielen Fällen sehr schwer (falls sie überhaupt möglich ist). Wir möchten im folgenden eine Übersicht über die (mit Zirkel und Lineal) lösbaren und unlösbaren „allgemeinen“ Dreiecks-Konstruktionsaufgaben geben, wenn für die Größen der gegebenen Objekte (hier wollen wir neben Strecken auch wieder Winkel zulassen) nur

$$a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, h_a, h_b, h_c, s_a, s_b, s_c, w_a, w_b, w_\gamma \quad (7)$$

verwendet werden sollen (erforderliche Beweise findet der interessierte Leser in der Arbeit von O. KRÖTENHEERDT, Zur Theorie der Dreieckskonstruktionen, Wiss. Z. Univ. Halle XV (1966), 677–700).

Mit jeweils drei der in (7) gegebenen Größen läßt sich eine „allgemeine“ Dreiecks-Konstruktionsaufgabe formulieren. Offensichtlich gibt es

$$\binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455$$

derartige Aufgaben. Jede Aufgabe wird durch eine Klammer um die drei gegebenen Größen bezeichnet; als Reihenfolge dieser Größen wählen wir diejenige, die der in (7) gegebenen Reihenfolge entspricht.

Die 455 Aufgaben fassen wir zu Aufgabenkomplexen zusammen, so daß jeweils alle die Aufgaben zu einem Komplex gehören, die durch Umbenennung der Dreiecks-ecken und der dadurch verursachten Umbenennung der gegebenen Größen ineinander übergehen; die Aufgaben jedes Komplexes erfordern zu ihrer Behandlung gleichartige Überlegungen. Einen solchen Aufgabenkomplex bilden z. B. die Aufgaben  $(a, b, a)$ ,  $(a, b, \beta)$ ,  $(b, c, \beta)$ ,  $(b, c, \gamma)$ ,  $(a, c, a)$ ,  $(a, c, \gamma)$ . Es gibt insgesamt 95 derartige Aufgabenkomplexe, und zwar 60 Komplexe mit jeweils sechs Aufgaben, 30 Komplexe mit jeweils drei Aufgaben und fünf Komplexe mit jeweils einer Aufgabe.

Wählt man nun aus jedem der 95 Aufgabenkomplexe nach einem gewissen lexikographischen Prinzip (die durch (7) gegebenen Größen mögen in der gegebenen Reihenfolge als „Alphabet“ dienen) jeweils die erste Aufgabe aus, so haben wir damit ein

eindeutiges Symbol für den Typ aller in dem betreffenden Komplex erfaßten Aufgaben. In diesem Sinne ergeben sich die 95 Aufgabentypen, die in Tabelle 4.1 aufgezählt sind. Die Untersuchungen in der oben genannten Arbeit führten zu folgendem Ergebnis:

63 Aufgabentypen sind lösbar;

30 Aufgabentypen sind (im allgemeinen) unlösbar;

2 Aufgabentypen sind unterbestimmt, und zwar

$(\alpha, \beta, h_c)$  mit der Beziehung  $h_c = a \cdot \sin \beta$  und

$(\alpha, \beta, \gamma)$  mit der Beziehung  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ .

Tabelle 4.1

Nr.	Aufgabentyp	Anzahl der Aufgaben gleichen Typs	lösbar	Nr.	Aufgabentyp	Anzahl der Aufgaben gleichen Typs	lösbar
1	$(a \ b \ c)$	1	ja	36	$(a \ h_b \ w_a)$	6	nein
2	$(a \ b \ \alpha)$	6	ja	37	$(a \ h_b \ w_\beta)$	6	ja
3	$(a \ b \ \gamma)$	3	ja	38	$(a \ h_b \ w_\gamma)$	6	ja
4	$(a \ b \ h_a)$	6	ja	39	$(a \ s_a \ s_b)$	6	ja
5	$(a \ b \ h_c)$	3	ja	40	$(a \ s_a \ w_a)$	3	ja
6	$(a \ b \ s_a)$	6	ja	41	$(a \ s_a \ w_\beta)$	6	nein
7	$(a \ b \ s_c)$	3	ja	42	$(a \ s_b \ s_c)$	3	ja
8	$(a \ b \ w_a)$	6	nein	43	$(a \ s_b \ w_a)$	6	nein
9	$(a \ b \ w_\gamma)$	3	ja	44	$(a \ s_b \ w_\beta)$	6	nein
10	$(\alpha \ \alpha \ \beta)$	6	ja	45	$(a \ s_b \ w_\gamma)$	6	nein
11	$(\alpha \ \alpha \ h_a)$	3	ja	46	$(a \ w_a \ w_\beta)$	6	nein
12	$(\alpha \ \alpha \ h_b)$	6	ja	47	$(a \ w_a \ w_\gamma)$	3	nein
13	$(\alpha \ \alpha \ s_a)$	3	ja	48	$(\alpha \ \beta \ \gamma)$	1	u. b.
14	$(\alpha \ \alpha \ s_b)$	6	ja	49	$(\alpha \ \beta \ h_a)$	6	ja
15	$(\alpha \ \alpha \ w_a)$	3	ja	50	$(\alpha \ \beta \ h_c)$	3	ja
16	$(\alpha \ \alpha \ w_\beta)$	6	nein	51	$(\alpha \ \beta \ s_a)$	6	ja
17	$(\alpha \ \beta \ \gamma)$	3	ja	52	$(\alpha \ \beta \ s_c)$	3	ja
18	$(\alpha \ \beta \ h_a)$	6	ja	53	$(\alpha \ \beta \ w_a)$	6	ja
19	$(\alpha \ \beta \ h_b)$	6	ja	54	$(\alpha \ \beta \ w_\gamma)$	3	ja
20	$(\alpha \ \beta \ h_c)$	6	u. b.	55	$(\alpha \ h_a \ h_b)$	6	ja
21	$(\alpha \ \beta \ s_a)$	6	ja	56	$(\alpha \ h_a \ s_a)$	3	ja
22	$(\alpha \ \beta \ s_b)$	6	ja	57	$(\alpha \ h_a \ s_b)$	6	ja
23	$(\alpha \ \beta \ s_c)$	6	ja	58	$(\alpha \ h_a \ w_a)$	3	ja
24	$(\alpha \ \beta \ w_a)$	6	nein	59	$(\alpha \ h_a \ w_\beta)$	6	nein
25	$(\alpha \ \beta \ w_\beta)$	6	ja	60	$(\alpha \ h_b \ h_c)$	3	ja
26	$(\alpha \ \beta \ w_\gamma)$	6	ja	61	$(\alpha \ h_b \ s_a)$	6	ja
27	$(\alpha \ h_a \ h_b)$	6	ja	62	$(\alpha \ h_b \ s_b)$	6	ja
28	$(\alpha \ h_a \ s_a)$	3	ja	63	$(\alpha \ h_b \ s_c)$	6	ja
29	$(\alpha \ h_a \ s_b)$	6	ja	64	$(\alpha \ h_b \ w_a)$	6	ja
30	$(\alpha \ h_a \ w_a)$	3	ja	65	$(\alpha \ h_b \ w_\beta)$	6	ja
31	$(\alpha \ h_a \ w_\beta)$	6	nein	66	$(\alpha \ h_b \ w_\gamma)$	6	nein
32	$(\alpha \ h_b \ h_c)$	3	ja	67	$(\alpha \ s_a \ s_b)$	6	ja
33	$(\alpha \ h_b \ s_a)$	6	ja	68	$(\alpha \ s_a \ w_a)$	3	ja
34	$(\alpha \ h_b \ s_b)$	6	ja	69	$(\alpha \ s_a \ w_\beta)$	6	nein
35	$(\alpha \ h_b \ s_c)$	6	ja	70	$(\alpha \ s_b \ s_c)$	3	ja



Tabelle 4.1 (Fortsetzung)

Nr.	Aufgabentyp	Anzahl der Aufgaben gleichen Typs	lösbar	Nr.	Aufgabentyp	Anzahl der Aufgaben gleichen Typs	lösbar
71	$(a \ s_b \ w_a)$	6	nein	84	$(h_a \ s_b \ s_c)$	3	ja
72	$(a \ s_b \ w_\beta)$	6	nein	85	$(h_a \ s_b \ w_a)$	6	ja
73	$(a \ s_b \ w_\gamma)$	6	nein	86	$(h_a \ s_b \ w_\beta)$	6	nein
74	$(a \ w_a \ w_\beta)$	6	nein	87	$(h_a \ s_b \ w_\gamma)$	6	nein
75	$(a \ w_\beta \ w_\gamma)$	3	nein	88	$(h_a \ w_a \ w_\beta)$	6	nein
76	$(h_a \ h_b \ h_c)$	1	ja	89	$(h_a \ w_\beta \ w_\gamma)$	3	nein
77	$(h_a \ h_b \ s_a)$	6	ja	90	$(s_a \ s_b \ s_c)$	1	ja
78	$(h_a \ h_b \ s_c)$	3	ja	91	$(s_a \ s_b \ w_a)$	6	nein
79	$(h_a \ h_b \ w_a)$	6	nein	92	$(s_a \ s_b \ w_\gamma)$	3	nein
80	$(h_a \ h_b \ w_\gamma)$	3	ja	93	$(s_a \ w_a \ w_\beta)$	6	nein
81	$(h_a \ s_a \ s_b)$	6	ja	94	$(s_a \ w_\beta \ w_\gamma)$	3	nein
82	$(h_a \ s_a \ w_a)$	3	ja	95	$(w_a \ w_\beta \ w_\gamma)$	1	nein
83	$(h_a \ s_a \ w_\beta)$	6	nein				

Die Beweise der Unlösbarkeit wurden nach der gleichen Methode wie in 4.4.4. und 4.4.5. geführt, indem für ein spezielles Zahlentripel, für welches ein Dreieck existiert, die Unlösbarkeit nachgewiesen wurde; das schließt nicht aus, daß es zu jedem unlösbaren Aufgabentyp auch spezielle Zahlentripel geben kann, für die die spezielle Aufgabe lösbar ist. Bei den lösbaren Aufgabentypen ist zu beachten, daß die gegebenen Größen die Existenz mindestens eines Dreiecks entsprechend der Aufgabenstellung gewährleisten müssen; so sind z. B. beim Aufgabentyp  $(a, b, c)$  die Bedingungen  $a + b > c$ ,  $b + c > a$ ,  $c + a > b$  zu beachten. Bei Berücksichtigung derartiger Einschränkungen kann dann aber bei jedem lösbaren Aufgabentyp zu jedem Tripel der gegebenen Größen jedes Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabenstellung genügt, konstruiert werden.

#### 4.4.7. Aufgaben

1. Es ist mit algebraischen Hilfsmitteln für den Aufgabentyp  $(h_a, h_b, w_\gamma)$  und für den Aufgabentyp  $(a, s_a, w_a)$  die Lösbarkeit zu beweisen.
2. Man beweise für den Aufgabentyp  $(a, \beta, w_a)$  und für den Aufgabentyp  $(h_a, h_b, w_a)$  die Unlösbarkeit.

### 4.5. Konstruktionen mit anderen Hilfsmitteln

Alle bisher behandelten Konstruktionsaufgaben waren mit der Forderung verknüpft, als Konstruktionsinstrumente nur den Zirkel und das Lineal in einer bestimmten Weise zu verwenden.

Im vorliegenden Abschnitt wollen wir nun noch über einige Konstruktionen berichten, in denen Zirkel und Lineal in anderer als in der bisher beschriebenen Weise

zu verwenden sind oder bei denen entweder nur der Zirkel oder nur das Lineal zur Anwendung kommen darf. Auch auf den Gebrauch einiger anderer Konstruktionsinstrumente bei gewissen Konstruktionen werden wir kurz eingehen. Weitere Ausführungen zu den Theorien derartiger Konstruktionen bzw. Ansätze zu solchen Theorien findet der interessierte Leser in [3], [7] und [14].

### 4.5.1. Eine Winkeldreiteilung

Die im folgenden behandelte Winkeldreiteilung ist bereits in den Werken von ARCHIMEDES (287?–212 v. u. Z.) zu finden.

Zu jedem Elementarwinkel  $\sphericalangle ASB$  jeder Größe  $\varphi$  ( $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ ) ist ein Winkel der Größe  $\frac{1}{3}\varphi$  zu konstruieren.

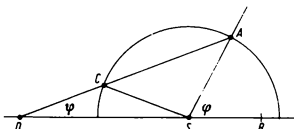


Abb. 4.13

· I. Konstruktionsplan (vgl. Abb. 4.13):

a) Konstruktion des Kreises  $k$  um  $S$  mit  $r = |SA|$ ;

b) Konstruktion der Geraden  $g$  durch  $S$  und  $B$ ;

c) Konstruktion des Punktes  $C$ :

1. auf  $k$ , 2. auf der Geraden durch  $A$  und  $D$ ;

Konstruktion des Punktes  $D$ :

1. auf dem Strahl  $SB^-$ , 2. auf dem Kreis um  $C$  mit  $r = |SC| = |SA|$  (Entscheidung für denjenigen der beiden Schnittpunkte, der von  $S$  verschieden ist).

Der Arbeitsschritt c), mit dem die beiden Punkte  $C$  und  $D$  zu konstruieren sind, kann nicht ausgeführt werden, falls als Konstruktionsinstrumente nur der Zirkel und das Lineal im bisherigen Sinne verwendet werden dürfen. Der Arbeitsschritt c) ist jedoch ausführbar, wenn ein Lineal mit Maßeinheiten derart zur Anwendung kommt, daß mit ihm eine Gerade durch  $A$  konstruiert werden kann, welche  $k$  in  $C$  und den Strahl  $SB^-$  in  $D$  so schneidet, daß  $|CD| = |CS|$  ist.

II. Der Elementarwinkel  $\sphericalangle ADS$  besitzt die Größe  $\frac{1}{3}\varphi$ .

Denn wenn man die Größe dieses Winkels zunächst mit  $\psi$  bezeichnet, ist

$$|\sphericalangle CDS| = |\sphericalangle CSD| = \psi,$$

$$|\sphericalangle SCA| = |\sphericalangle SAC| = 2\psi,$$

$$|\sphericalangle ASC| = 180^\circ - 4\psi$$

und schließlich

$$\psi + (180^\circ - 4\psi) + \varphi = 180^\circ,$$

d. h.

$$\psi = \frac{1}{3} \cdot \varphi.$$

Obwohl die soeben beschriebene Konstruktion bei Verwendung von Zirkel und Lineal im bisherigen Sinne offensichtlich nicht ausgeführt werden kann, wäre es zunächst denkmöglich, daß der Elementarwinkel  $\sphericalangle ADS$  bei jeder Größe  $\varphi$  auf anderem Wege unter Verwendung von Zirkel und Lineal im bisherigen Sinne konstruiert werden

könnte. Das ist aber auf Grund des Unlösbarkeitsbeweises der in 4.4.2. behandelten Konstruktionsaufgabe und der abschließenden Bemerkung jenes Abschnittes nicht bei jeder Größe  $\varphi$  möglich.

#### 4.5.2. Die Mohr-Mascheroni-Konstruktionen mit dem Zirkel allein

Es ist weniger von praktischer als vielmehr von theoretischer Bedeutung, daß jede Konstruktion, die mit Zirkel und Lineal ausgeführt werden kann, auch mit dem Zirkel allein möglich ist, falls man sich bei jeder im Verlauf einer Konstruktion auftretenden Geraden mit mindestens zwei Punkten dieser Geraden begnügt. Bei derartigen Konstruktionen wird z. B. die Konstruktion des Schnittpunktes zweier nicht-paralleler Geraden zu einer nichttrivialen Konstruktionsaufgabe.

Man kann die obige Behauptung beweisen, indem man zeigt, daß die Ausführung der Konstruktionschritte der Arten a) bis e) (vgl. 4.1.) unter Beachtung der Bemerkung über die Geraden mit dem Zirkel allein ausgeführt werden können. Die Konstruktionschritte der Art a) entfallen, und die Konstruktionschritte der Arten c) und e) sind offensichtlich mit dem Zirkel allein ausführbar. Somit reduziert sich der Beweis auf die Ausführung der Konstruktionschritte der Arten b) und d) mit dem Zirkel allein. Wir wollen im Rahmen unserer Ausführungen auf einen Beweis verzichten; wir werden lediglich eine Hilfskonstruktion, die mit Vorteil für einen Beweis der obigen Behauptung verwendet werden kann, mit dem Zirkel allein durchführen.

Zu konstruieren ist mit dem Zirkel allein der inverse Punkt  $P_2$  eines gegebenen Punktes  $P_1$  bezüglich eines gegebenen Kreises  $k$  um  $M$ ; es sei  $P_1 \neq M$  vorausgesetzt. (Diese Aufgabe wurde mit Zirkel und Lineal als Beispiel 7 in 4.2.5. gelöst.)

##### I. Konstruktionsplan:

Fall 1:  $P_1$  liege außerhalb  $k$ .

- a) Konstruktion des Kreises  $k_1$  um  $P_1$  mit  $r = |MP_1|$ ;
- b) Bezeichnung der beiden Schnittpunkte von  $k$  und  $k_1$  mit  $S_1$  und  $S_2$  in beliebiger Reihenfolge;
- c) Konstruktion des Punktes  $P_2$ :  
1. auf dem Kreis um  $S_1$  mit  $r = |S_1M|$ , 2. auf dem Kreis um  $S_2$  mit  $r = |S_2M|$  (Entscheidung für den von  $M$  verschiedenen Schnittpunkt).

Fall 2:  $P_1$  liege innerhalb  $k$ .

- a') Konstruktion eines Hilfspunktes  $P'_1$  außerhalb  $k$  auf dem (gedachten) Strahl  $MP_1^+$ , so daß  $|MP'_1| = n \cdot |MP_1|$  (mit Hilfe der Ecken endlich vieler gleichseitiger Dreiecke);
- b') Konstruktion des Kreises  $k'_1$  um  $P'_1$  mit  $r = |MP'_1|$ ;
- c') Bezeichnung der beiden Schnittpunkte von  $k$  und  $k'_1$  mit  $S'_1$  und  $S'_2$  in beliebiger Reihenfolge;
- d') Konstruktion des Punktes  $P'_2$ :  
1. auf dem Kreis um  $S'_1$  mit  $r = |S'_1M|$ , 2. auf dem Kreis um  $S'_2$  mit  $r = |S'_2M|$  (Entscheidung für den von  $M$  verschiedenen Schnittpunkt);
- e') Konstruktion des Punktes  $P_2$  auf dem (gedachten) Strahl  $MP_1^+$ , so daß  $|MP_2| = n \cdot |MP'_2|$  ist (mit demselben  $n$  wie beim Arbeitsschritt a')).

Fall 3:  $P_1$  liege auf  $k$ .

- a'') Bezeichnung des Punktes  $P_1$  mit  $P_2$ .

II. Der Punkt  $P_2$  ist in jedem der drei Fälle der eindeutig bestimmte inverse Punkt zu  $P_1$  bezüglich  $k$ . Denn im ersten Fall sind die gleichschenkligen Dreiecke  $MS_1P_2$

und  $MP_1S_1$  ähnlich (die Punkte  $M, P_1, P_2$  sind kollinear), und es gilt

$$|MP_2| : |MS_1| = |MS_1| : |MP_1|,$$

d. h.

$$|MS_1|^2 = |MP_1| \cdot |MP_2|;$$

im zweiten Fall sind die gleichschenkligen Dreiecke  $MS_1'P_2'$  und  $MP_1'S_1'$  ähnlich, und es gilt

$$|MP_2'| : |MS_1'| = |MS_1'| : |MP_1'|,$$

d. h.

$$|MS_1'|^2 = |MP_1'| \cdot |MP_2'| = n \cdot |MP_1| \cdot \frac{1}{n} \cdot |MP_2|;$$

im dritten Fall ist die Behauptung offensichtlich richtig.

Der italienische Mathematiker L. MASCHERONI (1750—1800) stand lange Zeit in dem Ruf, als erster einen Beweis für die Behauptung am Anfang des Abschnittes 4.5.2. geliefert zu haben. Im Jahre 1928 wurde jedoch ein Buch aus dem Jahre 1672 entdeckt, in welchem der Autor namens G. MOHR bereits lange vor MASCHERONI einen vollständigen Beweis für die Ausführbarkeit aller mit Zirkel und Lineal durchführbaren Konstruktionen mit dem Zirkel allein angegeben hatte.

#### 4.5.3. Konstruktionen mit dem Lineal allein

Durch MASCHERONI angeregt, hat der Schweizer Geometer JAKOB STEINER (1796 bis 1863) Konstruktionen untersucht, die mit dem Lineal allein durchführbar sind. Wir wollen ohne Beweis erwähnen, daß bei Verwendung des Lineals ohne Zuhilfenahme weiterer Konstruktionsinstrumente aus gegebenen Strecken der Maßzahlen  $a_1, \dots, a_n$  die und nur die Strecken konstruierbar sind, deren Maßzahlen aus  $a_1, \dots, a_n$  durch endlich viele rationale Operationen errechnet werden können. Um sinnvolle Konstruktionen mit dem Lineal allein ausführen zu können, müssen allerdings in der Konstruktionsebene vier Punkte derart gegeben sein, daß keine drei von ihnen kollinear sind; andernfalls könnten zwar die Verbindungsgeraden der gegebenen Punkte, aber keine weiteren Punkte konstruiert werden.

Die Konstruktionen, die mit dem Lineal allein ausführbar sind, werden *lineare Konstruktionen* oder *Konstruktionen ersten Grades* genannt, während die Konstruktionen, die mit Zirkel und Lineal ausführbar sind, *quadratische Konstruktionen* oder *Konstruktionen zweiten Grades* genannt werden. J. STEINER hat auch bewiesen, daß alle Konstruktionen zweiten Grades mit dem Lineal allein ausführbar sind, falls in der Konstruktionsebene außer den vier Punkten noch ein fester Kreis mit seinem Mittelpunkt gegeben ist; jeder weitere Kreis einer solchen Konstruktion wird als konstruiert angesehen, wenn sein Mittelpunkt und ein Punkt der Kreislinie konstruiert wurden. Der Beweis des genannten Satzes kann mit Methoden der projektiven Geometrie geführt werden.

Unsere Bemerkungen über die Konstruktionen mit dem Lineal allein wollen wir mit einem Beispiel für derartige Konstruktionsaufgaben abschließen. Gegeben sei ein Viereck  $AB'BA'$  mit dem Diagonalschnittpunkt  $P$ ; es mögen sich die Geraden  $g_{AA'}$  und  $g_{BB'}$  in einem Punkt  $S$  des Konstruktionsblattes und die Geraden  $g_{AB'}$  und  $g_{A'B}$  in einem Punkt  $R$  außerhalb des Konstruktionsblattes schneiden. Zu konstruieren ist mit dem Lineal allein die Gerade  $g_{PR}$  (vgl. Abb. 4.14).

##### I. Konstruktionsplan:

- a) Konstruktion einer beliebigen Geraden  $h$  durch  $S$ , die  $g_{AB'}$  und  $g_{A'B}$  auf dem Konstruktionsblatt schneidet, die aber mit dem Rand des Vierecks  $AB'BA'$  keinen

Punkt gemeinsam hat (die Gerade  $h$  ist ein „beliebiges“ Element im Sinne der Ausführungen in 4.1.; um dieses „beliebige“ Element zu vermeiden, könnte eine Gerade  $h'$  mit entsprechenden Eigenschaften wie  $h$  mit Hilfe mehrerer Konstruktionschritte der Arten a) und b) aus 4.1. mit dem Lineal allein konstruiert werden);

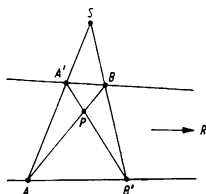


Abb. 4.14

- b) Bezeichnung des Schnittpunktes von  $h$  und  $g_{AB'}$  mit  $C$ ;
- c) Bezeichnung des Schnittpunktes von  $h$  und  $g_{A'B}$  mit  $C'$ ;
- d) Konstruktion des Punktes  $Q$ :  
1. auf der Geraden  $g_{BC}$ , 2. auf der Geraden  $g_{B'C'}$ ;
- e) Konstruktion der Geraden  $g_{PQ}$ .

II. Die eindeutig bestimmte Gerade  $g_{PQ}$  ist mit der gesuchten Geraden  $g_{PR}$  identisch; denn für die Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  gehen die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken durch  $S$ , und nach dem Satz des DESARGUES (1591–1661) liegen dann die Schnittpunkte  $P, Q, R$  der Trägergeraden entsprechender Seiten auf einer Geraden.

#### 4.5.4. Konstruktionen in begrenzter Ebene

Unter einer „Konstruktion in begrenzter Ebene“ wird eine Konstruktion auf einem begrenzten Konstruktionsblatt verstanden. Die Konstruktionen in der Praxis sind ausnahmslos derartige Konstruktionen. Eine Konstruktion, die auf einem (nur in der Vorstellung existierenden) unbegrenzten „Konstruktionsblatt“ leicht zu beschreiben ist, kann auf einem begrenzten Konstruktionsblatt Schwierigkeiten bereiten; die Konstruktionsaufgabe am Schluß von 4.5.3. ist dafür ein Beispiel.

Auch die Konstruktionsinstrumente stehen in der Praxis nicht in der idealen Form zur Verfügung, in der wir z. B. den Zirkel und das Lineal in unserer Theorie der geometrischen Konstruktionen behandelt haben. Jedes in der Praxis verwendbare Lineal besitzt eine endliche Länge, und mit jedem in der Praxis verwendbaren Zirkel können nur Kreise bis zu einer gewissen Radiusgröße konstruiert werden.

Wir begnügen uns zum Schluß dieses Abschnittes mit dem Hinweis, daß es möglich ist, eine Theorie der geometrischen Konstruktionen in begrenzter Ebene für vorgegebene Konstruktionsinstrumente zu entwickeln. Die gegebenen Konstruktionsinstrumente könnten z. B. das „ideale Lineal“ und der „ideale Zirkel“ oder das Lineal von endlicher Länge und der Zirkel von begrenzter Spannweite oder auch ganz andere Konstruktionsinstrumente sein.

### 4.5.5. Bemerkungen über das Parallellineal, das Winkellineal und das Einschiebelineal

In diesem abschließenden Abschnitt möchten wir noch drei weniger bekannte Konstruktionsinstrumente erwähnen und ihre Verwendung beschreiben.

Das *Parallellineal* ist ein Lineal mit zwei parallelen Kanten, die den Abstand  $a$  voneinander haben. Wir legen fest, daß das Parallellineal in zweierlei Weise zu verwenden ist. Es soll erstens wie ein gewöhnliches Lineal verwendet werden können, d. h., es kann mit einer Kante an zwei gegebene Punkte angelegt werden, um die Gerade durch diese beiden Punkte zu konstruieren. Und es soll zweitens so zu zwei gegebenen Punkten  $P_1, P_2$  gelegt werden können, daß an jeder Kante des Parallellineals einer der beiden Punkte  $P_1$  und  $P_2$  liegt, um die Gerade  $g_1$  durch  $P_1$  und die Gerade  $g_2$  durch  $P_2$  zu konstruieren; der Abstand der beiden Punkte  $P_1$  und  $P_2$  darf dabei nicht kleiner als  $a$  sein (vgl. Abb. 4.15).

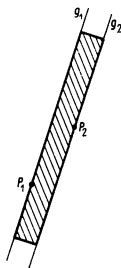


Abb. 4.15

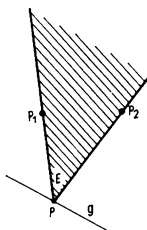


Abb. 4.16

Es kann bewiesen werden, daß mit dem Parallellineal in der angegebenen Verwendungsweise alle Konstruktionen zweiten Grades und nur diese ausgeführt werden können; jeder Kreis ist dabei als konstruiert anzusehen, wenn sein Mittelpunkt und ein Punkt der Kreislinie konstruiert wurden.

Das *Winkellineal* ist ein Lineal mit zwei Kanten, die von einem Punkt  $E$  ausgehen und einen spitzen, rechten oder stumpfen Winkel miteinander bilden. Wir legen fest, daß das Winkellineal ebenfalls in zweierlei Weise zu verwenden ist. Es soll erstens wie ein gewöhnliches Lineal verwendet werden können. Und es soll zweitens so zu zwei gegebenen Punkten  $P_1, P_2$  und zu einer gegebenen Geraden  $g$  gelegt werden können, daß sich  $E$  auf  $g$  befindet und an jeder der beiden Kanten des Winkellineals einer der beiden Punkte  $P_1$  und  $P_2$  liegt, um den durch  $E$  bestimmten Punkt  $P$  auf  $g$  zu konstruieren; die Punkte  $P_1, P_2$  und die Gerade  $g$  müssen sich dabei in geeigneter Lage befinden (vgl. Abb. 4.16).

Es kann bewiesen werden, daß auch mit dem Winkellineal in der angegebenen Verwendungsweise alle Konstruktionen zweiten Grades, und nur diese, ausgeführt werden können; für Kreislinien gelten dabei wieder die Einschränkungen wie beim Parallellineal.

Das *Einschiebelineal* ist ein Lineal mit einer markierten Strecke  $AB$  an einer Kante. Wir legen fest, daß das Einschiebelineal in viererlei Weise zu verwenden ist: 1. zum Konstruieren der Geraden durch zwei gegebene Punkte; 2. zum Konstruieren der beiden Punkte, die auf einer gegebenen Geraden von einem gegebenen Punkt dieser Geraden denselben Abstand haben, den die Punkte  $A$  und  $B$  voneinander besitzen; 3. zum Konstruieren der Schnittpunkte einer gegebenen Geraden mit dem Kreis mit  $r = |AB|$  um einen gegebenen Punkt; 4. zum Konstruieren einer Geraden  $g$  durch einen gegebenen Punkt  $P$ , so daß auf  $g$  von zwei gegebenen Geraden  $g_1$  und  $g_2$  eine Strecke  $S_1S_2$  mit  $|S_1S_2| = |AB|$  ausgeschnitten wird (vgl. Abb. 4.17).

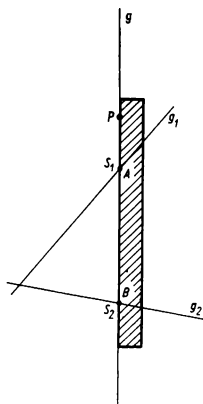


Abb. 4.17

Es kann bewiesen werden, daß mit dem Einschiebelineal alle Konstruktionen ausgeführt werden können, bei denen die Maßzahlen der zu konstruierenden Strecken aus den Maßzahlen der gegebenen Strecken durch endlich viele rationale Operationen, endlich viele Quadratwurzeloperationen und endlich viele Kubikwurzeloperationen errechnet werden können; solche Konstruktionen werden *Konstruktionen dritten Grades* genannt. Von einem verallgemeinerten Gebrauch des Einschiebelineals wird gesprochen, wenn man den Zirkel als Konstruktionsinstrument hinzunimmt und bei der vierten Verwendungsweise des Einschiebelineals für eine der beiden gegebenen Geraden einen gegebenen Kreis verwendet; auf diese Weise kann dann z. B. auch die Konstruktion zur Winkeldreiteilung in 4.5.1. ausgeführt werden.

Mit diesen Hinweisen auf andere Konstruktionstheorien beenden wir unsere Ausführungen zur Theorie der geometrischen Konstruktionen.

# Literatur

- [1] BECK, H., Elementargeometrie I, II, Leipzig 1929 bzw. 1930.
- [2] BEHNKE, H., F. BACHMANN, K. FLADT und W. SÜSS, Grundzüge der Mathematik II, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1960.
- [3] BIEBERBACH, L., Theorie der geometrischen Konstruktionen, Birkhäuser-Verlag, Basel—Stuttgart 1952.
- [4] BREHMER, S., und H. BELKNER, Einführung in die analytische Geometrie und lineare Algebra, 4. Aufl., Berlin 1974/3. Aufl., Verlag Harri Deutsch, Frankfurt a. M. 1972.
- [5] CHOQUET, G., Neue Elementargeometrie, VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1969/ Friedr. Vieweg & Sohn GmbH, Braunschweig 1972 (Übersetzung aus dem Französischen).
- [6] EFIMOW, N. W., Über die Grundlagen der Geometrie (Höhere Geometrie, Teil I), 2. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972/1. Aufl., Friedr. Vieweg & Sohn GmbH, Braunschweig 1970 (Übersetzung aus dem Russischen). EFIMOW, N. W., Grundzüge der projektiven Geometrie (Höhere Geometrie, Teil II), VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin/Friedr. Vieweg & Sohn GmbH, Braunschweig 1970 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [7] Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band IV, V, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1969 bzw. 1971 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [8] HADWIGER, H., Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1957.
- [9] HAJÓS, G., Einführung in die Geometrie, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1970 (Übersetzung aus dem Ungarischen).
- [10] HILBERT, D., Grundlagen der Geometrie, B. G. Teubner, Stuttgart 1899 (10. Aufl. 1968).
- [11] KELLER, O.-H., Analytische Geometrie und lineare Algebra, 3. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1968.
- [12] KLOTZKE, B., Geometrie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1971.
- [13] LENZ, H., Grundlagen der Elementarmathematik, 3. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975.
- [14] SCHREIBER, P., Theorie der geometrischen Konstruktion, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975.
- [15] WUSSING, H., Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1969.
- [16] FELIX KLEIN: Das Erlanger Programm. Eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von H. WUSSING, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 253, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K. G., Leipzig 1974.



# Namen- und Sachverzeichnis

- Abbildung, affine 127, 129  
—, involutorische 156  
—, reguläre affine 127  
—, singuläre affine 127, 142 ff.  
Ablaufpläne für Konstruktionen 165  
Abstand 52  
Abszisse 12, 14  
Achse 12 f., 16, 123, 130  
Additionstheorem der Sinus- und Kosinus-  
funktion 31  
Adjunktion eines Elementes 195  
affine Abbildung 127, 129  
— Geometrie 95  
— Transformation 122 ff.  
Affinität 73, 127 ff.  
—, axiale 131, 155  
—, perspektive 131  
Affinspiegelung 133  
ähnliche Dreiecke 106  
Ähnlichkeitslage 106  
Ähnlichkeitssätze für Dreiecke 110  
Ähnlichkeitstransformation 106, 110 ff.  
—, gleichsinnige 112 f.  
—, ungleichsinnige 113  
algebraische Geometrie 9, 96  
Algorithmen 165, 174  
Analysis 9  
analytische Geometrie 9  
Anfangspunkt 12 f., 16  
Anstieg 62  
Anstiegswinkel 62  
APOLLONIUS VON PERGA 16, 163, 186  
Applikate 14  
äquifforme Transformation 135  
äquiforme Transformation 106  
ARCHIMEDES 206  
ausgeartete Kurve zweiter Ordnung 89  
axiale Affinität 131, 155  
Axiomensystem der euklidischen Geo-  
metrie 166  
baryzentrische Koordinaten 43, 58  
Basis, orthonormierte 23  
Begrenzungsgerade 115  
beliebige Elemente 167  
Berührungsproblem des APOLLONIUS 108,  
162 f., 186  
Betrag eines Vektors 27  
Bewegung 73, 98 ff.  
—, gleichsinnige 75, 99  
—, ungleichsinnige 100  
Brennpunkt 82, 84  
CAYLEY, A. 17  
charakteristisches Teilverhältnis 132  
CRAMER, G. 17  
Delisches Problem 197  
DESARGUES, G. 209

DESCARTES, R. 16, 17  
Determinante 17  
Differentialgeometrie 9  
Differentialrechnung 9  
Dimension 12  
Dimensionssatz 46f.  
Doppelverhältnis 68, 150  
Drehprozeßgröße 30  
Drehstreckung 112  
Dreiecke, ähnliche 106  
Drehung 76f., 99  
Dreiteilung des Winkels 163, 198, 206  
Dualität 59  
  
Ebene, euklidische 147, 157  
— ; Gleichung 51  
— , inversionsgeometrische 157  
— , projektive 147  
— n, konzentrische 57  
— n, paarweise parallele 57  
Einheitspunkt 12f., 16  
Einheitsvektor, gleichgerichteter 32f.  
Einheitswurzel, siebente 199  
Einschiebelineal 164, 211  
Einspunkt 12  
Elementarwinkelgröße 26, 30f.  
Ellipse 82, 87, 89ff.  
Entartung 14, 19, 24, 42, 45  
Erlanger Programm 98  
euklidische Ebene 147, 157  
— r Raum, n-dimensionaler 12, 15  
EULER, L. 17, 71  
Eulersche Gerade 71  
Existenz- und Eindeigkeitssatz für Lote 167  
Exzentrizität 84  
  
FERMAT, P. DE 16, 17  
Fermatsche Primzahlen 164  
Feuerbachscher Kreis 71  
Flächen zweiter Ordnung 96  
Flächeninhalt 32  
Flächenstück 37  
Fluchtgerade 148  
Fluchtpunkt 146  
Flußbildtechnik 165  
Flußdiagramme 174  
Funktionen, trigonometrische 30  
  
GALILEI, G. 16  
GAUSS, C. F. 164, 180

Geometrie, affine 95  
— , algebraische 9, 96  
— , analytische 9  
— , projektive 18  
geometrische Konstruktion 163  
— Objekte 166, 169  
— r Ort 59  
— r Vektor 78  
Gerade, Eulersche 71  
— ; Punkt-Richtungs-gleichung 63  
— , uneigentliche 147  
— ; Zweipunktgleichung 63  
— n, konzentrische 57  
— n, paarweise parallele 57  
Geradenspiegelung 99  
gerichtete Strecke 12  
gleichgerichteter Einheitsvektor 32f.  
gleichorientierte Vektorpaare 28  
— Vektortripel 34  
gleichseitige Hyperbel 95  
gleichsinnige Ähnlichkeitstransformation 112f.  
— Bewegung 75, 99  
Gleitspiegelung 101  
Goldener Schnitt 172  
Grad (Maßeinheit) 30  
Gramsche Determinante 34  
GRASSMANN, H. 17  
Grassmannsche Ergänzung 29  
Größe orientierter Elementarwinkel 32  
— n gegebener Objekte, allgemeine oder unbestimmte 175  
— n — — , spezielle 175  
Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen 122  
— der affinen Transformationen 141  
— der projektiven Transformationen 145  
  
Halbachse 12f.  
Halbebene 42  
Halbparameter 83  
Halbraum 42  
HAMILTON, W. R. 17  
harmonische Punktepaare 68  
Hauptachse 84  
Hauptaffinität 131  
Hauptsatz der affinen Geometrie 129  
Heronische Formel 38  
HESSE, O. 17  
Hessesche Normalform 53  
Höhe 70f.

höherdimensionaler Raum 15, 37, 44

homogene Koordinaten 151

homogenisierende Variable 58

Hülle, konvexe 64

—, lineare 46, 64

Hyperbel 82ff., 87, 89ff.

—, gleichseitige 95

Hyperebene 44, 58

—; Gleichung 51

—, mittelparallele 61

—, mittelsenkrechte 59

—, winkelhalbierende 60

—n, konzentrische 57

—n, parallele 56

Identifizieren zwischen Länge — Maßzahl 12

— zwischen Punkt — Koordinaten-n-Tupel 15

— zwischen Punkt — Ortsvektor 23, 45

— zwischen Ursprungsgerade — Punkt des projektiven Raumes 58

— zwischen Ursprungsmannigfaltigkeit — Vektorraum 45

— zwischen Vektor — Koordinaten-n-Tupel 18

Inhaltsmaßstab 132f.

Inkreis 71

innere Teilung 68

Inneres eines Kreises 80

— eines Winkels 81

Integralrechnung 9

inverser Punkt 184

Inversion am Kreis 156, 185

inversionsgeometrische Ebene 157

involutorische Abbildung 156

kartesische Koordinaten 17

— Zeichenregel 17

—s Blatt 17

—s Koordinatensystem 188

—s Produkt 17

KEPLER, J. 16

KLEIN, F. 98

Kollinearität 41

Kollineation 155f.

komplanare Punkte 43

komplexe Zahlen 80

Komponente 18ff.

Kongruenzsatz 167

konstruierbare Zahlen 195

Konstruktion in begrenzter Ebene 209

Konstruktion, geometrische 163

— ersten Grades 208

— zweiten Grades 208

— dritten Grades 211

— regelmäßiger  $n$ -Ecke 163

— mit dem Lineal allein 208

—, lineare 208

—, quadratische 208

—, rationale 172

— mit Zirkel und Lineal 163, 166

Konstruktionsaufgabe 163, 168, 174f.

—; Lösung 169

— mit Zirkel und Lineal lösbare 169

Konstruktionsbeschreibung 174f.

Konstruktionsinstrumente 163, 206

Konstruktionsplan 173

Konstruktionsprobleme 163

Konstruktionsschritte 166

Kontraktion 123

konvexe Hülle 64

— Punktmenge 64

—s Polyeder 65

—s Polygon 65

konzentrische Ebenen 57

— Geraden 57

— Hyperebenen 57

Konzentritätskriterium 58

Koordinaten 12, 14

—, baryzentrische 43, 58

—, homogene 151

—, kartesische 17

—, schiefwinklige 95

Koordinatensystem 9, 12f.

—, kartesisches 188

Koordinatentransformation 77

Körper (algebraische Struktur) 80

—,  $n$ -dimensionaler 37

Körpererweiterung 195

Kosinus 30f.

Kosinussatz 69

Kotangens 31

Kreis 80, 86, 107

—, Feuerbachscher 71

Kreisbogen 81

Kreisfläche, offene 80

Kreisgleichung 80

Kreisinneres 80

Kreislinie 79

- Kriterium für eine Bewegung 73  
 — für kollineare Punkte 41, 43, 67  
 — für komplanare Punkte 44  
 — für konzentrische Geraden, Hyper-  
 ebenen 57, 66f.  
 — für positiv orientierte Vektorpaare 29  
 — — — Vektortripel 35  
 KRÖTENHEERDT, O. 203  
 Kugel 94  
 Kurve zweiter Ordnung 87f.  
 — — —, ausgeartete 89
- LANDAU, E. 195  
 Länge 12  
 Längenverhältnis 95  
 LEIBNIZ, G. W. 17  
 Leitlinie 82, 84  
 LINDEMANN, F. 163  
 lineare Algebra 10  
 — Hülle 46, 64  
 — Konstruktion 208  
 — Mannigfaltigkeit 44ff., 95  
 — r Unterraum 45  
 Lot 52, 167
- Mannigfaltigkeit, lineare 44ff., 95  
 — en, parallele 48, 56  
 — en, windschiefe 48  
 MASCHERONI, L. 208  
 Maßinheit 12, 30  
 Maßzahl 12  
 Matrix 17  
 —, orthogonale 74  
 mittelparallele Hyperebene 61  
 Mittelpunkt 71, 84  
 Mittelpunktsgleichung 84  
 Mittelsenkrechte 70  
 Mittelsenkrechte Hyperebene 59  
 Mittendreieck 71  
 MÖBIUS, A. F. 17  
 MOHR, G. 208  
 Mohr-Mascheroni-Konstruktion 207
- $n$ -dimensionaler euklidischer Raum 12, 15  
 Nebenachse 84  
 $n$ -Eck 180  
 Neigungswinkel 55  
 Neunpunktekreis 71  
 NEWTON, I. 17  
 Normalform 62  
 —, Hessesche 53
- Nullpunkt 12  
 Nullvektor 23  
 numerische Exzentrizität 84
- Objekte, geometrische 166, 169  
 offene Kreisfläche 80  
 Ordinate 14  
 ORESME, N. 16  
 Orientierung von Vektorpaaren 28  
 — von Vektortripeln 34  
 Orientierungssinn 28, 34  
 Ort, geometrischer 59  
 orthogonale Vektoren 26  
 Orthogonalspiegelung 133  
 Orthogonalstreckung 123ff.  
 orthonormierte Basis 23  
 Ortsvektor 18, 23
- Parabel 82f., 87ff.  
 parallele Geraden 57  
 — Hyperebenen 56  
 — Mannigfaltigkeiten 48, 56  
 Parallelenaxiom 167  
 Parallellineal 164, 210  
 Parallelogramm 24f.  
 Parallelotop 37  
 Parameterdarstellung von Dreiecksfläche  
 43  
 — von Ellipse 89  
 — von Gerade 39, 53  
 — von Halbebene 42  
 — von Halbraum 44  
 — von linearer Hülle, linearer Mannig-  
 faltigkeit 44, 46, 54  
 — von Hyperbel 89  
 — vom Raum  $R^3$  44  
 — von Strahl 39  
 — von Tetraederkörper 44
- PASCAL, B. 17  
 Peripheriewinkel 81  
 Peripheriewinkelsatz 81, 94, 103  
 perspektive Affinität 131
- PLÜCKER, J. 17  
 Pol 93  
 Polare 93  
 Polarkoordinaten 95  
 Polyeder, konvexes 65  
 Polygon 37  
 —, konvexes 65  
 Polynomideal 96

- Polytop 37  
 Potenz 81  
 Potenzebene zweier Kugeln 94  
 Potenzlinie zweier Kreise 81  
 PONCELET, V. 17  
 projektive Ebene 147  
   — Geometrie 18  
   — Transformation 145ff.  
 Proportionalität 58  
 Punkt, inverser 184  
   — des projektiven Raumes 58  
   —, uneigentlicher 41, 146  
   — e, komplanare 43  
 Punktmenge, konvexe 64  
 Punktpaare, harmonische 68  
 Punkt-Richtungsgleichung einer Geraden 63  
 Punktspiegelung 99  
  
 quadratische Konstruktion 208  
 Quadratur des Kreises 163  
 Quadratwurzelkonstruktionen 172  
 Quaternionen 17, 79  
  
 Radius 86  
 rationale Konstruktion 172  
 Raum, höherdimensionaler 15, 37, 44  
   —,  $n$ -dimensionaler euklidischer 12, 15  
 Rechteck 14  
 reguläre affine Abbildung 127  
 Richtungskosinus 32  
  
 Satz von CEVA 66  
   — von DESARGUES 149, 209  
   — über gleichschenklige Dreiecke 167  
   — von MENELAOS 67, 135  
   — vom Mittelpunkt 167  
   — von THALES 102  
   — von den Winkelhalbierenden 167  
 Scheitel 82, 84  
 Scheitelgleichung 83f.  
 schiefwinklige Koordinaten 95  
 Schubspiegelung 100  
 Schwerpunkt 70f.  
 Sechseck 177  
 Sehnensatz 80  
 Seitenhalbierende 70  
 Sekantensatz 80  
 Senkgerade 143  
 Senkrechte 52, 167  
 Siebeneck 180  
 Siebzehneck 180  
 Simplex 37  
 singuläre affine Abbildung 127, 142ff.  
 Sinus 30f.  
 Sinussatz 70  
 Skalarprodukt 25, 32, 73  
 Spaltenvektor 57, 74  
 Spat 25  
 Spiegelschiebung 100  
 Spiegelung 75ff.  
   — am Kreis 156  
 STEINER, J. 208  
 Stellsorvektor 52  
 stetige Teilung 172  
 Stetigkeitsaxiome 166  
 Strecke, gerichtete 12  
 Streckenabtragungssatz 167  
 Streckfaktor 103  
 Streckung 21f.  
 SYLVESTER, J. J. 17  
  
 Tangens 31  
 Tangente 89  
 Teilung, innere 68  
   —, stetige 172  
 Teilverhältnis 40  
   —, charakteristisches 132  
 Tensorrechnung 95  
 TORRICELLI, E. 16  
 Transformation 97  
   —, affine 122ff.  
   —, äquiaffine 135  
   —, äquiforme 106  
   —, projektive 145ff.  
 Transformationsgruppe 98  
 trigonometrische Funktionen 30  
  
 Überlegungsfigur 173  
 Umkreismittelpunkt 70  
 uneigentliche Gerade 147  
   —r Punkt 41, 146  
 ungleichsinnige Ähnlichkeitstransformation 113  
   — Bewegung 100  
 Unmöglichkeitbeweis 164  
 Unterraum, linearer 45  
 Ursprung 12f., 18  
  
 Variable, homogenisierende 58  
 Vektor 12, 18  
   —, geometrischer 78

- Vektorbegriff 17  
— en, orthogonale 26  
Vektorpaare, gleichorientierte 28  
Vektorprodukt 36  
Vektorraum 18, 23, 45ff.  
Vektortripel, gleichorientierte 34  
Verdoppelung des Würfels 163, 197  
Verhältnis 58  
Verschiebung 12, 18, 75ff., 99, 155  
Verschwindungsgerade 148  
Verschwindungspunkt 146  
Vervielfachung 21f.  
Viereck 178  
VIETA, F. 16
- Weg 25  
windschiefe Mannigfaltigkeiten 48  
Winkelabtragungssatz 167  
Winkelgröße 31  
Winkelhalbierende 71, 167
- winkelhalbierende Hyperebene 60  
Winkellineal 164, 210  
Winkelmesser 164
- Zahlen, komplexe 80  
—, konstruierbare 195  
Zehneck 178  
Zeichendreieck 164, 168  
Zeichenmaschine 164  
Zeichenregel, kartesische 17  
Zentralkollineation 145ff.  
Zentralstreckung 103ff., 155  
Zentriwinkel 81  
Zentrum 103
- Zuordnung zwischen Drehung — Größe  
orientierter Elementarwinkel 77  
— zwischen Koordinatensystem —  $n$ -Tupel 78  
Zweipunktgleichung einer Geraden 63