

Studienbücherei



E. Schröder
Darstellende Geometrie



Mathematik für Lehrer

Band 8

Herausgegeben von:

W. Engel, S. Brehmer, M. Schneider, H. Wussing

Unter Mitarbeit von:

G. Asser, J. Böhm, J. Flachsmeyer, G. Geise, T. Glocke,

K. Härtig, G. Kasdorf, O. Krötenheerdt, H. Lugowski,

P. H. Müller, G. Porath

Studienbücherei

Darstellende Geometrie

E. Schröder

Mit 157 Abbildungen

Dritte Auflage



VEB Deutscher Verlag
der Wissenschaften
Berlin 1979

Verlagslektor: Dipl.-Math. E. Arndt

Umschlaggestaltung: R. Wendt

© VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin 1974

Printed in the German Democratic Republic

Lizenz-Nr. 206 - 435/89/79

Satz: VEB Druckhaus „Maxim Gorki“, Altenburg

Offsetnachdruck und buchbinderische Verarbeitung: Volksdruckerei Zwickau

LSV 1044

Bestellnummer 570 179 1

DDR 9,80 M

Vorwort

Dem allseitigen Bemühen um eine nach modernen Gesichtspunkten systematisierte Darstellung der mathematischen Teildisziplinen kann sich auch die darstellende Geometrie nicht verschließen. Bei diesen Modernisierungsbestrebungen sind allerdings im vorliegenden Fall wenigstens zwei Randbedingungen zu beachten.

Erstens hat sich die darstellende Geometrie vor allem bezüglich der Terminologie seit etwa 150 Jahren in ziemlich verhärtete Spuren eingefahren. Traditionsgebundene Wortprägungen und Bezeichnungsweisen sind nicht immer leicht mit modernen Begriffsbildungen und Vorstellungen in Einklang zu bringen.

Zweitens hat die darstellende Geometrie neben einer kleinen Zahl von Mathematikern vor allem Techniker und Naturwissenschaftler der verschiedensten Fachrichtungen als Anwender. Für diese kann die darstellende Geometrie nicht als eine zum Selbstzweck geschaffene Lehre geboten werden. Sie muß einem breiten Kreis von Praktikern leicht verständlich bleiben und in die verschiedensten Anwendungsbereiche ohne begriffliche Schwierigkeiten umsetzbar sein. So scheiden z. B. bei der Wahl des Abbildungsmittels die sonst in der Geometrie des R_3 bevorzugten Geradenbündel aus, da in den Anwendungen unserer Disziplin Fragen der Sichtbarkeit eine grundlegende Bedeutung haben. Die verwendeten Abbildungen können nur von Strahlenbündeln geleistet werden, wobei die Strahlen im Sinne von orientierten Geraden zu verstehen sind.

Eine weitere Streitfrage besteht in der Festlegung der Reihenfolge der Stoffeinheiten „Zweitafelverfahren nach MONGE“ und „Eintafelverfahren“. Das primäre Anliegen der darstellenden Geometrie besteht darin, beim Lernenden das räumliche Vorstellungs- und Operationsvermögen durch die Arbeit mit zugeordneten Normalrissen zu entwickeln. Wenn erst eine gewisse Sicherheit im Umgang mit dem Zweitafelverfahren erreicht ist, bereitet die Einarbeitung in andere Teilgebiete dieser Disziplin kaum noch Schwierigkeiten. Auch das Eintafelverfahren fordert bei der Lösung von Aufgaben des Maßes die Fähigkeit der Kombination von zwei Bildern eines geometrischen Objektes. Stützdreieck und Umlegungen sind nur Umschreibungen für Hilfsbilder, die man zur Konstruktion heranzieht. Hingegen sind die Aufgaben der Lage (Schnitt von Gerade und Ebene oder Gerade und Drehkegel) echt im Eintafelverfahren konstruierbar. Die Begründung dieser Konstruktionen erfordert

jedoch Zusatzüberlegungen, für die der Anfänger noch nicht hinreichend geschult ist. Die differenzierte Behandlung von Aufgaben des Maßes und der Lage in der Eintafelprojektion sowie die Beschränktheit des Anwendungsbereiches auf Geländeaufgaben, Dachausmittlungen und kartenmäßige Flächenbeschreibungen lassen es wenig sinnvoll erscheinen, dieses spezielle Abbildungsverfahren vor dem Zweitafelverfahren abzuhandeln. Auf Grund vielseitiger Erwägungen erschien es mir als rationellster Weg, in diesem Lehrbuch nach einem kurzen Abriss über die Zentral- und Parallelprojektion sofort auf das Zweitafelverfahren zuzusteuern. Darin werden perspektive Affinität und perspektive Kollineation mit eingebaut. Die in den Anfang gelegte Einführung der Fernelemente erweist sich für einige Anwendungen als günstig und erlaubt eine geschlossener Darstellung vieler Fakten und Sätze. Von der Axonometrie wird das Schrägrißverfahren vorgezogen, da es elementar verständlich ist und im Lehrgang selbst von Anfang an als didaktisches Hilfsmittel Verwendung findet.

Die Ellipse erfährt wegen der Wichtigkeit für konstruktive Anwendungen aus verschiedensten Aspekten heraus eine ausführliche Behandlung. Anschließend werden die Kegelschnitte allgemein als Schlagschattengrenzen einer Kugel bei Zentralbeleuchtung eingeführt. Auf diesem Wege lassen sich die planimetrischen Eigenschaften der Kegelschnitte mittels der räumlichen Erzeugungsweise (Schnitt von Drehkegel und Ebene) besonders übersichtlich herausarbeiten. Der Beweis der Fokaleigenschaften von Ellipse und Parabel erfolgt auf indirektem Weg. Dabei werden algebraisch-geometrische Überlegungen angewandt und konstruktiv ausgewertet. Als Nebenergebnis erhält man die Tangentenkonstruktion. Dieser Zugang zur Tangente von Kegelschnitten ist eine wichtige Ergänzung zu der an anderer Stelle dieser Buchreihe mit den Mitteln der Analysis gebotenen allgemeinen Lösung des Berührungsproblems.

Anschließend werden die theoretischen und praktischen Grundlagen zum Entwerfen axonometrischer und zentralperspektiver Bilder vorgeführt. Im ersten Fall geschieht dies vor allem im Hinblick auf technische Anwendungen. Hingegen können die Ausführungen zur Zentralperspektive in Verbindung mit dem historisch-philosophischen Teil als Unterstützung für die ästhetische Bildung und Kunsterziehung herangezogen werden.

Für die Durchsicht des Manuskriptes und manche fachliche Empfehlung dankt der Verfasser an dieser Stelle den Herren Professoren JOHANNES BÖHM (Jena), GERHARD GEISE (Dresden) und HANS-LUDWIG WUSSING (Leipzig). Meinen ganz besonderen Dank möchte ich Herrn Professor WOLFGANG ENGEL (Rostock) aussprechen, der das Manuskript vor allem aus der Sicht der Koordinierung zu den übrigen Bänden der Reihe „Mathematik für Lehrer“ kritisch durcharbeitete und zur Glättung mancher Unebenheiten vor der Drucklegung beitrug. Darüber hinaus schließt sich der Verfasser den Herausgebern dieser Reihe mit seinem Dank an den VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften für das verständnisvolle Eingehen auf Sonderwünsche und die sorgfältige Anfertigung der Zeichnungen an.

Inhalt

0.	Einleitung	
0.1.	Allgemeines	9
0.2.	Historisches	10
0.3.	Bezeichnungen und grundlegende Konventionen	16
1.	Abbildungsverfahren der darstellenden Geometrie	
1.1.	Allgemeines über lineare Abbildungen. Erweiterung des euklidischen Raumes zum projektiven Raum.....	18
1.2.	Zentralprojektion.....	22
1.3.	Parallelprojektion	27
1.4.	Schrägrißverfahren	28
1.5.	Normalprojektion	30
2.	Das Zweitafelverfahren	
2.1.	Zuordnungsvorschrift von Normalrissen im Zweitafelverfahren	32
2.2.	Darstellung von Geraden im Zweitafelverfahren	35
2.3.	Darstellung von Ebenen	38
2.4.	Lageaufgaben für Punkt, Gerade und Ebene. Perspektive Affinität	46
2.5.	Aufgaben des Maßes	53
2.6.	Anwendung von Grundkonstruktionen auf ebenflächig begrenzte räumliche Gebilde. Perspektive Kollineation. Satz von DESARGUES	60
2.7.	Seitenrisse und Drehungen.....	70
2.8.	Die sechs Hauptrisse	77
3.	Kurven und Flächen zweiter Ordnung	
3.1.	Allgemeines über Kurven und Flächen zweiter Ordnung	79
3.2.	Die Ellipse als Normalprojektion des Kreises. Zweikreiskonstruktion	80
3.3.	Kinematische Erzeugungsweisen der Ellipse.....	86
3.4.	Die Ellipse als perspektiv-affines Bild des Kreises	89
3.5.	Konstruktion der Achsen einer Ellipse nach RYTZ	96
3.6.	Die Ellipse als schiefer Schnitt eines Drehzylinders	101
3.7.	Fokaleigenschaft der Ellipse	106
3.8.	Darstellung von Drehkörpern und konstruktive Auswertung	111
3.9.	Kegelschnitte als Schlagschatten einer Kugel bei Zentralbeleuchtung	119

4.	Weitere Darstellungsverfahren	
4.1.	Eintafelverfahren. Kotierte Projektion	132
4.2.	Allgemeine oder schiefe Axonometrie.....	139
4.3.	Normale Axonometrie.....	144
4.4.	Zentralperspektive.....	146
4.5.	Stereoskopische Bildpaare. Anaglyphen	152
	Literatur	155
	Namenverzeichnis	156
	Sachverzeichnis	157

0. Einleitung

0.1. Allgemeines

Die darstellende Geometrie lehrt die bei Abbildungen von Objekten des drei- und mehrdimensionalen Raumes auf eine zweidimensionale Ebene geltenden Gesetzmäßigkeiten. Sie bedient sich vorzugsweise konstruktiver Methoden und benutzt als technische Hilfsmittel Zirkel und Lineal. Eine zweidimensionale Bildebene dient als Träger von zeichnerischen Darstellungen dreidimensionaler Objekte und als Arbeitsfeld zur Lösung räumlicher Konstruktionsaufgaben. Einen Schwerpunkt der Lehre bildet die Rückführung räumlicher auf planimetrische Konstruktionsaufgaben und die vorstellungsmäßige Umsetzung planimetrischer Gebilde und Konstruktionsergebnisse in den dreidimensionalen Anschauungsraum.

Um die Konstruktionsmethoden und Sätze der Planimetrie übernehmen zu können, werden Abbildungsvorschriften bevorzugt, bei denen Geraden im Raum auch Geraden in der Zeichenebene entsprechen. Die Auswahl von Abbildungsvorschriften für Zwecke der Anwendung erfolgt im wesentlichen nach zwei Gesichtspunkten, die beide nicht gleichzeitig optimal erfüllbar sind, nämlich

1. Anschaulichkeit,
2. Maßgerechtigkeit.

Anschauliche Bilder vermittelt die dem Sehvorgang beim menschlichen Auge angepaßte *Zentralprojektion* eines räumlichen Objektes auf eine Bildebene. Dabei ist allerdings das Auge des Betrachters bezüglich der Bildebene in die gleiche Lage zu bringen, in der sich das *Projektionszentrum* bei Aufnahme des Bildes befand.

Maßgerechte Bilder räumlicher Objekte bezüglich ausgezeichneter Scharen untereinander paralleler Ebenen bieten *Parallelprojektionen*. Das Projektionszentrum stellt bei diesem Abbildungsvorgang einen nicht in der Bildebene liegenden uneigentlichen Punkt dar. Die bei Einfall von Sonnenstrahlen auf eine Ebene erzeugten Schattenbilder räumlicher Objekte vermitteln ungefähr eine Vorstellung dieses Abbildungsvorganges. Unter den Parallelprojektionen nimmt die *Normalprojektion* auf eine Ebene eine für konstruktive Belange bevorzugte Stellung ein.

Axonometrische Abbildungsverfahren bieten bei Anschaulichkeit des Bildes noch die Möglichkeit zur Abnahme von Maßen an dem dargestellten Objekt. Unter diesen

werden *Schrägbilder* wegen der konstruktiven Einfachheit in Fachbüchern aller Art als didaktisches Hilfsmittel bevorzugt herangezogen.

Die darstellende Geometrie liefert die Grundregeln für das technische Zeichnen im Bau- und Maschineningenieurwesen. Viele ihrer Konstruktionsmethoden sind diesen Bedürfnissen angepaßt, wobei sich jedoch der Lehrstoff nicht in technische Einzelheiten verliert und auf praxisgebundene Beispiele beschränkt. Die Universalität der Anwendungsmöglichkeit wird stets im Auge behalten. Während bei der künstlerischen Zeichnung eines räumlichen Objektes Farbeffekte, Stimmung, ästhetische Gesichtspunkte und subjektive Einstellung eine Rolle spielen, steht für das darstellend-geometrische Bild das konstruktiv-geometrische Anliegen unter Ausschaltung subjektiver Momente im Vordergrund.

Eine nach den Regeln der darstellenden Geometrie angefertigte Zeichnung stellt neben Sprache und Schrift ein wichtiges Verständigungsmittel im Arbeitsprozeß dar, auf das selbst im Zeitalter der elektronischen Rechentechnik und Datenverarbeitung nicht verzichtet werden kann. Wird die darstellende Geometrie als eigenständiges Lehrfach betrieben, so trägt sie zur Entwicklung des konstruktiv-synthetischen Denkens bei.

0.2. Historisches

Als geistiger Vater der darstellenden Geometrie im Sinne einer wissenschaftlichen Disziplin wird unbestritten der Franzose GASPARD MONGE (1746—1818) angesehen. Jedoch bediente man sich schon lange Zeit vor MONGE graphischer Methoden zur Lösung von Aufgaben aus den Gebieten des Bauwesens, der Architektur, des Befestigungswesens und beim Bau technischer Anlagen (Mühlen, Kanäle, Bergbau, u. a. m.). In der Malerei und Architektur war seit der Renaissance das Bemühen vorherrschend, Bilder streng nach den Gesetzen der Zentralperspektive herzustellen. Diese Zielsetzung führte vielfach zu Wechselbeziehungen zwischen Vertretern der bildenden Kunst und der Mathematik. Eine einheitliche Darstellung der über die verschiedensten Anwendungsgebiete verstreuten graphischen Methoden fehlte jedoch bis weit in das 18. Jahrhundert hinein, da diese zu eng auf das praktische Anliegen zugeschnitten waren und zum Teil als handwerkliche Geheimnisse von Zünften und Bauhütten gehütet wurden. Der junge MONGE gelangte als Lehrer an der königlichen Offiziersschule zu Mézières in der Schlußphase des in Frankreich herrschenden feudalen Absolutismus über die Anliegen des Militärwesens zu seinen schöpferischen Leistungen auf dem Gebiet der darstellenden Geometrie. Da MONGE als gereifter Mann in einer politisch revolutionären Epoche höchste öffentliche Ämter bekleidete und darin viel zum Fortschritt seines Landes in Wissenschaft, Technik, Militärwesen und politischer Organisation beitrug, ist sein Lebenslauf auch von allgemeinem Interesse.

GASPARD MONGE wurde am 9. Mai 1746 in Beaune (Côte d'Or) in Frankreich als Sohn eines kleinen Handelsmannes geboren. Bis 1762 besuchte er die Oberschule seiner Vaterstadt, um dann seine Ausbildung an einer Ordensschule in Lyon fortzusetzen. Dort fiel er bereits durch seine außerordentlichen Fähigkeiten auf, und man bemühte sich, ihn für den Orden zu gewinnen. Dieser Druck war wohl mitbestimmend, daß der junge MONGE 1764 nach Beaune zurückkehrte. Den Auftrag, von seiner Vaterstadt einen genauen Plan aufzuzeichnen, erfüllte er mit großer Perfektion. Ein höherer Offizier der Militärschule von Mézières, dem der Plan zur Begutachtung gezeigt wurde, stellte MONGE als wissenschaftliche Hilfskraft an dieser Bildungsstätte ein. Sie war 1748 gegründet worden und hatte durch die hohe Qualität ihrer Absolventen bereits einen guten Ruf in Frankreich erlangt. MONGE sollte an dieser Schule innerhalb der nächsten 20 Jahre einen einzigartigen Aufstieg als Wissenschaftler und Organisator erleben. Nachdem er in Mézières zunächst wegen seiner sozialen Herkunft als Nichtadliger nur für recht untergeordnete Tätigkeiten eingesetzt war, erregte er durch die geniale konstruktive Behandlung eines Problems aus der Befestigungskunst die Bewunderung des Kommandanten der Schule. MONGE wurde daraufhin als Repetitor an die höhere Abteilung berufen, wo nur Zöglinge adliger Herkunft ihre Ausbildung zu Ingenieuroffizieren erhielten. Dank seiner außergewöhnlichen Tüchtigkeit, guter Lehrerfolge und günstiger äußerer Umstände rückte MONGE bis 1771 zum Professor für Mathematik und Physik an dieser Bildungsstätte auf.

Die gedanklichen Grundlagen für sein später so berühmt gewordenes Werk „Géométrie descriptive“ gehen wohl bis in das Jahr 1766 zurück. Den Anstoß zur Ausarbeitung dieser Theorie gaben vor allem Probleme des Befestigungswesens. Aus Gründen militärischer Geheimhaltung durfte MONGE zunächst nichts über seine konstruktiven Methoden mittels zweier Bildebenen veröffentlichen. In dieser Zeit seiner Lehrtätigkeit engagierte er sich noch vielseitig an wissenschaftlichen und praktischen Arbeiten. Seit 1770 reichte er seine Forschungsergebnisse zu verschiedenen Gegenständen der Mathematik bei der Akademie der Wissenschaften in Paris ein und wurde selbst ihr Mitglied. Erst seit 1794 durfte MONGE — inzwischen nach Paris berufen — öffentliche Vorlesungen zu dem von ihm systematisierten und wissenschaftlich aufbereiteten Lehrgegenstand halten.

Während und nach der französischen Revolution (1789–1794) übernahm MONGE als engagierter Republikaner verantwortungsvolle öffentliche Ämter, war zeitweise Marineminister, reorganisierte die Landesverteidigung und mobilisierte alle Reserven des Landes, um Frankreich gegen die Angriffe der Reaktion von innen und außen zu stärken. Besondere Verdienste erwarb er sich um die Gründung der École polytechnique 1794 in Paris. Sie wurde zum Vorbild aller später gegründeten technischen Hochschulen der Welt. Der darstellenden Geometrie wurde im Ausbildungsprogramm ein führender Platz zuerkannt. MONGES „Leçons de la géométrie descriptive“ wurden als Nachschriften 1795 in den „Journals des écoles normales“ veröffentlicht. Mit dieser ersten Popularisierung war der Weg geebnet, die technische Zeichnung neben Sprache und Schrift zu einem allgemein brauchbaren Verständigungsmittel der im Ingenieurwesen tätigen Menschen untereinander zu entwickeln. Beispielsweise fanden die Regeln der darstellenden Geometrie mit JEAN NICOLAS PIERRE HACHETTE

(1769—1834), einem Lehrer an der École polytechnique, seit 1811 auch Anwendung auf das technische Zeichnen im Maschinenbau. Mit dem Fortschreiten der industriellen Revolution erfuhr die darstellende Geometrie als Lehrgegenstand an den technischen Bildungsstätten der sich auf industrielle Massenproduktion umstellenden Länder eine intensive Pflege und Förderung.

MONGE gehörte bis 1813 zum Kreis der engsten Vertrauten und wissenschaftlichen Berater NAPOLEONS. Dabei blieb er jedoch seiner republikanischen Gesinnung und Haltung treu. Der Sturz NAPOLEONS brachte auch MONGE um alle seine Ehrenämter und brach seine Lebenskraft. Dank seiner wissenschaftlichen Leistungen und aufrechten republikanischen Haltung genoß er über seinen Tod hinaus Achtung und Anerkennung bei seinen ehemaligen Schülern.

Das von MONGE in Lehre und Anwendung besonders konsequent vertretene Zweitafelverfahren mit Grund- und Aufriß läßt sich bereits bei den alten Ägyptern nachweisen. In der Zeit der großen Pyramidenbauten (etwa seit 2900 v. u. Z.) wurde für den Entwurf solcher Werke zunächst ein quadratisches Liniennetz auf Papyrus aufgezeichnet. In dieses Liniennetz trug man einen Normalriß des geplanten Objektes ein. Diese Darstellungsweise erleichterte eine ähnliche Vergrößerung und maßstabgerechte Übertragung von Normalrissen auf das Werkstück. So ist z. B. aus dieser Zeit ein quaderförmiger Steinblock erhalten, an dessen Seitenflächen Grund-, Auf- und Kreuzriß einer Sphinx in richtiger Zuordnung eingemeißelt sind. Mit diesen drei Normalrissen hatte man den Steinblock für die Arbeit des Bildhauers aufbereitet.

Die Zentralperspektive war den alten Ägyptern unbekannt. Für sie ist das Flächenbild charakteristisch. Gelegentlich findet man bei der Wiedergabe räumlicher Objekte zur Unterstützung der Anschauung eine Vermischung von Grund- und Seitenriß oder Auf- und Seitenriß in einem Bild. Auch bei technischen Zeichnungen des Mittelalters lassen sich an Normalrissen eingeschobene Umklappungen von Balkenquerschnitten oder Hebelmechanismen nachweisen.

Der römische Architekt und Kunsttheoretiker VITRUV (1. Jh. v. u. Z.) erwähnt in seinem berühmten Werk „De architectura“ (24 v. u. Z.) die Begriffe „ichnographia“¹⁾ und „orthographia“²⁾, womit eindeutig Grund- und Aufriß gemeint sind. Leider sind die zu diesem Werk gehörigen Zeichnungen nicht mit überliefert.

Nördlich der Alpen war ALBRECHT DÜRER (1471—1528) bahnbrechend im Gebrauch zugeordneter Normalrisse. Die Zeit der Renaissance mit dem wachsenden Selbstbewußtsein des fortgeschrittenen Bürgertums war erfüllt von dem Drang nach wissenschaftlicher Erkenntnis und kritischer Auseinandersetzung mit überlieferten Glaubenslehren. So suchte auch DÜRER als Kind seiner Zeit seinem künstlerischen Schaffen eine fest fundierte wissenschaftliche Basis zu geben und Wissensvermittler vor allem an künftige Künstlergenerationen zu sein. Aus dieser Einstellung heraus entstanden seine theoretischen Schriften:

1. „Underweysung der messung/ mit dem zirckel und richtscheyt / in Linien ebnen und gantzen corporen ...“ aus dem Jahre 1525,

¹⁾ ἰχνογ — Fußtapfe

²⁾ ὀρθόγ — aufrecht

2. „Etliche underricht zu befestigung der Stett schloss und flecken“,

3. „Hierin sind begriffen vier Bücher von menschlicher Proportion ...“ aus dem Jahre 1528.

In seinem ersten Werk macht DÜRER konsequent Gebrauch von zugeordneten Normalrissen z. B. bei der Demonstration der Kegelschnitte Ellipse, Parabel und Hyperbel. Er stellt einen Drehkegel in Grund- und Aufriß dar, schneidet diesen mit zweitprojizierenden Ebenen von unterschiedlichen Neigungswinkeln und bestimmt die wahre Gestalt der entstandenen ebenen Schnittfiguren durch Umlegung parallel zur Bildebene. Auch die fünf regulären und einige halbreguläre Polyeder sowie Schraublinien und Schraubflächen werden durch Grund- und Aufriß wiedergegeben. Besonders originell sind die zu den Körpern gebotenen Netze. In der „Proportionslehre“ von 1528 wird bei Darstellung des menschlichen Körpers fast durchgehend mit Auf- und Seitenriß gearbeitet. Ferner werden ebene Schnitte gelegt, wie dies heute bei technischen Zeichnungen im Prinzip gleichfalls anzutreffen ist. Trotz vieler Auflagen und Übersetzungen von DÜRERS Werken gerieten seine gehaltvollen Ansätze zur darstellenden Geometrie auf seiten der Wissenschaft und technischen Praxis fast vollständig in Vergessenheit. Man sah in ihm zu einseitig eine der repräsentativsten Künstlerpersönlichkeiten der Renaissancezeit.

Einen wichtigen Beitrag zur geometrischen Begründung konstruktiver Methoden lieferte GIRARD DESARGUES (1593—1662) vor allem bezüglich der zentralperspektiven Abbildung. Sein Schüler ABRAHAM BOSSE (1602—1676) veröffentlichte ein praxisbezogenes Buch über den Steinschnitt. Später wandte sich der französische Ingenieur-offizier AMÉDÉE FRANÇOIS FRÉZIER (1682—1773) in seinem 1738 erschienenen Werk wieder dem Grund- und Aufrißverfahren zu und betonte darin konsequent die Trennung von Theorie und Praxis. Erst MONGE ging mit seiner wissenschaftlich exakten Begriffsbildung und Herausstellung allgemeiner geometrischer Aspekte bezüglich der zugeordneten Normalrisse wesentlich über DÜRER hinaus.

Auch an die von DÜRER unter dem Eindruck der akuten Türkengefahr geschriebene Befestigungslehre knüpfte kein Nachfolger unmittelbar an. Vielmehr galt der Franzose SÉBASTIEN DE VAUBAN (1633—1707), Festungsbaumeister und Marschall von LUDWIG XIV., bis zu Beginn des 19. Jahrhunderts als Autorität auf diesem Gebiet. Axonometrische Darstellungsverfahren und Eintafelprojektion waren vielbenutzte Hilfsmittel für die Planung und den Bau militärischer Befestigungsanlagen. Die kotierte Projektion erfuhr durch JEAN FRANÇOIS GASPARD NOIZET (1749—1837) eine begrifflich exakte Durchbildung. Den Hauptsatz der Axonometrie fand KARL WILHELM POHLKE (1810—1876), Berlin 1853, und veröffentlichte ihn 1860 zunächst noch ohne Beweis.

Zur Zentralperspektive, einem weiteren Untersuchungsgegenstand der darstellenden Geometrie, läßt sich ebenfalls eine Entwicklungslinie über viele Jahrhunderte zurückverfolgen. Zum Beispiel schreibt VITRUV in seinem bereits oben zitierten Werk, daß die Griechen zur Zeit des ÄSCHYLUS (um 500 v. u. Z.) beim Bemalen der Bühnendekorationen gewisse Gesetzmäßigkeiten der Zentralperspektive beachtet hätten. Sie nannten diese Art der Bühnenausstattung „scenographia“¹⁾, was sich in

¹⁾ σκηνή — Bühne

dem Wort „Szene“ von etwas verschwommenen Inhalt bis in den heutigen Sprachgebrauch erhalten hat. Auch DEMOKRIT und ANAXAGORAS sollen zu dieser Art der Abbildung räumlicher Objekte erste allgemeine Regeln aufgestellt haben. EUKLIDS Optik (300 v. u. Z.) enthält mehrere zur Zentralperspektive gehörige Lehrsätze. Unmittelbare Zeugnisse der Antike bieten die bis auf den heutigen Tag erhalten gebliebenen Wandmalereien der im Jahre 79 u. Z. im Ascheregen des Vesuvs versunkenen Stadt Pompeji. Die Künstler der damaligen Zeit nutzten einfachste Gesetzmäßigkeiten der Zentralperspektive, um durch die Wandbemalung einen raumvergrößernden optischen Effekt zu erzeugen. Nach der Völkerwanderung und dem Untergang des weströmischen Reiches trat ein Stillstand, teilweise sogar ein Rückschritt in Kultur und Wissenschaft ein. Die Zentralperspektive geriet in Vergessenheit und wurde durch die sogenannte byzantinische Manier, eine schiefe Parallelprojektion, ersetzt.

Erst die Zeit der Renaissance brachte eine Wiederbelebung des Interesses an der Herstellung zentralperspektiver Bilder. Florenz ist als erste Pflegestätte der Zentralperspektive am Ausgang des Mittelalters zu verzeichnen. Nach einem Bericht des Kunstschriftstellers GIORGIO VASARI (1511–1574) hat der florentinische Baumeister FILIPPO BRUNELLESCHI (1377–1446) eine Abbildungsmethode erfunden, die vom Grundriß und Profil ausgeht und (eine Bildebene) schneidende Linien benutzt. Gewiß hat BRUNELLESCHI richtig das zentralperspektive Bild eines Gegenstandes als ebenen Schnitt einer vom Auge an den scheinbaren Umriß des räumlichen Objektes gelegten Pyramide aufgefaßt und diesen mittels zugeordneter Normalrisse konstruiert. Der älteste schriftliche Beleg zur Theorie der Zentralperspektive stammt von dem Florentiner Architekten und Maler LEON BATTISTA ALBERTI (1404–1472). Er überwindet verschiedene irrige Meinungen in der Lehre der Malerei und zeichnet z. B. das Zentralbild eines quadratisch getäfelten Fußbodens in frontaler Lage fehlerfrei. Vor allem zeigt er dabei, wie die Breitenlinien in der Tiefe richtig zu staffeln sind. Der Hauptpunkt ist als Fluchtpunkt der Tiefenlinien eindeutig nachweisbar und wird als „punto del centro“ bezeichnet. Auch ein Distanzpunkt wird als „punto della veduta“ konstruktiv genutzt. Zur Übertragung eines Kreises in einen Zentralriß verwendet er ein quadratisches Netz von Hilfslinien, das in entsprechender Weise mit transformiert wird.

Das älteste Manuskript zu einem Lehrbuch in der Zentralperspektive stammt von dem umbrischen Maler PIERO DELLA FRANCESCO (gest. 1492). Dieser empfing seine künstlerische Ausbildung in Florenz und pflegte persönliche Kontakte zu Gelehrten und vor allem Mathematikern seiner Zeit. Nach seiner Erblindung diktierte er das Werk „De prospectiva pingendi“¹⁾ seinen Schülern in die Feder, um so eine Überlieferung seiner Kenntnisse an die Nachwelt zu sichern. Das Manuskript wurde allerdings erst Ende des vorigen Jahrhunderts wieder aufgefunden und 1899 erstmals in italienischer und deutscher Sprache veröffentlicht. Am bemerkenswertesten vom geometrischen Standpunkt ist die darin aufgezeichnete Erkenntnis, daß zwischen dem Zentralriß einer horizontal gelegenen ebenen Figur und der Umlegung dieser Figur in die senkrechte Bildtafel eine geometrische Verwandtschaft besteht, die man

¹⁾ Sinngemäß: „Über die malerische Perspektive“.

als perspektive Kollineation bezeichnet. PIERO beherrschte diese Verwandtschaft mit konstruktiv sehr einfachen Mitteln (Diagonalmethode) und wandte sie geschickt zur Lösung einiger Aufgaben an. Wahrscheinlich haben seine Schüler, die das Manuskript zu Papier brachten, diese Konstruktionsregel selbst genutzt und mündlich an andere Maler weitergegeben. Sie läßt sich z. B. bei LEONARDO DA VINCI (1452 bis 1519) und in etwas abgewandelter Form bei ALBRECHT DÜRER (1471—1528) nachweisen.¹⁾

Nördlich der Alpen wirkte wiederum DÜRER sowohl durch sein künstlerisches Schaffen, als auch durch seine theoretischen Schriften als Schrittmacher für die Zentralperspektive. Seit 1496 ist in seinen Bildern, soweit es die dargestellten Objekte zulassen, der Hauptpunkt als Fluchtpunkt der Tiefenlinien exakt nachweisbar. Auch die Augdistanz ist in seinen Bildern vielfach rekonstruierbar, wodurch ein Zugang für eine geometrische Bildanalyse gesichert ist. Die Anregung zur konsequenten Anwendung der Zentralperspektive sowie einige Konstruktionsregeln hierzu empfing DÜRER zweifellos auf seinen beiden Italienreisen. Allerdings beschränkte er sich, wie noch fast alle Maler der Renaissance, auf eine frontale Anordnung von Gebäuden und quaderförmigen Gegenständen bezüglich der Bildebene. Die Strenge der Anordnung bei den dargestellten Objekten trägt nicht immer zur Auflockerung der Bildwirkung bei. Eine volle Ausschöpfung der von PIERO DELLA FRANCESCO aufgedeckten geometrischen Verwandtschaft für künstlerische Belange ist in der Zeit der Renaissance nicht zu verzeichnen. Dies liegt darin begründet, daß der Begriff des gemeinsamen Fluchtpunktes zueinander paralleler Geraden von den Malern damals noch nicht in seiner Allgemeinheit erfaßt wurde. Erst der italienische Mathematiker GUIDO UBALDUS bot in seinen sechs Büchern zur Zentralperspektive eine begrifflich klare Darstellung und Anwendung des Satzes vom Fluchtpunkt (Bologna 1600). Wegen des logischen Aufbaus und der Strenge der Beweisführung in seinem Werk gilt UBALDUS als Begründer der theoretischen Lehre von der Perspektive.

Einen weiteren Fortschritt brachte das Büchlein mit dem Titel „La perspective speculative et pratique“ von ÉSTIENNE MIGON aus dem Jahre 1643 durch Einführung und Anwendung des Meßpunktverfahrens. Damit lassen sich konstruktiv wenig aufwendig vorgegebene Strecken in ein zentralperspektives Bild überführen. Aus geometrischer Sicht ist noch das Buch mit dem Titel „Die freye Perspektive“ von JOHANN HEINRICH LAMBERT (1728—1777) bemerkenswert. LAMBERT benutzte zur Konstruktion zentralperspektiver Bilder die Gesetzmäßigkeiten der projektiven Geometrie.

In der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts war die darstellende Geometrie als selbständiger Wissenszweig so weit gefestigt und allgemein anerkannt, daß im technischen Zeichnen der verschiedenartigsten Fachrichtungen gemeinsame Grundregeln und terminologische Konventionen von der darstellenden Geometrie akzeptiert wurden. Dadurch konnte eine Verständigung mittels technischer Zeichnungen selbst über sprachliche und fachliche Grenzen hinweg in der technischen Planung und Produktion für die Zukunft gesichert werden. Die vielfältige Pflege und Förderung

¹⁾ Diese Konstruktion ist in der zweiten Auflage der „Underweysung“ aus dem Jahre 1538 wiedergegeben. Das handschriftliche Original befindet sich im Britischen Museum in London.

des zu behandelnden Lehrfaches im 19. und laufenden 20. Jahrhundert soll hier nicht Gegenstand weiterer Betrachtungen sein. Es steht außer Zweifel, daß die darstellende Geometrie als wissenschaftliche Disziplin im Verlaufe der industriellen Revolution in hervorragender Weise zum Aufschwung der Produktivkräfte beigetragen hat. In jüngster Zeit eröffnen neue Kommunikationsmittel von Mensch zu Mensch und Mensch zu Maschine auch dieser Disziplin neuartige Einsatzmöglichkeiten zur Lösung der immer komplizierter werdenden konstruktiven Probleme.

0.3. Bezeichnungen und grundlegende Konventionen

Die im vorliegenden Band zu untersuchenden geometrischen Objekte und Konstruktionen werden sich auf den dreidimensionalen euklidischen Raum beschränken, der durch Einbeziehung der Fernelemente zum projektiven Raum erweitert wird. Grundlagen und Sätze der elementaren Planimetrie werden als bekannt vorausgesetzt. Alle Objekte der Untersuchung werden als reell existierend postuliert. Zwecke eindeutiger Verständigung und Vermeidung umständlicher Umschreibungen werden für die Bezeichnung geometrischer Gebilde folgende Konventionen getroffen, die denen der anderen Bände der Studienbücherei „Mathematik für Lehrer“ (MfL) entsprechen:

- a) Punkte durch lateinische Großbuchstaben $A, B, C, \dots$ oder innerhalb aufwendiger Konstruktionen durch die Ziffern $1, 2, 3, \dots$,
- b) Geraden und gekrümmte Linien durch lateinische Kleinbuchstaben $a, b, c, d, \dots$
- c) Ebenen durch griechische Kleinbuchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \dots$,
- d) gekrümmte Flächen durch griechische Großbuchstaben $\Phi, \Psi, \dots$,
- e) Winkel durch griechische Kleinbuchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \dots$

Der Vorgang des „Schneidens“ zweier Geraden g und h in einem Punkt P wird beschrieben durch $P = P(gh)$. Die Erzeugung einer Geraden s als Schnitt der Ebenen α und β wird symbolisch durch $s = s(\alpha\beta)$ erfaßt. Entsprechend bedeutet $g = g(AB)$ das „Verbinden“ der Punkte A, B durch die Gerade g . Mit $\varepsilon = \varepsilon(ABC)$ wird das Verbinden von drei nicht in einer Geraden liegenden Punkten durch eine Ebene ε und mit $S = S(\alpha\beta\gamma)$ das Schneiden von drei Ebenen allgemeiner Lage in einem Punkt S symbolisiert.

Werden zwischen die Symbole von zwei Elementen (Geraden oder Ebenen) die Zeichen $\parallel$ oder $\perp$ gesetzt, so bedeutet dies Parallelität bzw. Senkrechtstehen der betreffenden Elemente zueinander. Die durchgestrichenen Zeichen $\nparallel$ und $\nperp$ drücken die Negation hierzu aus. Mit $\in$ wird die Zugehörigkeit eines Elementes zu einer Menge ausgewiesen; $\notin$ bedeutet die Negation dazu.

Die Verbindungsstrecke der Punkte A, B wird mit AB und die Länge dieser Strecke mit $|AB|$ bezeichnet. Es gilt $|AB| = |BA| \geq 0$. Die Bezeichnung $m(AB)$

symbolisiert, daß die Länge der Strecke AB als vorzeichenbehaftete Größe anzusehen ist. Es gilt also $m(AB) = -m(BA)$.

Der von den Strahlen AB^+ und AC^+ eingeschlossene (nicht überstumpfe) Winkel wird mit $\angle BAC$ und die Größe dieses Winkels mit $|\angle BAC|$ bezeichnet. Es gilt $|\angle BAC| = |\angle CAB| \geq 0$. Die Größe des von den Strahlen AB^+ und AC^+ eingeschlossenen orientierten Winkels wird mit $m(\angle BAC)$ bezeichnet. Es gilt $m(\angle BAC) = -m(\angle CAB)$.

Die zur Anwendung kommenden Abbildungsarten sind Zentralprojektion und Parallelprojektion. Eine Verwendung von Geradenbündeln als Abbildungsmittel ist den Erfordernissen der darstellenden Geometrie nicht angepaßt, da Fragen der Sichtbarkeit bei dieser Interpretationsweise der eingesetzten Abbildungen nicht entscheidbar wären. Sichtbarkeitsentscheidungen sind jedoch für die darstellende Geometrie von grundlegender Bedeutung. Als Abbildungsmittel fungieren Strahlenbündel, wobei der Begriff „Strahl“ — abweichend von MfL, Band 6, Geometrie I — im Sinne einer orientierten Geraden zu verstehen ist. Dadurch ist bei der Zentralprojektion für jeden Punkt des projektiven Raumes (mit Ausnahme des Projektionszentrums) die Existenz seines Bildes in der Bildebene (als projektive Ebene aufgefaßt) gesichert.

Die an Objektbezeichnungen oben angefügten Akzente und Indizes kennzeichnen die Zugehörigkeit von Bildelementen zu bestimmten Rissen sowie die Entstehungsweise der Bilder. So ist beispielsweise P' der Grundriß und P'' der Aufriß des Punktes P . Das schiefaxonometrische Bild (dazu gehören auch Schrägbilder) eines Punktes P wird mit P^s bezeichnet. Entsprechend ist mit g^s das Bild der Geraden g gemeint. Das normalaxonometrische Bild eines Punktes P wird mit P^n bezeichnet. Das zentralperspektive Bild eines Punktes P führt die Bezeichnung P^c . Unter P^0 oder P_0 ist die Umlegung des Punktes P in die Bildebene zu verstehen.

1. Abbildungsverfahren der darstellenden Geometrie

1.1. Allgemeines über lineare Abbildungen. Erweiterung des euklidischen Raumes zum projektiven Raum

In Anpassung an die Bedürfnisse der Praxis bevorzugt die darstellende Geometrie Abbildungen, bei denen Geraden des Raumes — bis auf unvermeidbare Ausnahmefälle — in der Bildebene wieder als Geraden erscheinen. Es läßt sich zeigen, daß derartige Abbildungen stets auf *Zentral-* oder *Parallelprojektion* zurückführbar sind. Abbildungen mit dieser Eigenschaft heißen linear.

Um gewisse Erhaltungssätze bei diesen Abbildungen geschlossen formulieren zu können, bedarf es ergänzender Überlegungen zur Vorstellung vom Raum. Als Projektionszentrum werde ein im Endlichen gelegener Punkt Z und als Bildebene eine nicht durch Z gehende Ebene π angenommen. Die Abbildung eines von Z verschiedenen Punktes P erfolgt, indem Z mit P durch eine Gerade s verbunden wird. Im Schnitt von s mit π liegt der Bildpunkt P^c von P . Dabei ist es gleichgültig, ob P und P^c von Z getrennt werden oder nicht. Da die Bilder sämtlicher auf s liegenden Punkte mit Ausnahme von Z in P^c liegen, ist gezeigt, daß die Abbildung der Punkte des Raumes eindeutig, jedoch nicht umkehrbar eindeutig auf π erfolgt (Abb. 1).

Liegt der abzubildende Punkt P in einer zu π parallelen Ebene ν durch Z , so ist die Verbindungsgerade $s = s(ZP)$ parallel zu π . Der Punkt P hätte nach dieser

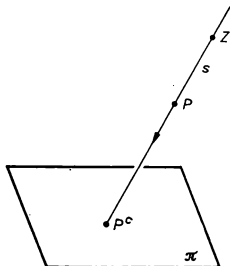


Abb. 1

Auffassung keinen Bildpunkt. Dies würde für sämtliche in der zu π parallelen Ebene ν durch Z liegenden Punkte gelten. Man nennt diese Ebene *Verswindungsebene*. Die Existenz solcher Ausnahmepunkte, deren Besonderheit nur in der speziellen Lage bezüglich des Projektionszentrums und der Bildebene besteht, zerstört die einheitliche Sprechweise bei vielen geometrischen Aussagen. Die Einheitlichkeit der betreffenden Aussagen kann durch eine begriffliche Erweiterung des euklidischen Raumes bewahrt werden. Am Beispiel der Abbildung einer zu π nicht parallelen und nicht durch Z gehenden Geraden g soll verdeutlicht werden, wie hierbei vorzugehen ist (Abb. 2).

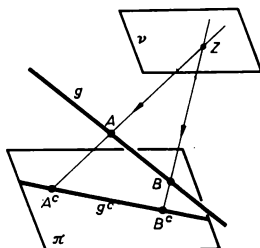


Abb. 2

Wegen der Linearität genügt es, die Bilder A^c, B^c zweier Punkte A und B von g aufzusuchen. Für die Bildgerade g^c gilt $g^c = g^c(A^c B^c)$. Ist $A_0 \in \nu$, so versagt die Konstruktionsvorschrift, obwohl sich der Punkt A_0 vor keinem anderen der Geraden g auszeichnet. Diese geometrisch nicht gerechtfertigte Ausnahmestellung des Punktes A_0 ist dadurch zu beseitigen, daß die euklidische Ebene durch Hinzunahme der uneigentlichen Punkte erweitert wird. Es wird daher gesagt: Der Bildpunkt von A_0 ist der *uneigentliche Punkt* $A_0^c \in \pi$. Wir bezeichnen die uneigentlichen Punkte als *Fernpunkte*.

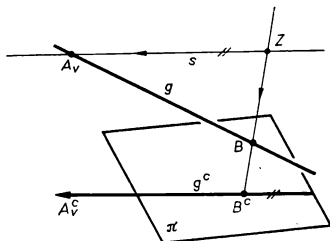


Abb. 3

Die Gesamtheit der *Fernpunkte* von π bildet die *Ferngerade* dieser Ebene. Aus der euklidischen Ebene π wird durch Hinzunahme der entsprechenden *Fernelemente* eine *projektive Ebene*. Das „Verbinden“ von B^c mit A^c zwecks Konstruktion von g^c besteht in diesem Fall darin, durch B^c die Parallele zum Projektionsstrahl $s = s(ZA^c)$ zu ziehen (Abb. 3).

Die Notwendigkeit der Hinzunahme von Fernelementen wird weiter durch folgende Überlegungen verdeutlicht: Durchläuft ein Punkt P eine Gerade g , so durchläuft P^c eine in π liegende Gerade g^c . Mit Ausnahme eines Punktes G_u^c wird jeder Punkt von g^c bei dieser Bewegung von P genau einmal erfaßt. G_u^c ergibt sich, wenn man den zu g parallelen Projektionsstrahl durch Z mit der Bildebene π zum Schnitt bringt. Für praktische Bedürfnisse ist es jedoch wenig befriedigend, wenn bei der Zentralprojektion von Geraden allgemeiner Lage stets ein Bildpunkt auszuschließen ist, da sich für diesen kein Originalpunkt auf der Geraden im euklidischen Raum angeben

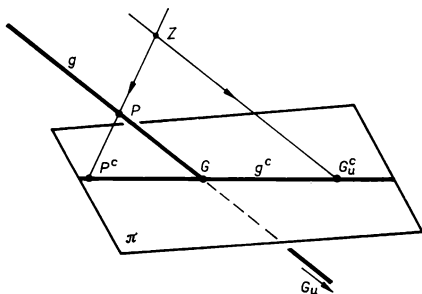


Abb. 4

läßt. Deshalb ist es zweckmäßig, die Gerade g durch genau einen Punkt, den uneigentlichen Punkt G_u , zu erweitern. Der zunächst ausgeschlossene Punkt G_u^c der Bildgeraden g^c wird *Fluchtpunkt* von g genannt. Bringt man auf der Geraden g eine Zahlenskala an, so ist dem Punkt G_u als Fernpunkt von g das Symbol „ ∞ “ zuzuordnen (Abb. 4).

Da nun den Geraden aller möglichen Lagen Fernpunkte und ihren zentralperspektiven Bildern Fluchtpunkte zuzuordnen sind, liegt es nahe, auch den euklidischen Raum durch Hinzunahme einer ∞^3 -fachen Mannigfaltigkeit von Fernpunkten zu erweitern. Die Gesamtheit dieser Fernpunkte bildet die *Fernebene*. Der euklidische Raum bildet zusammen mit der Fernebene den *projektiven Raum*. Die sich aus der Hinzunahme der Fernelemente ergebenden Konsequenzen sollen an einigen Beispielen demonstriert werden:

1. Zwei zueinander parallele Geraden g und h , die nicht parallel zur Bildebene liegen, haben die Bilder g^c und h^c . Sie besitzen einen gemeinsamen Fluchtpunkt $G_u^c = H_u^c$, den Bildpunkt des beiden Geraden gemeinsamen Fernpunktes. Eine

Mannigfaltigkeit untereinander paralleler Geraden bildet sich auf ein *Geradenbüschel* ab, dessen Träger der Fluchtpunkt dieser Geraden ist. Die Geradenmannigfaltigkeit selbst bildet ein *Geradenbündel*, dessen Träger der den Geraden gemeinsame Fernpunkt ist (Abb. 5).

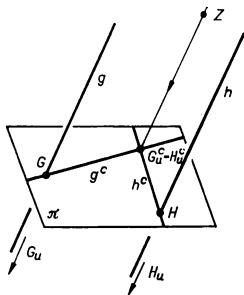


Abb. 5

2. Zwei nicht parallel zu π liegende Geraden g und h sollen sich in einem eigentlichen Punkt S_v schneiden, wobei $S_v \in v$ gilt. Der Bildpunkt von S_v ist ein in π liegender Fernpunkt. Folglich sind die Bildgeraden g^c und h^c zueinander parallel. Damit kann generell gesagt werden: Zwei in einer Ebene liegende Geraden schneiden sich in einem Punkt (Abb. 6).

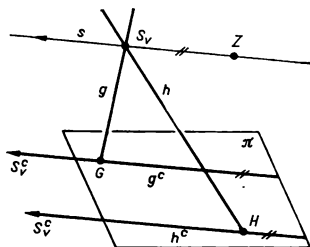


Abb. 6

3. Zwischen den Punkten einer nicht durch Z gehenden Ebene ε und deren Bildpunkten ist jetzt ausnahmslos eine eindeutige Zuordnung herstellbar. Die auf der Schnittgeraden $v = v(\varepsilon)$ liegenden Punkte bilden sich auf die Ferngerade von π ab. Man nennt v *Verschwindungsgerade* von ε . Die Gesamtheit der Bilder der uneigentlichen Punkte von ε liegt auf der eigentlichen Geraden u^c . Sie entsteht als Schnitt

von π mit einer zu ε parallelen Ebene durch Z . Man bezeichnet u^c als *Fluchtspur* von ε . Zueinander parallele Ebenen besitzen eine gemeinsame Fluchtspur. Wegen der Eineindeutigkeit der Abbildung von Fernelementen auf die Bildebene haben diese Ebenen auch eine gemeinsame Ferngerade. Somit kann man eine Schar zueinander paralleler Ebenen auch als *Ebenenbüschel* mit der zugehörigen Ferngeraden als Träger ansprechen (Abb. 7).

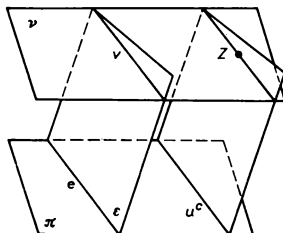


Abb. 7

Bei Bezugnahme von Abbildungen und Konstruktionen auf den projektiven Raum können alle Sätze über Schneiden und Verbinden ohne die im euklidischen Raum zu treffenden Fallunterscheidungen sprachlich gefaßt werden. Dies ist vor allem für Aufgaben der Lage von großem Vorteil. Ist das Projektionszentrum Z ein Fernpunkt, so werden die Fernpunkte des Raumes auf Fernpunkte der Bildebene abgebildet. Hieraus folgt z. B., daß die Parallelität von Geraden bei Parallelprojektion erhalten bleibt.

1.2. Zentralprojektion

Bei der Zentralprojektion wird ein eigentlicher Punkt Z als Projektionszentrum und eine nicht durch Z gehende Ebene π als Bildebene vorgelegt. Als *Abbildungsmittel* fungiert das Bündel von Geraden durch Z . Die Abbildung eines Punktes P auf die Bildebene wird durch die Gerade $s = s(ZP)$ vermittelt. Im Schnitt von s mit π liegt der Bildpunkt P^c von P . Nach der in 1.1. getroffenen Vereinbarung über die Hinzunahme der Fernelemente ist diese Abbildung für alle von Z verschiedenen Punkte des projektiven Raumes eindeutig erklärt. Die Punkte der Bildebene gehen dabei in sich selbst über. Der Punkt P^c ist das zentralperspektive Bild von P . Für den Abbildungsvorgang ist es geometrisch belanglos, ob P mit π bezüglich der Verschwindungsebene ν im gleichen Halbraum liegt oder nicht.

In Anlehnung an den Sehvorgang mit dem menschlichen Auge sowie an die Entstehung von Bildern beim Malen und Fotografieren wird die *Bildebene* π als im physikalischen Sinne senkrecht stehend angenommen. Ferner wird das *Projektionszentrum* Z vielfach mit dem *Auge* O identifiziert. Das Lot vom *Augpunkt* O auf die Bildebene ergibt den *Lotfußpunkt* H , der auch *Hauptpunkt* des Bildes genannt wird. H ist zugleich der Fluchtpunkt von allen auf π senkrecht stehenden Geraden. Ihre Bilder, die *Tiefengeraden*, sind besonders geeignet, dem Bild eine Tiefenwirkung zu geben. Die Entfernung vom Hauptpunkt H zum Augpunkt O nennt man *Augdistanz* d . Die Waagerechte h durch H in π ist eine wichtige Orientierungslinie beim Konstruieren zentralperspektiver Bilder. Auf ihr liegen die Fluchtpunkte aller horizontalen Geraden des Raumes. Man nennt deshalb h den *Horizont* des Bildes. Der Horizont ist auch die *Fluchtspur* von allen waagerecht liegenden Ebenen (Abb. 8).

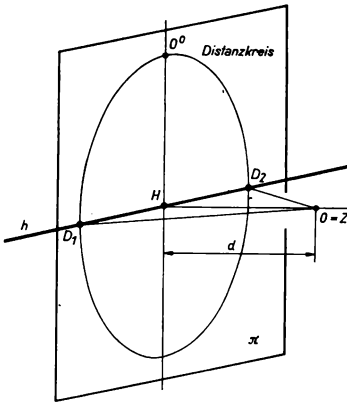


Abb. 8

Von konstruktivem Interesse ist weiterhin der geometrische Ort der Fluchtpunkte aller um 45° gegen die Bildebene geneigten Geraden. Dies ist ein Kreis um den Hauptpunkt H mit dem Radius $r = d$ (Augdistanz). Der *Distanzkreis* schneidet den Horizont in den *Distanzpunkten* D_1 und D_2 . Mit diesen Mitteln kann z. B. das zentralperspektive Bild eines in horizontaler Ebene liegenden, frontal ausgerichteten Schachbretts konstruiert werden. Die eine Feldlinienschar bildet Tiefengeraden und besitzt H als Fluchtpunkt. Die andere Schar von Feldlinien liegt parallel zum Horizont. Die Diagonalen der Feldquadrate sind unter 45° gegen die Bildebene geneigt. Ihre Fluchtpunkte fallen daher in die Distanzpunkte D_1 und D_2 . Umgekehrt kann aus dem Bild des Schachbretts die Augdistanz rekonstruiert werden. Bei *Rekonstruktionsanalysen* kommt es darauf an, außer dem Horizont auch das zentralperspektive Bild eines Quadrates oder Kreises auszuwerten (Abb. 9).

Das Bild einer nicht durch Z gehenden Geraden g ist — wie bereits oben dargelegt — durch die Bilder zweier Punkte von g eindeutig bestimmt. Zwei ausgezeichnete Bildpunkte von g sind der Spurpunkt $G = G(g\pi)$ und der Fluchtpunkt G_u^c (Bildpunkt des Fernpunktes G_u). Damit läßt sich z. B. eine Abbildung des Geradenraumes auf geordnete Punktepaare der Bildebene erklären. Diese Möglichkeit soll hier nicht weiter verfolgt werden (Abb. 10).

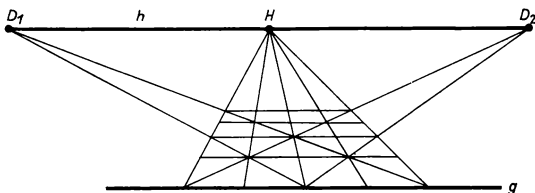


Abb. 9

Das zentralperspektive Bild g^c von g ist auch als Spur der von g und Z aufgespannten Ebene ε in der Bildebene interpretierbar. Hält man auf der Geraden g die vier Punkte A, B, U und V fest, so entsprechen diesen auf g^c die Bildpunkte A^c, B^c, U^c und V^c . Zu vier auf einer Geraden liegenden Punkten läßt sich bei Vorgabe einer

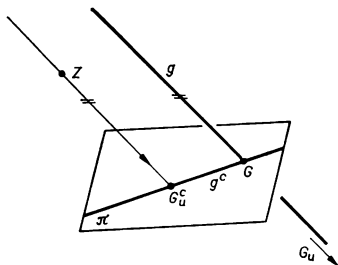


Abb. 10

bestimmten Reihenfolge eindeutig das *Doppelverhältnis* bilden. Eine Anwendung der Definition des Doppelverhältnisses für die auf g gegebene Folge von vier Punkten ergibt

$$\Delta := DV(A, B; U, V) = \frac{m(AU)}{m(AV)} : \frac{m(BU)}{m(BV)}$$

(Abb. 11). Es gilt der

Satz. Das Doppelverhältnis von vier auf einer Geraden liegenden Punkten ist invariant gegenüber der Zentralprojektion, d. h., es gilt

$$DV(A, B; U, V) = DV(A^c, B^c; U^c, V^c).$$

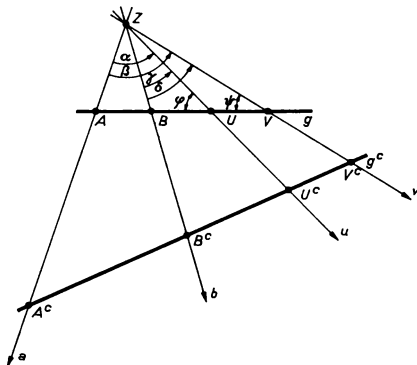


Abb. 11

Beweis. Zunächst werde die Ebene $\varepsilon = \varepsilon(gZ)$ in die Zeichenebene gelegt, und die aus der Zeichnung ersichtlichen orientierten Strecken- und Winkelgrößen werden eingeführt. Unter Anwendung des Sinussatzes der ebenen Trigonometrie findet man

$$\frac{m(AU)}{m(AZ)} = \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi}, \quad \frac{m(AV)}{m(AZ)} = \frac{\sin \beta}{\sin \psi}, \quad \frac{m(BU)}{m(BZ)} = \frac{\sin \gamma}{\sin \varphi}, \quad \frac{m(BV)}{m(BZ)} = \frac{\sin \delta}{\sin \psi}.$$

Durch Einsetzen in die Definitionsgleichung folgt hieraus

$$DV(A, B; U, V) = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} : \frac{\sin \gamma}{\sin \delta}.$$

Das Doppelverhältnis Δ der vier auf g liegenden Punkte hängt somit lediglich von den Winkeln ab, die die von Z ausgehenden Projektionsstrahlen miteinander einschließen. Eine völlig analoge Rechnung für das auf g^c liegende Punktequadrupel A^c, B^c, U^c, V^c würde daher auf das gleiche Ergebnis führen. Folglich gilt die obige Behauptung. Es ist zu beachten, daß das Doppelverhältnis Δ als reelle Zahl positiv, negativ oder 0 sein kann. Für den Fall, daß genau ein Punkt des ersten Punktepaares das zweite Punktepaar auf g trennt, gilt $\Delta < 0$. Liegen hingegen die Punktepaare getrennt auf g oder liegt ein Punktepaar zwischen den Punkten des anderen, so gilt $\Delta > 0$.

Bezeichnet man die von Z nach A, B, U, V führenden Strahlen mit a, b, u, v und versteht z. B. unter $m(\sphericalangle(a, u))$ die Größe des von a und u eingeschlossenen orientierten Winkels, so gilt

$$DV(A, B; U, V) = \frac{\sin m(\sphericalangle(a, u))}{\sin m(\sphericalangle(a, v))} : \frac{\sin m(\sphericalangle(b, u))}{\sin m(\sphericalangle(b, v))}.$$

Dieses Ergebnis legt es nahe, entsprechend dem im projektiven Raum gültigen *Dualitätsprinzip* auch von dem Doppelverhältnis eines durch den Punkt Z gehenden und in einer Ebene liegenden *Strahlenquadrupels* a, b, u, v zu sprechen. Die dualisierte Form für das Doppelverhältnis lautet daher

$$DV(a, b; u, v) = \frac{\sin m(\sphericalangle(a, u))}{\sin m(\sphericalangle(a, v))} : \frac{\sin m(\sphericalangle(b, u))}{\sin m(\sphericalangle(b, v))}.$$

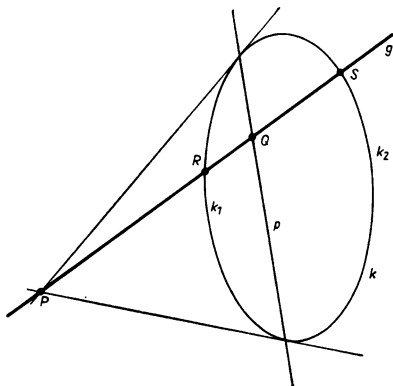


Abb. 12

Von besonderem Interesse sind jene Punkte- und Strahlenquadrupel, für die $\Delta = -1$ gilt. Man spricht dann von einer *harmonischen Lage* der vier Elemente zueinander. Diese tritt z. B. bei der *Polarverwandschaft* von Punkt und Gerade bezüglich eines Kegelschnittes k auf. Ist p eine Polare des Punktes P bezüglich k , so bilden auf jeder durch P gehenden Geraden g die Punkte $P, Q = Q(gp), R = R(gk_1)$ und $S = S(gk_2)$ ein *harmonisches Punktequadrupel* auf g (Abb. 12).

1.3. Parallelprojektion

Bei der Parallelprojektion ist das Projektionszentrum Z ein uneigentlicher, nicht auf der Ferngeraden der Bildebene π liegender Punkt. Das Abbildungsmittel ist also ein *Parallelstrahlbündel*. Der prinzipielle Unterschied dieser Abbildung zur Zentralprojektion besteht darin, daß sich die Fernelemente des Raumes genau auf die Ferngerade der Bildebene abbilden. Daraus resultieren die folgenden *Invarianzeigenschaften* der Parallelprojektion:

1. Parallele Geraden des Raumes, deren gemeinsamer Fernpunkt nicht in Z liegt, bilden sich als parallele Geraden ab.

2. Das von drei auf einer Geraden liegenden Punkten A, B, C bestimmte Teilverhältnis $TV(A, B; C) = \frac{m(AC)}{m(BC)}$ bleibt bei der Abbildung erhalten.

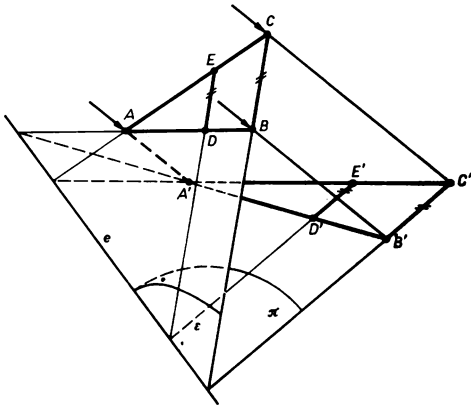


Abb. 13

3. Ebene Figuren, die parallel zur Bildebene liegen, bilden sich in wahrer Gestalt ab.

4. Zwischen Figuren in Ebenen allgemeiner Lage und deren Bildern besteht eine geometrische Verwandtschaft, die man *perspektive Affinität* nennt. Die Spur e der Trägerebene ε in der Bildebene π ist die *Fixgerade* dieser Abbildung. Durch Vorgabe der Fixgeraden und eines Punktepaares ist die *affine Abbildung* eindeutig bestimmt (Abb. 13). Vgl. 2.4.

Die mittels Parallelprojektion erzeugten Bilder sind im allgemeinen weniger anschaulich. Sie lassen jedoch bei bestimmten Vereinbarungen die Abnahme körperlicher Maße zu.

1.4. Schrägrißverfahren

Anschauliche Bilder räumlicher Objekte liefert bei geringem Konstruktionsaufwand das Schrägrißverfahren. Zur Herstellung solcher Bilder denkt man sich die Bildebene π im physikalischen Sinne senkrecht aufgestellt und den abzubildenden Gegenstand vor dieser Ebene angebracht. Dabei wird vorausgesetzt, daß sich in bezug auf den darzustellenden Körper zwanglos ein *orthogonales und normiertes Dreiein* als Hilfsmittel zur Maßübertragung einführen läßt. Der Körper wird bezüglich der Bildebene π so angeordnet, daß die x -Achse eines *Rechtsdreieins* senkrecht zur Bildtafel steht, während die y -Achse horizontal und die z -Achse vertikal in der Bildebene liegen. Durch ein Parallelstrahlbündel, welches schräg von vorn auf die Bildtafel fällt, werden alle ebenen Begrenzungsflächen des räumlichen Objektes, die parallel zur y, z -Ebene liegen, in wahrer Gestalt wiedergegeben. Dagegen bilden sich alle auf Parallelen zur x -Achse liegenden Strecken in einem bestimmten Verhältnis verkürzt oder gestreckt auf zueinander parallelen Geraden ab. Die Bilder von lotrechten Geraden bezüglich π schließen mit der z -Achse einen festen Winkel φ ein.

Offenbar ist zur Fixierung der Art eines Schrägbildes die Vorgabe von zwei Parametern notwendig. Dazu wird ein im Raum liegendes gleichschenkelig-rechtwinkliges

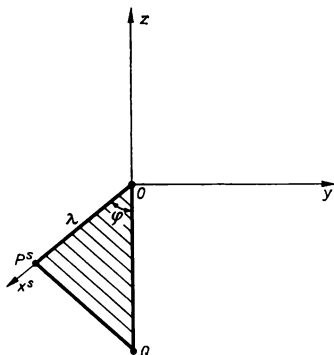


Abb. 14

Dreieck eingeführt. Seine Eckpunkte O , P , Q haben — auf das gewählte räumliche Koordinatensystem bezogen — folgende Koordinaten: $(0, 0, 0)$; $(1, 0, 0)$; $(0, 0, -1)$. Bei der hier getroffenen Annahme stimmen die Punkte O und Q mit ihren Schrägbildern überein, während der Schrägriß P^* von P verschieden ist. Das in π liegende Dreieck $\triangle OP^*Q$ stellt das *Verzerrungsdreieck* dar. Aus diesem sind ablesbar:

1. das Verzerrungsverhältnis $\lambda = \frac{|OP^*|}{|OQ|}$
- und
2. die Größe des Verzerrungswinkels $\varphi = |\sphericalangle P^*OQ|$ des Schrägrisses (Abb. 14).

Beim Anlegen von Schrägbildern gibt man sich das *Verzerrungsverhältnis* λ und die Größe des *Verzerrungswinkels* φ willkürlich vor, ohne nach der Einfallsrichtung jenes Parallelstrahlbündels zu fragen, das ein solches Bild erzeugt. Es werden Winkelgrößen und Verhältniszahlen bevorzugt, die bei Einfachheit der Bereitstellung und Konstruktion die Forderung nach Anschaulichkeit möglichst gut erfüllen, z. B.

$$\lambda = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \quad \varphi = 45^\circ, 30^\circ, 60^\circ.$$

Die Existenz von Strahlenrichtungen, die solche Abbildungen liefern, ist nach dem Satz von POHLKE gesichert (vgl. 4.2.); Abb. 15.

Das Schrägrißverfahren stellt ein spezielles Teilgebiet der *Axonomie* dar. Man nennt Schrägbilder wegen der darin getroffenen Anordnung des Objektes bezüglich der Bildebene auch *frontalaxonomische* Bilder. Wegen der Einfachheit der Kon-

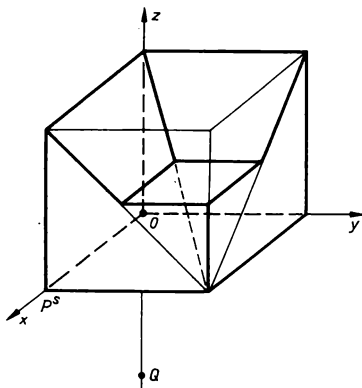


Abb. 15

struktion und der Vielfältigkeit der Anwendung in Lehrbüchern aller Art wird dieses Verfahren bereits hier in der Einleitung behandelt. Die oftmals unentbehrliche Darstellung von Kreis, Kugel, Drehkegel oder Drehzylinder im Schrägbild erfordert noch einige zusätzliche Kenntnisse über Ellipsenkonstruktionen. Die Schrägbilddarstellung solcher Körper muß daher für später aufgehoben werden (vgl. 3.8.).

1.5. Normalprojektion

Unter den Abbildungen durch Parallelprojektion nimmt die Normalprojektion vor allem für technische Anwendungen eine bevorzugte Stellung ein. Da die Projektionsstrahlen senkrecht auf die Bildebene treffen, hängt das Verkürzungsverhältnis bei Abbildung von Strecken lediglich von dem Neigungswinkel der Trägergeraden dieser

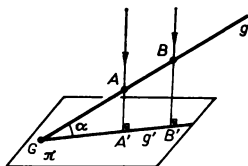


Abb. 16

Strecke gegen die Bildebene ab. Die Normalprojektion einer Strecke AB auf π werde mittels eines Schrägbildes verdeutlicht (Abb. 16). Offenbar gilt die Beziehung $|A'B'| = |AB| \cos \alpha$. Für $g \perp \pi$ gilt $A' = B'$. Man sagt in diesem Fall, die Gerade g ist *projizierend*. Sämtliche Punkte von g bilden sich in einem Punkt G , dem *Spurpunkt* von g ab.

Die Größe des Schnittwinkels γ zweier sich schneidender Geraden g und h kann im Bild je nach der Lage im Raum größer, gleich oder kleiner als im Original sein. Um etwas über die Größe des Bildwinkels aussagen zu können, ist zu fordern, daß sich keiner der Schenkel des Winkels in *projizierender Lage* befindet. Hinreichend dafür, daß sich der Winkel in wahrer Größe abbildet, ist die Bedingung, daß die von g und h aufgespannte Ebene parallel zu π liegt. Schneiden sich g und h senkrecht, so genügt für die Erhaltung des rechten Winkels bei der Abbildung, daß wenigstens eine der Geraden g und h parallel zu π ist. Von diesem Sachverhalt wird bei der Lösung von Aufgaben des Maßes in späteren Abschnitten öfter Gebrauch gemacht (vgl. 2.5.).

Zwischen den Punkten einer Ebene ε allgemeiner Lage und deren Bildpunkten ist eine eindeutige Zuordnung herstellbar. Die Fernpunkte von ε bilden sich genau auf die Ferngerade von π ab. Die Schnittgerade $e = e(\varepsilon\pi)$ ist Fixgerade der Abbildung.

Gilt $\varepsilon \perp \pi$, so fallen alle Bildpunkte von ε in die Spur dieser Ebene. Man sagt in diesem Fall, die Ebene ε ist in projizierender Lage bezüglich der Bildebene π (Abb. 17).

Durch das Auftreten von projizierenden Kanten und Flächen bei Normalprojektion eines räumlichen Objektes verliert das Bild an Anschaulichkeit. Da andererseits das Verkürzungsverhältnis von Strecken allein vom Neigungswinkel der zugehörigen Geraden gegen die Bildebene abhängt, ist die Abnahme von Maßen aus solchen Bildern wesentlich erleichtert. In technischen Anwendungen bedient man sich deshalb vorzugsweise der Normalprojektion.

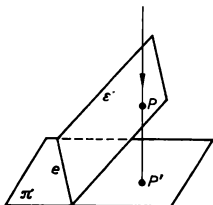


Abb. 17

Da durch ein zweidimensionales Bild eines dreidimensionalen Objektes noch nicht dessen Rekonstruierbarkeit gesichert ist, bedarf es zusätzlicher Hilfsmittel und Vereinbarungen, um ebene Bilder für räumliche Konstruktionen verwendbar zu machen. Zwei Wege sind für die Theorie und Praxis von fundamentaler Bedeutung:

1. Von dem räumlichen Objekt werden zwei Normalprojektionen bereitgestellt. Die Projektionsrichtungen zur Erzeugung der beiden Bilder sowie die *Projektionsebenen* stehen aufeinander senkrecht. Für weitere Konstruktionen werden die beiden Bilder in der Zeichenebene in bestimmter Weise einander zugeordnet. Man spricht in diesem Fall von dem *Verfahren in zugeordneten Normalrissen*.

2. Mit der Normalprojektion des räumlichen Objektes ist ein Maßstab (Längeneinheit) vorgegeben. Den Projektionen von charakteristischen Punkten oder Linien des räumlichen Gebildes werden die mit dem vorgegebenen Maßstab gemessenen Tafelabstände¹⁾ zahlenmäßig in Form von *Höhenkoten* beigelegt. Liegen die Punkte über der Bildebene π , so ist die zugehörige *Kote* größer als Null. Unter der Bildebene liegende Punkte haben eine negative Kote. Die Bezugsebene kann auch parallel zur Bildebene verschoben werden. Dieses Darstellungsverfahren heißt *kotierte Projektion* oder *Eintafelverfahren*.

Die Entscheidung über das anzuwendende Verfahren richtet sich nach dem sachlichen Inhalt der zu lösenden Aufgabe.

¹⁾ Das sind die Längen der von den Punkten auf die Bildebene gefällten Lote.

2. Das Zweitafelverfahren

2.1. Zuordnungsvorschrift von Normalrissen im Zweitafelverfahren

Der Einführung des Zweitafelverfahrens werde ein orthogonales und normiertes räumliches Rechtsdreiein zugrunde gelegt. Vom Betrachter aus gesehen zeige die von einem festen Punkt O ausgehende, horizontal liegende x -Achse nach vorn, die y -Achse nach rechts und die z -Achse nach oben. Für die weiteren Darlegungen wird die x, y -Ebene mit der ersten Bildebene oder dem *Grundriß* π_1 und die y, z -Ebene mit der zweiten Bildebene oder dem *Aufriß* π_2 identifiziert. Der abzubildende Punkt P liege über π_1 und vor π_2 . Durch Normalprojektion von P auf π_1 erhält man den *Grundriß* P' von P . Die Distanz $|PP'|$ nennt man den *ersten Tafelabstand* des Punktes P . Sie stimmt mit dem z -Wert von P — auf das Koordinatendreiein bezogen — überein. Den diese Abbildung von P vermittelnden Strahl nennt man einen *ersten Projektionsstrahl* s_1 . Durch Normalprojektion von P auf π_2 erhält man den *Aufriß* P'' von P . Die Distanz $|PP''|$ nennt man den *zweiten Tafelabstand* des Punktes P . Sie stimmt mit der Abszisse von P — auf das Koordinatendreiein bezogen — überein. Den diese Abbildung von P vermittelnden Strahl nennt man einen *zweiten Projek-*

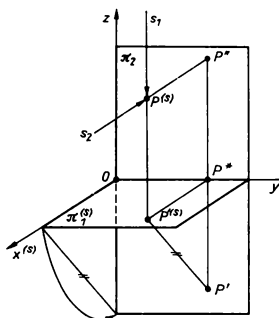


Abb. 18

Grundsätzlich ist festzuhalten: Grund- und Aufriß eines Punktes liegen auf einer Lotrechten zur Reißachse. Man sagt auch: Die beiden Bildpunkte befinden sich in *Mongescher Lage*.

Die bisherigen Darlegungen zeigen, daß sich beim Zweitafelverfahren jedem Punkt P des Raumes eindeutig ein in Mongescher Lage befindliches Bildpunktpaar P' , P'' zuordnen läßt und auch umgekehrt aus einem solchen Bildpunktpaar die Lage des

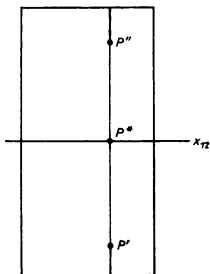


Abb. 20

Originalpunktes eindeutig rekonstruierbar ist. Es ist noch klarzustellen, wie man aus Grund- und Aufriß eines Punktes seine Zuordnung zu einem der vier Quadranten des Raumes ablesen kann. Entsprechend der Vierteldrehung von π_1 in die mit π_2 gemeinsame Zeichenebene ergibt sich eine der in Abb. 21 gezeigten Zuordnungen.

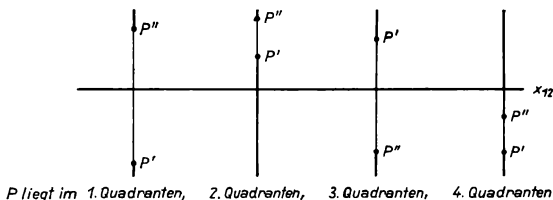


Abb. 21

Liegt ein Punkt P in π_1 , so stimmt das Original mit dem Grundriß überein, während der Aufriß von P auf die Reißachse fällt. Liegt P in π_2 , so stimmt das Original mit dem Aufriß überein, während der Grundriß von P auf die Reißachse fällt.

Neben Grund- und Aufriß — auch *erste* bzw. *zweite Bildebene* genannt — lassen sich zwei weitere Ebenen auszeichnen, die für konstruktive Belange gelegentlich mit herangezogen werden. Die Gesamtheit jener Punkte, deren Grund- und Aufrisse

spiegelbildlich zur Reißachse liegen, bildet die *Symmetrieebene* σ . Bezüglich des eingangs eingeführten Koordinatendreiecks wird σ durch die Gleichung $z = x$ beschrieben. Die Symmetrieebene enthält die Reißachse und durchsetzt den ersten und dritten Raumquadranten. Die Gesamtheit jener Punkte, deren Grund- und Aufrisse sich in der Zeichenebene decken, bildet die *Koinzidenzebene* κ . Sie wird durch die Gleichung $z = -x$ beschrieben, enthält ebenfalls die Reißachse und durchsetzt den zweiten und vierten Raumquadranten (Abb. 22).

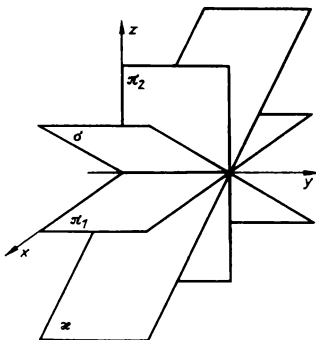


Abb. 22

2.2. Darstellung von Geraden im Zweitafelverfahren

Nach 2.1. ist die Lage eines Punktes P im Raum eindeutig durch die beiden Normalrisse P' und P'' bestimmt, die sich in Mongescher Lage befinden. Für die Untersuchung der Normalrisse einer Geraden ist davon auszugehen, daß eine Gerade g durch zwei ihrer Punkte P und Q eindeutig bestimmt ist. Die Bilder g' und g'' von $g = g(PQ)$ sind daher gleich den Verbindungsgeraden von P' mit Q' bzw. P'' mit Q'' . Es gilt also $g' = g'(P'Q')$ und $g'' = g''(P''Q'')$.

Nimmt man einen weiteren Punkt X auf g an, so gilt wegen der Invarianz von Teilverhältnissen bei Parallelprojektion

$$\frac{m(PX)}{m(QX)} = \frac{m(P'X')}{m(Q'X')} = \frac{m(P''X'')}{m(Q''X'')}.$$

Diese *Invarianzeigenschaft* findet beim *Vervollständigen* von Punktreihen in den Bildern von Geraden Verwendung (Abb. 23).

Auf einer Geraden g von allgemeiner Lage bezüglich der Projektionsebenen lassen sich zwei Punkte auszeichnen, nämlich der *erste Spurpunkt* $G_1 = G_1(g\pi_1)$ und der

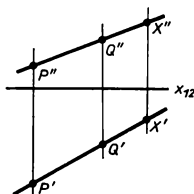


Abb. 23

zweite Spurpunkt $G_2 = G_2(g\pi_2)$. Die Lage einer Geraden läßt sich, soweit sie die Reißachse nicht schneidet, auch durch Vorgabe der Spurpunkte G_1 und G_2 beschreiben (Abb. 24). Da G_1 in π_1 und G_2 in π_2 liegt, fallen der Aufriß von G_1 und der Grundriß von G_2 in die Reißachse. Schneidet g die Reißachse, so fallen G_1 und G_2 mit dem be-

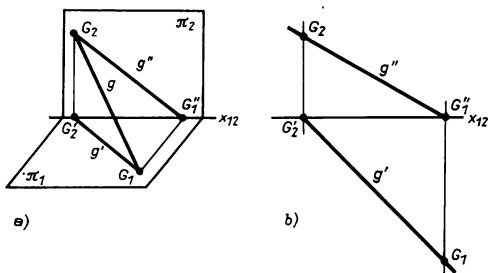


Abb. 24

treffenden Punkt der Reißachse zusammen. Außer den Spurpunkten G_1 und G_2 sind von einer Geraden g noch deren Schnittpunkte mit der Koinzidenzebene κ und der Symmetrieebene σ von Interesse. Die Bilder des Punktes $K = K(\kappa g)$ (*Koinzidenzpunkt*) liegen im Schnittpunkt von g' mit g'' , also $K'(g'g'') = K''(g'g'')$ (Abb. 25). Zur Konstruktion der Bilder des Punktes $S = S(\sigma g)$ spiegelt man z. B. g' an der Reißachse und erhält $\bar{g}'$. Der Schnittpunkt $S'' = S''(g'g'')$ stellt den Aufriß des *Symmetriepunktes* $S = S(\sigma g)$ dar. Den Ordner durch S'' mit g' zum Schnitt gebracht ergibt den Grundriß S' von S (Abb. 26).

Spezielle Lagen von g

Ist G_1 ein Fernpunkt von π_1 , so stellt g eine *Horizontale* dar. Ist G_2 ein Fernpunkt von π_2 , so stellt g eine *Frontale* dar. Liegen G_1 und G_2 auf einer Ordnungslinie, so ist g eine *Profilgerade*. Für Profilgeraden decken sich g' und g'' . Aus den Bildern g' und

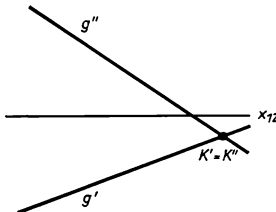


Abb. 25

g'' einer Geraden g läßt sich im allgemeinen die Lage von g im Raum ablesen. Lediglich für Profilgeraden ist eine Lagerekonstruktion aus g' und g'' allein nicht möglich. Es sind dann noch die Bilder von zwei auf g liegenden Punkten anzugeben.

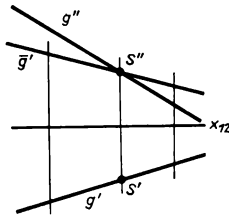


Abb. 26

Aus $g \perp \pi_1$ folgt: $G_1 = g'$, $g'' \perp x_{12}$; g ist *erstprojizierend*.

Aus $g \perp \pi_2$ folgt: $G_2 = g''$, $g' \perp x_{12}$; g ist *zweitprojizierend*.

Wegen der Linearität der Abbildung gilt ferner: Liegen die Grundrisse A' , B' , C' und die Aufrisse A'' , B'' , C'' der drei Punkte A , B , C auf einer Geraden, so liegen auch die Originalpunkte A , B , C im Raum auf einer Geraden. Eine Ausnahme ist lediglich für Profilgeraden zu machen.

Für die Lagebeziehungen von zwei Geraden g und h im Raum sind drei wesentliche Fälle zu unterscheiden. Bezeichnet man den Schnittpunkt von g' und h' mit A , den Schnittpunkt von g'' und h'' mit B , so lassen sich die Lagekriterien wie folgt fassen:

1. Die Punkte A und B liegen auf einer Ordnungslinie. Hieraus folgt, daß sich g und h in einem Punkt S schneiden. Es gilt $S' = A$ und $S'' = B$ (Abb. 27).

2. Die Punkte A und B liegen nicht auf einer gemeinsamen Ordnungslinie. Hieraus folgt, daß g und h *windschief* sind. Einer der Punkte A oder B kann dabei auch ein Fernpunkt sein (Abb. 28).

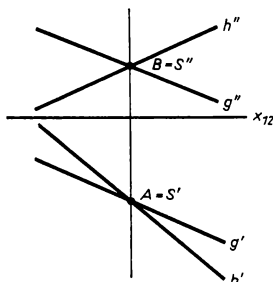


Abb. 27

3. Die Punkte A und B sind Fernpunkte, d. h. $g' \parallel h'$ und $g'' \parallel h''$. Hieraus folgt, daß die Geraden g und h parallel sind.

Ist auch nur eine der beiden Geraden eine Profilgerade, dann sind gesonderte Überlegungen erforderlich, auf die hier nicht weiter eingegangen werden soll.

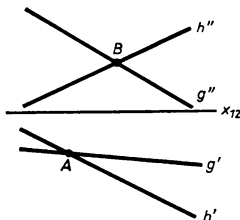


Abb. 28

2.3. Darstellung von Ebenen

Zur Darstellung von Ebenen ist davon auszugehen, daß eine Ebene durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte im Raum eindeutig bestimmt ist. Zur symbolischen Beschreibung einer durch die drei Punkte A, B, C aufgespannten Ebene ε setzt man

$\varepsilon = \varepsilon(ABC)$. Im folgenden werden *Punktetripel* verschiedener Anordnung bezüglich der Bildtafeln durch ihre Normalrisse vorgelegt und daraus Folgerungen über die Lagen der von den Punktetripeln aufgespannten Ebenen gezogen.

1. Die in der Zeichenebene liegenden Dreiecke $A'B'C'$ und $A''B''C''$ werden im positiven Sinn durchlaufen. In beiden Bildern ist die gleiche Seite der Ebene dem Betrachter zugekehrt. Man spricht von einer *gleichwendigen* Ebene ε . Wesentlich ist das Kriterium, daß der Umlaufsinn von Grund- und Aufriß aller in ε liegenden Dreiecke gleichorientiert ist (Abb. 29).

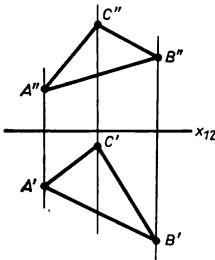


Abb. 29

2. Die in der Zeichenebene liegenden Bilder des Dreiecks $\triangle ABC$ werden im entgegengesetzten Sinn durchlaufen. In jedem der beiden Bilder ist daher eine andere Seite der Ebene dem Betrachter zugekehrt. Man spricht von einer *wechselwendigen* Ebene ε . Der Umlaufsinn von Grund- und Aufriß aller in ε liegenden Dreiecke ist entgegengesetzt gerichtet (Abb. 30).

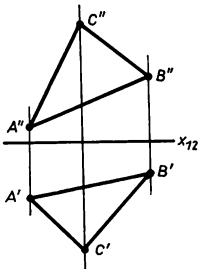


Abb. 30

3. Die Bildpunkte A' , B' , C' liegen in einer Geraden e_1 , während A'' , B'' und C'' im Zeichenfeld ein Dreieck aufspannen. Damit spannen auch die Punkte A , B , C im Raum ein Dreieck auf und legen eine Ebene ε fest. Diese Ebene steht senkrecht auf π_1 . Man bezeichnet sie als *erstprojizierend*. Die Grundrisse aller Punkte von ε

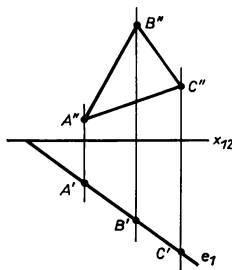


Abb. 31

liegen auf e_1 , der Schnittgeraden von ε mit π_1 . Die Abbildung der Punkte von ε auf π_1 ist eindeutig, jedoch nicht umkehrbar eindeutig (Abb. 31).

4. Die Bildpunkte A'' , B'' , C'' liegen in einer Geraden e_2 , während A' , B' und C' in der Zeichenebene ein Dreieck bilden. Auch hier ist gesichert, daß die Punkte A , B ,

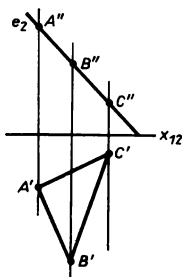


Abb. 32

C im Raum ein Dreieck aufspannen und folglich eine Ebene festlegen. Diese Ebene steht senkrecht auf π_2 . Man bezeichnet sie als *zweitprojizierend*. Die Aufrisse aller Punkte von ε liegen auf e_2 . Somit besteht nur Eindeutigkeit bei der Abbildung von ε auf π_2 (Abb. 32).

5. Die Bildtripel $A'B'C'$ und $A''B''C''$ der Punkte A, B, C liegen auf einer gemeinsamen Ordnungslinie. Ferner gelte

$$\frac{m(A'B')}{m(A'C')} \neq \frac{m(A''B'')}{m(A''C'')}.$$

Dann bilden die Punkte A, B, C ein in Profillage befindliches Dreieck. Die hierdurch festgelegte Ebene ist erst- und zweitprojizierend. Man bezeichnet sie auch als *doppeltprojizierend* (Abb. 33).

Projizierende Ebenen werden vielfach beim Einsatz von *Seitenrissen* und *Kreuzrissen* als Konstruktionsprinzip oder zum Anlegen anschaulicher Bilder herangezogen. Auf diese Anwendungen wird später eingegangen (vgl. 2.7. und 2.8.).

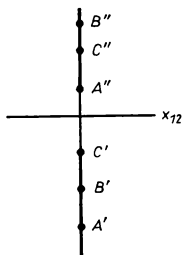


Abb. 33

Sind A', B', C' sowie A'', B'', C'' *kollineare Punktetripel*, so liegen die Punkte A, B, C selbst auch auf einer Geraden. Damit läßt sich durch diese Punkte ein ganzes Büschel von Ebenen legen. Für *Profillagen* der Punkte A, B, C sind gesonderte Untersuchungen etwa durch Anlegen eines Kreuzrisses erforderlich.

Eine Grundaufgabe besteht im *Vervollständigen* des Punktfeldes einer Ebene ε . Es werde vorausgesetzt, daß Fall 1 oder 2 vorliegt. Außer $\varepsilon = \varepsilon(ABC)$ ist noch der Grundriß D' eines in ε liegenden Punktes D gegeben. Der Aufriß von D läßt sich nach der Methode des „Angitterns“ finden. Man zeichnet die Verbindungsgerade $A'D'$. Diese schneidet $B'C'$ in einem Punkt P' . P selbst wird als ein Punkt der Seite BC aufgefaßt. Der Aufriß von P ergibt sich dann als Schnitt von $B''C''$ mit der Ordnungslinie durch P' . Ferner liegt nach Konstruktion der Punkt D auf der Geraden AP . Man erhält also den Aufriß von D , indem die Verbindungsgerade $A''P''$ mit der Ordnungslinie durch D' zum Schnitt gebracht wird. Die Gerade AP ist eine *Gitterlinie*, mit deren Hilfe der Aufriß von D bestimmt wird. Der Konstruktionsgedanke des Angitterns eines Punktes in einer Fläche läßt vielfältige Anwendungen zu (Abb. 34).

Um Konstruktionsergebnisse von hinreichender Zuverlässigkeit zu erhalten, sind als Ausgangselemente sogenannte „*schleifende Schnitte*“ von Geraden oder — dual

hierzu — dicht benachbart liegende Punkte zur Festlegung von Geraden zu vermeiden. Sie lassen sich bei Konstruktionen nicht ausschalten, wenn z. B. die Vorgabe der Punkte A, B, C zur Fixierung einer Ebene im Raum lagemäßig ungünstig ist. Falls sich nur ein Seitenpaar des Dreiecks $\triangle ABC$ schneidend schneidet oder zwei Punkte des Dreiecks dicht benachbart liegen, stellt das Punktetripel ABC eine wenig zuverlässige Vorgabe für die Ebene ε dar. In praktischen Anwendungen, z. B. beim Aufstellen eines dreibeinigen Stativs, wird man die Anordnung so treffen, daß die Fußpunkte annähernd ein gleichseitiges Dreieck aufspannen. Dann ergibt sich für

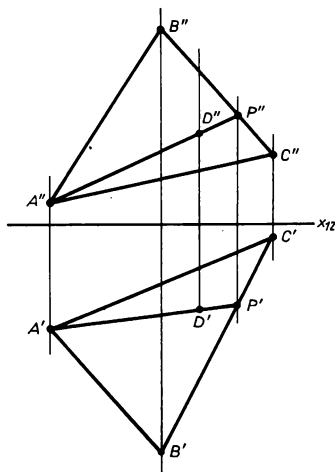


Abb. 34

das Gerät (Fotoapparat oder Meßinstrument) eine hinreichende Standfestigkeit. Hat man mehr als drei Punkte zur Auswahl, dann wird man jenes Punktetripel als Ausgangselement verwenden, das konstruktiv die größte Sicherheit bietet.

Einen anderen Zugang zur Darstellung von Ebenen bietet der

Satz. Eine Ebene im Raum ist durch zwei sich schneidende Geraden oder zwei parallele Geraden eindeutig festgelegt.

Eine Ebene ε allgemeiner Lage schneidet die Bildebenen π_1 und π_2 in je einer Geraden e_1 bzw. e_2 . Es werde vorausgesetzt, daß den drei Ebenen π_1 , π_2 und ε genau ein eigentlicher Punkt K gemeinsam ist. In K schneiden sich folglich die drei Geraden

$$x_{12} = x_{12}(\pi_1\pi_2), \quad e_1 = e_1(\pi_1\varepsilon), \quad e_2 = e_2(\pi_2\varepsilon).$$

Man bezeichnet e_1 als *Grundrißspur* oder *erste Spurgerade*, e_2 als *Aufrißspur* oder *zweite Spurgerade* und K als den *Knotenpunkt* von ε . Der Grundriß von e_1 stimmt mit dem Original überein, während sich der Aufriß von e_1 mit der Rißachse deckt. Entsprechend stimmt der Aufriß von e_2 mit dem Original überein, während der Grundriß von e_2 in die Rißachse fällt. Nach dem oben angeführten Satz ist die Lage einer Ebene ε eindeutig durch Vorgabe der beiden Spuren e_1 und e_2 bestimmt (Abb. 35 a, b).

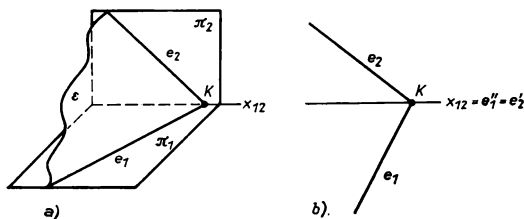


Abb. 35

Auch an den Spuren einer Ebene ist leicht zu erkennen, ob diese gleichwendig, wechselwendig oder projizierend ist. Für diese Betrachtung werde durch den Knotenpunkt K eine Ordnungslinie s gelegt. Dann lassen sich folgende leicht durchschaubaren Lagekriterien für ε geben.

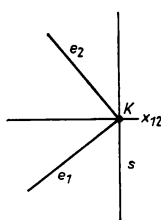


Abb. 36

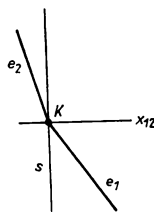


Abb. 37

1. Liegen die dem ersten Quadranten zugeordneten Abschnitte von e_1 und e_2 in einer der durch s bestimmten Halbebene, so ist ε gleichwendig (Abb. 36).
2. Liegen die dem ersten Quadranten zugeordneten Abschnitte von e_1 und e_2 in den entgegengesetzten Halbebenen bezüglich s , so ist ε wechselwendig (Abb. 37).
3. Deckt sich e_1 mit s , so ist ε zweitprojizierend (Abb. 38).
4. Deckt sich e_2 mit s , so ist ε erstprojizierend (Abb. 39).
5. Decken sich e_1 und e_2 mit s , so ist ε doppeltprojizierend (Abb. 40).

Liegen die Spuren von ε parallel zur Reißachse, so ist der Knotenpunkt K ein Fernpunkt. Eine solche Ebene bezeichnet man in Anlehnung an die Vorstellung von der Arbeitsfläche eines Schreibpultes als *Pultebene*. Die Darstellung einer Ebene durch ihre Spuren versagt, wenn diese die Reißachse enthält.

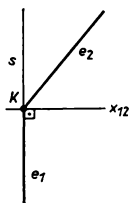


Abb. 38

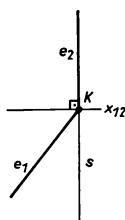


Abb. 39

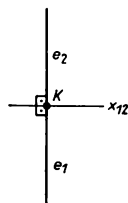


Abb. 40

Das Vervollständigen des Punktfeldes einer durch ihre Spuren bestimmten Ebene geschieht in analoger Weise zu der durch drei Punkte vorgelegten Ebene. Zum Beispiel sei von einem Punkt $P \in \varepsilon$ ($\varepsilon = \varepsilon(e_1 e_2)$) ist nicht projizierend) der Grundriß gegeben und der Aufriß gesucht. Eine in ε liegende Gerade p durch P hat die Spurpunkte $G_1 \in e_1$ und $G_2 \in e_2$. Man zeichnet zunächst den Grundriß p' von p und findet die

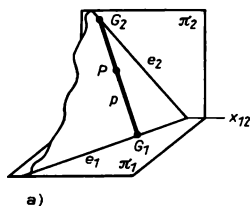
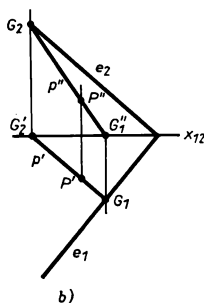


Abb. 41



Punkte G_1' mit $G_1' = G_1 \in e_1$ und $G_2' \in x_{12}$. Mit den entsprechenden Ordnern erhält man die Aufrisse $G_1'' \in x_{12}$ und $G_2'' = G_2 \in e_2$. Die Verbindungsgerade der Punkte G_1'', G_2'' stellt den Aufriß p'' des Gitterstabes p durch P dar. Eine Ordnungslinie durch P' schneidet p'' in P'' (Abb. 41 a, b).

Bei diesen Vorgaben pflegt man auch das Angittern eines Punktes mittels einer *ersten* oder *zweiten Spurparallelen* durchzuführen. Man bezeichnet jede Gerade h_i

parallel zu e_1 in ε als *erste Hauptlinie* oder erste Spurparallele von ε . Entsprechend heißt jede Gerade h_2 parallel zu e_2 in ε *zweite Hauptlinie* oder zweite Spurparallele von ε . Gemäß dieser Festlegung sind die ersten Hauptlinien einer Ebene — als Geraden im Raum aufgefaßt — *Horizontallinien* und die zweiten Hauptlinien *Frontallinien*. Die ersten Spurpunkte von ersten Hauptlinien sowie die zweiten Spurpunkte von zweiten Hauptlinien sind Fernpunkte der ersten bzw. zweiten Bildebene, soweit die Hauptlinien nicht selbst in einer der Bildebenen liegen.

Die ersten Hauptlinien bezeichnet man auch als *Höhenlinien* und die zweiten Hauptlinien als *Frontlinien* der betreffenden Ebene. Die Grundrisse von ersten Hauptlinien sind parallel zu e_1 und ihre Aufrisse parallel zur Reißachse, da sich der Aufriß von e_1 mit der Reißachse deckt. Entsprechend sind die Aufrisse der zweiten Hauptlinien parallel e_2 und ihre Grundrisse parallel zur Reißachse.

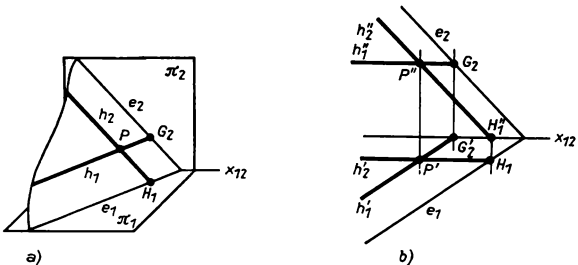


Abb. 42

Das Angittern eines Punktes $P \in \varepsilon_1$ dessen Grundriß P' gegeben ist, gestaltet sich mit Hilfe von Hauptlinien wie folgt:

Man legt durch P' den Grundriß h_1' einer ersten Hauptlinie $h_1 \parallel e_1$. Der Grundriß des zweiten Spurpunktes G_2 von h_1 liegt auf der Reißachse. Mittels Ordner führt man diesen in den Aufriß und erhält $G_2 \in e_2$. Die Parallele zur Reißachse durch G_2 ist der Aufriß h_1'' von h_1 . Entsprechend kann man P mittels einer zweiten Hauptlinie vom Grundriß ausgehend angittern. Durch P' ist der Grundriß $h_2' \parallel x_{13}$ von h_2 zu legen. Der erste Spurpunkt H_1 von h_2 liegt auf e_1 . Mit Hilfe einer Ordnungslinie findet man $H_1'' \in x_{12}$. Eine Parallele zu e_2 durch H_1'' liefert den Aufriß von h_2 . Im Schnittpunkt von h_1'' und h_2'' liegt der Aufriß P'' von P . Als Zeichenkontrolle kann überprüft werden, ob sich P' und P'' in Mongescher Lage befinden. Bei erstprojizierenden Ebenen ist das Vervollständigen nur vom Aufriß nach dem Grundriß und bei zweitprojizierenden Ebenen in umgekehrter Richtung möglich (Abb. 42a, b).

2.4. Lagenaufgaben für Punkt, Gerade und Ebene. Perspektive Affinität

Lagenaufgaben für die geometrischen Grundgebilde Punkt, Gerade und Ebene lassen sich durch Schneiden und Verbinden mit Hilfe des Lineals unter Einbeziehung von Ordnungslinien in zugeordneten Normalrissen lösen. Winkel- und Streckenübertragungen finden hierbei nicht statt. In 2.3. wurde bereits durch Vervollständigen eines ebenen Punktfeldes ein Beispiel einer Lagenaufgabe behandelt. Die bei Lösung von Lagenaufgaben einzusetzenden Konstruktionsmethoden sollen an einer Reihe von Beispielen vorgeführt werden.

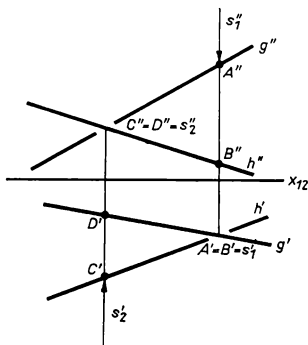


Abb. 43

1. An dem Grund- und Aufriß zweier windschiefer Geraden g und h ist in den Überdeckungsstellen die Sichtbarkeit zu verdeutlichen.

Lösung. Der erste Projektionsstrahl s_1 trifft an der ersten Überdeckungsstelle zuerst den Punkt A auf g und dann den Punkt B auf h . Folglich ist an dem ersten Überschneidungspunkt g' durchzuzeichnen und h' zu unterbrechen. Aus analogen Überlegungen für den Aufriß mit einem zweiten Projektionsstrahl s_2 folgt, daß g'' an der zweiten Überschneidungsstelle zu unterbrechen und h'' durchzuzeichnen ist (Abb. 43).

2. Gegeben sind eine Ebene $\varepsilon = \varepsilon(e_1 e_2)$ und ein Punkt $A \notin \varepsilon$. Je für Grund- und Aufriß entscheide man, ob A von ε verdeckt oder sichtbar ist.

Lösung. Man legt durch A eine Hilfsebene $\gamma \parallel \varepsilon$. Die Lage der Spuren c_1 und c_2 von γ bezüglich der Spuren von ε zeigt an, in welchem Riß A sichtbar und in welchem A verdeckt ist. In dem vorliegenden Beispiel liegt A über und hinter ε . A ist also im Grundriß sichtbar und im Aufriß verdeckt (Abb. 44).

3. Eine Ebene ε ist mit einer Geraden g zu schneiden.

Lösung. Man legt durch g etwa die erstprojizierende Hilfsebene γ . Diese schneidet ε nach der Geraden d , deren Grundriß d' sich mit g' deckt. Man bezeichnet deshalb d als *Deckgerade*. Die Geraden g und d spannen die Hilfsebene γ auf. Für den Fall, daß

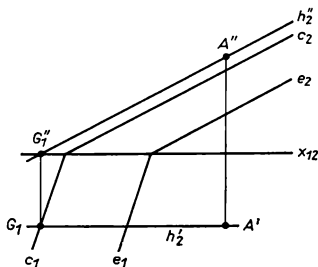


Abb. 44

g nicht parallel zu ε liegt, schneiden sich die Aufrisse g'' und d'' in einem Punkt D'' . Dies ist der Aufriß von $D = D(\varepsilon g)$. Den Grundriß D' erhält man mittels einer Ordnungslinie durch D'' . Völlig analog hätte man auch mit der zweitprojizierenden Hilfsebene durch g arbeiten können, um D zu erhalten (Abb. 45a, b).

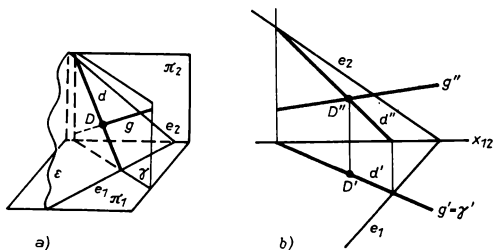


Abb. 45

4. Schnittgerade s der Ebenen $\varepsilon = \varepsilon(e_1 e_2)$ und $\gamma = \gamma(c_1 c_2)$.

Lösung. Die Bestimmung der Schnittgeraden zweier Ebenen wird auf den Schnitt zweier geeigneter Paare von Geraden zurückgeführt. Man bevorzugt hierfür Hauptlinien und unter diesen besonders die Spurgeraden der Ebenen. Bezeichnet man mit S_1 und S_2 die beiden Spurpunkte der Schnittgeraden $s = s(\gamma \varepsilon)$, so gilt offensichtlich

$S_1 = S_1(c_1e_1)$ und $S_2 = S_2(c_2e_2)$. Mit Hilfe von Ordnungslinien durch S_1 bzw. S_2 findet man die auf der Reißachse x_{12} liegenden Punkte S_1'' und S_2' . Weiterhin ist $s' = s'(S_1S_2')$ der Grundriß und $s'' = s''(S_1''S_2)$ der Aufriß von s . In analoger Weise hätte man mit beliebigen ersten und zweiten Hauptlinien von γ und ε arbeiten können (Abb. 46).

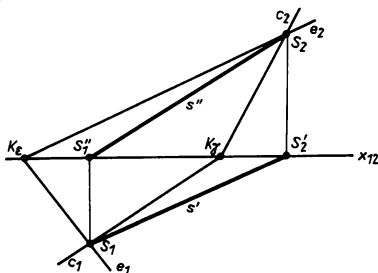


Abb. 46

5. Eine Ebene ε ist durch eine Gerade g und einen Punkt $P \notin g$ gegeben. Gesucht sind die Spuren der Ebene ε .

Lösung. Die Gerade $h_1'' \parallel x_{12}$ durch P'' schneidet g'' in einem Punkt I'' mit $I \in g$. Mittels einer Ordnungslinie findet man I' auf g' . Mit der Verbindung $(P'I') = h_1'$ hat man auch den Grundriß der ersten Hauptlinie von ε durch P . In entsprechender

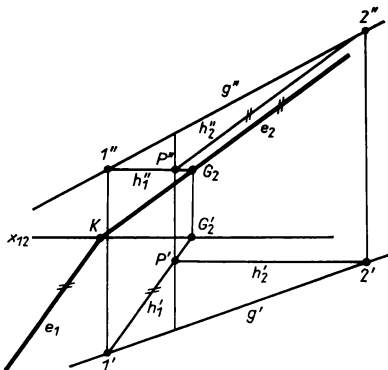


Abb. 47

Weise findet man die Normalrisse der zweiten Hauptlinie h_2 in ε durch P . Dabei ist vom Grundriß auszugehen. Der zweite Spurpunkt G_2 von h_1 ist ein Punkt der zweiten Spur von ε . Die Parallele zu h_2'' durch G_2 ist die zweite Spur e_2 von ε . Sie schneidet die Rißachse in K . Die Parallele zu h_1' durch K ist die erste Spur e_1 von ε (Abb. 47).

6. Von einem Punkt P ist die *Treffgerade* t an zwei windschiefe Geraden g und h zu legen. Dabei gilt $P \notin g, h$.

Lösung. Diese Aufgabe kann mit den unter 3 und 5 bereitgestellten Grundkonstruktionen behandelt werden. Zunächst wird von P und g eine Ebene γ aufgespannt, die sich mittels ihrer ersten und zweiten Hauptlinie durch P darstellen läßt. Den Schnittpunkt von h mit γ ermittelt man nach der in Aufgabe 3 vorgeführten Methode. Man findet $C = C(h\gamma)$ und damit die Treffgerade $t = t(PC)$ (Abb. 48).

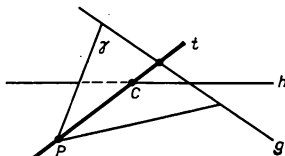


Abb. 48

7. Von einem ebenen Flächenstück (Dreieck) allgemeiner Lage im Raum ist der in π_1 erzeugte Schlagschatten bei Parallelbeleuchtung zu konstruieren. Das Dreieck $\triangle ABC$ sowie ein Strahl s des Parallelstrahlbündels sind durch Grund- und Aufriß vorgegeben.

Lösung. Zunächst sind durch A'' , B'' und C'' Parallelen zu s'' zu zeichnen. Diese schneiden die Rißachse in den Punkten A_1'' , B_1'' und C_1'' . Ferner sind durch die Punkte A' , B' und C' Parallelen zu s' zu legen. Ordner durch A_1'' , B_1'' und C_1'' schneiden die Parallelen zu s' unter Einhaltung der Zuordnungsvorschrift in den Punkten A_1 , B_1 und C_1 . Damit ist der erste *Schlagschatten* des Dreiecks $\triangle ABC$ gefunden (Abb. 49).

An den Grundriß $A'B'C'$ und den Schlagschatten $A_1B_1C_1$ des Dreiecks $\triangle ABC$ lassen sich planimetrische Betrachtungen anknüpfen, in die noch die erste Spur e_1 von $\varepsilon = \varepsilon(ABC)$ einzubeziehen ist. Verlängert man die Seiten der beiden Dreiecke und bringt die zugeordneten Geraden aus Grundriß und Schlagschatten miteinander zum Schnitt, so erhält man die drei Punkte P, Q, R mit $P = P((A'B') (A_1B_1))$, $Q = Q((B'C') (B_1C_1))$ und $R = R((C'A') (C_1A_1))$. Diese drei Punkte liegen nach räumlichen Überlegungen auf e_1 , der ersten Spur von ε . Die mittels Normalprojektion und beliebiger Parallelprojektion erzeugten Bilder einer ebenen Figur verbindet eine geometrische Verwandtschaft, die man als *perspektive Affinität* bezeichnet. Die Spur e_1 ist die *Affinitätsachse*, und s' gibt die *Affinitätsrichtung*. (s' ist der Grundriß des

Lichtstrahles s durch A .) Diese geometrische Verwandtschaft hat folgende Eigenschaften:

a) Jedem Punkt P der einen Punktmenge ist ein Punkt $\bar{P}$ der anderen Punktmenge umkehrbar eindeutig zugeordnet. Die Punkte der Affinitätsachse a und nur diese sind sich selbst zugeordnet. Dies sind die Fixpunkte der Abbildung.

b) Sind $P, \bar{P}$ einander zugeordnete Punkte, so sind die Verbindungsgeraden $g(X, \bar{X})$ für beliebige Punktepaare $X, \bar{X}$ zu $g(P, \bar{P})$ parallel. Diese Geraden heißen *Affinitätsgeraden*. Durch eine Affinitätsgerade ist die Affinitätsrichtung festgelegt. (Anwendung des Richtungsbegriffs im Sinne von MfL, Band 6, Geometrie I, S. 32.)

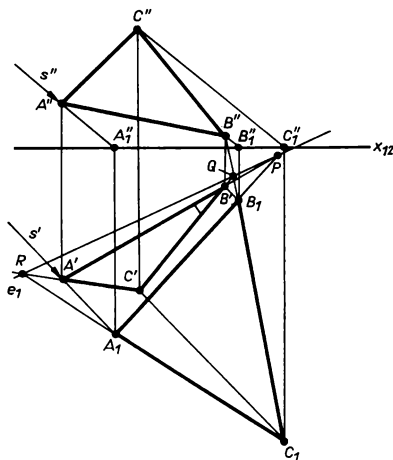


Abb. 49

c) Jeder Geraden g ist umkehrbar eindeutig eine Gerade $\bar{g}$ zugeordnet. Einander zugeordnete Geraden g und $\bar{g}$ schneiden sich auf der Affinitätsachse oder sind zur Achse parallel.

d) Einem Paar paralleler Geraden g und h ist ein paralleles Geradenpaar $\bar{g}$ und $\bar{h}$ zugeordnet.

e) Das Teilverhältnis dreier kollinear Punkte ist gleich dem Teilverhältnis der Bildpunkte (Abb. 50).

Sonderfall. Liegt die Affinitätsrichtung parallel zur Affinitätsachse, so bezeichnet man diese geometrische Verwandtschaft als *Scherung* (Abb. 51).

Für jede perspektive Affinität, die keine Scherung darstellt, schneidet die Verbindungsgerade eines Punktepaars $(P, \bar{P})$ die Affinitätsachse a in einem eigentlichen Punkt A . Das Streckenverhältnis $q = \frac{m(PA)}{m(\bar{P}A)}$ ist unabhängig von der Wahl des

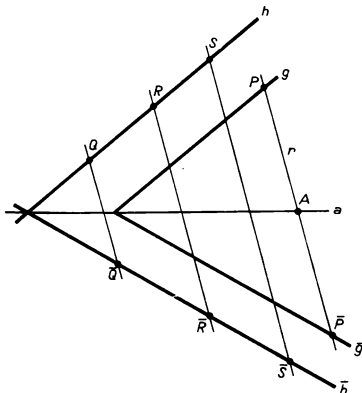


Abb. 50

Punktepaars aus dieser Abbildung. Man bezeichnet q als die *Charakteristik* dieser perspektiven Affinität. Die Bezeichnung einer solchen geometrischen Verwandtschaft als „perspektive Affinität“ geht auf EULER zurück.

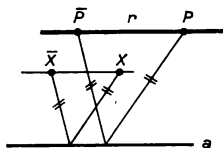


Abb. 51

8. Die Ebene $\varepsilon = \varepsilon(ABC)$ ist mit der Koinzidenzebene κ zum Schnitt zu bringen.

Lösung. Die Dreiecksseite AB schneidet die Koinzidenzebene κ in einem Punkt P ; für dessen Normalrisse nach 2.1. gilt $P' = P'' = ((A'B') (A''B''))$.

Analog gilt für Q und R

$$Q' = Q'' = ((B'C') (B''C'')), \quad R' = R'' = ((C'A') (C''A'')).$$

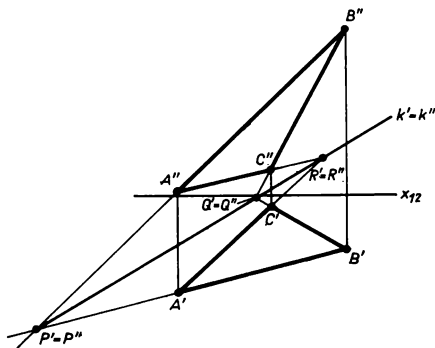


Abb. 52

Da P, Q und R auf der Geraden $k = k(\varepsilon\kappa)$ liegen, sind die drei Punkte kollinear. Zwischen Grund- und Aufriß besteht offensichtlich die in Aufgabe 7 eingeführte geometrische Verwandtschaft, wobei den sich deckenden Normalrissen der Koinzi-

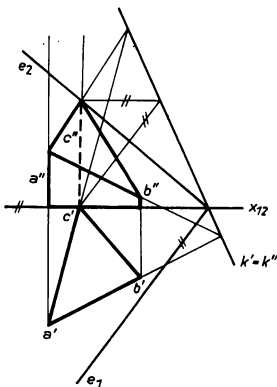


Abb. 53

denzgeraden die Rolle der Affinitätsachse und den Ordnungslinien die Rolle von Affinitätsstrahlen zufällt. Diese geometrische Verwandtschaft läßt sich z. B. auf das Vervollständigen eines ebenen Punktfeldes anwenden (Abb. 52).

Zur Konstruktion des Schnittes von Prisma und Ebene mittels der Koinzidenzgeraden siehe Abb. 53.

Die Konstruktion des Schnittes zweier Ebenenstücke mittels Deckgeraden (vgl. Aufgabe 3) zeigt Abb. 54.

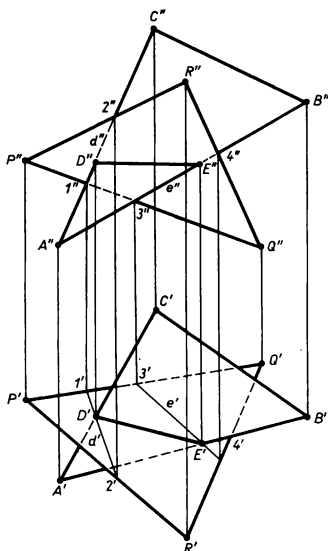


Abb. 54

2.5. Aufgaben des Maßes

Im Gegensatz zu Lagenaufgaben, die sich im Prinzip mit den *projektiven Grundoperationen des Schneidens und Verbindens* erledigen lassen, erfordern Maßaufgaben die Messung und Übertragung von Strecken und Winkeln, was neben dem Lineal auch den Einsatz des Zirkels verlangt. Die anfallenden *Maßaufgaben* lassen sich im wesentlichen auf drei Grundaufgaben und deren Umkehrungen zurückführen.

Dies sind:

- 1a. Bestimmung des Abstandes zweier Punkte im Raum,
- 1b. Abtragen einer Strecke auf einer Geraden von einem Punkt dieser Geraden,
- 2a. Bestimmung der wahren Gestalt einer ebenen Figur,
- 2b. Übertragen einer ebenen Figur in eine Ebene allgemeiner Lage,
- 3a. Errichten einer Senkrechten auf einer Ebene,
- 3b. Konstruktion einer Ebene senkrecht zu einer Geraden durch einen Punkt.

Zu 1. Es ist die Distanz zweier Punkte A, B zu bestimmen, die durch ihre Normalrisse gegeben sind.

Trapezmethode. Wie der räumlichen Anschauung zu entnehmen ist, bilden die vier Punkte A, B, B', A' ein Trapez mit rechten Winkeln bei A' und B' . Dieses Trapez

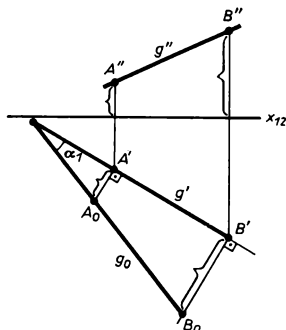


Abb. 55

wird um die Strecke $A'B'$ als Drehachse in die Zeichenebene umgelegt. Die umgelegten Punkte A_0, B_0 liegen auf Ordnern durch A' bzw. B' lotrecht bezüglich der Verbindungsgeraden $A'B'$. Die Längen $|A'A_0|$ und $|B'B_0|$ entsprechen den ersten Tafelabständen von A bzw. B . Folglich können sie für die Konstruktion der Umlegung dem Aufriß entnommen werden. Gemäß der räumlichen Anschauung bleibt bei der Umlegung die Distanz AB unverändert. Es gilt also $|A_0B_0| = |AB|$. Da hierbei mit einer Umlegung des Projektionstrapezes gearbeitet wird, spricht man von der *Trapezmethode* (Abb. 55).

Bringt man weiterhin die Geraden $A'B'$ und A_0B_0 miteinander zum Schnitt, so ergibt sich der erste Neigungswinkel α_1 der Verbindungsgeraden $g = g(AB)$ gegen die erste Projektionsebene π_1 .

In analoger Weise hätte man das zweitprojizierende Trapez in die Zeichenebene umlegen können. Als Nebenergebnis erhielte man den zweiten Neigungswinkel α_2 von g .

Differenzenmethode. Weniger aufwendig ist die Konstruktion mit dem *Differenzendreieck*. Auf $A'B'$ errichtet man im Bild jenes Punktes mit dem größeren ersten Tafelabstand in der Zeichenebene ein Lot und trägt darauf — vom Lotfußpunkt ausgehend — die Differenz der ersten Tafelabstände ab. Im vorliegenden Beispiel entsteht so das Differenzendreieck $\triangle A'B'A_0'$, aus dem die wahre Länge der Strecke $\overline{AB}$ und die Größe des ersten Neigungswinkels entnommen werden können (Abb. 56).

Methode des Paralleldrehens. Den elegantesten Lösungsweg bietet die *Mongesche Drehkonstruktion*. Hierbei geht es darum, die Gerade $g = g(AB)$ möglichst einfach um eine erstprojizierende Gerade in eine frontale Lage oder um eine zweitprojizierende Gerade in eine horizontale Lage zu drehen. Im ersten Fall kann die

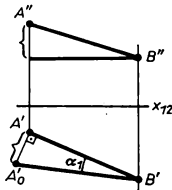


Abb. 56

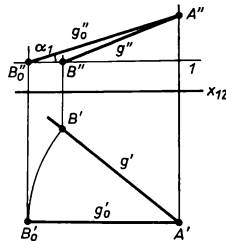


Abb. 57

Distanz $|AB|$ dem Aufriß, im zweiten Fall dem Grundriß entnommen werden. Ferner liefert — je nach Wahl der Drehachse — der Grundriß den zweiten und der Aufriß den ersten Neigungswinkel der Geraden g . Legt man — entsprechend der vorliegenden Figur — die erstprojizierende Drehachse durch A , so beschränkt sich die Drehkonstruktion auf folgende wesentliche Schritte:

- Zeichnen der Ordnungslinie $A'A''$ und einer Parallelen zur Rißachse durch B'' ; diese Hilfslinien schneiden sich in Punkt 1.
- Abtragen der Strecke $A'B'$ von 1 auf der Hilfslinie durch B'' ; es ergibt sich der Aufriß B_0'' des gedrehten Punktes B_0 .

Die Länge der Strecke $A''B_0''$ ist nach den oben angestellten Überlegungen gleich der wahren Länge der Strecke AB . Der Winkel $\sphericalangle B''B_0''A''$ ist gleich dem ersten Neigungswinkel von $g = g(AB)$ (Abb. 57).

Zum Abtragen der vorgelegten Strecke AB auf einer beliebigen Geraden g von einem Punkt $P \in g$ wird man zunächst g zu einer Bildebene parallel drehen. Auf der parallel gedrehten Geraden g_0 trägt man die Strecke AB von P_0 aus ab und macht dann die Drehung von g samt den gefundenen Endpunkten wieder rückgängig.

Zu 2. Von einem in zugeordneten Normalrissen vorgelegten Dreieck $\triangle ABC$ ist die wahre Gestalt zu bestimmen.

Zur Lösung dieser Aufgabe ist davon auszugehen, daß sich eine ebene Figur bei Normalprojektion genau dann in wahrer Gestalt abbildet, wenn die Trägerebene parallel zur Bildebene liegt. Als Lösungsprinzip wird daher das Dreieck $\triangle ABC$ um eine erste Hauptlinie in horizontale oder um eine zweite Hauptlinie in frontale Lage zu drehen sein. Im ersten Fall gibt der Grundriß und im zweiten Fall der Aufriß die wahre Gestalt des Dreiecks wieder. Im vorgelegten Beispiel (Abb. 58) wird zweckmäßig durch den Eckpunkt A die erste Hauptlinie h_1 der Dreiecksebene gelegt. Beim Drehen von $\varepsilon = \varepsilon(ABC)$ mit h_1 als Drehachse beschreiben die Punkte B und C Kreisbögen mit M_B bzw. M_C als zugehörige Mittelpunkte. Die zu den Kreisbögen

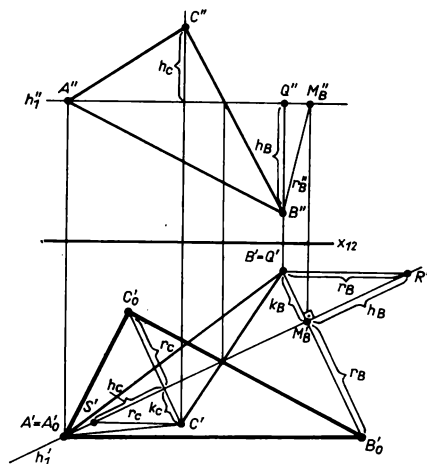


Abb. 58

gehörigen Ebenen sind erstprojizierend. Außerdem stehen sie senkrecht auf der Drehachse. Folglich verschieben sich die Bildpunkte B' und C' bei der Drehung des Dreiecks auf Ordnungslinien, die lotrecht zu h_1' liegen. A' bleibt bei der Drehung fest.

Damit wir B_0' und C_0' (Bildpunkte des horizontal gedrehten Dreiecks) einzeichnen können, brauchen wir noch die zu den Punkten B und C gehörigen Drehradien r_B und r_C . Zur Bestimmung von r_B werde das Stützdreieck $\triangle BQM_B$ mit einem rechten Winkel bei Q eingeschaltet. Die Kathetenlängen $|B''Q''| = h_B$ und $|Q'M_B'| = k_B$ können dem Auf- bzw. Grundriß entnommen werden. Der Drehradius $r_B = |BM_B|$ ist Hypotenuse in dem rechtwinkligen Dreieck $\triangle BQM_B$. Man könnte also r_B durch eine Nebenkonstruktion graphisch ermitteln. Da im Grundriß der Ordner durch B' senkrecht zu h_1' gezeichnet vorliegt, bietet sich folgende Konstruktion an:

Man entnimmt $h_B = |Q''B''|$ mit Hilfe eines Zirkels dem Aufriß, trägt diese Zirkelweite im Grundriß von M_B' ausgehend auf h_1' ab und erhält den Punkt R' . Die Strecke $B'R'$ ist nach den obigen Darlegungen gleich dem Drehradius r_B . Abschließend ist noch r_B von M_B' aus auf dem Ordner durch $B' \perp h_1'$ abzutragen. Man erhält so B_0' .

Bei dieser Konstruktion kommt man also im Prinzip mit der Übertragung zweier Zirkelweiten, nämlich der Strecke $B''Q''$ nach h_1' und der Strecke $B'R'$ nach dem Ordner durch $B' \perp h_1'$, aus. Man spricht hierbei auch von dem *Verfahren mit dem doppelten Zirkelschlag*. Zur Ermittlung des Bildes der Umlegung C_0' von C ist in Abb. 58 nur das Wesentliche der Konstruktion mit dem doppelten Zirkelschlag ein-

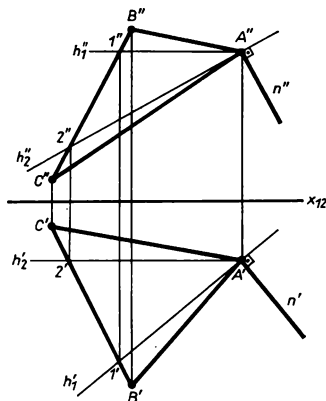


Abb. 59

getragen. Mit der Umlegung $\triangle A_0'B_0'C_0'$ präsentiert sich das Dreieck $\triangle ABC$ in seiner wahren Gestalt. Als Zeichenkontrolle ist zu beachten, daß sich die Verbindungslinien $B'C'$ und $B_0'C_0'$ in einem Punkt von h_1' , dem Grundriß der Drehachse, schneiden.

Zwischen dem Normalriß dieser ebenen Figur und dem Normalriß ihrer Umlegung besteht gleichfalls die *perspektive Affinität* als Zuordnungsvorschrift der beiden Bilder. Das Bild der Drehachse ist die Affinitätsachse, und senkrecht dazu liegt die Affinitätsrichtung. Beim Übertragen einer vorgelegten ebenen Figur in eine Ebene allgemeiner Lage sind in den hier dargelegten Konstruktionen gewisse Umkehrungen anzubringen.

Zu 3. Auf der von dem Dreieck $\triangle ABC$ aufgespannten Ebene $s(ABC)$ ist in A die Normale zu errichten.

Zur konstruktiven Bestimmung der Normalen ist davon auszugehen, daß die Normalprojektion eines rechten Winkels wieder als rechter Winkel erscheint, wenn wenigstens einer der Schenkel des im Raum liegenden Winkels parallel zur Bildebene liegt. Dabei sind projizierende Lagen der Winkelebene auszuschließen (vgl. 1.5.).

Die Normale $n \perp \varepsilon$ in A schließt mit jeder Geraden der Ebene ε durch A einen rechten Winkel ein. Unter diesen ist die Parallele zu π_1 , also die erste Hauptlinie von ε durch A , von Interesse. Wegen $n \perp h_1$ und $h_1 \parallel \pi_1$ gilt auch $n' \perp h_1'$. In gleicher Weise läßt sich zeigen, daß $n'' \perp h_2''$ gilt, wobei h_2 die zweite Hauptlinie von ε durch A ist. Die Ermittlung der Normalrisse des Lotes $n \perp \varepsilon$ durch A läuft also

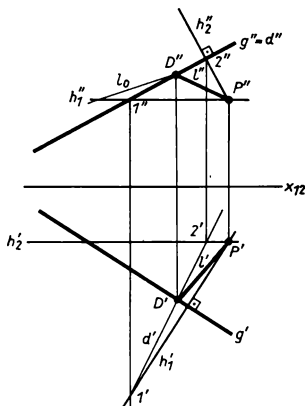


Abb. 60

darauf hinaus, zunächst die erste und zweite Hauptlinie von ε durch A zu konstruieren. Wegen $n' \perp h_1'$ und $n'' \perp h_2''$ können die Normalrisse von n durch A dann unmittelbar gezeichnet werden (Abb. 59).

Die Umkehrung dieser Aufgabe besteht darin, lotrecht zu einer Geraden g durch einen Punkt $P \notin g$ eine Ebene zu legen. Die Lage dieser Ebene läßt sich am einfachsten mittels der ersten und zweiten Hauptlinie durch P beschreiben. Da g eine Normale dieser Ebene ist, gilt nun auch umgekehrt $g' \perp h_1'$ und $g'' \perp h_2''$. Ferner liegen h_1'' und h_2' parallel zur Rißachse. Diese Aufgabenstellung läßt sich in verschiedener Weise variieren. Zum Beispiel kann gefordert werden, von einem Punkt P auf eine Gerade g das Lot zu fällen und den Abstand des Punktes P von der Geraden g zu bestimmen. Hierzu legt man durch P die Hilfsebene γ mit $\gamma \perp g$ und bestimmt den Durchstoßpunkt D von g mit γ . Dies geschieht durch Verwendung einer geeigneten

ten Deckgeraden d . Anschließend ist D mit P zu verbinden und der Abstand $l = |DP|$ etwa mit der *Methode des Paralleldrehens* zu ermitteln (Abb. 60).

Anwendung: Bestimmung des Schnittwinkels zweier Ebenen als Maßaufgabe.

Der Schnittwinkel zweier Ebenen γ und ε wird in einer Normalebene α bezüglich der Schnittgeraden $s = s(\gamma\varepsilon)$ gemessen, d. h., es ist $\alpha \perp s$ vorauszusetzen. Man gelangt zu drei nicht-kollinearen Punkten der Ebene α , indem man in ε einen Punkt

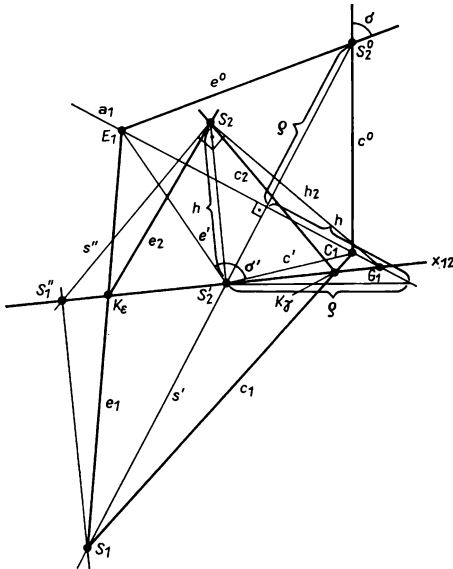


Abb. 61

$E \notin s$ sonst willkürlich vorgibt und von diesem die Lote auf γ und ε fällt. Man erhält die Lotfußpunkte C und S . Dann gilt für den Schnittwinkel σ der Ebenen γ und ε

$$\sigma = |\sphericalangle ESC|.$$

Die konstruktive Bestimmung des Winkels soll für den Fall vorgeführt werden, daß die Ebenen γ und ε durch ihre Spuren c_1 und c_2 bzw. e_1 und e_2 gegeben sind. Die Schnittgerade s hat die Spurpunkte S_1 und S_2 . Die Normalebene $\alpha \perp s$ werde aus Gründen der besseren Übersichtlichkeit durch S_2 gelegt. Der Aufriß ihrer zweiten Hauptlinie h_2 durch S_2 steht senkrecht auf s'' , d. h., es gilt $h_2 \perp s''$. Der erste Spur-

punkt G_1 von h_2 liegt auf der Reißachse, da h_2 eine Gerade von π_2 ist. Die Lotrechte zu s' durch G_1 ist somit die erste Spur a_1 von $\alpha \perp s$. Mit $C_1 = C_1(a_1c_1)$ und $E_1 = E_1(a_1e_1)$ hat man je einen Punkt der Geraden c und e , den Schenkeln des Winkels σ . Die Punkte C_1 , E_1 und S_2 bilden ein nicht-kollineares Punktetripel von α . S_2' , mit C_1 und E_1 verbunden, ergibt die Grundrisse der Schenkel des Winkels σ . Durch Anwendung der Methode mit dem doppelten Zirkelschlag unter Einsatz von C_1 und E_1 als Hilfspunkte findet man die Umlegung S_2^0 von S_2 auf s' . Die Strahlen $S_2^0C_1^+$ und $S_2^0E_1^+$ schließen in dem vorliegenden Beispiel (Abb. 61) den gesuchten (spitzen) Winkel σ ein. Führt diese Konstruktion zunächst auf einen stumpfen Winkel, so ist auf den Supplementwinkel überzugehen.

2.6. Anwendung von Grundkonstruktionen auf ebenflächig begrenzte räumliche Gebilde. Perspektive Kollineation.

Satz von Desargues

An ebenflächig begrenzten räumlichen Gebilden lassen sich vielfältige Anwendungen von Grundkonstruktionen zu Aufgaben des Maßes und der Lage demonstrieren. Die Benutzung einfachster Konstruktionen sichert die Übersichtlichkeit der Zeichnung und hält den Einfluß von Zeichnungsgenauigkeiten in zulässigen Grenzen.

Anwendungen dieser Art sind z. B. Schattenkonstruktionen an Pyramiden, Durchdringung zweier Prismen, Abwicklung der Mantelfläche eines Polyeders, ebener Schnitt einer Pyramide, Übertragen einer ebenen Figur in eine Ebene allgemeiner Lage, Bestimmung des gemeinsamen Lotes zweier windschiefer Geraden.

1. Eigenschaften und Schlagschatten einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide.

Gegeben sind eine auf π_1 lotrecht stehende regelmäßige sechsseitige Pyramide und ein Strahl s des parallel einfallenden Lichtes durch Grund- und Aufriß.

Gesucht sind Eigen- und Schlagschatten dieser Pyramide.

Man konstruiere zunächst die von dem parallel einfallenden Licht erzeugte Projektion der Pyramidenspitze S in π_1 . Hierzu wird der durch S gehende Projektionsstrahl in bekannter Weise mit π_1 zum Schnitt gebracht. Man erhält den Punkt S_1 . Dieser Punkt ist mit zwei Eckpunkten des Grundpolygons der Pyramide zu verbinden. Diese Punkte sind so auszuwählen, daß durch die einzuzeichnenden Verbindungsgeraden gemeinsam mit dem in π_1 liegenden Sechseck ein konvexes Polygon als äußerer Linienzug entsteht. Unter den in Abb. 62 getroffenen Annahmen sind die Seitenflächen $\triangle S12$, $\triangle S23$, $\triangle S34$ und $\triangle S45$ beleuchtet, während die Seitenflächen $\triangle S56$ und $\triangle S61$ im *Eigenschatten* der Pyramide liegen. Der auf π_1 geworfene Schatten heißt *Schlagschatten* der Pyramide. Schattenkonstruktionen dienen zur Steigerung der plastischen Wirkung ebener Bilder räumlicher Objekte. Besonders effektvolle Zeichentechniken berücksichtigen die unterschiedlichen Helligkeiten der Seitenflächen (Abb. 62).

2. Übertragung eines Quadrates in eine Ebene allgemeiner Lage.

Gegeben ist eine Ebene $\varepsilon = \varepsilon(e_1 e_2)$ allgemeiner Lage sowie die Punkte $A, B \in \varepsilon$. Gesucht sind Grund- und Aufriß jenes im ersten Quadranten auf ε gelegenen Quadrates, für das die Strecke AB eine Seite darstellt.

Zunächst ist ε durch eine Umklappung um e_1 in die erste Bildtafel π_1 zu legen. Die Punkte A und B sind bei der Klappung mitzuführen. Über $A_0 B_0$ ist das Quadrat $\square A_0 B_0 C_0 D_0$ entsprechend der geforderten Lage einzuzeichnen. Anschließend führt

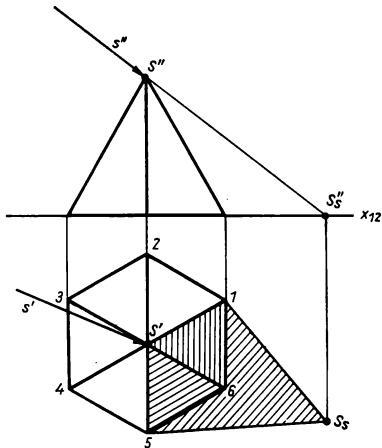


Abb. 62

man dieses Quadrat unter Ausnutzung der perspektiv-affinen Zuordnung in den Grundriß von ε über. Die Übertragung in den Aufriß erfolgt durch Angittern der vier Eckpunkte. Als Zeichenkontrolle kann ausgenutzt werden, daß die Parallelität der Gegenseiten bei dieser Transformation erhalten bleibt (Abb. 63).

3. Durchdringung zweier Prismen

Eine in der Praxis oft vorkommende Problemstellung besteht darin, zwei Bauelemente derart miteinander zu verkoppeln, daß sie ein festes Gefüge bilden, ohne dabei als Einzelteile wesentlich an Festigkeit zu verlieren (Holzverbindungen an Möbeln und bei Dachkonstruktionen, Rohrverbindungen bei Luftkanälen u. a. m.). Sind die an der Durchdringung beteiligten Bauelemente ebenflächig begrenzt, so bildet die Gesamtheit der den Oberflächen beider Teile gemeinsamen Punkte einen räumlichen Streckenzug. Liegt genau ein geschlossener Streckenzug an der Naht-

stelle der beiden Oberflächen vor, so spricht man von einer *Ausreißung* oder *Eindringung*. Bildet die Nahtlinie dagegen zwei geschlossene getrennte Streckenzüge, so spricht man von einer vollständigen Durchdringung oder *Durchbohrung*. In Grenzlagen können an dem Durchdringungspolygon Doppelpunkte auftreten. Jene Punktmenge, die den beiden sich durchdringenden Körpern gemeinsam ist, bildet den *Stoß* oder *Kernkörper*. Entfernt man den Stoß aus einem der Körper, so verbleibt ein *Restkörper*.

Bei Konstruktion des Durchdringungspolygons sind im Prinzip geeignete Hilfsebenen zu legen, welche die zur Durchdringung gebrachten Körper nach Geraden

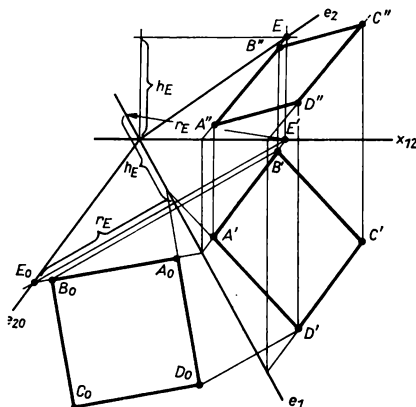


Abb. 63

schneiden. Die Schnittpunkte dieser Geraden sind für den Aufbau des beiden Körpern gemeinsamen äußeren Polygons von Interesse. Unter Verzicht auf die Beschreibung verschiedener Konstruktionsprinzipien soll ein Beispiel vorgeführt werden. In Abb. 64a hat das vertikal stehende Prisma Φ die Kanten a, b, c und das frontal liegende Prisma Ψ die Kanten p, q, r . Am Aufriß der Prismen ist zunächst erkennbar, daß es sich der bei Durchdringung um eine Ausreißung handelt. Es entsteht also genau ein geschlossener Streckenzug. Da ferner die Seiten von Φ erstprojizierend sind, kommt der Grundriß des Durchdringungspolygons mit dem Grundriß von Φ zur Deckung. Lediglich der Aufriß des Durchdringungspolygons bietet eine neue Aussage. Die erstprojizierende Ebene γ durch a, b schneidet p in Punkt 1, q in Punkt 2 und r in Punkt 3. Die Grundrisse dieser Punkte werden mit Hilfe von Ordnungslinien in den Aufriß geführt. Nach analoger Einführung der Hilfsebenen α und β findet man die weiteren Punkte $4 = 4(\alpha p)$, $5 = 5(\alpha q)$, $6 = 6(\alpha r)$ sowie $7 = 7(\beta p)$, $8 = 8(\beta q)$, $9 = 9(\beta r)$.

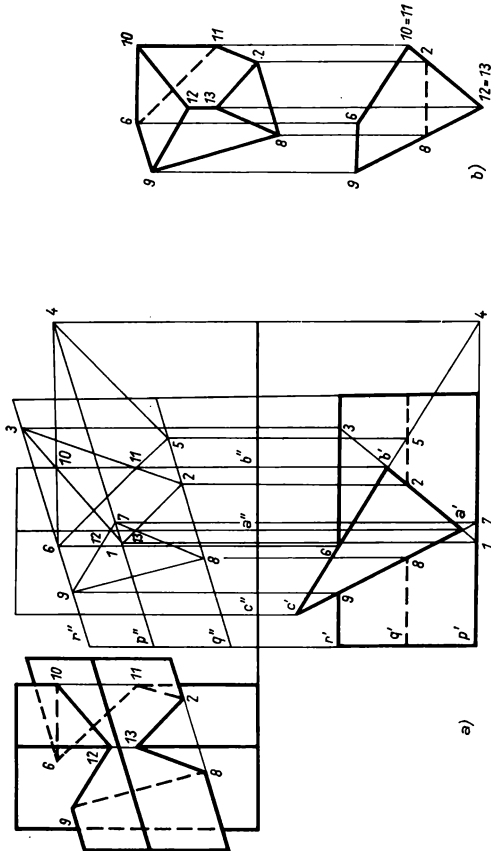


Abb. 64

Führt man diese neun Punkte mit Ordern in den Aufriß, so erhält man die Dreiecke $\triangle 1''2''3''$, $\triangle 4''5''6''$, $\triangle 7''8''9''$.

Von den Seiten dieser Dreiecke kommen nur jene Abschnitte für den Aufbau des Durchdringungspolygons in Betracht, die innerhalb des Parallelogramms liegen, das von den Aufrissen der Prismen umschlossen wird. Über die Reihenfolge der Verbindung der Punkte und die Sichtbarkeit der Seiten des Durchdringungspolygons ist unter Zuhilfenahme des Grundrisses leicht zu entscheiden. Eine weitere Stütze zur Veranschaulichung der Durchdringung bildet die Darstellung des Kernkörpers in Grund- und Aufriß (Abb. 64b).

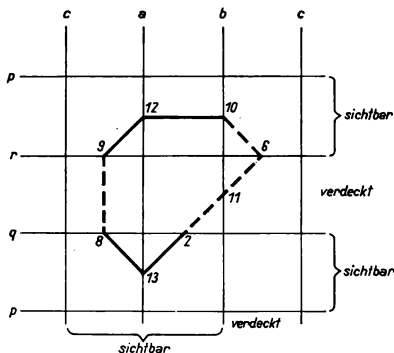


Abb. 65. Sichtbarkeitsdiagramm für Aufriß

Bei weniger übersichtlichen Durchdringungsaufgaben kann ein Diagramm nützliche Hilfe leisten. Es entsteht durch *Abwicklung* der Mantelflächen der an der Durchdringung beteiligten Körper auf das Zeichenfeld. Dabei kann auf Maßtreue verzichtet werden. Die Überlagerung beider Abwicklungen führt auf ein Liniennetz. In dieses Schema trägt man die gefundenen Punkte entsprechend ihrer Lage auf Kanten und Flächen ein. Die Punkte des Diagramms sind derart miteinander zu verbinden, daß nirgends eine Netzlinie von einer der Verbindungsgeraden geschnitten wird. Für doppelpunktfreie Polygone ist der in das Diagramm einzuzeichnende ebene Streckenzug eindeutig. Führt man das Diagramm getrennt für Grund- und Aufriß, so kann sogar entschieden werden, ob die entstehende Schnittkante in dem betreffenden Riß sichtbar oder verdeckt ist. Eine Schnittkante ist in einem Bild genau dann sichtbar, wenn die beiden am Schnitt beteiligten Seitenflächen in diesem Bild sichtbar sind (Abb. 65).

4. Gemeinsames Lot zweier windschiefer Geraden

Unter dem *gemeinsamen Lot* l zweier windschiefer Geraden g und h versteht man jene Gerade, die g und h senkrecht trifft. Zu zwei windschiefen Geraden gibt es genau

ein gemeinsames Lot. Die Lotfußpunkte $G \in g$ und $H \in h$ bilden das Punktepaar von g und h , für welches der Abstand ein absolutes Minimum ist.

Konstruktiv läßt sich das gemeinsame Lot wie folgt ermitteln: Man verschiebt g in einer erstprojizierenden Ebene zu sich selbst parallel nach g^* derart, daß sich g^* und h im Raum schneiden. Die Punkte $A' = A'(g^*h')$ und $A'' = A''(g^{**}h'')$ befinden sich daher in Mongescher Lage. Zu der von g^* und h aufgespannten Ebene α

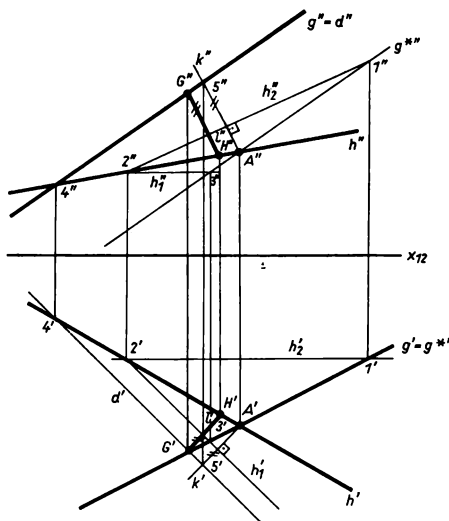


Abb. 66

wird das Lot k nach der unter 2.5. behandelten Maßaufgabe konstruiert. Damit hat man die Richtung des gemeinsamen Lotes gefunden, denn nach Konstruktion gilt $k \perp h$ und $k \perp g$ wegen $g \parallel g^*$. Das Lot k und die Gerade h spannen eine weitere Hilfsebene β auf, die g in einem Punkt G schneidet. Die Parallele l zu k durch G schneidet konstruktionsgemäß g und h senkrecht. Mit $H = H(hl)$ ist auch der zweite Lotfußpunkt gefunden. Die wahre Länge des gemeinsamen Lotes $|GH|$ läßt sich nach der Methode des Paralleldrehens ermitteln (Abb. 66).

5. Ebener Schnitt einer Pyramide. Perspektive Kollineation

Gegeben seien eine vierseitige Pyramide Φ , deren Basis in π_1 liegt, und eine Ebene $\varepsilon = \varepsilon(e_1e_2)$ allgemeiner Lage. Gesucht ist das Schnittgebilde $c = c(\varepsilon\Phi)$ (Abb. 67).

Da hier ein ebenflächig begrenzter Körper mit einer Ebene zum Schnitt gebracht wird, kann das Schnittgebilde c nur ein ebenes Polygon sein. Als Konstruktionshilfe werde durch die Pyramidenspitze S eine zu π_1 parallele Ebene π_s gelegt. Die jeder Seitenfläche der Pyramide zugeordnete Ebene hat nun zwei Spuren, eine in π_1 liegende Spur und eine in π_s liegende *Gegenspur*, die zueinander parallel sind. An der Seitenfläche $\triangle SAB$ sei die Konstruktion der Schnittgeraden demonstriert.

Zunächst gilt $e_1 = e_1(\varepsilon\pi_1)$ (erste Spur von ε) und $e_s = e_s(\varepsilon\pi_s)$ (Gegenspur von ε in Höhe der Pyramidenspitze). Die zur Pyramidenfläche $\triangle SAB$ gehörige Ebene α hat

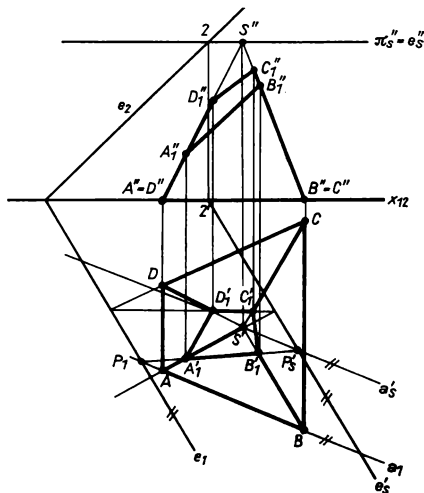


Abb. 67

die erste Spur a_1 und die *Gegenspur* $a_s \parallel a_1$ durch S . So ergeben sich die Schnittpunkte $P_1 = P_1(e_1 a_1)$ und $P_s = P_s(e_s a_s)$. Folglich ist die Verbindungsgerade $g(P_1 P_s)$ der Grundriß der Schnittgeraden $g(\varepsilon \alpha)$. Von dieser interessiert nur der in der Seitenfläche $\triangle SAB$ liegende Streckenabschnitt $A_1 B_1$. In gleicher Weise kann bei den drei übrigen Pyramidenflächen verfahren werden. Man erhält so die Grundrisse A_1', B_1', C_1', D_1' der Durchstoßpunkte der vier Pyramidenkanten mit ε . Mit Hilfe von Ordnungslinien oder durch Angittern können diese Punkte in den Aufriß geführt werden.

An den Grundriß der Schnittkonstruktion lassen sich noch einige verallgemeinernde planimetrische Begriffsbildungen und Betrachtungen anknüpfen. Auch hier kann man sich die Zeichenebene von zwei Punktmengen überdeckt denken. Der einen

Menge gehören die Punkte $A, B, C, D, \dots$, der anderen die Punkte $A_1', B_1', C_1', D_1', \dots$ an. Zunächst soll das Problem des Vervollständigens ohne räumliche Überlegungen gelöst werden. Zu einem beliebig vorgegebenen Punkt F ist der Punkt F_1' aufzusuchen. Offenbar liegt F_1' auf der Strecke $S'F$. Weiterhin sind z. B. die Verbindungsgerade $f_1 = f_1(FA)$ und die Gerade $f_s' \parallel f_1$ durch S' zu zeichnen. Man findet die Punkte $T_1 = T_1(e_1, f_1)$ und $T_s' = T_s'(e_s', f_s')$. Die Verbindungsgerade $g(T_1, T_s')$ schneidet FS' in dem gesuchten Punkt F_1' . Die hier zunächst empirisch untersuchte Punktverwandtschaft bezeichnet man als *perspektive Kollineation* (Abb. 68).

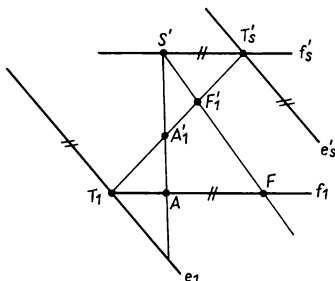


Abb. 68

Nach dieser Konstruktion gelten für die Zuordnung der beiden ebenen Punktmengen folgende Aussagen:

1. Einander entsprechende Punkte liegen auf einer Geraden (*Kollineationsstrahl*) durch das Bild S' der Pyramidenspitze (*Kollineationszentrum*).
2. Punkte der Spur e_1 entsprechen sich selbst, e_1 ist die *Kollineationsachse*.
3. Ein Fernpunkt U geht bei dieser Kollineation in einen Punkt $U_1' \in e_s'$ über. Umgekehrt liegt die Menge jener Punkte, deren Urbilder Fernpunkte sind, auf der Geraden e_s' . Man bezeichnet diese Gerade als *Gegenachse* der Kollineation. Die *Gegenachse* ist parallel zur *Kollineationsachse*.
4. Einer Geraden entspricht wieder eine Gerade. Die Verwandtschaft ist linear.
5. Einander entsprechende Geraden schneiden sich auf der *Kollineationsachse*. Geraden parallel zur *Kollineationsachse* gehen in parallele Geraden über.
6. *Inzidenz* von Punkt und Gerade bleibt erhalten.

Durch Vorgabe der *Kollineationsachse* a , des *Kollineationszentrums* Z und eines Paares sich entsprechender Punkte $A, \bar{A}$ ist eine ebene perspektive Kollineation eindeutig bestimmt, d. h., Aufgaben des Vervollständigens sind damit eindeutig lösbar (Abb. 69).

Ist die *Kollineationsachse* die Ferngerade, dann geht die Punktverwandtschaft in eine *zentrische Streckung* oder *Stauchung* mit S' als *Ähnlichkeitszentrum* über.

Die beiden ebenen Schnitte der Pyramide mit π_1 und ε , die hier in Beziehung zueinander gesetzt wurden, lassen sich auch dem *monokularen Sehvorgang* angepaßt interpretieren. Dabei sind S als Auge und die Pyramidenkanten als Seh- oder Pro-

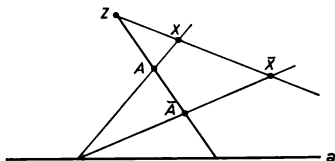


Abb. 69

jektionsstrahlen aufzufassen. Ferner ist das Polygon $A_1B_1C_1D_1$ als Zentralriß des Basispolygons $ABCD$ zu verstehen. Somit gilt der Satz:

Durch Zentralprojektion der Punktmenge einer Ebene auf eine andere wird zwischen den beiden Ebenen eine geometrische Verwandtschaft induziert, die man als *perspektive Kollineation* bezeichnet. Das Auge S (Projektionszentrum) ist das Kollineationszentrum, und die Schnittgerade der beiden Ebenen ist die Kollineationsachse.

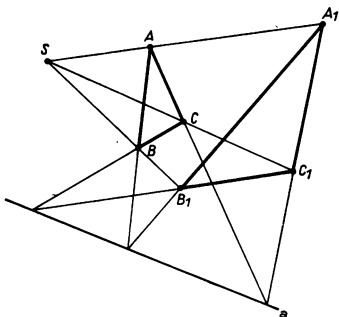


Abb. 70

Aus diesen räumlichen Überlegungen resultiert folgender Satz als Selbstverständlichkeit, der erstmals von DESARGUES (1636) aufgestellt wurde:

Gehen die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier Dreiecke durch einen Punkt, so liegen die eigentlichen oder uneigentlichen Schnittpunkte entsprechender Dreiecksseiten auf einer eigentlichen oder uneigentlichen Geraden (Abb. 70).

Interpretiert man nämlich die *Desarguessche Konfiguration* als Schrägbild einer von zwei (durchsichtigen) Ebenen geschnittenen dreiseitigen Pyramide, so erscheint die Aussage trivial. Es sei noch vermerkt, daß sich die Desarguessche Konfiguration auf zehn verschiedene Arten als Paarung perspektiver Dreiecke auffassen läßt, weil jeder der zehn Punkte dieser Konfiguration die Rolle des Kollineationszentrums übernehmen kann.

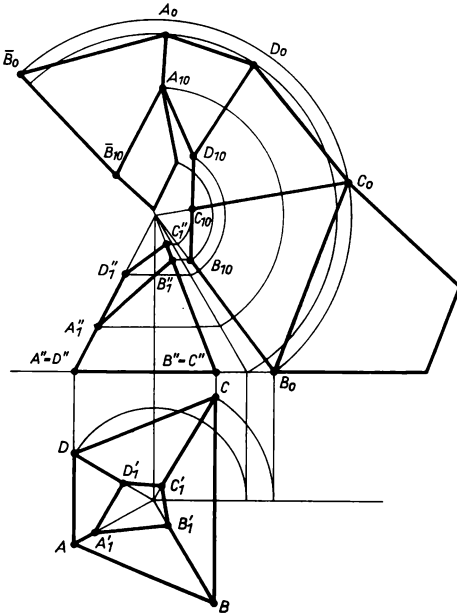


Abb. 71

Mit Hilfe der perspektiven Kollineation kann ein Kreis je nach Wahl der Bestimmungsstücke in eine *Ellipse*, *Parabel* oder *Hyperbel* transformiert werden. Umgekehrt lassen sich Aufgaben zu beliebigen Kegelschnitten in Aufgaben am Kreis transformieren (JAKOB STEINER, 1796–1863).

Die Netzkonstruktion des Mantels der angeschnittenen Pyramide erfolgt zweckmäßig durch Drehen der Kanten der Pyramide zu Frontallinien. Die Teilungspunkte sind bei der Drehung mitzuführen. Damit sind die Längen der zwischen π_1 und ε liegenden Kantenabschnitte dem Aufriß entnehmbar. Es ist zu empfehlen, diese

Nebenkonstruktion zur Entlastung des Aufrisses mittels horizontaler Ordnungslinien etwas nach links oder rechts herauszuziehen. Dem Grundriß können die Längen der Seiten des Basispolygons unmittelbar entnommen werden. Mit diesen Bestimmungsstücken ist die Abwicklung der Mantelfläche des Pyramidenstumpfes eindeutig faßbar (Abb. 71).

Aufgabe. Gegeben seien das Zentrum Z , die Achse a und ein Punktepaar $(A, \bar{A})$ einer perspektiven Kollineation. Gesucht ist die Gegenachse u , d. h. die Bildgerade der Ferngeraden auf konstruktivem Weg.

2.7. Seitenrisse und Drehungen

Zur Ausführung räumlicher Konstruktionen genügen im Prinzip ein Paar zugeordneter Normalrisse als Ausgangsbilder in der Zeichenebene. Trotzdem werden gelegentlich weitere Bildebenen eingeführt, um von dem dargestellten Objekt noch umfassen-

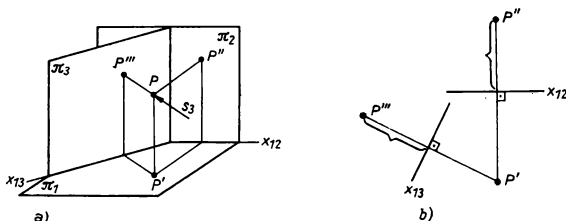


Abb. 72

deres Anschauungsmaterial zu erhalten oder besondere Konstruktionen durchzuführen. Von der zusätzlich angefügten Bildebene π_3 wird gefordert, daß sie lotrecht bezüglich einer der beiden bereits vorliegenden Bildtafeln angebracht ist. Die Abbildung des räumlichen Objektes auf π_3 erfolgt gleichfalls durch Normalprojektion. Anschließend wird π_3 um die Schnittgerade mit jener Bildebene in das Zeichenfeld umgelegt, die mit π_3 einen rechten Winkel einschließt. Diese Gerade entspricht der mit dem *Seitenriß* eingeführten Rißachse. Schließt sich π_3 an den Grundriß an, so wird die neue Rißachse mit x_{13} bezeichnet, bei Anschluß an den Aufriß mit x_{23} .

Zunächst sollen die Lageverhältnisse der drei Bilder eines Punktes P in der Zeichenebene untersucht werden, der in den Aufriß, den Grundriß und eine auf π_1 lotrecht stehende Bildebene π_3 normal projiziert wird. Grund- und Aufriß von P befinden sich

nach wie vor in Mongescher Lage mit der Ordnerrichtung $\perp x_{12}$. Die gleichen Beziehungen gelten auch zwischen Grund- und Seitenriß, d. h., der die Bildpunkte $P'P'''$ verbindende Ordner steht senkrecht auf der Rißachse x_{13} (Abb. 72a, b). Wie ferner aus räumlichen Überlegungen folgt, ist der Abstand des Seitenrisses P''' von der Rißachse x_{13} gleich dem ersten Tafelabstand von P . Dieser kann dem Aufriß entnommen werden. Ganz entsprechend kann die Seitenrißebene π_3 an den Aufriß angeschlossen werden. Dann befinden sich P'' und P''' in Mongescher Lage bezüglich der neuen Rißachse x_{23} . Der Abstand des Bildpunktes P''' von der Rißachse x_{23} ist gleich dem zweiten Tafelabstand von P , den man dem Grundriß entnehmen kann (Abb. 73a, b).

Bei Einführung eines Seitenrisses durch Vorgabe einer Rißachse beliebiger Lage gilt offenbar folgende einfache Merkregel für die Übertragung von Bildpunkten in den neuen Riß: „Ordnungslinie senkrecht zur neuen Rißachse durch den verbleibenden Bildpunkt. Abstand zwischen wegfallendem Riß und wegfallender Achse von neuer Achse auf zugehöriger Ordnungslinie in den neuen Riß übertragen.“

Das Anlegen von Seitenrissen kann im Prinzip beliebig oft fortgeführt werden. Die Invarianz von Parallelität und Streckenverhältnissen lassen sich bei diesen graphischen Transformationen als Zeichenkontrollen ausnutzen. Um z. B. eine Gerade allgemeiner Lage in ein Bild überzuführen, in dem sie projizierend erscheint,

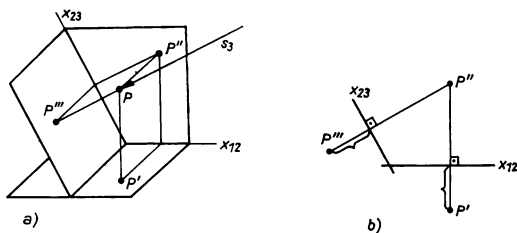


Abb. 73

ist die Anlage von zwei Seitenrissen erforderlich. Der erste Seitenriß führt g in eine frontale Lage bezüglich dieser Bildebene, der zweite in eine vertikale, d. h. projizierende Lage über.

Auch die Wiedergabe eines Quaders, der frontal bezüglich π_2 und horizontal bezüglich π_1 aufgestellt ist, kann durch die Anlage von wenigstens zwei Seitenrissen so erfolgen, daß dieses Bild frei von projizierenden Begrenzungsflächen des Körpers ist.

Der Einsatz von Seitenrissen soll an zwei Beispielen demonstriert werden, und zwar

- als Konstruktionsprinzip,
- als Hilfsmittel zur Unterstützung der räumlichen Anschauung.

Zu a). Gegeben seien zwei windschiefe Geraden g und h . Gesucht ist das gemeinsame Lot l dieser beiden Geraden (vgl. 2.6.).

Zur Konstruktion des gemeinsamen Lotes über Seitenrisse werde von folgender Überlegung ausgegangen: Gelingt es mit Hilfe von Seitenrissen, ein Bild von g und h herzustellen, in welchem eine der Geraden — etwa g — in projizierender Lage bezüglich der betreffenden Bildebene ist, dann liegt das gemeinsame Lot l parallel zu dieser Bildebene. Der von h und l eingeschlossene rechte Winkel bildet sich daher auch als rechter Winkel ab. Wegen der projizierenden Lage von g stellt das Bild von l das Lot des Bildpunktes von g auf die Bildgerade von h dar. Für windschiefe Ge-

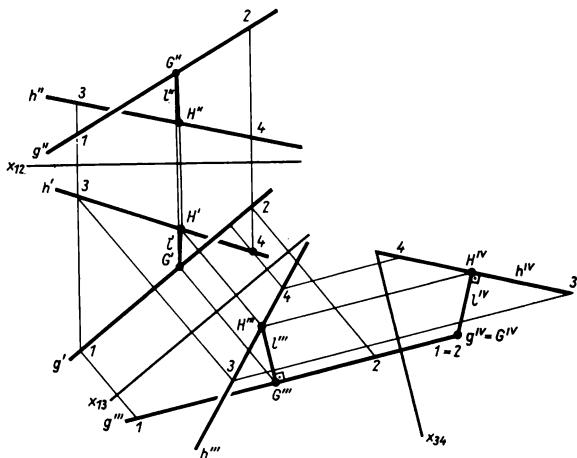


Abb. 74

raden ist diese Konstruktionsmöglichkeit stets gesichert. Lot und Lotfußpunkte lassen sich mit Hilfe von Ordnungslinien in die Ausgangsbilder zurückführen. Der Seitenriß stellt auch die wahre Länge des gemeinsamen Lotes unmittelbar bereit.

Zur Ausführung der Konstruktion werden auf g und h je zwei Punkte festgelegt. Die zum ersten Seitenriß gehörige Rißachse x_{13} wird parallel g' gelegt. Nach der Regel „Abstand des wegfallenden Risses von der wegfallenden Achse auf zugehöriger Ordnungslinie von der neuen Rißachse nach dem neuen Riß übertragen“ wird dieser Seitenriß angelegt. Der Seitenriß liefert g''' als kongruentes Bild von g . Die Rißachse x_{34} für den zweiten Seitenriß ist lotrecht zu g''' zu legen. Darin erscheint g^{IV} als Punkt, h^{IV} als Gerade. Das Bild des gemeinsamen Lotes l ist in diesem Riß gleich dem Lot von g^{IV} auf h^{IV} . Die Lotfußpunkte auf g und h können ohne Distanzüber-

tragungen mit Ordnungslinien in die Ausgangsbilder geführt werden (Abb. 74). Diese Konstruktion hat den Vorzug der Anschaulichkeit und Übersichtlichkeit. Der Nachteil liegt in dem höheren Aufwand an Platz.

Zu b). Gegeben sind Grund- und Aufriß eines ebenflächig begrenzten Werkstückes (Abb. 75). Die Seiten des Körpers sind erst-, zweit- oder doppelprojizierend. Dadurch sind die Bilder wenig anschaulich. Mit Hilfe von Seitenrissen sollen die zunächst projizierend erscheinenden Begrenzungsflächen des Körpers in nicht-projizierende Bilder übergeführt werden.

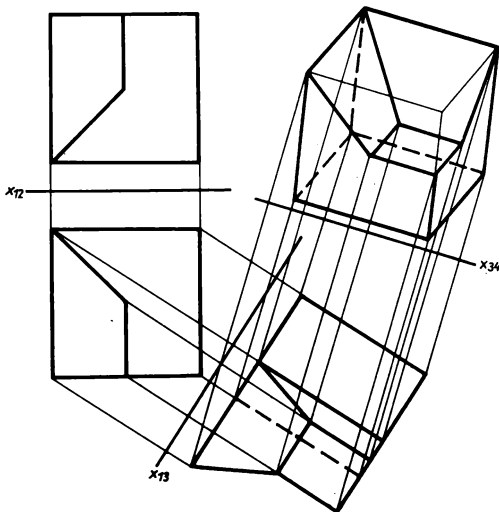


Abb. 75

Durch Anschließen eines Seitenrisses π_3 an die Grundriss-tafel gewinnt das Bild an Anschaulichkeit. Es ist jedoch noch nicht frei von Bildern projizierender Ebenen. In einem weiteren sich an π_3 anschließenden Seitenriß π_4 ist durch den völligen Wegfall projizierender Kanten und Seitenflächen der Forderung nach Anschaulichkeit besser entsprochen (Abb. 75).

Steht die neu eingeführte Bildtafel π_3 lotrecht zur Rißachse x_{13} , also lotrecht zu π_1 und π_2 , so bezeichnet man das in π_3 entstehende Bild als Kreuzriß. Auf diese Anordnung, daß je zwei Bildebenen orthogonal zur dritten sind, wird in 2.8. noch eingegangen.

Die mit Seitenrissen erzielbaren Effekte können auch durch Drehungen von Körpern um erst- oder zweitprojizierende Geraden als Drehachse bewirkt werden. Über die Drehwinkel kann nach Belieben verfügt werden. Die Motive für den Einsatz von Drehungen können wie oben sein:

- als Konstruktionsprinzip,
- als Hilfsmittel zur Unterstützung der räumlichen Anschauung.

Zu a). Gegeben seien eine Kugel κ und eine Gerade g durch Grund- und Aufriß. Gesucht sind die Durchstoßpunkte der Geraden durch die Kugel.

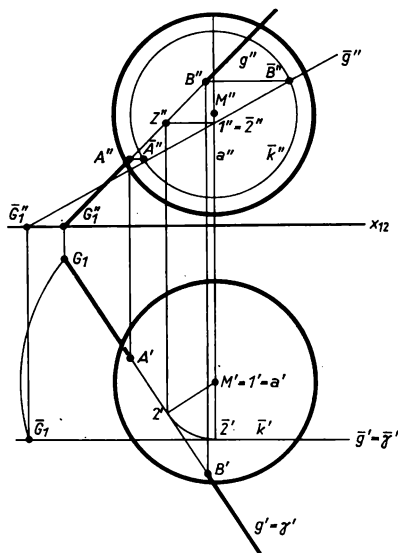


Abb. 76

Auf Grund allgemein bekannter Symmetrieeigenschaften der Kugel ist jede Normalprojektion dieser Fläche ein Kreis. Ferner stellt jeder ebene Schnitt einer Kugel einen Kreis dar, soweit die Kugel mit der Schnittebene mehr als einen Punkt gemeinsam hat. Dreht man außerdem die Kugel um einen ihrer Durchmesser als Achse, so geht sie stets in sich über. Die hier vorliegende Durchdringungsaufgabe ist wieder durch Einschaltung einer Hilfsebene lösbar. Wenn g mit κ zwei Punkte gemeinsam hat, so schneidet sicher die erstprojizierende Hilfsebene γ durch g die

Kugel κ nach einem Kreis k . Die Schnittpunkte von g mit k sind auch die Durchstoßpunkte von g durch κ . Der Grundriß k' des Schnittkreises k ist eine Strecke, während der Aufriß von k eine als Konstruktionselement unbequeme Ellipse darstellt. Daher liegt es nahe, g um eine erstprojizierende Achse a durch den Kugelmittelpunkt in eine frontale Lage $\bar{g}$ zu drehen und die Kugel mit der erstprojizierenden Hilfsebene $\bar{\gamma}$ durch $\bar{g}$ zu schneiden. Dies ergibt den frontal liegenden Kreis $\bar{k}$, dessen Aufriß $\bar{k}''$ mit $\bar{k}$ kongruent ist. Die Schnittpunkte $\bar{A}$ und $\bar{B}$ von $\bar{k}$ mit $\bar{g}$ liefert der Aufriß. Nun wird die Drehung wieder rückgängig gemacht. Die Kugel κ geht in sich über. Ferner führt man $\bar{A}''$ und $\bar{B}''$ auf Ordnungslinien parallel zur Rißachse nach dem Aufriß g'' von g , da sich die ersten Tafelabstände dieser Punkte bei der Drehung um a nicht ändern (Abb. 76). Die so gefundenen Punkte A'' und B'' führt man anschlie-

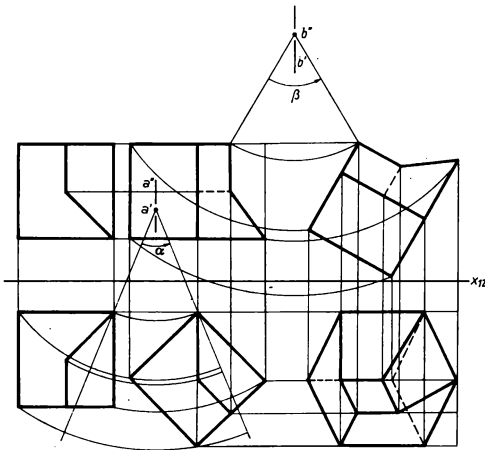


Abb. 77

Bend mittels Ordnungslinien $\perp x_{12}$ auf den Grundriß von g . Um der Forderung nach Anschaulichkeit entgegenzukommen, wird die Sichtbarkeit der sich durchdringenden geometrischen Gebilde in Grund- und Aufriß darstellungsmäßig berücksichtigt.

Zu b). Es sei das Ziel, von einem durch zugeordnete Normalrisse gegebenen Werkstück mittels zweier nacheinander ausgeführter Drehungen mit gewissen Drehwinkeln um je eine erst- und zweitprojizierende Achse ein anschauliches Bild zu erhalten.

Konstruktiv besonders vorteilhaft sind Drehungen mit einem Winkel von 60° , da man hierbei für die Übertragung je eines Punktes nur eine Zirkelöffnung benötigt

und mit doppelten Zirkelschlägen arbeiten kann. Aber auch Drehungen um beliebige Winkel sind konstruktiv leicht zu beherrschen. Hierzu dreht man zunächst nur einen Strahl um die Drehachse mit dem vorgeschriebenen Winkel, greift aus dem Winkel die Längen der Drehsehn für die interessierenden Punkte des betreffenden Risses ab und trägt diese Längen — in der Ausgangslage jedes Punktes ansetzend — auf den entsprechenden Kreisbögen in Drehrichtung an. Bei Wahl der Drehachsen ist zu beachten, daß die Übersichtlichkeit gewahrt bleibt und die Grenzen des Zeichenfeldes nicht überschritten werden.

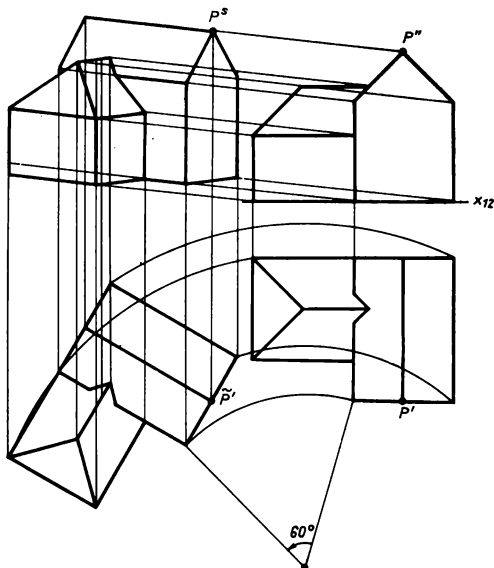


Abb. 78

In Abb. 77 wird das durch Grund- und Aufriß vorgelegte Werkstück zunächst um eine erstprojizierende Achse a mit einem Winkel von 45° gedreht. Die Grundrisse der Eckpunkte beschreiben Achtelbögen von Kreisen, während die Aufrisse sich auf Parallelen zur Rißachse um gewisse Strecken verschieben. Nach der Drehung entfallen im Aufriß einige projizierende Begrenzungsflächen. Eine weitere Drehung des Werkstückes um die zweitprojizierende Achse b mit einem Winkel von 60° liefert schließlich im Grundriß eine von projizierenden Kanten und Seiten freie Darstellung.

Der Nachteil dieser Konstruktion liegt auch hier in einem hohen Zeit- und Platzaufwand.

Zusatz. Abschließend wird in Abb. 78 am Bild eines Hausmodells gezeigt, wie sich aus wenig anschaulichen Normalrissen durch eine Drehung des Grundrisses um eine erstprojizierende Achse mit dem Winkel von 60° und eine geeignete Kombination von Ordnerrichtungen aus dem gedrehten Grundriß und dem ursprünglichen Aufriß sehr einfach ein anschauliches Bild gewinnen läßt. Die von dem gedrehten Grundriß ausgehende Ordnerrichtung wird lotrecht gelegt, während man die vom ursprünglichen Aufriß ausgehenden Ordnungslinien gegen die Rißachse leicht nach oben neigt. Das entstehende Bild stellt keine Normalprojektion, sondern eine Parallelprojektion des räumlichen Objektes auf die Bildebene dar. Da sich bei dieser Bildtransformation ein rechtwinkliges Achsendreibein leicht mitführen läßt, können in dem entstehenden Bild auch maßgerechte Eintragungen von weiteren Details des Objektes vorgenommen werden. Solche Aufgaben sind Gegenstand der *Axonometrie*, auf die erst in 4.2. und 4.3. näher eingegangen wird. Mittels der Drehung bietet sich der Übergang von zugeordneten Normalrissen in ein axonometrisches Bild konstruktiv sehr einfach an.

2.8. Die sechs Hauptrisse

Von gewissen kompliziert gebauten räumlichen Objekten kann man sich etwa zum Zweck der Projektierung oder Fertigung erst durch sechs Normalrisse eine klare Vorstellung über alle Einzelheiten verschaffen. Die Erzeugung dieser sechs Bilder hat man sich so zu denken, daß das darzustellende Objekt von sechs zu einem Quader zusammengefügtten Bildebenen umgeben wird. Anschließend wird der Gegenstand auf jede der sechs Bildebenen aus dem Inneren des Quaders heraus normal projiziert. Darauf werden die sechs Quaderseiten nach Art eines Quadernetzes in die Zeichenebene ausgebreitet, wobei die Innenflächen des Quaders nun nach oben zeigen. Die Bilder sind in der Regel so verheftet, daß rechts vom Aufriß der Kreuzriß von links und links vom Aufriß der Kreuzriß von rechts liegt. Unterhalb des Aufrisses liegt der Grundriß. Daran schließen sich die von hinten und von unten aufgenommenen Normalrisse an (Abb. 79). Als Gegenrisse bezeichnet man zwei Ansichten eines Körpers, die von einem Paar sich gegenüberliegender Seiten des Bildquaders stammen. So bilden der Aufriß und der von hinten aufgenommene Normalriß ein Paar von *Gegenrissen*.

Die hier dargebotene Konvention, einen Körper durch sechs Normalrisse wiederzugeben, entspricht der *europäischen* Darstellungsart. Eine andere Konvention wird in der *anglo-amerikanischen* Literatur eingehalten. Während man sich hier die Projektionen im Inneren des Quaders erzeugt denkt und anschließend das Quadernetz in die Zeichenebene ausbreitet, werden nach der amerikanischen Art die Normalprojektionen des Körpers von außen auf den Bildquader gezeichnet. Dann wird das

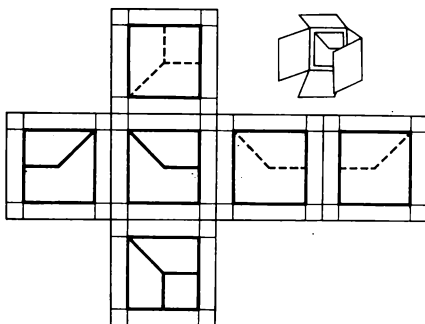


Abb. 79

Quadernetz so in das Zeichenfeld ausgebreitet, daß die Außenseite nach oben kommt. Die Unterscheidung dieser beiden Auffassungen ist beim Lesen von Zeichnungen wichtig, um Verwechslungen vorzubeugen (Abb. 80).

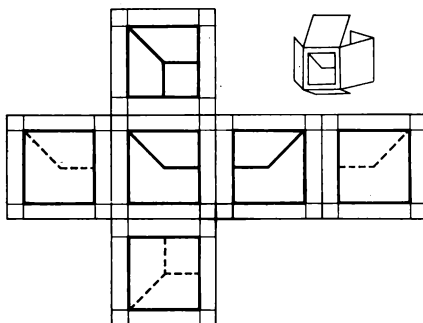


Abb. 80

3. Kurven und Flächen zweiter Ordnung

3.1. Allgemeines über Kurven und Flächen zweiter Ordnung

Neben den linearen Grundgebilden Gerade und Ebene sind auch Kurven und Flächen zweiter Ordnung Untersuchungsgegenstand der darstellenden Geometrie. Eine Fläche zweiter Ordnung hat mit einer Geraden allgemeiner Lage im Raum zwei Punkte gemeinsam. Dabei erfolgt die Festlegung der Anzahl der gemeinsamen Punkte im Sinne der algebraischen Wurzelzählung. Die allgemeine Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung — bezogen auf ein kartesisches Koordinatensystem — lautet

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 0 \quad (1)$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Für die Elemente der Matrix $\mathbf{A}$ gilt $a_{ik} = a_{ki}$. In $\mathbf{x}$ ist x_0 die *homogenisierende* Koordinate. Aus der großen Mannigfaltigkeit von Flächen zweiter Ordnung können hier nur die Kugel sowie die entarteten Flächen *Drehkegel* und *Drehzylinder* abgehandelt werden. Das einschalige Hyperboloid, das hyperbolische Paraboloid sowie das dreiaxige Ellipsoid sind gleichfalls für die darstellende Geometrie von Interesse. Diese Flächen müssen jedoch hier übergangen werden.

Schneidet man eine Fläche zweiter Ordnung mit einer Ebene, so entsteht als Schnittgebilde eine Kurve zweiter Ordnung. Zum Beispiel wird die von der x_1 - und x_2 -Achse aufgespannte Ebene nach einer Kurve geschnitten, welche die Gleichungen $x_3 = 0$ und $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 0$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

beschreiben. In (3) gilt gleichfalls $a_{ik} = a_{ki}$, und x_0 ist die homogenisierende Koordi-

nate. Die nicht ausgearteten reellen Kurven zweiter Ordnung lassen sich gemäß ihrem Verhalten gegenüber der Ferngeraden in drei Arten einteilen:

1. *Hyperbel* (Kurve zweiter Ordnung mit zwei getrennten, reellen Punkten auf der Ferngeraden);
2. *Parabel* (Kurve zweiter Ordnung, welche die Ferngerade berührt);
3. *Ellipse* (Kurve zweiter Ordnung, die mit der Ferngeraden keinen reellen Punkt gemeinsam hat).

Eine nichtausgeartete Kurve zweiter Ordnung hat mit einer in der Kurvenebene liegenden Geraden höchstens zwei Punkte gemeinsam. Die reellen Kurven zweiter Ordnung lassen sich sämtlich als ebene Schnitte von Drehkegeln erzeugen. Man bezeichnet diese Kurven deshalb auch als Kegelschnitte. Wie aus (1) und (3) zu entnehmen ist, enthält die allgemeine Gleichung für einen Kegelschnitt fünf wesentliche Konstanten. Zur Festlegung eines Kegelschnittes in einer Ebene bedarf es also fünf geeignet gewählter Bestimmungsstücke, etwa fünf Punkte oder fünf Tangenten der gesuchten Kurve. Die Lösungen solcher Aufgaben sind nicht immer eindeutig.

3.2. Die Ellipse als Normalprojektion des Kreises. Zweikreiskonstruktion

Neben der Geraden ist der Kreis ein grundlegendes Konstruktionselement der darstellenden Geometrie. Räumliche Konstruktionen in Verbindung mit Drehzylinder, Drehkegel oder Kugel fordern die Vertrautheit mit den bei Normalprojektion eines Kreises auftretenden Bildern und geometrischen Gesetzmäßigkeiten. Grundsätzlich besteht in der darstellenden Geometrie das Bestreben, die Bildkonstruktionen exakt und rationell mit Zirkel und Lineal ausführbar zu machen. Bei dieser Zielsetzung muß man sich allerdings damit bescheiden, daß gewisse Problemstellungen, wie die Rektifikation einer Kreislinie, die Quadratur einer Kreisfläche oder die Dreiteilung eines Winkels mit Zirkel und Lineal, nicht exakt, sondern stets nur näherungsweise in endlich vielen Konstruktionsschritten lösbar sind. Hingegen können die Parallelprojektion eines Kreises auf die Ebene und Berührungsaufgaben an der Bildkurve mit den klassischen Hilfsmitteln Zirkel und Lineal exakt und rationell bewältigt werden.

Für die folgenden Betrachtungen werde davon ausgegangen, daß der abzubildende Kreis k in einer zweitprojizierenden Ebene ε liegt. Ist C der tiefste und D der höchste Punkt von k bezüglich π_1 , so ist k'' gleich der in e_2 liegenden Strecke $C''D''$. Hingegen bildet sich der horizontal liegende Kreisdurchmesser AB im Aufriß auf das Bild M'' des Kreismittelpunktes M ab. Die Tangenten an k in den Punkten A, B, C, D bilden ein Quadrat. Sein Grundriß ist ein Tangentenrechteck von k' . Ist r der Radius von k und α der erste Neigungswinkel von ε , so haben die Seiten des Tangenten-

rechtecks an k' paarweise die Längen $2r$ bzw. $2r \cos \alpha$. Nun soll noch von einem Punkt $P \in k$ allgemeiner Lage der Grundriß aufgesucht werden. Hierzu geht man zweckmäßig von der Umlegung von k um den Durchmesser AB in eine zu π_1 parallele Lage aus. Der Grundriß P_0' von P_0 liegt auf k_0' , der Aufriß P_0'' auf k_0'' . Jetzt macht man die Drehung von k um den horizontalen Durchmesser rückgängig und erhält durch einen Zirkelschlag um M'' den Aufriß P'' von P . Der Grundriß P' von P liegt

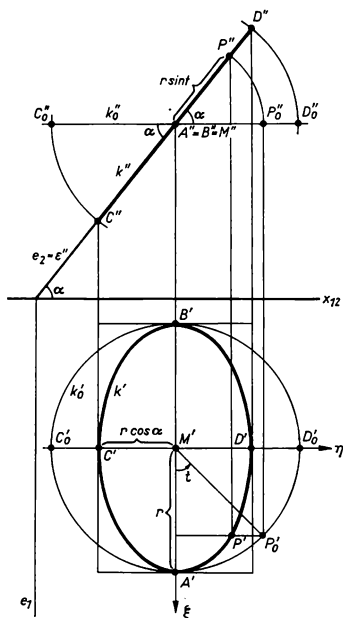


Abb. 81

einerseits auf dem Ordner durch P'' , andererseits auf der Parallelen zur Rißachse durch P_0' . Die entsprechende Konstruktion liefert exakt den Punkt P' von k' (Abb. 81).

Für weitere Untersuchungen werde in die Grundrißtafel ein *kartesisches Achsenkreuz* mit M' als Ursprung gelegt. Die Vertikale zur Rißachse sei die ξ -Achse, die Parallele zur Rißachse die η -Achse. Ferner schließe der von M' nach P_0' gezogene

Strahl mit der positiven Richtung der ξ -Achse den Winkel der Größe t ein. Dann läßt sich die Lage von P' bezüglich des eingeführten Achsenkreuzes wie folgt beschreiben:

$$\xi = r \cos t, \quad \eta = r \cos \alpha \sin t. \quad (1)$$

Diese Darstellung gilt für jeden Punkt $P' \in k'$. Durchläuft t einmal das Intervall $0 \dots 2\pi$, so wird k' von P' vollständig beschrieben (Abb. 81). Durch eine elementare Zwischenrechnung läßt sich der Parameter t aus (1) eliminieren und folgende implizite Kurvendarstellung gewinnen:

$$\frac{\xi^2}{r^2} + \frac{\eta^2}{r^2 \cos^2 \alpha} = 1. \quad (2)$$

Wie in der analytischen Geometrie gezeigt wird, stellt diese Gleichung (2) eine Ellipse mit den Halbachsen $a = r$ und $b = r \cos \alpha$ dar.

In 2.4. wurde nachgewiesen, daß zwischen der Normalprojektion einer ebenen Figur und deren Umlegung parallel zur Bildebene eine als perspektive Affinität bezeichnete geometrische Verwandtschaft besteht. Damit gelten folgende Feststellungen zur Normalprojektion eines Kreises: Die Normalprojektion eines Kreises auf eine Ebene ergibt eine Ellipse. Die *Hauptachse* dieser Ellipse ist das Bild jenes Kreisdurchmessers, der parallel zur Bildebene liegt. Die *Nebenachse* ist das Bild des dazu senkrechten Kreisdurchmessers. Haupt- und Nebenachse der Ellipse stehen aufeinander normal. Die Hauptachse ist der größte, die Nebenachse der kleinste Ellipsendurchmesser. Eine Ellipse kann durch *affine Transformation* eines Kreises erzeugt werden. Mit den in 2.4., S. 50, aufgestellten Eigenschaften der affinen Abbildung kann speziell für das affine Bild des Kreises gefolgert werden: Jeder Ellipsendurchmesser wird vom Ellipsenmittelpunkt M' halbiert. Die Halbierungspunkte einer Schar paralleler Sehnen liegen auf einem Durchmesser der Ellipse. Die Tangenten in den Endpunkten dieses Durchmessers sind parallel zu diesen Sehnen. In dem hier vorliegenden Bild in der Grundrißtafel entspricht die ξ -Achse der Affinitätsachse. Die Affinitätsstrahlen liegen parallel zur η -Achse. Der Streckfaktor ist $q = \cos \alpha$ (Charakteristik der Affinität).

Die am räumlichen Modell gewonnenen Beziehungen zwischen Kreis und Ellipse lassen sich in eine übersichtliche, rein planimetrische Ellipsenkonstruktion umsetzen. Ausgehend von einem kartesischen Achsenkreuz mit horizontaler x -Achse und vertikaler y -Achse werden um den Ursprung zwei Kreise k_0 und k_1 mit den Radien $a = r$ und $b = r \cos \alpha$ geschlagen. Auf k_0 wird ein Punkt P_0 beliebig angenommen und mit dem Mittelpunkt von k_0 verbunden. Die Verbindungslinie schließt mit der x -Achse den Winkel t ein und schneidet k_1 in P_1 . Die Vertikale durch P_0 schneidet die Horizontale durch P_1 in einem Punkt P . Für diesen Punkt P gilt, wie aus der Figur leicht abzulesen ist, die Darstellung $x = a \cos t$, $y = b \sin t$. Ein Vergleich mit (1) zeigt, daß P eine Ellipse beschreibt, wenn t das Intervall von 0 bis 2π durchläuft. Ihre Hauptachse fällt mit dem horizontalen Durchmesser von k_0 und ihre Nebenachse mit dem vertikalen Durchmesser von k_1 zusammen. Mit Hilfe der Kreise k_0 und k_1 können die Ellipsenpunkte beliebig dicht gelegt werden. Das hierbei angewandte

Verfahren bezeichnet man als *Zweikreiskonstruktion*. Ihre Entdeckung schreibt man PH. DE LA HIRE (1685) zu (Abb. 82).

Den durch die *Hauptscheitel* A und B gehenden Kreis k_0 nennt man *Hauptscheitelkreis*, und entsprechend ist k_1 der *Nebenscheitelkreis*. Die Zweikreiskonstruktion bildet die Grundlage zur Ableitung weiterer Erzeugungsweisen und Konstruktionsvorschriften der Ellipse.

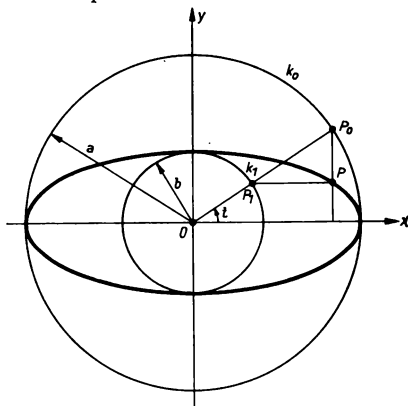


Abb. 82

Eine wesentliche Hilfe zum Zeichnen formgerechter Ellipsen bieten die *Scheitelkrümmungskreise*. Diese berühren die Kurve in den Scheitelpunkten von dritter Ordnung. Der Krümmungsradius $\varrho(t)$ einer in der Parameterform $x = x(t)$, $y = y(t)$ gegebenen Kurve errechnet sich nach der Formel (vgl. MfL, Band 5, Analysis II)

$$\varrho(t) = \frac{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}.$$

Aus der Ellipsendarstellung $x = a \cos t$ und $y = b \sin t$ ergibt sich

für die Hauptscheitel ($t = 0$)

$$\varrho_A = \varrho_B = \frac{b^3}{a},$$

für die Nebenscheitel ($t = \frac{\pi}{2}$)

$$\varrho_C = \varrho_D = \frac{a^3}{b}.$$

Sind Haupt- und Nebenachse einer Ellipse vorgegeben, so findet man nach diesen Ergebnissen die Mittelpunkte der Scheitelkrümmungskreise durch folgende Konstruktion: Im rechten oberen Quadranten ergänzt man die Halbachsen a und b zu einem Rechteck. In dieses Rechteck ist jene Diagonale einzuzichnen, die Haupt- und Nebenscheitel verbindet. Ferner ist von dem außerhalb der Ellipse liegenden Eckpunkt des Rechtecks das Lot auf die Diagonale zu fällen. Die Verlängerung des Lotes schneidet die Hauptachse in M_B und die Nebenachse in M_C . Dies sind die Mittelpunkte der zu den Scheiteln B und C gehörigen Krümmungskreise. Wegen der Symmetriebeziehungen an der Ellipse können die zu A und D gehörigen Krümmungsmittelpunkte durch Spiegelung von M_B und M_C an der Neben- bzw. Hauptachse gefunden werden (Abb. 83).

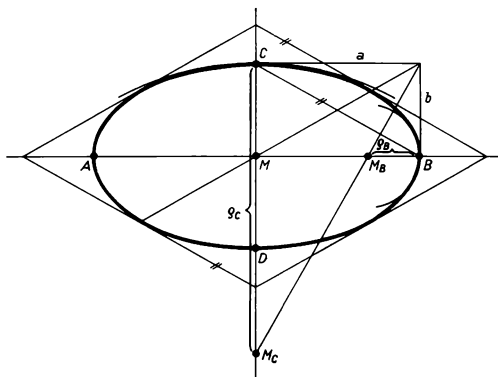


Abb. 83

Bei der Ausführung der Zeichnung ist zu beachten, daß die Ellipse durch die *Hauptscheitelkrümmungskreise* von innen und ihre *Nebenscheitelkrümmungskreise* von außen von dritter Ordnung berührt wird. Zur weiteren Stützung des Kurvenbildes können noch jene Ellipsentangenten herangezogen werden, die parallel zu den Diagonalen des Achsenrechtecks liegen. Die Achsenabschnitte dieser Tangenten haben die Längen $a/\sqrt{2}$ und $b/\sqrt{2}$ und können mittels eines doppelten Zirkelschlages wenig aufwendig bereitgestellt werden. Die Halbierungspunkte der von den Achsen ausgeschnittenen Tangentenstrecken sind Berührungspunkte der Ellipse.

Als Anwendung soll der ebene Schnitt einer Kugel konstruiert werden. Grund- und Aufriß einer Kugel mit dem Mittelpunkt N und dem Radius r sind je ein Kreis um N' bzw. N'' mit unverändertem Radius. Der Abstand der als zweitprojizierend vorausgesetzten Schnittebene ε von N soll kleiner als r sein. Damit ist die Existenz eines reellen Schnittkreises k gesichert. Der Äquatorkreis der Kugel ist der erste wahre

Umriß u_1 und der frontal liegende Großkreis der Kugel der zweite wahre Umriß u_2 . Im Schnitt von u_2 mit ε liegen der höchste und tiefste Punkt D und C von k . Ihre Aufrisse liegen in den Schnittpunkten von $e_2 = \varepsilon''$ mit u_2'' . Die Verbindungsgerade $g(CD)$ ist eine Fallinie von ε . Der Aufriß der Strecke CD ist wegen der besonderen Lage von ε auch der Aufriß von k . Dagegen ist als Grundriß von k eine Ellipse zu erwarten. Aus Gründen der Symmetrie muß der Grundriß von CD auf der Lotrechten

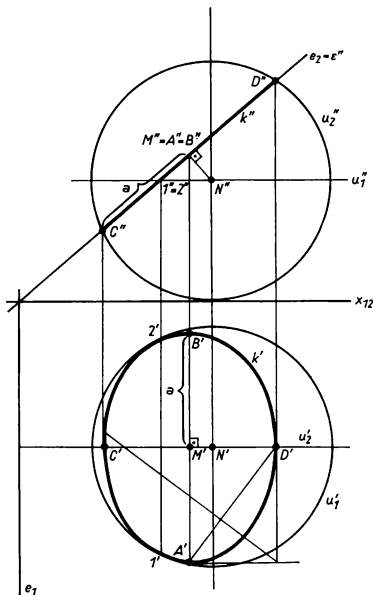


Abb. 84

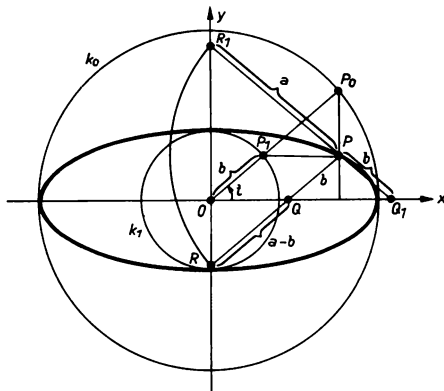
zu e_1 durch N' liegen. Mit Hilfe von Ordnungslinien durch C'' und D'' findet man den Grundriß des Durchmessers CD . Da dieser Durchmesser auf einer *Fallinie* liegt, erfährt er bei der Normalprojektion des Kreises die stärkste Verkürzung. Die Strecke $C'D'$ ist also die Nebenachse von k' , und der Halbierungspunkt M' der Nebenachse ist der Mittelpunkt für k' . Zur Kontrolle kann M'' auch als Fußpunkt des Lotes von N'' auf $C'D''$ konstruiert werden. Die Hauptachse der Bildellipse k' schneidet $C'D'$ in M' senkrecht. Da sie das Bild des horizontal liegenden Kreisdurchmessers ist, der sich unverkürzt auf π_1 abbildet, kann die Länge der Hauptachse dem Aufriß von k

entnommen werden. Damit hat man Haupt- und Nebenachse der Bildellipse k' , die sich nun punktweise nach der Zweikreiskonstruktion vervollständigen läßt (Abb. 84).

Von Interesse sind noch jene Punkte $1'$ und $2'$, in denen sich k' und u_1' berühren. Hierzu entnimmt man dem Aufriß den Schnitt von u_1'' mit e_3 und führt ihn mittels eines Ordners in den Grundriß. Die Schnittpunkte $1'$ und $2'$ der Ordnungslinie mit u_1' stellen die Berührungspunkte von u_1' mit k' dar. Als zusätzliche Aufgabe kann der unterhalb ε liegende Restkörper (Kugelsegment) in einer der Anschauung entsprechenden Weise herausgehoben werden.

3.3. Kinematische Erzeugungsweisen der Ellipse

An die Zweikreiskonstruktion der Ellipse lassen sich zwanglos kinematische Betrachtungen zur Ellipsenerzeugung anknüpfen. Die Parallele zur Verbindung OP_0 durch P entsprechend Abb. 82 schneidet die x -Achse in Q und die y -Achse in R . Nach Konstruktion gilt $|PQ| = b$, $|PR| = a$ und $|QR| = a - b$ für jeden Wert von t , d. h. für jeden Ellipsenpunkt P . Damit ist die folgende *kinematische Erzeugung* der Ellipse gesichert: Man verbindet zwei Gleithülsen, von denen die eine längs der x -Achse, die andere längs der y -Achse frei beweglich ist, durch einen Stab der Länge $c = a - b$ gelenkig miteinander. So können die Hülsen auf den Achsen nicht unabhängig voneinander gleiten. Hierdurch ist also ein *ebener Zwanglauf* festgelegt.



Weiterhin werde auf der durch die Gelenkpunkte bestimmten Geraden ein Punkt P außerhalb der Gelenkhülsen ausgezeichnet und seine bei dem Zwanglauf beschriebene Bahn verfolgt. Wie sich aus den Zusätzen zur Zweikreiskonstruktion in Abb. 85 ablesen läßt, durchläuft der Punkt P eine Ellipse, deren Achsen sich mit der x - bzw. y -Achse decken.

Dieser Zusammenhang mit der ebenen Kinematik ermöglicht die punktweise Konstruktion einer Ellipse mittels eines Papierstreifens, wenn die Längen von Haupt- und Nebenachse vorliegen. Hierzu gibt man sich im Zeichenfeld ein kartesisches Achsenkreuz vor. Ferner markiert man auf dem Rand eines *Papierstreifens* drei Punkte P , Q und R mit den Abständen $|PQ| = b$ und $|PR| = a$. Legt man nun den Streifen derart, daß sich die Markierung von Q mit einem Punkt der x -Achse und die von R mit einem Punkt der y -Achse deckt, dann liefert die Markierung von P auf dem Zeichenblatt einen Punkt der Ellipse. Um die Zeichengenauigkeit zu erhöhen, kann, wie Abb. 86 zeigt, der Punkt P auch zwischen Q und R mit $|PQ| = b$ und $|PR| = a$ auf dem Papierstreifen angenommen werden. Dies erfordert allerdings die Bereitstellung eines größeren Zeichenblattes in bezug auf die darzustellende Ellipse. Auf dem hier abgeleiteten Konstruktionsprinzip beruht der vorwiegend als Lehrmittel benutzte Ellipsenzirkel.

Umgekehrt läßt sich auch bei Vorgabe der Hauptachse und eines Punktes P die Nebenachse der Ellipse konstruieren. Man schlägt um P mit dem Radius a einen Kreis, der das Mittellot der Hauptachse in R und $\bar{R}$ schneidet. Die Verbindungsgerade PR schneidet die Hauptachse in Q . Die Länge $|PQ| = b$ ist auf dem Mittellot

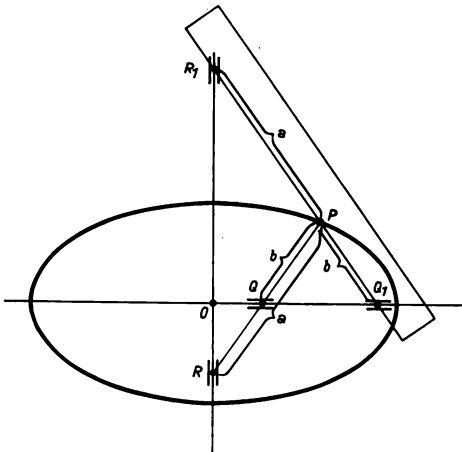


Abb. 86

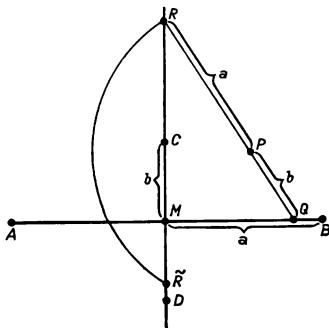


Abb. 87

vom Mittelpunkt der Hauptachse nach oben und unten abzutragen. Damit hat man auch die Nebenseitel C und D der Ellipse gefunden (Abb. 87).

Der oben beschriebene Zwanglauf des durch zwei Gleithülsen eingefassten Stabes ist äquivalent mit der Bewegung des Abrollens von zwei Kreisen aufeinander. In einem Kreis k_0 mit dem Radius $2r$ (*Rastkreis*) rolle ein zweiter Kreis k_1 mit dem Radius r (*Gangkreis*) ohne zu gleiten ab. In der Ausgangsstellung, bei welcher der Mittelpunkt M_1 von k_1 auf der x -Achse liegt, deckt sich der Berührungsradius von k_0

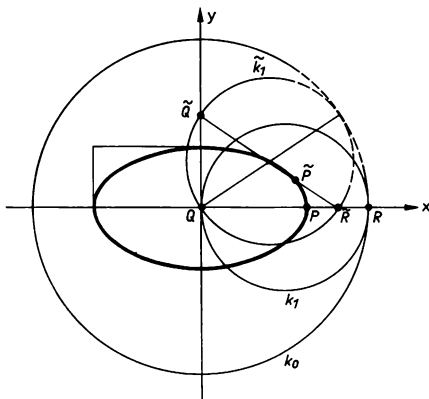


Abb. 88

mit dem horizontal liegenden Durchmesser QR von k_1 . Auf diesem Durchmesser liege der Punkt P , dessen Bahn betrachtet werden soll. Bei Ablauf der *Rollbewegung* von k_1 auf k_0 liegt in jeder Bewegungsphase der Punkt Q auf der y -Achse und R auf der x -Achse. Entsprechend den oben durchgeführten Betrachtungen beschreibt P bei dieser Rollbewegung die Bahn einer Ellipse.

Da sich der Durchmesser QR vor anderen Durchmessern von k_1 nicht auszeichnet, kann die Aussage über die Bahn des Punktes P verallgemeinert werden. Zu k_1 kann man sich nämlich eine ganze Ebene, die *Gangebene* Γ , mitgeführt denken. Nach Einführung des Begriffes der Gangebene kann der vorliegende Sachverhalt wie folgt formuliert werden: Jeder Punkt $P \in \Gamma$ und $P \notin k_1$ beschreibt bei Ablauf der Rollbewegung eine Ellipse. Für die Punkte der Peripherie von k_1 arten die Bahnkurven zu doppelt überdeckten Durchmessern von k_0 aus. Man bezeichnet diesen ebenen Zwanglauf als *Ellipsenbewegung* (Abb. 88).

3.4. Die Ellipse als perspektiv-affines Bild des Kreises

In 2.4. führte die Konstruktion des Schlagschattens einer ebenen Figur bei Parallelbeleuchtung auf die geometrische Verwandtschaft der perspektiven Affinität. Weiter wurde in 2.5., (2) gezeigt, daß zwischen dem Normalriß einer ebenen Figur und dem Normalriß ihrer Umlegung in eine zur Bildebene parallele Ebene ebenfalls eine solche Verwandtschaft besteht. Ferner ist aus 3.2. bekannt, daß die Normalprojektion eines Kreises eine Ellipse darstellt und somit die Ellipse als perspektiv-affines Bild des Kreises aufgefaßt werden kann. Dies räumt die Möglichkeit ein, gewisse an der Ellipse geforderte Konstruktionen, wie z. B. den Schnitt mit einer Geraden oder das Legen von Tangenten aus einem Punkt an die Kurve, mittels einer affinen Transformation in ein Bild überzuführen, wo die Ellipse als Kreis erscheint. An den so transformierten Bestimmungsstücken löst man die gestellte Aufgabe mit Zirkel und Lineal. Anschließend werden die gefundenen Ergebnisse mit den gleichen Mitteln in das ursprüngliche Bild zurücktransformiert.

Für die folgenden Darlegungen werde eine Gerade a als Affinitätsachse und ein Punktepaar $(P, \bar{P})$ zur Festlegung der Punktverwandtschaft vorgegeben ($P, \bar{P} \notin a$). Nun wird um P ein Kreis k geschlagen und nach dem zugeordneten Bild $\bar{k}$ gefragt. Für eine punktweise Konstruktion von $\bar{k}$ finden die unter 2.4. zusammengestellten Eigenschaften der affinen Verwandtschaft Anwendung. Zunächst werde, wie Abb. 89 zeigt, eine Schar von Geraden parallel zur Affinitätsgeraden $g(P\bar{P})$ gezogen. Aus zeichentechnischen Gründen werden diese Geraden symmetrisch zu $g(P\bar{P})$ gelegt. Unter den Geraden der Parallelschar finden sich auch die Tangenten s und t an k mit den Berührungspunkten S und T . Eine zweite Schar von Geraden legt man nun zweckmäßig parallel zum Kreisdurchmesser ST , und zwar derart, daß man mit jeder Geraden zwei Schnittpunkte von k mit den Affinitätsstrahlen erfaßt. Diese Geraden

schneiden die Affinitätsachse in den Punkten 1, 2, 3 ... Die Bildstrecke des Kreisdurchmessers ST kann zuerst gezeichnet werden, indem man $\bar{P}$ mit dem entsprechenden Fixpunkt 1 auf a verbindet. Wegen der Erhaltung der Parallelität sind die anderen Geraden parallel zu $\bar{ST}$ durch die entsprechenden Fixpunkte auf a zu legen. Bei Beachtung der Zuordnung von Bildgeraden zu ihren Originalgeraden sind die Bildpunkte von k unter den Schnittpunkten leicht auffindbar. Ist das Liniennetz hinreichend dicht, so kann k mit einiger Sicherheit gezeichnet werden (Abb. 89).

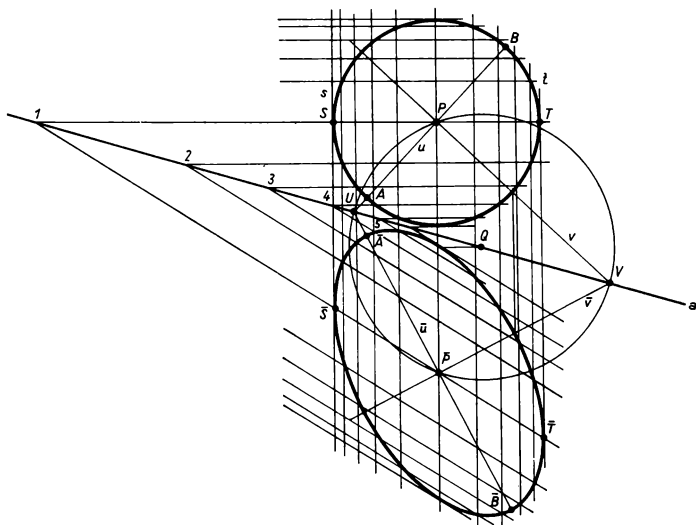


Abb. 89

Eine punktweise Konstruktion von $\bar{k}$ ist jedoch nicht voll befriedigend. Man will die Lage von Haupt- und Nebenachse exakt angeben können. Dies ist bei der Konstruktion mit den bisherigen Hilfsmitteln nur schätzungsweise möglich. Der folgende Satz führt an die Lösung dieser Aufgabenstellung näher heran:

Bei einer perspektiven Affinität, die nicht (orthogonale Geraden-)Spiegelung ist, läßt sich durch jeden Punkt P der einen Menge genau ein sich orthogonal schneidendes Geradenpaar u, v legen, dessen Bilder $\bar{u}, \bar{v}$ sich in dem Bildpunkt $\bar{P}$ gleichfalls orthogonal schneiden.

Der Beweis des Satzes erfolgt durch Konstruktion. Man zieht zunächst die Affinitätsgerade $P\bar{P}$. Das Mittellot von $|P\bar{P}|$ schneidet die Affinitätsachse a in Q . Ein Kreis

um Q mit dem Radius $\varrho = |\overline{PQ}| = |PQ|$ schneidet die Affinitätsachse a in den Punkten U und V . Die Verbindungsgeraden $u = u(PU)$ und $v = v(PV)$ schneiden sich nach dem Satz des THALES senkrecht in P . Ihre Bilder $\bar{u} = \bar{u}(\overline{P}U)$ und $\bar{v} = \bar{v}(\overline{P}V)$ schneiden sich nach Konstruktion ebenfalls senkrecht in $\overline{P}$. Die Konstruktion ist eindeutig ausführbar, soweit das Mittellot von $P\overline{P}$ nicht parallel zu a liegt. Deckt sich das Mittellot mit a , so handelt es sich um eine Spiegelung. Stehen die Affinitätsgeraden senkrecht auf der Affinitätsachse — unter Ausschluß der Spiegelung —, so

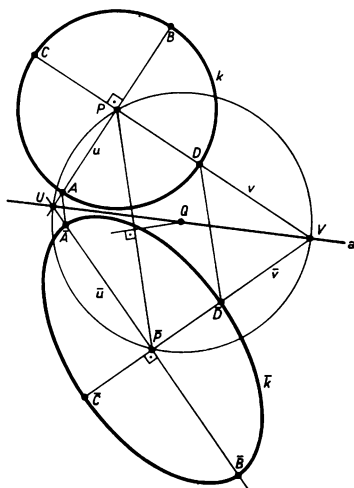


Abb. 90

liegen die Schenkel des Rechtwinkelpaares durch P und $\overline{P}$ senkrecht bzw. parallel zur Affinitätsachse. Auf Grund der Eindeutigkeit der Konstruktion ist der obige Satz bewiesen (Abb. 90).

Um also an dem Bild von k Haupt- und Nebenachse zu finden, ist die oben beschriebene Konstruktion auszuführen. Zusätzlich sind die Endpunkte der beiden aufeinander normal stehenden Kreisdurchmesser mittels Affinitätsstrahlen in das Feld der Ellipse überzuführen. Wählt man in k ein beliebiges anderes orthogonales Durchmesserpaar, so geht dies in ein Paar konjugierter Durchmesser der Ellipse über. Paare von konjugierten Durchmessern besitzen nach den Abbildungseigenschaften der affinen Transformation folgende Merkmale:

1. Die Tangenten in den Endpunkten des einen Durchmessers sind parallel zu dessen konjugiertem Durchmesser.

2. Zieht man zu einem Durchmesser eine Schar paralleler Sehnen, so liegen deren Halbierungspunkte auf dem hierzu konjugierten Durchmesser.

3. Haupt- und Nebenachse einer Ellipse bilden das einzige sich lotrecht schneidende Paar von konjugierten Durchmessern.

Wie bei Ableitung der Zweikreiskonstruktion in 3.2. gezeigt wurde, besteht zwischen einer Ellipse und ihrem Hauptscheitelkreis eine perspektive Affinität mit der Hauptachse als Affinitätsachse und dem Lot darauf als Affinitätsrichtung. Unter Ausnutzung dieser leicht überschaubaren Transformation sollen einige Grundaufgaben zur Ellipse konstruktiv mit Zirkel und Lineal gelöst werden.

Aufgaben

1. Gegeben seien Haupt- und Nebenachse einer Ellipse k und eine Gerade g . Gesucht sind die Schnittpunkte von g und k .

2. Gegeben seien Haupt- und Nebenachse einer Ellipse k und eine Gerade g . Gesucht sind die zu g parallelen Tangenten s und t an k .

3. Gegeben seien Haupt- und Nebenachse einer Ellipse k und ein Punkt P außerhalb k . Gesucht sind die Tangenten von P an k .

4. Gegeben seien eine Achse und eine Tangente t der Ellipse k . Gesucht sind die andere Achse sowie der Berührungspunkt T von t .

5. Gegeben seien ein Ellipsendurchmesser QR , ein Punkt $P \in k$ und die Richtung's des zu QR konjugierten Durchmessers. Gesucht ist der zu QR konjugierte Durchmesser ST .

6. Gegeben sei ein Paar konjugierter Durchmesser der Ellipse k . Gesucht sind Haupt- und Nebenachse von k .

Lösung zu 1. Zunächst wird zu k der Hauptscheitelkreis k_0 gezeichnet. Dieser schneidet die verlängerte Nebenachse in dem Punkt D_0 . Damit sind die Affinitätsachse a , die Affinitätsrichtung r und die Charakteristik $q = \frac{m(MD_0)}{m(MD)}$ eindeutig festgelegt. Jetzt kann die Gerade g aus dem Ellipsenfeld in das Kreisfeld transformiert werden. Hierzu zeichnet man die Gerade $h \parallel g$ durch D . Man erhält den Schnittpunkt $I = I(ah)$. Nun verbindet man den Punkt I mit D_0 und erhält die Gerade h_0 . Die Parallele zu h_0 durch den Punkt $2 = 2(ag)$ liefert die ins Kreisfeld transformierte Gerade g_0 . Die Schnittpunkte P_0 und Q_0 von g_0 mit k_0 sind in der Affinitätsrichtung $r \perp a$ auf g zurückzuführen. Damit hat man die Schnittpunkte P und Q von k mit g exakt ermittelt (Abb. 91).

Lösung zu 2. Wie in Aufgabe 1 wird der Kreis k_0 gezeichnet und g entsprechend in das Kreisfeld transformiert. Man zeichnet den zu g_0 senkrechten Durchmesser von k_0 . Dieser liefert die Schnittpunkte S_0 und T_0 auf k_0 . Die entsprechenden Tangenten an k_0 schneiden die Affinitätsachse a in den Punkten 1 und 2. Die Parallelen s und t zu g durch die Punkte 1, 2 $\in a$ stellen die gesuchten Tangenten dar. Die Rücktransformation von S_0 und T_0 auf s und t erfolgt in Affinitätsrichtung. Sie führt auf die Berührungspunkte S und T (Abb. 92).

Lösung zu 3. Wie in Aufgabe 1 wird der Kreis k_0 gezeichnet und g entsprechend in das Kreisfeld transformiert. Man zeichnet den zu g_0 senkrechten Durchmesser von k_0 . Dieser liefert die Schnittpunkte S_0 und T_0 auf k_0 . Die entsprechenden Tangenten an k_0 schneiden die Affinitätsachse a in den Punkten 1 und 2. Die Parallelen s und t zu g durch die Punkte 1, 2 $\in a$ stellen die gesuchten Tangenten dar. Die Rücktransformation von S_0 und T_0 auf s und t erfolgt in Affinitätsrichtung. Sie führt auf die Berührungspunkte S und T (Abb. 92).

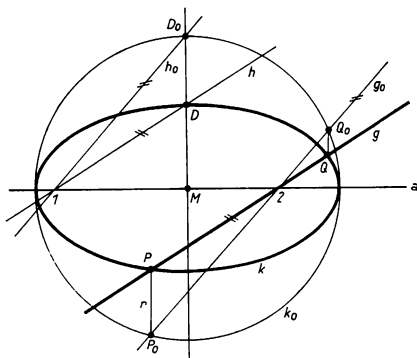


Abb. 91

Lösung zu 3. Wie oben wird k_0 gezeichnet und P nach P_0 in das Kreisfeld transformiert. Hierzu ist die Gerade PD zu zeichnen, welche die Achse a in 1 schneidet. P_0 liegt dann im Schnitt der Verbindungsgeraden $g(ID_0)$ mit dem Affinitätsstrahl durch P . Nun werden die Tangenten aus P_0 an k_0 mit den von der Planimetrie geläufigen

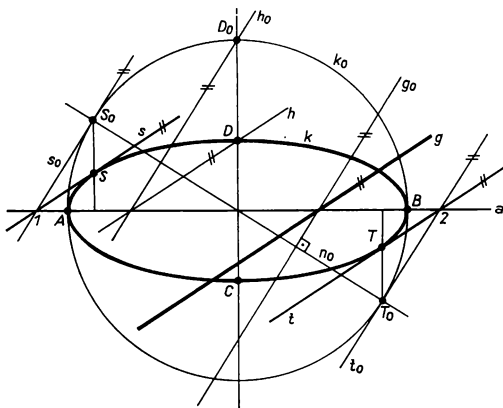


Abb. 92

Sätzen konstruiert. Man erhält die Tangenten s_0 und t_0 mit den entsprechenden Berührungspunkten. Diese lassen sich nach der bereits mehrfach angewandten Methode in das Ellipsenfeld führen (Abb. 93).

Lösung zu 4. Man zeichnet den Scheitelkreis k_0 . Schneidet dieser die Gerade t reell, so ist k_0 der Hauptscheitelkreis von k , anderenfalls ist k_0 Nebenscheitelkreis von k . Aus dem Fixpunkt $I = I(at)$ wird eine Tangente an k_0 gelegt. Sie liefert den Berührungspunkt T_0 . Dieser läßt sich mit einem Affinitätsstrahl senkrecht zu a nach t führen. Mit dem Punktepaar (T, T_0) hat man die Charakteristik der Affinität. Der Kreis k_0 schneidet das Mittellot der gegebenen Achse in A_0 . Den entsprechenden Punkt A findet man durch konstruktive Auswertung der Charakteristik. Mit dem Spiegelpunkt B von A an a sind dann alle vier Scheitel der Ellipse bekannt (Abb. 94a, b).

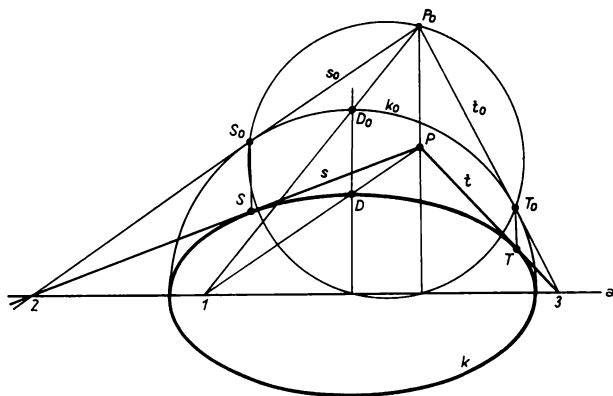


Abb. 93

Lösung zu 5. Die Affinitätsachse werde auf den Durchmesser QR gelegt. Das affine Bild von k sei der Kreis k_0 mit der Strecke QR als Durchmesser. Im Kreisfeld stehen die Bilder konjugierter Durchmesser aufeinander normal. Daher steht s_0 senkrecht auf a und schneidet k_0 in S_0 und T_0 . Um S und T auf s zu finden, benötigt man noch die Affinitätsrichtung. Den Zugang hierzu liefert der Punkt $P \in k$. Man legt durch P die Parallele zu s , die a in I schneidet. Das Lot durch I auf a schneidet k_0 in P_0 , dem Bildpunkt von P . Die Verbindungsgerade $g(PP_0)$ liefert die gesuchte Affinitätsrichtung r . Die Parallelen zu r durch S_0 und T_0 schneiden s in S und T , den gesuchten Endpunkten des zu QR konjugierten Durchmessers ST (Abb. 95).

Lösung zu 6. Man lege durch den einen Endpunkt Q des Durchmessers QR die Gerade a parallel zu dem konjugierten Durchmesser ST . Die Gerade a ist also Tangente von k . Ihr soll im folgenden die Rolle der Affinitätsachse zufallen. In Q ist

das Lot auf a als Bild des Durchmessers QR zu errichten. Darauf ist die Strecke SM von Q nach dem Kreisbild abzutragen. Man erhält den Mittelpunkt M_0 von k_0 . Die Verbindungsgerade $g(MM_0)$ liefert die Affinitätsrichtung r . Der Kreis um M_0 mit dem Radius $\varrho = |SM| = |QM_0|$ ist das perspektiv-affine Bild von k . Nun ist daran zu erinnern, daß sich durch M_0 genau ein sich senkrecht schneidendes Kreisdurchmesserpaar legen läßt, dem im Ellipsenfeld wieder ein orthogonales Durchmesserpaar entspricht (Abb. 96). Um diese Durchmesserpaare aufzufinden, ist auf MM_0 das Mittellot l zu errichten und mit a zu schneiden. Um $N = N(la)$ ist der Kreis mit dem Radius $\varrho_1 = |NM| = |NM_0|$ zu zeichnen. Dieser schneidet a in den Punkten U und V . Die Verbindungslinien $u_0 = u_0(UM_0)$ und $v_0 = v_0(VM_0)$ schneiden

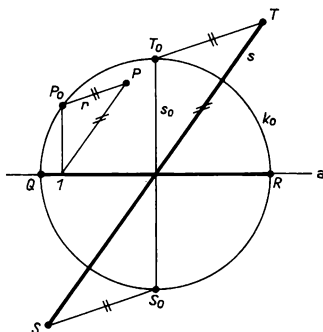


Abb. 95

k_0 in den Punkten A_0, B_0 bzw. C_0, D_0 . Ferner gilt $u_0 \perp v_0$. Nun sind noch die Geraden $u = u(UM)$ und $v = v(VM)$ zu zeichnen, die sich in M senkrecht schneiden. Mit Hilfe der Affinitätsstrahlen parallel zu r durch A_0, B_0, C_0, D_0 findet man die Hauptscheitel A und B sowie die Nebenscheitel C und D von k .

3.5. Konstruktion der Achsen einer Ellipse nach Rytz

In Aufgabe 6 von 3.4. wurden Haupt- und Nebenachse einer Ellipse aus einem Paar konjugierter Durchmesser mit Hilfe der perspektiven Affinität konstruiert. Es gibt noch einen einfacheren Zugang zu den Ellipsenachsen, der sich aus der *Zweikreis konstruktion* und zusätzlichen Überlegungen zur *Papierstreifen konstruktion* herleiten läßt. Zur Begründung der Konstruktion werde von Haupt- und Neben-

Winkel miteinander einschließen. Dann ergibt die Verbindung PQ^* die Lage des Papierstreifens in der zu P gehörigen Stellung. Der Kreis um den Halbierungspunkt S der Strecke PQ^* mit dem Radius SO schneidet die Gerade PQ^* in den Punkten U und V . Durch Verbindung von O mit U und von O mit V findet man die Lage der Achsen. Mit $|PU| = b$ und $|PV| = a$ liefert diese Konstruktion auch die Längen der Halbachsen. In Zweifelsfällen bezüglich der Lage von Haupt- und Nebenachse vergewährt man sich die bei kinematischer Ellipsenerzeugung auftretenden Grenzlagen des Papierstreifens. Dies sichert das richtige Abtragen der Längen a und b auf den Achsen. Die oben getroffene Annahme über den Schnittwinkel der konjugierten Halbmesser bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit (Abb. 98).

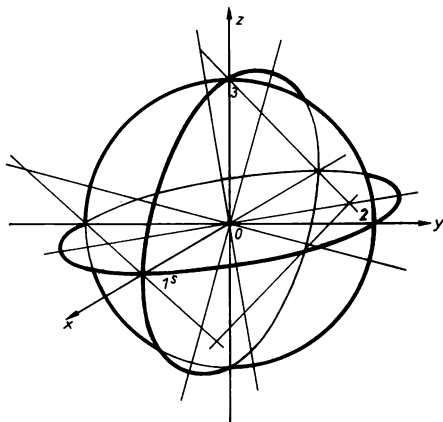


Abb. 99

Die praktische Bedeutung der hier abgeleiteten *Rytzschen Achsenkonstruktion* soll an der Lösung von zwei Aufgaben verdeutlicht werden.

Aufgabe 1. Gegeben sei das Schrägbild eines kartesischen Achsenkreuzes mit den auf diesen Achsen liegenden Einheitsstrecken $e = |O1| = |O2| = |O3|$. Gesucht sind die Schrägbilder der drei in den Koordinatenebenen liegenden Einheitskreise mit dem gemeinsamen Mittelpunkt im Ursprung O .

Lösung. Das Schrägbild des in der y, z -Ebene liegenden Einheitskreises ist wegen der frontalen Lage dieser Ebene der Kreis mit O als Mittelpunkt und der Streckeneinheit e als Radius. Dagegen sind die Bilder der in der x, y -Ebene und x, z -Ebene liegenden Einheitskreise Ellipsen. Zum Beispiel sind die Strecken $O1^*$ und $O2^*$ konjugierte Halbmesser der Bildellipse des horizontal liegenden Kreises. Die Rytzsche

Konstruktion führt also hier auf Haupt- und Nebenachse der Bildellipse. Entsprechend verhält es sich mit dem Bild des in der x, z -Ebene liegenden Einheitskreises (Abb. 99).

Aufgabe 2. Gegeben ist der Grundriß eines im ersten Raumquadranten liegenden Quadrates $PQRS$. Der Eckpunkt P liegt in der Grundrißtafel. Gesucht sind der Aufriß und die wahre Gestalt (Seitenlänge) des Quadrates.

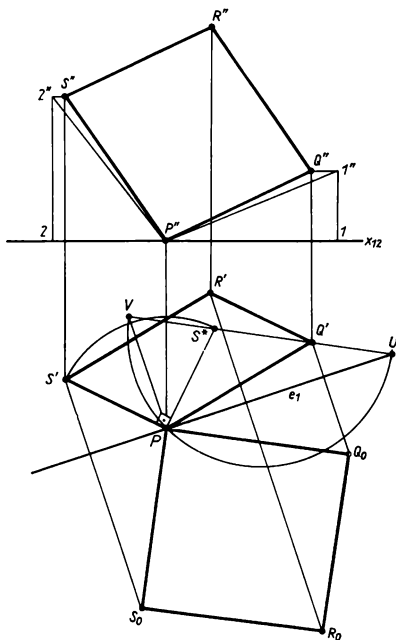


Abb. 100

Lösung. PS' und PQ' können nach der Aufgabenstellung als konjugierte Halbmesser einer Ellipse aufgefaßt werden. Hierbei hilft die Vorstellung, daß in die von dem Quadrat aufgespannte Ebene ein Kreis k mit P als Mittelpunkt und der Länge der Quadratseite als Radius eingezeichnet ist. Die Hauptachse liefert die Rytzsche Konstruktion. Die erste Spur e_1 der von dem Quadrat aufgespannten Ebene geht

durch P und fällt mit der Hauptachse von k' zusammen, da sich genau jener Durchmesser von k auf π_1 in wahrer Länge abbildet, der parallel zu π_1 liegt. Die Länge der halben Hauptachse von k' ist damit gleich der Länge der Quadratseiten. Um den Aufriß des Quadrates zu erhalten, wendet man nun die Methode des Paralleldrehens in etwas abgewandelter Form an. Man trägt die Strecken PQ' und PS' von P'' aus auf der Reißachse nach rechts und links ab und erhält die Punkte 1 bzw. 2. Durch diese Punkte legt man Ordnungslinien lotrecht zur Reißachse. Sie schneiden den Kreis mit dem Radius $a = |VQ'|$ um P'' in den Punkten $1''$ und $2''$. Die Parallelen zur Reißachse durch diese Punkte schneiden die Ordnungslinien durch Q' und S' in den Punkten Q'' und S'' . Die geeignete Ergänzung der Aufrisse von P , Q und S zu einem Parallelogramm liefert auch den Aufriß von R . Da die wahre Länge der Quadratseiten bekannt ist, bietet die Umlegung des Quadrates in die Grundrißtafel keine weiteren Schwierigkeiten (Abb. 100).

3.6. Die Ellipse als schiefer Schnitt eines Drehzylinders

Für die folgenden Überlegungen werde von einer Kugel κ ausgegangen, die auf der Grundrißtafel π_1 liegt. Grund- und Aufriß dieser Kugel stellen je einen Kreis dar. Der Aufriß von κ berührt die Reißachse im zweiten Bild des Berührungspunktes F von κ mit π_1 . Ferner ist F der Mittelpunkt des Grundrisses von κ . Die Kugel werde von einem Bündel parallel einfallender Strahlen beleuchtet. Die Einfallrichtung s dieses Strahlbündels liege parallel zur Aufrißtafel.

Es wird nach der Begrenzungslinie des in π_1 erzeugten *Schlagschattens* der Kugel gefragt. Diese Begrenzungslinie ist sicher symmetrisch bezüglich der zu π_2 parallelen Ebene γ durch den Punkt F . Ferner ist aus Gründen der Symmetrie die auf der Kugel liegende *Eigenschattengrenze* ein Großkreis k von κ , wobei die Ebene ϵ des Großkreises senkrecht auf den einfallenden Lichtstrahlen steht. Die Schlagschattengrenze von κ in π_1 ist demnach gleich dem Schlagschatten des Kreises k . Damit ist die Schlagschattengrenze von κ das perspektiv-affine Bild von k , also eine Ellipse. Da ferner die Gesamtheit der κ berührenden Strahlen eine Drehzylinderfläche bildet, gilt der Satz:

Der schiefe Schnitt einer Drehzylinderfläche ergibt eine Ellipse. Die waagerechte Gerade γ' durch F ist wegen der bestehenden Symmetrie eine Achse der Ellipse. Die zugehörigen Scheitelpunkte sind die Schatten des höchsten und tiefsten Punktes von k . Der Abstand der Punkte A , B ist größer als der Durchmesser von k . Folglich sind A und B die Hauptscheitel der Ellipse. Das Mittellot von AB bildet die Nebenachse. Auf dieser liegen die Schatten des vordersten und hintersten Punktes von k . Es sind die Nebenscheitel C und D . Die Länge der Nebenachse ist gleich dem Durchmesser der Kugel.

Mit diesen Angaben kann nun die Schlagschattengrenze punktweise exakt vervollständigt werden. Zur Abrundung des Bildes stehen weiterhin die Scheitelkrümmungskreise nach 3.2. zur Verfügung (Abb. 101).

Im folgenden sollen die geometrischen Besonderheiten der Lage des Punktes F bezüglich der gefundenen Ellipse untersucht werden. Die den Kreis k enthaltende Ebene ε hat die Spuren $e_1 \perp x_{12}$ und $e_2 = \varepsilon''$. Jetzt werde auf k ein Punkt P_k allgemeiner Lage angenommen und dessen Schlagschatten P konstruiert. Der Aufriß P'' von P ergibt sich als Schnitt des Strahles durch P_k'' mit der Rißachse. Der Grundriß liegt in π_1 auf einem Ordner durch P'' . Der Abstand d des Punktes P_k von der

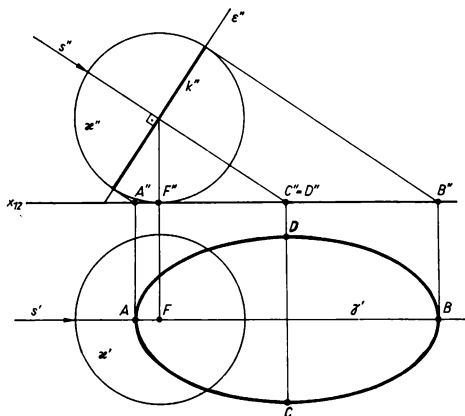


Abb. 101

Hilfsebene γ wird nach der in Abb. 102 angegebenen Weise unmittelbar dem Aufriß entnommen, da der Aufriß von κ auch als das Bild der Umlegung von k in die Hilfsebene γ angesehen werden kann. Trägt man diesen Abstand d auf der Ordnungslinie durch P'' von ihrem Schnittpunkt mit der Symmetrielinie γ' nach oben und unten ab, so erhält man zwei Bildpunkte. Von diesen soll zunächst nur dem Punkt P das weitere Interesse gelten.

Das von P auf e_1 gefällte Lot ergibt die Strecke PL der Länge l . Durch Verbinden von P mit F erhält man die Strecke PF der Länge r . Es gilt die Behauptung:

Es ist $\frac{r}{l} = \sin \alpha$ für jeden auf k liegenden Punkt P_k . Dabei ist α der erste Neigungswinkel von ε gegen π_1 .

Mit diesen Begriffen läßt sich die Definition der Ellipse wie folgt fassen: Die *Ellipse* ist der geometrische Ort der Punkte P , für die das Abstandsverhältnis von einem festen Punkt F , dem *Brennpunkt*, und einer festen Geraden e , der *Leitlinie* (mit $F \notin e$), gleich der konstanten Zahl ε mit $0 < \varepsilon < 1$ ist.

Diese planimetrische Definition erlaubt in Verbindung mit den oben eingeführten Begriffen eine übersichtliche Ableitung der *Polarkoordinatendarstellung* der Ellipse (Abb. 103). Die Ellipse habe im Brennpunkt F die Ordinaten $\pm p$. Für den Abstand des Brennpunktes von der Leitgeraden werde $|HF| = q$ gesetzt. Dann gilt nach Definition $p = \varepsilon \cdot q$ und $\varepsilon(r \cos \varphi + q) = r$ für einen beliebigen Ellipsenpunkt (r, φ) . Durch Auflösung nach r ergibt sich die Darstellung

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \quad \text{mit } 0 < \varepsilon < 1.$$

Es wird sich zeigen, daß durch eine solche Polarkoordinatendarstellung auch die Parabel und Hyperbel analytisch beschrieben werden können.

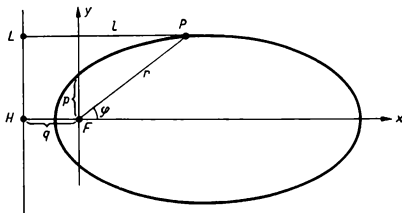


Abb. 103

Wegen der Symmetrie der Ellipse bezüglich der Nebenachse liegt es nahe, den ganzen Vorgang an dieser Symmetrielinie zu spiegeln. Dies führt zu einem zweiten auf der Hauptachse liegenden Brennpunkt und einer entsprechenden zweiten Leitgeraden. Um diese beiden Brennpunkte künftig auseinanderzuhalten, werden sie mit F_1 und F_2 bezeichnet. Für die weiteren Überlegungen werden die räumlichen Hilfsmittel in der Weise ergänzt, daß man eine zweite Kugel von gleichem Radius in den Berührungstrahlzylinder Φ bringt, die π_1 in F_2 von unten berührt. Dann haben die Kugeln κ_1 und κ_2 mit dem Strahlzylinder Φ die Berührungskreise k_1 bzw. k_2 gemeinsam. Jetzt werde ein beide Kugeln berührender sogenannter *streifender* Lichtstrahl s betrachtet. Dieser schneidet k_1 in P_1 , k_2 in P_2 und die horizontale Bildebene π_1 in dem Ellipsenpunkt P . Die Distanz $|P_1P_2|$ ist unabhängig von der Wahl des streifenden Lichtstrahles s . Es werde $|P_1P_2| = 2a$ gesetzt. Ferner gilt nach den bereits oben für Tangenten aus einem Punkt an eine Kugel angestellten Überlegungen

$$|PF_1| = |PP_1| \quad \text{und} \quad |PF_2| = |PP_2|.$$

Wegen $|P_1P_2| = |P_1P| + |PP_2| = 2a$ gilt auch

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a$$

(Abb. 104). Daraus resultiert eine planimetrische Definition der Ellipse, die vorzugsweise in Lehrbüchern der analytischen Geometrie als Ausgang zur Ableitung der Ellipsengleichung verwendet wird.

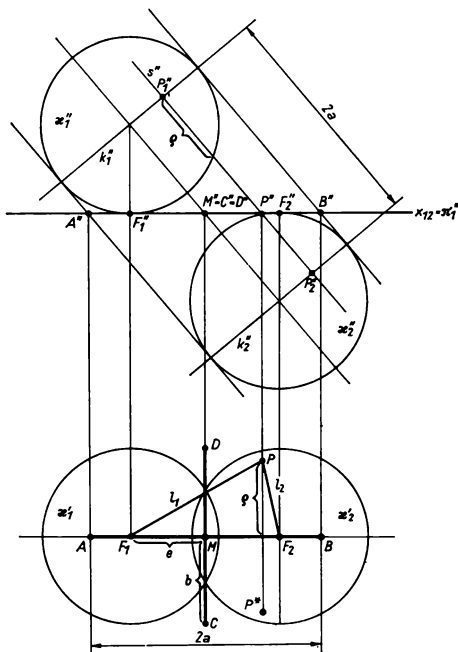


Abb. 104

Definition. Die *Ellipse* ist der geometrische Ort jener Punkte der Ebene π , die von zwei festen Punkten F_1 und $F_2 \in \pi$, den *Brennpunkten*, eine konstante Abstandssumme haben. Diese Abstandssumme ist gleich der *Länge der Hauptachse* der Ellipse.

Aus dieser Definition läßt sich die *Gärtnerkonstruktion* der Ellipse leicht herleiten. In der Praxis werden zwei Pflöcke in die Erde geschlagen, um die eine geschlossene

Schnur lose gelegt wird. Führt man nun ein Pflanzholz derart mit der Spitze auf dem Boden entlang, daß die Schnur in jeder Stellung ein Dreieck aufspannt, dessen Eckpunkte in den festen Pflöcken und dem beweglichen Pflanzholz liegen, so beschreibt die Spitze des beweglichen Holzes auf dem Boden eine Ellipse von zweckentsprechender Genauigkeit. Aus dieser Konstruktion läßt sich eine für die Ellipse grundlegende Größenbeziehung ablesen. Zunächst bezeichnet man den Abstand eines Brennpunktes F_i ($i = 1, 2$) vom Mittelpunkt der Ellipse als *lineare Exzentrizität* e . Kommt bei Ausführung der Gärtnerkonstruktion der laufende Punkt P mit einem Hauptscheitel zur Deckung, so ist aus der Figur abzulesen, daß sich der Umfang u der geschlossenen Schnur durch $u = 2a + 2e$ ausdrücken läßt. Kommt der laufende Punkt mit dem Nebenscheitel zur Deckung, so bildet die Schnur ein gleichschenkliges Dreieck mit der Strecke F_1F_2 als Basis. Die Nebenachse teilt es in zwei rechtwinklige

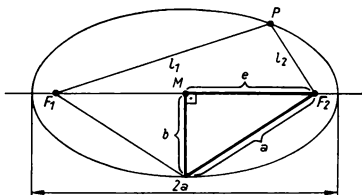


Abb. 105

Dreiecke. In einem solchen Dreieck sind b und e die Längen der Katheten, während a gleich der Länge der Hypotenuse ist. Folglich gilt bei der Ellipse die Gleichung

$$a^2 = b^2 + e^2.$$

Das Quadrat der linearen Exzentrizität e ist also gleich der Differenz der Quadrate von halber Haupt- und Nebenachse der Ellipse (Abb. 105).

3.7. Fokaleigenschaft der Ellipse

Die Bezeichnung der Punkte F_1 und F_2 als Brennpunkte der Ellipse ist auch physikalisch gerechtfertigt. Der Nachweis der Brennpunkteigenschaft von F_1 und F_2 soll in der folgenden Untersuchung geführt werden. Zunächst werde $|PF_i| = l_i$ ($i = 1, 2$) gesetzt. Weiterhin soll auf dem Strahl PF_1 von P aus die Strecke l_2 derart abgetragen werden, daß sich ein außerhalb der Ellipse liegender Punkt G ergibt. Durchläuft nun P die Ellipse, dann beschreibt G einen Kreis mit dem Mittelpunkt F_1 und dem Radius

$r = l_1 + l_2 = 2a$. Dieser Kreis wird ein *Leitkreis* der Ellipse genannt. Aus Abb. 106 ist gemäß der in 3.6. gegebenen Ellipsendefinition folgender Satz abzulesen:

Die Mittelpunkte P aller Kreise k , die einen Kreis k_0 berühren und durch einen innerhalb k_0 liegenden Punkt F_2 gehen, liegen auf einer Ellipse, von der k_0 ein Leitkreis und F_2 ein Brennpunkt ist. Der Mittelpunkt F_1 von k_0 ist der andere Brennpunkt der Ellipse.

Der Beweis der Fokaleigenschaft wird über die Tangentenkonstruktion geführt. Es gilt die Behauptung:

Das Lot t von P auf die Verbindungsgerade $n = n(GF_2)$ ist die Tangente an die Ellipse durch P (Abb. 106).

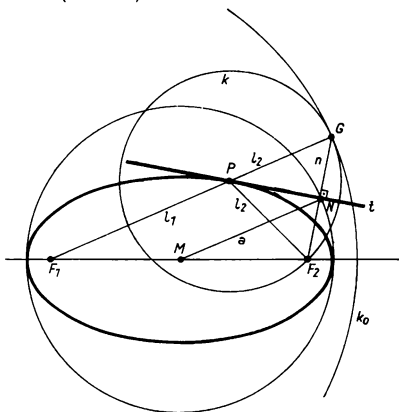


Abb. 106

Der Beweis wird *indirekt* geführt. Man geht von der Annahme aus, daß die durch P gelegte Gerade t *nicht* Tangente der Ellipse ist. Dann gibt es auf t einen von P verschiedenen Ellipsenpunkt Q . Für jeden solchen von P verschiedenen Punkt Q auf t müssen folgende Gleichungen bzw. Ungleichungen erfüllt sein:

1. Nach Definition der Ellipse gilt

$$|PF_1| + |PF_2| = |QF_1| + |QF_2| = 2a. \quad (1)$$

2. Nach Konstruktion gilt

$$|PF_2| = |PG|, \quad |QF_2| = |QG|, \quad |PF_1| + |PG| = |GF_1| = 2a.$$

3. Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$|QF_1| + |QG| > |GF_1|, \text{ also } |QF_1| + |QF_2| > 2a \quad (2)$$

(Abb. 107).

Die aus der Ellipsendefinition gefolgte Gleichung (1) steht im Widerspruch zu der aus Konstruktion und Dreiecksungleichung gefolgerten Ungleichung (2). Die Annahme eines von P verschiedenen Ellipsenpunktes Q auf t führt zu einem Widerspruch. Somit ist die getroffene Annahme falsch und die Behauptung, daß t die Tangente der Ellipse in P ist, wahr.

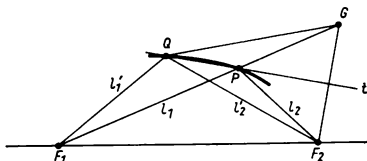


Abb. 107

Für den Beweis der Fokaleigenschaft ist festzuhalten, daß die Ellipsentangente t in P den Außenwinkel der zu P gehörigen Leitstrahlen halbiert. Damit ist gezeigt, daß ein von F_2 ausgehendes Bündel von Strahlen nach Reflexion an der Kurve gemäß dem Spiegelungsgesetz in F_1 wieder zusammentrifft und umgekehrt (Abb. 108).

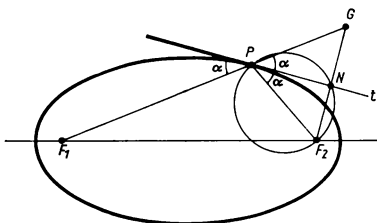


Abb. 108

Im folgenden sollen an Abb. 106 die zur Tangentenkonstruktion wesentlichen Elemente herausgestellt werden. Zunächst ist zu vermerken, daß der Halbierungspunkt N der Strecke GF_2 zugleich Fußpunkt des Lotes von P auf $n = n(GF_2)$ ist. Also gilt $N \in t$. Ferner ist der Halbierungspunkt M der Strecke F_1F_2 , Mittelpunkt der Ellipse. Nach dem Strahlensatz gilt $MN \parallel F_1G$ und $|MN| = a$. Durchläuft P die Ellipse, so beschreibt N den zugehörigen *Hauptscheitelkreis*. Außerdem ist das Dreieck $\triangle PNF_2$ rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei N . Sollen also von einem außerhalb der Ellipse liegenden Punkt Q die Tangenten gelegt werden, so verbindet man Q mit einem der Ellipsenbrennpunkte und schlägt über dieser Strecke als Durchmesser einen Kreis. Dieser schneidet den Hauptscheitelkreis in zwei Punkten N_1 und N_2 . Die Verbindungsgeraden $t_1(QN_1)$ und $t_2(QN_2)$ sind die gesuchten Tangenten

aus Q an die Ellipse. Im Prinzip ist es gleichgültig, welcher der beiden Brennpunkte zur Konstruktion herangezogen wird (vgl. Abb. 109).

Aufgabe 1. Gegeben seien eine Ellipse durch ihre Hauptachse mit den darauf liegenden Brennpunkten und ein außerhalb der Ellipse liegender Punkt T . Aus T sind die Tangenten an die Ellipse zu legen, ohne dabei von einer perspektiv-affinen Transformation Gebrauch zu machen. Auch die Berührungspunkte sind exakt zu konstruieren.

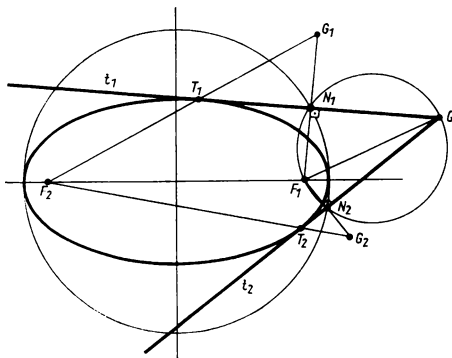


Abb. 109

Lösung. Man zeichne den Hauptscheitelkreis k_1 und einen zweiten Kreis k_2 , der die Strecke TF_2 als Durchmesser besitzt. Die Schnittpunkte N_1 und N_2 der Kreise k_1 und k_2 sind nach obigen Überlegungen Punkte der gesuchten Tangenten. Also gilt $t_1 = t_1(TN_1)$ und $t_2 = t_2(TN_2)$. Die Berührungspunkte T_1 und T_2 erhält man, indem zunächst F_1 an t_1 , dann F_2 an t_2 gespiegelt werden. So ergeben sich die Gegenpunkte G_1 bzw. G_2 . Die Verbindungsgerade F_2G_1 schneidet t_1 in T_1 . Entsprechend findet man den Berührungspunkt T_2 von t_2 (Abb. 110).

Aufgabe 2. Gegeben seien Haupt- und Nebenachse einer Ellipse und eine Gerade g . Es sollen die zu g parallelen Tangenten an die Ellipse unter Ausschluß von affinen Hilfsmitteln konstruiert werden.

Lösung. Ein Kreis um einen Nebenscheitel mit der Länge der halben Hauptachse als Radius schneidet die Hauptachse in den Brennpunkten F_1 und F_2 . Ferner ist der Hauptscheitelkreis zu zeichnen. Dieser schneidet das Lot von F_1 auf g in den Punkten L_1 und N_1 und das Lot von F_2 auf g in den Punkten L_2 und N_2 . Dabei liegen die Punkte L_i oberhalb und die Punkte N_i unterhalb der Hauptachse. Die gesuchten Tangenten t und $\bar{t}$ ergeben sich als Verbindungsgeraden entsprechender Punkte, also $t = t(L_1L_2)$ und $\bar{t} = \bar{t}(N_1N_2)$. Auch die Berührungspunkte der Tangenten mit der

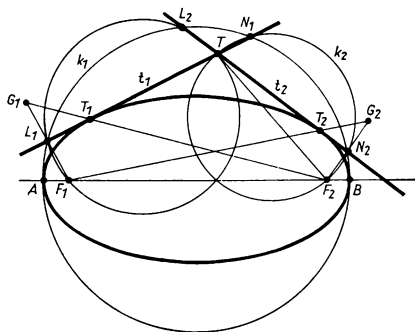


Abb. 110

Ellipse lassen sich exakt konstruieren. Hierzu sucht man die zu F_1 bezüglich t und $\bar{t}$ gehörigen Gegenpunkte G_1 und $\bar{G}_1$ auf und verbindet sie mit F_2 . Im Schnittpunkt von t mit der Verbindungslinie F_2G_1 liegt der Berührungspunkt T von t . Entsprechend findet man $\bar{T}$ (Abb. 111).

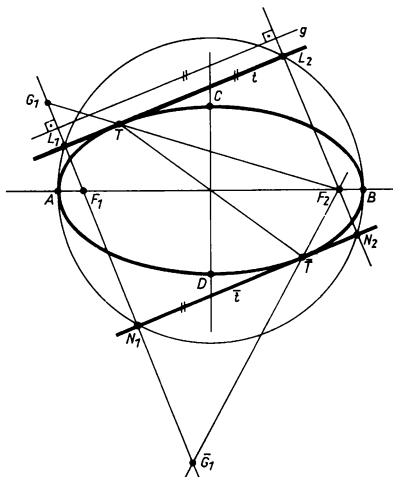


Abb. 111

3.8. Darstellung von Drehkörpern und konstruktive Auswertung

Zur Darstellung von Drehkörpern allgemeiner Lage ist die Vertrautheit mit den metrischen Besonderheiten der Ellipse eine wichtige Voraussetzung, denn Ellipsen treten als Normalprojektionen von Kreisen unter Vorgabe verschiedenster Bestimmungsstücke in Erscheinung. Die mit der bildlichen Wiedergabe von Drehkörpern verbundenen Probleme sollen an Beispielen demonstriert werden.

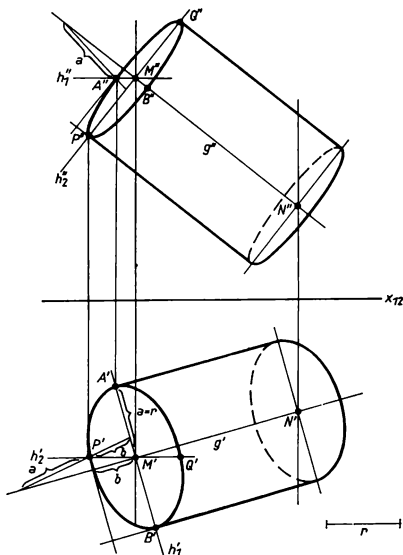


Abb. 112

Aufgabe 1. Gegeben seien Grund- und Aufriß der Achse $g = g(MN)$ eines Drehzylinders Φ von allgemeiner Lage sowie der Radius von Deck- und Basiskreis. Gesucht sind Grund- und Aufriß dieses Zylinders.

Bemerkung. Unter „allgemeiner Lage“ einer Geraden ist auch hier und in den folgenden Aufgaben zu verstehen, daß die Gerade weder zur Grund- noch zur Aufriß zur Kreuztischtafel parallel liegt (Abb. 112).

Lösung. Deck- und Basiskreis des Drehzylinders bilden sich unter den gegebenen Voraussetzungen als Ellipsen ab. Die von den Kreisen bestimmten Ebenen μ und ν

stehen lotrecht auf der Achse $g(MN)$. Man erfaßt diese Ebenen zweckmäßig durch die sich in M und N schneidenden Hauptlinien, also $\mu = \mu(h_1 h_2)$ bzw. $\nu = \nu(k_1 k_2)$. Es gilt $h_1' \perp g'$ und $h_2'' \perp g''$ sowie $h_1'' \parallel h_2' \parallel x_{12}$. Der auf h_1 liegende Kreisdurchmesser bildet sich in π_1 und der auf h_2 liegende in π_2 in wahrer Länge ab. Damit hat man die Hauptachsen $A'B'$ bzw. $P'Q'$ der Bildellipsen des Deckkreises in beiden Rissen. Wenn die Hauptachse einer Ellipse vorliegt, so verhilft ein weiterer Ellipsen-

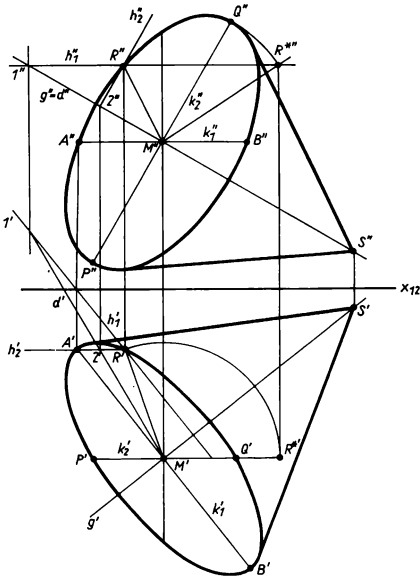


Abb. 113

punkt unter Einsatz der Papierstreifenkonstruktion zur Nebenachse. Für das erste Bild des Deckkreises erhält man zusätzliche Ellipsenpunkte, indem man P'' und Q'' in den Grundriß führt. Das ergibt P' und Q' auf h_2' . Nun ist die Papierstreifenkonstruktion im Grundriß anwendbar. Entsprechend gewinnt man die Aufrisse von A und B , wodurch auch in diesem Bild die Konstruktion der Nebenachse möglich wird. Die Nebenachsen der Ellipsen decken sich in jedem Normalriß mit dem Bild der Zylinderachse. Die Bilder von Deck- und Basiskreis ergeben in jedem Riß kongruente Ellipsen. Die zu den Bildern der Achse parallelen Tangentenpaare sind die Bilder der

äußeren Mantellinien in dem betreffenden Riß. Die äußeren Mantellinien berühren die Bilder von Deck- und Basiskreis in ihren Nebenseiteln. Zur Hebung der Anschaulichkeit beider Bilder empfiehlt es sich, die verdeckten Anteile der Bildellipsen gestrichelt zu zeichnen.

Aufgabe 2. Gegeben seien Grund- und Aufriß der Achse g eines Drehkegels allgemeiner Lage, die Kegelspitze $S \in g$ sowie ein Punkt R auf der Peripherie des Basiskreises. Gesucht sind Grund- und Aufriß dieses Drehkegels.

Lösung. Der Basiskreis des Drehkegels bildet sich in beiden Rissen als Ellipse ab. Um zunächst den Mittelpunkt des Basiskreises zu finden, ist durch R die Ebene $\gamma \perp g$ zu legen. Sie werde durch die beiden sich in R schneidenden Hauptlinien h_1 und h_2 beschrieben. Dabei gilt $h_1' \perp g'$, $h_2'' \perp g''$ und $h_1'' \parallel h_2' \parallel x_{12}$. Durch Konstruktion mittels einer Deckgeraden findet man den Schnittpunkt $M = M(g\gamma)$. Ferner wird nach der Methode des Paralleldrehens die wahre Länge a von MR ermittelt. Damit hat man die Länge der halben Hauptachse für beide Bildellipsen gefunden. Nun legt man noch durch M' eine Hilfslinie $k_1' \parallel h_1'$ und durch M'' eine Hilfslinie $k_2'' \parallel h_2''$. Weiterhin ist die Strecke a von M' auf k_1' und von M'' auf k_2'' nach beiden Seiten abzutragen. Dadurch erhält man die Hauptscheitel A' , B' bzw. P'' , Q'' der beiden Bildellipsen. Da für Grund- und Aufriß außer den Hauptscheiteln noch je ein Ellipsenpunkt P' bzw. A'' zur Verfügung steht, kann zu beiden Bildern durch Einsatz der Papierstreifenkonstruktion die Nebenachse gewonnen werden (Abb. 113).

Nach Vorliegen der beiden Risse des Basiskreises sind im Grundriß aus S' und im Aufriß aus S'' die Tangenten an die entsprechenden Bildellipsen zu legen. Es ist zu beachten, daß die Verbindungsgeraden der Hauptscheitel mit dem zugehörigen Bild der Kegelspitze nicht zum scheinbaren Umriß des Kegels gehören, sondern in dessen Innerem liegen. Zur Tangentenkonstruktion stehen zwei Verfahren zur Verfügung. Mit Hilfe der perspektiven Affinität ist die Konstruktion auf ein Berührungsproblem am Kreis zurückführbar. Einfacher ist die in 3.7. abgeleitete Konstruktion mit Hilfe von Hauptscheitelkreis, Brennpunkt und Thales-Kreis. Zur Förderung der Anschaulichkeit ist der gegebenenfalls verdeckt liegende Teil des Basiskreises in dem betreffenden Bild als gestrichelte Linie auszuführen.

Aufgabe 3. Gegeben seien eine Kugel κ durch ihre Normalrisse sowie eine Ebene ε durch ihre Spuren e_1 und e_2 . Gesucht sind die Bilder der Schnittkurve $k = k(\kappa\varepsilon)$ sowie die Spuren einer zu ε parallelen Tangentialebene τ an κ .

Lösung. Die Aufgabe soll mittels eines Seitenrisses gelöst werden. Dieser Seitenriß wird an den Grundriß derart angeschlossen, daß die Ebene ε projizierend erscheint. Für die neu einzuführende Rißachse x_{13} gilt daher $x_{13} \perp e_1$. Beim Übertragen der Kugel in diesem Riß ist nach der in 2.7., S. 71, abgeleiteten Regel zu verfahren: „Tafelabstände des wegfallenden Risses (Aufriß) von der neuen Rißachse aus auf der zugehörigen Ordnungslinie nach dem neuen Riß abtragen“ (Abb. 114).

Entsprechend erhält man auch die dritte Spur $e_3 = \varepsilon'''$ von ε . Dem Seitenriß kann man den Radius a des Schnittkreises k sowie die Lage seines Mittelpunktes M (ersten Tafelabstand) entnehmen. Man führt M' von M''' ausgehend, in den Grundriß

und anschließend in den Aufriß und legt weiter durch M' das Bild h_1' der ersten und durch M'' das Bild h_2'' der zweiten Spurparallelen. Weiterhin trägt man die Strecke der Länge a von M' auf h_1' und von M'' auf h_2'' nach beiden Seiten ab. Das ergibt die Hauptscheitel A' und B' von k' sowie P'' und Q'' von k'' . Ferner kann dem Seitenriß die Lage des höchsten und des tiefsten Punktes C bzw. D von k entnommen werden.

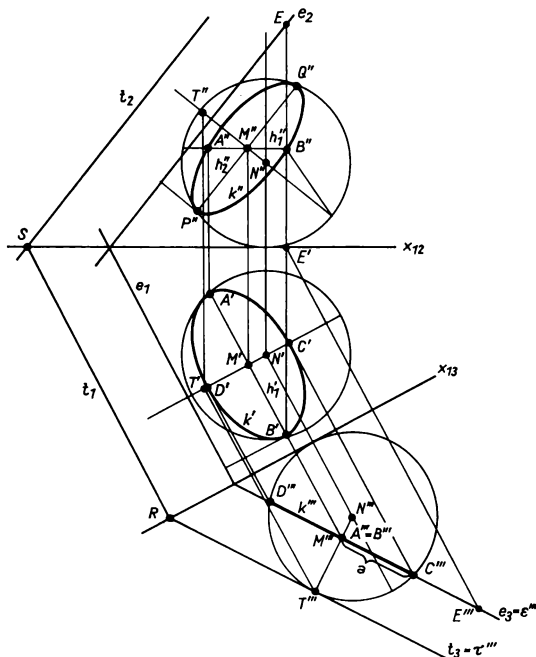


Abb. 114

Die Punkte liegen auf der Falllinie von ϵ durch M . Ihre Übertragung in den Grundriß liefert die Nebenscheitel C' und D' von k' . Damit stehen Haupt- und Nebenchse zur Konstruktion von k' zur Verfügung. Nun führt man die Hauptscheitel A' und B' von k' in den Aufriß. Von k'' sind jetzt außer der Hauptachse noch ein zweiter Ellipsendurchmesser bekannt. Hier hilft die Papierstreifenkonstruktion weiter, um Nebenchse und Nebenscheitel zu gewinnen.

Zur Konstruktion der Tangentialebene $\tau \parallel \varepsilon$ wird gleichfalls vom Seitenriß ausgegangen. Die Tangente $t_3 \parallel e_3$ an den Seitenriß von κ ist identisch mit dem Seitenriß dieser projizierenden Tangentialebene τ . Die Gerade $t_1 \parallel e_1$ durch den Schnittpunkt $R = R(t_3 x_{13})$ ist gleich der ersten Spur von τ . Entsprechend ist $t_2 \parallel e_2$ durch $S = S(t_1 x_{12})$ die zweite Spur von τ . Der Berührungspunkt T von τ mit κ kann gleichfalls dem Seitenriß entnommen und mit Hilfe von Ordnungslinien in Grund- und Aufriß übertragen werden.

Gewisse planimetrische Aufgabenstellungen lassen sich räumlich interpretieren und dann mit Hilfe von zugeordneten Normalrissen lösen. Dieser Vorgang soll an einem Beispiel demonstriert werden.

Aufgabe 4. Gegeben seien ein Rechteck und ein im Inneren dieses Rechtecks liegender Punkt P . Gesucht ist eine Ellipse, die diese Rechteckseiten berührt und außerdem durch den Punkt P geht.

Bemerkung. In 3.1. wurde festgestellt, daß ein Kegelschnitt durch Vorgabe von fünf Bestimmungsstücken in der Ebene festgelegt ist. Dies kann z. B. durch fünf Punkte oder auch durch fünf Tangenten erfolgen. Eine Tangente samt Berührungspunkt ist zwei Bestimmungsstücken gleichzusetzen. Die Brennpunkte für einen Kegelschnitt sind äquivalent mit vier Bestimmungsstücken. Beispielsweise wird durch die Vorgabe eines Scheitelpunktes mit zugehörigem Krümmungsmittelpunkt ein Büschel oskulierender Kegelschnitte erfaßt. Gibt man einen weiteren Punkt in der Ebene vor, so wird aus dem Büschel genau ein Kegelschnitt als Lösung ausgesondert.

Lösung. Das Tangentenrechteck der Ellipse wird als Aufriß eines auf π_1 lotrecht stehenden Drehzylinders interpretiert. Der Grundriß hierzu ist demnach ein Kreis, der für konstruktive Belange mitgezeichnet wird. Die gesuchte Ellipse wird jetzt als Aufriß k'' eines geeignet gelegten ebenen Schnittes dieses Zylinders aufgefaßt. Folglich muß auch der Punkt P im Raum auf dem Zylindermantel liegend angenommen werden. Gemäß dieser räumlichen Interpretation ist jetzt P'' statt P zu setzen. Nun geht es darum, eine Schnittebene ε derart durch P zu legen, daß der Aufriß der entstehenden Schnittkurve k die gestellten Forderungen erfüllt. Zunächst ist der Schnittpunkt M'' der Diagonalen des Tangentenrechtecks aus Gründen der Symmetrie auch Mittelpunkt der gesuchten Ellipse. Wegen der zentrischen Symmetrie der Ellipse ist der Spiegelpunkt Q'' von P'' an M'' ebenfalls ein Punkt von k'' . Nach der räumlichen Auffassung liegt auch Q auf einer Erzeugenden des Zylinders, die der durch P gehenden gegenüberliegt. Damit hat man die in den Kreis der Betrachtung einzubeziehenden Schnittebenen auf ein Büschel von Ebenen mit der Geraden $g = g(PQ)$ als Träger eingeschränkt (Abb. 115).

Nun ist noch die Forderung zu beachten, daß die obere und die untere Gerade des Rechtecks Tangenten von k'' sein sollen. Daher ist die gesuchte Schnittebene so zu legen, daß ihre erste Spur den Basiskreis des Zylinders berührt. Wegen der symmetrischen Anordnung der Hilfsmittel berührt diese Ebene auch den Deckkreis. Konstruktiv ist dann im einzelnen wie folgt vorzugehen:

Man bestimmt in bekannter Weise den ersten Spurpunkt G_1 der Geraden $g = g(PQ)$. Von G_1 können zwei Tangenten an den Basiskreis gelegt werden. Hier werde nur die

eine Tangente e_1 betrachtet. Die Geraden g und e_1 spannen offenbar jene Ebene ε auf, die den Zylinder Φ nach einer Ellipse k schneidet, deren Aufriß k'' die Forderungen der Aufgabenstellung erfüllt. Die Hauptachse von k liegt auf der Fallinie f der Schnittebene ε , welche durch M geht. Die Nebenachse von k liegt auf der ersten Spurparalle-

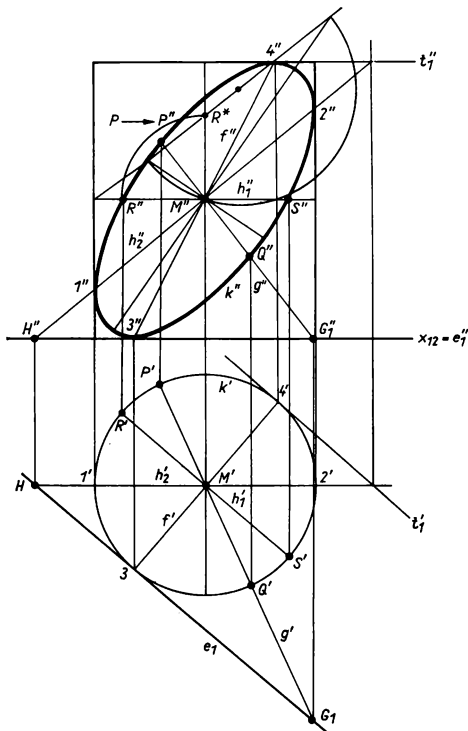


Abb. 115

len h_1 durch M . Grund- und Aufriß von f und h_1 sind leicht zu finden. Die Aufrisse von h_1 und f bilden ein Paar konjugierter Durchmesser von k'' . Durch Anwendung der Rytzschen Konstruktion auf dieses Durchmesserpaar gelangt man zu Haupt- und Nebenachse der gesuchten Ellipse k'' .

Die räumliche Interpretation der Aufgabenstellung gestattet weiterhin, die Berührungspunkte der vier Tangenten exakt zu finden. Die zweite Spurparallele h_2 von ε durch den Mittelpunkt M der Zylinderachse schneidet die beiden äußeren Mantellinien von Φ in den Punkten 1 und 2, deren Aufrisse 1'' und 2'' die Berührungspunkte der lotrechten Tangenten von k'' sind. Führt man weiter den Berührungspunkt 3 von e_1 mit dem Basiskreis in den Aufriß, so ergibt sich der Punkt 3'', in dem k'' die untere Tangente berührt. Durch Spiegelung am Ellipsenmittelpunkt findet man den Berührungspunkt 4'' der oberen Rechteckseite mit k'' .

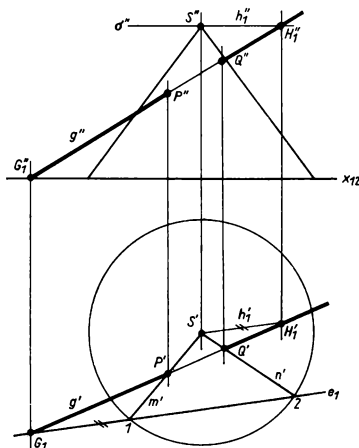


Abb. 116

Stellt man die Frage nach der Einzigkeit der Lösung, muß auf die Konstruktion der Tangenten von G_1 an den Basiskreis zurückgegangen werden. Geht man mit der gleichen Konstruktion von der zweiten Kreistangente an den Basiskreis aus, so gelangt man auf ein von k'' verschiedenes Ergebnis. Die gestellte Aufgabe führt daher auf zwei voneinander verschiedene Ellipsen als Lösung.

Aufgabe 5. Gegeben seien die Normalrisse eines auf π_1 lotrecht stehenden Drehkegels Φ und eine Gerade g . Gesucht ist der Schnitt von g mit Φ .

Lösung. Die Schnittkonstruktion erfolgt mittels einer Hilfsebene γ von geeigneter Lage. Denkt man sich durch die Kegelspitze S ein Ebenenbündel gelegt, so finden sich darunter Ebenen, die mit Φ außer S keinen reellen Punkt gemeinsam haben, Ebenen, die Φ längs einer Mantellinie berühren, und solche, die Φ in zwei Mantellinien schneiden. Zur Konstruktion der Durchstoßpunkte von g mit Φ wird die von der

Geraden g und der Kegelspitze S bestimmte Ebene γ als Hilfsebene eingesetzt. Zunächst interessiert die erste Spur von γ . Der erste Spurpunkt G_1 von g sowie die erste Hauptlinie h_1 von γ durch S sind in bekannter Weise zu finden. Man denkt sich durch S eine Ebene $\sigma \parallel \pi_1$, die g in H_1 schneidet. Dann ist $h_1 = h_1(SH_1)$ die erste Hauptlinie von γ durch S . Die Parallele zu h_1 durch G_1 ist die erste Spur e_1 von γ . Sie schnei-

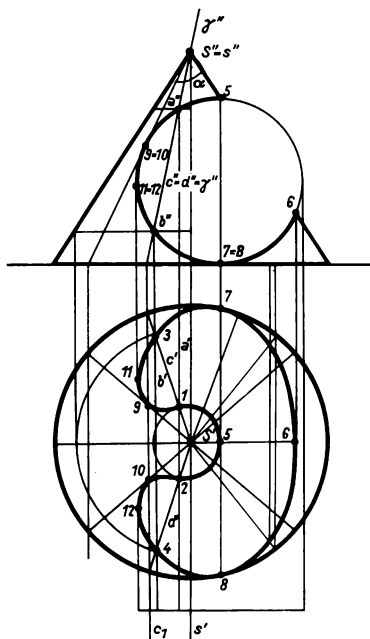


Abb. 117

det im vorliegenden Fall (Abb. 116) den Basiskreis des Kegels in den Punkten 1 und 2. Die Verbindungsgeraden $m = m(S1)$ und $n = n(S2)$ sind Erzeugende von Φ . Da sie in γ liegen, sind die Schnittpunkte P und Q dieser Erzeugenden mit g auch die Durchstoßpunkte von g mit dem Drehkegel (Abb. 116). Hat die Spur e_1 von γ mit dem Basiskreis von Φ keinen reellen Punkt gemeinsam, so schneidet auch g den Kegel nicht.

Diese Aufgabe diene als Vorbereitung auf Durchdringungsprobleme etwas schwierigerer Art.

Aufgabe 6. Gegeben sei ein auf π_1 lotrecht stehender Drehkegel, der von einem zweitprojizierenden Drehzylinder durchbohrt wird. Gesucht ist der Grundriß des nach dieser Ausreißung verbleibenden Restkörpers (vgl. Abb. 117).

Lösung. Die Schnittkonstruktion erfolgt mittels einer Schar von Ebenen. Diese ist derart auszuwählen, daß jede dieser Ebenen sowohl den Kegel als auch den Zylinder nach geradlinigen Erzeugenden schneidet. Offenbar ist von diesen Ebenen zu fordern, daß sie eine durch die Kegelspitze S gehende Gerade s parallel zur Zylinderachse enthalten. Bei den hier getroffenen Annahme sind die Trägergerade s und damit die Gesamtheit dieser Ebenen zweitprojizierend. Dadurch vereinfacht sich die Konstruktion wesentlich. Die in Abb. 117 als Beispiel herausgestellte Ebene γ schneidet den Zylinder nach den Erzeugenden a und b , den Kegel nach den Erzeugenden c und d . Damit liefert diese Hilfsebene die vier Punkte $1 = 1(ac)$, $2 = 2(ad)$, $3 = 3(bc)$, $4 = 4(bd)$ der durch die angegebene Ausbohrung erzeugten Randkurve. Für die Konstruktion sind die im Bereich des Winkels α liegenden Hilfsebenen von Interesse (Abb. 117).

Das hier angewandte Konstruktionsprinzip wird als *Pendelebenenverfahren* bezeichnet. Es ist bei noch allgemeineren Aufgabenstellungen rationell einsetzbar. Werden z. B. zwei Kegel allgemeiner Art zur Durchdringung gebracht, so legt man die Pendelachse der Hilfsebenen in die Verbindungsgerade der Kegelspitzen. Für die Hilfsebenen ist dann jener Schwenkbereich von Interesse, in dem jeder der beiden Kegel nach wenigstens einer Geraden geschnitten wird. Bei der hier vorliegenden Durchdringung zweier Flächen zweiter Ordnung entsteht eine Raumkurve vierter Ordnung.

3.9. Kegelschnitte als Schlagschatten einer Kugel bei Zentralbeleuchtung

Wie in 3.6. gezeigt wurde, ergibt sich bei Parallelbeleuchtung einer Kugel als Schlagschatten auf eine Ebene eine Ellipse. Die Ellipse kann daher auch als ebener Schnitt eines Drehzylinders angesehen werden. Im folgenden soll der *Schlagschatten* einer Kugel bei *Zentralbeleuchtung* untersucht werden, wobei allgemein vorauszusetzen ist, daß die punktförmige Lichtquelle außerhalb der Kugel liegt (Abb. 118).

Die Kugel κ_1 berühre die Bildebene π_1 in einem Punkt F_1 . Die Lichtquelle Z liege in der Frontalebene γ durch F_1 . Die erste Spur c_1 von γ ist auf Grund der getroffenen Anordnung von Lichtquelle und Kugel eine Symmetrielinie des in π_1 liegenden Schlagschattens von κ_1 .

Für die Art der bei Zentralbeleuchtung entstehenden Schlagschattengrenze sind — entsprechend dem Verhalten bezüglich der Ferngeraden — drei Fälle auseinanderzuhalten:

1. Die Schlagschattengrenze besitzt nur eigentliche Punkte.
2. Die Schlagschattengrenze besitzt genau einen uneigentlichen Punkt.
3. Die Schlagschattengrenze besitzt zwei uneigentliche Punkte.

Der erste Fall tritt ein, wenn der erste Tafelabstand von Z größer als der Durchmesser von κ_1 ist. Im zweiten Fall ist der erste Tafelabstand von Z gleich dem Durchmesser von κ_1 . Im dritten Fall ist der erste Tafelabstand von Z kleiner als der Kugeldurchmesser.

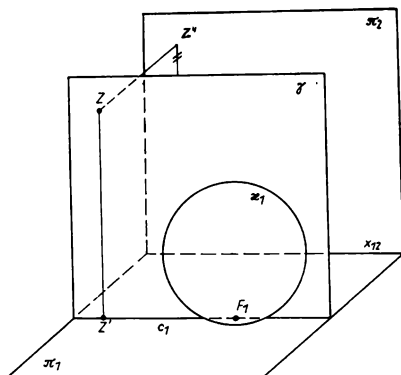


Abb. 118

Zu 1. Behauptung: Die Schlagschattengrenze stellt eine *Ellipse* dar.

Beweis. Die Gesamtheit der die Kugel κ_1 streifenden Lichtstrahlen bilden einen Drehkegel Φ mit der Geraden $g = g(ZM_1)$ (M_1 Mittelpunkt von κ_1) als Drehachse. In diesem Strahlenkegel Φ wird eine zweite Kugel κ_2 derart eingeführt, daß diese die Bildebene π_1 in einem Punkt F_2 von unten und die Fläche Φ in einem Kreis k_2 von innen berührt. Die Berührungskreise k_1 und k_2 der beiden Kugeln haben die Kegelachse g als gemeinsame Achse. Daher liegen die Berührungskreise in zweitprojizierenden Ebenen. Die beiden in γ liegenden Strahlen des *Streiflichtkegels* schneiden π_1 in den Punkten $A, B \in c_1$. Die Strecke AB der Länge $2a$ stellt den auf einer Symmetrielinie der Schlagschattengrenze liegenden Durchmesser, also eine Achse dieser Kurve dar (Abb. 119).

Ein beliebiger Strahl s des Streiflichtkegels Φ trifft k_1 in P_1 , k_2 in P_2 und durchstößt π_1 in P , einem Punkt der Schlagschattengrenze. Offenbar ist die Distanz

Vor Betrachtung des zweiten Falles wird die folgende Definition bereitgestellt: Die Gesamtheit aller Punkte der Ebene π , deren Abstände von einem festen Punkt F , dem Brennpunkt, und einer festen Geraden l , der Leitgeraden, gleich groß sind, ist eine *Parabel*. Bemerkung: Es gilt $\pi = \pi(Fl)$.

Zu 2. Behauptung: Die Schlagschattengrenze stellt eine *Parabel* dar.

Beweis. Die in diesem Fall zu betrachtende Kugel κ berühre die Bildtafel π_1 in F . Der von Z an κ gelegte Streiflichtkegel Φ berührt κ in einem Kreis k , dessen Ebene λ wieder zweitprojizierend ist. Daher gilt für die erste Spur l von λ : $l \perp x_{12}$. Der Knotenpunkt von λ sei L (Abb. 120).

Ein von Z ausgehender Lichtstrahl s trifft k in P_1 und schneidet π_1 in P . Zur Konstruktion von P ist vom Aufriß auszugehen. Man legt durch P eine zweitprojizierende Hilfsebene $\delta \parallel \lambda$. Sie schneidet den Berührungstrahlkegel Φ in einem Kreis w . Die Umlegung von δ in die Frontalebene γ ergibt im Aufriß den Kreis w_0'' , den Punkt $\bar{P}_0''$ sowie die Distanz $d = |P\gamma|$. Diese trägt man auf einem Ordner durch P'' von $\gamma' = c_1$ nach unten (oder oben) ab und erhält damit den in π_1 liegenden Punkt P . Die wahre Distanz $|PP_1|$ bietet sich wieder im Aufriß durch Drehen der Mantellinie s von Φ parallel zu π_2 . Wegen $|PP_1| = |P_0''P_{10}''|$ ist die gesuchte Länge dem Aufriß entnehmbar. Nach Konstruktion stellt das im Aufriß gelegene Viereck $LP''P_0''P_{10}''$ ein Parallelogramm dar. Somit gilt $|P_0''P_{10}''| = |LP''| = |Pl|$ und daher auch $|PP_1| = |Pl|$. Nach wiederholt angestellten Überlegungen besteht die Gleichung $|PF| = |PP_1|$. Für die Gesamtheit der in π_1 liegenden Punkte P der Eigenschaftengrenze von κ ist also die Beziehung $|PF| = |Pl|$ erfüllt. Gemäß der oben gegebenen Definition ist dies eine Parabel. Der dem höchsten Punkt des Berührungskreises k zugeordnete Schlagschatten ist ein uneigentlicher Punkt von π_1 , da der entsprechende Lichtstrahl parallel zur Bildebene liegt. Alle anderen Punkte von k liefern eigentliche Punkte als Schlagschatten. Die Normalprojektion des horizontalen Berührungstrahles auf π_1 ergibt die Achse der Parabel. Sie deckt sich mit der ersten Spur von γ .

Aus der Parabeldefinition folgt weiter, daß der Scheitelpunkt S den von Brennpunkt und Leitgeraden auf der Achse ausgeschnittenen Streckenabschnitt FR halbiert. Man bezeichnet die Länge $p = |FR|$ dieser Strecke auch als den *Parameter* der Parabel. Legt man weiter entsprechend Abb. 121 in die Parabelachse die x -Achse und in die Scheiteltangente die y -Achse eines kartesischen Achsenkreuzes, dann lautet die analytische Gleichung für die Parabel wegen $|PF| = |PG|$

$$y^2 = 2px$$

(Abb. 121).

Läßt man eine Parabel um ihre Achse rotieren, so erzeugt sie eine Fläche zweiten Grades, die man als *Drehparaboloid* bezeichnet. Der Punkt F hat für diese Fläche eine ausgezeichnete physikalische Bedeutung. Ist nämlich die Innenseite des Paraboloids als eine spiegelnde Fläche ausgebildet, so werden alle parallel zur Drehachse einfallenden Strahlen von der Fläche nach dem *Brennpunkt* F reflektiert. Bringt man umgekehrt in F eine punktförmige Lichtquelle an, so werden die von F ausgehenden Strahlen nach der Reflexion parallel zur Flächenachse verlaufen. Diese Besonderheit des Drehparaboloids — auch *Fokaleigenschaft* genannt — findet vielfältigste An-

wendungen z. B. in der Optik und Hochfrequenztechnik. Der Beweis dieser wichtigen Eigenschaft soll hier auf synthetischem Wege über die Tangentenkonstruktion geführt werden.

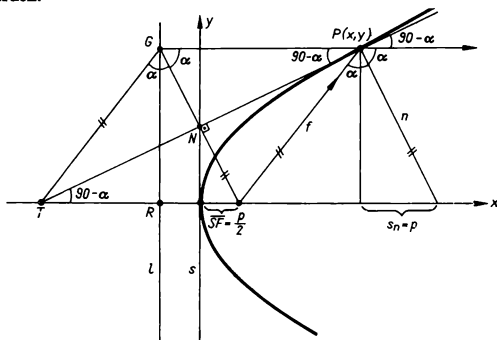


Abb. 121

Konstruktionsvorschrift für Parabeltangente

Voraussetzung. Eine Parabel liegt samt Achse und Brennpunkt gezeichnet vor. Auf der Parabel sei ein Punkt P beliebig gegeben.

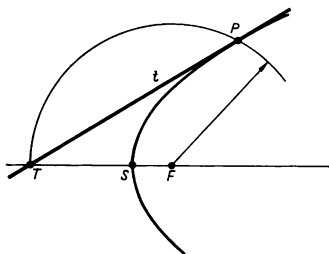


Abb. 122

Behauptung. Trägt man die Strecke PF von F aus auf der Achse über den Scheitel S hinaus ab, so erhält man einen Punkt T . Die Verbindungsgerade $t = t(PT)$ ist die dem Punkt P zugeordnete Parabeltangente. Die Punkte P , F , T bilden ein gleichschenkliges Dreieck mit der Strecke PT als Basis (Abb. 122).

Wegen des Widerspruchs von (3) und (4) ist die obige Annahme falsch und die in Form einer Behauptung gegebene Konstruktionsvorschrift für die Parabeltangente wahr.

Mit der Parabeltangente t steht auch die Parabelnormale n durch P zur Verfügung. Sie liegt nach Konstruktion parallel zu $g = g(FG)$. Trägt man den Einfallswinkel $\alpha = \angle(fn)$ des Strahles $f = f(FP)$ von n aus nochmals ab, so ergibt sich als Schenkel ein zur Parabelachse paralleler Strahl. Damit ist auch die Fokaleigenschaft der Parabel in der Ebene und des Drehparaboloids im Raum bewiesen (vgl. Abb. 121).

Mit der Tangentenkonstruktion der Parabel läßt sich ferner die Erzeugung einer Parabel als Hüllgebilde einer einparametrischen Geradenschar leicht ablesen. Führt man

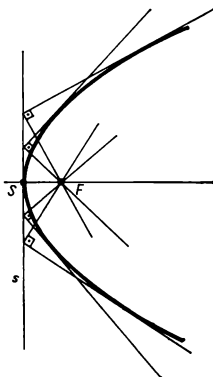


Abb. 124

ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Scheitel des rechten Winkels derart auf einer Geraden s , daß die eine Kathete längs eines festen Punktes $F \notin s$ gleitet, so umhüllt die andere Kathete des Dreiecks eine Parabel, deren Brennpunkt mit F und deren Scheiteltangente mit s koizidieren (Abb. 124).

Aufgaben

1. Es ist zu zeigen: Zieht man von einem Punkt G der Leitgeraden l die Tangenten an die Parabel, so geht die Verbindungsgerade der Berührungspunkte dieser Tangenten durch den Brennpunkt F der Parabel.

2. Es ist zu zeigen: Die Gesamtheit der Mittelpunkte jener Kreise, welche durch einen Punkt F gehen und eine nicht durch F gehende Gerade g berühren, bildet eine Parabel.

3. An eine durch ihren Brennpunkt F und Scheitelpunkt S vorgegebene Parabel sind die Tangenten aus einem Punkt Q außerhalb der Parabel mit Zirkel und Lineal exakt zu konstruieren (Abb. 125).

Lösung. Man zeichne einen Kreis mit der Strecke FQ als Durchmesser. Dieser schneidet die Scheiteltangente in den Punkten N_1 und N_2 . Die Verbindungsgeraden $t_1 = t_1(QN_1)$ und $t_2 = t_2(QN_2)$ sind die gesuchten Tangenten. Sie schneiden die Parabelachse in den Punkten T_1 bzw. T_2 . Durch Spiegelung von T_i an N_i auf t_i ergeben sich die Berührungspunkte P_i ($i = 1, 2$).

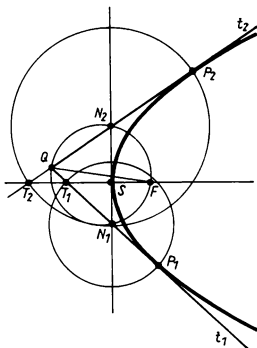


Abb. 125

Auch für die Behandlung des dritten Falles ist zunächst eine Definition bereitzustellen: Die Gesamtheit aller Punkte einer Ebene π , für die die Abstands-differenz von zwei festen Punkten $F_1, F_2 \in \pi$ einen konstanten Betrag hat, ist eine *Hyperbel*.

Zu 3. Behauptung. Die Schlagschattengrenze stellt eine *Hyperbel* dar.

Beweis. Der Beweis soll hier nur für den metrisch leicht überschaubaren Fall geführt werden, daß der erste Tafelabstand von Z gleich dem Radius der Kugel κ_1 ist. Die Achse $g = g(ZM_1)$ des Streiflichtkegels liegt nach dieser Annahme parallel zur Rißachse x_{12} . Bevor die Hyperbel als ebener Schnitt eines Drehkegels erklärt werden soll, ist noch der Begriff der Kegelfläche vollständiger zu fassen.

Es seien eine ebene Kurve c und ein nicht in der Kurvenebene liegender Punkt Z gegeben. Dann bildet die Gesamtheit jener Geraden $\{e\}$, welche durch Z gehen und c schneiden, eine Kegelfläche. Die Ordnung der ebenen Kurve c überträgt sich auf die Ordnung der Kegelfläche. Ist c ein Kreis, spricht man von einem Kreiskegel. Liegt Z auf der Kreiseachse senkrecht zur Kreisebene, ergibt sich ein Drehkegel. Für viele Fälle genügt es, nur den auf einer Seite von Z liegenden Teil der Kegelfläche

in die Betrachtungen einzubeziehen. Für die nun folgenden Überlegungen ist jedoch die gesamte zu beiden Seiten von Z liegende Kegelfläche von Interesse.

Um die Vollständigkeit der hier durchzuführenden Betrachtungen zu sichern, wird eine zweite Kugel κ_2 spiegelbildlich zu κ_1 bezüglich einer doppeltprojizierenden Ebene β durch Z angebracht. Die Kugeln κ_i berühren die Bildtafel π_1 in den Punkten

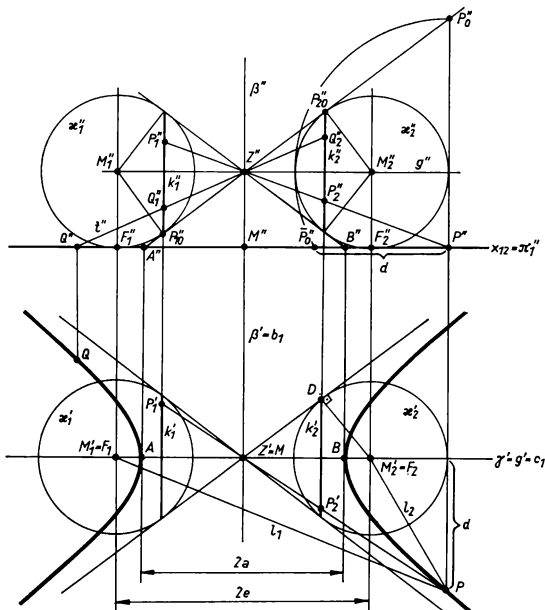


Abb. 126

F_i und den Streiflichtkegel in den Berührungskreisen k_i ($i = 1, 2$). Die Ebenen der Kreise k_i sind erst- und zweitprojizierend. Die Spur c_1 der frontalen Ebene γ und die Spur b_1 der Ebene β sind Symmetrieachsen der in diesem Fall entstehenden Schlag-schatten grenze (Abb. 126).

Die in γ liegenden Strahlen des Streiflichtkegels schneiden π_1 in A und B , den Scheitelpunkten der gesuchten Kurve. Der Halbierungspunkt M der Strecke AB ist Mittelpunkt dieser Kurve. Die beiden horizontalen Strahlen durch Z berühren die Kugeln κ_i in den Äquatorkreisen. Die Schatten dieser Berührungspunkte sind un-

eigentliche Punkte der Bildtafel π_1 . Die Schlagschattengrenze hat somit genau zwei uneigentliche Punkte. Die Normalprojektionen der beiden horizontalen Berührungstrahlen auf π_1 berühren die Schlagschattengrenze in ihren Fernpunkten. Man bezeichnet sie als *Asymptoten*. Sie stellen eine wichtige Zeichenhilfe bei Konstruktion der Schlagschattengrenze dar.

Eine beliebige Erzeugende s des Streiflichtkegels schneidet die Berührungskreise k_1 in P_1 , k_2 in P_2 und die Bildebene π_1 in P . Die wahre Länge der Strecke P_1P_2 , die unabhängig von der Wahl des Berührungstrahles s ist, kann nach einer Drehung um g parallel zur Grundrißtafel dem zweiten Riß entnommen werden. Man erhält $|P_1P_2| = |P''_{10}P''_{20}|$. Aus planimetrischen Überlegungen zur Dreiecksgeometrie folgt weiter

$$|P''_{10}P''_{20}| = |AB| = 2a.$$

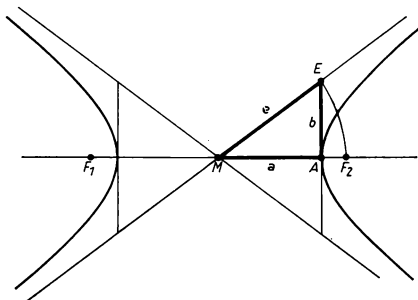


Abb. 127

Ferner gilt nach 3.6.

$$|PP_1| = |PF_1|, \quad (1)$$

$$|PP_2| = |PF_2| \quad (2)$$

und $|PP_1| - |PP_2| = |P_1P_2|$. Durch Anwendung von (1) und (2) ergibt sich

$$|PF_1| - |PF_2| = 2a.$$

In gleicher Weise kann ein Strahl t gelegt werden, der k_1 in Q_1 , k_2 in Q_2 und π_1 in Q schneidet. Wie oben läßt sich zeigen, daß $|QF_2| - |QF_1| = 2a$ gilt.

Um nun beide Äste der Kurve durch eine Gleichung zu erfassen, setzt man

$$||PF_1| - |PF_2|| = 2a.$$

Damit ist gezeigt, daß die Schlagschattengrenze der Kugeln κ_1 und κ_2 mit einem gemeinsamen Streiflichtkegel eine Hyperbel bildet. Man nennt die Strecken AM und

MB mit $|AM| = |MB| = a$ halbe Hauptachsen und die Größe $|MF_1| = |MF_2| = e$ lineare Exzentrizität. Die in einem Scheitel A auf der Hauptachse errichtete Senkrechte schneidet eine Asymptote in dem Punkt E . Die Länge $b = |AE|$ entspricht der Länge der halben Nebenachse. Für die Hyperbel besteht zwischen den Längen der Halbachsen und der numerischen Exzentrizität die Beziehung

$$a^2 + b^2 = e^2$$

(vgl. Abb. 127).

Zusammenfassung

Die Untersuchung der Schlagschattengrenze einer Kugel bei Zentralbeleuchtung führte auf die Kurven Ellipse, Parabel und Hyperbel. Da das Streiflicht an eine Kugel bei Zentralbeleuchtung einen Drehkegel darstellt, lassen sich die Schlagschatten-

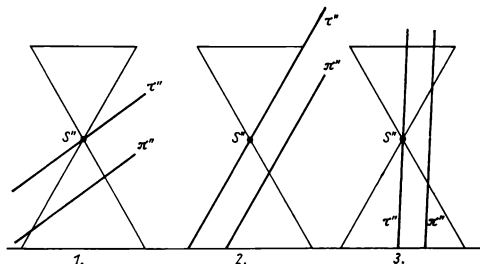


Abb. 128

grenzen auch als ebene Schnitte von Drehkegeln — also als Kegelschnitte — interpretieren. Entscheidend für die Art des entstehenden Kegelschnittes ist die Lage der schneidenden Ebene π bezüglich des Kegels Φ . Für die zusammenfassenden Betrachtungen werde ein Drehkegel lotrecht auf π_1 gestellt und mit einer zweitprojizierenden Ebene τ (Testebene) durch die Kegelspitze S in verschiedener Weise geschnitten.

Im ersten Fall soll τ mit Φ außer S keinen reellen Punkt gemeinsam haben. Dann schneidet jede zu τ parallele und von τ verschiedene Ebene π die Kegelfläche Φ in einer Ellipse.

Im zweiten Fall soll τ die Kegelfläche Φ in einer Erzeugenden berühren. Dann schneidet jede zu τ parallele und von τ verschiedene Ebene π die Kegelfläche Φ nach einer Parabel.

Im dritten Fall soll τ die Kegelfläche Φ in zwei Erzeugenden schneiden. Dann schneidet jede zu τ parallele und von τ verschiedene Ebene π die Kegelfläche Φ nach einer Hyperbel.

Im ersten und dritten Fall gilt der folgende Satz (Satz von DANDELIN): Führt man zu einem durch die Ebene π geschnittenen Drehkegel Φ noch jene zwei Kugeln ein, die den Kegel in je einem Kreis und die Ebene π in je einem Punkt F_1 und F_2 berühren, so sind diese Berührungspunkte F_1 und $F_2 \in \pi$ die Brennpunkte des Kegelschnittes $k = k(\pi\Phi)$. Beim parabolischen Schnitt des Drehkegels läßt sich nur eine Kugel mit diesen Eigenschaften einführen und daher auch nur ein Brennpunkt F angeben (Abb. 128).

Abschließend sei vermerkt, daß sich der in 3.6., S. 103, für die Ellipse eingeführte Begriff der *numerischen Exzentrizität* ε auch auf die Parabel und Hyperbel sinngemäß übertragen läßt. Für die Parabel gilt $\varepsilon = 1$, für die Hyperbel $\varepsilon > 1$. In entsprechender Weise sind die auf S. 104 gegebene Definition und Polarkoordinatendarstellung für Parabel und Hyperbel mit $\varepsilon = 1$ bzw. $\varepsilon > 1$ anwendbar. Die zusammenfassende Kegelschnittdefinition mittels des Begriffs der numerischen Exzentrizität geht auf PAPPUS VON ALEXANDRIA (um 295) zurück.

4. Weitere Darstellungsverfahren

4.1. Eintafelverfahren. Kotierte Projektion

Die *kotierte Projektion* ist eine Normalprojektion auf eine im allgemeinen horizontal angenommene Bildebene. Diese Ebene teilt den Raum in einen über ihr liegenden „oberen“ und einen unter ihr liegenden „unteren“ Halbraum ein. Ferner ist die

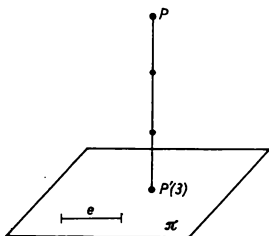


Abb. 129

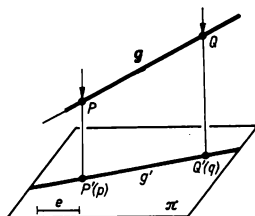


Abb. 130

Einheitsstrecke e oder der Maßstab bildlich vorgegeben. Die Abbildung eines Punktes P auf die Bildebene π ist in folgender Weise erklärt:

Der zu π normale Projektionsstrahl durch P schneidet die Bildebene π in P' . Der Betrag der dem Bildpunkt P' beigefügten reellen Zahl, die *Kote*, gibt den auf dem Projektionsstrahl in der vorgelegten Längeneinheit gemessenen Abstand des Punktes P von der Bild- und Bezugsebene an. Die Zahl ist positiv oder negativ, je nachdem, ob P dem oberen oder dem unteren Halbraum angehört (Abb. 129). Damit liefert die kottierte Projektion eine umkehrbar eindeutige Zuordnungsvorschrift von Original und kotiertem Bild. Eine Gerade g ist durch zwei ihrer Punkte P und Q im Raum eindeutig festgelegt. Die kottierte Projektion von g ergibt sich demnach als Verbindungsgerade g' der kotierten Bildpunkte $P'(p)$ und $Q'(q)$. Die Bildpunkte einer Geraden g mit ganzzahligen Koten bezeichnet man als *Graduierungspunkte* und die so dargestellte Gerade als *graduierete Gerade* oder auch *Gefällemaßstab* (Abb. 130).

Unter dem *Intervall* i einer Geraden versteht man den Abstand der Bilder zweier Punkte, deren Koten sich um eine Einheit unterscheiden. Der Neigungswinkel σ einer Geraden g gegen die Ebene π wird in der Ebene $\alpha \perp \pi$ durch g gemessen. Ist P' der Normalriß eines Punktes $P \in g$ und G der Spurpunkt von g , so gilt für den Neigungswinkel von g

$$\sigma = |\sphericalangle PGP'|.$$

Der Neigungswinkel σ und das Intervall i sind durch die Gleichung $i = \cot \sigma$ miteinander verknüpft. Der Winkel σ läßt sich konstruktiv durch eine Umlegung von

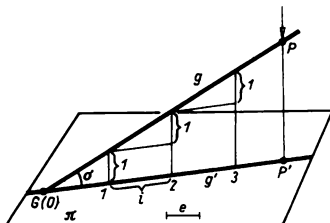


Abb. 131

g um g' nach π gewinnen. Der Spurpunkt G einer Geraden g kann gleichfalls mit einer Umlegung von g ermittelt werden. Durch Anwendung des Strahlensatzes entsprechend der Ausführung in Abb. 133 gelangt man unter geringerem Konstruktionsaufwand zum gleichen Ziel (Abb. 131, 132, 133).

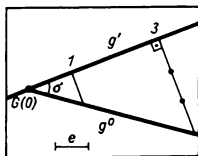


Abb. 132

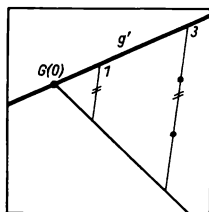
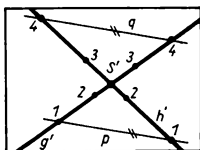


Abb. 133

An der kottierten Projektion zweier Geraden g und h läßt sich auch entscheiden, ob diese Geraden in einer Ebene liegen oder ob sie *windschief* sind. Verbindet man nämlich Punktpaare gleicher Koten von g' und h' , so können diese Verbindungsgeraden p, q sich in der Zeichenebene schneiden oder parallel sein. Im Fall der Parallelität der Verbindungsgeraden liegen g und h in einer Ebene. Daher schneiden sich

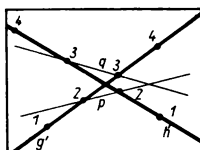
g und h , oder sie sind selbst parallel. Schneiden sich hingegen die Verbindungsgeraden von Punkten gleicher Kote in der Zeichenebene, so sind g und h windschief (Abb. 134 a, b).

Mit Hilfe der kotierten Projektion lassen sich die verschiedenartigsten Flächen im Raum anschaulich erfassen, unabhängig davon, ob für diese Flächen ein mathematisches Bildungsgesetz vorliegt oder nicht. Hierzu schneidet man diese Fläche mit einer Schar gleichabständiger Ebenen von vorzugsweise ganzzahligen Koten, den Schichtenebenen, die parallel zur Bezugsebene liegen. Die Normalrisse der hierbei entstehenden ebenen Schnittkurven, die *Schichtenlinien*, bilden in ihrer Gesamtheit den *Schichtenplan* oder die Karte der allgemeinen Fläche. Zur weiteren Unterstützung der Anschauung wird an jede Schichtenlinie die Kote der zugehörigen horizontalen Schichtenebene vermerkt. Die *Orthogonaltrajektorien* der Schichtenlinien bilden die *Falllinien* der Fläche. Sie geben zu jedem Flächenpunkt die Richtung des stärksten Gefälles.



a)

Abb. 134



b)

Für den Fall einer geneigten Ebene ε ist der Schichtenplan eine Schar zueinander paralleler, äquidistanter Geraden. Jene Schichtenlinie mit der Kote Null ist die *Spur* dieser Ebene. Ihre Richtung wird als *Streichrichtung* der Ebene bezeichnet. Senkrecht dazu liegen die Falllinien. Zur Beschreibung der Lage einer Ebene ε genügt daher die Vorgabe der Projektion einer graduierten Falllinie f , die auch als Gefällemaßstab der Ebene bezeichnet wird. Der Neigungswinkel σ einer Ebene ε gegen die Ebene π ist gleich dem Neigungswinkel der Falllinie f von ε gegen π . Der Neigungswinkel von ε ist also mittels Umlegung von f um f' nach π zu konstruieren (Abb. 135).

Zwei durch ihre Gefällemaßstäbe vorgelegte Ebenen δ und ε werden miteinander zum Schnitt gebracht, indem man die zu den Ebenen gehörigen Schichtenlinien zeichnet und die Schnittpunkte von Schichtenlinien gleicher Kote miteinander verbindet. Sie liegen auf einer Geraden, der Normalprojektion von $s = s(\delta\varepsilon)$. Für Ebenen mit zueinander parallelen Streichrichtungen und unterschiedlichen Neigungswinkeln liegt die Schnittgerade parallel zur Streichrichtung. Diese Gerade kann durch Anwendung des Strahlensatzes im Eintafelverfahren gewonnen werden (Abb. 136).

Die hier angedeuteten Lösungsprinzipien finden bei der Planung von Erdarbeiten, z. B. beim Anlegen von Dämmen und Geländeeinschnitten Anwendung und werden als *Böschungsaufgaben* bezeichnet. Die bei Erdaufschüttungen und Einschnitten anzulegenden Ausgleichsebenen sind an erfahrungsmäßig festgelegte *Böschungswinkel*

gebunden. Weniger aktuell sind die nach dieser Methode lösbaren *Dachausmittlungen*. Von dem Grundriß der *Trauflinie* und vorbestimmten Dachneigungen ausgehend werden die Schnittkanten (Firste, Kehlen, Verfallungen u. a. m.) im Eintafelverfahren konstruktiv ermittelt.

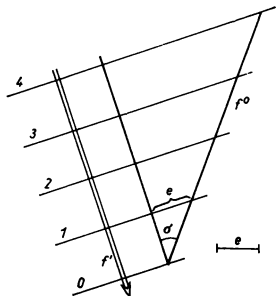


Abb. 135

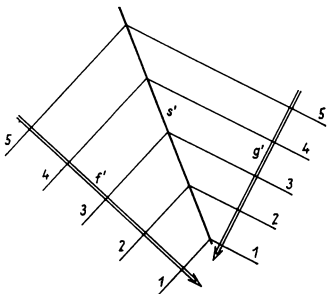


Abb. 136

Um den Schnitt einer Geraden g mit einer Ebene ε zu konstruieren, wird eine Hilfsebene γ durch g eingeführt. Ihre Beschreibung erfolgt mittels einer Schar paralleler Geraden beliebiger Richtung durch die Graduierungspunkte von g . Der Normalriß der Schnittgeraden $s = s(\gamma\varepsilon)$ wird wie oben konstruiert. Man findet den Punkt $D' = D'(s'g')$, der nach elementaren Überlegungen der Grundriß des Durchstoßpunktes D der Geraden g durch ε ist (Abb. 137).

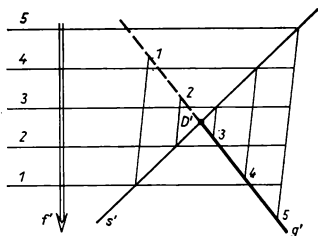


Abb. 137

Der Schichtenplan eines auf π normal stehenden Drehkegels stellt eine Schar konzentrischer Kreise dar. Einen Zugang hierfür liefert der Normalriß einer graduerten Erzeugenden der Kegelfläche. Die Erzeugenden sind Falllinien dieser Fläche. Die Gesamtheit ihrer Bilder ergibt ein Geradenbüschel mit dem Normalriß S' der

Kegelspitze als Träger. Die Orthogonaltrajektorien des Geradenbüschels durch die Graduierungspunkte einer Erzeugenden führen auf die Schar konzentrischer Kreise als Schichtenplan des Kegels (Abb. 138).

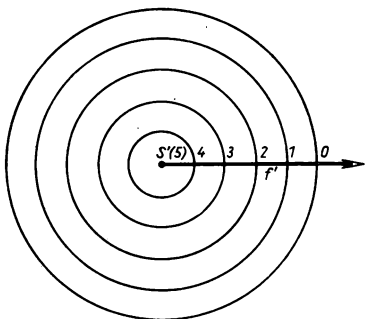


Abb. 138

Auch der Schnitt einer Geraden g mit einem Kegel ist in der kotierten Projektion leicht lösbar. Man legt hierzu eine Hilfsebene γ durch S und g . Die Richtung der Spur c von γ liefert die Verbindungsgerade von S mit dem Punkt $P \in g$, dessen Kote mit

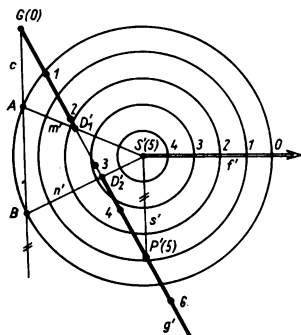


Abb. 139

der von S übereinstimmt. Die Parallele zu $s' = s'(P'S')$ durch den Spurpunkt G von g führt auf die Spur c von γ . Schneidet c den Basiskreis des Kegels in den Punkten A und B , so sind die Schnittpunkte von g' mit $m' = m'(S'A)$ und $n' = n'(S'B)$ die Normalrisse der Durchstoßpunkte von g mit dem Kegel (Abb. 139).

Drehkegelflächen spielen als Konstruktionselement bei Böschungsproblemen eine grundlegende Rolle. Sie entstehen z. B. als Aufschüttungsgebilde bei Förderanlagen und sind auch an Abraumhalden als Teilflächen erkennbar. Eine *Böschungsfäche* ist dadurch ausgezeichnet, daß ihre Falllinien einen konstanten Neigungswinkel besitzen. Ebenen und Drehkegel sind spezielle Böschungsfächen. Die Böschungsfäche von vorgegebenem Neigungswinkel σ zu einer Raumkurve ist erzeugbar als Hüllgebilde von *Böschungskegeln* mit dem Neigungswinkel σ zu jedem Punkt der Raum-

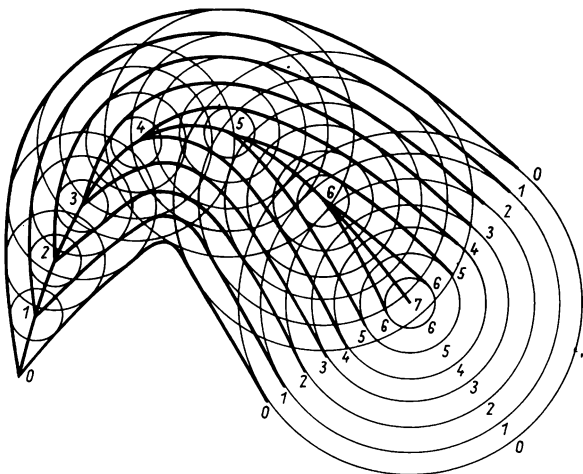


Abb. 140

kurve. Die Raumkurve selbst ist dann die *Grattlinie* dieser Böschungsfäche. Bei Dammbauten ist jede Seite des Dammes in dieser Weise gegen das vorgelegte Gelände abzuböschern (Abb. 140).

Als weiteres Beispiel soll der Schichtenplan einer mit der Schnittfläche auf π liegenden Halbkugel gezeichnet werden. Da die Umlegung eines Meridians nach der Bildebene in den Basiskreis der Halbkugel fällt, kann man die Radien der Schichtenkreise gemäß Abb. 141 wenig aufwendig gewinnen. Die Dichte der Schichtenlinien (Größe des Intervalls i) vermittelt in Verbindung mit dem angegebenen Maßstab eine anschauliche Vorstellung vom Anstieg der Fläche in jedem Flächenpunkt (Abb. 141).

Flächen, die sich nur durch Ausmessung diskreter Punkte erschließen lassen, werden als *topographische Flächen* bezeichnet. Zum Beispiel stellt die Karte eines Geländes der Erdoberfläche eine kotierte Eintafelprojektion einer *topographischen*

Fläche dar. Auf solchen Flächen gibt es gewisse ausgezeichnete Punkte und Linien, die an einem Beispiel erläutert werden sollen.

Die bezüglich eines kartesischen Achsenkreuzes durch die Gleichung

$$z = 10[x(x - 1)^2 - y^2]$$

beschriebene Fläche hat für $x = 1/3$ und $y = 0$ ein relatives Maximum, das auch als *Gipfelpunkt* bezeichnet wird. Die Schichtenlinie der Fläche in Höhe dieses Maximums hat den Gipfelpunkt als *isolierten Punkt*. An der Stelle $x = 1$, $y = 0$ liegt ein *Sattelpunkt* der Fläche vor. Die Schichtenlinie mit der Kote $z = 0$ (Kote des Sattelpunktes)

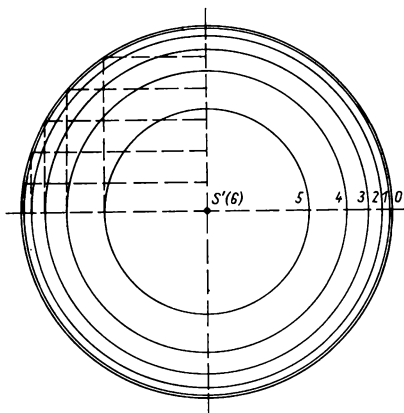


Abb. 141

hat den Sattelpunkt als *Knotenpunkt*. Die Ebene mit der Gleichung $z = 0$ berührt die Fläche im Sattelpunkt. Es liegt eine durchsetzende Berührung von Fläche und Ebene in diesem Punkt vor. Flächenpunkte nach Art des Gipfelpunktes sind *elliptische Punkte*. Sattelpunkte gehören zu den *hyperbolischen Punkten* der Fläche. Die Ebene $x = 2/3$ trennt die hyperbolischen von den elliptischen Flächenpunkten. Die in der Ebene $y = 0$ liegende Flächenkurve verbindet den Gipfelpunkt mit dem Sattelpunkt. Sie ist die einzige Gratlinie der Fläche. Im Gelände stellt eine solche Linie eine *Wasserscheide* dar. Die Falllinien laufen mit abnehmender Kote von der Wasserscheide weg und konvergieren gegen *Talllinien*. Talllinien sind Falllinien, die einen Sattelpunkt mit einem *Muldenpunkt* (Gegenstück zum Gipfelpunkt) verbinden. In diesem Beispiel schneidet die Ebene $x = 1$ aus der Fläche die Tallinie. In einem Gelände sind die Tallinien prädestiniert als Wegweiser von Flußläufen (Abb. 142).

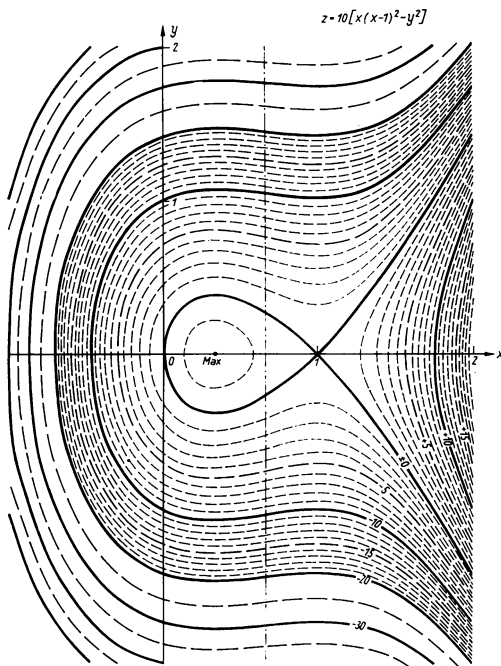


Abb. 142

4.2. Allgemeine oder schiefe Axonometrie

Unter dem axonometrischen Bild eines räumlichen Objektes versteht man eine Parallelprojektion desselben auf eine Bildebene π . Als Besonderheit hierbei wird das Objekt in Verbindung mit einem *orthonormierten räumlichen Dreibein* auf die Bildtafel projiziert. Bei sinnvoller Verknüpfung des Achsendreibeins mit dem darzustellenden Gegenstand können dem Bild — unter Einhaltung bestimmter Normierungsvor-

schriften — Maße des Gegenstandes mit graphischen oder rechnerischen Hilfsmitteln entnommen werden. Axonometrische Bilder tragen dem Verlangen nach Anschaulichkeit Rechnung und gewähren zugleich die Möglichkeit der Abnahme oder des Eintragens von Maßen in das Bild. Bei senkrechter Einfallrichtung der Projektionsstrahlen auf die Bildebene spricht man von orthogonaler oder normaler Axonometrie. Fallen die Projektionsstrahlen weder senkrecht noch parallel zur Bildebene auf das Objekt, so spricht man von allgemeiner oder schiefer Axonometrie.

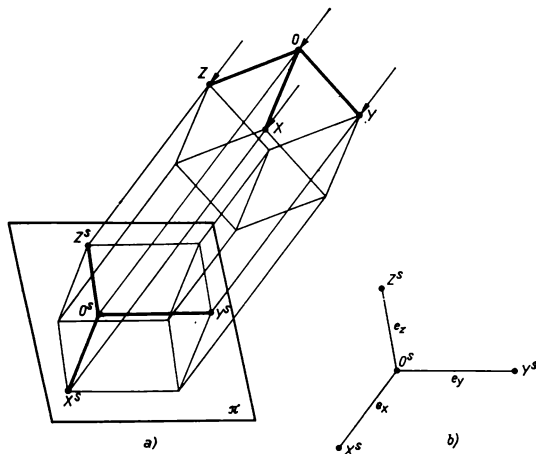


Abb. 143

Eine theoretische Grundlegung der Axonometrie liefert der Lehrsatz von POHLKE. Zur Formulierung des Satzes sind einige Verabredungen bezüglich der Bezeichnungen zu treffen. Stehen drei von einem Raumpunkt O nach den Punkten X, Y, Z gehende Verbindungsstrecken paarweise aufeinander senkrecht und sind sie außerdem gleich lang, so spricht man von einem orthonormierten Dreiein $\{O, X, Y, Z\}$ oder kurz von einer Würfecke. Der Parallelriß einer Würfecke ist ein gewisses ebenes Dreiein $\{O^s; X^s, Y^s, Z^s\}$. Es besteht aus drei von dem Punkt O^s ausgehenden Strecken $O^sX^s = e_x$, $O^sY^s = e_y$ und $O^sZ^s = e_z$, die nicht sämtlich in einer Geraden liegen. Man nennt das durch Parallelprojektion einer Würfecke entstehende Dreiein ein *Pohlkesches Dreiein* (Abb. 143 a, b).

Auf die Frage, ob im Zeichenfeld bei Vorgabe eines Pohlkeschen Dreieins $\{O^s; X^s, Y^s, Z^s\}$ gewisse Beschränkungen zu beachten sind, gibt der Satz von POHLKE die Antwort. Er lautet:

Jedes ebene Dreiein $\{O^s; X^s, Y^s, Z^s\}$ kann, wenn die vier Punkte O^s, X^s, Y^s, Z^s nicht alle auf einer Geraden liegen, als Parallelriß eines orthonormierten räumlichen Dreieins $\{O; X, Y, Z\}$ aufgefaßt werden.

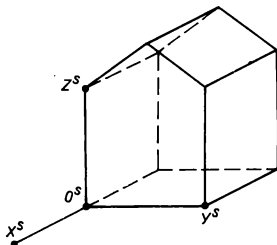


Abb. 144

Mit Kenntnis dieses Satzes lassen sich einige bereits in früheren Abschnitten verwendete Abbildungsverfahren systematisch erfassen. Beim *Schrägrißverfahren* gilt $|e_y| = |e_z| = 1$ und $y^s \perp z^s$, während über den Maßstab e_x und die Richtung der

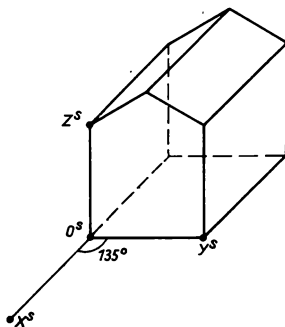


Abb. 145

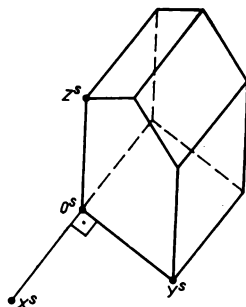


Abb. 146

x^s -Achse beliebig verfügt werden kann. Es handelt sich hierbei um eine dimetrische schiefe Axonometrie, die auch unter der Bezeichnung *frontale Axonometrie* geführt wird (Abb. 144).

Die *Kavalierperspektive* ist ein Sonderfall des Schrägrißverfahrens. Für diese gilt

$$|e_x| = |e_y| = |e_z| = 1, y^s \perp z^s \text{ und } \angle(x^s, y^s) = 135^\circ$$

(Abb. 145).

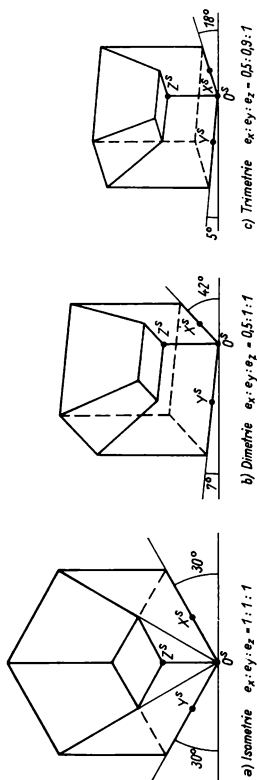


Abb. 147

Nach den Vorschriften der *Militär-* oder *Vogelperspektive* angelegte Bilder sind durch $|e_x| = |e_y| = |e_z| = 1$, $x^s \perp y^s$ und z^s senkrecht (im physikalischen Sinne) gekennzeichnet. Diese Abbildungsart findet unter anderem zur anschaulichen Belegung kartenmäßig gegebener Gebäudegrundrisse Verwendung. Militär- und Kavallerieperspektive fallen unter den gemeinsamen Oberbegriff „isometrische Axonometrie“. Die irreführende Bezeichnung der Abbildungen als Perspektive ist historisch zu verstehen und zu werten (Abb. 146).

In der Praxis bedient man sich vielfach der *isometrischen*, *dimetrischen* oder *trimetrischen* Darstellung unter Einhaltung der hier an einem Würfelausschnitt demonstrierten Normierungsvorschriften (vgl. Abb. 147 a—c).

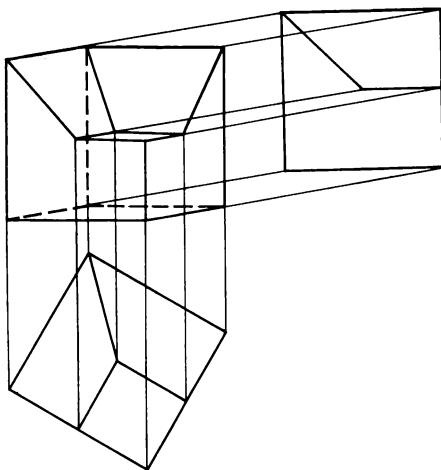


Abb. 148

Liegt von einem räumlichen Objekt eine Darstellung in zugeordneten Normalrissen vor, so kann ein axonometrisches Bild konstruktiv wenig aufwendig nach einem von L. ECKHART angegebenen *Einschneideverfahren* gewonnen werden. Man trennt die beiden Bilder und legt sie beliebig in die Zeichenebene. Zu jedem Riß gibt man eine Einschneiderichtung willkürlich vor. Die Bildpunkte des axonometrischen Bildes liegen in den Schnittpunkten zugeordneter Einschneiderstrahlen (Abb. 148). Das Verfahren erfordert etwas Übung in der Anordnung der Risse und Auswahl der Einschneiderichtung, um ein nicht übermäßig verzerrtes, anschauliches axonometrisches Bild zu erhalten. Man vergleiche hierbei auch das am Ende von 2.7. beschriebene Verfahren zur Herstellung eines axonometrischen Bildes aus Grund- und Aufriß.

4.3. Normale Axonometrie

Normalaxonometrische Bilder entstehen, wie bereits in 4.2. gesagt, wenn die Projektionsstrahlen die Bildebene senkrecht treffen. Bei Herstellung solcher Bilder ist zu fordern, daß keine der drei Bezugsachsen parallel zur Bildebene liegt. Damit sind projizierende Lagen für die Koordinatenebenen und Achsen ausgeschlossen. Dies ist von Vorteil für die Anschaulichkeit der entstehenden Bilder. Unter dieser Voraussetzung treffen alle drei Achsen des rechtwinkligen räumlichen Koordinatensystems $\{O; x, y, z\}$ die Bildebene π in eigentlichen Punkten, den Spurpunkten A, B, C . Diese Spurpunkte bilden in der Bildebene das *Spurendreieck* mit den Seiten a, b, c . Wie sich aus räumlichen Überlegungen leicht folgern läßt, ist das Dreieck $\triangle ABC$ stets

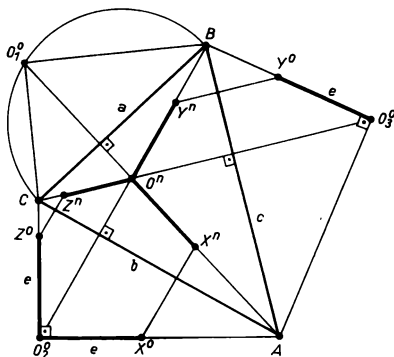


Abb. 149

spitzwinklig. Der Schnittpunkt H der drei Höhen h_a, h_b, h_c liegt daher im Inneren des Dreiecks. Er deckt sich mit dem Normalriß O^n des Koordinatenursprungs O (Abb. 149). Da nach Voraussetzung keine der drei Koordinatenachsen parallel zur Bildebene liegt, werden sämtliche auf den Achsen abgetragenen Strecken in dem normalaxonometrischen Bild verkürzt wiedergegeben. Die drei *Verkürzungsfaktoren* λ_i ($i = 1, 2, 3$) ergeben sich zu

$$\lambda_1 = \frac{|O^n A|}{|OA|}, \quad \lambda_2 = \frac{|O^n B|}{|OB|}, \quad \lambda_3 = \frac{|O^n C|}{|OC|}.$$

Konstruktiv sind die Verkürzungsfaktoren — vom Spurendreieck ausgehend — leicht zu ermitteln. Hierzu sind die drei aus je zwei Achsenabschnitten und einer Spur gebildeten rechtwinkligen Dreiecke um die entsprechende Spur in die Bildebene zu

klappen. Dabei ist zu beachten, daß sich der Höhenschnittpunkt mit dem Normalriß O'' von O deckt. In den Umlegungen trägt man, vom Scheitel des rechten Winkels ausgehend, auf den Katheten die Einheitsstrecken ab. Die so gefundenen Punkte X'' , Y'' , Z'' führt man in den Normalriß zurück und erhält die Bildpunkte X'' , Y'' , Z'' . Mit Hilfe der Bilder der auf den Achsen liegenden Einheitsstrecken läßt sich z. B. das normalaxonometrische Bild eines Einheitswürfels zeichnen, der mit einer Ecke in das Koordinatendreiein eingepaßt ist. Dabei ist auszunutzen, daß die Parallelität von Kanten bei dieser Abbildung erhalten bleibt (Abb. 150).

Eine analytische Betrachtung zeigt, daß die drei Verhältniszahlen nicht unabhängig sind. Es gilt die Beziehung

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 = 2. \quad (1)$$

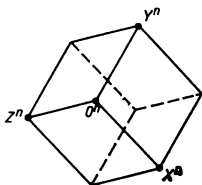


Abb. 150

Beweis. Sind α_i ($i = 1, 2, 3$) die Größen der Richtungswinkel des Projektionsstrahles durch O gegen die Koordinatenachsen, so gilt bekanntlich

$$\sum_{i=1}^3 \cos^2 \alpha_i = 1. \quad (2)$$

Werden die Neigungswinkel der Achsen gegen die Bildebene mit β_i bezeichnet, dann besteht die Beziehung

$$\lambda_i = \cos \beta_i. \quad (3)$$

Wegen $\alpha_i + \beta_i = \frac{\pi}{2}$ kann ferner

$$\cos^2 \alpha_i = 1 - \cos^2 \beta_i \quad (4)$$

gesetzt werden. Durch Einsetzen von (3) und (4) in (2) ergibt sich (1), was zu zeigen war.

Auch die Winkel, welche von den Bildern der Koordinatenachsen eingeschlossen werden, stehen in einer Beziehung zu den Verhältniszahlen λ_i . Dieser Zusammenhang drückt sich in einer von GAUSS aufgestellten Formel aus. Wird die Bildebene π mit einer komplexen Zahlenebene identifiziert, deren Ursprung in O'' liegt, und werden

den Punkten X^* , Y^* und Z^* die komplexen Zahlen p , q und r zugeordnet, so gilt die Gleichung

$$p^2 + q^2 + r^2 = 0$$

(Abb. 151). Die durchgeführten Betrachtungen zeigen in zweifacher Weise, daß die Verkürzungsverhältnisse auf den Achsen des Koordinatendreieins und damit das normalaxonometrische Bild eines auf das Dreiein orientierten Einheitswürfels bereits durch die Vorgabe des Spurendreiecks eindeutig bestimmt sind.

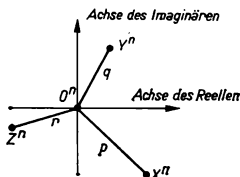


Abb. 151

4.4. Zentralperspektive

Bei der Zentralperspektive stellt das Abbildungsmittel, wie bereits in 1.2. erläutert wurde, ein Strahlbündel mit dem Projektionszentrum Z als Träger des Bündels dar. Da durch die Zentralprojektion der menschliche Sehvorgang mit einem Auge, aber auch der Abbildungsvorgang einiger optischer Geräte imitiert wird, lassen sich zwei wesentliche Gründe für die Beschäftigung mit den Gesetzmäßigkeiten der Zentralperspektive anführen:

1. Das zentralperspektive Bild eines räumlichen Objektes vermittelt bei richtiger Zuordnung des Auges zum Bild eine anschauliche Vorstellung des dargestellten Gegenstandes. Daraus resultiert vielfach für die Praxis die Aufgabe, aus maßstreu und wenig anschaulichen Bildern, z. B. zugeordneten Normalrissen eines Objektes, ein zentralperspektives Bild zu gewinnen.

2. Optische Geräte, wie beispielsweise der Fotoapparat, liefern zentralperspektive Bilder räumlicher Objekte. Hier besteht die Aufgabe, aus solchen Fotos unter Einarbeitung gewisser Vorgaben maßtreue Bilder herzustellen. Diese Aufgabe fällt unter den Begriff *Rekonstruktionsanalyse*.

Zur Lösung dieser Problemstellungen sind verschiedene konstruktive Methoden entwickelt worden, die sich der Beschaffenheit des darzustellenden Objektes und den vom Bild zu fordernden Eigenschaften anpassen.

Durchschnittsmethode

Einen leicht überschaubaren Zugang zur Konstruktion zentralperspektiver Bilder bietet die *Durchschnittsmethode*. Bei diesem Verfahren geht man von dem in zugeordneten Normalrissen dargestellten Körper aus. Die Grundrißtafel wird als *Standebene* Γ interpretiert. Ferner ist die Lage des Auges O durch Grund- und Aufriß so festzulegen, daß das darzustellende räumliche Gebilde innerhalb eines Drehkegels mit angemessenem Öffnungswinkel (nicht über 60°) und O als Kegelspitze liegt. Als Bildebene wird eine erstprojizierende Ebene π eingeschaltet, die den *Sehkegel* nach einem Kreis oder einer nur wenig gestreckten Ellipse schneidet. Der Lotfußpunkt von O auf die Bildebene π ist der *Hauptpunkt* H , die in π liegende Waagerechte durch H ist der *Bildhorizont* h , und die Länge $|OH| = |O'H'|$ ist gleich der *Bilddistanz* d . Nach den in 1.2. gegebenen Darlegungen liegen die Fluchtpunkte aller zur Standebene parallelen Geraden auf dem Horizont. Die Schnittgerade von π mit der Standebene Γ bezeichnet man als *Standlinie* g . In ein zusätzliches Zeichengebiet wird die Bildebene π samt Horizont, Hauptpunkt und Standlinie maßgerecht eingetragen. Um mit horizontalen Ordnungslinien arbeiten zu können, legt man das zusätzliche Bild zweckmäßig neben den Aufriß. Nun sind von O an das im Zentralriß darzustellende Objekt gewisse ausgezeichnete Sehstrahlen zu ziehen und mit der Bildtafel π zu schneiden. Die mittels zugeordneter Normalrisse konstruierten Durchstoßpunkte werden in das dem Aufriß beigefügte Bild durch Ordnungslinien und Distanzübertragungen aus dem Grundriß eingezeichnet. Zur Darstellung eines ebenflächig begrenzten Körpers, dessen Basis — wie im angeführten Beispiel — in der Standebene Γ liegt, baut man den Zentralriß zweckmäßig von der Grundfläche her auf. Die Fluchtpunkte F_1 und F_2 der paarweise parallelen Gegenseiten der Basis liegen auf h im Schnitt mit den zugeordneten Fluchtstrahlen durch das Auge O . Ferner können die Schnittpunkte der Basiskanten mit der Standlinie als Konstruktionshilfen dienen. Durch Distanzübertragung sind die auf g und h ermittelten Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 bzw. F_1 und F_2 vom Hauptpunkt H ausgehend in das zusätzliche Bild zu bringen. Damit ist die Konstruktion des Zentralrisses der Basis auf Verbinden von Punkten und Schneiden von Geraden zurückgeführt. Nun sind noch die Höhen von First- und Trauflinien des Hausmodells dem Aufriß zu entnehmen und auf den Loten zu g durch die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 in π abzutragen. Unter Verwendung der Fluchtpunkte F_1 und F_2 läßt sich der Zentralriß des Hausmodells vervollständigen (Abb. 152).

Das Prinzip der reinen Durchschnittsmethode ist am Beispiel des Punktes P in Abb. 152 demonstriert. Ihre Erfindung wird dem Florentiner Architekten FILIPPO BRUNELLESCHI (1377—1446) zugeschrieben. Die hier gezeigte Mitverwendung von Fluchtpunkten als Konstruktionshilfe setzte sich im Verlauf der Renaissance bei den Malern nur langsam durch. Lediglich der Hauptpunkt findet bei ihnen als Fluchtpunkt von Tiefenlinien eine konsequente Anwendung.

Die Nachteile der hier vorggeführten Konstruktion liegen in der platzaufwendigen Anordnung und in der Notwendigkeit, Strecken in eine andere Zeichnung zu übertragen. Diese Mängel werden bei der *Architektenanordnung* behoben. Hierzu ist gemäß Abb. 153 von einer ungewöhnlichen Anordnung von Grund- und Aufriß

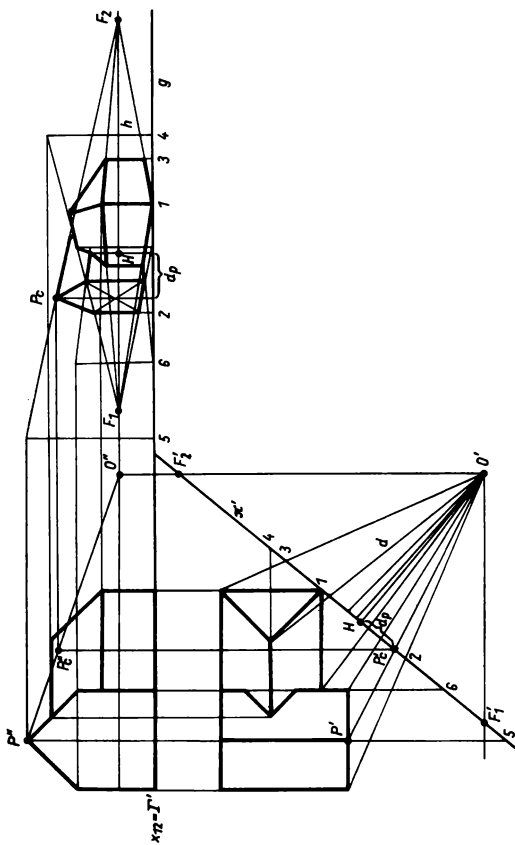


Abb. 152

auszugehen. Im Zeichenfeld läßt sich dann der Zentralriß allein durch Einzeichnen von horizontalen Ordnungslinien und Bildern von Sehstrahlen unter Ausschaltung von Übertragungsfehlern bei geringem Platzaufwand konstruieren (Abb. 153).

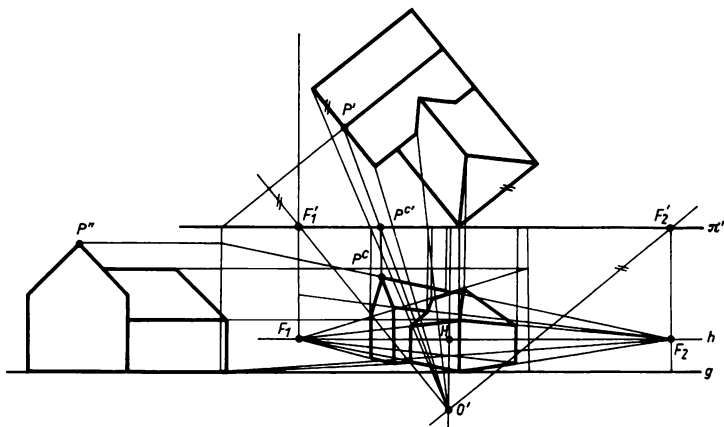


Abb. 153

Rekonstruktion von Grundrissen

Ein fundamentales Anliegen von Rekonstruktionsaufgaben besteht darin, die wahre (oder ähnlich verkleinerte) Gestalt einer in der Basisebene Γ liegenden Figur aus dem Zentralriß zu gewinnen. Als Hilfsmittel dient hierbei der

Satz. *Das zentralperspektive Bild einer in der Standebene Γ liegenden Figur und die Umklappung dieser Figur um die Standlinie g in die Bildebene sind perspektivkollinear.*

Die Spurgerade g ist die Kollinationsachse, der um h nach π gleichsinnig mit Γ umgeklappte Augpunkt O^0 ist das Kollinationszentrum, und der Horizont h ist die Gegenachse. Auf ihr liegen die Bilder der Fernpunkte von Γ (Abb. 154).

Beweis. Die nach obigen Satz bestehende Punktverwandtschaft zwischen den Punkten P^c (zentralperspektives Bild von $P \in \Gamma$) und P^0 ist aus Abb. 154 leicht ablesbar. Zunächst bleiben sämtliche Punkte von g bei der Umklappung von Γ nach π fest. Die Standlinie g ist also Fixgerade dieser Verwandtschaft. Ferner gilt nach Konstruktion $p \parallel q$ mit $p = p(OO^0)$ und $q = q(PP^0)$. Diese parallelen Geraden p und q spannen eine Hilfsebene ε auf, welche die Bildebene π nach einer Geraden

$c = c(O^0P^0)$ schneidet. Nach Konstruktion liegen der Sehstrahl $s = s(OP)$ in ε und der Bildpunkt P^c von P auf der Geraden $c = c(\varepsilon\pi)$. Da auch P^0 und O^0 auf c liegen, kann allgemein gesagt werden, daß die Verbindungsgerade c jedes Punktpaares P^0P^c durch O^0 geht. Wegen der Linearität der Abbildung kann es sich nur um eine perspektive Kollineation mit den oben angeführten Eigenschaften handeln.

Dieser Satz soll auf eine einfache Rekonstruktionsanalyse angewendet werden.

Gegeben sei das zentralperspektive Bild eines winkelförmigen Gebäudegrundrisses (vgl. Abb. 155). Die normal aufeinander stehenden Flügel des Gebäudegrundrisses haben die gleiche Breite. Gesucht ist ein ähnliches Bild der wahren Gestalt des Gebäudegrundrisses.

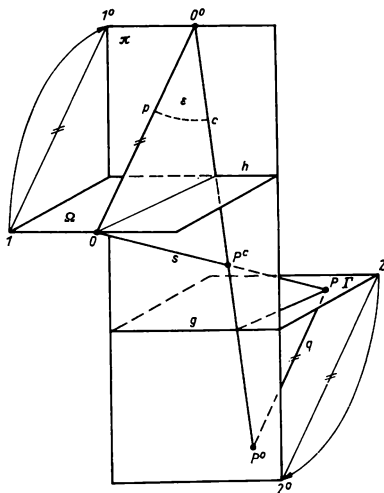


Abb. 154

Zunächst sucht man die Fluchtpunkte F_1 und F_2 zueinander paralleler Basiskanten auf. Die Verbindungsgerade der Fluchtpunkte liefert den Bildhorizont, also $h = h(F_1F_2)$. Der Thales-Kreis über diesen Fluchtpunkten ist ein geometrischer Ort für das umgelegte Auge O^0 , da die *Fluchtstrahlen* von O nach F_1 und nach F_2 aufeinander normal stehen. Dem Gebäudegrundi kann ferner das zentralperspektive Bild eines Quadrates entnommen werden. Hierzu braucht man nur die kürzeren Basiskanten der Seitenflügel entsprechend zu verlängern. Da sich in einem Quadrat die Diagonalen senkrecht schneiden, sucht man auch die Fluchtpunkte der Bilder

der Diagonalen auf. Sie liegen im Schnitt der Diagonalen mit dem Horizont. Diese Fluchtpunkte werden mit G_1 und G_2 bezeichnet. Aus den bereits oben angeführten Gründen ist der Thales-Kreis über der Strecke G_1G_2 ein zweiter geometrischer Ort für das umgelegte Auge O^0 . Im Schnittpunkt der beiden Thales-Kreise liegt daher das umgelegte Auge O^0 , dem hier die Rolle des Kollineationszentrums zukommt (Abb. 155).

Von der Standlinie g (Kollineationsachse) ist lediglich zu fordern, daß sie zu h parallel liegt und sich nicht mit h deckt. Man legt sie zweckmäßig etwas unterhalb des Zentralrisses der Gebäudebasis. Nun kann unter Anwendung der Gesetzmäßigkeiten der perspektiven Kollineation die Umlegung der Gebäudebasis um g nach π

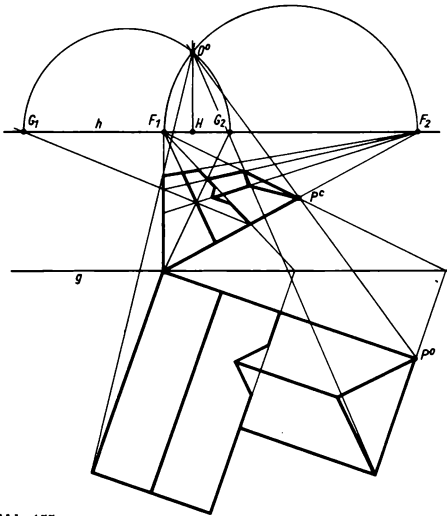


Abb. 155

erfolgen. Man erhält so eine zum Spiegelbild ähnliche Wiedergabe des Gebäudegrundrisses. Eine Parallelverschiebung von g bewirkt lediglich eine ähnliche Streckung oder Stauchung der erhaltenen Figur. Umgekehrt kann nun diese geometrische Verwandtschaft auch dazu benutzt werden, Einzelheiten aus dem Plan des Grundrisses in das zentralperspektive Bild überzuführen. Darüber hinaus kann diese Kollineation, von der Standebene ausgehend, zum Aufbau zentralperspektiver Bilder räumlicher Objekte eingesetzt werden.

4.5. Stereoskopische Bildpaare. Anaglyphen

Das Konstruktionsprinzip zur Herstellung zentralperspektiver Bilder paßt sich dem einäugigen Sehvorgang an und ist für anschauliche Darstellungen geeignet. Die optische Erfassung eines räumlichen Objektes in seiner Tiefe ermöglicht jedoch erst das zweiäugige Sehen. Durch geeignete Kombination zweier ebener zentralperspektiver Bilder eines dreidimensionalen Gegenstandes läßt sich unter Einschaltung optischer Hilfsmittel (*Farbfilter* oder *Polarisationsfilter*) der subjektive Eindruck eines räumlichen Gebildes von hoher plastischer Wirkung erzielen. Bildpaare, die denselben Gegenstand von zwei benachbarten Standpunkten aus darstellen, bezeichnet man als *Stereobilder* oder *stereoskopische Bilder*. Sie können durch

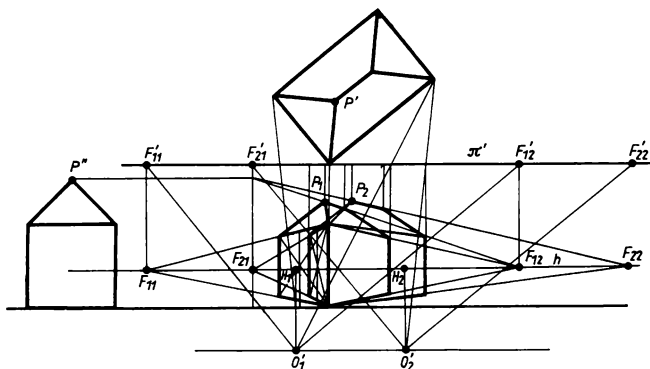


Abb. 156

Fotografie (Stereofotografie) oder durch Konstruktion (Anaglyphen) gewonnen werden. Bei der Stereofotografie bedient man sich zweier parallel gerichteter Kameras, deren Objektivabstand dem der Augen (65 mm oder etwas mehr) entspricht und deren Schärfen-, Blenden- und Verschlusseinstellungen miteinander gekoppelt sind. Die Betrachtung des Bildpaares erfolgt durch ein Stereoskop, wodurch jedem Auge nur das ihm zugeordnete Teilbild sichtbar wird. Die Trennung der Bilder bewirkt hierbei z. B. ein Polarisationsfilter. Umgekehrt ist auch die Rekonstruktion eines räumlichen Objektes aus dem vorliegenden Stereobildpaar möglich. Daraus resultiert eine vielfältige Anwendungsmöglichkeit der *Stereoskopie* im Vermessungswesen, in der Kriminalistik und bei Unfalluntersuchungen.

Auf konstruktivem Wege gewonnene Bildpaare finden in der darstellenden sowie analytischen Geometrie und in der Kristallographie Anwendung, wo räumliche Lagebeziehungen unter Verzicht auf dreidimensionale Modelle zu veranschaulichen

sind. Die beiden Ansichten des räumlichen Objektes werden in *komplementären Farben* (blau-gelb oder rot-grün) aufgezeichnet und durch ein Paar in entsprechender Weise gefärbte Brillengläser betrachtet. Ist z. B. das fürs rechte Auge bestimmte

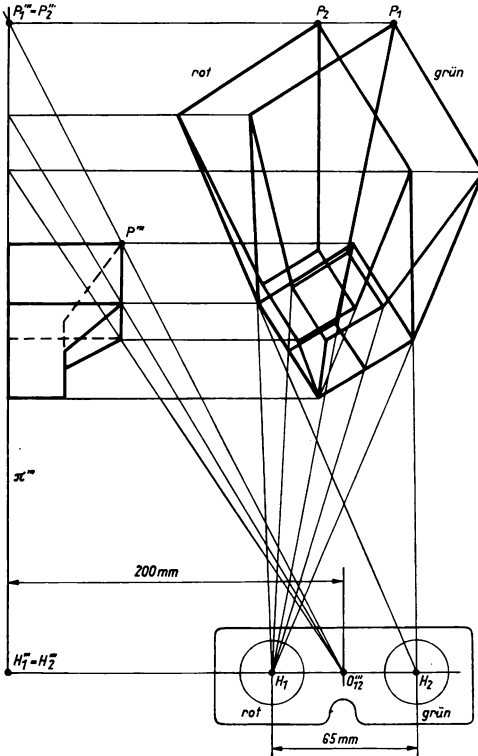


Abb. 157

Bild rot und das fürs linke Auge bestimmte grün gezeichnet, so entsteht der stereoskopische Effekt, wenn das vor dem rechten Auge befindliche Glas die grüne und das andere die rote Spektralfarbe absorbiert. Bei *echten Anaglyphen* werden zwei

zentralperspektive Bilder des zu veranschaulichenden räumlichen Objektes nach der in Abb. 156 angegebenen Weise konstruiert und koloriert. Dagegen begnügt man sich bei *unechten Anaglyphen* mit der Verknüpfung zweier Parallelprojektionen, wobei die zu den beiden Bildern gehörigen Projektionsrichtungen einen kleinen Winkel miteinander einschließen. Bei geeigneter Betrachtung der Bildpaare durch eine Filterbrille ergibt sich ein mehr oder weniger plastischer Eindruck des räumlichen Objektes (Abb. 156).

In Illustrationen von Lehrbüchern finden Anaglyphen vorwiegend in der Weise Verwendung, daß die Bildebene als waagrecht liegend angenommen und mit der Grundebene identifiziert wird. Die Sehstrahlen treffen die Bildebene etwa unter dem Winkel von 45° . Die Augenbasis wird mit 65 mm und die Länge des Lotes von den Augen auf die Bildebene mit 200 mm angesetzt. Die Konstruktion der beiden Bilder erfolgt nach der Durchschnittsmethode. Sie läßt sich auch als eine Konstruktion zweier Schlagschatten des Körpers auf die horizontale Grundebene interpretieren. Die Augen O_1 und O_2 stellen die Projektionszentren dar. Für die Trennung der Bilder sorgt hier gleichfalls die komplementäre Farbgebung unter Einsatz des Filterprinzips auf die Augen des Betrachters. Um einen möglichst vollkommenen Stereoeffekt zu erzielen, ist vom Leser zu fordern, sein Augenpaar in eine durch die Konstruktion der Anaglyphenbilder bedingte Lage bezüglich der Grundebene zu bringen (Abb. 157).

In dem von IMRE PÁL verfaßten Lehrbuch „Darstellende Geometrie in Raumbildern“ finden Anaglyphen durchgängig als didaktisches Hilfsmittel Verwendung.

Literatur

- BEBEIS, R.: Darstellende Geometrie, Band 1. Akademie-Verlag, Berlin 1964.
- FUCKE, R., K. KIRCH und H. NICKEL: Darstellende Geometrie. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1962.
- HAACK, W.: Darstellende Geometrie, Band 1—3. 6. bzw. 7. Auflage, Walter de Gruyter und Co., Berlin 1971.
- HOHENBERG, F.: Konstruktive Geometrie in der Technik. 2. Auflage, Springer-Verlag, Wien 1961.
- KRAMER, W.: Darstellende Geometrie I. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959.
- MÜLLER, E., und E. KRUPPA: Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 5. Auflage, Springer-Verlag, Wien 1948.
- PÁL, I.: Darstellende Geometrie in Raumbildern. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1961.
- REEBOCK, F.: Darstellende Geometrie. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1957.
- REUTTER, F.: Darstellende Geometrie, Band 1—2. 2. bzw. 5. Auflage, Verlag G. Braun, Karlsruhe 1958.
- SALKOWSKI, E.: Darstellende Geometrie. 8. Auflage, Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig, Leipzig 1959.
- SANDEN, H. VON: Darstellende Geometrie. 6. Auflage, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1956.
- SCHIEFFERS, G.: Lehrbuch der Darstellenden Geometrie, Band 1—2. 2. Auflage, Verlag von Julius Springer, Berlin 1922—1927.
- SELENIN, J. W.: Vorlesungen der darstellenden Geometrie mit Aufgaben und Anwendungen. Moskau 1961 [russ.].
- STRUBECKER, K.: Vorlesungen über Darstellende Geometrie. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1958.
- WUNDERLICH, W.: Darstellende Geometrie, Band 1 und 2. Bibliographisches Institut, Mannheim 1966 bzw. 1967.

Namenverzeichnis

ALBERTI, LEON BATTISTA (1404—1472) 14
ANAXAGORAS (um 500—428 v. u. Z.) 14
ÄSCHYLUS (um 525—456 v. u. Z.) 13

BOSSE, ABRAHAM (1602—1676) 13
BRUNELLESCHI, FILIPPO (1377—1446) 14, 147

DANDELIN, PIERRE (1794—1847) 122, 131
DEMOKRIT (um 460—370 v. u. Z.) 14
DESARGUES, GIRAUD (1593—1662) 13, 68
DÜRER, ALBRECHT (1471—1528) 12, 13, 15

ECKHART, L. (1890—1938) 143
EUKLID (um 300 v. u. Z.) 14
EULER, LEONHARD (1707—1782) 51

FRANCESCO, PIERO DELLA (um 1416—1492)
14, 15
FRÉZIER, AMÉDÉE FRANÇOIS (1682—1773) 13

GAUSS, CARL FRIEDRICH (1777—1855) 145

HACHETTE, JEAN NICOLAS PIERRE (1769—1834)
11

HIRE, PHILIPPE DE LA (1640—1718) 83

LAMBERT, JOHANN HEINRICH (1728—1777) 15
LEONARDO DA VINCI (1452—1519) 15

MIGON, ÉTIENNE 15
MONGE, GASPARD (1746—1818) 10—13

NOIZET, JEAN FRANÇOIS GASPARD (1749—1837)
13

PAFFOS VON ALEXANDRIA (um 300 u. Z.) 131
POHLKE, KARL WILHELM (1810—1876) 13

RYTZ, DAVID (1801—1868) 96

STEINER, JACOB (1796—1863) 69

UBALDUS, GUIDO (um 1600) 15

VASARI, GIORGIO (1511—1574) 14
VAUBAN, SÉBASTIEN DE (1633—1707) 13
VITRUV, POLLIO (1. Jh. v. u. Z.) 12, 13

Sachverzeichnis

- Abbildung, affine 27
 - , axonometrische 9
 - , frontalexonometrische 29
- Abbildungsmittel 22, 27
- Abwicklung 64
- affine Abbildung 27
 - Transformation 82
- Affinität, perspektive 27, 49, 57, 61, 82, 89
- Affinitätsachse 49, 57
- Affinitätsgerade 50
- Affinitätsrichtung 49, 57
- Affinitätsstrahl 50
- Ähnlichkeitszentrum 67
- Anaglyphe, echte 153
 - , unechte 154
- Angittern 41
- anglo-amerikanische Darstellungsart 77
- Architektenanordnung 147
- Asymptote 129
- Aufriß 12, 32
- Aufrißspur 43
- Augdistanz 15, 23
- Auge 23
- Augpunkt 23
- Ausreißung 62
- Axonometrie 29, 77
 - , isometrische 143
 - , normale 140, 144
 - , orthogonale 140
 - , schiefe 139
- axonometrische Abbildung 9
- Bilddistanz 147
- Bildebene 23, 34
- Bildhorizont 147
- Böschungsaufgabe 134
- Böschungsfäche 137
- Böschungskegel 137
- Böschungswinkel 134
- Brennpunkt der Ellipse 103
 - der Parabel 123
- Charakterisierung der perspektiven Affinität 51, 82, 92
- Dachausmittlung 135
- DANDELIN, Satz von 131
- Dandelinsche Kugeln 122
- Darstellungsart, anglo-amerikanische 77
 - , europäische 77
- Deckgerade 47, 59
- DESARGUES, Satz von 68
- Desarguesche Konfiguration 69
- Differenzendreieck 55
- Differenzenmethode 55
- Dimetrie 142, 143
- Distanz 54
- Distanzkreis 23
- Distanzpunkt 14, 23
- doppelter Zirkelschlag 57
- doppeltprojizierende Ebene 41
- Doppelverhältnis 24
- Drehkegel 79
- Drehparaboloid 123
- Drehzylinder 79
- Dreibein, orthonormiertes 28, 139
- Dualitätsprinzip 26
- Durchbohrung 62
- Durchdringung 62
- Durchschnittsmethode 147
- Ebenenbüschel 22
- ebener Zwanglauf 86
- Eckhartesches Einschnideverfahren 143
- Eigenschatten 60
- Eigenschaftengrenze 101

- Eindringung 62
 Eintafelprojektion 13
 Eintafelverfahren 31
 Ellipse 13, 69, 80, 120
 Ellipsenbewegung 89
 elliptischer Punkt 138
 erstprojizierende Ebene 37, 40
 Erzeugende 118
 europäische Darstellungsart 77
- Falllinie 85, 134
 Farbfilter 152
 Fernebene 20
 Fernelemente 20, 22
 Ferngerade 20, 80
 Fernpunkt 19
 Fixgerade 27
 Fluchtpunkt 14, 20, 23, 147
 Fluchtpur 22, 23
 Fluchttrahl 150
 Fokaleigenschaft der Ellipse 107
 — der Parabel 123
 Frontalaxonometrie 29, 141
 Frontale 37
 Frontallinie 45
 Frontlinie 45
- Gangebene 89
 Gangkreis 88
 Gärtnerkonstruktion 105
 Gaußsche Formel 146
 Gefällemaßstab 132
 Gegenriß 77
 Gegenspür 66
 Gemeinlot windschiefer Geraden 64
 Géométrie descriptive 11
 Geradenbündel 21
 Geradenbüschel 21
 Gipfelpunkt 138
 Gitterlinie 41
 gleichwendige Ebene 39
 gradierte Gerade 132
 Graduierungspunkt 132
 Gratlinie 137
 Grundriß 12, 32
 Grundrißspür 43
- Halbmesser 92
 harmonische Lage 26
 -s Punktequadrupel 26
 Hauptachse 82
 Hauptlinie (erste, zweite) 45
 Hauptpunkt 14, 23, 147
 Hauptsatz der Axonometrie 13, 141
 Hauptscheitel 83
- Hauptscheitelkreis 83, 108
 Hauptscheitelkrümmungskreis 84
 Höhenkote 31
 Höhenlinie 45
 homogenisierende Koordinate 79
 Horizont 23, 147
 Horizontale 37
 Horizontallinie 45
 Hyperbel 13, 69, 80, 127
 hyperbolischer Punkt 138
- Implizite Kurvendarstellung 82
 Intervall einer Geraden 133
 Invarianz des Doppelverhältnisses 25
 Invarianzeigenschaft 27, 36
 Inzidenz 67
 Isometrie 142, 143
- Kartesisches Achsenkreuz 81
 Kavalierperspektive 141
 Kegelschnitt 13, 80
 Kernkörper 62
 kinematische Erzeugung 86
 Knotenpunkt 43, 138
 Koinzidenzebene 35
 Koinzidenzpunkt 36
 kollineares Punktetripel 41
 Kollineation, perspektive 15, 67
 Kollineationsachse 67, 68, 149
 Kollineationsstrahl 67, 68
 Kollineationszentrum 67, 68, 149
 Komplementärfarben 153
 konjugierte Durchmesser 91
 Kote 31, 132
 kotierte Projektion 13, 31, 132
 Kreuzriß 13, 41, 73, 77
 Krümmungsmittelpunkt 84
 Krümmungsradius 83
 Kugel 79
- Lagenaufgabe 46
 Leitgerade der Ellipse 103
 Leitkreis der Ellipse 107
 lineare Exzentrizität der Ellipse 106
 — — der Hyperbel 130
 Lotfußpunkt 23
- Maßaufgabe 53
 Meßpunktverfahren 15
 Methode des Paralleldrehens 55, 59
 Militärperspektive 143
 Mongesche Drehkonstruktion 55
 — Lage 34, 45
 monokulares Sehen 68
 Muldenpunkt 138

- Nebenachse 82
 Nebenscheitel 83
 Nebenscheitelkreis 83
 Nebenscheitelkrümmungskreis 84
 Neigungswinkel (erster, zweiter) 54
 normale Axonometrie 140, 144
 Normalprojektion 9, 30
 Normalriß 49
 numerische Exzentrizität der Ellipse 103
 — — der Hyperbel 131
 — — der Parabel 131
- Ordner 33**
 Ordnungslinie 33
 orthogonale Axonometrie 140
 Orthogonaltrajektorie 134
 orthonormiertes Dreibein 28, 139
- Papierstreifenkonstruktion 87, 96
 Parabel 13, 69, 80, 123
 — als Hüllgebilde 126
 Parallelprojektion 9, 27
 Parallelstrahlbündel 27
 Parameter der Parabel 123
 Pendelebenenverfahren 119
 perspektive Affinität 27, 49, 57, 61, 82, 89
 — Kollineation 15, 67
 perspektiv-kollineares Bild 149
 POHLKE, Satz von 141
 Pohlkesches Dreibein 140
 Polarisationsfilter 152
 Polarkoordinatendarstellung der Ellipse 104
 — der Hyperbel 131
 — der Parabel 131
 Polarverwandtschaft 26
 Profilgerade 37
 Profillage 41
 Projektionsebene 31
 Projektionsstrahl (erster, zweiter) 32
 Projektionszentrum 9, 23
 projektive Ebene 20
 -r Raum 20
 projizierende Ebene 41
 — Lage 30
 Pultebene 44
 Punktequadrupel 25
 Punktetripel 39
- Rastkreis 88**
 Rechtsdreibein 28
 Rekonstruktionsanalyse 23, 146
 Renaissance 10, 147
 Restkörper 62, 86
 Rißachse 33
 Rollbewegung 89
 Rytzsche Konstruktion 96
- Sattelpunkt 138
 Satz von DANDELIN 131
 — von DESARGUES 68
 — von POHLKE 141
 Scheitelkrümmungskreis 83
 Scherung 50
 Schichtenlinie 134
 Schichtenplan 134
 schiefe Axonometrie 139
 Schlagschatten 49, 60, 101, 119
 schleifender Schnitt 41
 Schrägbild 10
 Schrägrißverfahren 10, 28, 141
 Sehkegel 147
 Seitenriß 41, 70
 Spiegelung 91
 Spur einer Ebene 31, 134
 Spurendreieck 144
 Spurgerade (erste, zweite) 43
 Spurparallele (erste, zweite) 44
 Spurpunkt (erster, zweiter) 36
 Standebene 147
 Standlinie 147
 Stauchung 67
 Stereoskopie 152
 stereoskopisches Bildpaar 152
 Stoß 62
 Strahlenquadrupel 26
 Streiflichtkegel 120
 Streichrichtung 134
 Symmetrieebene 35
 Symmetriepunkt 36
- Tafelabstand (erster, zweiter) 32
 Tallinie 138
 Testebene 130
 Tiefengeraden 23
 Tiefenlinien 14
 topographische Fläche 137
 Transformation, affine 82
 Trapezmethode 54
 Trauflinie 135
 Treffgerade 49
 Trimetrie 142, 143
- Uneigentliche Gerade 20
 -r Punkt 19, 120
- Verfahren mit doppeltem Zirkelschlag 57
 Verkürzungsfaktoren 144
 Verkürzungsverhältnis 146
 Verschwindungsebene 19
 Verschwindungsgerade 21
 Vervollständigen 36, 41, 44

Verzerrungsdreieck 29

Verzerrungsverhältnis 29

Verzerrungswinkel 29

Vogelperspektive 143

Wasserscheide 138

wechselwendige Ebene 39

windschiefe Geraden 38, 46, 60, 72, 133

Zentralbeleuchtung 119

Zentralperspektive 10, 13

Zentralprojektion 9, 22

zentrische Streckung 67

zugeordnete Normalrisse 12, 13, 31, 32

Zweikreiskonstruktion 83, 86, 92, 96

Zweitafelverfahren 12, 35

zweitprojizierende Ebene 37, 40