

Studienbücherei



H. Wußing
Vorlesungen
zur Geschichte
der Mathematik



VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

Mathematik für Lehrer

Band 13

Herausgegeben von:

W. Engel, S. Brehmer, M. Schneider, H. Wußing

Unter Mitarbeit von:

G. Asser, J. Böhm, J. Flachsmeyer, G. Geise, T. Glocke, K. Härtig,
G. Kasdorf, O. Krötenheerdt, H. Lugowski, P. H. Müller, G. Porath

Studienbücherei

Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik

Zweite, überarbeitete Auflage

Mit 72 Abbildungen

H. Wußing

Unter Mitarbeit von
S. Brentjes

H.-J. Ilgauds

K.-H. Schlote

P. Schreiber

R. Siegmund-Schultze

R. Tobies

J. Wilke



**VEB Deutscher Verlag
der Wissenschaften
Berlin 1989**

ISBN 3-326-00517-2

ISSN 0081-7384

Verlagslektor: B. Mai, U. Leitner

Verlagshersteller: N. Braun

Umschlaggestalter: R. Wendt

© VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1979 und 1989

Printed in the German Democratic Republic

Lizenz-Nr. 206 · 435/73/89

Gesamtherstellung: VEB Druckhaus „Maxim Gorki“, Altenburg

LSV 1004

Bestellnummer 571 832 3

01780

Vorwort zur zweiten Auflage

Es läßt sich wohl behaupten, daß die Geschichte der Wissenschaften die Wissenschaft selbst sei. Man kann dasjenige, was man besitzt, nicht rein erkennen, bis man das, was andere vor uns besessenen, zu erkennen weiß.

J. W. Goethe

Kommunist kann einer nur dann werden, wenn er sein Gedächtnis um alle die Schätze bereichert, die von der Menschheit gehoben worden sind.

V. I. Lenin

Der überaus rasche Fortschritt der Historiographie der Mathematik hält unverändert an. Die Autoren haben sich bemüht, die seit dem Erscheinen der ersten Auflage erzielten Fortschritte — soweit sie für die hier berührten Themenkreise von Belang sind — durch Neuschrift, Textrevision, zusätzliche Anmerkungen und Erweiterung des Literaturverzeichnisses in einer Weise zu erfassen, die an eine strenge Limitierung des Buchumfanges gebunden war

Allen meinen Mitautoren an den „Vorlesungen“ gilt ein aufrichtiger Dank für konstruktive Zusammenarbeit. Vor allem aber bin ich meinem Kollegen Prof. Dr. sc. W. Purkert für eine gründliche und kritische Durchsicht ganz außerordentlich verpflichtet. Ein weiterer herzlicher Dank gilt den Mitarbeitern des VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, die sich nach Kräften um diese revidierte Ausgabe bemüht haben.

Leipzig, Herbst 1987

H. Wußing

Vorwort zur ersten Auflage

Dieses Buch ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die ich seit 1960 für Lehrerstudenten der Fachrichtung Mathematik/Physik an der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig gehalten habe. Mit dem Jahre 1978 wurde der Beschluß des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen der DDR wirksam, an den Universitäten und Hochschulen der DDR für Studenten der Mathematik ebenfalls Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik einzuführen. Beiden obligatorischen Vorlesungen wird gleich viel Zeit eingeräumt, und ihre Lehrprogramme sind überdies ähnlich aufgebaut.

Es lag daher nahe, den Kern meiner Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik für Lehrerstudenten zur Grundlage eines Lehrbuchs zur Geschichte der Mathematik zu machen, das sowohl für den Lehrerstudenten als auch für den Mathematikstudenten geeignet sein könnte. Die diesem Buch zugrunde gelegte Auswahl des historischen Stoffes orientiert sich streng an dem im Herbst 1977 vom Ministerium für Hoch- und Fachschulwesen der DDR verabschiedeten „Lehrprogramm für das Lehrgebiet Geschichte der Naturwissenschaften/Mathematik zur Ausbildung in der Grundstudienrichtung Mathematik“.

Der Leser möge also bedenken, daß hier kein vollständiges Bild der Geschichte der Mathematik entworfen werden konnte, sondern daß nur Ausschnitte geboten werden, freilich solche, die bei aller Lückenhaftigkeit und trotz des beschränkten Raumes doch — wie ich hoffe — einen zusammenhängenden Eindruck von den wesentlichen Epochen und einigen hauptsächlichen Inhalten im historischen Entwicklungsgang der Mathematik vermitteln. Dennoch sind Lücken unverkennbar, schmerzliche Lücken, wenn man die gesamte Geschichte der Mathematik vor Augen hat.

Das Buch ist gemäß den im Lehrprogramm vorgesehenen 16 Doppelstunden in 15 „Vorlesungen“ gegliedert (die 16. Doppelstunde ist laut Lehrprogramm einem Beleg vorbehalten). Damit sind Stoffkomplexe gekennzeichnet, die in sich geschlossene Themenkreise behandeln. Die unterschiedlichen Umfänge sollten nicht irritieren: Aus jedem hier dargestellten Stoffkomplex sollte der Lehrende auswählen und andererseits den Studenten für das Selbststudium und die Vorbereitung auf Seminarvorträge, Klausuren, Hausarbeiten usw. beraten können.

Es war mein besonderes Anliegen, durch Einfügen von Originalzitatzen (freilich in deutscher Sprache und unter Gebrauch des heutigen Druckbildes) die Denk- und

Sprechweise hervorragender Mathematiker aus allen Perioden der jahrtausendelangen Entwicklung der Mathematik hervortreten zu lassen. Demgegenüber tritt das biographische Element in diesem Buch fast ganz zurück; ich hoffe, auf diese Weise den problemgeschichtlichen Zusammenhang historischer Entwicklungsgänge betonen zu können. Zum Ausgleich wurde dem Anhang ein Personenverzeichnis beigegeben.

Dieses Buch kann und will keine Bibliographie mathematischer und mathematik-historischer Literatur vermitteln. Allein schon aus Raumgründen mußten Angaben zur weiterführenden Literatur auf ein Minimum beschränkt bleiben; sie wurden getrennt in allgemeine weiterführende Literatur (LA) und in Literaturangaben (L), die spezifisch für die 15 Vorlesungen sind. Der Leser sei ferner ausdrücklich darauf hingewiesen, daß in der traditionsreichen Reihe „Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften“ auch von vielen bedeutenden Mathematikern kommentierte Abhandlungen in deutscher Sprache erschienen sind, daß es neben einer Fülle wissenschaftshistorischer Zeitschriften zwei speziell mathematikhistorische Schriftenreihen (Istoriko-matematičeskije issledovanija, Moskau/Leningrad, und Historia mathematica, Toronto) gibt, daß das Handbuch von K. O. May „Bibliography and Research Manual of the History of Mathematics“, Toronto 1973, den Zugang zur mathematikhistorischen Forschung erleichtert. Für die mathematischen Sachverhalte selbst sei auf mathematische Wissensspeicher verwiesen, z. B. auf das „Lexikon der Mathematik“, Leipzig 1977, und auf die Bände der Studienbücherei Mathematik für Lehrer.

Es bedeutet ein gewisses Risiko, auf – notwendigerweise – relativ begrenztem Platz an Druckseiten diesen Versuch eines Lehrbuchs der Mathematikgeschichte der Öffentlichkeit zu übergeben, zumal die Historiographie der Mathematik in rascher Entwicklung befindlich ist und die Mathematikgeschichte gemäß dem Lehrprogramm auf dem Hintergrund der allgemeinen Geschichte der Naturwissenschaften verständlich gemacht werden soll. Die hier vorgelegte Diktion wird und muß mit anderen Auffassungen und mit zahlreichen neu zu erwartenden Forschungsergebnissen konfrontiert werden; mir sind daher insbesondere Zuschriften und Meinungsäußerungen herzlich willkommen, die – über den Hinweis auf Irrtümer und Fehler hinaus – prinzipielle Einwände vorbringen. Gemeinsame Diskussion ist nötig und wird ihrerseits zur Entwicklung der Historiographie der Mathematik in der DDR beitragen. Doch schon in der hier vorgelegten Fassung steckt ein gutes Teil Gemeinschaftsarbeit.

Besonderer Dank gilt meinen tschechoslowakischen Freunden Dr. L. Nový und Dr. J. Folta aus Prag für die kritische Durchsicht des Rohmanuskripts und für Verbesserungsvorschläge. Viele Anregungen und sachliche Kritik verdanke ich meinen jüngeren Kollegen am Karl-Sudhoff-Institut für Geschichte der Medizin und Naturwissenschaften an der Karl-Marx-Universität Leipzig: Dr. S. Brentjes, H.-J. Ilgauds, K.-H. Schlote, R. Siegmund-Schultze und Dr. R. Tobies haben aktive Hilfe in vielfältiger Form geleistet und selbst die Niederschrift von Teilabschnitten übernommen. Dr. sc. P. Schreiber (Greifswald) und Dr. J. Wilke (Berlin) haben freundlicherweise ebenfalls als Autoren schwieriger Kapitel mitgewirkt.

Selbständige Abschnitte vertreten S. Brentjes (Die Mathematik in den Ländern des Islam; Entstehung und Entwicklung der linearen Optimierung), H.-J. Ilgauds

(Personenregister), K.-H. Schlote (Die Herausbildung der Wahrscheinlichkeitsrechnung; Zur Entwicklung der Algebra seit der Jahrhundertwende; Zur Entwicklung der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung), P. Schreiber (Entstehung und Entwicklung der Mengenlehre; Zur Geschichte der mathematischen Logik), R. Siegmund-Schultze (Zur Entstehung und Entwicklung der Funktionalanalysis), J. Wilke (Zur historischen Entwicklung der programmgesteuerten Rechentechnik).

Einer ganzen Reihe von Kollegen und Freunden bin ich für Rat und Tat bei der Niederschrift und Durchsicht des hier vorgelegten Manuskripts zu tiefem Dank verpflichtet, insbesondere Prof. Dr. G. Asser (Greifswald), Prof. Dr. W. Engel (Rostock), Dr. G. Harig (Berlin), Prof. Dr. D. Ilse (Berlin), Prof. Dr. O. Krötenheerdt (Halle), Dr. O. Neumann (Jena), Dr. G. Maibaum (Dresden), Prof. Dr. K. Manteuffel (Magdeburg), Dr. W. Purkert (Leipzig), Dr. P. Schreiber (Greifswald), Dr. L. Stammer (Halle). Freundlich-kritische Hilfe aus allgemein-historischer Sicht wurde mir von Dr. H. Brost (Berlin) und Dr. K. Holzapfel (Leipzig) zuteil.

Nicht zuletzt geht mein Dank an den VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin und da besonders an den Verlagsleiter Dr. L. Walter, Herrn W. Arnold und Frau B. Mai, die mir in vielerlei Hinsicht ein hohes Maß an Entgegenkommen erwiesen haben und ohne deren wohlwollendes Drängen, im Bunde mit Prof. Dr. W. Engel, dem Vorsitzenden der Mathematischen Gesellschaft der DDR, dieses Buch nie vollendet worden wäre. In technischer Hinsicht bin ich Frau I. Lüttke und Frau B. Burkhardt in Berlin und Frau B. Schlag, Frau S. Schönauf und Frau E.-M. Förster in Leipzig zu hohem Dank verpflichtet.

Leipzig, 31. Mai 1978

H. Wußing

Inhalt

Vorlesung 1

Einführung in das Fachgebiet

<i>Ziele der Historiographie der Mathematik</i>	16
Zur Entwicklung der Wissenschaftsgeschichte als wissenschaftliche Disziplin	16
Aspekte der Mathematikgeschichte	17
<i>Ziele der Vorlesung „Geschichte der Naturwissenschaften/Mathematik“</i>	21
Literaturhinweise	23

Vorlesung 2

Anfänge der Mathematik. Altägypten. Mesopotamien

<i>Anfänge der Mathematik</i>	26
Die Anfänge	26
Agrarische Revolution	27
<i>Mathematik im alten Ägypten und in Mesopotamien</i>	29
Ägyptische Mathematik	29
Mesopotamische Mathematik	32

Vorlesung 3

Klassische Antike: Ionische Periode. Athenische Periode

<i>Die Mathematik in der griechisch-hellenistischen Antike</i>	42
Gesellschaftliche Veränderungen	42
Periodisierung	43
<i>Ionische Periode</i>	44
Thales von Miletos	45
Demokritos von Abdera	45
Hippokrates von Chios	46
Weiterführung der mesopotamischen arithmetisch-algebraischen Traditionen. Die pythagoreische Schule	48
Der Zusammenbruch der arithmetica universalis	52
<i>Athenische Periode</i>	53
Die Platonische Ideenlehre und ihr Einfluß auf die Entwicklung der Mathematik	54
Die geometrische Algebra	56
Theodoros von Kyrene	57
Theaitetos und die Klassifizierung der quadratischen Irrationalitäten	58
Eudoxos von Knidos	59

Vorlesung 4**Klassische Antike: Hellenistische Periode. Ausgang der Antike**

<i>Hellenistische Periode</i>	64
Alexandria. Das Museion	64
Euklid von Alexandria	65
Aufbau der „Elemente“	66
Euklid als Forscher	68
Archimedes als Mathematiker	68
Apollonios von Perge. Die Kegelschnittslehre	71
Ptolemaios als Mathematiker	72
Heron von Alexandria	73
Diophantos von Alexandria	75
Die Mathematiker der alexandrinischen Schule	76
<i>Die Mathematik am Ausgang der Antike</i>	77
Pappos von Alexandria	77
Der Untergang der antiken Mathematik	78
Die wissenschaftlichen Erben der antiken Mathematik	78

Vorlesung 5**Nichteuropäischer und europäischer Feudalismus**

<i>Vorbemerkungen</i>	82
<i>Mathematik in China</i>	82
Rechenmethoden im alten China	84
Die „Mathematik in neun Büchern“	85
Die chinesische algebraische Schule des 13. Jahrhunderts	86
<i>Die Mathematik des alten Indien</i>	87
Quellen	89
Indische Geometrie	91
Indische Trigonometrie	91
Die Herausbildung des dezimalen Positionssystems	92
Arithmetik und Algebra in der indischen Mathematik	93
<i>Die Mathematik in den Ländern des Islam</i>	94
Historische Etappen der Entwicklung der Mathematik in den Ländern des Nahen und Mittleren Ostens	95
Die Algebra des al-Ḥwārizmī und seiner Nachfolger	96
Die Ausbreitung der indischen Ziffern und die Arithmetik in den Ländern des Nahen und Mittleren Ostens	99
Die Herausbildung der Trigonometrie als selbständiger Wissenschaftszweig	100
<i>Die Mathematik im europäischen Feudalismus</i>	102
Die Karolingische Frührenaissance	103
Die Mathematik im Hochfeudalismus	104
Ansätze eigenständiger mathematischer Entwicklung in Europa	105
Die Gründung von Universitäten. Die Scholastik	105

Vorlesung 6**Renaissance: Trigonometrie. Rechenmethoden. Algebraisierung**

<i>Die Renaissance</i>	110
Neue gesellschaftliche Stellung der Naturwissenschaft	111
Neue gesellschaftliche Forderungen an die Mathematik	112

<i>Ausbau der Trigonometrie zum geschlossenen System</i>	116
Die astronomisch-mathematische Schule in Wien. Johannes Regiomontanus	116
Prosthaphairesis. Trigonometrische Tafeln	117
Zyklometrie	118
Die Lehre von der Perspektive	119
<i>Ausbau der Rechenmethoden</i>	120
Die Rechenmeister	120
Die Überwindung des Abacus-Rechnens	121
Dezimalbrüche	123
Logarithmisches Rechnen	123
<i>Algebraisierung</i>	125
Die Coß	126
Auflösung von Gleichungen dritten und vierten Grades	127
Vieta	128

Vorlesung 7

Wissenschaftliche Revolution: Analytische Geometrie, Rechenhilfsmittel

<i>Zur gesellschaftlichen Stellung der Mathematik und der Naturwissenschaften</i>	132
Grundeinschätzung der Mathematik dieser Periode	132
Die Entwicklung der materiellen Produktivkräfte als Reizmittel für die Entwicklung der Mathematik	133
Entwicklung der Naturwissenschaften	135
Die Wissenschaftliche Revolution	137
Die gesellschaftliche Stellung des Naturwissenschaftlers. Die Gründung von Akademien	137
<i>Geschichte der analytischen Geometrie</i>	139
Aus der Entstehungsgeschichte der analytischen Geometrie	140
Nicolaus Oresme	140
Herausbildung der analytischen Geometrie	141
René Descartes	142
Pierre de Fermat	146
Durchbildung der Methoden der analytischen Geometrie	147
<i>Zur Geschichte der frühen mechanischen Rechenmaschinen</i>	148
Erste mechanische Rechenhilfsmittel	148
Frühe Rechenmaschinen	149

Vorlesung 8

Wissenschaftliche Revolution: Herausbildung der Infinitesimalmathematik

<i>Herausbildung infinitesimaler Methoden</i>	152
Die Problemsituation	152
Geometrischer Grenzübergang	153
Die Exhaustionsrechnung	155
Kepler und die Infinitesimalgeometrie	156
Die Methode der Indivisibeln	158
Die Arithmetisierung der Indivisibelnmethode	162
Das Tangentenproblem	165
Pascal und das charakteristische Dreieck	167
<i>Durchbildung der infinitesimalen Methoden</i>	168
Isaac Newton und die Fluxionsrechnung	169
G. W. Leibniz und die Erfindung des Calculus	172

Vorlesung 9**Aufklärung: Ausbau der Infinitesimalen Methoden**

<i>Ausbau der infinitesimalen Methoden</i>	176
Entstehung einer Theorie der unendlichen Reihen	176
Herausbildung des Funktionsbegriffs	179
<i>Weiterentwicklung der Infinitesimalmathematik</i>	181
Ausbau der Fluxionsrechnung	182
Erste zusammenfassende Darstellungen der Infinitesimalmathematik	182
<i>Neue Möglichkeiten durch die Infinitesimalmathematik</i>	184
Anfänge der Variationsrechnung	185
Beginn einer Theorie der Differentialgleichungen	186
Infinitesimalmathematik und Anwendungen	187
Ideologische Auseinandersetzungen	188

Vorlesung 10**Industrielle Revolution: Darstellende Geometrie. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Theorie algebraischer Gleichungen**

<i>Zur gesellschaftlichen Stellung von Mathematik und Naturwissenschaften</i>	192
Das Wesen der Industriellen Revolution	192
Neue gesellschaftliche Forderungen an die Naturwissenschaften	192
Neues Wechselverhältnis zwischen Naturwissenschaften und Produktion	193
Grundtendenzen der Entwicklung der Naturwissenschaften	194
Neue Organisationsformen der Wissenschaft	196
Die Forderung nach Lehrbarkeit der Mathematik	197
<i>Zur Geschichte der darstellenden Geometrie</i>	198
Die Begründung der wissenschaftlichen darstellenden Geometrie durch G. Monge	198
<i>Die Herausbildung der Wahrscheinlichkeitsrechnung</i>	200
Zur Vorgeschichte	200
P. S. Laplace	202
<i>Algebra als Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen</i>	203
Eine zweite Periode der Algebra	203
Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra	204
Unmöglichkeit der Auflösbarkeit der Gleichung fünften Grades	205
Die gruppentheoretische Formulierung des Auflösungsproblems	206

Vorlesung 11**Industrielle Revolution: Grundlagen der Analysis. Zahlssystem. Funktionentheorie**

<i>Verschärfung der Grundlagen der Analysis</i>	210
Die Konstatierung der Mängel	210
Die exakte Fassung des Grenzbegriffs	211
Der Beitrag von B. Bolzano	211
Der Beitrag von A. L. Cauchy	212
Neufassung und Verschärfung des Funktionsbegriffs	214
<i>Aufbau des Zahlsystems</i>	217
Schrittweise Ausdehnung der Zahlbereiche	217
Der Weg zu den komplexen Zahlen	218
Geometrische Interpretation der komplexen Zahlen	219
Arithmetische Interpretation der komplexen Zahlen	220

H. Hankel und das Permanenzprinzip	221
Aufbau einer Theorie der irrationalen Zahlen	222
Theorie der rationalen und der natürlichen Zahlen	223
Abstrakte Fassung des Zahlbegriffs	224

<i>Theorie der Funktionen komplexer Variabler</i>	225
Frühe Beispiele des Gebrauchs komplexer Variabler	225
Beginn des systematischen Aufbaus einer Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen	226
Der Beitrag von A. L. Cauchy zur Funktionentheorie	227
B. Riemanns Beitrag zur Funktionentheorie	228
Der Beitrag von K. Weierstraß zur Funktionentheorie	229

Vorlesung 12

Neunzehntes Jahrhundert: Anwendungen der Mathematik. Algebra

<i>Zur gesellschaftlichen Stellung von Mathematik und Naturwissenschaften</i>	232
Die Verwandlung der Wissenschaft in eine Produktivkraft	232
Hauptentwicklungsrichtungen der Naturwissenschaften	233
Hauptentwicklungsrichtungen der Mathematik	234

<i>Mathematik und Anwendungen</i>	235
Analysisbetonte Anwendungsbereiche der Mathematik	235
Hauptelemente der theoretischen Mechanik im neunzehnten Jahrhundert	236
Mathematische Physik	237

<i>Zur Entwicklung der Algebra im neunzehnten Jahrhundert</i>	239
Theorie der Determinanten und Matrizen	239
Der Quaternionenkalkül. Die Vektorrechnung	240
Die britische algebraische Schule	241
Herausarbeitung algebraischer Grundstrukturen	243

Vorlesung 18

Neunzehntes Jahrhundert: Höhere Geometrie. Mengenlehre

<i>Die Entwicklung der höheren Geometrie im neunzehnten Jahrhundert</i>	248
Auf dem Weg zur nichteuklidischen Geometrie	248
Gauß und die nichteuklidische Geometrie	250
Janos Bolyai und die nichteuklidische Geometrie	251
N. I. Lobačevskij und die nichteuklidische Geometrie	252
Der Beitrag von B. Riemann zur Grundlegung der Geometrie	253
Die Anerkennung nichteuklidischer Geometrien	254
Zur Entwicklungsgeschichte der projektiven Geometrie	255
Das Erlanger Programm	257
Die Wirkung des Erlanger Programms	259
Axiomatisierung der Geometrie durch D. Hilbert	259
Die moderne Auffassung von Axiomatisierung	261

<i>Entstehung und Entwicklung der Mengenlehre</i>	262
Aus der Frühgeschichte der Mengenlehre	263
G. Cantor und die Begründung der Mengenlehre	263
Kampf um die Anerkennung der Mengenlehre	265
Axiomatisierung der Mengenlehre	267
Philosophisch-mathematische Schulen	268

Vorlesung 14**Zwanzigstes Jahrhundert: Mathematische Logik. Moderne Algebra**

<i>Die gesellschaftliche Funktion der Mathematik und der Naturwissenschaften</i>	272
Tendenzen der Entwicklung der Naturwissenschaften	272
Die wissenschaftlich-technische Revolution	273
Einige allgemeine Aspekte der Mathematik des zwanzigsten Jahrhunderts	274
<i>Zur Geschichte der mathematischen Logik</i>	277
Aus der Frühgeschichte der mathematischen Logik	277
Herausbildung der mathematischen Logik als selbständige Disziplin	278
Zur Geschichte der neueren mathematischen Logik	279
<i>Entwicklung der Algebra seit der Jahrhundertwende</i>	281
Die Herausbildung der sogenannten Modernen Algebra	281
Entwicklung spezieller Gebiete der neueren Algebra	283

Vorlesung 15**Zwanzigstes Jahrhundert: Funktionalanalysis. Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Lineare Optimierung. Rechentechnik**

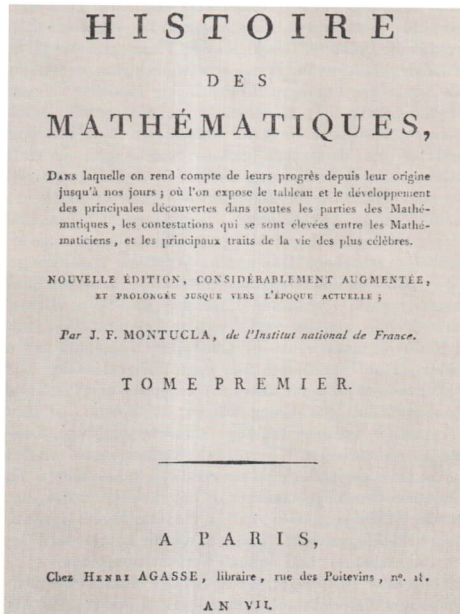
<i>Zur Entstehung und Entwicklung der Funktionalanalysis</i>	288
Die Anfänge der Funktionalanalysis	288
Die Herausbildung der selbständigen Funktionalanalysis	289
Weiterentwicklung der Funktionalanalysis	291
<i>Zur Entwicklung der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung</i>	292
Die russische wahrscheinlichkeitstheoretische Schule	292
Auf dem Wege zur Axiomatisierung	293
Die Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung durch Kolmogorov	294
<i>Entstehung und Entwicklung der linearen Optimierung</i>	295
Zur Vorgeschichte der linearen Optimierung	296
Der Beginn des Konstituierungsprozesses der linearen Optimierung als selbständige mathematische Disziplin in der UdSSR	298
Der Abschluß des Konstituierungsprozesses in den USA	299
<i>Zur historischen Entwicklung der programmgesteuerten Rechentechnik</i>	301
Anfänge der Programmsteuerung	301
Erste programmgesteuerte Rechner	302
Die Entwicklung der Computertechnik während der letzten Jahrzehnte	303
Ausblick	305

Anhang

<i>Übersicht über die Entstehungszeit heutiger mathematischer Symbole</i>	308
<i>Anmerkungen</i>	309
<i>Literatur</i>	316
<i>Abbildungsnachweis</i>	330
<i>Biographischer Anhang</i>	332

Vorlesung 1

Einführung in das Fachgebiet



Titelblatt der Mathematikgeschichte von J. E. Montucla: Histoire des mathématiques, Bd. 1, Paris 1799

Ziele der Historiographie der Mathematik

Zur Entwicklung der Wissenschaftsgeschichte als wissenschaftliche Disziplin

Die Geschichte der Naturwissenschaften und der Mathematik oder, allgemein gesprochen, die Wissenschaftsgeschichte, ist heute eine recht umfangreiche, eigenständige und in lebhafter Entwicklung befindliche Wissenschaft, mit eigenen Problemstellungen und Methoden. Es gibt auf der Erde, insbesondere in den sozialistischen Ländern und einigen hochentwickelten kapitalistischen Staaten, eine Fülle wissenschaftshistorischer Zeitschriften, viele Institute für Wissenschaftsgeschichte; es gibt eine Internationale Union für Geschichte und Philosophie der Wissenschaften und eine Internationale Akademie für Wissenschaftsgeschichte, es werden nationale und internationale Kongresse, Tagungen zur Geschichte spezieller wissenschaftlicher Disziplinen veranstaltet (Anm. 1.1). Der überaus bemerkenswerte Aufschwung der Geschichte der Naturwissenschaften und der Mathematik steht, insbesondere nach dem zweiten Weltkrieg, ganz deutlich in kausaler Beziehung zu der einflußreichen Stellung, die Mathematik und Naturwissenschaften — freilich unter gänzlich verschiedenen gesellschaftspolitischen Zielstellungen — in den sozialistischen und den ökonomisch hochentwickelten kapitalistischen Staaten erreicht haben. Über Produktion, Bildung, Erziehung und Ideologiebildung beeinflussen heutzutage Mathematik und Naturwissenschaften in hohem Maße und in vielfältiger Weise die gesellschaftliche Entwicklung von Staaten und Staatengemeinschaften; in diesem Sinne erhalten die Wissenschaften überhaupt — nicht nur Mathematik und Naturwissenschaften — eine echt geschichtsbildende, welthistorisch relevante Funktion. Die Förderung von Mathematik und Naturwissenschaften wird daher zum Gegenstand von politischen Führungsentscheidungen auf staatlicher und sogar internationaler Ebene. Diese Entscheidungen aber müssen sich auf historisch angelegte und begründete Untersuchungen mit prognostischer Zielstellung stützen; die Zukunft ist sozusagen die Extrapolation vergangener und gegenwärtiger Entwicklungsgänge. Dieser Aspekt verbindet, wie bei jeder historischen Wissenschaft, Vergangenheit mit Zukunft und macht Geschichte zu einer gesellschaftlich notwendigen Wissenschaft: Vom Standpunkt der marxistischen Geschichtswissenschaft hat die Historiographie nicht das Endziel, Tatbestände der Vergangenheit bloß zu inventarisieren, sondern auch und vor allem aus ihnen Schlußfolgerungen zu ziehen, um die Lehren der Vergangenheit für die Gestaltung von Gegenwart und Zukunft nutzbar zu machen.

Diese Grundaufgabe aller Historiographie ist bei der Herausarbeitung des historischen und dialektischen Materialismus während des 19. Jh. von den Wortführern der Ideologie der revolutionären Arbeiterklasse betont worden. Gerade daher richteten Marx und Engels ihre Aufmerksamkeit auch auf die Geschichte der Mathematik, der Naturwissenschaften und der Technik, weil dort Beziehungen zur Entwicklung der Produktivkräfte aufzudecken waren, Beziehungen, die von der bürgerlichen Historiographie bis dahin kaum berücksichtigt worden waren. So schrieb Marx 1844:

„Die Geschichtsschreibung selbst nimmt auf die Naturwissenschaft nur beiläufig Rücksicht, als Moment der Aufklärung, Nützlichkeit einzelner großer Entdeckungen. Aber desto praktischer hat die Naturwissenschaft vermittelt der Industrie in das menschliche Leben eingegriffen und es umgestaltet und die menschliche Emanzipation vorbereitet ... Die Industrie ist das wirkliche geschichtliche Verhältnis der Natur und daher der Naturwissenschaft zum Menschen; wird sie daher als exoterische Enthüllung der menschlichen Wesenskräfte gefaßt, so wird auch das menschliche Wesen der Natur oder das natürliche Wesen des Menschen verstanden.“ ([L 1.8], S. 543)

Marx und Engels haben in einer Vielzahl von Schriften und Äußerungen die Kraft der Betrachtungsweise des historischen Materialismus auch an wissenschaftshistorischen Themen demonstriert; dies wird uns in diesen „Vorlesungen“ oft begegnen. Auch Lenin hat mit Nachdruck auf die Geschichte der Wissenschaften verwiesen. So heißt es z. B. im „Philosophischen Nachlaß“:

„Die Fortführung des Werkes von Hegel und Marx muß in der dialektischen Bearbeitung der Geschichte des menschlichen Denkens, der Wissenschaft und der Technik bestehen.“ ([L 1.7], S. 137)

Gemäß dieser Maxime wurde, noch auf unmittelbare Anregung von Lenin, in den ersten Jahren der jungen Sowjetmacht im Zusammenhang mit dem Neuaufbau der Sowjetischen Akademie der Wissenschaften in Moskau ein Institut für Geschichte der Naturwissenschaften und Technik gegründet; es ist heute ein führendes Weltzentrum der Wissenschaftsgeschichte.

Aspekte der Mathematikgeschichte

Seit altersher ist unter Mathematikern ein beträchtliches Maß an Traditionsbewußtsein anzutreffen, ein ausgeprägtes Gefühl dafür, den Vorgängern Dank zu schulden und verpflichtet zu sein, deren Werk weiterzuführen. So gesehen reichen die Anfänge der Mathematikgeschichte bis zu dem sog. Mathematikerkatalog des Griechen Eudemos von Rhodos aus dem 4. Jh. v. u. Z. zurück. Gerade bedeutende Mathematiker haben auch die Kontinuität des inneren Zusammenhanges der Entwicklung der Mathematik sehr klar gesehen und bewußt betont, indem sie in höchst fruchtbarer Weise historische Betrachtungen mit der Darlegung ihrer eigenen Ergebnisse verbanden. So gehören beispielsweise die einleitenden Abschnitte, die Lagrange seinen Arbeiten vorangestellt hat, auch zu den Kostbarkeiten mathematikhistorischer Literatur. Man hat in diesem Sinne sogar gesagt, daß keine wissenschaftliche Disziplin mehr verlieren würde als die Mathematik, wenn man sie von ihrer Geschichte trennen würde.

Seit der europäischen Aufklärung kann man davon sprechen, daß sich die Mathematikgeschichte zu einer eigenständigen Untersuchungsrichtung zu formieren begann; die Darstellungen der Geschichte der Mathematik von Kästner (1796/1800) und Montucla (1799/1802) markieren Höhepunkte auf dem Wege der Mathematikgeschichte zur wissenschaftlichen Disziplin.

Die bürgerliche Historiographie der Mathematik hat während des 19. und noch während des 20. Jh. hervorragende Ergebnisse erzielt, allerdings im wesentlichen

beschränkt auf Problemgeschichte und Personengeschichte und auf die Erschließung derartiger Quellen (Anm. 1.2). Die vierbändige Mathematikgeschichte von Cantor (1880/1908) war lange Jahrzehnte das Standardwerk. Indessen darf nicht übersehen werden, daß sich auch in der Historiographie (Anm. 1.3) der Mathematik des 20. Jh. bei einigen bürgerlichen Autoren Tendenzen zum philosophischen Idealismus, zum Irrationalismus, Mystizismus und zur reaktionären Geschichtsschreibung finden und daß es nur wenige Autoren gibt, die sich bewußt gegen eine europazentristische Betrachtungsweise wenden.

Die marxistische Historiographie der Mathematik beruht methodologisch auf dem historischen und dialektischen Materialismus. Danach ist jede Wissenschaft eine gesellschaftliche Erscheinung. Auch die Mathematik ist eine spezifische Form des gesellschaftlichen Bewußtseins. Sie ist mehr als das Ergebnis der Tradierung von Kenntnissen und Erkenntnissen, von Theorien und Methoden; sie ist zugleich geformt von den materiellen und ideellen Interessen der jeweils herrschenden Klassen; sie ist das Produkt wissenschaftlicher Institutionen und wissenschaftlicher Schulen und auch abhängig von der sozialen Stellung des Wissenschaftlers und seiner Weltanschauung; und Mathematik ist schließlich auch Objekt der Wissenschaftspolitik.

Mit anderen Worten: Die Mathematik ist kein autonomes Gebiet, sondern integrierter Bestandteil des gesellschaftlichen Lebens, d. h., Mathematik stand und steht in ständiger Wechselbeziehung mit der Produktion und Reproduktion der materiellen und ideellen Grundlagen des gesellschaftlichen Lebens.

Es ist diese weitgreifende, auf die Erfassung aller für die Entwicklung der Mathematik relevanter gesellschaftlicher Ursachen gerichtete Methode, es ist die bereits erwiesene prinzipiell größere Leistungsfähigkeit, die die marxistische Historiographie der Mathematik — bei allem ideologischen Gegensatz — auch in Staaten wie Großbritannien, Frankreich und den USA eine stark beachtete, ja geachtete Stellung erringen ließ.

Die international bekannten sowjetischen Wissenschaftstheoretiker Mikulinskij und Rodnyj definieren — sehr anspruchsvoll — das Ziel der Wissenschaftsgeschichte folgendermaßen; es gilt speziell auch für die Historiographie der Mathematik:

„Die Aufgabe der Wissenschaftsgeschichte besteht darin, die fortschreitende Entwicklung der Wissenschaft in all ihrer Konkretheit und in ihren Wechselbeziehungen mit der anderer gesellschaftlicher Erscheinungen aufzuzeigen und auf dieser Grundlage die allgemeinen Gesetzmäßigkeiten sowie die konkreten Wege und Bedingungen, die den wissenschaftlichen und technischen Fortschritt gewährleisten, sichtbar zu machen.“ ([L 1.12], S. 90)

Diese „Vorlesungen“ versuchen, im Rahmen des vorgegebenen Umfangs, den vielfältigen Aspekten nachzugehen und gerecht zu werden, denen die Historiographie der Mathematik Aufmerksamkeit schenken muß, um den Gang der Entwicklung der Mathematik wirklich, wissenschaftlich, d. h. auf die Ursachen eingehend, erfassen zu können. Es handelt sich im wesentlichen um folgende Aspekte der Entwicklung der Mathematik:

- Wechselbeziehungen zur Entwicklung der Produktivkräfte
- Wechselbeziehungen zur Entwicklung der Produktionsverhältnisse
- Problemgeschichte, Begriffsgeschichte, innerwissenschaftliche Zusammenhänge

- Beziehungen zur Entwicklung der Naturwissenschaften
- Wechselbeziehungen zur Entwicklung der Philosophien und Ideologien
- Geschichte und Einfluß wissenschaftlicher Institutionen und Organisationsformen
- Biographisches
- Bibliographisches

Nach marxistischer Auffassung liegen in der Entwicklung der Produktivkräfte die letzten Endes entscheidenden Triebkräfte für die Entwicklung der menschlichen Gesellschaft und damit auch für die Entwicklung der Wissenschaften. Der direkte Zusammenhang zwischen der Entwicklung der Produktivkräfte und der Entwicklung der Naturwissenschaften und der Mathematik wird durch viele historische Fälle dokumentiert. Aus diesem Zusammenhang erklären sich Hauptrichtungen der europäischen Mathematik während der Renaissance; nur bei Berücksichtigung der Entfaltung der Produktivkräfte erklärt sich letzten Endes die mit dem Übergang zur Mathematik variabler Größen verbundene wissenschaftliche Revolution der Mathematik während des 17. und 18. Jh. und die gänzlich neue gesellschaftliche Stellung der Mathematik im Gefolge der Industriellen Revolution des 18. und 19. Jh. Und die Entstehung vieler Disziplinen der modernen Mathematik wie Spieltheorie, Informationstheorie, Theorie der linearen Optimierung hängt direkt mit der Verwandlung der Mathematik in eine unmittelbare Produktivkraft zusammen und berührt sogar schon das Verhältnis der Mathematik zu den Produktionsverhältnissen (Anm. 1.4). Solche historischen Überlegungen vermitteln auch ein tieferes Verständnis dafür, was unter „Praxis für die Mathematik“ zu verstehen ist.

Selbstverständlich darf man nicht in Primitivismen verfallen und sämtliche Ursachen für die Entwicklung der Mathematik im Ökonomischen suchen. Der Marxismus erkennt die innerwissenschaftlichen Entwicklungsmomente an, unterstreicht die Rolle der Weltanschauung, würdigt die Leistung der Persönlichkeit, weiß um die psychologischen Bedingungen von Kreativität; diese und andere Faktoren wirken im Sinne objektiver Ursachen für die Entwicklung. Die verschiedene Weltsicht führte bei Ägyptern, Mesopotamiern, Griechen, Indern, Chinesen, Arabern und den Europäern des Mittelalters oder der Neuzeit zu erheblichen Unterschieden in der Philosophie und sogar in den behandelten mathematischen Problemen und den zu ihrer Lösung benutzten Methoden.

Es entspricht lediglich der notwendigen Beschränkung im Umfang dieses Buches, wenn hier das biographische Element, die Schilderung des Suchens und Forschens, der leidenschaftlichen Parteinahme für den Fortschritt der Wissenschaft zurücktritt. Auch die bedeutendsten Gelehrten waren Menschen aus Fleisch und Blut und lebten unter konkreten – günstigen und ungünstigen – Lebensumständen, vertraten politische Ansichten, verfolgten Ziele, besaßen Meinungen und Weltanschauung. Für die Beurteilung, für die Einordnung der Mathematiker in die Geschichte gilt das Wort Lenins, wonach historische Persönlichkeiten nicht danach zu beurteilen sind, was sie, gemessen an den heutigen Erfordernissen, nicht geleistet haben, sondern danach, was sie im Vergleich zu ihren Vorgängern Neues und Positives geleistet haben. Die weiterführende, in die Zukunft wirkende Leistung hebt Euklid und Archimedes, Newton, Leibniz, Euler, Gauß und Cantor aus der großen Schar gleich

sich Mühender und angestrengt Arbeitender heraus und sichert ihnen fortdauernde Achtung.

Ohne Begriffsgeschichte — z. B. Geschichte der Begriffe Funktion, Raum, Grenzwert, Integral, Gruppe, Körper, Wahrscheinlichkeit, Zahl —, ohne Problemgeschichte und ohne die Geschichte spezieller mathematischer Disziplinen würde das Bild von der Entwicklung der Mathematik der Kernsubstanz nach verfehlt bleiben müssen. Hier tritt deutlich und überzeugend Dialektik des Denkens zutage; konkrete Beispiele stehen für die Allgemeingültigkeit des dialektischen Materialismus. Gerade der Begriffsgeschichte hat Lenin eine bedeutende Rolle zugewiesen; so schrieb er im Jahre 1915:

„Der Begriff ... enthüllt im Sein ... das Wesen — dies ist wirklich der allgemeine Gang aller menschlichen Erkenntnisse (aller Wissenschaft) überhaupt. Dies ist der Gang sowohl der Naturwissenschaft, als auch der politischen Ökonomie und der Geschichte. Insofern ist die Dialektik Hegels die Verallgemeinerung der Geschichte des Denkens. Es muß eine außerordentlich dankbare Aufgabe sein, dies konkreter, eingehender an der Geschichte der einzelnen Wissenschaften zu verfolgen.“ ([L 1.7], S. 315)

In der Entwicklung der Mathematik — und das hat die Historiographie der Mathematik entsprechend zu berücksichtigen — tritt ganz besonders deutlich die Einheit des Historischen mit dem Logischen zutage: Jede Kenntnis, jedes Erkenntnis wurde in einer konkreten historisch-gesellschaftlichen Situation gewonnen. Der Typ der Mathematik, ihre Zielstellung und Methoden waren anders in den frühen Klassengesellschaften des alten Ägypten oder Mesopotamiens, wo es sich noch fast durchweg um empirisch gewonnene oder nach Art von Rezepten gehandhabte Mathematik handelte, anders wiederum in der Periode der ionischen Naturphilosophie, in der die Mathematik als Wissenschaft geboren wurde, wieder anders in der europäischen Feudalgesellschaft, in der auch die Mathematik als Magd der Theologie verstanden wurde, durchgreifend anders in der frühbürgerlichen Gesellschaft der Renaissance, der Epoche des Manufakturkapitalismus und der Industriellen Revolution, in der die Mathematik wenigstens in Umrissen die gesellschaftliche Funktion einer Produktionspotenz erreichen konnte, dies wiederum im historischen Vorgriff auf die Rolle der Mathematik als Produktivkraft in der heutigen Epoche des Übergangs vom Kapitalismus zum Sozialismus/Kommunismus.

Diese Überlegungen weisen noch auf einen anderen Zusammenhang hin, auf die engen Bindungen, ja auf das Ineinandergreifen von Mathematik und Naturwissenschaften. Eine historische Grundwahrheit sollte man sich bei aller notwendigen Beschränkung vor Augen halten: Die heutige fein säuberliche Trennung von Mathematik und Naturwissenschaften (die erkenntnistheoretisch-philosophisch natürlich völlig berechtigt ist) entspricht wohl in der Hauptsache pragmatischen Gründen, dem Zwang zur Meisterung der Erkenntnisfülle in Lehre und Forschung. Die eigentliche historische Entwicklung kennt eine solche Trennung nicht, sondern vielmehr eine enge Bindung, teilweise in Personalunion. Folgerichtig kann die Historiographie der Mathematik nur auf dem Hintergrunde der Historiographie der Naturwissenschaft die historische Wahrheit vermitteln. Von Galilei bereits stammt jenes programmatische Wort, daß das Buch der Natur in der Sprache der Mathematik geschrieben sei. Und wie wäre der Mathematiker Kepler vom Astronomen Kepler zu

trennen? Wie wäre sonst die wissenschaftliche Leistung von Newton einzuschätzen oder die von Gauß und von Hilbert?

Überhaupt zeigt die Geschichte der Mathematik die enge Verflechtung der Mathematik mit anderen Wissenschaften. Je näher man an unsere Gegenwart herankommt, um so deutlicher wird der enge Zusammenhang zwischen der Entwicklung der Mathematik und der Entwicklung gesellschaftswissenschaftlicher Disziplinen, z. B. der Ökonomie; man denke an die Entwicklung solcher Disziplinen wie Statistik, mathematische Optimierung, Spieltheorie.

Sehr alt ist die enge Beziehung zwischen Mathematik und philosophischem Denken; sie ist quellenmäßig schon seit der Zeit der griechisch-hellenistischen Antike belegbar: Man denke an die Bedeutung sowohl der materialistisch orientierten ionischen Naturphilosophie als auch der pythagoreischen Schule bei der Herausbildung der Mathematik als Wissenschaft, man denke an den Zusammenhang zwischen Mathematik und dem philosophischen System des objektiven Idealismus bei Platon, an die Stellung der Mathematik innerhalb der Erkenntnistheorie des Aristoteles, an die Rolle philosophischen Denkens bei der Herausbildung einer Mathematik der veränderlichen Größen, an die Schwierigkeiten bei der Bewältigung des Begriffes des Unendlichen etwa bei Grenzübergängen, an das enge Wechselverhältnis zwischen europäischer Aufklärung und mathematisch-naturwissenschaftlichem Denken, an die Beziehungen zwischen Philosophie und Mathematik bei Descartes und Spinoza, bei Leibniz, Kant, Cantor und Hilbert.

Ziele der Vorlesung „Geschichte der Naturwissenschaften/Mathematik“

Die Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik nehmen an den Hochschulen und Universitäten der DDR einen festen Platz im Ausbildungsprogramm der Diplomlehrer für Mathematik/Physik und der Diplommathematiker ein. Selbstverständlich verfolgen diese Vorlesungen keinen Selbstzweck, sondern haben Erziehungsaufgaben zu erfüllen, die weit über eine bloße Kenntnisvermittlung hinausgehen. Der Minister für Hoch- und Fachschulwesen in der DDR, Prof. Dr. h. c. H.-J. Böhme, hat die Aufgabe der Vorlesungen zur Geschichte der Naturwissenschaften und zur Geschichte der Medizin (die Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik sind ein Teil des gesamten wissenschaftshistorischen Lehrprogramms in der DDR) im Sommer 1977 folgendermaßen bestimmt:

„Wir erwarten von der Ausbildung in der Wissenschaftsgeschichte, daß sie zur weiteren Ausprägung des sozialistischen Bewußtseins unserer Studenten beiträgt, daß der untrennbare Zusammenhang von gesellschaftlicher und wissenschaftlicher Entwicklung im historischen Prozeß tiefer studiert und erfaßt und damit auch das grundlegend Neue der Stellung der Wissenschaft und der gesellschaftlichen Verantwortung des Wissenschaftlers im Sozialismus bewußter wird. Deshalb verlangt die inhaltliche Erarbeitung und die Durchführung dieser Lehrveranstaltung besondere Sorgfalt und Unterstützung.“ ([L 1.3], S. 227)

Es hat lange und ausführliche Beratungen gegeben, ehe ein Lehrprogramm für das Lehrgebiet „Geschichte der Naturwissenschaften/Mathematik“ aufgestellt und im Herbst 1977 in Kraft gesetzt werden konnte. Verschiedene Variationen haben zur Wahl gestanden; mit den gültigen Lehrprogrammen hat man sich für das chronologische, das historische Vorgehen entschieden. Das bedeutet: Es sollen Stand, Reichweite, Methoden und Perspektiven der Mathematik in den jeweiligen ökonomischen Gesellschaftsformationen dargestellt werden, und zwar als Teil des gesellschaftlichen Lebens der entsprechenden Perioden. Dabei soll im Interesse eines marxistischen Gesichtsbildes auf die Darlegung der Wechselwirkung der Entwicklung der Mathematik mit der Entwicklung der Produktivkräfte, mit der Entwicklung der Naturwissenschaften und des philosophischen Denkens besonderer Wert gelegt werden. Die „Vorlesung zur Geschichte der Naturwissenschaften/Mathematik“ dient somit auch zur Vorbereitung auf die im Studienplan nachfolgende Lehrveranstaltung „Philosophische Probleme der Mathematik“.

Indessen kann – schon aus Zeitgründen – nicht die Entwicklung der gesamten Mathematik berücksichtigt werden. Es werden hier solche Teilgebiete der Mathematik historisch dargestellt, die ihrerseits Gegenstand der mathematischen Vorlesungen gemäß den beiden gültigen Studienprogrammen für die Mathematikausbildung sind. In der Anordnung des Stoffes, also der Verteilung des Stoffes auf 15 Vorlesungen, wird das Lehrprogramm für das Lehrgebiet „Geschichte der Naturwissenschaft/Mathematik“ zugrunde gelegt.

Themengruppe 1: Einführung in das Fachgebiet.

Themengruppe 2: Die Naturwissenschaften, insbesondere die Mathematik, in den altorientalischen Klassengesellschaften und der klassischen antiken Sklavereigesellschaft.

Themengruppe 3: Die Naturwissenschaften, insbesondere die Mathematik, in der feudalen Gesellschaftsordnung.

Themengruppe 4: Die Naturwissenschaften, insbesondere die Mathematik, in der Epoche des Übergangs vom Feudalismus zum Kapitalismus.

Themengruppe 5: Die Naturwissenschaften, insbesondere die Mathematik, in der Zeit der Industriellen Revolution und der Festigung des Kapitalismus.

Themengruppe 6: Die Naturwissenschaften, insbesondere die Mathematik, in der Periode des entwickelten Kapitalismus und des Übergangs zum Monopolkapitalismus.

Themengruppe 7: Die Naturwissenschaften, insbesondere die Mathematik, in der Epoche des Übergangs vom Kapitalismus zum Sozialismus/Kommunismus.

Dem Lehrprogramm entsprechend entfallen auf die sieben Themengruppen die folgenden Vorlesungen:

Themengruppe 1: Vorlesung 1

Themengruppe 2: Vorlesungen 2, 3, 4

Themengruppe 3: Vorlesung 5

Themengruppe 4: Vorlesungen 6, 7, 8, 9

Themengruppe 5: Vorlesungen 10, 11

Themengruppe 6: Vorlesungen 12, 13

Themengruppe 7: Vorlesungen 14, 15

Literaturhinweise

Es gibt eine riesige Fülle mathematikhistorischer Literatur; sie umfaßt Monographien, spezielle Forschungsergebnisse in Zeitschriftenartikeln, populärwissenschaftliche Darstellungen und erscheint in allen entwickelten Staaten der Erde. Gegenwärtig sind die Sowjetunion, die USA, Frankreich, Großbritannien, Italien, Kanada, die BRD, Österreich, die Schweiz, die DDR, die Niederlande, Dänemark, die ČSSR und Indien Länder mit besonders deutlich ausgewiesenen mathematikhistorischen Aktivitäten. In vielen Ländern der Erde werden mathematikhistorische Vorlesungen gehalten, die ihren Niederschlag zum Teil auch in Lehrbüchern gefunden haben.

Im folgenden wird für Studierende aus der DDR eine beschränkte Auswahl von Literatur zur Geschichte der Mathematik angegeben, die begleitend zu diesen „Vorlesungen“ gelesen werden sollte; spezielle Literatur wird den jeweiligen Vorlesungen 1 bis 15 hinzugefügt. Für die hier folgende Auswahl an grundlegender weiterführender Literatur waren die Anpaßbarkeit an Lehrveranstaltungen, die Einschätzung der dem Studenten zum Selbststudium zur Verfügung stehenden Zeit, der Gebrauchswert für die dem Studium nachfolgende Berufstätigkeit, aber auch die Verfügbarkeit maßgebend.

Bernal, J. D.: Die Wissenschaft in der Geschichte. 3. Auflage. Berlin 1967 (= [LA 2])

Struik, D. J.: Abriß der Geschichte der Mathematik. 6. Auflage. Berlin 1976 (= [LA 32])

Autorenkollektiv unter Leitung von A. P. Juškevič: Geschichte der Mathematik (russ.). Bd. 1 und 2, Moskau 1970; Bd. 3, Moskau 1972 (= [LA 11])

Tropfke, J.: Geschichte der Elementarmathematik. 7 Bände. Bd. 1 bis 4, 3. Aufl., Berlin 1930/40; Bd. 5 bis 7, 2. Aufl., Berlin 1921/24. Bd. 1. 4. Aufl., Berlin/New York 1980 (= [LA 33])

Kedrovskij, O. I.: Wechselbeziehungen von Philosophie und Mathematik im geschichtlichen Entwicklungsprozeß. (Übersetzung aus dem Russischen.) Leipzig 1984 (= [LA 19])

Biographien bedeutender Mathematiker. Ed. H. Wußing, W. Arnold. Berlin 1975, 3. Aufl. 1983 (= [LA 3])

Schriftenreihe zur Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin. NTM. Leipzig, seit 1960. Begründet durch G. Harig †, A. Mette †. Ed. R. Sonnemann, D. Tutzke, H. Wußing.

Istoriko-matematičeskije issledovanija (russ.). Moskau – Leningrad, seit 1948

Historia mathematica. San Diego, New York, Boston, London, Sydney, Tokyo, Toronto. Seit 1974

Biographienreihe: Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner. Teubner-Verlag Leipzig. Ed. D. Goetz, E. Wächtler, I. Jahn, H. Remane, H. Wußing

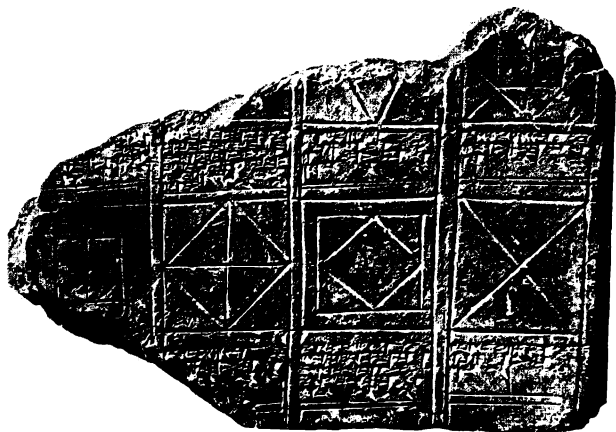
Biographien bedeutender Physiker. Ed. W. Schreier. Berlin 1984 (= [LA 4])

Geschichte der Naturwissenschaften. Ed. H. Wußing. Leipzig 1983 (= [LA 12])

Philosophenlexikon. Ed. E. Lange, D. Alexander. Berlin 1982 (= [LA 28])

Vorlesung 2

Anfänge der Mathematik. Altägypten. Mesopotamien



Keilschrifttext BM 15285, Vorderseite, ca. 22 cm × 15 cm

Anfänge der Mathematik

Die Anfänge

Die Geschichte der menschlichen produktiven Tätigkeit, des Denkens und der Sprache begann mit dem Auftreten des *homo sapiens* um 50000 v. u. Z. und der seitdem bis etwa 10000 v. u. Z. erfolgenden Herausbildung der Urgesellschaft. Mit dem *homo sapiens* lag aus biologischer Sicht der moderne Mensch vor; alle folgenden Entwicklungen sind Ergebnisse sozialer Prozesse.

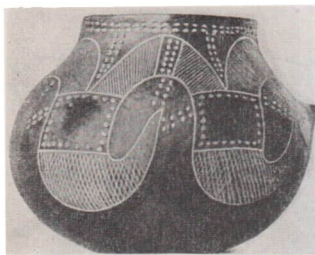


Abb. 2.1. Geometrische Ornamente auf Tongefäßen der jüngeren Steinzeit

In der Auseinandersetzung mit seiner Umwelt kam der Mensch der Urgesellschaft auch zu ersten mathematischen und astronomischen Kenntnissen. Archäologische Funde (Waffen, Tongefäße, Webereierzeugnisse u. a. m.) weisen vollendete geometrische Ornamente auf, und Untersuchungen an noch existierenden Gentilstämmen geben uns Anhaltspunkte, daß bereits damals Ansätze von Zahlensystemen und Kalenderrechnungen bekannt waren (Abb. 2.1).

Die erste Etappe auf dem Weg zum Zahlbegriff war das Erkennen solcher Unter-

schiede wie viel und wenig, große und kleine Anzahl, die begriffliche Unterscheidung von Eins und Viel. In der Folgezeit scheinen daraus Zweier- und Dreiersysteme entstanden zu sein. Noch heute benutzen Stämme Melanesiens, Australiens, Südamerikas und Südafrikas Zweiersysteme.

Obwohl der Einzelmensch der Frühzeit nur in Besitz weniger Zahlworte war, konnte gemeinschaftlich doch eine große Zahl erfaßt werden, z. B. beim Zählen von Viehherden. An Hand seiner 10 Finger zählt die erste Person die vorbeilaufenden Tiere ab, die zweite Person zählt mit ihren Fingern, wie oft bei der ersten beide Hände voll waren, usw. Drei Personen können so sicher bis 1000 zählen, obwohl jeder einzelne Mensch nur bis 10 zählen kann.

Anfangs waren die benutzten Zahlworte von den gezählten Gegenständen abhängig. Die Fidschi-Insulaner sagen z. B. bole für 10 Kähne, aber karo für 10 Kokosnüsse.

In einem langen Prozeß vollzog sich die Ablösung des Zahlwortes von der konkreten gezählten Menge. Einen der historischen Schritte stellt die Zuordnung zwischen verschiedenen konkreten Mengen und einer Repräsentationsmenge dar. Dabei haben anschauliche Repräsentationsmengen – 5 Finger einer Hand, 10 Finger, 20 Finger und Zehen, 12 Knöchel – auch bei der Herausbildung arithmetischer Operationen eine wesentliche Rolle gespielt, ebenso wie bei der Wahl einer Basis für das Zahlensystem (Abb. 2.2). Die Azteken zählten zur Basis 5, die Ägypter zur Basis 10, die

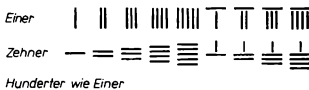


Abb. 2.2. Chinesische sog. Bambusziffern. Zahlensystem zur Basis 10

Kelten und Grusinier zur Basis 20; Reste davon gibt es in der mesopotamischen Mathematik und sogar noch heute in der französischen und dänischen Sprache (beispielsweise franz. $80 = 4 \cdot 20$; quatre-vingt).

Alle diese Entwicklungen im Zahlbereich setzten bedeutende Erkenntnisse und beachtliche Abstraktionsleistungen bei den Menschen der Urgesellschaft voraus: eindeutige Zuordnung zwischen abstrakten Zahlworten und der Quantität konkreter Dinge, additiver Aufbau der Zahlenreihe, Benutzung einer Zahl als Basis eines Zahlensystems. Am Ende der Urgesellschaft – die Urgesellschaft endete in verschiedenen Gebieten der Erde zu unterschiedlichen Zeiten, am frühesten in den Stromtälern des Euphrat, Tigris, Nil, Indus, Huangho – lagen nachweislich entwickelte Zahlensysteme vor.

Agrarische Revolution

Im 6. Jt. v. u. Z. begann in einigen geographischen Regionen der Erde mit der Ablösung der Jagd- und Sammelwirtschaft durch Ackerbau und Viehzucht (erste gesellschaftliche Arbeitsteilung) eine entscheidende Veränderung im Verhältnis der Menschen zur Natur und zugleich im Verhältnis zwischen den Menschen. In seiner Bedeutung ist dieser Umwälzungsprozeß, den man als agrarische Revolution bezeichnet,

kaum zu überschätzen. Er führte zur Auflösung der Urgesellschaft und zur Entstehung einer auf Agrarproduktion beruhenden Klassengesellschaft, des Privateigentums und des Staates. Mit dem Übergang zur Klassengesellschaft ist auch der Übergang von mathematischen und astronomischen Kenntnissen zu entsprechenden gesellschaftlichen Erkenntnissen verbunden; die spätere Herausbildung von Wissenschaften wurde eingeleitet.

Mit der Agrarproduktion verstärkte sich die Notwendigkeit, sich in Zeit und Raum zu orientieren. Es galt, landwirtschaftliche Termine (Aussaat, Ernte u. ä.), periodisch wiederkehrende Ereignisse (Überschwenmungen des Nils, des Indus) festzulegen und vorauszusagen, Feldgrößen zu bestimmen, Berechnungen zum Bau von Bewässerungskanälen durchzuführen u. ä. m. Das führte z. B. zur Beherrschung der arithmetischen Grundoperationen, zu geometrischen Aufgaben, zur weiteren Ausbildung der Zeitrechnung und des Kalenderwesens. Noch in der letzten Phase vollzogen sich weitere gesellschaftliche Arbeitsteilungen, eine zweite mit der Herausbildung einer breiten Schicht von Handwerkern und eine dritte, die Entstehung einer sozialen Gruppierung von Händlern und Kaufleuten.

Vor allem Handwerk und Handel und die damit verbundene Entwicklung der Produktivkräfte ermöglichten und stimulierten in einer auf Agrarproduktion beruhenden Klassengesellschaft die Herausbildung und Weiterentwicklung wissenschaftlicher Erkenntnisse. Für die konkrete Form und das Niveau der erzielten Ergebnisse erwies sich — bei im Prinzip gleichem Entwicklungsstand der Produktivkräfte — die Weltanschauung der jeweiligen Völker von großer Wichtigkeit. Trotz aller Unterschiede kann man aber feststellen, daß die Mathematik der auf Agrarproduktion beruhenden Klassengesellschaft ein bestimmtes Niveau nicht überschritt, auch nicht zu überschreiten brauchte: Sie war im wesentlichen elementare Mathematik der konstanten Größen.

Unsere Kenntnisse über die Entwicklung der Mathematik bei den verschiedenen Völkern sind sehr unterschiedlich. Kennen wir die altägyptische Mathematik nur für einen ziemlich engen Zeitraum, so ermöglicht uns das wesentlich reichhaltigere Quellenmaterial aus den mesopotamischen Kulturen, gewisse Entwicklungslinien der dortigen Mathematik zu charakterisieren. Die Entwicklung der griechisch-hellenistischen Mathematik können wir sogar aus inneren Gründen — d. h. nicht nur infolge äußerer historischer Ereignisse — periodisieren.

Dagegen wissen wir fast nichts über die mathematischen Kenntnisse der Induskultur (man schrieb auf Palmblättern und ähnlich leicht vergänglichem Material), der Perser und anderer altorientalischer Völker. Schwer datierbar sind auch die mathematischen Kenntnisse der vedischen Inder und die der Chinesen vor dem 6. Jh. v. u. Z., da hier die mündliche Tradierung des erworbenen Wissens überwog und die schriftliche Fixierung erst relativ spät einsetzte (in Indien z. B. erst im 5. Jh. u. Z.).

Die Wissenschaftstraditionen vieler ehemals kolonialer Völker, z. B. Südasiens, Lateinamerikas und Afrikas, sind von den europäischen Kolonialherren nicht erforscht oder ihre Zeugnisse vernichtet worden; das trifft z. B. auf das Kulturgut der Mayas zu. So ist es eine schwere Aufgabe, die vor diesen Völkern bei der Erforschung ihrer eigenen kulturellen und wissenschaftlichen Errungenschaften steht. Große Be-

mühungen zur Entwicklung der Wissenschaftsgeschichte, die auch bereits von beachtlichen Erfolgen gekrönt wurden, gibt es z. B. in Japan, in Indien, in den arabischen Ländern, im Iran, in einigen afrikanischen Staaten und vor allem in den betreffenden Unionsrepubliken der UdSSR.

Mathematik im alten Ägypten und in Mesopotamien

Ägyptische Mathematik

Kenntnisse über die ägyptische Mathematik vermitteln fünf mathematische Papyri, von denen die bedeutendsten der sogenannte Papyrus Rhind (benannt nach dem Engländer Rhind, der ihn kaufte) und der Moskauer Papyrus (benannt nach seinem jetzigen Aufbewahrungsort) sind. Diese beiden mathematischen Dokumente entstanden wahrscheinlich im 18. Jh. v. u. Z., obwohl sie auf Grund ihres Inhalts auf ältere Vorlagen zurückgehen müssen. Neben den mathematischen Papyri gibt es noch andere, z. B. juristische Dokumente, die indirekt über die gesellschaftliche Stellung der Mathematik Auskunft geben. Der Übergang von der Urgesellschaft zur Klassengesellschaft vollzog sich im Niltal Anfang des 3. Jt. und war ca. 2800 abgeschlossen. Bauwesen (Pyramiden), Holzbearbeitung, Schiffbau, Weberei, Metallverarbeitung machten bedeutende Fortschritte, die Schrift entwickelte sich.

Der gesellschaftliche Differenzierungsprozeß hatte den Stand der sog. Schreiber hervorgebracht. Sie stellten die Verwaltungsfachleute des Staates dar, waren teilweise mit beträchtlicher Macht ausgestattet und gehörten der herrschenden, ausbeutenden Schicht an. Sie trieben die Steuern ein, dirigierten riesige Arbeitsheere, übten die Gerichtsbarkeit aus und — sie praktizierten mathematische Kenntnisse: Probleme der Feldvermessung, insbesondere nach den ständig wiederkehrenden Nilüberschwemmungen, Berechnungen der Steuern und Abgaben, Berechnung der Größe von Vorratsbehältern, Projektierung von Bauwerken usw. Mit derartigen Fragen befassen sich auch die mathematischen Papyri (Anm. 2.1).

Interessant sind auch Dokumente zur gesellschaftlichen Stellung der Schreiber: So erwähnt ein Schreiber einen anderen, seine Kenntnisse zu erweitern, unter Verweis auf die wichtige Stellung des Schreibers:

„Man gibt Dir einen See auf, den Du graben sollst. Da kommst Du zu mir, um Dich nach dem Proviant für die Soldaten zu erkundigen und sagst: ‚Rechne ihn mir aus.‘ Du läßt Dein Amt im Stich, und es fällt auf meinen Nacken, daß ich Dir seine Ausübung lehren muß ... Denn sieh, Du bist ja der erfahrene Schreiber, der an die Spitze des Heeres steht. Es soll (also) eine Rampe gemacht werden, 730 Ellen lang und 55 Ellen breit, die 120 Kästen enthält und mit Rohr und Balken gefüllt ist; oben 60 Ellen hoch, ... Man erkundigt sich nun bei den Generälen nach dem Bedarf an Ziegeln für sie, und die Schreiber sind allesamt versammelt, ohne daß einer unter ihnen etwas weiß. Sie vertrauen alle auf Dich und sagen: ‚Du bist ein erfahrener Schreiber, mein Freund; so entscheide das schnell für uns ...‘“ ([L 2.9], S. 120)

Die mathematischen Bezeichnungen und Begriffe weisen noch ganz deutlich auf ihren Ursprung aus dem Konkreten hin: So ist das Schriftsymbol (Hieroglyphe)

für „zerbrechen“ synonym mit Subtraktion. Die Variable, d. h. die gesuchte Größe in Gleichungen, wird mit dem Zeichen für Haufen, Menge wiedergegeben. Ein kleines Hohlmaß, nämlich $\frac{1}{320}$ des Scheffels, wurde durch die Hieroglyphe $\circ$ bezeichnet und diente zur Bezeichnung des Stammbruchs. Später wurde aus $\circ$ ein Punkt, und eine Zahl mit darübergesetztem Punkt bezeichnete den entsprechenden Stammbruch:

$$\dot{3} = \frac{1}{3}.$$

Das System der Zahlen war dezimal aufgebaut, stellte aber kein Positionssystem dar: Jede der Zehnerpotenzen – bis 10^6 – besaß ein Individualzeichen; die Zahlen wurden durch deren Reihung gebildet (Abb. 2.3; Abb. 2.4).

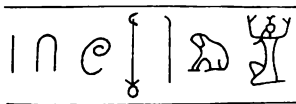


Abb. 2.3. Ägyptische Individualzeichen für Zehnerpotenzen bis 10^6 und „Viel“

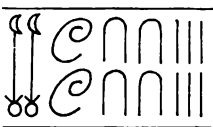


Abb. 2.4. Die Zahl 2246 durch Reihung der Individualzeichen gebildet

Die Rechentechnik der Addition und Subtraktion war einfach durch Abzählung zu bewältigen. Multiplikation und Division beruhten hauptsächlich auf fortgesetztem Verdoppeln und Halbieren. Der Schreiber strich die zu addierenden Posten an:

Beispiel 1: $13 \cdot 12$

/ 1	12
2	24
/ 4	48
/ 9	96
	<u>156</u>

Beispiel 2: $21:8$

1	8
/ 2	16
/ 2	4
4	2
/ 8	1
<u>2 + 2 + 8</u>	

Bemerkenswerterweise war die Bruchrechnung auf dem Rechnen mit Stammbrüchen aufgebaut. Demgemäß stellte für den Schreiber $\frac{2}{5}$ kein Ergebnis, keine Zahl

dar, sondern eine Divisionsaufgabe mit der Lösung $3 + 15$. Folgerichtig enthält der Papyrus Rhind eine umfangreiche Tabelle von Zerlegungen der Divisionsaufgaben $\frac{2}{n}$, $n = 5, \dots, 101$, in Stammbrüche. Bei genauer Betrachtung (Anm. 2.2) zeigt sich sogar, daß stets eine „kanonische“ Zerlegung verwendet wird, die z. B. die Zerlegung $\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$ vermeidet.

Welche Haupttypen von Problemstellungen kommen nun in den Texten vor?

Eine große Rolle spielen die sog. pšw-Rechnungen: pšw kommt von ägyptisch „kochen“ (pšf). Das Wort wird gebraucht zur Kennzeichnung der Brot- und Bierherstellung. Das Verhältnis $q = \frac{b}{a}$ der verwendeten Getreidemenge b zu der Anzahl a der Brote bzw. der Bierkrüge ist dann ein Maß für die Qualität von Brot bzw. Bier. Die pšw-Rechnungen zielen darauf ab, eine der drei Größen aus den beiden anderen zu berechnen, wobei noch Umrechnungsverhältnisse der einzelnen Getreidearten, $b = ub'$, zu berücksichtigen sind.

„Form des Berechnens von 13 Scheffeln oberägyptischen Getreides

Wenn man Dir nennt 13 Scheffel oberägyptischen Getreides,

(sie) umrechnend in

18 Krüge Bier, (als Krüge von) Spelt —

Dattlersatz (— Bier). Siehe

(1 Krug) Spelt-Dattlersatz (— Bier)

ist $2\frac{1}{6}$. Rechne du mit $2\frac{1}{6}$, um

zu finden 13. Siehe: er hat gesagt: eine (einfache Zahl) 13

ist diese 13 Scheffelzahl. Es entstehen 6 mal.

Rechne du mit 6, um zu finden 18.

Es entstehn 3 mal. Siehe: es ist das Backverhältnis

3. Du hast richtig gefunden.“ ([L 2.6], S. 92)

Vergleichsweise abstrakter ist der Typ der sog. hau-Rechnungen, die auf die Auflösung von Gleichungen hinauslaufen. Die Hieroglyphe für Haufen, Menge steht an Stelle der zu bestimmenden Größe. Es folgt ein besonders klares Beispiel einer linearen Gleichung; die Übertragung in heutige Formelsprache ist ohne Schwierigkeiten möglich:

„Form der Berechnung eines Haufens, gerechnet $\left(1\frac{1}{2}\right)$ mal zusammen mit

④ Er ist gekommen bis 10. Der Haufe nun nennt sich?

Berechne du die Größe dieser 10 über dieser 4. Es entsteht 6.

Rechne du mit $1\frac{1}{2}$, um zu finden 1. Es entsteht $\frac{2}{3}$.

Berechne du $\frac{2}{3}$ von diesen 6. Es entsteht 4. Siehe: 4 nennt sich.

Du hast richtig gefunden.“ ([L 2.6], S. 114)

Es soll also die Gleichung $\frac{3}{2}x + 4 = 10$ aufgelöst werden. Im ersten Schritt rechnet der Schreiber $\frac{3}{2}x = 10 - 4 = 6$. Das Reziproke von $\frac{3}{2}$ ist $\frac{2}{3}$. Mit diesem Fak-

tor werden beide Seiten der Gleichung multipliziert: $1 \cdot x = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$. Der Schreiber erhält die Lösung $x = 4$.

Eine Passage aus einem anderen mathematischen Dokument erfordert die Behandlung des Gleichungssystems

$$x^2 + y^2 = 100, \quad y = \frac{3}{4}x$$

mit der Lösung $x = 8$, $y = 6$. Dies bedeutet das Auftreten des pythagoreischen Zahlentripels $2 \cdot 3$, $2 \cdot 4$, $2 \cdot 5$. Aber es gibt keinen Beleg dafür, daß die altägyptischen Mathematiker den Sachverhalt kannten, den wir heute als Satz des Pythagoras bezeichnen. Dagegen werden mehrfach und sehr durchsichtig arithmetische und geometrische Reihen behandelt; in lakonischer Form z. B. folgendermaßen:

„Inventar eines Haushaltes:

7 Häuser 2401 Getreideähren
49 Katzen 16807 hekat (ein Getreidemaß)
343 Mäuse zusammen: 19606“ ([L 2.12], S. 121, engl.)

Der Sinn der Aufgabe, in dem sich auch die Verehrung der Ägypter für Katzen widerspiegelt, ergibt sich daraus, daß ein Hauswesen aus 7 Häusern besteht; in jedem Haus leben 7 Katzen, jede von ihnen frißt 7 Mäuse, von denen jede 7 Ähren gefressen hätte, aus jeder von ihnen wären 7 hekat Getreide als Ernte hervorgegangen.

Schließlich seien noch einige Bemerkungen zur altägyptischen Geometrie gemacht. Es gab ein Äquivalent für den Begriff des Winkels. Einfache und zusammengesetzte Flächenzerlegungen und Berechnungen geradlinig begrenzter Flächen sowie Volumenbestimmungen wurden vorgenommen. Die Berechnung der Kreisfläche wurde meist

mit dem Näherungswert $\pi \approx 3$ geleistet, gelegentlich auch mit $\frac{\pi}{4} \approx \left(\frac{8}{9}\right)^2$. Das

Glanzstück der altägyptischen Mathematik stellt die exakte Angabe des Volumens eines Pyramidenstumpfes dar, die auf die Anwendung der Formel $V = \frac{h}{3} (a^2 + ab + b^2)$

hinausläuft (Abb. 2.5). Der Text läßt keine Entscheidung darüber zu, ob ein gerader oder ein schiefer Pyramidenstumpf gemeint ist und wie das Ergebnis gefunden wurde.

Mesopotamische Mathematik

In Mesopotamien, dem „Zwischenstromland“ zwischen Euphrat und Tigris, begann der Übergang zur Klassengesellschaft im 5. Jt.; mit der Entstehung sumerischer Stadtstaaten im 4. Jt. war er abgeschlossen. Von den Sumerern wurden die Grundlagen für das künftige hohe Niveau der mesopotamischen Mathematik gelegt. Aus einer der sumerischen Städte, Uruk, besitzen wir die ersten mathematischen Texte. Weitere erhaltengebliebene Tontafeln mathematischen Inhalts stammen aus der Zeit des altbabylonischen Reiches, ca. 1800–1530 v. u. Z. (Anm. 2.3).

In der Mitte des 3. Jt. genügte die Stadtstaatstruktur den auf großräumige Organisation angewiesenen Erfordernissen der Bewässerungswirtschaft nicht mehr; es ent-

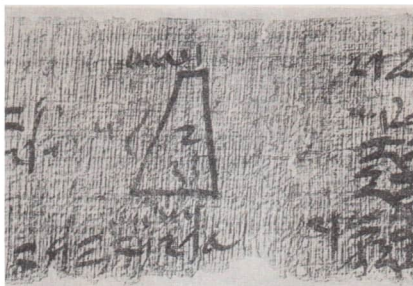


Abb. 2.5. Originaltext zur Pyramidenstumpfaufgabe. Aus dem Moskauer Papyrus

stand das erste Großreich, das der semitischen Akkader. Diese knüpften an die wissenschaftlichen Traditionen der Sumerer an und führten sie weiter. Auf diese Weise erhielt sich die sumerische Wissenschaft unter der Herrschaft der Babylonier, Assyrer und sogar noch der Perser.

Gegen Ende des 2. Jt. ging die auf Flußtalbewässerung beruhende Stromtalzivilisation Mesopotamiens zugrunde. Das politische Zentrum verlagerte sich nach Vorderasien und in die Ägäis; das wissenschaftliche Zentrum verschob sich in die Ägäis. (Zur gleichen Zeit erlebten Indien und China große wissenschaftliche Blütezeiten.) Dennoch blieb z. B. Babylon infolge der relativen Toleranz der persischen Eroberer noch jahrhundertlang ein bedeutendes Kulturzentrum. Dies schuf die Möglichkeit zur Weitergabe des mesopotamischen Wissensschatzes an Perser, Phönizier und schließlich sogar noch an die Griechen.

Gemessen an der ägyptischen stand die mesopotamische Mathematik auf einem wesentlich höheren Niveau. Aber auch hier war sie primär von den gesellschaftlichen Anforderungen geprägt. Typisch für Mesopotamien war ein ausgebreitetes System künstlicher Bewässerung; folgerichtig nehmen Wasserbauprobleme wie Kanalbau, Dammbau, Feldvermessung einen hervorragenden Anteil in den mathematischen Texten ein. Hervorzuheben ist auch der außerordentlich hohe Stand der Rechenteknik, die, wie sich noch zeigen wird, schon Züge echter algebraischer Verfahrensweisen enthält. Diese auffällige Erscheinung erklärt sich wohl auch daraus, daß Mesopotamien gezwungen war, einen ausgedehnten Handel — Holz, Steine, Erze — zu unterhalten, da es kaum entsprechende natürliche Reichtümer besaß.

Im Unterschied zu Ägypten sind aus Mesopotamien verhältnismäßig viele mathematische Dokumente erhalten geblieben; sie waren in Keilschrift auf Tontäfelchen geschrieben (Abb. 2.6). Übrigens hat man bei Ausgrabungen ganze „Bibliotheken“ von Keilschrifttafeln gefunden, die u. a. Wissenschaftliches, Gesetze, Verwaltungsvorgänge, aber auch Heldensagen und Religiöses enthalten, z. B. eine Vorform der Sintflutlegende der Bibel.

Die mathematischen Dokumente sind so zahlreich und stammen aus so verschied-

denen Zeiten, daß es (im Unterschied zur altägyptischen Mathematik) möglich wurde, die Entwicklung der mesopotamischen Mathematik über einen langen Zeitraum wenigstens in Umrissen zu rekonstruieren. Ungefähr 60 Keilschrifttafeln sind übersetzt; dazu kommen noch ca. 200 Zahlentafeln. Mehrere tausend Tafeln sind noch nicht entziffert bzw. in einer modernen Sprache ediert.



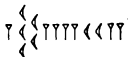
Abb. 2.6. Ausschnitt aus dem Keilschrifttext BM 85194 (ca. 9,6 cm × 9,6 cm).

Illustration zur Berechnung der Breite der Grabensohle bzw. Dammkrone bei ringförmigem Wall

Einer der bemerkenswertesten Züge der babylonischen Mathematik besteht darin, daß sie ein hervorragendes Zahlensystem entwickelt hat, und zwar ein **Positionssystem** zur Basis 60. Dazu wurden zwei Zeichen verwendet, ein Keil γ und ein Haken $\{$; der Keil steht für die Einheit, der Haken für das Zehnfache. Aus den beiden Zeichen werden durch Reihung die 60 Ziffern kombiniert; also bedeutet etwa

$\{ \gamma \gamma \gamma$

soviel wie 23. Alle Ziffern und Zahlen sind aber zugleich im **Sexagesimalsystem** zu verstehen: Υ bedeutet soviel wie $1 \cdot 60^k$ und $\langle$ soviel wie $10 \cdot 60^k$ mit k ganz ≥ 0 . Eine Zahl wie



kann also, da im Babylonischen kein „Komma“ existierte, sowohl als $1 \cdot 60^3 + 54 \cdot 60^2 + 1 \cdot 60 + 22$ oder auch als $1 \cdot 60 + 54 \cdot 60^2 + \frac{1}{60} + \frac{22}{60^2}$ gelesen werden. Die Bruchrechnung kann somit sozusagen im Bereich der ganzen (positiven) Zahlen durchgeführt werden.

Bei praktischen Rechnungen ergibt sich bei dieser großen Basis eines Positionssystems die gemeinte Zahl aus deren Größenordnung oder aus dem Sinn der jeweiligen Aufgabe. Lästiger war der Umstand, daß im Positionssystem nicht besetzte Stellen schwer deutlich gemacht werden konnten, da **kein Zeichen für die Null existierte**; man half sich durch Zusammenziehen zusammengehöriger Ziffernbestandteile. In der späten babylonischen Mathematik, vermutlich seit dem 6. Jh. v. u. Z., also seit der Perserzeit, kam ein inneres Lückenzeichen, eine Art Nullzeichen, auf.

Das **sexagesimale Positionssystem** war außerordentlich leistungsfähig und allen späteren Zahlensystemen der Antike überlegen (Antm. 2.4). Daher wurde es u. a. von den griechisch-hellenistischen Mathematikern dort verwendet, wo viele und ausgiebige Rechnungen durchgeführt werden mußten, d. h. insbesondere in der Astronomie. Mit dem hellenistischen Mathematiker und Astronomen Ptolemaios (2. Jh. u. Z.) hat sich das sexagesimale Zahlensystem in der Astronomie durchgesetzt; er schrieb:

„Im allgemeinen werden wir die Ansätze der Zahlen nach dem Sexagesimalsystem machen, weil die Anwendung der Brüche (d. h. der gewöhnlichen, im griechischen Zahlssystem bezeichneten Brüche; Wg) unpraktisch ist.“ ([L 2.11], I, S. 25)

Mit der Übernahme durch die griechisch-hellenistische Astronomie gelangte das Sexagesimalsystem nach Europa und damit auch die Einteilung des Vollwinkels in 360 Grad, der Grad zu 60 Minuten von je 60 Sekunden.

Indessen hat das Sexagesimalsystem einen Nachteil: Das kleine Einmaleins geht bis 59 mal 59. Das babylonische Zahlensystem hat daher nur dann einen hohen Gebrauchswert, wenn genügend viel Multiplikationstabellen vorhanden sind. Tatsächlich sind diese Tabellen auch gefunden worden; sie gehörten offenbar zum Handwerkszeug der babylonischen Schreiber-Mathematiker.

• Es wurden auch Reziprokentabellen $\frac{1}{a}$ gefunden, Tabellen, die die Division mittels $\frac{b}{a} = b \cdot \frac{1}{a}$ auf Multiplikation zurückführen, ferner Quadratwurzeltabellen, Kubikwurzeltabellen, daneben noch Tabellen $n^2 + n^3$. Die Berechnung der Quadratwurzeln geschah nach der Rechenanweisung $\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a} = \frac{1}{2} \left(a + \frac{N}{a} \right)$, wenn a^2 die größte noch unterhalb N liegende Quadratzahl ist.

Auch die babylonische Geometrie zeigt eine bemerkenswerte abstrakte Durch-

dringung der praktischen Probleme: Die Bestimmung der Flächen von Feldern ist kombiniert mit Rechnungen. Die Gesamterträge der Ländereien erscheinen abhängig auch vom „spezifischen“ Ertrag, als Funktion der Güte des Bodens. Bei Berechnungen von Dämmen mit trapezförmigem Querschnitt wird nach der Neigung der Böschung, nach der Breite der Dammkrone, nach der Zahl der benötigten Arbeiter bei einer vorgegebenen mittleren Arbeitsleistung (einer Art Norm) und anderem mehr gefragt. Berechnungen von ringförmigen Wallbauten, Tempelfundamenten, Brunnenziegeln treten auf, — und immer wieder Kanalbauten. Ein Beispiel (giß ist ein Längenmaß, SAR ein Raummaß):

„Ein kleiner Kanal. 6 giß seine Länge
2 Ellen obere Weite, 1 Elle untere Weite
1 1/2 Ellen seine Tiefe
1/3 SAR Erde die Leistung,
18 Leute. Die Tage sind was? ...
11 Tage (und) ein 4-tel (sind) die Tage.“ [(L 2.7), I, S. 512]

Aus der Analyse der Rechengänge geht hervor, daß — über die aus Ägypten bekannten elementargeometrischen Kenntnisse hinaus — Proportionalitäten am Dreieck und unter der Bezeichnung „Böschungswert“ ein auf den trigonometrischen Kotangens hinauslaufendes Verhältnis benutzt wurden. Im allgemeinen wurde π durch $3 \frac{1}{8}$ angenähert, in späteren Texten durch $3 \frac{1}{8}$. Der mit dem Satz von Thales ausgedrückte Sachverhalt war weit vor Thales in der mesopotamischen Mathematik bekannt.

Der pythagoreische Lehrsatz war seinem Inhalt nach zeitlich weit vor Pythagoras in der mesopotamischen Mathematik gebraucht. In der Frühzeit wurde er nur bei konkreten Fragestellungen verwendet. So lautet eine Aufgabe beispielsweise (die Zahlenangaben sind sexagesimal):

„Ein Balken (?) von der Länge 0;30 (der gegen eine Mauer oder ähnliches steht) ist um 0;6 mit der Spitze herabgerutscht. Wie weit hat sich das untere Ende von der Wand entfernt?“ [(L 2.7), II, S. 47]

Aber die mesopotamische Mathematik ist darüber hinaus auch zum Verständnis des theoretischen Gehalts des pythagoreischen Lehrsatzes vorgedrungen. Die Aufgabe, rationalzahlige Längen von Seiten rechtwinkliger Dreiecke zu bestimmen, führt auf die Angabe der Zahlentripel a, b, c mit $a = r^2 - s^2$, $b = 2rs$, $c = r^2 + s^2$; $r, s > 0$, ganz. Eine solche vollständige Übersicht tritt uns erst wieder am Ausgang der Antike bei Diophantos von Alexandria entgegen. Die aus der pythagoreischen Schule stammende Methode zur Angabe ganzzahliger Tripel ist in dem babylonischen Verfahren als Spezialfall enthalten.

Ein zweites Moment der mesopotamischen Mathematik verdient ebenfalls eine etwas ausführlichere Erörterung, nämlich der schon als algebraisch zu bezeichnende Charakter der Rechentechnik. Die jüngeren Keilschrifttexte zeigen insgesamt eine starke Neigung zur Ideographie, d. h. zu einer mit Symbolen durchsetzten Kurzschreibweise. Für die mathematischen Texte bedeutete das den aufkommenden Gebrauch feststehender Fachtermini und -zeichen, z. B. „la“ bzw. „ab“ für Sub-

traktion bzw. Addition und zur Konstatierung der Gleichheit zweier Seiten. Das folgende Beispiel, das die Auflösung biquadratischer Gleichungen fordert, verdeutlicht die Struktur solcher Aufgaben (Zahlenangaben sexagesimal):

„Länge mit 3 vervielfacht
 Breite mit 2 vervielfacht
 addiert quadratisch
 Fläche (der) Länge addiert und so 4,56,40
 Fläche (der) Länge mit 2 vervielfacht
 addiert und so 5,11,40
 Fläche (der) Länge subtrahiert 4,26,40
 mit 2 vervielfacht
 subtrahiert und so 4,11,40.“ ([L 2.9], S. 71)

Bezeichnet man Länge und Breite mit x bzw. y und „übersetzt“ in heutige Schreibweise (mit sexagesimalen Zahlenangaben), so erhält man

$$\begin{aligned}(3x + 2y)^2 + x^2 &= 4, 56, 40 \\ + 2x^2 &= 5, 11, 40 \\ - x^2 &= 4, 26, 40 \\ - 2x^2 &= 4, 11, 40\end{aligned}$$

Gemeint ist eine Gruppe von Aufgaben; die erste lautet

$$\begin{aligned}(3x + 2y)^2 + x^2 &= 4, 56, 40 \\ (3x + 2y)^2 + 2x^2 &= 5, 11, 40\end{aligned}$$

in der entsprechenden Größenordnung der sexagesimalen Zahlen, die anderen beiden Aufgaben kombinieren die erste Zeile mit der dritten bzw. vierten. Für die erste Aufgabe bedeutet das in heutiger Schreibweise

$$\begin{aligned}(3x + 2y)^2 + x^2 &= 4 \cdot 60^2 + 56 \cdot 60^1 + 40 \cdot 60^0 \\ (3x + 2y)^2 + 2x^2 &= 5 \cdot 60^2 + 11 \cdot 60^1 + 40 \cdot 60^0,\end{aligned}$$

man erhält dann $x = 30 \cdot 60^0$, $y = 20 \cdot 60^0$. (Einer Sexagesimalpotenz niedriger entspricht die Lösung $x = 30 \cdot 60^{-1}$, $y = 20 \cdot 60^{-1}$, die rechte Seite würde hier bedeuten $4 \cdot 60^1 + 56 \cdot 60^0 + 40 \cdot 60^{-1}$.) In sexagesimaler Schreibweise haben also alle Aufgaben die Lösung $x = 30$, $y = 20$.

Die Analyse der Rechengänge zeigt eine erstaunliche Geschicklichkeit beim Umformen von Gleichungen: Es werden zweckmäßige Hilfsgrößen eingeführt. Es werden, wenn mehrere Variable auftreten, Variable eliminiert. Im Grunde rechnete der babylonische Schreiber fast ebenso, wie wir es heute tun.

In einigen Texten aus der jüngeren Zeit, zwischen 1000 und 800 v. u. Z., sind die Aufgaben offensichtlich von den Lösungen her, sozusagen von rückwärts, verfaßt worden, also, wie etwa beim obigen Beispiel, aus tiefer Einsicht in die Struktur des Aufgabentyps. Diese Erscheinungen weisen nun schon deutlich auf eine höhere Etappe der Entwicklungsgeschichte der Mathematik hin, wie sie schließlich in der ionischen Periode der griechisch-hellenistischen Mathematik Gestalt annehmen

konnte: Das **praktische, handgreifliche Problem** tritt in den Hintergrund, die **Mathematik** löst sich ab von ihren direkten Ursprüngen und beginnt sich zu verselbständigen, auf Grund ihrer eigenen inneren Dynamik zu formieren.

Der Höhe der abstrakt-algebraischen Denkweise entsprechen auch die in der babylonischen Mathematik bewältigten Probleme. Arithmetische und geometrische Reihen treten auf. Lineare, quadratische, kubische und biquadratische Gleichungen werden in verschiedenartigsten Formen behandelt. Einmal tritt sogar der Fall einer Gleichung vierten Grades auf, die sämtliche Glieder und vier reelle positive Lösungen besitzt. Gleichungssysteme werden gelöst, bis zu 10 Gleichungen mit 10 Variablen. Es existieren ferner Texte, die transzendente Fragestellungen und Methoden enthalten; diese treten uns entgegen bei Zins- und Zinsesaufgaben und entsprechenden Umkehrproblemen, die – in unserer Sprechweise – Logarithmieren und Lösung von Exponentialgleichungen erfordern. Dazu werden Tabellen der Form (a^n) , $n = 2, 3, \dots, 10$, benutzt und auch „interpoliert“. Hier zeigt sich eine frühe Vorform des naiven Stetigkeits- und Funktionsbegriffs.

Als Widerspiegelung der gesellschaftlichen Zustände sind sog. „Verteilungsaufgaben“ recht häufig: Verteilung der Abgaben bei Feldern mit unterschiedlichem spezifischem Ertrag, Berechnung der Entlohnung bei abzuliefernden Ziegeln entsprechend der beim Transport zurückgelegten Entfernung, u. a. m. Die Verteilung eines Erbes – in Geld oder Felderflächen – an Brüder führt auf arithmetische Reihen; der Erbteil wurde nach der Reihenfolge der Geburt gestaffelt. Typisch ist etwa die folgende Aufgabe, die die Bestimmung des Anfangsgliedes und der Differenz einer arithmetischen Reihe erfordert:

„10 Brüder; 1 $\frac{2}{3}$ Minen Silber.

Bruder über Bruder hat sich erhoben (hinsichtlich seines Anteils).

Was er sich erhoben hat, weiß ich nicht.

Der Anteil der 8-ten (ist) 6 Schekel, Bruder über Bruder
um wieviel hat er sich erhoben.“ [(L 2.7), II, S. 240/241]

Die Lösung wird richtig zu 0;1,36 Minen Silber angegeben.

Die Rechenvorschrift zur Bestimmung der Summe der ersten zehn Quadrate würden wir heute – verallgemeinert – so schreiben:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3} (1 + 2n) \sum_{k=1}^n k.$$

Die Behandlung quadratischer Gleichungen strebte das Ziel an, das Problem auf Normalformen zurückzuführen. So führt schon ein altbabylonischer Text (in moderner Formulierung) auf das Gleichungssystem

$$xy + x - y = 183, \quad x + y = 27.$$

Nach Einführung der neuen Variablen $y' = y + 2$ ergibt sich $x \cdot y' = F'$, $x + y' = a$, eine der babylonischen Normalformen. Als Lösung erhält der Schreiber

$$x = \frac{1}{2} a + b, \quad y' = \frac{1}{2} a - b \quad \text{mit} \quad b = \sqrt{\left(\frac{1}{2} a\right)^2 - F'}.$$

Allgemein wurden für Gleichungen mit einer Variablen folgende Normalformen angestrebt (bei stets positiven Koeffizienten):

$$ax = b; \quad x^2 = a; \quad x^2 + ax = b; \quad x^2 - ax = b; \quad x^3 = a; \\ x^2(x + 1) = a.$$

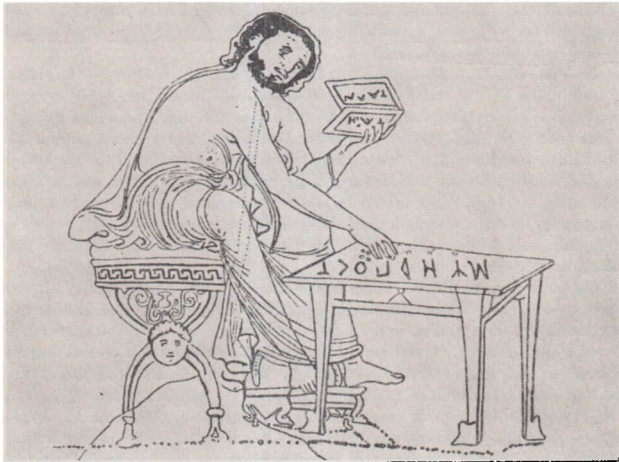
Für Gleichungen mit zwei Variablen handelte es sich um die Typen

$$x + y = a, \quad x \cdot y = b; \quad x - y = a, \quad x \cdot y = b; \\ x + y = a, \quad x^2 + y^2 = b; \quad x - y = a, \quad x^2 + y^2 = b.$$

Die mesopotamische Rechentechnik hat sich unter Verwendung vorzüglicher Rechentafeln an recht komplizierten, durch die gesellschaftliche Entwicklung determinierten Problemen entfaltet. Darüber hinaus wurden Problemstellungen behandelt, die schon als Resultat der innerlogischen Entwicklung der Mathematik anzusehen sind. Die mesopotamische Rechenkunst erreichte ein Niveau, das bereits Züge echten algebraischen Denkens aufweist und erst am Ausgang der Antike wieder annähernd erreicht, im islamischen Osten seit dem 10. Jh. und im christlichen Europa sogar erst während der Renaissance übertroffen werden konnte.

Vorlesung 3

Klassische Antike: Ionische Periode. Athenische Periode



Griechischer Rechner am Tisch (Darius-Vase)

Die Mathematik in der griechisch-hellenistischen Antike

In der Zeit von der Mitte des 2. Jt. bis zum 8./7. Jh. v. u. Z. vollzogen sich im Osten des Mittelmeerraumes — in Kleinasien, im Vorderen Orient, in Griechenland und Ägypten — weitreichende ökonomische, politische und soziale Veränderungen.

Gesellschaftliche Veränderungen

Die politische Geschichte in jener Zeit und in jenem geographischen Raum verlief stürmisch. Um die Jahrtausendwende blieb Ägypten in der Entwicklung zurück und verlor seine ehemalige Machtposition. Hethiter und Assyrer hatten mächtige Reiche errichtet, doch im 6. Jh. v. u. Z. eroberten schließlich die Perser den ganzen Vorderen Orient und bedrohten Griechenland.

Seit der Mitte des 2. Jt. waren aus dem Norden griechische Stämme — vor allem Dorer und Ionier — auf das griechische Festland, die Inseln der Ägäis sowie in Küstenregionen Kleinasiens eingewandert und hatten die dort ansässigen Stämme verdrängt oder unterjocht. Später kam es zur Gründung einer Vielzahl griechischer Pflanzstädte an den Küsten des Schwarzen Meeres, Süditaliens, des östlichen Mittelmeeres und Südfrankreichs. Die Phönizier, die etwa auf dem Gebiet des heutigen Libanon ansässig waren, kolonisierten Teile der afrikanischen Nordküste. Eine ihrer Siedlungen, das im 9. Jh. gegründete Karthago (nahe dem heutigen Tunis), wurde so mächtig, daß es im 3. und 2. Jh. v. u. Z. mit den Römern einen Kampf um die Vorherrschaft im Mittelmeer führen konnte.

Mit der seit dem 12./11. Jh. rasch zunehmenden Verwendung des Eisens als Gebrauchsmetall, das bedeutende Vorteile gegenüber der Bronze aufwies, konnten die Produktionsmittel und Waffen wesentlich verbessert werden. Die einfachen Werkzeuge wie Hammer, Säge, Schere und Zange erreichten bereits damals ihre heutige Standardform; Schiffbau, Bergbau, Töpferei, Weberei, Metallverarbeitung und andere Bereiche der materiellen Produktion konnten Fortschritte erzielen.

Auch in Griechenland wurde eine höhere Produktivität erreicht, die an einigen Stellen eine über den Bedarf der unmittelbaren Umgebung hinausreichende Produktion ermöglichte. Waren wurden zum Handelsobjekt im Großmaßstab. Die rege Handelstätigkeit begünstigte die ökonomische Entwicklung der küstennahen Regionen und führte auch in diesem geographischen Raum zur Herausbildung einer besonderen Schicht von Händlern und Kaufleuten. In den griechischen Handelsstädten bildete sich die Struktur der polis als Staatsform heraus, die das Aufblühen der Kultur und mit ihr das Entstehen von Philosophie und Mathematik begünstigt hat.

Seit dem 8./7. Jh. v. u. Z. bildete sich in Griechenland die antike Sklavereigesellschaft heraus. Dies zog eine Verschärfung der Ausbeutung nach sich. Sklaven — als beseelte oder sprechende Werkzeuge bezeichnet — wurden sogar zur Grundlage einiger Teile der Produktion. In Athen z. B. gab es zur Zeit der Hochblüte im 5. Jh. v. u. Z. bei schätzungsweise 320 000 Einwohnern nur 172 000 juristisch Freie; von ihnen waren aber nur rund ein Drittel im Besitz der athenischen Bürgerrechte und konnten somit aktiv am politischen Leben teilnehmen. Andererseits aber bot diese

Verschärfung der Ausbeutung einer zunehmenden Anzahl von Menschen – natürlich unter den Sklavenhaltern – die Möglichkeit, sich aus dem unmittelbaren Produktionsprozeß herauszulösen und sich mit Kunst, Kultur, Philosophie und Wissenschaft zu beschäftigen. Sie vertraten die Ideologie der Sklavenhalter, und die von ihnen entwickelte Wissenschaft und Philosophie diente den Interessen der herrschenden Schichten.

Mit dem 8. und 7. Jh. bildete sich zunächst in den ionisch-griechischen Stadtstaaten Kleinasiens – in enger Berührung mit der mesopotamischen wissenschaftlichen Tradition und iranischen Ideologie – eine geistige Atmosphäre heraus, die der Entstehung wissenschaftlichen Denkens günstig war. Und so vollbrachten die Griechen, unter den neuen ökonomisch-politischen Bedingungen und begünstigt durch geographische und klimatologische Umstände, die große Leistung, aus einer nahezu empirisch entstandenen und nach Art von Rezepten betriebenen Mathematik eine systematische, logisch-deduktiv dargelegte, eigenständige Wissenschaft Mathematik mit spezifischen Zielsetzungen und Methoden gemacht zu haben. Das von ihnen geschaffene System der Geometrie wurde auf zwei Jahrtausende das große Vorbild für den deduktiven Aufbau einer wissenschaftlichen Disziplin schlechthin und sollte sogar noch in der Neuzeit die Entwicklung der Mathematik nach Stil und Inhalt prägen.

Periodisierung

Für die griechisch-hellenistische Mathematik kann man (Anm. 3.1.) nach Methode, Inhalt und Umfang vier ziemlich deutlich getrennte Perioden unterscheiden (Abb.3.1).

Eine erste Früh- bzw. Vorbereitungsperiode wird wegen ihres engen Zusammenhangs mit der ionischen Naturphilosophie ionische Periode genannt und ist auf die Zeit vom Ende des 7. Jh. bis zur Mitte des 5. Jh. zu datieren. In dieser Periode erfolgte die Herausbildung der selbständigen Wissenschaft Mathematik.

Eine zweite Periode, die auf die Zeit von etwa 450 bis etwa 320/300 anzusetzen ist, wird athenische Periode genannt. Das Zentrum der mathematischen Aktivitäten befand sich in Athen, dem damals ökonomisch, politisch und kulturell einflußreichsten griechischen Stadtstaat. In dieser Periode erhielt die antike Mathematik eine ganz eigentümliche innere Struktur, einen besonderen Charakter, der als „geometrische Algebra“ bezeichnet wird.

In einer dritten Periode, der hellenistischen, die ungefähr viereinhalb Jahrhunderte, bis zur Mitte des 2. Jh. u. Z. dauerte, erreichte die Mathematik der Antike ihre Hochblüte, und da ganz besonders in der Zeit bis 150 v. u. Z. Gelegentlich spricht man von der alexandrinischen Periode, da in dieser Periode Alexandria den unbestrittenen Mittelpunkt des mathematischen Lebens in der antiken Welt darstellte.

Am Ausgang der Antike wurde auch die Mathematik vom allgemeinen Niedergang der Wissenschaften bei der Auflösung und dem schließlichen Zusammenbruch der Sklavereigesellschaft betroffen. Die Produktivität erlosch, Wissen ging verloren. Dennoch konnten bedeutende Teile der antiken Mathematik von den Gelehrten des Orients bewahrt werden.

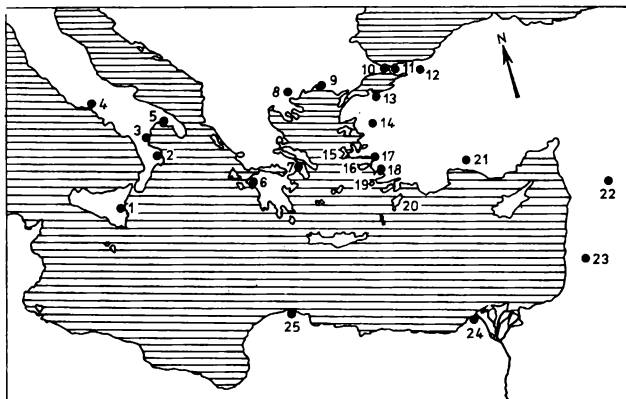


Abb. 3.1. Mathematische Zentren des Mittelmeerraumes während der Antike

1 Syrakus, 2 Kroton, 3 Elea, 4 Neapel, 5 Tarent, 6 Elis, 7 Athen, 8 Stageira, 9 Abdera, 10 Byzanz (Konstantinopel), 11 Chalkedon, 12 Nikaia, 13 Kyzikos, 14 Pergamon, 15 Chios, 16 Samos, 17 Smyrna, 18 Miletos, 19 Knidos, 20 Rhodos, 21 Perge, 22 Chalkis, 23 Gerasa, 24 Alexandria, 25 Kyrene

Ionische Periode

Seit dem 7. Jh. hatten sich die griechisch-ionischen Stadtstaaten an der Küste Kleinasiens und den vorgelagerten Inseln zu bedeutenden wirtschaftlichen, politischen und kulturellen Zentren entwickelt. In Miletos, einer der einflussreichsten Handelsstädte, wirkten die hervorragendsten der ionischen Naturphilosophen, unter ihnen Anaximandros, Anaximenes und Thales.

Die ionischen Naturphilosophen vollzogen bei spontaner materialistischer und dialektischer Grundhaltung den Übergang von der Sichtung und Sammlung der Naturerscheinungen zur Suche nach den Ursachen der Erscheinungen. Sie kamen – mit der Vorstellung eines Urstoffes – dicht an die Konzeption eines Materiebegriffs als einer philosophischen Kategorie zur Bezeichnung der objektiven Realität heran. Es handelte sich bei der ionischen Naturphilosophie um den welthistorischen Wendepunkt, wo auf die Frage nach dem letzten Grund der Welt eine Antwort ohne Beimengung von Mystik angestrebt wird, aus dem Versuch heraus, die Welt nicht nur zu beschreiben, sondern auch zu erklären.

Gerade dies gilt insbesondere für die während der ionischen Periode noch ganz in die Philosophie (im ursprünglichen Wortsinn: Liebe zur Weisheit) eingebetteten

mathematischen Kenntnisse: Es wird das Wesen der Definition erkannt. Beweise für Sätze werden geführt auf Grund der Einsicht in den mathematischen Sachverhalt. Der mathematische Erfahrungsschatz, der zum Teil aus Mesopotamien und aus Ägypten übernommen werden konnte, erhielt nun eine logische Struktur, und es kam zur klaren begrifflichen Unterscheidung von Voraussetzung, Satz und Beweis. Die Wissenschaft Mathematik wurde geboren.

Thales von Miletos

Der Überlieferung nach stand Thales am Anfang dieses Prozesses. Er war ein überaus interessanter und vielseitiger Mann und galt schon in der Antike als einer der sieben Weltweisen. Es soll ihm gelungen sein, die Sonnenfinsternis vom 8. Mai 585 vorauszusagen, und während einer Reise als Kaufmann nach Ägypten soll er die Höhe der Pyramiden aus deren Schattenlänge bestimmt haben.

Spätere Berichte schreiben Thales die folgenden mathematischen Sätze zu, die – um es zu wiederholen – längst in Gebrauch waren, nun aber explizit ausgesprochen oder sogar bewiesen wurden: Jeder Peripheriewinkel im Halbkreis ist ein rechter Winkel; die Kreisfläche wird vom Durchmesser halbiert; im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel kongruent; zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen. Möglicherweise hat er auch den Satz über die Winkelsumme im Dreieck ausgesprochen und bewiesen.

Demokritos von Abdera

Demokritos von Abdera gehört ebenfalls zu den Schrittmachern bei der Herausbildung der Wissenschaften. Er war zweifellos vor Aristoteles der vielseitigste und kenntnisreichste Philosoph überhaupt und ein außerordentlich scharfsinniger Denker. Unter Verschärfung der Ansichten seines Lehrers Leukippos hat Demokritos eine materialistisch orientierte Atomtheorie durchgebildet, die bis in unsere Zeit nachwirkt (Anm. 3.2). Leider aber ist das Werk des materialistischen Philosophen durch die Vertreter der später zur Vorherrschaft gelangenden idealistischen Philosophie, durch Platon und seine Anhänger insbesondere, weitgehend unterdrückt worden. Nach seinen eigenen Worten hätte, wie die Legende berichtet, Platon am liebsten alle Werke von Demokritos verbrennen lassen.

Von der Vielzahl seiner Schriften sind im wesentlichen nur noch die Titel bekannt; sie umfassen Natur, Musik, Ethik, bildende Kunst, Architektur, Astronomie. Auf Mathematik beziehen sich u. a. die Abhandlungen „Über die Berührung von Kreis und Kugel“, „Über Geometrie“, „Über Zahlen“, „Über Ausbreitungen“ (d. h. Abbildung der Kugeloberfläche auf die Ebene). Demokritos hat sich gerühmt, nicht einmal die ägyptischen Schnurspanner hätten ihn im „Zusammenstellen von Linien“ übertroffen. Seine Reisen haben ihn möglicherweise nach Ägypten, Persien, Babylon, vielleicht sogar nach Indien und Äthiopien geführt.

Eines der wenigen erhaltengebliebenen Fragmente der Schriften von Demokritos

beschäftigt sich mit der Zerlegung eines Kegels durch Parallelschnitte zur Basis in dünne Scheiben. Es lautet in Rekonstruktion:

„Wenn ein Kegel parallel zur Grundfläche durch Ebenen geschnitten wird, wie soll man sich die entstehenden Schnittflächen vorstellen, gleich oder ungleich? Sind sie ungleich, dann werden sie den Kegel ungleichmäßig machen, da er treppenartige Einschnitte und Vorsprünge erhält; sind sie dagegen gleich, so werden auch die Schnitte gleich sein, und der Kegel wird die Erscheinung eines Zylinders darbieten, insofern er aus gleichen, nicht aus ungleichen Kreisen bestehen wird, was doch sehr ungereimt ist.“ ([L 3.5], S. 412/413)

Von einer atomistischen Grundhaltung ausgehend gelang es Demokritos, die Volumina von Pyramide und Kegel erstmals richtig anzugehen, wenn auch ohne Beweis. So jedenfalls berichtet uns viel später Archimedes in seiner „Methodenlehre“. Er verweist auch darauf, daß Demokritos mit seiner Denkweise einen bedeutenden Anteil daran habe, daß Eudoxos für diese Sätze strenge Beweise habe angeben können. Auch Archimedes fühlte sich in dieser Tradition stehend. Demokritisches Gedankengut ist somit trotz der späteren Vorherrschaft des philosophischen Idealismus lebendig geblieben.

Weiter schreibt man Demokritos die Erfindung des Gewölbebaues, Untersuchungen über Gesetzmäßigkeiten der Perspektive bei der Bühnenmalerei, die Feststellung der Ganzzahligkeit von Seitenlängen am Monochord bei Tonintervallen und anderes mehr zu. Seine Auffassung, daß die (ganze) Zahl das Maß aller Dinge sei, ist zum Unterschied von der – formal fast gleichlautenden – Ansicht der pythagoreischen Schule vollständig materialistisch: Die Zahl dient dem Erfassen der Natur.

Hippokrates von Chios

Von den weiteren, namentlich bekannten Mathematikern der ionischen Periode – u. a. Oinopides von Chios – verdient Hippokrates von Chios eine ausführliche Würdigung. Bei ihm zeigen sich interessante mathematische Ergebnisse und zugleich neue Aspekte der gesellschaftlichen Stellung des Wissenschaftlers in der antiken Welt. Hippokrates war der berühmteste Geometer des 5. Jh. Er kannte den Zusammenhang zwischen Peripheriewinkel und Bogen. Er konnte das regelmäßige Sechseck, den Umkreis zu einem Dreieck u. a. m. konstruieren. Er verwendete den Begriff der Ähnlichkeit, er wußte, daß sich die Flächen ähnlicher Figuren wie die Quadrate über den entsprechenden Seiten verhalten. Er kannte Verallgemeinerungen des pythagoreischen Lehrsatzes für das stumpf- und das schiefwinklige Dreieck. Er konnte jedes Polygon in ein flächengleiches Quadrat verwandeln.

Darüber hinaus stammt wohl von Hippokrates eine erste zusammenfassende Darstellung der Geometrie unter dem Titel „Elemente“, und zwar nach dem seitdem klassisch gewordenen Darstellungsschema: Voraussetzung, Satz, Beweis. Er führte dort auch die Bezeichnungsweise bei geometrischen Figuren – für Punkte, Strecken, Flächen – mittels Buchstaben ein. Doch sind diese „Elemente“ durch die späteren, ausführlicheren „Elemente“ des Euklid verdrängt worden. Immerhin aber dürfte der Inhalt der Bücher I, II, III und IV der Euklidischen „Elemente“ auf diese Vorlage von Hippokrates zurückgehen.

Der Name von Hippokrates ist auch sehr eng mit einem der berühmtesten klassischen Probleme der Mathematik verknüpft, dem Problem der Würfelverdoppelung oder dem sog. Delischen Problem. Nach einem Spruch des Orakels von Delos werde eine Seuche erlöschen, wenn die Einwohner einen ihrer würfelförmigen Altäre dem Rauminhalt nach verdoppelten. Dies bedeutet – in unserer Schreibweise – die Konstruktion der Länge einer Strecke x gemäß der Beziehung

$$x^3 = 2a^3 \quad \text{bzw.} \quad x = a\sqrt[3]{2},$$

wenn a die Kantenlänge des Ausgangswürfels bedeutet. Die Legende berichtet weiter, daß sich die Delier vergeblich an die Mathematiker gewandt hätten; kein Wunder, diese Konstruktion ist – wie man jetzt weiß – (mit Zirkel und Lineal) nicht möglich. Hippokrates aber fand immerhin heraus, daß das Delische Problem mit der Aufgabe

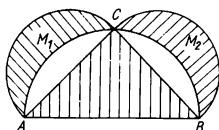


Abb. 3.2. Die eine Art von Mönchen des Hippokrates: Fläche M_1 + Fläche M_2 = Fläche Dreieck $\triangle ABC$

äquivalent ist, zu einer Strecke a und einer doppelt so großen $2a$ zwei mittlere Proportionalen x und y zu konstruieren, also die Proportionen $a : x = x : y = y : 2a$ zu lösen. Diese bewunderungswürdige Leistung wurde noch übertroffen durch die Entdeckung der „Mönchen“, d. h. solcher krummlinig begrenzter Flächen, für die sich mit Zirkel und Lineal ein flächengleiches Quadrat konstruieren läßt. Hippokrates fand fünf verschiedene Typen quadrierbarer Mönchen (Abb. 3.2; Abb. 3.3). Die Entdeckung war so populär, daß sogar eine entsprechende Schrift von Hippokrates teilweise überliefert worden ist. Dieses Fragment ist das älteste authentische Stück griechischer Mathematik.

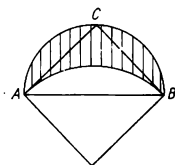


Abb. 3.3. Ein weiterer Typ von Mönchen des Hippokrates

Hippokrates soll als Kaufmann beim Seehandel sein gesamtes Vermögen eingebüßt haben. Dann aber habe er seinen Lebensunterhalt durch Verbreitung von Wissen, als Sophist (d. i. Weisheitslehrer) bestritten; das Neue daran ist der Umstand, daß man für Wissensvermittlung eine Entlohnung erhielt: Der aufkommende Berufsstand der Sophisten bezeichnet ein so gestiegenes gesellschaftliches Interesse an Kenntnissen, daß Wissenschaftler zu einem auch ökonomisch selbständigen Stand werden konnten,

Allerdings wurde in späteren Zeiten der Name Sophist zu einem Schimpfwort, als nämlich mit der weiteren Durchbildung der Sklavereigesellschaft auch die geistige Arbeit, die auf produktive Tätigkeit gerichtet war, wie jede (bezahlte) Arbeit abgewertet wurde, da sie von Sklaven oder Unfreien ausgeführt wurde. Andererseits deutet sich mit den Sophisten die spätere Herausbildung der sog. Philosophenschulen an. Platon und seine Schüler trafen sich in einem dem Halbgott Akademos gewidmeten Hain; die Platonische Schule ging daher als „Akademie“ in die Geschichte der Wissenschaften ein. Aristoteles und seine Anhänger pflegten beim Spazierengehen wissenschaftlich-philosophische Fragen zu erörtern; nach der Peripatos genannten Wandelhalle im Lyzeum hießen sie Peripatetiker. Die Schule der Stoa, die der Kyniker und andere sind für die Geschichte der Mathematik weniger bedeutend.

Weiterführung der mesopotamischen arithmetisch-algebraischen Traditionen. Die pythagoreische Schule

Die Anfänge der griechischen Mathematik waren durch eine eigenartige Mischung arithmetischer und geometrischer Vorstellungs- und Schlußweisen gekennzeichnet; es entspricht eher unserer heutigen Einteilung der Mathematik als den historischen Gegebenheiten, wenn Geometrie und Arithmetik/Algebra getrennt behandelt werden.

Die mesopotamische arithmetisch-algebraische Tradition ist in der griechischen Mathematik niemals abgerissen. Die Quellen zeigen, daß Ergebnisse inhaltlich übernommen worden sind: So finden sich dieselben Normalformen für Gleichungssysteme und quadratische Gleichungen, Beispiele mit denselben Zahlenkoeffizienten, die Verwendung u. a. des arithmetischen, des geometrischen und des harmonischen Mittels, und anderes mehr.

Die weiterwirkende mesopotamische arithmetisch-algebraische Tradition wird besonders deutlich an Pythagoras von Samos und seiner Schule. Der Überlieferung nach hat Pythagoras nach längeren Aufenthalten in Ägypten und Mesopotamien, wo er mit verschiedenen Mysterienkulten in Berührung kam, in Unteritalien einen politisch-religiösen Geheimbund gegründet, der zeitweise eine große politische Macht besaß und die Interessen der Sklavenhalteraristokratie gegen die Sklavenhalterdemokratie vertrat. Der Orden erlosch um die Mitte des 4. Jh.

Der Bund zeigte typische Merkmale einer religiösen Sekte: Konspiration, Vorschriften über Kleidung, Nahrung und Bestattungszereemonien, Seelenwanderungslehre u. a. m. Insofern unterschieden sich die Pythagoreer nicht von den vielen anderen religiösen Gruppierungen der damaligen Zeit. Das Spezifische dieses Bundes bestand darin, daß die Vereinigung mit dem Göttlichen durch Versenkung in die wunderbaren Gesetze der Zahlenwelt erreichbar sein sollte, da das Wesen der Welt in der Harmonie der Zahlen bestehe. Die ursprüngliche Zielstellung des Bundes war religiöser Art. Als Nebeneffekt sozusagen aber leisteten die Pythagoreer einen bemerkenswerten Beitrag zur Entwicklung der Mathematik, sowohl im positiven als auch im negativen Sinne.

Zu den Positiva gehört es, daß mathematische Sätze — wie auch bei den Mathe-

matikern der ionischen Naturphilosophie – auf Grund von Postulaten bewiesen wurden und Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten im Bereich der Zahlen abstrakt formuliert wurden. Das Hauptverdienst bestand darin, nun auch noch das Studium des Quantitativen, des zahlenmäßig Erfassbaren, zu einem Bestandteil der Beschreibung der Welt gemacht zu haben.

Doch wiegen auch die negativen Einflüsse historisch schwer. Nach pythagoreischer Ansicht sind Zahlen nicht das Ergebnis eines von Menschen vorgenommenen Abstraktionsprozesses von der objektiven Realität, sondern selber objektive Gegebenheiten, ausgestattet mit Eigenschaften wie Haß und Liebe, männlich und weiblich. Große Verehrung genoß z. B. die „Tetraktys“, die heilige Zehnzahl, die aus 1, 2, 3 und 4 zusammen gebildet wird (Abb. 3.4). Bei dem Pythagoreer Philolaos heißt es:

„Die Wirksamkeit und das Wesen der Zahl muß man nach der Kraft beurteilen, die in der Zehnzahl liegt. Denn sie ist groß, alles vollendend, alles wirkend und Anfang und Führerin des göttlichen, himmlischen und menschlichen Lebens ... Ohne diese aber ist alles unbegrenzt und undeutlich und unklar ... Denn die Natur der Zahl ist kenntnispendend, führend und lehrend für jeglichen im jeglichem Dinge, das ihm zweifelhaft oder unbekannt ist.“ ([L 3.5], S. 243)

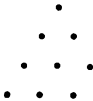


Abb. 3.4. Die heilige Zehnzahl (Tetraktys)

Und in einem anderen Fragment schreibt er:

„Und in der Tat hat ja alles, was man erkennen kann, eine Zahl. Denn ohne sie läßt sich nichts erfassen oder erkennen.“ ([L 3.5], S. 240)

Übrigens galt die Eins den Pythagoreern nicht als Zahl, sondern als „aller Dinge Anfang“, als die „Quelle und Wurzel der ewigen Natur“.

Mit den Pythagoreern begann der sich in vielfältiger Weise während der Antike zeigende Einfluß des philosophischen Idealismus auf die Mathematik. Die Philosophen und Mathematiker der späteren Zeit stellten sehr klar heraus, daß sich die „theoretischen Forschungen (der Pythagoreer) frei von materiellen Einflüssen im Bereich des reinen Denkens bewegten“, so heißt es etwa im sog. „Geometerkatalog“, einer Art Geschichte der Mathematiker der Antike, die von einem spätantiken Wissenschaftler verfaßt wurde.

Man kann mit ziemlicher Sicherheit annehmen, daß der Bund schon zwischen 500 und 450 in zwei Gruppierungen zu zerfallen begann. Während die sog. Akousmatikoi das Hauptgewicht auf die Bewahrung der noch auf Pythagoras zurückgehenden heiligen Riten und Gebote (der akoúsmata) legten, bildete sich in der zweiten Gruppe, der der Mathematikoi, trotz aller Verzerrungen durch eine falsche Ideologie ein echtes Interesse an der Mathematik (Anm. 3.3) heraus. Schält man den rationalen Kern, d. h. den mathematischen Bestandteil der innerhalb der pythagoreischen Zahlenmystik erzielten Ergebnisse heraus, so ergibt sich etwa das folgende Bild; freilich ist zu bedenken, daß Quellen und Überlieferung lückenhaft und gelegentlich widersprüchlich sind.

Zu den frühesten Beschäftigungen der Pythagoreer gehören die sog. figurierten Zahlen: Dreieckszahlen, Quadratzahlen, Rechteckzahlen und andere mehr (Abb. 3.5). Durch Figurenlegen konnten so, beinahe experimentell, die Summen der Reihen

$$\sum_{v=1}^n v = \frac{1}{2} (n+1)n, \quad \sum_{v=1}^n (2v-1) = n^2,$$

$$\sum_{v=1}^n 2v = n(n+1), \quad \sum_{v=1}^n (3v-2) = \frac{1}{2} (3n-1)n$$

gefunden werden. Mit Sicherheit auf die mesopotamische Mathematik zurückgehend ist der Gebrauch des arithmetischen, geometrischen und harmonischen Mittels, eventuell auch die Übernahme des Lösungstripels $x = \frac{1}{2}(m^2 - 1)$, $y = m$, $z = \frac{1}{2}(m^2 + 1)$ für die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$.

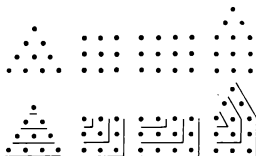


Abb. 3.5. Figurierter Zahlen: Dreiecks-, Quadrat-, Rechteck- und Fünfeckzahlen

Relativ frühen Datums ist die sog. „Lehre von Gerade und Ungerade“; sie ist später in das Buch IX der „Elemente“ von Euklid eingegangen. Dort werden Sätze bewiesen wie: Jede Summe gerader Zahlen ist gerade. Die Summe einer geraden (ungeraden) Anzahl ungerader Zahlen ist gerade (ungerade). Eine ungerade Zahl teilt, wenn sie eine gerade Zahl teilt, auch deren Hälfte. Der Höhepunkt der pythagoreischen Lehre von Gerade und Ungerade ist der noch von Zahlenmystizismus gefärbte Satz, daß Zahlen der Form $2^n(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n)$ vollkommen sind, wenn der Klammerausdruck eine Primzahl ist; dabei heißt eine Zahl a vollkommen, wenn sie gleich der Summe ihrer Teiler, einschließlich der 1, aber außer a selbst ist. Die Pythagoreer selbst gaben 1, 6, 28, 496 und 8128 als Beispiele an.

Späteren Datums als die Lehre von Gerade und Ungerade ist die Lehre von den Zahlenverhältnissen und die Teilbarkeitslehre. Diese Teile gingen ein in das Buch VII der „Elemente“.

Bei der pythagoreischen Auffassung von der Unteilbarkeit der Eins, die ja nicht einmal als Zahl galt, mußte ein Äquivalent für Brüche gefunden werden, nämlich das des Zahlenverhältnisses. Statt einen Bruch zu kürzen „kürzte“ man Zahlenverhältnisse. Das Gleichnamigmachen von „Nennern“ führte zwangsläufig zur Untersuchung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen von Zahlen bzw. in der Ausdrucksweise von Euklid zur Bestimmung „der kleinsten Zahl, die von diesen Zahlen gemessen wird“.

Die Lehre von den Proportionen, d. i. den Verhältnissen natürlicher Zahlen, beruhte dabei auf der Definition:

„Zahlen stehen in Proportionen, wenn die erste von der zweiten Gleichvielfaches oder derselbe Teil oder dieselbe Menge von Teilen ist wie die dritte von der vierten.“ ([L 3.4], III., S. 2)

Die Teilbarkeitslehre fußte auf den folgenden Definitionen: „Primzahl ist eine Zahl, die sich nur durch die Einheit messen läßt.“ „Gegeneinander prim sind Zahlen, die sich nur durch die Einheit als gemeinsames Maß messen lassen.“ Der Satz über die Existenz unendlich vieler Primzahlen erscheint bei Euklid allerdings erst in Buch IX der „Elemente“: „Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.“ Statt der (heute üblichen und möglichen) abstrakten Formulierung eines Satzes über die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung tritt der – beweis-

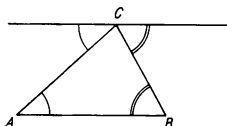


Abb. 3.6. Beweis des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck

technisch im wesentlichen die gleichen Dienste leistende – Satz auf: „Teilt eine Primzahl ein Produkt zweier Zahlen, so teilt sie eine dieser Zahlen.“ Bewiesen wird dieser Satz unter Verwendung des Begriffs „größter gemeinsamer Teiler“; dessen Eigenschaften werden mit Hilfe des euklidischen Algorithmus gewonnen.

Die Nachrichten über die frühpythagoreische Geometrie sind recht unsicher. Pythagoras könnte den Kern des sog. pythagoreischen Lehrsatzes in Babylon kennengelernt haben; ein Beweis dürfte von ihm oder seinen Schülern stammen. Aus dieser Zeit wird wohl auch der noch heute verwendete Beweis des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck unter Verwendung des Begriffes Wechselwinkel herrühren (Abb. 3.6).

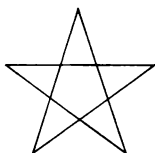


Abb. 3.7. Pentagramm. Ordenszeichen der Pythagoreer; im Mittelalter als Drudenfuß mit mystischer Bedeutung, siehe Goethes „Faust“. Im Pentagramm teilen sich die Seiten nach dem Goldenen Schnitt

Die Pythagoreer der Frühzeit kannten bereits Würfel, Tetraeder und Dodekaeder, möglicherweise sogar noch die beiden anderen regulären Polyeder, Oktaeder und Ikosaeder. Erstaunlich ist die Kenntnis des Dodekaeders; dies hängt vielleicht damit zusammen, daß der in Italien vorkommende Schwefelkies als Dodekaeder kristallisiert. Außerdem deutet auf das Dodekaeder, d. h. den durch regelmäßige Fünfecke begrenzten Zwölfkürper, auch als Ordenszeichen der Pythagoreer hin, das Pentagramm (Abb. 3.7).

Am Ende der ionischen Periode wirkte der den Pythagoreern nahestehende Archytas von Tarent, Herrscher dieses süditalienischen Stadtstaates, durch den Platon mit der Mathematik und einer philosophisch-idealistischen Ideologie in Berührung kam. Mit Archytas, der selbst wesentliche Beiträge zur Mathematik, insbesondere zur Teilbarkeitslehre, geleistet hat, ging die bedeutendste Phase des pythagoreischen Bundes zu Ende. Mit seinem Wirken hängt es eng zusammen, daß sich damals als bindendes Element des pythagoreischen Bundes eine Art übergreifende mathematisch orientierte Ideologie ausbildete, wonach die Interpretation der Welt als Ganzes und insbesondere auch die Mathematik auf Ganzzahligkeit und Verhältnisse ganzer Zahlen gegründet werden könne. Nach verbreitetem Sprachgebrauch in der Historiographie der Mathematik sei sie auch hier als „arithmetica universalis“ bezeichnet.

Der Zusammenbruch der arithmetica universalis

Mit großer Sicherheit ist anzunehmen, daß noch innerhalb der pythagoreischen Schule – und zwar nicht später als 420 v. u. Z. – die Entdeckung gemacht worden ist, daß sich gegenseitig nicht messende (inkommensurable) Strecken existieren: Strecken messen sich nicht, sind zueinander inkommensurabel, wenn die Länge der Strecken nicht ganzzahlige Vielfache der Länge einer als Einheitsstrecke aufgefaßten dritten Strecke sind (Anm. 3.4) (modern ausgedrückt: Es gibt irrationale Zahlen). Diese Entdeckung, die mit der Vorstellung einer arithmetica universalis unverträglich ist, trug – neben hauptsächlich politischen Ursachen wie der Bindung der Pythagoreer an die Sklavenhalteraristokratie und die Tyrannenherrschaft – zum Zerfall des Bundes der Pythagoreer bei.

Im allgemeinen wird heute von der mathematikhistorischen Forschung die für die Pythagoreer niederschmetternde Entdeckung des Irrationalen mit dem Pythagoreer Hippasos von Metapontum in Verbindung gebracht. Jedoch weiß man nicht genau, an welchem mathematischen Gegenstand das Irrationale entdeckt worden ist; neue Forschungen setzen die Entdeckung mit dem Pentagramm in Beziehung. Über Hippasos wird nämlich berichtet, er habe „zuerst die aus zwölf Fünfecken zusammengesetzte Kugel öffentlich beschrieben und sei deshalb als ein Gottloser im Meere umgekommen.“ ([L 3.19], S. 320/321)

Jedenfalls steht es fest, daß das regelmäßige Fünfeck diejenige mathematische Figur ist, an der sich die Inkommensurabilität relativ leicht beweisen läßt, und zwar mit der altbekannten Methode der „Wechselwegnahme“ (Anm. 3.5):

Die Diagonalen (Abb. 3.8) eines regelmäßigen Fünfecks bilden wieder ein regelmäßiges Fünfeck und so fort. Dann gelten in den durch Schachtelung entstandenen Fünfecken die Beziehungen $\overline{AE} = \overline{AB'}$ und $\overline{B'D} = \overline{B'E'}$ und deshalb $\overline{AD} - \overline{AE} = \overline{B'E}$ und analog $\overline{AE} = \overline{ED'} = \overline{EA'}$ und $\overline{B'E'} = \overline{B'D} = \overline{B'E}$ und deshalb $\overline{AE} - \overline{B'E'} = \overline{B'A'}$ und so fort, ohne daß ein Ende eintritt: Die Differenz zwischen der Diagonalen und der Seite des größeren Fünfecks ist gleich der Diagonalen des kleineren Fünfecks; die Differenz zwischen der Seite des größeren Fünfecks und der

Diagonale des kleineren Fünfecks ist gleich der Seite des kleineren Fünfecks; die Differenz zwischen der Diagonale des kleineren Fünfecks und dessen Seite ist wiederum gleich der Diagonale des nächst kleineren Fünfecks — und sofort ins Unendliche. Der Prozeß der Wechselwegnahme kann fortgesetzt werden, und es kann deshalb kein größtes gemeinsames Maß für die Diagonale und die Seite des regelmäßigen Fünfecks gefunden werden: Es existieren zueinander inkommensurable Strecken, in diesem Fall Seite und Diagonale.

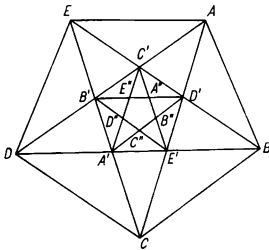


Abb. 3.8. Beweis für die Existenz inkommensurabler Strecken am Pentagramm

Man nimmt heute nicht mehr an (Anm. 3.5), daß die Inkommensurabilität am Quadrat *entdeckt* worden ist. Der Beweis, daß Seite und Diagonale eines Quadrates zueinander inkommensurabel sind (ein Beweis, der modern gesprochen, auf die Irrationalität von $\sqrt{2}$ hinausläuft), dürfte vielmehr, da er — wenn man ihn nach einem ähnlichen Verfahren wie bei der Wechselwegnahme durchführen will — etwas komplizierter verläuft, einer späteren Zeit angehören. Das Quadrat mit der Diagonale würde so erst im Nachhinein als Objekt zur Feststellung eines bereits anderswo erkannten Sachverhalts gedient haben. Der Beweis wird mit der Lehre von Gerade und Ungerade geführt, steht aber isoliert am Ende von Buch X der „Elemente“ und verläuft, wenn man vom Sprachgebrauch absieht, so, wie er heute in vielen Lehrbüchern geführt wird.

Athenische Periode

Im 5. und 4. Jh. erreichte Athen, gestützt auf den Attischen Seebund, die führende Stellung unter den griechischen Stadtstaaten, insbesondere nach dem Sieg über die Perser. Unter dem Staatsmann Perikles erfuhr die Sklavenhalterdemokratie ihre höchste Ausprägung. Der langanhaltende Peloponnesische Krieg (431–404) zwischen Athen und Sparta und ihren jeweiligen Verbündeten zog ganz Griechenland in Mitleidenschaft und endete schließlich mit dem Sieg Spartas und der Restaurierung der Sklavenhalteraristokratie. Schließlich fiel das geschwächte und zerstrittene Griechenland der Eroberung durch seinen nördlichen Nachbarn, Mazedonien, zum Opfer;

338 v. u. Z. besiegte der mazedonische König Philipp Athen. Sein Sohn, Alexander, errichtete dann ein gewaltiges Reich, das bis nach Indien, Zentralasien und Ägypten reichte.

In dieser historisch kurzen Zeit von nur wenigen Jahrzehnten erlebte Athen eine kulturelle Hochblüte. Die Akropolis wurde errichtet, Praxiteles schuf Meisterwerke der Bildhauerkunst, es entstanden die Bühnenwerke von Aristophanes, Sophokles und Euripides, die noch heute aufgeführt werden. Sokrates, Platon und Aristoteles begründeten einflußreiche Philosophenschulen. Der philosophische Idealismus, insbesondere der Platons, erreichte mit der Rückkehr der reaktionären Sklavenhalteraristokratie an die Herrschaft Übergewicht über die materialistischen Traditionen der ionischen Naturphilosophie.

Die Platonische Ideenlehre und ihr Einfluß auf die Entwicklung der Mathematik.

Platons Bekanntschaft mit der Mathematik rührte aus der Zeit seines Aufenthaltes bei Archytas her. Seitdem betrachtete Platon die Mathematik als das Beispiel einer Wissenschaft, die ihre Ergebnisse durch bloßes Denken finden könne. Diese philosophische Grundhaltung bedeutete einerseits eine Verstärkung der methodischen Grundlage der Mathematik, die auf Definitionen und Voraussetzungen aufbauend deduktiv ihre Beweise führt. Sie bedeutete andererseits die Verstärkung des philosophischen objektiven Idealismus. Platon legte beispielsweise in seinem Dialog „Staat“ seinem ehemaligen Lehrer Sokrates die Worte in den Mund:

„Ich glaube nämlich, du weißt bereits, daß die, die sich mit Geometrie und mit Rechnungen und derartigem beschäftigen, das Gerade und das Ungerade und die Figuren der drei Arten von Winkeln und anderes hiermit Verschwistertes bei jeder Untersuchung voraussetzen und solches also, gerade als wüßten sie es, zu Voraussetzungen machen, dabei aber eben keinerlei Rechenschaft weder sich selbst, noch einem anderen über diese Dinge, als wären sie jedem klar, zu geben für nötig halten und, aus solchem dann ihren Ausgangspunkt nehmend, sofort das übrige durchgehen und zugestandenermaßen bei jenem enden, auf dessen Erwägung sie ausgegangen waren ... Nicht wahr also, dann weißt du auch, daß sie hierzu die sichtbaren Formen anwenden und über diese ihre Begründungen vornehmen, indem sie dabei aber nicht diese selbst im Sinne haben, sondern über jenes nachdenken, dem diese sichtbaren Formen ähnlich sind, da sie ja um des Quadrates an und für sich willen die Begründungen vornehmen und um des Durchmessers an und für sich willen, nicht aber um dessentwillen, den sie eben zeichnen, und ebenso auch bei den übrigen Figuren jene einzelnen, die sie bilden und zeichnen, wovon es auch Schatten und Abbilder im Wasser gibt, eben nur als Abbilder benutzen, weil sie ja jene anderen an sich selbst seienden zu schauen suchen, die man wohl nicht in anderer Weise als eben durch das Nachdenken schauen kann.“ ([L. 3.11], S. 252–253)

Diese Stelle ist charakteristisch für Platons Ideenlehre. Hier zeigt sich die Fehleinschätzung der Abstraktionstätigkeit des menschlichen Denkens durch den Platonischen objektiven Idealismus. Demnach ist jeder konkrete Gegenstand – Stuhl, Schrift, ein gezeichnetes Dreieck – nur das schlechte, verderbte Abbild einer objektiven Idee wie etwa „Stuhl“, „Schrift“, „Dreieck“. Bei der Idee „Dreieck“ z. B. gilt der Satz über die Winkelsumme wirklich, bei jedem aufgezeichneten Dreieck aber,

dem schlechten Abklatsch der Idee, wird die Nachprüfung Abweichungen ergeben. In Wahrheit ist es natürlich so, daß das Denken die notwendigerweise bei der Zeichnung bewirkten Ungenauigkeiten als unwesentlich wegläßt (d. h. abstrahiert) um zum Begriff „Dreieck“ zu gelangen.

Dem menschlichen Denken kommt in Platons System dann nur die Aufgabe zu, den Grad der Übereinstimmung zwischen der erhabenen, vollkommenen Idee und ihrem realen, kümmerlichen Abklatsch festzustellen. In seinem philosophischen System, das auch die Verachtung der Sklavenhalter für Arbeit und produktive Tätigkeit widerspiegelte, ist es nur folgerichtig, wenn aus der Mathematik alle mechanischen Hilfsvorstellungen und Geräte verbannt wurden. So kam es, daß die griechisch-hellenistische Mathematik die Konstruktionshilfsmittel Zirkel und Lineal betonte, soweit sie unter direktem Einfluß Platons stand. (Während der hellenistischen Periode insbesondere sind auch komplizierte Kurven — Quadratrix, Konchoide, Kissoide — studiert worden, die über Zirkel und Lineal hinausgehende Konstruktionshilfsmittel erfordern.)

Der restriktive Einfluß Platons ist direkt nachweisbar. Platon selbst sagte über den Sinn und Zweck des Mathematiktreibens: Weil „die Künste (d. h. die handwerklichen Fertigkeiten, Wg) ... sämtlich niedrige Gewerbe“ sind, müsse man „jene, die in dem Staate an dem Größten teilhaben sollen, dazu überreden, daß sie zur Rechenkunst sich wenden“, und zwar

„so lange, bis sie zur Anschauung der Natur der Zahlen durch die Denktätigkeit selbst gelangt sind, nicht um des Kaufens und Verkaufens willen wie Handelsleute und Krämer sie betreiben, sondern um des Krieges willen und darum, daß die Seele selbst eine Erleichterung finde und von dem Werden hinweg zur Wahrheit und zur Wesenheit hinübergewendet werde.“ ([L 3.11], S. 269)

Aufschlußreich ist ferner u. a. ein Bericht des römischen Historikers Plutarchus über die Ansicht Platons zur Verwendung mechanischer mathematischer Hilfsmittel (außer Zirkel und Lineal).

„Platon selbst tadelte die Leute um Eudoxos und Archytas und Menaichmos, weil sie es unternommen hatten, die Würfelverdoppelung auf mechanische Einrichtungen zurückzuführen, wie wenn es nicht möglich wäre, für den, der es überhaupt versucht, rein theoretisch zwei mittlere Proportionalen zu finden. Dadurch wird nämlich das Gute an der Geometrie zugrunde gerichtet und zerstört, indem diese sich wieder zum Sinnlichen zurückwendet, statt sich nach oben zu erheben und die ewigen, unkörperlichen Bilder zu erfassen, bei denen verweilend Gott ewig Gott ist.“ (In der Interpretation von van der Waerden, [L 3.14], S. 267/268)

Unverkennbar hat die Platonische Auffassung die Verwendung der Mathematik im Produktionsprozeß gehemmt oder da, wo sie eintrat, abgewertet. Doch kann bei aller historisch-kritischen Distanz gegenüber der Rolle des objektiven Idealismus für die Entwicklungsgeschichte der Mathematik kein Zweifel daran bestehen, daß die hohe Wertschätzung der Mathematik durch Platon und die Platonische Schule — der Überlieferung nach habe über dem Eingang zur Akademie der Satz gestanden, kein der Mathematik Unkundiger möge dort eintreten — zur Durchbildung, Weiterentwicklung und Tradierung gerade der auf höchstem theoretischem Niveau betriebenen Wissenschaft Mathematik Entscheidendes beigetragen hat.

Die geometrische Algebra

Auf diesem allgemeinen Hintergrund begann die Suche nach Mitteln, die inneren Schwierigkeiten der Mathematik dieser Zeit zu überwinden: Es existieren zueinander inkommensurable Strecken, man kann sie konstruieren. Aber es gibt keine natürliche Zahl und kein Verhältnis von Zahlen, das ein arithmetisches Äquivalent des geometrischen Objekts sein könnte (Anm. 3.7).

Ein Ausweg aus diesem inneren Widerspruch hätte die Herausarbeitung des Begriffs der irrationalen Zahl sein können. Doch wurde dieser Weg in der Antike nicht beschritten, da Grenzübergänge in allgemeiner Form damals begrifflich noch nicht gemeistert wurden. So schritt die antike Mathematik vielmehr in einer anderen Richtung voran, durch die Herausarbeitung der sog. Methode der „geometrischen Algebra“. Der dänische Mathematiker und Mathematikhistoriker Zeuthen hat 1886 diesen Typ von Mathematik, der algebraische Probleme mittels geometrischer Konstruktionen behandelt, mit dieser Bezeichnung recht treffend charakterisiert. (Anm. 3.8)

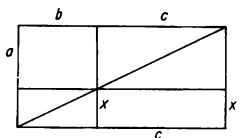


Abb. 3.9. Flächenanlegung zur Lösung einer linearen Gleichung

Einige Beispiele werden das Wesen der geometrischen Algebra verdeutlichen. So tritt der durch die Beziehung $\sum_{v=1}^n ab_v = a \sum_{v=1}^n b_v$, mit $\sum_{v=1}^n b_v = b$ bezeichnete Sachverhalt in der Sprechweise der geometrischen Algebra folgendermaßen auf:

„Hat man zwei Strecken und teilt die eine von ihnen in beliebig viele Abschnitte, so ist das Rechteck aus den beiden Strecken den Rechtecken aus den ungeteilten Strecke und allen einzelnen Abschnitten zusammen gleich.“ ([L 3.4], I, S. 34)

Die binomische Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ erscheint in der Gestalt:

„Teilt man eine Strecke, wie es gerade trifft, so ist das Quadrat über der ganzen Strecke den Quadraten über den Abschnitten und zweimal dem Rechteck aus den Abschnitten zusammen gleich.“ ([L 3.4], I, S. 35)

Die sog. Methode der „Flächenanlegung“ erfüllte den spezifischen Zweck, Gleichungen aufzulösen; sie ist das Kernstück der geometrischen Algebra. Der einfachste Fall besteht in der Aufgabe, an eine gegebene Strecke c in Form eines Rechteckes eine Fläche anzutragen, die flächengleich ist mit einem vorgegebenen Rechteck der Fläche $a \cdot b$. Die Lösung der Aufgabe erfolgt durch die Konstruktion in Abb. 3.9; sie ist offenbar identisch mit der Lösung der Gleichung $a \cdot b = c \cdot x$ in der Variablen x .

Nichtlineare Gleichungen erfordern Flächenanlegungen, bei denen die zu konstruierende Fläche einen Flächeninhalt besitzt, der um eine gegebene Fläche kleiner oder größer als eine vorgegebene Fläche ist: Flächenanlegung mit Defekt bzw. Über-

schuß. Diese Fälle entsprechen der Auflösung des Gleichungssystems vom Typ $x \cdot y = F$, $x + y = 2a$ bzw. $x \cdot y = F$, $x - y = 2a$.

Auch terminologische Fragen sind interessant: Das griechische Wort „parabolé“ (ursprünglich: danebenwerfen, danebenlegen) erhielt die Bedeutung des Fachaussdruckes für Flächenanlegung. Die Worte „élleipsis“ und „hyperbolé“ bedeuten Defekt (Mangel) bzw. Exzeß (Überschuß). Demnach liegt die normale parabolé zwischen der Flächenanlegung mit élleipsis bzw. der Flächenanlegung mit hyperbolé. Aus diesem Sachverhalt erwuchs später, endgültig bei Apollonios in dessen Kegelschnittlehre, der Gebrauch der Worte Ellipse, Parabel, Hyperbel.

Die folgende Übersicht unterrichtet über die in den „Elementen“ des Euklid mittels geometrischer Algebra behandelten Typen quadratischer Gleichungen:

Goldener Schnitt	Gleichung $x^2 = a(a - x)$	Buch II, 6
Einfache Flächenanlegung (parabolisch)	Mittlere Proportionale Gleichung $x^2 = F = a \cdot b$	Buch VI, 5
(Elliptische) Flächenanlegung mit Defekt	Gleichungssystem $x \cdot y = F$, $x + y = 2a$ bzw. Gleichung $x(2a - x) = F$	Buch VI, 8
(Hyperbolische) Flächenanlegung mit Exzeß	Gleichungssystem $x \cdot y = F$, $x - y = 2a$ bzw. Gleichung $x(x - 2a) = F$	Buch VI, 9

Theodoros von Kyrene

Historisch gesehen tritt uns die geometrische Algebra als erfolgreicher Kompromiß im Umgang mit irrationalen Größen entgegen, der den Fortbestand der griechisch-hellenistischen Mathematik ermöglicht hat. Die entscheidenden Leistungen zur Durchbildung und Ausformung der geometrischen Algebra wurden von drei Mathematikern vollbracht, die, anknüpfend an Ergebnisse der Pythagoreer, der Platonischen Schule nahestanden oder aus ihr hervorgegangen sind, von Theodoros von Kyrene, von Theaitetos und von Eudoxos von Knidos.

Platon läßt im Dialog „Theaitetos“ den schon betagten Theodoros mit dem hochbegabten Jüngling Theaitetos zusammentreffen. Die Szene spielte im Jahre 399 in Athen. Das Thema des Dialogs ist das Problem der Irrationalitäten.

„Theodoros hier zeichnete uns etwas aus der Lehre von den Quadraten und bewies für die Quadrate von drei und fünf Fuß Inhalt, daß die der Seitenlänge nach dem Quadrate von einem Fuß Inhalt nicht kommensurabel seien, und so zog er jedes einzelne heran bis zum siebzehnfußigen Quadrat. Bei diesem hielt er zufällig inne.“ ([L 3.10], S. 117)

Diese Stelle verdeutlicht: Theodoros bewies, modern formuliert, daß $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ..., $\sqrt{17}$ irrationale Zahlen sind. Die Passage gibt aber keine sichere Auskunft, wie der Beweis geführt wurde. Eine geistreiche Vermutung von Anderhub erklärt es, wieso Theodoros gerade bei $\sqrt{17}$ endete. Seine Methode bestand demnach aus einer fortgesetzten An-

wendung des Satzes von Pythagoras zur Konstruktion der Strecken mit den Längen $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots, \sqrt{17}$ und dann in der Anwendung der Methode der Wechselwegnahme. Aus der Zeichnung wird sofort klar, warum Theodoros bei $\sqrt{17}$ aufhörte (Abb. 3.10).

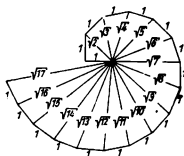


Abb. 3.10. Konstruktion zum schrittweisen Nachweis der Irrationalität von $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots, \sqrt{17}$

Theaitetos und die Klassifizierung der quadratischen Irrationalitäten

Nachdem der ältere Theodoros seinen Bericht gegeben hat, läßt Platon den jungen Theaitetos (Anm. 3.9) eine Grundidee vortragen:

„Nun fiel es uns (Theaitetos und einem anderen athenischen Jüngling, Wg) bei, da ja die Quadrate in ihrer Menge unendlich schienen, zu versuchen, sie in einem gemeinsamen Begriffe zusammenzufassen, um mit ihm all diese Quadrate bezeichnen zu können ... Alle Zahlen schieden wir in zwei Klassen: in solche, die dem Produkt aus gleichen Zahlen entsprechen; sie verglichen wir nach ihrer Gestalt mit dem Quadrat und nannten sie quadratisch und gleichseitig ... Die Zahlen dazwischen aber, zu denen die Drei und die Fünf und jede gehört, die dem Produkt aus gleichen Zahlen nicht entsprechen kann, sondern dem Vielfachen einer größeren Zahl und einer kleineren oder einer kleineren und einer größeren, so daß in ihrer Darstellung immer eine größere und eine kleinere sie umschließt, verglichen wir mit der länglichen Gestalt des Rechtecks und nannten sie oblonge Zahlen ... Alle Linien, die ein nach Seiten und Flächen kommensurables Quadrat bilden, bestimmten wir als Längen; die aber ein ungleichseitiges Vieleck bilden, als solche Quadrate, die an Länge mit jenen nicht kommensurabel sind, jedoch der Fläche nach, deren Quadrat sie bilden. Und mit den Kubikzahlen ist es auch ähnlich.“ ([L 3.10], S. 117/118).

Über die Angabe spezieller Fälle irrationaler Streckenlängen durch Theodoros hinausgehend wurde demnach eine prinzipielle Einteilung getroffen, die zwei Klassen von Irrationalitäten erfaßte: Diejenigen Strecken, die ein Quadrat erzeugen, dessen Flächeninhalt zwar eine ganze Zahl, jedoch keine Quadratzahl ist, haben kein gemeinsames Maß mit der Längeneinheit; sie sind inkommensurabel zu 1. Entsprechendes gilt für den Raum.

Dieser Teil des Dialoges war zugleich eine Art Programm zum umfassenden Studium der Irrationalitäten. Man kann mit großer Sicherheit annehmen, daß dies noch von Theaitetos selbst durchgeführt worden ist; seine Ergebnisse bilden den Inhalt des Buches X der „Elemente“. Buch X ist auch für einen heutigen Mathematiker sehr schwierig, zumal dort die komplizierten arithmetisch-algebraischen Sachverhalte der Klassifizierung gewisser Typen von Irrationalitäten in geometrischer Form vorgenommen werden und das alles ohne den Gebrauch von Formeln und Symbolen. Benutzt man die moderne Sprechweise, so wird dort die Kommensurabilität von Strecken als eine Äquivalenzrelation behandelt. Dann werden verschiedene Typen

von Irrationalitäten behandelt, die auf die Untersuchung von Wurzelschachtelungen hinauslaufen, etwa vom Typ $\sqrt{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$. Ferner werden – alles dies durch geometrische Konstruktionen! – Identitäten bewiesen, die in heutiger Symbolik

$$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{\sqrt{a} + \sqrt{a-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a} - \sqrt{a-b}}{2}}$$

und

$$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{a^2 - b^2}} = \sqrt{\frac{a+b}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-b}{2}}$$

entsprechen.

In engem Anschluß an Buch X werden im Buch XIII Ergebnisse über spezielle Klassen quadratischer Irrationalitäten auf das Studium regulärer Polyeder angewendet. Das Buch XIII endet mit dem Nachweis, daß es genau fünf reguläre Polyeder gibt: Würfel, Tetraeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder. Übrigens wurden sie nach Platon benannt, weil er sie in seinem Dialog „Timaios“ als Grundform der Elemente bezeichnet hatte: Platon ordnete den Würfel der Erde, das Oktaeder der Luft, das Tetraeder dem Feuer und das Ikosaeder dem Wasser zu; der Weltschöpfer habe dabei die Welt in Form eines Dodekaeders angelegt (Abb. 3.11). Das mathematische Hauptwerk der Antike verbindet sich also mit einer weltanschaulichen Aussage.



Abb. 3.11. Die fünf regulären Polyeder, die Platonischen Weltkörper

Eudoxos von Knidos

Nach Theodoros und Theaitetos stand noch immer die arithmetische Bewältigung des Problems der Irrationalitäten aus; sie wurde von Eudoxos geleistet.

Eudoxos von Knidos war ohne Zweifel der bedeutendste Mathematiker seiner Zeit. Darüber hinaus hatte er sich auch als Astronom, Rhetor, Arzt und Geograph ausgezeichnet. Im Scherz nannten ihn seine Freunde Eudoxos, den Berühmten.

Eudoxos schuf eine Größenlehre, die auch irrationale Größen einbezog, allerdings ohne explizit bis zum Begriff der Irrationalzahl vorstoßen zu können. War bisher der Begriff der Proportion an die Voraussetzung gebunden, daß die im Verhältnis stehenden Zahlen ein gemeinsames Maß besitzen, so befreite sich Eudoxos in einem kühnen gedanklichen Schritt von dieser Einschränkung und definierte:

„Man sagt, daß Größen in demselben Verhältnis stehen, die erste zur zweiten wie die dritte zur vierten, wenn bei beliebiger Vervielfältigung die Gleichvielfachen der ersten und dritten

den Gleichvielfachen der zweiten und vierten gegenüber, paarweise entsprechend genommen, entweder zugleich größer oder zugleich gleich oder zugleich kleiner sind.“ „... die dasselbe Verhältnis habenden Größen sollen in Proportionen stehend heißen.“ ([3.4], II, S. 17)

Verwendet man die uns vertraute Formelschreibweise, so heißt dies: Wenn $a : b = c : d$, dann folgt für beliebiges natürliches $m, n \geq 1$: Aus $na > mb$ folgt stets $nc > md$, aus $na = mb$ folgt stets $nc = md$, und aus $na < mb$ folgt stets $nc < md$.

Diese Definition der Proportion benötigt keinerlei Voraussetzungen über die Kommensurabilität der Größen. Zugleich ist sie geeignet, alle bekannten Sätze über Proportionen beweisen zu können — eine Leistung, die es in weiteren Sätzen gestattet, die Verbindung zwischen der geometrischen Algebra, der Proportionenlehre, der Ähnlichkeitslehre einerseits und einer das Inkommensurable, Irrationale umfassenden Größenlehre andererseits in mathematisch korrekter Weise herzustellen. Dieses Ergebnis von Eudoxos ist in das Buch V der „Elemente“ eingegangen.

Auf dieser neugewonnenen sicheren Basis konnte sich die Mathematik während der nächsten Periode zu einer staunenswerten Höhe entfalten. Doch war es noch ein weiter Weg bis zum exakten Begriff der Irrationalzahl.

Im unmittelbaren Zusammenhang damit hat Eudoxos bei der Grundlegung einer Art Analysis Pionierarbeit geleistet. Seine Methode erhielt im 17. Jh., während der Suche nach weitreichenden infinitesimalen Methoden, den etwas unglücklichen Namen „Exhaustionsverfahren“ (lat. exhaustire, ausschöpfen). Ihr liegt die Vorstellung zugrunde, etwa den Flächeninhalt krummlinig begrenzter Figuren durch Ein- bzw. Umbeschreiben von Polygonen annähern zu können, und zwar im Sinne beliebig guter, „erschöpfender“ Annäherung. Eudoxos stützte sich bei der als „geometrische Analysis“ zu bezeichnenden Methode auf einen Satz, der die beliebig gute Annäherung an eine zu messende Größe fixiert. Dieser tritt in Buch X der „Elemente“ auf; Beispiele zur Exhaustion von Flächen und Körpern — u. a. Kreis, Kegel, Kugel — werden dann in Buch XII behandelt. Der Satz lautet:

„Nimmt man bei Vorliegen zweier ungleicher (gleichartiger) Größen von der größeren ein Stück größer als die Hälfte weg und vom Rest ein Stück größer als die Hälfte und wiederholt dies immer, dann muß einmal eine Größe übrig bleiben, die kleiner als die kleinere Ausgangsgröße ist.“ ([L 3.4], IV, S. 1)

Diesem Satz und der Eudoxischen Größenlehre liegt ein Axiom oder Postulat zugrunde, dem später Archimedes unter Berufung auf Eudoxos die folgende Fassung gab:

„Die größere von zwei gegebenen Größen, sei es Linie, Fläche oder Körper, überragt die kleinere um eine Differenz, die, genügend oft vervielfacht, jede der beiden gegebenen Größen übertrifft.“ ([L 3.2], S. 9)

Ein Beispiel soll zeigen, wie Eudoxos von dem „Meßbarkeitssatz“ Gebrauch machte; dazu sei die Berechnung der Kreisfläche aus dem Buch XII der „Elemente“ gewählt. Der Sachverhalt wird, wie schon bei Hippokrates, so formuliert: „Kreise verhalten sich zueinander wie die Quadrate über den Durchmessern.“

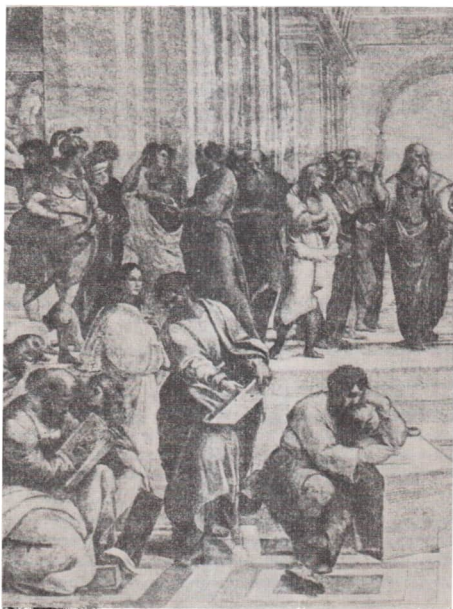
Zwei Kreisen mit den Flächen f und F und den Durchmessern d und D werden ähnliche regelmäßige Vielecke mit den Flächen f_n bzw. F_n einbeschrieben. Dann ist $f_n < f$ und $F_n < F$. Da sich, nach einem vorher bewiesenen Satz, ähnliche Vielecke in

Kreisen verhalten wie die Quadrate über den Durchmessern, hat man $f_n : F_n = d^2 : D^2$. Angenommen, f wäre nicht proportional d^2 , sondern etwa $d^2 : D^2 = (f - \varepsilon) : F$, d. h. $f_n : F_n = (f - \varepsilon) : F$, wobei ε eine Fläche nicht größer als das einbeschriebene Quadrat f_4 bedeutet, dann könnte man durch genügende Verdoppelung der Eckenzahl n erreichen, daß $f_n > f - \varepsilon$ wird, im Widerspruch zu $f_n < f$. Genauso widerlegt man die andere bei Nichtproportionalität mögliche Beziehung $f_n : F_n = f : (F - \delta)$. Also muß der Satz als richtig angenommen werden.

Mit diesen Ansätzen zur Behandlung von geometrisch existierenden Grenzwerten, die auf einem exakten, indirekten Beweis durch „Ausschöpfung“ beruhen, schuf Eudoxos gedankliche Möglichkeiten, die bereits in der darauffolgenden hellenistischen Periode der antiken Mathematik, insbesondere bei Archimedes, ihre Fruchtbarkeit offenbaren und noch bis weit in die Mathematik der Neuzeit hineinreichen sollten.

Vorlesung 4

Klassische Antike: Hellenistische Periode. Ausgang der Antike



Raffael: Die Schule von Athen (Ausschnitt)

Hellenistische Periode

Die Zeit vom Regierungsantritt (336 v. u. Z.) Alexander des Großen bis zur Eroberung Ägyptens durch die Römer (30 v. u. Z.) war durch weitreichende Änderungen des gesellschaftlich-politischen Lebens gekennzeichnet, durch bedeutende neue Erungenschaften der Produktionstechnik, des Militärwesens und des Bauwesens sowie durch eine Ausweitung der Handelstätigkeit auf einem für die damaligen Verhältnisse riesigen Territorium, das Mazedonien, Griechenland, Klein- und Mittelasien, Süd- und Westeuropa, Nordafrika und Teile Indiens umfaßte.

Insbesondere spricht man auch von einer Kultur und Wissenschaft des Hellenismus. Sie entstand durch Verschmelzung und Durchdringung der kulturell-wissenschaftlichen Ergebnisse der Griechen (d. h. der Hellenen) mit den verschiedenen Kulturen der Völker jenes großen Territoriums; so war der Mazedone Alexander durch seinen griechischen Lehrer und Erzieher, den Philosophen Aristoteles, in den Traditionen der griechischen Wissenschaft aufgewachsen. Die hellenistische Kultur und Wissenschaft blieb bestimmend in den aus Alexanders Großreich hervorgegangenen Nachfolgestaaten und wirkte bis weit in die Zeit des römischen Imperiums hinein. Die Mathematik jener Zeit bildete einen integrierenden Bestandteil der hellenistischen Kultur und Wissenschaft und löste sich, wie andere Wissenschaften auch, aus der Philosophie heraus.

Alexandria. Das Museion

An günstiger Stelle, an der Mündung eines Nilarmes, war im Jahre 331 v. u. Z. eine der vielen „Alexanderstädte“ gegründet worden, die noch heute Alexanders Namen trägt: Alexandria in Ägypten. Sie wurde zur Hauptstadt des Ptolemäerreiches, des bedeutendsten der Nachfolgestaaten des Alexanderreiches, der von Alexanders Tod bis zum Tode Cleopatras, der letzten Königin, auf dem Territorium Ägyptens Bestand hatte. Alexandria wurde das wissenschaftlich-kulturelle Zentrum der Welt des Hellenismus und der Römerzeit. In Athen gab es die Platonische Akademie, das Lyzeum des Aristoteles und den sog. Garten des materialistischen Philosophen Epikur – aber Alexandria besaß das Museion. Es handelte sich hierbei um das erste staatlich gegründete und unterhaltene Forschungs- und Lehrzentrum überhaupt, mit Hörsälen, Arbeits- und Speiseräumen, mit einer dazugehörigen ganz außerordentlichen Bibliothek von ca. 400 000 Papyrusrollen (die in späteren kriegerischen Auseinandersetzungen mit den Römern vernichtet wurde), mit Sternwarte, botanischen und zoologischen Gärten. Kopisten waren angestellt, um die Bücher zu vervielfältigen.

Von rund 300 v. u. Z. bis rund 150 u. Z., also nahezu ein halbes Jahrtausend, haben die bedeutendsten damaligen Wissenschaftler mit dem Museion und Alexandria in Verbindung gestanden. Viele wirkten dort oder hatten dort studiert. Dies trifft auch auf die Mathematiker der hellenistischen Periode, u. a. auf Euklid, Eratosthenes, Archimedes, Apollonios, Heron, Ptolemaios, Diophantos zu.

Euklid von Alexandria

Von Euklid stammt das zweifellos erfolgreichste mathematische Buch der Weltgeschichte, die „Elemente“ (Abb. 4.1). Mehr als zwei Jahrtausende, in England bis in die jüngste Vergangenheit hinein, hat man nach den „Elementen“ Geometrie unterrichtet. Von seinem Autor dagegen weiß man wenig, nicht einmal seinen Geburtsort. Es dürfte nur feststehen, daß er in Alexandria gewirkt hat und dort um 300 (die Datierungen schwanken) v. u. Z. die „Elemente“ niedergeschrieben hat.

Die „Elemente“ (griech. stoicheia) waren nicht, wie der Titel vermuten lassen könnte, für Anfänger bestimmt, sondern für Lernende auf fortgeschrittenem Niveau

PRIMVS

Euclidis philosophi ac perspicacissimi Mathematici. Euclidis megarensis primus elementorum liber optimi. Campani translatione. Reuerendo Patre theologo professo re mathematicae discipline illustrissimo. Magistro Lucapolo de burgo Sancti Epulchi Ordinis Monacho Cathagorae accuratissimo fienter. Incipit. Definitionibus seu definiti onibus principiorum per se notorum primis.



Definitio est cuius pars non est. 2. Linea est longitudo sine la titudine cuius quidem extremitates sunt duo puncta. 3. Linea recta est ab uno puncto ad ali um locum linea rectissima in extre mitates suas utraque eorum recipi ens. 4. Superficies est quae longitudo et latitudine tan tum habet. cuius terminum quem sunt linee. 5. Superficies plana est ab una linea ad aliam extre miam in extremitates suas recipi ens. 6. Angulus planus est duarum linearum alterius co tactus. quarum expansio est super superficiem applicatione non directa. 7. Quando autem angulorum conuenit duae li neae rectae rectiligneus angulus nominatur. 8. Quando recta li nea super rectam steterit duos anguli utrobique fuerint equei. conueni uterque rectus erit. 9. Lineae siue superficies in cui super sit perpendicularis vocatur. 10. Angulus vero qui re cto maior est obtusus dicitur. 11. Angulus vero minor recto acutus appellatur. 12. Terminus est quod vniuersum finis est. 13. Figura est quae terminis vel terminis continetur. 14. Circulus est figura plana una quidem linea contenta. quae circumferentia nominatur. in cuius medio punctus est. a quo omnes linee rectae ad circumferentiam exeunt. ab invicem sunt equei. huius quidem punctus circuli est. 15. Diameter circuli est linea recta quae super eius centrum transiit. extremitates suas circumferentiae applicans circulum in duo media diuidit. 16. Semidiameter est figura plana diametro circuli et medie tate circumferentiae contenta. 17. Portio circuli est figura plana recta linea et parte circumferentiae contenta. huiusmodi quidem aut maior aut minor. 18. Rectilineae figure sunt quae rectis lineis conueniunt quarum quaedam trilaterae quae tribus rectis lineis. quaedam quadrilaterae quae quatuor rectis lineis. quaedam multilaterae quae pluribus et quatuor rectis lineis con tinentur. 19. Figurarum trilaterarum alia est triangulus habens tria latera equalia. Alia triangulus duo habens equalia latera. Alia triangulus trium inaequalium laterum. Quarum iterum alia est orthogoniam. vtrumque rectum angulum habens. Alia est amphiagoniam aliquem obtusum angulum habens. Alia est oxigoniam in qua duo anguli sunt acuti. 20. Figurarum autem quadrilaterarum alia est quadratum quod est

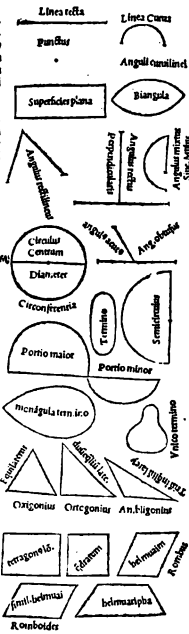


Abb. 4.1. Druckausgabe der „Elemente“, Venedig 1509. Anfang des Buches I

(Anm. 4.1). Fast die gesamte damalige Mathematik wurde dort zusammengefaßt. Jedoch fehlte, ganz im Sinne Platons, der Bezug auf die Anwendungen der Mathematik.

Die „Elemente“ bestehen aus 13 Büchern. In späterer Zeit sind noch zwei weitere Bücher hinzugekommen, Buch XIV von Hypsikles (2. Jh. v. u. Z.) und Buch XV, vermutlich von Damaskios (5. Jh. u. Z.). Die Tabelle informiert zusammenfassend über Inhalt und Ursprung der einzelnen Bücher der „Elemente“ von Euklid.

Buch		Inhalt	Inhaltlich her- rührend von
I	planimetrische Bücher	Vom Punkt bis zum pythagoreischen Lehrsatz	Ionische Periode, insbesondere Pythagoreer
II		Geometrische Algebra	
III		Kreislehre	
IV		Ein- und umbeschriebene regelmäßige Vielecke	
V		Ausdehnung der Größenlehre auf Irrationalitäten	
VI		Proportionen, Anwendung auf Planimetrie	
VII	zahlentheore- tische Bücher	Teilbarkeitslehre, Primzahlen	Pythagoreer
VIII		Quadrat- und Kubikzahlen, geometrische Reihen	
IX		Lehre von Gerade und Ungerade	
X	irrationali- täten	Klassen quadratischer Irrationalitäten, Flächenlegungen	Theaitetos
XI	stereometrische Bücher	Elementare Stereometrie	ionische Periode
XII		Exhaustionsmethode: Pyramide, Kegel, Kugel	Eudoxos
XIII		Reguläre Polyeder	Theaitetos

Aufbau der „Elemente“

Euklid baut sein großartiges Lehrwerk auf Definitionen, Postulaten und Axiomen auf; es folgen Lehrsätze mit Beweisen, Problemstellungen und Hilfssätze.

Die Definitionen der Grundelemente der Geometrie – Punkt, Linie, Strecke, Fläche – sind anschaulicher, beschreibender Art. So heißt es etwa:

„Ein Punkt ist, was keine Teile hat“. „Eine Linie (ist) breitenlose Länge“. „Eine Grenze ist das, worin etwas endet.“ (L 4.5), I, S. 1)

Dies sind nicht eigentlich Definitionen, sondern Beschreibungen. Wer z. B. noch nicht den Begriff des Punktes aus der Anschauung mittels Abstraktion gewonnen hat, kann ihn aus dieser Definition auch nicht erwerben. Die weitaus größere Zahl der Definitionen aber ist durchaus streng; Eigenschaften werden maßgebend für die Definition. Beispielsweise:

„Von den vierseitigen (geradlinigen) Figuren ist ein Quadrat jede, die gleichseitig und rechtwinklig ist.“ „Parallel sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und dabei, wenn man sie nach beiden Seiten ins unendliche verlängert, auf keiner einander treffen.“ ([L 4.5], I, S. 2)

Dann folgen fünf Postulate (heute allerdings werden Postulat und Axiom als weitgehend synonym verstanden). Sie sind geometrische Festlegungen. In den ersten drei wird postuliert, daß man jeden Punkt mit jedem durch eine Strecke verbinden, jede begrenzte Linie geradlinig zusammenhängend verlängern und Kreise mit beliebigem Radius und Mittelpunkt schlagen darf. Dadurch werden die Konstruktionshilfsmittel, ganz im Sinne Platons, auf Zirkel und Lineal fixiert. Das vierte Postulat legt fest, daß alle rechten Winkel gleich sind. Das fünfte postuliert (Abb. 4.2),

„daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.“ ([L 4.5], I, S. 3)

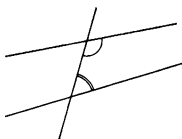


Abb. 4.2. Zur ursprünglichen Fassung des sog. Parallelenpostulats

Mit diesem Postulat ist die Existenz höchstens einer Parallelen (immer zu einer vorgegebenen Gerade durch einen nicht auf ihr liegenden Punkt) fixiert; die Existenz wenigstens einer Parallelen wird von Euklid bewiesen. Damit ist die Existenz genau einer Parallelen gesichert.

Das fünfte Postulat erhielt wegen dieses Zusammenhanges später die Bezeichnung „Parallelenpostulat“ (oder sogar Parallelenaxiom). Es wurde bereits in der Antike viel diskutiert, weil es nicht dasselbe Maß an Selbstverständlichkeit und Anschaulichkeit zu besitzen schien wie die anderen vier. Man hat daher schon in der Antike versucht, dieses Postulat als Theorem zu verstehen, es also zu beweisen. Man weiß seit der Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie, daß dies nicht möglich ist; um so mehr ist der Weitblick von Euklid zu bewundern.

Übrigens gibt es bei Euklid noch keine Axiome oder Postulate der Anordnung; diese werden anschaulich implizit gebraucht. Hier schuf erst Pasch im 19. Jh. begriffliche Klarheit.

Den fünf geometrischen Postulaten folgen bei Euklid logische Axiome; sie stehen ganz deutlich unter dem Eindruck der etwa zur gleichen Zeit durch Aristoteles voll-

zogenen Durchbildung der formalen Logik. In späteren Texteditionen treten neun Axiome auf; von Euklid selbst stammen die folgenden:

„Was demselben gleich ist, ist auch unter einander gleich.“ „Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich.“ „Die Doppelten (Halben) von demselben sind einander gleich.“ „Was einander deckt, ist einander gleich.“ (Dieses Axiom ist Grundlage der Kongruenzgeometrie.) „Das Ganze ist größer als der Teil.“ ([L 4.5], I, S. 3)

Euklid als Forscher

Tritt uns Euklid in den „Elementen“ als ein vorzüglicher Systematiker bekannten mathematischen Stoffes entgegen, so hinterließ er auch eine ganze Reihe eigenständiger Forschungsergebnisse. Einige dieser Abhandlungen sind allerdings nur dem Thema nach bekannt, andere sind nur in arabischer Übersetzung erhalten geblieben. Es seien wenigstens einige Titel genannt:

„Über die Zerlegung von Figuren“, „Porismen“ (d. h. Sätze, mit denen man etwas „finden“ kann), „Pseudaria“ (Über Trugschlüsse). Die „Dedomena“ (Gegebenheiten) untersuchen, welche Teile einer Figur und deren Beziehungen – Größe, Lage usw. – bestimmt sind, wenn andere Teile nach Größe, Lage usw. vorgegeben sind. Eine Kegelschnittslehre Euklids in vier Büchern ist verlorengegangen, da sie durch die spätere und ausführlichere des Apollonios verdrängt wurde. Ferner gibt es Schriften von Euklid zur mathematischen Physik, „Optika“ (Perspektive), „Katoptrika“ (Spiegelbilder), „Sectio Canonis“ (Musiktheorie), „Phainomena“ (theoretische Astronomie, Sphärik).

Insgesamt hat Euklid damit den gesamten mathematischen Lehrstoff, wie er in der platonischen Schule vorgeschrieben war, zusammengefaßt.

Archimedes als Mathematiker

Mit Archimedes erreichte die Mathematik der Antike ihren Höhepunkt. Sein Gedankenreichtum auf allen Gebieten der Mathematik, in Astronomie, Hydrostatik, Mechanik und Technik verleiht ihm schon in der Antike ein hohes Ansehen, noch gesteigert durch die Erfindung äußerst wirkungsvoller Verteidigungswaffen, mit deren Hilfe seine Vaterstadt Syracus auf Sizilien den römischen Belagerern zwei Jahre Widerstand leisten konnte.

Seine zahlreichen Abhandlungen weisen ihn als einen tiefgründigen originellen Denker im Bereich der Mathematik aus und zugleich als Begründer der mathematischen Physik.

In der „Quadratur der Parabel“ gelingt Archimedes die exakte Flächenberechnung eines Parabelsegments, indem er eine unendliche geometrische Reihe summiert. Nach Ergebnis und Methode rechnen wir dies heute zur Integralrechnung. „Über Kugel und Zylinder“, „Über Konoide und Sphäroide“ beschäftigen sich u. a. mit der Inhaltsbestimmung von Bogenlängen, Oberfläche und Volumen der Kugel und ihren Segmenten und Sektoren, mit Rotationsellipsoiden und Rotationshyperboloiden

sowie den Schwerpunkten dieser Flächen und Körper. „Über Spiralen“ studiert Flächenverhältnisse an der nach Archimedes benannten Spirale. Andere Schriften, u. a. „Das Buch der Lemmata“, „Die Konstruktion des regulären Siebenecks“ und „Über halbbregelmäßige Körper“ sind teilweise oder ganz verlorengegangen oder nur in arabischer Übersetzung erhalten geblieben. Bedeutsam ist „Die Sandzahl“ (oder „Der Sandrechner“), in der alle Zahlen bis A^{10^8} mit $A = (10^8)^{10^8}$ eine Benennung erhalten und die unbegrenzte Fortsetzbarkeit der Zahlenreihe ausgesprochen wird. In der nur teilweise erhaltenen „Kreisrechnung“ findet Archimedes die Abschätzung

$$3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{10}{70}.$$

Im engeren Sinne physikalischen Inhaltes sind die Abhandlungen „Über das Gleichgewicht ebener Flächen oder über den Schwerpunkt ebener Flächen“, „Über schwimmende Körper“, „Über den Brennspiegel“ (verloren).

Man hat sich lange gefragt, wie es Archimedes möglich war, eine solche Fülle komplizierter Probleme zu lösen. Eine erst im Jahre 1906 wiederaufgefundene Abhandlung, die sog. „Methodenlehre“ (Methode der mechanisch herleitbaren Sätze) gibt darüber Auskunft: Archimedes hat durch mechanisch-physikalische Überlegungen und Analogien den Inhalt der Sätze gefunden und dann erst den exakten mathematischen Beweis ausgearbeitet. Archimedes sagt:

„Ich bin ... überzeugt, daß die Methode nicht weniger nützlich ist zum Beweis der Theoreme selbst. Denn Einiges von dem, was mir auf ‚mechanische‘ Weise klar wurde, wurde später auf geometrische Art bewiesen, weil die Betrachtungsweise dieser (‚mechanischen‘) Art der (strengen) Beweiskraft entbehrt. Denn es ist leichter, den Beweis zustande zu bringen, wenn man schon vorgreifend durch die ‚mechanische‘ Weise einen Begriff von der Sache gewonnen hat, als ohne eine derartige Vorkenntnis.

Deshalb wird man einen nicht geringen Verdienstanteil an der Entdeckung jener Theoreme, für die Eudoxos zuerst den Beweis fand — über Kegel und Pyramide, daß der Kegel der 3. Teil des Zylinders und die Pyramide der 3. Teil des Prismas mit derselben Basis und Höhe ist —, dem Demokritos zubilligen müssen, der die Sätze über diese Figuren aussprach, wenn auch ohne Beweis.“ ([LA 1], S. 56)

In der „Methodenlehre“ findet Archimedes auf Grund mechanischer Erwägungen, indem er das Parabelsegment als mit Masse behaftet gedanklich am Waagbalken aufhängt und auswiegt, den Flächeninhalt des Segments. Der strenge mathematische Beweis ist in der Abhandlung „Quadratur der Parabel“ enthalten. Dort betont Archimedes mit Recht, es handle sich um ein Problem,

„das bisher noch nicht, jetzt aber durch mich in Angriff genommen worden ist; und zwar habe ich die Lösung zuerst durch Methoden der Mechanik gefunden, alsdann durch Methoden der reinen Geometrie ... Ich zeige nämlich, daß der Inhalt jedes Parabelsegments ein Drittel größer ist, als das Dreieck, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.“ ([L 4.2], S. 7)

Beim strengen Beweis führt Archimedes zunächst eine Reihensummation durch:

„In einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten $\frac{1}{4}$ ist die um den dritten Teil des kleinsten Gliedes vermehrte Summe aller Glieder $\frac{4}{3}$ mal so groß wie das größte.“ ([L 4.2], S. 26)

Sind $a, b, c, d, e, \dots$ Glieder der Reihe, dann ist

$$b + \frac{1}{3}b = \frac{4}{3}b = \frac{1}{3}a, \quad c + \frac{1}{3}c = \frac{4}{3}c = \frac{1}{3}b, \dots$$

Durch Addition folgt

$$b + c + d + e + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}d + \frac{1}{3}e = \frac{1}{3}(a + b + c + d).$$

Indem man a addiert und $\frac{1}{3}b, \frac{1}{3}c, \frac{1}{3}d$ subtrahiert, erhält man

$$a + b + c + d + e + \frac{1}{3}e = \frac{4}{3}a \quad \text{q. e. d.}$$

Natürlich tritt bei Archimedes das Wort „Summe einer unendlichen Reihe“ nicht auf. Und doch ist es dem Wesen der Sache nach eine echte Grenzwertbestimmung einer Folge von Partialsummen, der sich von einer endlichen Größe um weniger als

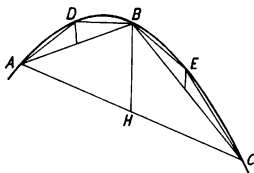


Abb. 4.3. Zur Quadratur eines Parabelsegmentes durch Archimedes

eine beliebig kleine Größe unterscheidet. Glanzvoller noch ist der eigentliche Beweis: Dem Parabelsegment (Abb. 4.3) über AC wird das Dreieck ABC einbeschrieben: H halbiert AC , HB ist parallel zur Achse der Parabel. Durch AB und BC werden wieder Parabelsegmente abgeschnitten, auf sie wird das Verfahren wieder angewendet; man erhält die Dreiecke ADB und BCE . Aus den Eigenschaften der Parabel folgt, daß $\triangle ABC$ viermal so groß ist wie die Summe dieser beiden Dreiecke. Nach dem nächsten Schritt erhält man vier Dreiecke, deren Summe ein Viertel der Flächeninhalte der beiden vorigen ausmacht, usw.

Angenommen, der Satz wäre falsch, dann müßte der Flächeninhalt des Segmentes entweder größer oder kleiner als $\frac{4}{3}$ des Flächeninhaltes K vom Dreieck ABC sein. Es sei zunächst Segment $> \frac{4}{3} \triangle$ vorausgesetzt. Bei dem Verfahren der einzuschreibenden Dreiecke

„wird es möglich sein, ... soweit fortzuschreiten, daß die Summe der übrig bleibenden Restsegmente kleiner ist als die Differenz, um die das Segment die Fläche K übertrifft. Daraus würde folgen, daß das eingeschriebene Vieleck (d. i. eine Partialsumme $a + b + \dots + e$, Wg) größer ist als die Fläche K . Dies ist aber unmöglich. Denn da gewisse Flächen vorhanden sind,

die eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $\frac{1}{4}$ bilden, ..., so ist klar, daß die Summe aller Flächen kleiner ist als $\frac{4}{3}$ von der größten“. ([L 4.2], S. 27/28)

Die andere Überlegung führt ebenfalls zu einem Widerspruch. Der Satz ist damit bewiesen.

Apollonios von Perge. Die Kegelschnittslehre

Der nur wenig jüngere Apollonios von Perge, der ebenfalls in Alexandria studiert hat und sich lange in Pergamon in Kleinasien aufhielt, hat Archimedes an Tiefe und Originalität des Denkens nicht ganz erreicht. Doch gehört er ebenfalls zu den herausragenden Mathematikern. Von ihm stammt u. a. eine achtbändige Kegelschnittslehre, die den Titel „Konika“ (von griech. *kōnos*, Pinienzapfen, Kegel) trug. Die ersten vier Bücher sind in griechischer Sprache erhalten geblieben, die nächsten drei in arabischer Übersetzung, Buch 8 ist verschollen.

Kegelschnitte waren schon vor Apollonios untersucht worden. So hatte Menaichmos Hyperbeln und Parabeln zur Lösung des Delischen Problems verwandt, und Aristaios hatte Kegelschnitte als Schnittfiguren von Kegeln und Ebenen studiert. Aber erst Apollonios schuf eine einheitliche Herleitung aller Kegelschnitte — Ellipse, Parabel, Hyperbel — durch ebene Schnitte ein und desselben Kegels.

Die Apollonische Kegelschnittslehre, die ein erstaunliches Niveau besaß, mußte ohne Koordinatengeometrie und ohne Formelschreibweise auskommen und ist daher verhältnismäßig umständlich und schwer durchschaubar. Um so höher ist natürlich der Scharfsinn von Apollonios einzuschätzen, der in den Büchern 6 bis 8 hauptsächlich eigene Forschungsergebnisse dargestellt hat. Nach heutiger Terminologie behandelt Apollonios die folgenden Themenkreise:

- Buch 1: Erzeugung der Kegelschnitte durch Schnitt eines Kreiskegels. Mittelpunkt, Durchmesser und konjugierte Durchmesser der Kegelschnitte
- Buch 2: Achsen und Asymptoten der Hyperbel
- Buch 3: Brennpunkte, Theorie von Pol und Polare. Projektive Erzeugung der Kegelschnitte
- Buch 4: Anzahl der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte (Beweis, daß es höchstens vier Schnittpunkte gibt)
- Buch 5: Normale und Subnormale. Krümmungsmittelpunkte
- Buch 6: Ähnliche Kegelschnitte
- Buch 7: Spezielle Eigenschaften der konjugierten Durchmesser
- Buch 8 (Rekonstruktion): Determination von speziellen Konstruktionsaufgaben

Apollonios hat noch auf einem anderen Gebiet eine weit nachwirkende Leistung vollbracht, dem der theoretischen Astronomie. Nach Platons Auffassung mußten die Bewegungen der Planeten auf vollkommenen Bahnkurven, also auf Kreisen stattfinden; diese Ansicht wurde zum idealistischen Vorurteil, auf dem die antike Astro-

nomie aufzubauen hatte. Durch höchst scharfsinnige Kombinationen von Exzentren und Epizykeln (Abb. 4.4) gelang es Apollonios, die komplizierten Planetenbewegungen mittels kreisförmiger Bewegungen anzunähern und so das Platonische Dogma (scheinbar) zu retten.

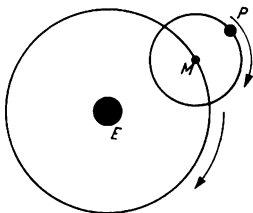


Abb. 4.4. Epizyklische Bewegung von Planeten: Der Planet P bewegt sich auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt M sich seinerseits auf einem Kreis um die Erde E bewegt

Ptolemaios als Mathematiker

Mit Hilfe dieses geometrischen Ansatzes und auf der Grundvorstellung von der im Mittelpunkt der Welt stehenden Erde, die von den Planeten (unter ihnen die Sonne) umlaufen wird, wurde die hellenistische Astronomie durchgebildet (Anm. 4.2). Sie fand ihre schließliche Ausformung in dem bewunderungswürdigen Werk „Almagest“ (eine arabische Version des griechischen Titels, der „Die große Zusammenfassung“ bedeutete) des Ptolemaios, das ein gewaltiges empirisches Material geistig verarbeitete. Innerhalb der damaligen Beobachtungsgenauigkeit deckte sich die mathematische Theorie mit dem Ablauf der Planetenbewegungen. Dies macht es auch verständlich, warum das astronomische System des Ptolemaios eineinhalb Jahrtausende lang unangefochten Anerkennung, ja Bewunderung erfuhr und warum erst in einem zähen und opferreichen Kampf dem heliozentrischen System des Copernicus zum Sieg verholfen werden konnte, in einer Auseinandersetzung, die über den wissenschaftlichen Gehalt hinaus noch eine außerordentlich brisante ideologischer Komponente besaß, die den Widerstand orthodoxer und reaktionärer Kreise gegen Copernicus und seine Lehre nach sich zog.

Es verdient hervorgehoben zu werden, daß der „Almagest“ auch eine recht gut entwickelte ebene und sphärische Trigonometrie enthält, die auf Vorarbeiten insbesondere von Menelaos von Alexandria zurückgreift. Doch ist die hellenistische Trigonometrie auf der Sehnenrechnung aufgebaut, d. h., an der Stelle der heute üblichen trigonometrischen Funktionen wird eine Funktion verwendet, die – modern ausgedrückt – durch

$$\text{ch}(2\alpha) = 2 \sin \alpha$$

zu definieren wäre. Dabei bedeutet ch die Abkürzung von *chorda*, Saite (Abb. 4.5).

In anderen Werken verwendete Ptolemaios die stereographische Projektion der Kugel auf die Ebene, versuchte das Euklidische Parallelpostulat zu beweisen und

beschäftigte sich mit Optik, Mechanik und Harmonielehre. Ptolemaios trat darüber hinaus auch als Geograph und als Verfasser eines berühmt gewordenen astrologischen Werkes hervor.

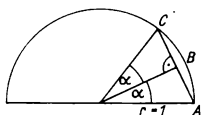


Abb. 4.5. Zum Zusammenhang zwischen Sehnen- und Sinustrigonometrie

Heron von Alexandria

Schon an das Ende der hellenistischen Periode gehören noch zwei weitere Mathematiker, deren Leistungen im gewissen Sinne ganz untypisch für die Mathematik dieser Zeit sind. Dennoch stellten sie wichtige Bestandteile und keineswegs Randerscheinungen dar.

Bis zu einem gewissen Grade war das von Heron hinterlassene mathematische Werk ein Gegenstück zu den „Elementen“ des Euklid. Handelte es sich dort um den Höhepunkt der Platonischen Auffassung von Mathematik, so vertrat Heron eine Mathematik, die der Befriedigung praktischer Belange diente. Das ist auch insofern bemerkenswert, als im allgemeinen sonst die in der Sklavereigesellschaft verachtete Produktion nicht zum Gegenstand schriftlicher Überlieferung wurde. Erst in der Renaissance wird sich dies ändern, für die Antike aber sind solche Fälle sehr selten. Heron gehörte zu den Ausnahmen wie etwa auch die zehn Bücher über Architektur von Vitruvius am Beginn unserer Zeitrechnung.

Hérons Beruf würden wir heute etwa als den eines Ingenieurs bezeichnen. Er hat viele Schriften verfaßt; zumindest sind unter seinem Namen Gegenstände wie „Dioptrica“ (Vermessungsinstrumente) (Abb. 4.6), „Belopoiika“ (Geschützkunde), „Mechanica“ (Mechanik, d. h. Beschreibung und mathematische Theorie der einfachen Maschinen Hebel, schiefe Ebene, Keil, Flaschenzug, Winde usw.), Schriften über Wasseruhren, Gewölbe, Automaten sowie die berühmten „Pneumatica“ (d. i. Druckwerke) überliefert, in denen allerhand sinnreich konstruierte, aber für die Produktion bedeutungslose Apparate beschrieben werden, die durch Dampfdruck oder Luftdruckunterschiede in Bewegung gesetzt werden: Trompeten schmettern, Tempeltüren öffnen sich, Tiernachbildungen trinken oder Vögel zwitschern. Übrigens zeigen sich hier Grenzen der damaligen Gesellschaftsordnung: Zwar war die Kraft des Dampfes erkannt, aber es bestand keine gesellschaftliche Notwendigkeit, diese neue Energieform für die Produktion auszunutzen, solange mit den Sklaven genug menschliche Arbeitskraft zur Verfügung stand.

Von den eigentlich mathematisch orientierten Schriften Herons seien die „Metrica“, d. i. drei Bücher über Vermessungslehre, „Geometrica“ (Flächenberechnungen) und „Stereometrica“ (Volumenberechnungen), erwähnt.

Hérons Schriften haben durch ihre vorbildliche Darstellung eine weite Verbreitung gefunden. Durch dauernden Gebrauch immer wieder ergänzt, verändert und neu

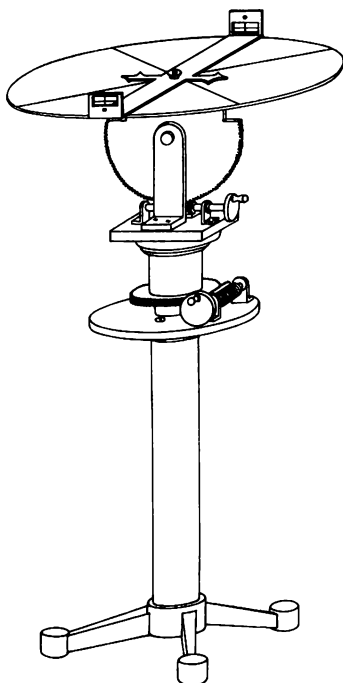


Abb. 4.6. Vermessungsgerät (Dioptra) von Heron (Rekonstruktion)

redigiert, wurden sie zum Standardwerk der praktischen Mathematik der Folgezeit. So beruhen auf Heronischen Vorbildern etwa die Feldmeßmethoden der römischen Agrimensoren, die im Troß der römischen Heere mitzogen und eine Weltkarte des römischen Weltreiches mit überraschend genauen Entfernungsangaben anfertigten.

Zugleich verdient es hervorgehoben zu werden, daß einige mathematische Schriften Herons eine strenge, auf Definitionen, Sätzen und Beweisen beruhende Darstellungsweise besitzen und auch Ergebnisse enthalten, die über Euklid hinausgehen. Beispielsweise stammt von ihm (oder Archimedes) die Heronische Dreiecksformel für den Flächeninhalt eines Dreiecks,

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

wobei $s = \frac{a+b+c}{2}$ die halbe Summe der Dreiecksseiten bedeutet. Bei Heron tritt

am Fall der Kaliberberechnung eines Geschützes die rechnerische Behandlung einer Gleichung dritten Grades auf. Sehr ausführlich werden auch neue Methoden zur näherungsweise Berechnung von Wurzeln entwickelt.

Und schließlich tritt bei Heron eine Weiterführung der materialistischen Linie in der Philosophie der Mathematik zutage. So besaß Heron eine – für seine Zeit – bemerkenswert klare Vorstellung vom Wesen der Mathematik:

„Wo die Grundlagen der Geometrie herkommen, läßt sich durch die Philosophie zeigen. Damit wir nicht gegen die Regeln verstoßen, ist es schicklich, die Definition der Geometrie anzugeben. Die Geometrie ist also die Wissenschaft von Figuren und Größen und ihren Veränderungen, und ihr Zweck ist, hiervon zu handeln; die Methode aber ihrer Darstellung ist synthetisch; sie fängt nämlich mit dem Punkte an, der ohne Ausdehnung ist, und erreicht über Linie und Fläche den Körper. Ihr Nutzen dient geradezu der Philosophie; das ist ja auch die Meinung des göttlichen Platon, wo er sagt: ob diese Lehren schwer oder leicht sind, durch sie geht der Weg ... Die Geometrie hat ihre Darstellung durch Abstraktion aufgebaut; sie nimmt nämlich den physischen Körper, der drei Dimensionen hat und Stofflichkeit, und durch Entfernung seiner Stofflichkeit hat sie den mathematischen Körper gebildet, der solide ist, und durch Abstraktion hat sie dann den Punkt erreicht, ... Wie der alte Bericht uns lehrt, haben die meisten Menschen sich mit Vermessung und Verteilung von Land abgegeben, woraus der Name Geometrie (Landmessung) entstanden ist. Die Erfindung aber der Vermessung ist von den Ägyptern gemacht; denn wegen des Steigens des Nils wurden viele Grundstücke, die deutlich zu erkennen, unkenntlich durch das Steigen, viele auch noch nach dem Fallen, und es war dem einzelnen nicht mehr möglich, sein Eigentum zu unterscheiden; daher haben die Ägypter diese Vermessung erfunden, bald mit dem sog. Meßband, bald mit der Rute, bald auch mit anderen Maßen. Da nun die Vermessung notwendig war, verbreitete sich der Gebrauch zu allen lernbegierigen Menschen“. ([L 4.6], S. 173/175/177)

Diophantos von Alexandria

Mit dem Werk des Diophantos, der zur Mitte des 3. Jh. u. Z. gelebt hat, tritt eine weitere Unterströmung mathematischer Entwicklung während der Antike wieder zutage. Bei ihm zeigt sich, daß über einen langen Zeitraum hinweg die algebraischen Denkweisen Mesopotamiens weitergeführt worden sind, eine Bestätigung übrigens dafür, daß die hellenistische „Welt“kultur auch im wissenschaftlichen Bereich durch enge Berührung verschiedener regionaler Kulturen entstanden ist. Die geistige Verwandtschaft von Diophantos mit der Mathematik Mesopotamiens ist so eng, daß sogar in mesopotamischen Texten und bei Diophantos auftretende Aufgaben ganz außerordentlich ähnlich sind, bis ins Detail hinein. Diophantos hat wenigstens drei mathematische Schriften verfaßt. Die wichtigste ist eine aus 13 Teilen bestehende „Arithmetica“, die aber nur in unterschiedlicher Form, teils griechisch, teils arabisch überliefert wurde (Anm. 4.3). Es handelt sich um eine vom Einfachen zum Schwierigen fortschreitende Aufgabensammlung bestimmter und unbestimmter Aufgaben, deren Lösung demonstriert wird, ohne daß allerdings eine allgemeine Theorie dargeboten würde. Lediglich im ersten Buch der „Arithmetik“ erläutert Diophantos, wobei er sich an einen gewissen Dionysios wendet, ein wenig Sinn und Methode seiner Abhandlung:

„Da ich weiß, mein sehr verehrter Dionysios, daß Du voller Eifer bist, die Lösung arithmetischer Probleme kennenzulernen, so habe ich versucht, Dir die Wissenschaft der Arithmetik, mit den Elementen beginnend, zu erklären. Vielleicht erscheint der Stoff etwas schwierig, da er Dir noch nicht vertraut ist und da es dem Anfänger manchmal an Selbstvertrauen fehlt.“ ([L 4.4], S. 5)

Später heißt es zur Methode, wie man Gleichungen löst:

„Wenn nun bei irgend einer Aufgabe dieselben allgemeinen Ausdrücke auf beiden Seiten der Gleichung, aber mit ungleichen Koeffizienten stehen, so muß man Gleiches von Gleichem subtrahieren, bis zuletzt ein eingliedriger Ausdruck einem anderen gleichgesetzt ist. Sollten irgend welche allgemeinen Ausdrücke auf einer Seite oder auf beiden Seiten als abzuziehende Zahlen stehen, so muß man dieselben auf beiden Seiten addieren, so daß auf jeder Seite nur hinzuzufügende Zahlen sich befinden. Darauf hat man wieder Gleiches von Gleichem zu subtrahieren, bis auf jeder Seite nur ein Ausdruck übrig ist. In dieser Weise wird so lange mit dem Ansatz der Aufgaben verfahren, bis womöglich auf jeder Seite nur ein Glied sich befindet. Später werde ich ... auch noch zeigen, wie die Aufgabe gelöst wird, wenn zuletzt ein zweigliedriger Ausdruck einem eingliedrigen gleich ist.“ ([L 4.4], S. 7–8)

Diophantos verwendete feststehende Abkürzungen für die Variable und für die Potenzen der Variablen von x^6 bis x^{-6} , für Gleichheit, für Subtraktion. In rechnerischer Form wurden alle Typen quadratischer Gleichungen, kubische und bi-quadratische Gleichungen, Bruchgleichungen, Gleichungen in mehreren Variablen (unbestimmte Gleichungen, die später den Namen diophantische Gleichungen erhielten) behandelt. Als Lösungen wurden auch Bruchzahlen zugelassen. Der algebraische Charakter der „Arithmetica“ schließt auch eine hervorragende Umformungstechnik der Gleichungen ein, so zum Beispiel die Substitution von Hilfsvariablen. Es verdient festgehalten zu werden, daß sein Werk sogar noch im 16. und 17. Jh. wesentliche Impulse bei der Begründung der modernen Mathematik geliefert hat (Anm. 4.3).

Die Mathematiker der alexandrinischen Schule

Mit Euklid, Archimedes, Apollonios, Ptolemaios, Heron und Diophantos wurden herausragende Mathematiker der hellenistischen Periode einzeln behandelt. Es versteht sich, daß die Anzahl der Mathematiker weitaus größer war.

In Alexandria wirkte zu Lebzeiten von Archimedes zum Beispiel Eratosthenes von Kyrene, der seit dem Jahre 235 v. u. Z. Vorsteher des Museions war, u. a. das nach ihm benannte Verfahren zur Aussonderung der Primzahlen (Sieb des Eratosthenes) beschrieb und ein Verfahren angab, den Erdumfang zu bestimmen. Außerdem konstruierte er eine mechanische Vorrichtung zur Lösung des Delischen Problems der Würfelverdoppelung.

Dem Kreis der alexandrinischen Mathematiker gehörten wahrscheinlich auch Nikomedes und Diokles an, die mit der Konchoide bzw. Kissoide Kurven angaben, welche beim Problem der Würfelverdoppelung zeichnerische Lösungen ermöglichten. Dionysodoros beschäftigte sich mit Kugelteilungsaufgaben, Hypsikles studierte Oberflächen und Volumina halbbregulärer Körper und schrieb das Ergänzungsbuch XIV zu den „Elementen“. Zenodoros bewies, daß von je zwei Polygonen das mit der größeren Eckenzahl den größeren Flächeninhalt besitzt, daß der Kreis von allen

Flächen gleichen Umfanges den größten Inhalt (isoperimetrisches Problem) und daß die Kugel von allen Körpern gleicher Oberfläche das größte Volumen besitzt. Hier liegen ganz frühe Ansätze zur späteren Variationsrechnung.

Die reichen mathematischen Traditionen der alexandrinischen Schule blieben noch in der Verfallsperiode der Sklavereigesellschaft lebendig; es entstanden sogar noch einige bemerkenswerte Einzelleistungen.

Die Mathematik am Ausgang der Antike

Im Römischen Reich erlebte der Typ des Sklavenhalterstaates seine stärkste Ausprägung. Im 1. Jh. v. u. Z. spitzte sich der Widerspruch zwischen Produktivkräften und Produktionsverhältnissen zu. Sklavenaufstände, insbesondere der unter Spartacus (74–71 v. u. Z.) brachten das römische Weltreich zeitweise an den Rand des Abgrundes. Auch der Übergang von der Republik zur Militärmonarchie konsolidierte die gesellschaftlichen Verhältnisse nur vorübergehend. Im 5. Jh. u. Z. brach das Imperium zusammen.

Um sich greifende Stagnation und Zersetzung hatten entsprechende Rückwirkungen auf die Wissenschaften, darunter auf die Mathematik. Neben einer Neubelebung der mystischen Ansichten der pythagoreischen Sekte durch Neuplatoniker und Neupythagoreer erkennt man auch ein anderes Symptom. Wissen ging zwar noch nicht direkt verloren, aber es fiel den Wissenschaftlern sichtlich immer schwerer, den Spitzenleistungen früherer Perioden inhaltlich zu folgen. Darum wurde es üblich, ausführliche Kommentare – zu Euklid, Archimedes, Apollonios usw. – zu verfassen. Sie hatten die Aufgabe, Definitionen zu erläutern, knappe Beweise ausführlicher darzustellen, den gegenseitigen Zusammenhang der Sätze zu verdeutlichen, usw. Einige solcher Kommentare stellen ernstzunehmende, teilweise hervorragende wissenschaftliche Leistungen dar, die sogar noch neuentdeckte Ergebnisse enthalten.

Pappos von Alexandria

Dieser letzte herausragende Mathematiker der Antike hat sich auch als Geograph und Astronom ausgezeichnet. Ideologisch stand er dem Neoplatonismus nahe. Von ihm stammen u. a. Kommentare zum „Almagest“ und zum Buch X der „Elemente“. Das Hauptwerk von Pappos stellt ein großangelegtes, allerdings teilweise verlorengegangenes Werk – „Collectio“ (Sammlung) – dar, in dem sehr viele mathematische Werke früherer Zeit referierend behandelt wurden, darunter solche, deren Originale verlorengegangen sind.

Darüber hinaus enthält die „Collectio“ auch eigene Forschungsergebnisse von Pappos, darunter Ansätze zur projektiven Geometrie. So lautet der Satz von Pappos (Abb. 4.7): Auf zwei Geraden g_1 und g_2 , seien sie nun parallel oder nicht, seien je drei Punkte A, B, C bzw. A', B', C' gewählt. Die Verbindungsgeraden AB', AC' ,

BA' , BC' , CA' , CB' schneiden sich in den Punkten X , Y , Z , die auf einer Geraden liegen. Die „Collectio“ enthält auch die später nach dem Schweizer Mathematiker Guldin des 16./17. Jh. benannten Regeln über die Schwerpunkte rotierender Körper.

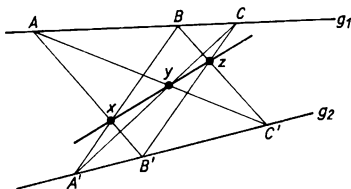


Abb. 4.7. Zum Satz von Pappos

Der Untergang der antiken Mathematik

Die wissenschaftliche Tradition früherer Zeiten konnte sich trotz widriger Umstände noch einige Zeit behaupten.

In Athen an der platonischen Akademie schrieb Domninos eine Arithmetik. Unter Proclus Diadochos im 5. Jh. u. Z. gelangte die Akademie sogar noch einmal zu einiger Bedeutung. Ein umfangreicher Kommentar zum Buch I der „Elemente“ enthält den berühmten sog. „Geometerkatalog“, eine Aufzählung griechisch-hellenistischer Mathematiker. Inzwischen aber war, nach dem Mailänder Edikt von 313, das Christentum zur Staatsreligion im Römischen Weltreich geworden. Damit geriet die Pflege Platonischer Philosophie immer mehr in Widerspruch zum Totalitätsanspruch der christlichen Ideologie; 529 wurde die Akademie auf Befehl des christlichen Kaisers Justinian „als Stätte heidnischer und verderbter Lehren“ gewaltsam geschlossen.

Schon vorher war die alexandrinische Schule untergegangen. Nach Pappos waren noch zwei weitere Mathematiker hervorgetreten. Theon von Alexandria und seine Tochter Hypatia schrieben Kommentare zum „Almagest“ und zu Euklid bzw. zu Apollonios und Diophantos. Leider sind ihre Schriften sämtlich verschollen. Hypatia fiel einem Mordanschlag christlicher Fanatiker zum Opfer; mit ihr erlosch die alexandrinische mathematische Schule.

Die wissenschaftlichen Erben der antiken Mathematik

Die antike Mathematik ist nicht spurlos untergegangen, sondern erlangte im Gegenteil auf verschiedenen historischen Wegen eine bis in unsere Gegenwart reichende Wirkung.

Geringfügige mathematische Kenntnisse wurden über den Neuplatonismus zum Bestandteil christlicher Bildung und gingen in das Quadrivium, einen Lehrabschnitt an mittelalterlichen Universitäten, ein.

Einiges über das Elementare Hinausgehende wurde von den oströmischen, byzantinischen Gelehrten bewahrt. Als schließlich, nach der Eroberung Konstantinopels

1453 durch türkische Völker, byzantinische Gelehrte mathematische Werke der Antike im Urtext nach Italien brachten, fanden diese enthusiastische Aufnahme, da dort die frühkapitalistische Entwicklung eine hohe Aufnahmebereitschaft für mathematisch-naturwissenschaftliche Kenntnisse geschaffen hatte.

Das Hauptverdienst bei der Bewahrung der antiken mathematischen Kenntnisse kommt jedoch den Gelehrten des Islam zu: Viele Vertreter der griechisch-hellenistischen Wissenschaft waren wegen der Unduldsamkeit der christlichen Kirchen nach arabischen und indischen Ländern ausgewandert und führten dort die griechisch-hellenistische mathematische Tradition weiter. Sie wurde insbesondere zum Fundament der Mathematik in den Ländern des Islam. Diesem Umweg verdanken wir es, daß eine Vielzahl von mathematischen Ergebnissen der Antike vor dem Verlust gerettet worden ist.

Vorlesung 5

Nichteuropäischer und europäischer Feudalismus



Arabisches mathematisches Manuskript (14. Jh.). Satz des Pythagoras

Vorbemerkungen

Nach dem Zusammenbruch der Welt der Antike und dem Untergang der griechisch-hellenistischen Mathematik vollzog sich die Entwicklung der mathematischen Wissenschaften hauptsächlich in den Ländern des Fernen, Mittleren und Nahen Ostens. In diesen Kulturzentren wurden wichtige und weitreichende mathematische Erkenntnisse und Methoden gefunden, die zum unverlierbaren Bestand der heutigen Weltmathematik geworden sind.

Es besteht eine Reihe von Gemeinsamkeiten der Mathematik in diesen Ländern. Im Vergleich zur Mathematik im christlichen Herrschaftsbereich bis etwa zum 13./14. Jh. hin stand die Mathematik dieser Länder auf einem hohen Niveau, und da wieder besonders in den Ländern des islamischen Bereichs.

Vom Inhalt her war diese Mathematik – eingegliedert in eine wechselvolle politische Geschichte und gebunden an die durch Landwirtschaft, künstliche Bewässerung, Handwerk und Handel im wesentlichen geprägte gesellschaftliche Struktur – vorwiegend auf die Bewältigung des Numerischen orientiert und hat eine Fülle von Algorithmen zur Lösung arithmetischer, algebraischer und geometrischer Probleme hervorgebracht. Gebiete wie kaufmännisches Rechnen, numerische Verfahren der Algebra, Näherungsverfahren, Zahlentheorie und Trigonometrie – im Zusammenhang mit hochentwickelter Astronomie – wurden besonders durchgebildet. Verglichen mit der Mathematik der griechisch-hellenistischen Antike besaß die Mathematik dieser Länder im allgemeinen nicht deren abstrakte, deduktiv angelegte oder gar axiomatisch begründete innere Struktur, wie auch die Gliederung des Stoffes in mathematischen Sammelwerken stärker durch die sachlich-praktischen Probleme als durch die innere Systematik der Teilung in verschiedene mathematische Disziplinen bestimmt wurde. Dies entsprach jedoch – wie auch im mittelalterlichen Europa – gerade den Bedürfnissen der Benutzer der mathematischen Kenntnisse, denen der Kaufleute, Erbschaftsregler, Landvermesser, Beamten, Bauleute usw.; diese benötigten klare, stets zum Ziele führende Regeln. Im Bereich der Forschung dagegen wurden sehr wohl, gestützt auf logische Deduktionen, beweisende Verfahren verwendet.

Mathematik in China

Die wechselvolle politische Geschichte Chinas – Kampf regionaler Herrscher um Vormachtstellung, politische Einigung, Aufstieg zur beherrschenden Großmacht Ostasiens, Emporkommen und Verfall verschiedener Dynastien, die Eroberung durch die Mongolen – umfaßt vier Jahrtausende. Der Übergang zur Klassengesellschaft vollzog sich in China in der 2. Hälfte des 2. Jt. v. u. Z. Die Sklavereigesellschaft Chinas wird auf die Zeit vom 16. Jh. v. u. Z. bis ins 2. Jh. u. Z. datiert; der endgültige Übergang zur Feudalgesellschaft geschah im 3. Jh. u. Z. und wird bis zum Eindringen der Europäer in der Mitte des 19. Jh. gerechnet.

Einige Informationen über frühe mathematische, insbesondere arithmetische Kenntnisse gibt es aus der Mitte des 2. Jt. v. u. Z.; sie stehen im Zusammenhang mit einem schon hochentwickelten Kalenderwesen. Aus der nachfolgenden Zeit aber fehlen gesicherte historische Quellen.

Aus der Zeit der frühen Han-Dynastie (206 v. u. Z. bis 24 u. Z.) stammt eine zusammenfassende Darstellung „Mathematik in neun Büchern“. In die Zeit der späten Han-Dynastie (Ende 220 u. Z.) fällt ein bedeutender Aufschwung der Naturwissenschaften: Damals wirkte der bedeutendste Astronom der chinesischen Antike, Zhang Heng, der einen drehbaren Himmelsglobus und ein Planetarium konstruierte und die Kugelgestalt der Erde sowie die räumliche und zeitliche Unbegrenztheit des Weltalls lehrte. Auf ihn gehen ausgedehnte Berechnungen des Wertes von π zurück. In jener Zeit wurde ein erster Seismograph konstruiert, und die Handelsbeziehungen reichten bis zum römischen Weltreich. Seit dem 1. Jh. drang der Buddhismus aus Indien nach China vor; die wissenschaftlichen und ökonomischen Verbindungen nach Indien vertieften sich.

Zu Beginn der Feudalperiode kam es zu einem Aufschwung der Naturwissenschaften und der Mathematik. Neben der Fortentwicklung der „Mathematik in neun Büchern“ durch Mathematiker wie Liu Hui (3. Jh.), Sun-zi (3./4. Jh.), Liu Zhuo (6. Jh.) und andere gelang chinesischen Ingenieuren die Konstruktion des Großen Kanals von 1700 km Länge, der den Norden mit dem Süden verband. Im Jahre 725 fand die große Gradmessung unter dem Astronomen Nan Gong-yue statt, der u. a. Interpolationsverfahren für astronomische Zwecke entwickelte. Eine dritte Blütezeit chinesischer Technik und Wissenschaft fällt in die Periode der Sung-Dynastie (960–1279): Buchdruck mit beweglichen Lettern, Gebrauch des Kompaß und des Schießpulvers, die Vervollkommnung des Kalenders, ein ausgedehntes Netz von astronomischen und geographischen Observatorien sowie die Erarbeitung einer großangelegten Enzyklopädie kennzeichnen jene Zeit. Von den mathematischen Disziplinen erreichte besonders die Algebra eine hohe Blüte; hier sind die Mathematiker Quin Jiu-shao, Li Ye und Yang Hui des 13. Jh. hervorzuheben.

Nach der Eroberung Chinas durch die Mongolen im 13. Jh. weiteten sich die wissenschaftlichen Kontakte chinesischer Gelehrter nach Mittelasien, d. h. zu den arabischen Wissenschaftlern aus; chinesische algebraische Kenntnisse wurden dort bekannt und arabische astronomisch-mathematische Kenntnisse und Geräte gelangten nach China.

Die eigenständige mathematisch-naturwissenschaftliche Entwicklung stagnierte seit dem 16./17. Jh. und blieb seitdem wesentlich hinter der Westeuropas zurück. Erst nach einer Periode der halbkolonialen Ausbeutung im 19./20. Jh., mit der Entwicklung Chinas zur bürgerlichen Republik und mit der Gründung der VR China konnte auch die Mathematik in Chinas Anschluß an die Weltwissenschaft gewinnen.

Rechenmethoden im alten China

Im alten China waren verschiedenartige Zifferschreibweisen in Gebrauch. Neben Hieroglyphenziffern erfreuten sich vom 2. Jh. v. u. Z. bis zum 12./13. Jh. u. Z. insbesondere die sog. Stäbchen- oder Bambuszifferschreibweise (Abb. 5.1), die im 13. Jh. modifiziert wurde, weiter Verbreitung.

Beim System der Stäbchenziffern handelt es sich um ein Dezimalsystem; allerdings fehlte die konsequente Anwendung der Null. Die aus Indien stammende Null dürfte zu Anfang des 8. Jh. nach China gelangt sein. Sehr früh, bereits im 2. Jh. v. u. Z., wurden auch dezimale Maßsysteme in China eingeführt, und in deren Gefolge gewannen dezimale Unterteilungen von Zahlen allmählich mathematischen Charakter. Jedenfalls war spätestens im 13. Jh. der Begriff des Dezimalbruches im abstrakten Sinne voll ausgebildet; die chinesischen Mathematiker gehören zu den Wegbereitern des durchgehenden weltweiten Gebrauches der Dezimalbrüche; im arabisch-islamischen Bereich setzte erst al-Kāšī im 15. Jh. und im europäischen Bereich der Niederländer S. Stevin im 16. Jh. diese weitreichende mathematische Neuerung durch.

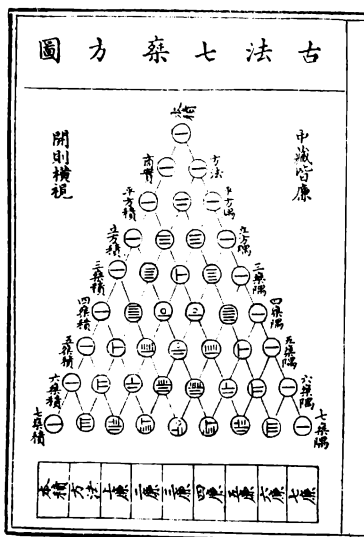


Abb. 5.1. Altchinesisches Manuskript. Binomialkoeffizienten, in Bambusziffern geschrieben

Beim Stäbchenrechnen konnten die Chinesen zu hoher Virtuosität gelangen; es erstreckte sich auf die vier Grundrechenarten, auf das Radizieren und auf numerische Lösungsverfahren für höhere algebraische Gleichungen.

Seit altersher war in China eine spezifische Form des Abakus, der sog. Suanpan (wörtlich: Rechenbrett) in Gebrauch; es ist jedoch nicht bekannt, wann der Suanpan frühestens entwickelt worden ist. Gegen Ende des Mittelalters setzte sich der chinesische Suanpan – wie überhaupt große Teile der chinesischen Mathematik – auch in Japan durch; dort wurde er Soroban genannt.

Die „Mathematik in neun Büchern“

Die „Mathematik in neun Büchern“ ist das älteste zusammenfassende Stück der chinesischen Mathematik. Dabei bleibt aus Mangel an Unterlagen unklar, wann und wo und von wem es geschrieben wurde; infolge der Tradition der mündlichen Überlieferung könnte der Text sogar bis ins 3. Jh. v. u. Z. zurückreichen. In einer Bearbeitung durch Liu Hui aus dem Jahre 263 ist die „Mathematik in neun Büchern“ erhalten geblieben. Es wurde in späteren Zeiten noch mehrfach kommentiert, 656 als offizielles Lehrbuch für die Ausbildung höherer chinesischer Beamter eingeführt und zum erstenmal 1084 gedruckt.

Vom Inhalt her ist dieses Sammelwerk weitgehend den praktischen Bedürfnissen angepaßt und behandelt daher die verschiedenartigsten Problemgruppen in Form von Aufgaben mit Lösungsanweisungen; indessen gehen einige Teile mit hohem Anspruch an den Leser weit über das Verständnis des Praktikers hinaus. Es werden

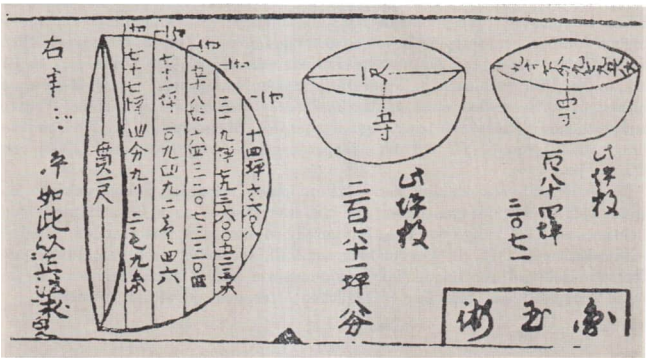


Abb. 5.2. Anfänge der Integralrechnung in Japan (um 1660)

Wirtschafts- und Verwaltungsprobleme wie Feldvermessung, Kanal- und Deichbau, Befestigungsbau, Steuerberechnung, Äquivalente zwischen verschiedenen Getreidearten, Arbeitsleistungen, Transportwege, künstliche Bewässerung u. v. a. m. behandelt. Dem mathematischen Kern nach läuft dies hinaus auf Berechnung geradlinig begrenzter Flächen, des Kreises (π entweder angenähert durch 3 oder $3\frac{3}{8}$), auf pythagoreische Dreiecke, auf elementare Stereometrie, auf Proportionenlehre, Dreisatz, unbestimmte lineare Gleichungen, auf das Ziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln, Auflösung von algebraischen Gleichungen und – als Höhepunkt – ein algorithmisch durchgearbeitetes Verfahren (genannt fang-cheng) zur Behandlung linearer Gleichungssysteme. Um das Verfahren als stets zum Ziele führend gestalten zu können, rechnete man bei der Abarbeitung des Verfahrens mit negativen Zahlen, obwohl negative Lösungen zu diesem Zeitpunkt noch nicht als Lösungen von Gleichungen oder Gleichungssystemen akzeptiert wurden. Zu Beginn des 7. Jh. drangen die negativen Zahlen, eine hervorragende Errungenschaft der chinesischen Mathematik, sogar in die indische Mathematik ein. Die Behandlung von Gleichungssystemen wurde im 17. Jh. im Anschluß an chinesische Vorbilder durch den japanischen Mathematiker Seki Shinsuke Kowa im Jahre 1683 in der Weise ausgebaut, die der unseren mit Hilfe von Determinanten und Matrizen ähnelt. Seki ist auch der Schöpfer einer relativ weitentwickelten Infinitesimalrechnung (Abb. 5.2).

Die chinesische algebraische Schule des 13. Jahrhunderts

Im Anschluß an Ergebnisse aus dem 11. Jh. erreichte die chinesische algebraische Schule im 13. Jh. mit den Arbeiten von Qin Jiushao, Li Ye, Yang Hui und Zhu Shijie einen Höhepunkt. Die chinesischen Algebraiker schufen mit der „Methode des Himmelselementes“ (tian-yuan shu) ein stets funktionierendes Verfahren zur numerischen Auflösung von algebraischen Gleichungen höheren Grades mit numerischen Koeffizienten, das die sog. Horner'sche Methode weiterentwickelte (Anm. 5.1). Es ist u. a. in den 1247 erschienenen „Neun Büchern über Mathematik“ von Qin Jiushao enthalten; dort werden auch zahlentheoretische Ergebnisse vermittelt. Weitere herausragende Einzelwerke jener Periode sind der „Meeresspiegel der Kreisberechnung“ (1248) von Li Ye und der „Jaspisspiegel der vier Elemente“ (1303) von Zhu Shijie.

Die Reichweite der chinesischen Algebra jener Periode ist beeindruckend: Es finden sich in den obengenannten und weiteren Werken auch Behandlungen von nichtlinearen Gleichungssystemen, Summationen endlicher, insbesondere höherer arithmetischer Reihen, die Verwendung der Null, das später nach Pascal benannte Zahlendreieck und die Binomialkoeffizienten sowie Interpolationsverfahren, die im engen Zusammenhang mit einer vorzüglichen Astronomie entwickelt wurden.

Die Mathematik des alten Indien

Da die Tradierung mathematischer — wie auch anderer wissenschaftlicher — Kenntnisse über sehr lange Zeit ausschließlich mündlich erfolgte und viele Fragen zur politischen Geschichte Indiens noch ungeklärt sind, ist es äußerst schwierig, ein zusammenhängendes Bild der Entwicklung der Mathematik bei den Völkern des indischen Subkontinentes zu zeichnen.

Im 4. Jt. v. u. Z. vollzog sich im Nordwesten, im Gebiet um den Indus, erstmals auf indischen Territorium die Herausbildung der Klassengesellschaft. Einige solcher Stadt- oder Induskulturen sind näher erforscht, u. a. die Amri-Kultur (Ende des 4. Jt.) und die Harappā-Kultur (ca. 2500 — 1500).

Die bedeutendsten Städte waren Harappā, Mohenjo Dāro und Kot Diji (heute in Pakistan gelegen) sowie Lothal und Rūpār (heute in der Indischen Union gelegen). Handel und Handwerk blühten in den Stadtstaaten; Handelsbeziehungen reichten nach Mesopotamien, Bahrein, Persien, Afghanistan, Zentralasien und Arabien.

Es gab eine Schrift, die allerdings bisher noch nicht entziffert werden konnte. Dennoch kann man aus archäologischen Funden einige Informationen über die den Angehörigen der Induskulturen bekannten mathematischen Kenntnisse ablesen.

Das Zahlensystem war dezimal. Die Ziffern 1 bis 4 wurden durch eine Gruppe vertikaler Kerben dargestellt, die Ziffern 5, 6, 7 als zwei entweder horizontal oder vertikal gekerbte Gruppen und die Ziffer 9 durch drei vertikale Gruppen dargestellt. Die Repräsentation der Ziffer 8 wurde nicht gefunden. Einige dieser Zeichengruppen finden sich auch in den Schreibweisen der späteren Kharosthi- und Brāhmi-Zahlensysteme wieder. Zur Ausführung arithmetischer Operationen wurde möglicherweise ein Rechenbrett benutzt; Reste eines Abacus sind in Mohenjo Dāro gefunden worden.

An geometrischen Figuren waren Dreieck, Quadrat, Rechteck, Kreis, Kegel, Zylinder, Würfel u. a. m. bekannt. Ineinandergreifende Kreise traten bei Induskulturen als geometrische Ornamente auf. Aus Verzierungen an Vasen, Reliefs u. ä. kann man schließen, daß die Menschen der Induszivilisationen gewisse Kenntnisse über Projektionen und Ähnlichkeiten gehabt haben, daß sie Strecken halbieren und äquidistant teilen konnten, Kreise zu halbieren und zu vierteln vermochten, Kreis-segmente und -sektoren, konzentrische Kreise und parallele Linien konstruieren konnten. Jedoch ist es nicht bekannt, wie die Flächen- und Rauminhalte der elementaren geometrischen Figuren berechnet worden sind.

Im frühen 2. Jt. gingen die Städte im Indusgebiet zugrunde. In der zweiten Hälfte des 2. Jt. (möglicherweise auch früher) drangen in mehreren Wellen aus dem Nordwesten arische Stämme (von Ārya, ursprüngliche Bedeutung: die Fremden) nach Indien ein und unterdrückten die Ureinwohner. Zwischen 1000 und 600 v. u. Z. verlagerte sich das politische Geschehen nach dem Osten; das Zweistromland zwischen Yamunā und Ganges trat in den Mittelpunkt. Hier bildete sich zum zweitenmal auf indischem Boden die Klassengesellschaft heraus, nachdem die ehemals nomadisierenden Arier sesshaft geworden waren.

Im 6. Jh. v. u. Z. wurde Magadha in Ostindien zum mächtigsten Reich. Hier lebte Buddha, der eine der großen Weltreligionen und eine bedeutende Philosophie be-

gründete, die, als ideologischer Reflex sozialer Konfrontationen, sich rasch ausbreitete und auch in China und anderen asiatischen Ländern Fuß faßte. Es entwickelten sich politische, militärische und kulturelle Wechselbeziehungen zu den im Nahen Osten neu entstandenen Großreichen Assyrien, Babylon und Persien. Spürbare kulturelle Impulse ergingen an Indien aus der im Gefolge der Eroberungszüge Alexander des Großen sich ergebenden Berührung mit der hellenistischen Kultur. Der Verfall und schließliche Untergang der Sklavereigesellschaft in Indien vollzog sich seit dem 2. Jh. v. z. Z., vorübergehend unterbrochen durch die Herausbildung größerer Staatsgebilde.

Während des Bestehens des Gupta-Reiches (begründet 320 u. Z.) in Nord- und Mittelindien erlebten auch Kunst und Wissenschaft eine eindrucksvolle Blüte. Es gab wissenschaftliche Zentren, ähnlich denen mittelalterlicher europäischer Universitäten; am berühmtesten war das von Nālanda, wo Philosophie und Theologie, aber auch naturwissenschaftliche Disziplinen und deren Anwendungen gelehrt wurden und wo sich Studenten aus ganz Indien, aus China, Tibet, der Mongolei, aus Buchara, Japan und Korea einfanden. In jener Periode war indischen Astronomen die Kugelgestalt der Erde bekannt; das Sonnenjahr wurde in 12 Monate zu je 30 Tagen eingeteilt, und man verwendete ein Schaltjahr.

Im 6./7. Jh. bildete sich in Indien eine Feudalgesellschaft mit spezifischen Zügen heraus. Die relativ schwachen indischen Staaten vermochten sich nur schwer oder gar nicht ausländischer Eroberer zu erwehren; so gab es schwere kriegerische Auseinandersetzungen mit China. Große Teile Nordwestindiens gerieten unter islamische Herrschaft. Unter diesen schwierigen äußeren Bedingungen konnte sich die indische Naturwissenschaft und insbesondere die indische Mathematik vom 8. bis 16. Jh. — bis zur Eroberung durch die Europäer — dennoch auf einem beachtlichen hohen Niveau halten und weiterentwickeln.

Die Mathematik stand in Indien schon seit frühester Zeit in hohem Ansehen. Zahlenkult und Buddhismus sind eine enge Verbindung eingegangen; auch gehörte es zu den religiösen Überlieferungen, daß Buddha selbst schon mit acht Jahren Lesen, Schreiben und Rechnen als Hauptelemente der Bildung erworben habe. Bei der Brautwerbung habe dann Buddha sich einer mathematischen Prüfung unterwerfen müssen und dabei die Aufgabe gelöst, die Atome einer Meile anzugeben. Dabei gelang es ihm, eine Methode der Fortsetzung der Zahlenreihe anzugeben; die gesuchte Riesen Zahl gab er (nach unserer Schreibweise) mit $384 \cdot 7^{13}$ an!

Aus dem 3. Jh. ist uns ein Loblied auf die Mathematik überliefert:

„Das Rechnen ist bei allen Arbeiten nützlich, die mit weltlichen, kultischen oder anderen ähnlichen religiösen Dingen zusammenhängen. Die Wissenschaft des Rechnens wird hoch geachtet in der Lehre der Liebe, in der Lehre vom Reichtum, in der Musik und im Drama, in der Kochkunst, in der Medizin, in der Architektur, bei der Silbenmessung, in der Dichtkunst und Poesie, in der Logik und Grammatik sowie in anderen Dingen. Sie wird verwendet im Zusammenhang mit der Bewegung der Sonne und anderer Himmelskörper, im Zusammenhang mit den Finsternissen und den Konjunktionen der Planeten sowie im Zusammenhang mit der Richtung, der Lage und der Zeit und mit dem Lauf des Mondes. Die Anzahl, die Durchmesser und Umfänge der Inseln, Ozeane und Berge, die Ausmaße der Ansiedlungen und der Gebäude, der Weltbewohner, der Räume zwischen den Welten, der Welt des Lichtes, der Welt der Götter und der Bewohner der Hölle und andere mannigfache Vermessungen, all das wird mit Hilfe der Mathematik bewerkstelligt.“ ([L 5.5], I, S. 5; deutsch zitiert [LA 17], S. 92)

Quellen

Die Überlieferung mathematischer Kenntnisse reicht zurück bis in die Zeit der Entstehung der religiös-philosophischen Bücher des „Veda“, also — nach allerdings umstrittenen Angaben — bis ins 2. Jt. v. u. Z. Zu diesen frühen Quellen gehören die sog. Schnurregeln (Śulba-sūtra); hierbei handelt es sich u. a. um Vorschriften geometrischen Charakters zum Bau von Altären, wobei Schnüre und Bambusstäbe verwendet wurden.

Die Hauptwerke der indischen Mathematik sind jedoch zwischen dem 2. (oder 5.) Jh. u. Z. und dem 16. Jh. entstanden. Die anhaltende Aufwärtsentwicklung wurde mit dem Eindringen der Europäer abgebrochen, und die heimischen Traditionen wurden nach kurzer Zeit fast vollständig zerstört (Abb. 5.3).

Es sollen einige wichtige Quellen genannt werden. Da wäre zunächst ein in der Nähe des Dorfes Bakhšālī (Nordwestindien) aufgefundenes, auf Baumrinde geschriebenes Manuskript über Algebra und Arithmetik, das eventuell sogar schon um 200 entstanden sein könnte.

Aus dem 5. (oder 4.) Jh. stammt ein anonymes astronomisches Werk „Sūrya siddhānta“ (Lehre von der Sonne); im Anschluß daran entstanden später weitere Lehrwerke (= Siddhāntas). Eine davon ist die „Pulīśa siddhānta“ (Lehre des Pulīśa), in der im astronomischen Zusammenhang trigonometrische Kenntnisse vermittelt werden, möglicherweise in Anlehnung an hellenistische Vorbilder.

Im Jahre 499 verfaßte der 23jährige Āryabhaṭa in Versform eine Abhandlung über Teile der damaligen indischen Astronomie und Mathematik. Dieses Werk unter dem Titel „Āryabhaṭīya“ ist — nicht zuletzt durch Kommentare seines Schülers Bhāskara I. — von großem Einfluß auf die weitere Entwicklung der indischen Mathematik gewesen. Daran lehnt sich z. B. das Verswerk „Brāmasphuṭa siddhānta“ (Vervollkommnung der Lehre Brāhmas) eng an, das etwa 628 von Brahmagupta verfaßt wurde und Arithmetik, Algebra und Geometrie behandelt.

Die mathematischen Abhandlungen von Mahāvīra und von Śrīdhara seien nur erwähnt. Der um 1150 geschriebene „Siddhānta-śiromaṇi“ (Der Kranz der Wissenschaften) des bedeutenden Mathematikers und Astronomen Bhāskara II. sei jedoch hervorgehoben; dieses aus vier Teilen bestehende und Arithmetik, Geometrie, Algebra sowie Astronomie behandelnde Sammelwerk stellt in seiner Breite der Themen und der Sicherheit des methodischen Aufbaus, bei dem abstrakte Darstellung mit praktischer Aufgabenstellung sich geschickt ergänzen, den Höhepunkt der indischen Mathematik dar.

Jahrhundertlang galt der „Kranz der Wissenschaften“ als Grundlage aller mathematischer Studien in Indien, und weitere Fortschritte wurden in gewissem Sinne als bloße Fortsetzung verstanden. Dazu gehören ausführliche Kommentare durch Gaṇeśa und Kṛṣṇa im 16. Jh. sowie das „Tantrasamgraha“ (Wissenschaftliches Sammelwerk) von Nīlakaṇṭha Somaśutvan zu Anfang des 16. Jh., in dem u. a. Potenzreihenentwicklung z. B. von $\arctan x$ und gut konvergierende Reihenentwicklungen für $\frac{\pi}{4}$ auftreten. Allerdings konnten diese und andere Ansätze, die einer Vorgeschichte der Infinitesimalmathematik zuzurechnen sind, in der eigenständigen

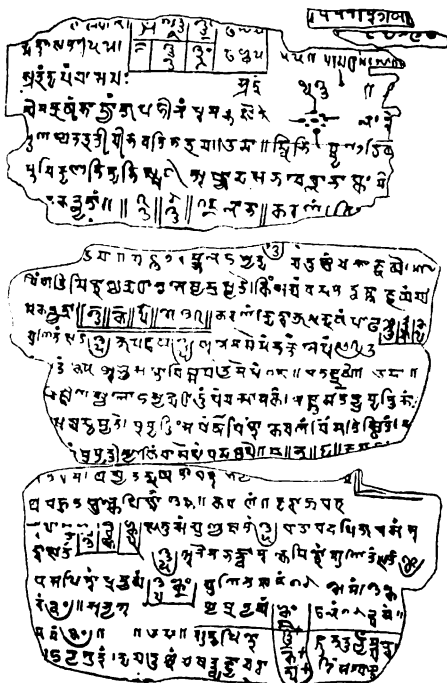


Abb. 5.3. Altdindisches mathematisches Manuskript (vermutlich 10. Jh. u. Z.)

indischen Mathematik nicht ausreifen. Die Gründe für die Ungleichmäßigkeit zwischen Asien und Europa liegen einerseits in der inneren politischen und ökonomischen Stagnation der asiatischen Länder, andererseits aber auch in ihrer gewaltsamen Einbeziehung als Kolonien in das kapitalistische europäische Wirtschaftssystem. Das alte Indien konnte nicht – wie Europa – den Übergang zum Kapitalismus vollziehen, aus dem sich ein Aufschwung der materiellen Produktivkräfte, die Herausbildung der klassischen Naturwissenschaft und schließlich entsprechende Forderungen an eine Mathematik variabler Größen ergaben. Also kann und muß man aus dem Beispiel der indischen (aber auch der chinesischen) Mathematik auf die letztlich entscheidende Rolle der Entwicklung der Produktivkräfte schließen.

Indische Geometrie

Es gab, wie schon die „Schnurregeln“ ausweisen, gediegene geometrische Kenntnisse: Inhaltsbestimmung geradlinig begrenzter Flächen, Satz des Pythagoras, Näherungsrechnungen für Diagonalen (z. B. für $\sqrt{2}$), die Erweiterung der Heronischen Dreiecksformel auf Sehnenvierecke u. a. m. kennzeichnen die Reichweite der ebenen Geometrie. In der räumlichen Geometrie konnten u. a. Pyramidenstumpf und näherungsweise Volumen sowie Oberfläche der Kugel berechnet werden; dabei fanden u. a. die Näherungswerte $\frac{27}{8}$ oder $\frac{243}{80}$ oder $3\frac{1}{6}$ für π Verwendung.

Es ist interessant, daß sich solche Berechnungen auch in der indischen Mathematik mit infinitesimalen, sozusagen atomistischen Überlegungen verbanden, ähnlich denen, wie sie in Europa etwa bei Keppler auftreten. Zum Beispiel erklärt ein Kommentar zu Bhāskara, daß man eine Kugel als eine Gesamtheit nadelförmiger Pyramiden auffassen könne, deren Spitzen im Kugelmittelpunkt zusammenlaufen.

Indische Trigonometrie

Die griechisch-hellenistische Antike hatte eine hochentwickelte Trigonometrie hervorgebracht. In der indischen Mathematik vollzog sich — im Zusammenhang zur Astronomie — eine Umgestaltung der Trigonometrie, der Übergang von der Sehnentrigonometrie zur Sinustrigonometrie. Der Zusammenhang zwischen beiden Trigonometrien ist über die Beziehung

$$\text{ch}(2\alpha) = 2 \sin \alpha$$

leicht herzustellen und scheint daher auf den ersten Blick nicht von großer Bedeutung zu sein. Und doch griff diese Umstellung tief in die künftige Entwicklung ein, weil die grundlegenden Zusammenhänge zwischen Seiten und Winkeln eines Dreiecks besonders einfach mit den Funktionen der Sinustrigonometrie formuliert werden können.

Indien wurde so zum Ursprungsland der modernen Trigonometrie. Bereits in der „Āryabhaṭīya“ treten — modern ausgedrückt — die trigonometrischen Verhältnisse Sinus, Kosinus und Sinus versus auf (Anm. 5.2). Um 500 u. Z. wurden trigonometrische Formeln verwendet; am Beginn des 10. Jh. wurden die Funktionen $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ und $1 - \cos \alpha$ in allen vier Quadranten betrachtet.

Indessen kam es noch nicht zur Ausbildung eines geschlossenen, systematischen Aufbaus der Trigonometrie. Es blieb bei der Behandlung von Einzelproblemen, bei Methoden von Fall zu Fall. Immerhin aber führte dies in impliziter Form zu Ergebnissen, die wir heute als allgemeine Sätze verstehen, z. B. zum Sinussatz und sogar zum allgemeinen Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie.

Tafeln sind von wesentlicher Bedeutung für die praktische Anwendung der Trigonometrie. Auch von indischen Mathematikern wurden Tafelwerke erarbeitet; die frühesten Tafeln für den Sinus und den Sinus versus sind bereits in der „Sūryasid-

dhānta“ und in der „Ārayabhaṭṭya“ enthalten. Für beide Funktionen sind je 24 Werte angegeben. In der „Krone der Wissenschaften“ findet sich eine von Grad zu Grad fortschreitende Sinustabelle.

Die indische Trigonometrie verdankte ihre Entwicklung den Bedürfnissen der Astronomie; die eigentlichen Ergebnisse der indischen Astronomie aber gelangten nicht wesentlich über die der griechisch-hellenistischen Antike hinaus. Numerische Probleme der Astronomie führten gegen Ende der selbständigen indischen Mathematik, zu Beginn des 16. Jh., sogar noch zu einem bemerkenswerten Ergebnis, das in Europa erst im 18. Jh. erzielt werden konnte.

Dem südindischen Mathematiker Nilakanṭha Somasutvan gelang die Herleitung der unendlichen Potenzreihe für den Arcustangens. Dabei wurden eine Art infinitesimales Dreieck, die Entwicklung einer gebrochen rationalen Funktion in eine unendliche Potenzreihe und gliedweise Integration verwendet (Anm. 5.3).

In diesem Zusammenhang ergab sich auch eine bemerkenswert gute Näherung

für π , die mit $\frac{104348}{33215}$ angegeben wurde und bis auf neun Dezimalen genau ist.

Übrigens war sich Nilakanṭha völlig darüber im klaren, daß π – also das Verhältnis des Kreisumfanges zum Kreisdurchmesser – irrational (inkommensurabel zur Einheit) ist:

„Ist der Durchmesser, der mit Hilfe irgendeiner Maßeinheit gemessen wird, mit dieser Einheit kommensurabel, so läßt sich der Kreisumfang nicht genau mit Hilfe der gleichen Maßeinheit messen; ist jedoch in Bezug auf irgendeine Maßeinheit der Kreisumfang meßbar, so läßt sich der Durchmesser nicht mit Hilfe dieser Einheit messen.“ ([LA 17], S. 167)

Die Herausbildung des dezimalen Positionssystems

Trotz dieser im einzelnen bemerkenswerten Leistungen der indischen Geometrie und Trigonometrie war der allgemeine Charakter der indischen Mathematik durch die Betonung des Rechnerisch-Algorithmischen und den hohen Stand von Arithmetik und Algebra gekennzeichnet. Die indischen Mathematiker haben mit der Herausbildung des dezimalen Positionssystems und der Ziffernschreibweise eine wissenschaftliche und kulturelle Leistung von weltweiter Bedeutung vollbracht. Heute wird auf der ganzen Erde nach indischer Weise gerechnet.

Die indische Zählweise war vom Ursprung her im wesentlichen dezimal angelegt. Im Sanskrit gab es fixierte Worte für die „Ziffern“ 1 bis 9 und die Zehnerpotenzen. Die Zahlenreihe wurde in religiösen Zusammenhängen erstaunlich weit fortgeführt; so wird Buddha die Bezeichnung einer Zehnerpotenz zugeschrieben, die wir heute als 10^{421} bezeichnen würden.

Die ursprünglichen Ziffern- und Zahlensysteme im schriftlichen Verkehr weisen möglicherweise Einflüsse der benachbarten kulturellen Zentren auf; hier hat die historische Forschung noch ein weites Betätigungsfeld. So wurden vom 4. Jh. v. u. Z. bis zum 3. Jh. u. Z. im heutigen Afghanistan und in Westindien die sog. Kharoṣṭhi-Ziffern verwendet, bei denen sich ein Dezimalsystem mit einem Vierersystem überkreuzt. In weiten Teilen Indiens waren mehr als ein Jahrtausend lang im wesentlichen

die sog. Brähmi-Ziffern in Gebrauch, bei denen es Individualzahlen für die neun Einerziffern, die neun Zehner,,ziffern“ usw. gab.

Heute nimmt man im allgemeinen an, daß das dezimale Positionssystem eine im wesentlichen selbständige Leistung der indischen Mathematik darstellt, ermöglicht durch Kombination günstiger Voraussetzungen: Existenz von neun Ziffern bei festem Gebrauch von Zahlensystemen, traditionelles Zehnersystem mit ausgeprägtem Sinn für systematischen Aufbau der Hierarchie der Zehnerpotenzen. Bei der Einführung der Null hat möglicherweise auch die Tatsache eine Rolle gespielt, daß die indischen Astronomen das innere Lückenzeichen des babylonischen Sexagesimalsystems kannten.

Im 6. Jh. u. Z. war das dezimale Positionssystem bereits weit verbreitet, seit dem 7. Jh. war auch die Null gebräuchlich, ein Punkt oder später ein kleines Ringlein. Bei den Indern hieß die Null *śūnya* (d. h. leer). Bei der Übersetzung ins Arabische wurde darauf *aṣ-ṣifr* (d. h. die Leere); daraus entstand das Wort Ziffer. Die Zahlsschrift erhielt ihre Bezeichnung also nach dem Wesen der Sache, nach der Null!

Das vollausgebildete dezimale Positionssystem drang mit den indischen Ziffern längs der Handelswege relativ rasch nach Osten und Westen vor; bereits im Jahre 662 wies ein syrischer Gelehrter auf „sinnvolle Entdeckungen (der Inder) in der astronomischen Wissenschaft“ hin, auf „Entdeckungen, die scharfsinniger sind als die der Griechen und Babylonier“ und sagt, daß „ihre Zahlenschreibweise, die mit Hilfe von neun Zeichen vorgenommen wird, über jedes Lob erhaben ist“. ([LA 17])

Bereits wenig später, im Jahre 773, führte ein indischer Mathematiker die „*Siddhānta*“ des Brahmagupta am ‘Abbāsiden-Hofe in Bagdad ein; von nun an werden Teile der indischen Mathematik fester Bestandteil der hochentwickelten arabisch-islamischen Mathematik. Das indische Ziffernsystem tritt seinen Siegeszug an, zunächst in der arabischen Welt.

Arithmetik und Algebra in der indischen Mathematik

Die Kenntnis der arithmetischen Eigenschaften der Zahl Null war fester Bestandteil der indischen Mathematik, ebenso wie sichere algorithmische Verfahren zur Beherrschung der negativen Zahlen, der Bruchrechnung, des Wurzelziehens und beispielsweise der Dreisatzrechnung, der Neunerprobe usw.

Es verdient hervorgehoben zu werden, daß die indischen Mathematiker die Algebra als das der Arithmetik Übergeordnete auffaßten; die Algebra (nach unserer Auffassung würden wir auch einige Erkenntnisse der Zahlentheorie dazurechnen) stand daher in hohem Ansehen. So erklärte z. B. Bhāskara II.:

„Die Lehre vom Rechnen mit Unbekannten ist die Quelle für die Lehre vom Rechnen mit bekannten Größen.“ Und: „Die Mathematiker erklären, daß die Algebra eine Rechnungsform ist, die von einem Beweis begleitet wird; andernfalls gäbe es keinen Unterschied zwischen der Arithmetik und Algebra.“ ([LA 17], S. 122/123)

Die Hochachtung vor der Algebra, die die allgemeine Grundlage der gesamten Mathematik verkörpert, durchzieht die indische Mathematik; bei Brahmagupta und Bhāskara II. finden sich geradezu Loblieder auf die Algebra. Und Nārāyaṇa schrieb:

„Wie diese gesamte sichtbare und unendliche Welt aus Brähma entspringt, so folgt aus der Algebra die gesamte Arithmetik mit ihrer unendlichen Vielfalt.“ ([LA 17], S. 123)

Es ist bei dieser Grundeinstellung verständlich, daß die indische Algebra auf einem hohen Niveau stand. Es gab u. a. eine feste Symbolik, die sich an den Anfangsbuchstaben der entsprechenden Worte orientierte; die unbekannte Größe (die Variable) hieß „yāvat-tāvat“, das ist „soviel-wieviel“, d. h. beliebige Menge.

Zum algebraischen Rechnen gehörten der Umgang mit Irrationalitäten, Klammern und mit Polynomen. Lineare und quadratische Gleichungen wurden mit verschiedenen Verfahren behandelt; auch negative Zahlen wurden – anders als in der hellenistischen Mathematik – als Gleichungslösungen anerkannt. Auch war bekannt, daß eine quadratische Gleichung im allgemeinen zwei Lösungen besitzt. Auch lineare Gleichungssysteme traten recht häufig auf. Im astronomischen Zusammenhang, bei der Bestimmung der Bewegungsperioden von Himmelskörpern, wurden bei verschiedenartigen Typen unbestimmter Gleichungen ganzzahlige Lösungen gesucht. Dabei wurden unter anderem auch Kettenbruchentwicklungen verwendet.

Die Mathematik in den Ländern des Islam

Ende des 6. und Anfang des 7. Jh. bildete sich auf der arabischen Halbinsel eine monotheistische Religion, der Islam, heraus, die sowohl von den nomadisierenden Beduinen als auch von den handel- und gewerbetreibenden Stämmen der Städte angenommen wurde. Sie entstand aus einer sozialen Protestbewegung des kaufmännischen Mittelstandes gegen die herrschende Aristokratie Mekkas und bildete die ideologische Grundlage für den von ihrem Begründer Muḥammad ibn ‘Abdallāh (ca. 570–632) auf den Trümmern der patriarchalischen Stammesgesellschaft geschaffenen zentralisierten Staat und für die von seinen Nachfolgern unternommenen weitreichenden Eroberungen. Es formierte sich ein arabisches Großreich, das den Vorderen Orient, große Teile Zentralasiens, ganz Nordafrika und die Pyrenäenhalbinsel umfaßte. Die Entwicklung der Wissenschaften erlebte unter der ‘Abbāsiden-dynastie (750 bis Mitte des 13. Jh.) ihre erste Glanzzeit. In der Blütezeit (750 bis 10. Jh.) entstand in Bagdad ein bedeutendes wissenschaftliches und administratives Zentrum. Wirtschaftliche Grundlage für diese Entwicklung war das hohe Niveau des Bewässerungswesens auf dem Lande sowie des Handwerks und Handels in den Städten. Dabei wirkte sich außerdem die Vielfalt der zum ‘Abbāsidenstaat gehörenden Volksgruppen und deren z. T. sehr hochentwickelte Kenntnisse im Handwerk und in den Wissenschaften positiv auf die rasche Entfaltung einer neuen islamischen Kultur und Wissenschaft aus. Darum ist es auch besser, d. h. der historischen Situation angemessener, von der Kultur und Wissenschaft des Islam oder in den Ländern des Islam statt von arabischer Wissenschaft zu sprechen. Das Arabische erfüllte die Funktion der Verwaltungssprache und war die Sprache der Wissenschaft; ähnlich verhielt es sich mit dem Latein während vieler Jahrhunderte in Europa, unbeschadet der Tatsache, daß die verschiedensten Volksgruppen und National-sprachen existierten.

Auch nach dem Niedergang der 'Abbäsidendynastie hielt der Aufschwung der Wissenschaften noch unter einzelnen lokalen Dynastien an, z. B. unter den Buyiden im Irak, den Fatimiden in Ägypten, den Samaniden und verschiedenen Turkdynastien in Mittelasien und unter den 'Umayyadenchalifen in Spanien und Nordwestafrika. Im 13. Jh. brachen jedoch diese Reiche im Osten unter dem Ansturm der Mongolenheere und in Spanien im Kampf gegen die christliche Reconquista zusammen. Die Wissenschaften erlebten zwar im Osten nach der Islamisierung der Mongolen und unter chinesischem Einfluß noch einmal eine gewisse Blüte, jedoch traten bereits Stagnationserscheinungen auf. Im 15. und 16. Jh. fielen dann die meisten arabischen Gebiete unter die Herrschaft der Osmanen, zwar in einzelnen Bereichen bestehende Traditionen fortführte und z. T. auch belebte, aber insgesamt mit der in Europa stattfindenden Entwicklung nicht Schritt halten konnte.

Historische Etappen der Entwicklung der Mathematik in den Ländern des Nahen und Mittleren Ostens

Bei der Mathematik des Islam hat man es mit einem Entwicklungszeitraum von mehr als einem halben Jahrtausend zu tun, und das in einem geographisch außerordentlich ausgedehnten Gebiet. Probleme des Bauwesens, der Geodäsie, des Erbrechtes, des Handels, des Staatshaushaltes, der Astronomie und Astrologie, Geographie und der Optik beeinflussten nachhaltig die Entwicklung der islamischen Mathematik. Geht man ins Detail, so kann man deutlich drei Entwicklungsstadien unterscheiden.

In einer ersten Phase wurde das aus der griechisch-hellenistischen Antike, aus Persien, Indien und Ägypten noch verfügbare kulturelle und wissenschaftliche Erbe, darunter die mathematischen Schriften zusammengetragen und in die arabische Sprache übertragen. Unter den Kalifen al-Manṣūr, Hārūn-ar-Raṣīd — dem Held der Märchen aus 1001 Nacht — und deren Nachfolgern entwickelte sich Bagdad zu einem Zentrum der Kultur.

Al-Ma'mūn richtete eine Art Akademie, das „Haus der Weisheit“ (Bait al-ḥikma) ein, zu dessen Pflichten es gehörte, systematisch die überlieferten Quellen durch Übersetzung ins Arabische zu erschließen. Dem „Haus der Weisheit“ waren u. a. eine Bibliothek und ein astronomisches Observatorium angeschlossen; Kopisten sorgten für Abschriften der Bücher, und es wurden umfangreiche astronomische und geographische Forschungen durchgeführt. Daneben knüpfte man an das übernommene Erbe auf Gebieten an, die aus moderner Sicht der Physik, Chemie, Medizin, Pharmakologie, Biologie, Mineralogie und Philosophie zuzuordnen sind. In einigen Wissenszweigen konnte dabei das antike Niveau durch neue Fragestellungen, Untersuchungsobjekte und Methoden nicht nur bereichert und vertieft, sondern auch qualitativ verändert werden. Während einer zweiten Etappe, deren Beginn etwa auf die Mitte des 9. Jh. zu datieren ist, bildete sich auf der Grundlage stark einsetzender Kommentierungstätigkeit zu den erschlossenen Quellen eine eigenständige mathematische Kultur heraus. Sie umfaßte Probleme der Arithmetik, der Zahlentheorie, der Geometrie, der Näherungsrechnung, der Trigonometrie und der Algebra. Ihre hervorragendsten Vertreter waren Muḥammad b. Mūsā al-Ḥwārizmī, al-Kindī, Ṭābit b.

Qurra, Quṣṭā b. Lūqā und al-Māhānī. Im 10., 11. und 12. Jh. schließlich nahmen astronomische Berechnungen und Näherungsmethoden der Algebra und Trigonometrie immer größeren Umfang an. Deshalb rückten zunehmend Probleme der numerischen Mathematik in den Mittelpunkt des Interesses. Diese Zeit wird vor allem Abū Kāmil, al-Battānī, Abū'Il-Wafā', Ibn al-Haiṭam, al-Karaḡī, al-Birūnī und al-Hayyām geprägt.

Im 13. bis 15. Jh. widmete man sich dann vorrangig numerischen Fragen. Dafür ist möglicherweise der Einfluß intensiver Kontakte zu China maßgebend gewesen. Die beiden bedeutendsten Mathematiker dieser Zeit waren Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī und al-Kāšī.

Unter dem Einfluß der griechischen Quellen auf Forschungsmethoden und -stil zeichnen sich die Werke der islamischen Mathematiker durch das Bemühen aus, die behandelten Probleme systematisch und vollständig darzulegen und Sätze zu beweisen. Der Einfluß der indischen und chinesischen Mathematik spiegelt sich in den arabischen Texten u. a. durch die umfangreichen und zahlreichen praktischen Beispiele, Aufgabentypen und Methoden wider.

Auch regional war die Mathematik in den islamischen Ländern nicht einheitlich. Man unterscheidet im allgemeinen die ostarabische und die westarabische; die westarabische Mathematik erreichte insgesamt nicht das Niveau der ostarabischen. Dafür war sie ausschlaggebend für die Übermittlung der mathematischen Errenschaften der Griechen, der Inder und der Araber nach Europa.

Die Algebra des al-Ḥwārizmī und seiner Nachfolger

Die Algebra des aus Choresm (Chiva in der heutigen Usbekischen SSR) stammenden al-Ḥwārizmī (das heißt der Choresmier) ist in einer arabischen und mehreren lateinischen Handschriften erhalten. Diese Schrift, die in der Entwicklung der Mathematik einen bedeutenden Einfluß ausgeübt hat, befaßt sich mit der Auflösung von linearen und quadratischen Gleichungen mit Zahlenkoeffizienten. Der Verfasser unterscheidet bei den quadratischen Gleichungen sechs Normalformen, auf die alle Typen zurückgeführt werden; alle Koeffizienten der Normalformen sind nicht-negativ, und der Koeffizient der höchsten Potenz ist 1. Der Titel der Algebra von al-Ḥwārizmī lautet „Al-Kitāb al-muḥtasar fī ḥisāb al-ğabr wa-l-muqābala“. Dabei bedeuten kitāb soviel wie Buch, ḥisāb soviel wie Rechnen, al-ğabr etwa „Ergänzung“ und muqābala etwa „Gegenüberstellung“.

Ein Beispiel wird das verdeutlichen. Al-Ḥwārizmī behandelt z. B. die Gleichung

$$2x^2 + 100 - 20x = 58.$$

Der erste Schritt der Auflösung besteht in der „Ergänzung“, in der „Auffüllung“:

$$2x^2 + 100 - 20x + 20x = 58 + 20x.$$

Auf beiden Seiten der Gleichung wird, modern ausgedrückt, der lineare Term $20x$ addiert. Noch einmal wird aufgefüllt: $2x^2 + 100 - 58 = 58 - 58 + 20x$. Und dann

erfolgt die „Gegenüberstellung“ $2x^2 + 42 = 20x$; dies führt auf die Normalform $x^2 + 21 = 10x$.

Die Bezeichnung der ersten Operation „al-ğabr“ wurde später auf die gesamte Lehre von den Gleichungen ausgedehnt; durch Latinisierung des arabischen Wortes entstand so die Bezeichnung „Algebra“. Und aus dem Namen des Verfassers, der ein Buch für stets zum Ziele führende Lösungsverfahren geschrieben hatte, entstand das mathematische Fachwort „Algorithmus“.

Interessant ist überdies ein Blick auf die Absichten, die Zielstellung der Algebra von al-Ḥwarizmī. Er wolle, so sagt er, ein kurzgefaßtes Buch schreiben

„von den Rechenverfahren der Ergänzung und Ausgleichung mit Beschränkung auf das Anmutige und Hochgeschätzte des Rechenverfahrens für das, was die Leute fortwährend notwendig brauchen bei ihren Erbschaften und Vermächtnissen und bei ihren Teilungen und ihren Prozeßbescheiden und ihren Handelsgeschäften und bei allem, womit sie sich gegenseitig befassen, von der Ausmessung der Ländereien und der Herstellung der Kanäle und der Geometrie und anderem dergleichen nach seinen Gesichtspunkten und Arten“. ([LA 33], II, S. 65)

Charakteristisch für das Vorgehen der Mathematiker im islamischen Mittelalter ist das Bemühen, die Richtigkeit ihrer Lösungen nachzuweisen. Al-Ḥwarizmī wendet sich dafür der Geometrie zu und gibt Plausibilitätsbetrachtungen an. Mit Ṭābit b. Qurra's Arbeit „Qawl fi taḥḥil masā'il al-ğabr bi'l-barāhīn al-handasiya“ (etwa: Über den geometrischen Richtigkeitsnachweis bei Problemen der Algebra) wird diese Vorgehensweise fortgeführt, auf den Boden des strengen Beweises in geometrischer Sprache unter direktem Rückgriff auf Buch II der „Elemente“ des Euklid gestellt und für Generationen mittelalterlicher Mathematiker zum methodischen Leitbild. Ebenfalls noch im 9./10. Jh. setzten, aus unterschiedlichsten Quellen kommend (Arithmetisierung der Bücher II und X der „Elemente“, wachsende numerische Ansprüche der Trigonometrie, mathematisch-philosophische Auseinandersetzungen um die Klassifikation der Teilbereiche der Mathematik, den Zahlbegriff oder die Beweismethodik, Entwicklungen in der Zahlentheorie, Übersetzung der „Arithmetik“ von Diophant und anderes), Tendenzen zur Arithmetisierung der Algebra ein.

Sie erreichten in den Werken von al-Karağī und as-Samaw'al im 11. und 12. Jh. einen Höhepunkt, der in der Beweistechnik die schrittweise Ablösung der geometrischen Vorgehensweise durch algebraische Formulierungen und Überlegungen bedeutete. Insbesondere wurde, falls man gänzlich auf geometrische Betrachtungen verzichtete, eine naive, noch unvollständige Art der „vollständigen Induktion“ benutzt. Damit verbunden waren Fortschritte sachlicher Natur. Beispielsweise war das sog. Pascalsche Dreieck bereits al-Karağī bekannt, ohne daß dieser sich als Urheber darstellt. Implizit wurde der Zahlbereich bis auf algebraische Zahlen erweitert. Die Kenntnisse über die Anwendbarkeit der bekannten Verknüpfungsregeln auf Polynome, insbesondere der zu Schwierigkeiten führenden Operationen des Dividierens und Radizierens, wurden vertieft. Neben den natürlichen Zahlen wurden, modern gesagt, sämtliche rationale Zahlen als Exponenten zugelassen, wobei z. B. der heutigen

Schreibweise $x^{-\frac{2}{3}}$ etwa der Ausdruck „Seite des Kubus vom Quadrat des Teils“ entspricht. Ein dritter Aspekt der Entwicklung der Algebra bestand im zunehmenden

Allgemeinheitsgrad der Aussagen, obwohl gerade diese Tendenz zahlreichen Schwankungen unterworfen war und häufig Brüche, Stagnationen oder gar Rückschritte aufwies.

Ob al-Ḥwārizmī eigenständige Leistungen auf dem Gebiet der Algebra vollbracht hat, ist bis jetzt nicht bekannt, aber er wirkte als hervorragender Kompilator des angesammelten Wissens, und seine Arbeiten bildeten die Grundlage für die Untersuchungen seiner Nachfolger.

An den Werken Abū Kāmil's ist hervorzuheben, daß er, obwohl er auch nur bis zur Behandlung quadratischer Gleichungen vorstößt, mehr als nur eine Unbekannte einführt (al-Ḥwārizmī benutzte nur eine Variable), höhere Potenzen der Unbekannten verwendet, auf die klassische Forderung der Dimensionstreue verzichtet (dieser Weg wurde jedoch von den arabischen Autoren nicht weiter verfolgt, sondern erst von Descartes wieder aufgegriffen), die quadratischen Irrationalitäten als Zahlen, d. h. als Objekte der Arithmetik, auffaßte und algebraische Identitäten in Worten allgemein formulierte und ihre Gültigkeit am Zahlenbeispiel nachwies.

Ebenso wie seine Vorgänger stellte al-Karāḡī zunächst die Grundoperationen mit Monomen, Polynomen und Irrationalitäten sowie die Auflösung linearer und quadratischer Gleichungen dar. Des weiteren finden sich bei ihm die Summation verschiedener arithmetischer Reihen und der Reihen

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \left(\sum_{k=1}^n k \right) \left(\frac{2}{3}n + \frac{1}{3} \right) \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

mit Beweisen und Beweisversuchen. Neu bei ihm ist, neben den oben erwähnten Beiträgen, daß er die quadratische Ergänzung rein arithmetisch angab und mit der systematischen Untersuchung von Gleichungen der Form $ax^{2n} + bx^n = c$, $ax^{2n} + c = bx$, $bx^n + c = ax^{2n}$, $ax^{2n+m} = bx^{n+m} + cx^n$ begann.

Eine hervorragende Leistung der islamischen Algebraiker besteht in der Schaffung einer geometrischen Theorie der Auflösung kubischer Gleichungen. Im 9. Jh. begannen Baḡdāder Gelehrte, angeregt durch eine Aufgabe des Archimedes, mit der Behandlung kubischer Gleichungen. Die griechische Antike kannte zwar eine geometrische Methode zur Ermittlung der Wurzeln einer Gleichung dritten Grades, wandte diese aber nicht auf einen größeren Problemkreis an und schuf auch keine allgemeine Theorie dafür. Das blieb der islamischen Mathematik vorbehalten und hier insbesondere dem Perser al-Ḥayyām. Nachweislich seit der ersten Hälfte des 7. Jh. traten auch in chinesischen mathematischen Schriften Betrachtungen über die Lösung numerischer kubischer Gleichungen auf.

Der erste islamische Mathematiker, der sich möglicherweise um eine derartige Theorie bemühte, kann Ibn Lait, ein Zeitgenosse Bīrūn's, gewesen sein. Seine Arbeit blieb jedoch nicht erhalten.

Das Werk des al-Ḥayyām dagegen blieb erhalten und gehört zu den größten Errungenschaften der arabischen Mathematik. Er löste das Problem der kubischen Gleichungen mit Hilfe von Kegelschnitten und behauptete anscheinend als erster, daß sich diese Gleichungen mit Hilfe von Zirkel und Lineal lösen lassen. Al-Ḥayyām bemühte sich auch um die rechnerische Lösung kubischer Gleichungen, jedoch ohne Erfolg.

Die Vielzahl und Wichtigkeit der Aufgaben, die zu Gleichungen dritten Grades führten, erforderten auch neue Methoden zur numerischen Lösung. In diesem Zusammenhang schuf al-Kāšī ein äußerst einfaches, sehr genaues und schnell konvergierendes Iterationsverfahren. Ein analoger Algorithmus fand zur Lösung der Gleichung $t = \theta - m \sin \theta$ (t und m fest; θ gesucht) Anwendung. Die Gleichung spielt bei der Erstellung von Tabellen in der Theorie der Parallaxe eine Rolle. Der Algorithmus $\theta_0(t) = t + m \sin t$, $\theta_1(t) = t + m \sin \theta_0$, ..., $\theta_n(t) = t + m \sin \theta_{n-1}(t)$ zu ihrer Lösung trat zum erstenmal bei al-Habaš al-Hāšib auf, wobei dieser sich möglicherweise auf indische Quellen stützte. Im 17. Jh. wurde die obige Gleichung von Kepler bei der Untersuchung der Planetenbewegungen hergeleitet. In nahezu allen erhaltenen algebraischen Abhandlungen des islamischen Mittelalters fehlt die Verwendung und Entwicklung einer algebraischen Symbolik. Das betrifft vor allem die östlichen Gebiete. Im Mağrib und in Andalusien dagegen scheint es eine lange andere Tradition gegeben zu haben, über die allerdings erst neueste Forschungen mehr Klarheit gebracht haben. Seit dem vorigen Jahrhundert war jedoch die recht fortgeschrittene Symbolik von al-Qalasādi, der in Granada gewirkt hat, in Europa bekannt.

Bei ihm wird beispielsweise die Quadratwurzel mit dem ersten Buchstaben des Wortes *ğidr* (Wurzel) bezeichnet, der über die Zahl geschrieben wurde. In den Gleichungen wurden erste Potenz, Quadrat und dritte Potenz der Variablen (Unbekannten) mit den Anfangsbuchstaben der Wörter *šai'* (Ding), *murabba'* (Quadrat) und *ka'b* (Kubus) bezeichnet und über die Koeffizienten gesetzt. Ein Gleichheitszeichen ist auch vorhanden.

Die Ausbreitung der indischen Ziffern und die Arithmetik in den Ländern des Nahen und Mittleren Ostens

Ebenso wie auf dem Gebiet der Algebra haben die Abhandlungen al-Ĥwārizmī zur Arithmetik die folgenden Generationen arabischer Mathematiker nachhaltig beeinflusst. Sie dienten als Ausgangspunkt für viele weitere Untersuchungen. Sie wurden kommentiert und übernommen, und sie dienten zur Schulung junger Mathematiker.

Al-Ĥwārizmī war der erste arabische Mathematiker, der das dezimale Stellenwertsystem mit den indischen Ziffern und die darauf beruhenden Rechenoperationen beschrieb und erklärte. In welcher Form die Ziffern bei al-Ĥwārizmī verwendet wurden, ist unbekannt, da sie in den lateinischen Übersetzungen nicht eingetragen und keine arabischen Versionen erhalten sind.

Überhaupt ist vieles über die Geschichte unserer Ziffern noch nicht geklärt; als gesichert gelten nur die folgenden Tatsachen: Nach der Eroberung Ägyptens, Syriens und des Irak drückten griechische Texte Zahlen entweder in Worten oder mit dem griechischen Alphabet aus. Die wörtliche Ausdrucksweise blieb über Jahrhunderte erhalten, während spätestens im 12. Jh. das griechische Alphabet völlig aus den Handschriften verschwunden war. Seit dem 8. Jh. werden auch Buchstaben des arabischen Alphabets verwendet.

In der ersten Hälfte des 10. Jh. entstanden die ostarabischen Ziffern und ein besonderes Zeichen der Null. Diese Ziffern sind wahrscheinlich die indischen Brāhmi-

Ziffern in etwas veränderter Gestalt. Bis auf Modifikationen der Ziffer 5 und der Null haben sich die ostarabischen Ziffern in den arabischen Ländern bis heute erhalten. Etwa um 950 entstanden auf der Pyrenäenhalbinsel die westarabischen Ziffern, die heute noch in Marokko benutzt werden. Insgesamt vollzog sich die Einführung der neuen Ziffern in den islamischen Ländern jedoch auf Grund bestehender Tradition ziemlich langsam.

Eine große Rolle spielten in der arabischen Arithmetik Brüche, Irrationalzahlen und Proportionen. Die im Rechnen- und Finanzwesen häufig auftretenden Brüche wurden auf Stammbrüche zurückgeführt und in der Regel als Sexagesimalbrüche dargestellt. Das sexagesimale Stellenwertsystem erreichte bei den Arabern einen höheren Entwicklungsstand als im Altertum.

Der zunehmende Umfang trigonometrischer und planimetrischer Berechnungen, vor allem die Aufstellung immer genauer astronomischer Tafeln veranlaßten arabische Mathematiker in wachsendem Maße, sich mit Irrationalzahlen zu beschäftigen. Als Grundlage benutzten sie die antike Theorie der quadratischen Irrationalitäten, die sie arithmetisierten. Dabei entwickelten sie auch die antike Verhältnislehre weiter und erweiterten den Zahlbegriff auf die positiven reellen Zahlen.

Die Theorie der quadratischen Irrationalitäten und die Verhältnislehre waren zwei der Hauptprobleme des Euklid. Aber auch bezüglich des dritten, der Lehre von den Parallelen, sind bei den islamischen Mathematikern Fortschritte zu verzeichnen. Insbesondere sei auf die Werke al-Haitams, al-Hayyāms und at-Tūsis verwiesen, in denen sich implizit allererste Ansätze für nichteuklidische Theorien befinden. Insgesamt waren die „Elemente“ das von den Arabern am meisten benutzte und bearbeitete Werk der griechischen Antike. Zwischen dem Ende des 8. Jh. und der Mitte des 15. Jh. wurden die „Elemente“ von etwa 50 islamischen Mathematikern übersetzt, bearbeitet und kommentiert.

Einige Kommentare und Bearbeitungen der „Elemente“ wurden von Philosophen verfaßt, z. B. von al-Fārābī. Er wandte sich den „Elementen“ deshalb zu, weil die in ihnen betrachteten Grundbegriffe der Arithmetik und Geometrie eine große Rolle in der Philosophie des Aristoteles gespielt haben.

Die Herausbildung der Trigonometrie als selbständiger Wissenschaftszweig

In den Untersuchungen der Mathematiker und Astronomen der Länder des Nahen und Mittleren Ostens nahm die Trigonometrie einen breiten Raum ein. Sie stellte die Verbindung zwischen der Mathematik, der Astronomie, dem Kalenderwesen und der Lehre von der Sonnenuhr, der Gnomonik, dar. Sie förderte die Entwicklung in anderen mathematischen Teilbereichen, z. B. die Beschäftigung mit den Irrationalitäten und den numerischen Verfahren zur Lösung algebraischer Gleichungen. Ausgangspunkt für die arabischen Arbeiten zur Trigonometrie war die Übersetzung einer der indischen „Siddhāntas“ durch al-Fāzārī 733 in Bagdad. Im 9. Jh. übersetzte und kommentierte man den „Almagest“ von Ptolemaios und die „Sphärik“ von Menelaos.

Die Mathematiker der islamischen Länder führten die trigonometrischen Ver-

hältnisse Tangens und Kotangens ein und erforschten deren Eigenschaften sowie die der Verhältnisse Sinus und Kosinus, beschäftigten sich mit allen Typen ebener und sphärischer Dreiecke und bauten so Schritt für Schritt die Trigonometrie zu einem geschlossenen selbständigen Wissenschaftszweig aus.

Der Tangens und der Kotangens waren den Arabern im 9. Jh. bekannt. Sie wurden in dieser Zeit auch erstmalig tabelliert. Abu'l-Wafā' definierte dann alle trigono-

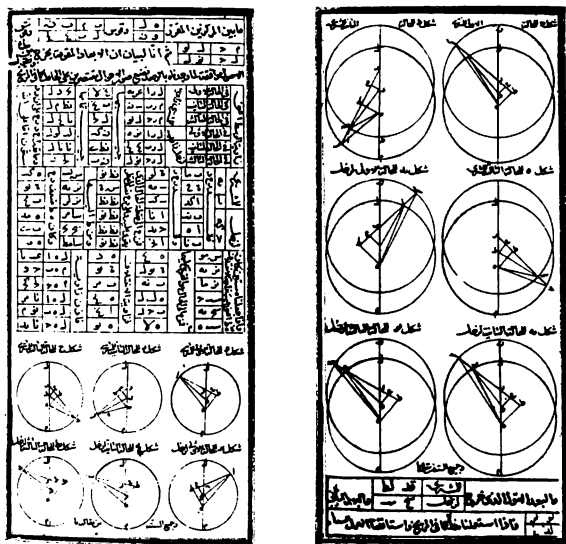


Abb. 5.4. Arabische Ausgabe des *Almagest* von Ptolemaios (13. Jh.)

metrischen Funktionen einheitlich am Kreis, während bisher die trigonometrischen Verhältnisse am rechtwinkligen Dreieck eingeführt worden waren. Wichtig für die Entwicklung der Trigonometrie war das Hauptwerk des al-Birūnī „Kanon ... über die Astronomie und die Sterne“, da hier die Erkenntnisse der Vorgänger Birūnīs übersichtlich zusammengefaßt, ergänzt und durch eigene Leistungen des Gelehrten bereichert wurden. Für Beweise wurde zunächst der Satz des Menelaos benutzt, der seit dem 10. Jh. allmählich durch den neugefundenen Sinussatz verdrängt wurde. Im 13. Jh. war auch der Kosinussatz bekannt. Er wurde durch al-Ḥalīlī virtuos eingesetzt.

Ein zweiter Aspekt dieser Herausbildung der Trigonometrie zu einer selbständigen mathematischen Disziplin war ihre Ablösung aus der Astronomie. Er schlug sich in der Entstehung spezieller trigonometrischer Abhandlungen nieder. Ihren Höhepunkt fand diese Entwicklung in dem „Kitāb aš-šakl al-qitā‘“ (1260; etwa: Abhandlung über das vollständige Vierseit) von Našīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī Aṭ Ṭūsī vereinte in dieser Arbeit die beiden oben genannten Aspekte, indem er in ihr einen vollständigen und systematischen Aufbau der Trigonometrie von den Grundbegriffen und -beziehungen bis zu Verfahren für die Lösung aller typischen Aufgaben seiner Zeit gab. Von ihm stammen auch wichtige neue Ergebnisse, z. B. die Berechnung schiefwinkliger Dreiecke aus den drei Seiten und aus den drei Winkeln. Sein Werk übte auf Regiomontanus einen entscheidenden Einfluß aus, und die Arbeiten des letzteren waren die Grundlage für die Entwicklung der Trigonometrie in Europa.

Bedeutendes leisteten die arabischen Wissenschaftler auch bei der Berechnung trigonometrischer Tafeln; an Genauigkeit gingen sie weit über die z. B. von Ptolemaios hinaus (Abb. 5.4). Die vollständigsten und genauesten Tafeln stammen von al-Birūnī, Ibn Yūnis, al-Ḥalilī, al-Kāšī, aṭ-Ṭūsī, al-Marwāzī, einem Schüler des ‘Umar al-Ḥayyām und aus dem Observatorium des Ulugbēk aus Samarkand. Beispielsweise weist die Sinustafel von al-Birūnī eine Schrittweite von 15' auf und ist auf acht Dezimalen genau. Al-Kāšī gab, modern geschrieben, den Wert $2\pi = 6,2831853071795865$ an.

Die Mathematik im europäischen Feudalismus

Der römische Sklavenhalterstaat ging nach erbitterten sozialen Kämpfen der unterdrückten Klassen und unter dem Ansturm der äußeren Feinde zugrunde. Die politische Auflösung des römischen Weltreiches ging einher mit dem Verfall der Wirtschaft. Fernhandel und städtisches Handwerk verfielen, Städte und Straßen zerfielen. Zum Zentrum der Wirtschaft wurde das Dorf. Es bildete sich vom 5. bis 11. Jh. der europäische Feudalismus heraus, der durch Naturalwirtschaft, die Bindung der Bauern an den Boden (Leibeigenschaft), außerökonomischen Zwang und ein niedriges Niveau der Technik gekennzeichnet ist. Dazu kam in den ersten Jahrhunderten die wissenschaftsfeindliche oder zumindest wissenschaftsuninteressierte Haltung der christlichen Kirche. Bei den sog. Kirchenvätern (2.–5. Jh.) (patres) fand sie programmatischen Ausdruck. Tertullian sah in der Philosophie, d. h. in der hellenistischen Wissenschaft, die eigentliche Quelle der Ketzerei und betonte den unüberbrückbaren Unterschied zwischen Glauben und Wissen: „Wißbegier ist uns nicht nötig, seit Jesus Christus; auch nicht Forschung, seit dem Evangelium.“

Von den Autoren der Patristik hat Augustinus, Bischof in Nordafrika, am nachdrücklichsten die Haltung der Kirche zur Naturwissenschaft und Mathematik für die kommenden Jahrhunderte geprägt. Zwar betont auch er die Überflüssigkeit und die möglichen Gefahren des Studiums der „heidnischen“ Wissenschaft. Eine andere Sache aber sei die Aneignung nützlicher Kenntnisse und Fertigkeiten, da man keine genauen Angaben über den Zeitpunkt der Errichtung des Gottesreiches machen

könne und man sich daher auf die Eroberung der bestehenden Welt für das Wort Gottes einstellen müsse. Der Erwerb wissenschaftlicher Güter durch die Heiden bewiese nur die Unrechtmäßigkeiten ihres Besitzes. Erst die Christen können — nach Augustinus — davon den richtigen Gebrauch machen, nämlich den, die Offenbarung Gottes in der Natur zu erweisen. Aber es bleibe die Hauptbedingung jeder Beschäftigung mit der Wissenschaft, daß jede Wissenschaft der Heiligen Schrift unterworfen sei, da diese alle Fähigkeiten des menschlichen Geistes übertreffe. Seitdem war im christlichen Herrschaftsbereich das Primat des Glaubens vor dem Wissen fixiert. Es konnte erst nach mühevollen und opferreichen Kämpfen zurückgedrängt und schließlich überwunden werden.

Unter diesen Umständen ist es nicht verwunderlich, daß die europäische Mathematik im Frühfeudalismus auf einem äußerst niedrigen Niveau stand. Sie beschränkte sich auf elementares Abacus-Rechnen und auf ein verwickeltes System des Fingerrechnens, auf elementare Feldmeßkunst und auf die Berechnung (sog. *Computus*) beweglicher kirchlicher Feiertage, wie z. B. des Osterfestes.

Die Karolingische Frührenaissance

Eine sichtbare Wiederbelebung von Wirtschaft, Kultur und Wissenschaft setzte in Europa erst mit dem 8./9. Jh., mit der Festigung der feudalen Gesellschaftsordnung ein. Bessere Ausnutzung der tierischen Energie durch Kummel und Hufeisen, vermehrte Pflugschar u. a. m. trugen wesentlich zur Erhöhung der Produktivität in der Landwirtschaft, dem Hauptwirtschaftszweig der Feudalordnung bei. Wind- und Wassermühlen milderten den chronischen Energiemangel während der Feudalzeit. Als sich unter der Herrschaft der Karolinger das Frankenreich zu einem mächtigen, feudalen Großreich im christlichen Europa herausgebildet hatte — Karl der Große wurde 800 zum Kaiser gekrönt — zeigten sich Formen einer organisierten Bildungspolitik. Karl, der selbst zeitlebens trotz aller Anstrengungen nie wirklich Schreiben und Lesen erlernen konnte, bemühte sich im Interesse der Stärkung seines Staates darum, das Bildungsniveau der Geistlichkeit und der höheren Beamten anzuheben. Er zog 781 den aus England stammenden Mönch Alcuin von York an seinen Hof. Auf dessen Initiative wurde in Tours eine ständige höhere Bildungsstätte eingerichtet, an der auch mathematisches Wissen vermittelt wurde. In St. Gallen und Fulda entstanden Klöster, die sich um die Pflege wissenschaftlicher Ideen bemühten. Alcuin selbst gilt als Verfasser einer Sammlung mathematischer Aufgaben „*Propositiones ad acuendos juvenes*“ (Aufgaben zur Übung der Jugendlichen), die deutlich an Vorlagen orientalischer und antiker Herkunft anknüpft, z. B. an eine bei Heron auftretende Aufgabe über das Füllen eines Wasserbehälters. Geometrische Aufgaben schließen an römische Vorbilder an und benutzten nur äußerst grobe Näherungen für Flächenberechnungen und für den Wert von π . Beispielsweise wird die Kreisfläche durch die Quadratwurzel aus einem Viertel des Kreisumfangs angenähert.

Während des 9. und 10. Jh. erlebten die christlichen Staaten Armeniens und Grusiniens eine Periode kultureller Blüte. Kalenderrechnung und antikes mathe-

matisches Wissen, wie es teilweise durch die islamische Kultur vermittelt worden war, wurden systematisch gepflegt. Es entstand ein eigenständiges Positionssystem zur Bezeichnung der Zahlen.

Die Mathematik im Hochfeudalismus

Mit dem Auseinanderbrechen des Großreiches der Karolinger während des 9. Jh. erlitt die Entwicklung auch der Wissenschaften in West- und Mitteleuropa einen vorübergehenden Rückschlag. Der neue Aufschwung ging von Italien, insbesondere von Oberitalien aus, wo im Anschluß an noch lebendige Traditionen aus der Zeit der Antike die besten Voraussetzungen für einen erneuten Aufschwung von Handwerk und Handel bestanden.

Die europäische Feudalgesellschaft erreichte im 12. und 13. Jh. ihre Blütezeit. Der Aufschwung der materiellen Produktion zeigte sich auch in der Landwirtschaft, war aber vor allem an das Handwerk in den Klöstern und insbesondere in den Städten gebunden, die sich in allen Teilen West-, Süd- und Mitteleuropas – bis hin in das Gebiet der jetzigen VR Polen – zu ökonomischen Hauptzentren entwickelten. Das Handwerk spezialisierte sich in neuen Organisationsformen, den Zünften. Der sich ausdehnende Fernhandel brachte die christliche Welt auch in engere Beziehungen zur Kultur des Islam, insbesondere in Spanien und Sizilien; dort lernten die Europäer u. a. die Ergebnisse der islamischen Mathematik kennen.

Der neu erreichte Stand der Produktivkräfte und der Produktionsverhältnisse schuf nach und nach eine Atmosphäre der Aufnahmebereitschaft für kulturelle und wissenschaftliche Güter aus der entwickelten Kultur und Wissenschaft des islamischen Reiches, trotz ideologischer Gegensätze und blutiger militärischer Verwicklungen in den sog. Kreuzzügen.

Nach Europa gelangten u. a. der Kompaß sowie Erkenntnisse zur Herstellung von Seide, Papier und Schießpulver, Erfahrungen bei der Gewinnung von Stahl und neue Webverfahren; nach Damaskus sind „Damaszener“ Klingen (bei Waffen) und „Damas“ benannt worden. Auch wissenschaftliche Kenntnisse erreichten Europa, u. a. Philosophie (Aristoteles), Astronomie, Optik und Alchimie bzw. Chemie.

Einer der markantesten Fälle der Begegnung des lateinischen Mittelalters mit der Welt des Islam auf dem Gebiet der Mathematik repräsentiert sich in dem französischen Mönch Gerbert, der 999 unter dem Namen Sylvester II. den päpstlichen Thron bestieg. In Spanien lernte er die arabischen Ziffern kennen. Er verwendete sie aber noch sinnwidrig, indem er Rechensteine des Abacus mit ihnen beschriftete. Immerhin aber verdankt man Gerbert die erste uns überlieferte schriftliche Darstellung des Abacus-Rechnens.

Umfangreichere Teile der islamischen Mathematik flossen seit dem 12. Jh. nach Europa ein, solche, die – ursprünglich antiker Herkunft – nun aus dem Arabischen ins Lateinische übersetzt wurden, und solche, die das Ergebnis eigenständiger Entwicklung im Bereich des Islam darstellten. Dabei spielte die Übersetzerschule von Toledo eine hervorragende Rolle; Vermittlersprachen wie das Hebräische oder Kastilische wurden zwischen das Arabische und Lateinische eingeschaltet. Um 1140

wurde beispielsweise das Rechenbuch des al-Hwārizmī durch Johannes von Sevilla ins Lateinische übertragen, und damit wurden die indisch-arabischen Ziffern im Prinzip zugänglich. Eine arabische Euklid-Auswahl wurde durch Adelard von Bath um 1150 übersetzt. Die systematische Erschließung der mathematischen Texte, unter bewußtem Rückgriff auf den griechischen Originaltext, wird aber erst während der Periode der Renaissance erfolgen.

Ansätze eigenständiger mathematischer Entwicklung in Europa

Im 12. und 13. Jh. waren Genua, Pisa, Venedig, Florenz und Mailand mächtige Handelsstädte, deren Beziehungen bis in den Vordenen Orient und nach Nordafrika reichten. Die weltberühmten Reisen der Venezianerfamilie Polo bis nach China erweiterten den geographischen Horizont der Europäer beträchtlich.

Für die Vertreter des aufkommenden Handelskapitals erlangte die Rechenkunst einen hohen unmittelbaren Gebrauchswert. So verfaßte Leonardo Fibonacci von Pisa als einer der ersten Europäer eine systematische Darstellung des Rechnens mit den indisch-arabischen Ziffern, das er bei seinen Geschäftsreisen in den Orient und nach Nordafrika kennengelernt hatte. Dieses Buch wurde 1202 niedergeschrieben und trug den Titel „Liber abbaci“ (Buch vom Abacus), aber er ist irreführend: Vom Rechnen auf dem Abacus ist nicht die Rede, sondern vom Ziffernrechnen. Es zeugt von dem beginnenden Siegeszug der indischen Ziffern, daß Rechnen und Ziffernrechnen zu synonymen Ausdrücken geworden sind. Leonardos Buch zeigt sogar noch mehr: Die Aneignung wissenschaftlicher Kenntnisse war nicht länger beschränkt auf Geistliche und Klosterstuben. Die in Umrissen erst deutlich werdende neue Klasse, die Bourgeoisie, wird sich anschicken, das feudale Bildungsprivileg zu durchbrechen.

Die Gründung von Universitäten. Die Scholastik

Die eigentliche, offizielle Wissenschaft während der Periode des europäischen Feudalismus konnte sich jedoch nur unter kirchlicher Oberhoheit entfalten. Gegen Ende des 11. Jh. hatte die Kirche erkannt, daß im Interesse ihrer eigenen politischen und ökonomischen Macht die Geistlichkeit Lesen, Schreiben und Rechnen lernen und daß sie zur Formulierung ihrer ideologischen und materiellen Ansprüche wissenschaftliche Bildung erwerben müsse. Anfangs wurde das gestiegene Bildungsbedürfnis von Domschulen befriedigt. Einige von ihnen, etwa die von Chartres und Reims, erreichten ein bemerkenswertes Niveau. An anderen formierten sich nach dem Vorbild der Zünfte Vereinigungen von Lehrenden und Lernenden, von Lehrern und Schülern mit dem Ziel, sich die Gesamtheit (universitas) aller Wissenschaften anzueignen. Die erste und berühmteste dieser Universitäten, nämlich die von Paris, wurde 1160 von der Kirche als Lehranstalt anerkannt, also nicht gegründet. Erst spätere Universitäten wurden bewußt ins Leben gerufen, z. B. Oxford und Cambridge nach Pariser Muster als von der Kirche organisierte Formen christlicher Gelehrsamkeit. Andere wieder wurden — freilich gebunden an die schließliche päpstliche Anerkennung —

von weltlichen Herrschern gegründet, z. B. Neapel; hier wirkten zweifellos auch Vorbilder aus der Welt des Islam mit, wo die Wissenschaft staatliche Förderung erhalten hatte.

An den mittelalterlichen Universitäten bildete sich eine Form des Wissenschaftsbetriebes heraus, die wir als scholastische bezeichnen. Scholastik bedeutete im ursprünglichen Sinne des Wortes „Schullehre“, d. h. die systematische Vermittlung des Wissensstoffes in Form von Vorlesungen und Disputationen. Die Vorlesungen muß man sich allerdings nicht im heutigen Sinne vorstellen, sondern eher als Verlesen von Schriften der Kirchenväter, von theologischer und wissenschaftlicher Literatur. Danach folgten deren Auslegung und Interpretation.

Nach dem Besuch einer Lateinschule wurde der Student im Alter von 10 bis 12 Jahren immatrikuliert, d. h. in die Matrikel (das Verzeichnis) eingetragen. Das Studium begann mit einem Lehrgang der Fächer des Triviums, d. h. der drei sprachlich-philosophischen Fächer Grammatik, Rhetorik und Dialektik („trivial“ ist also das, was am Anfang kommt). In einer zweiten Stufe des Universitätsstudiums wurde — nach spätantikem Vorbild — das Quadrivium, d. h. eine Gesamtheit von vier Fächern gelehrt: Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik.

In diesem Rahmen erfolgte die naturwissenschaftliche Ausbildung. An den höheren Fakultäten — Medizin, Jus und Theologie — kam man auf Mathematik und Naturwissenschaften nicht mehr zurück. Die Fächer des Triviums und Quadriviums wurden unter dem Namen der „sieben freien Künste“ (*artes liberales*) zusammengefaßt; diese Fakultät hieß demnach Artistenfakultät. Unter den Bedingungen der Klassengesellschaft des Feudalismus hat man die „freien Künste“ freilich zu verstehen als die „Künste der Freien“; Leibeigene fanden nicht den Zugang zu den Universitäten.

Das Niveau der mathematisch-naturwissenschaftlichen Ausbildung war fast durchweg sehr bescheiden. Das elementare Rechnen mit den vier Grundrechenarten umfaßte die ganzen positiven Zahlen; aber schon die (nicht aufgehende) Division bot oft genug unüberbrückbare Schwierigkeiten; man „geriet in die Brüche“. Ähnlich elementar waren die vermittelten Kenntnisse aus der ebenen Geometrie und Stereometrie. Die Astronomie war mit der Astrologie durchmengt und lehrte auf geozentrischer Basis Elementares über die Bewegung von Sonne, Mond und Planeten. Arithmetische und astronomische Kenntnisse reichten aus, um den Kalender zu führen und die beweglichen kirchlichen Feiertage zu berechnen. Die Lehre schließlich von der Musik — Musik spielte in der christlichen Liturgie eine große Rolle — knüpfte an pythagoreische Vorstellungen an. Stehen die Längen der Saiten von Musikinstrumenten in ganzzahligen Verhältnissen, so entstehen Tonintervalle wie Oktave, Quarte, Quinte usw. Die Untersuchung dieser Verhältnisse lief auf die Verwendung von Proportionen hinaus.

Auf dieser durchaus sehr bescheidenen Lehrbasis hat die Hoch- und Spätscholastik an einigen Universitäten Leistungen hervorgebracht, die das normale Niveau weit überschritten.

Roger Bacon, einem in Oxford wirkenden Franziskaner-Mönch, der wegen seiner materialistischen Denkansätze verfolgt und eingekerkert wurde und wegen seiner Universalbildung als einer der führenden Gelehrten des Mittelalters einzuschätzen ist, waren — also im 13. Jh. — die „Elemente“ von Euklid, der „Almagest“ von

Ptolemaios und Ausschnitte des Werkes von Apollonios, Hipparchos und Archimedes bekannt.

Schon der Abstiegsperiode der Scholastik gehört der Oxforder Magister Thomas Bradwardine an, auf den u. a. im Anschluß an die Kreisquadratur des Archimedes Überlegungen über Stetigkeit sich ändernder Größen, Arten des Unendlichen und anderes mehr zurückgehen, also zu Grundfragen der Mathematik, freilich noch ganz implizit in theologischer Umhüllung. Hieran schloß sich ideengeschichtlich die sog. Theorie der Formlatituden von Nicolaus Oresme an.

Trotz dieser und anderer Teilergebnisse nahm die Mathematik — erstaunlich, wenn man die engen inneren Beziehungen zwischen ihr und der sich während der Scholastik hohen Ansehens erfreuenden Logik bedenkt — doch insgesamt eine nur bescheidene Stellung ein. Es gab im allgemeinen nicht einmal an der Artistenfakultät spezielle Lehrstühle für Mathematik. Eine grundlegende Wandlung des Inhaltes, des Umfanges und der gesellschaftlichen Reichweite der Mathematik wird erst mit der Entfaltung des europäischen Städtebürgertums im 15. Jh. einsetzen.

Vorlesung 6

Renaissance: Trigonometrie. Rechenmethoden. Algebraisierung



Sieg des Ziffernrechnens über das Abacus-Rechnen (1504)

Die Renaissance

Im 14. und 15. Jh. begannen sich in Teilen Süd-, West- und Mitteleuropas Elemente des Frühkapitalismus herauszubilden. Der allmähliche Übergang zur frühbürgerlichen Gesellschaft war begleitet von tiefen sozialen Widersprüchen, von Erhebungen der Stadtbewohner und der Bauern gegen die Feudalherren, von zahllosen Kriegen und von der Entstehung der Nationen und Nationalstaaten. Das äußere Bild wurde geprägt von einem bisher nicht gekannten Aufschwung der handwerklichen Produktion, von der zunehmenden Ablösung der Naturalwirtschaft durch die Geldwirtschaft, vom Aufblühen der Städte, aber auch von gärenden geistigen und religiösen Bewegungen, vom Zusammenbruch des mittelalterlichen Weltbildes und nicht zuletzt von einer glanzvollen Entfaltung von Kunst und Wissenschaft.

Das Streben der sich formierenden neuen Klasse, des Bürgertums, war ökonomisch orientiert und determiniert und zielte daher auf eine Entwicklung der Produktivkräfte und damit auf hierfür dienliche Kenntnisse über die Natur ab. Das Interesse des Bürgertums an einer diesseits orientierten und praktischen Zwecken dienenden Wissenschaft richtete sich zunächst auf ein Kennenlernen der aus der Antike überlieferten Kenntnisse und Wissenschaften, auf Aneignung und Nutzung von Kultur und Wissenschaft der als „Goldenes Zeitalter“ empfundenen Antike, äußerte sich im Bemühen um deren Wiedergeburt (Renaissance).

Die Träger der neuen Ideologie — Dichter, Gelehrte, Publizisten, Philosophen — bezeichneten sich als Humanisten, als Verkünder einer dem Menschen und seinen irdischen Lebensbedingungen dienlichen Weltanschauung und Lebensweise. Der Rückgriff auf die Reinheit antiken Denkens, erreichbar nur durch die Wiederherstellung textkritisch überprüfter antiker Schriften in der Originalsprache, förderte klassische Philologie, historisches und philosophisches Denken und erschloß im 15. und 16. Jh. Schriften von Archimedes, Ptolemaios, Euklid, Apollonios, Diophantos und anderen Mathematikern der Antike den europäischen Gelehrten. Der Buchdruck mit beweglichen Lettern, eine Geschichte machende Erfindung des Mainzer Goldschmiedes Gutenberg, unterstützte die relativ rasche Verbreitung des aus der Antike übernommenen und des neuerworbenen Wissens. Auch im gesellschaftlichen Überbau, in Philosophie, Gesellschafts- und Staatstheorie, Ethik, Pädagogik und Literatur, drückte sich der Übergang zur neuen Gesellschaftsordnung aus. Nicolaus von Cues und Giordano Bruno, Machiavelli und Thomas Morus, Thomas Müntzer, Ulrich von Hutten und Erasmus von Rotterdam, Martin Luther und Philipp Melanchthon, Petrarca, Michelangelo, Boccaccio, Rabelais, Cervantes und Shakespeare leisteten — jeder mit seinen Mitteln — wesentliche Beiträge zur Herausbildung neuer weltanschaulicher Inhalte.

„Es war (so beurteilte Engels die Renaissance, Wg) die größte progressive Umwälzung, die die Menschheit bis dahin erlebt hatte, eine Zeit, die Riesen brauchte und Riesen zeugte, Riesen an Denkkraft, Leidenschaft und Charakter, an Vielseitigkeit und Gelehrsamkeit. Die Männer, die die moderne Herrschaft der Bourgeoisie begründeten, waren alles, nur nicht bürgerlich beschränkt. ... Auch die Naturforschung bewegte sich damals mitten in der allgemeinen Revolution und war selbst durch und durch revolutionär; hatte sie sich doch das Recht der Existenz

zu erkämpfen. Hand in Hand mit den großen Italienern, von denen die neuere Philosophie datiert, lieferte sie ihre Märtyrer auf den Scheiterhaufen und in die Gefängnisse der Inquisition ...“ (L 6.13), S. 312/313)

Neue gesellschaftliche Stellung der Naturwissenschaft

Bloße Aneignung und Wiedererweckung des wissenschaftlichen Erbes der Antike genügten den wachsenden ideologischen und ökonomischen Bedürfnissen der Bourgeoisie schon im ausgehenden 15. Jh. nicht mehr. Eine Fülle neuer Einsichten konnte im 16. Jh. erzielt werden, im Bereich der Produktionsverfahren und der Produktionsmittel, bei der geographischen Erschließung der Erde, in Wissenschaft und Kunst. Es wurde offensichtlich, daß die Antike übertroffen werden konnte und übertroffen worden war. Tiere, Pflanzen, Erdteile waren entdeckt worden, von denen sich bei den Alten nicht einmal eine Andeutung fand. Es gab Brillen, Räderuhren, Schießpulver, Feuerwaffen, Spinnräder, Papier, Buchdruck, es gab bedeutende Fortschritte im Bauwesen, im Schiffsbau, im Bergbau und in der Metallurgie. Diese Entwicklung ging charakteristischerweise nicht zurück auf die lateinisch schreibenden Gelehrten an den unter kirchlicher Oberaufsicht stehenden Universitäten, die in unfruchtbar gewordener Scholastik verharren. Es waren vielmehr die unter der Sammelbezeichnung „*artefici*“ oder „*virtuosi*“ auftretenden Handwerker, Kaufleute, Rechenmeister, Büchsenmeister, Zeugmeister, Architekten, bildenden Künstler usw., denen die entscheidenden Anstöße zu verdanken waren und die sich der systematischen Erforschung und Darstellung der Produktion in ihren Nationalsprachen zuzuwenden begannen. Man spricht daher geradezu von der „wissenschaftlich-literarischen Entdeckung der Produktion“ (Anm. 6.1).

Die neue Auffassung vom Sinn und Nutzen der Wissenschaft vermochte sich mit dem Erstarken des Frühkapitalismus durchzusetzen und ergriff in zunehmendem Maße auch die Vertreter der Universitätswissenschaft. Der durch die Praktiker erworbene Schatz naturwissenschaftlicher und mathematischer Kenntnisse wurde von den Vertretern der offiziellen Wissenschaft, die traditionsgemäß auf die Systematisierung des Wissens orientiert waren, theoretisch durchdrungen. Es kam zu einer Art Begegnung von Praxis und Theorie, zu einem stufenweisen Zusammenwachsen mit revolutionären Folgen: Am Beginn des 17. Jh. wurden bereits die Grundlagen der klassischen Naturwissenschaft gelegt.

Hand in Hand damit ging auch ein Erstarken des philosophischen Materialismus in den Naturwissenschaften selbst. Man fing an, die Rolle des Experimentes zu erkennen. Man kann die Leistung eines Gelehrten der damaligen Zeit geradezu daran messen, wie weit er bereit war, Sinneswahrnehmung und Beobachtung über die Berufung auf die Autoritäten der Scholastik zu stellen und sich von der Vorherrschaft aristotelisch geprägter mittelalterlicher Wissenschaft zu lösen.

Neue gesellschaftliche Forderungen an die Mathematik

Von einigen gesellschaftlichen Sphären im Frühkapitalismus ging eine deutliche Um- und Neuorientierung der Mathematik nach Inhalt und Methode aus.

Mit dem Übergang von der Natural- zur Geldwirtschaft und der sprunghaften Erhöhung des Geldumlaufes wurde eine Vielzahl von Problemen aufgeworfen: Buchhaltung, Zahlenschreibweise, Umrechnung verschiedenartigster Währungs-, Gewichts- und Maßeinheiten ineinander, Zins- und Zinseszinsrechnung, Erweiterung des Zahlenbereiches, Ausbildung von zweckmäßigen Rechenverfahren (Abb. 6.1).

**Zu Merckordnet Rech
enbüchlein auf den Linien
mit Rechenpfeninggen: Den
Zungen angenden zu helf
lich dem gebrauch vnd beno
ein leychtlich zu lernen
mit figuren vnd exempel
Vollgethennach Maß
lichen angezeiget.**



Abb. 6.1. Rechenstube mit Abacus. Rechenbüchlein von Jakob Köbel, 1514, Titelblatt

Im 15. und 16. Jh. nahm die Astronomie einen raschen Aufschwung, der in der Publikation des weltbewegenden Werkes „De revolutionibus“ (1543) durch Nicolaus Copernicus und der Ablösung des geozentrischen durch das heliozentrische Weltbild gipfelte (Abb. 6.2). Die Grundannahme der Astrologie vom Einfluß der Gestirne auf das irdische Leben, auch auf das individuelle Schicksal, war in der Renaissance unbestritten: Trotz ihrer Unwissenschaftlichkeit wirkte die Astrologie objektiv wie ein starkes gesellschaftliches Bedürfnis. Und da man beim Versagen eines Horoskopes nicht auf Fehler im astrologischen System, sondern auf die Ungenauigkeit der Sternbeobachtungen schloß, erhielt sogar die beobachtende Astronomie echte Impulse von dieser Seite.



Abb. 6.2. Darstellung des heliozentrischen Weltsystems. Aus einem Manuskript von N. Copernicus

Die Schifffahrt, die sich von den Küsten lösen und die hohe See erreichen konnte, erforderte neue Kenntnisse und Fertigkeiten der Navigation und im Schiffsbau; hier ergaben sich Forderungen an Trigonometrie und die Bewältigung hydrostatischer, mathematisch-physikalischer Probleme. Dazu traten hydrotechnische Probleme der Binnenschifffahrt, die aus dem Bau von Kanälen und Schiffschleusen und der Flußregulierung erwuchsen.

Das aufkommende und sich rasch entwickelnde Geschützwesen (Abb. 6.3) stellte die Geschützmeister vor eine Reihe ballistischer Fragen. Die Flugbahn der Geschosse

Die new Buchsenmeisterei

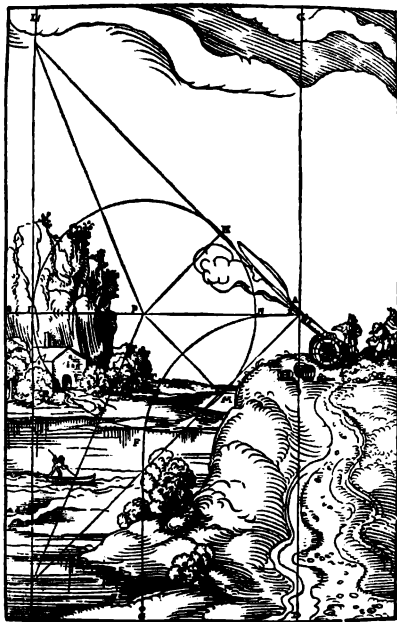


Abb. 6.3. Richten eines Geschützes (1547). Die Flugbahn ist aus Strecken und Kreisbogenstücken zusammengesetzt

wurde, ein erster bedeutender Fortschritt, aus Geradenstücken und Kreisbogenteilen zusammengesetzt gedacht; erst im 17. Jh. sollte nach langen Bemühungen von Galilei und Cavalieri die Flugbahn als parabolisch erkannt werden.

Im Bauwesen waren schwierige Fragen zu bewältigen; die Konstruktion von Festungen erforderte bei zunehmender Durchschlagskraft der Geschosse auch den Bau in die Tiefe und förderte damit Ansatzpunkte zur darstellenden Geometrie, d. h. der Kunst, Dreidimensionales in einer Zeichenebene darzustellen.

Nicht zuletzt enthielt die bildende Kunst der Renaissance zahlreiche mathematische Momente. Repräsentative Gebäude, Bildwerke, Statuen und Gemälde mußten, sollten sie dem wiederbelebten antiken Schönheitsideal genügen, nach „kanonischen Regeln komponiert sein“: Ihre Teile hatten in bestimmten Größenverhältnissen zu stehen. Dabei spielte der berühmte sog. Goldene Schnitt eine her-



Abb. 6.4. Handzeichnung von Leonardo da Vinci zu den Größenverhältnissen des menschlichen Kopfes (Beschriftung in Spiegelschrift)

vorrangende Rolle (Abb. 6.4). Die Berücksichtigung der Perspektive auf Gemälden, die neben dem Streben um realistische Darstellung zu den Errungenschaften der Renaissance-Kunst gehört, führte zur Entdeckung einiger Grundelemente der darstellenden Geometrie wie Fluchtpunkt und Fluchtgerade.

Im ganzen erreichte die Mathematik im unmittelbaren Zusammenhang mit der Herausbildung frühkapitalistischer Verhältnisse im 15. und 16. Jh. eine prinzipiell neue gesellschaftliche Stellung: Mathematik war nicht länger bloßes Bildungselement im System kirchlich-scholastischer Gelehrsamkeit, eingegliedert in das Studium der sieben freien Künste. Nun, in der Renaissance, begannen die Repräsentanten des Frühkapitalismus, die in der Mathematik verborgene Produktionspotenz zu erkennen.

Im Ergebnis der an die Mathematik gestellten gesellschaftlichen Anforderungen schritt die Mathematik im 15. und 16. Jh. in drei Hauptrichtungen voran: Die Trigonometrie wurde zum geschlossenen System ausgebaut. Die Rechenmethoden wurden verbessert. Das Rechnen selbst wurde algebraisiert.

Ausbau der Trigonometrie zum geschlossenen System

Die Entwicklung der Trigonometrie in Europa knüpfte an Ansätze aus der Antike und an Kenntnisse aus dem islamischen Kulturgebiet an. Die Aufmerksamkeit galt zunächst astronomischen und trigonometrischen Tafeln. Anfangs spielten die 1260/1266 auf Befehl des Königs Alfons X. von Kastilien berechneten sog. alfonsinischen Tafeln eine bestimmende Rolle. Jedoch erwiesen sie sich als nicht genügend genau und umfangreich.

Die astronomisch-mathematische Schule in Wien.

Johannes Regiomontanus

Während des 14./15. Jh. entwickelte sich in Wien eine herausragende astronomisch-mathematische Schule. Der Magister Johannes von Gmunden, sein Nachfolger Georg von Peurbach sowie dessen Schüler und Freund Regiomontanus, unstreitig der bedeutendste Mathematiker des 15. Jh., lehrten dort.

Eine Neubearbeitung der alfonsinischen Tafeln hatte schon Johannes von Gmunden für notwendig erachtet; sie wurde durchgeführt von Peurbach, zusammen mit Regiomontanus. Auf Peurbach geht auch die Anregung an Regiomontanus zurück, die in antiken, in islamischen und europäischen Schriften verstreuten trigonometrischen Sätze, Ergebnisse und Hilfstabellen zu ordnen und systematisch darzustellen. Im Mathematischen wie bei der Bewältigung der Sprachschwierigkeiten sah sich Regiomontanus vor eine große Aufgabe gestellt. Zeitweise in Italien lebend schrieb er 1462/63/64 vier Bücher seines umfassenden Werkes „De triangulis omnimodis libri quinque“ (Fünf Bücher über alle Arten von Dreiecken) nieder; das fünfte ist nicht über das Entwurfsstadium hinausgekommen. Erst 1533 wurde das Werk aus dem Nachlaß im Druck herausgegeben und hat, trotz dieser Verzögerung, die Ent-

wicklung, die Gestalt und den Aufbau der ebenen und sphärischen Trigonometrie bis in die Gegenwart hinein entscheidend geprägt. Neben einer Fülle von geometrischen Konstruktionsaufgaben wird in „De triangulis ...“ zum erstenmal in Europa die ebene und sphärische Trigonometrie als eine von der Astronomie unabhängige, selbstständige mathematische Disziplin dargestellt. Es handelt sich um Sinustrigonometrie und nicht um die in der Antike übliche Sehnentrigonometrie. Regiomontanus verwendete, im Anschluß an den jüdisch-europäischen Mathematiker Levi ben Gerson, den Sinussatz, an anderer Stelle auch den Sinussatz der sphärischen Trigonometrie. Zu Beginn des fünften Buches formulierte Regiomontanus, freilich noch in einer recht schwerfälligen verbalen Fassung, den Seitenkosinussatz der sphärischen Trigonometrie. Schließlich machte Regiomontanus auch von der Tangensfunktion Gebrauch und schuf 1464/67 eine gradweise fünfstellige Tangententafel mit dezimaler (!) Unterteilung.

In einer deutschen Übersetzung des lateinischen Originals, die ein wenig dem modernen Sprachgebrauch angepaßt ist, lautet der Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie bei Regiomontanus folgendermaßen:

„In jedem sphärischen Dreieck, das aus Großkreisen besteht, ist das Verhältnis des sinus versus eines beliebigen Winkels zu der Differenz derjenigen zwei sinus versus, deren einer zu der dem Winkel gegenüberliegenden Seite, deren anderer zu der Differenz der einschließenden Seiten gehört, ebendasselbe wie das Verhältnis des Quadrats des sinus totus zu dem Rechteck, das aus dem sinus der einschließenden Seiten gebildet wird.“ ([LA 33], V, S. 139)

An diesem Beispiel der ausschließlich verbalen Formulierung eines mathematischen Satzes wird der große Fortschritt deutlich, der aus dem Gebrauch der Formelsprache für die Mathematik erwächst. Bei der „Übersetzung“ der Formulierung des Regiomontanus in Formelschreibweise ergibt sich

$$\sin \text{ vers } \alpha : [\sin \text{ vers } a - \sin \text{ vers } (b - c)] = (\sin \text{ tot})^2 : \sin b \cdot \sin c.$$

Der sinus versus ist eine heute ungebräuchliche Schreibweise für $1 - \cos$, und $\sin \text{ tot}$ ist dem Werte nach gleich 1. Mit diesen Umformungen erhält man dann den (Seiten-) Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie in der heute geläufigen Form

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha.$$

Das wissenschaftliche Werk von Regiomontanus umfaßte, neben astronomischen Arbeiten, weitere Tafelwerke, eine kritische Auseinandersetzung mit Näherungslösungen für die Berechnung der Kreisfläche (Kreisquadratur), die von dem Philosophen und Kleriker Nicolaus von Cues stammten, und weiterhin eine Manuskript gebliebene Abhandlung über sternförmige Vielecke sowie Studien über die notwendig gewordene Kalenderreform.

Prosthaphairesis. Trigonometrische Tafeln

Das wissenschaftliche Erbe von Regiomontanus wurde nicht voll ausgeschöpft, da einiges aus dem Nachlaß verloren ging. Als erster fand der Nürnberger Werner, ein Pfarrer und Liebhaberastronom, den Zugang zu Regiomontanus' Schriften und ver-

faßte eine eigene Trigonometrie. Dort findet sich — wenn man unsere heutige Formelschreibweise benutzt — die Beziehung

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)],$$

mittels der die Multiplikation trigonometrischer Funktionswerte auf Addition bzw. Subtraktion zurückgeführt werden kann. Sie leistet also dem Prinzip nach ganz dasselbe wie das spätere logarithmische Rechnen. Aus diesem Ansatz Werners entwickelte sich die Methode der sog. Prosthaphairesis, die, nach weiterer Verbesserung, bis ins 17. Jh. als Grundlage astronomischer Rechnungen diente.

Mit der Leistung von Regiomontanus war die Trigonometrie im europäischen Raum abermals als mathematische Disziplin begründet. Die folgenden Jahrhunderte brachten Ausgestaltungen, methodische Verbesserungen, Einführung moderner Bezeichnungen und die Verfeinerung der Tafeln. Copernicus führte 1542 in einer gesonderten „Trigonometrie“ die Sekansfunktion ein. Der Wittenberger Mathematikprofessor Rhaeticus, Schüler und Freund des Copernicus, schuf 1551 im „Canon doctrinae triangulorum“ (Tafel der Lehre von den Dreiecken) eine von 10'' zu 10'' fortschreitende siebenstellige Tafel der trigonometrischen Funktionen. Dort werden zum erstenmal die Seiten des rechtwinkligen Dreieckes zur Definition der sechs trigonometrischen Funktionen benutzt. Übrigens enthält „De revolutionibus“ von Copernicus selbst Darstellungen der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Am Ende des 16. Jh. berechnete Vieta im „Canon“ alle sechs Winkelfunktionen, von Minute zu Minute fortschreitend.

Auch sonst hat Vieta bedeutenden Einfluß auf die Entwicklung der Trigonometrie genommen. Er hat, darunter auch im „Canon“, die sphärische Trigonometrie systematisch auf dem Sinussatz und einem — leicht modifizierten — Kosinussatz aufgebaut; dabei treten auch die später nach Napier benannten Formeln auf. Vieta wurde auch zum Schöpfer einer eigentlichen Goniometrie. Bei ihm traten algebraische Umformungen unter Verwendung von Symbolen mit dem Ziel der Umformung trigonometrischer Beziehungen auf, bewußt ohne Rückgriff auf eine Figur. Das reicht von den sog. Additionstheoremen der trigonometrischen Funktionen, über die Ent-

wicklung von $\cos nt$ und $\frac{\sin nt}{\sin t}$ als Summe von Funktionen von $\cos t$ bis hin beinahe zum Satz von Moivre.

Zyklometrie

Bemerkenswert sind auch die zyklometrischen Untersuchungen Vietas. Beispielsweise gab er für π eine unendliche Produktdarstellung an. Hier reihte sich Vieta ein in eine lange Reihe entsprechender Arbeiten, die der Berechnung von π galten und, im Zusammenhang mit dem klassischen Problem der Kreisquadratur, dem Problem nachgingen, ob der Kreis (Fläche oder Umfang) „exakt“ meßbar sei. Zu den bemerkenswertesten Leistungen auf diesem Gebiet gehört die Berechnung von zunächst

20, später 35 Dezimalstellen von π durch Ludolph van Ceulen; noch in Büchern vom Ende des 19. Jh. wird darum oft π als Ludolphsche Zahl bezeichnet.

Im 17. Jh. aber war das Problem „exakte Messung“ noch nicht klar formulierbar und die Erkenntnis noch nicht ausgesprochen, daß die Quadratur des Kreises (mit Zirkel und Lineal) auf die Frage hinausläuft, ob sich π durch einen Ausdruck darstellen läßt, der nur Quadratwurzeln, und diese in endlicher Anzahl, enthält. Die Bezeichnung „transzendente Zahl“ (im Sinne von: „über irrational hinausgehend“) dürfte auf Leibniz (1679) zurückgehen. Euler bezeichnete 1748 π als „transzendente Größe“. Liouville konnte 1844 Zahlen angeben, die nicht Wurzeln algebraischer Gleichungen sind und schließlich bewies Lindemann 1882 die Transzendenz von π : Die Zahl π ist nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung und die Konstruktion einer Strecke der Länge π kann auch nicht bei Hinzunahme beliebiger algebraischer Kurven gelingen.

Die Lehre von der Perspektive

Zu den zentralen geometrischen Problemen der Renaissance gehörte die Suche nach Möglichkeiten, das Dreidimensionale in der Zeichenebene darzustellen. Hieran waren Künstler, Architekten, Ingenieure und Festungsbaumeister von ihren praktischen Problemen her dringlich interessiert; aus den Kreisen dieser Gruppe der *artefici* kamen auch die Lösungen der Grundprobleme der darstellenden Geometrie und hervorragende Bücher über die Anwendungen der Methoden perspektivischer Darstellung in ihrem Beruf.

In den Kreisen der Maler und Baumeister der Frührenaissance — Giotto, van Eyck, Brunelleschi, Alberti — wurden erste Erfolge bei der Meisterung des Problems der Perspektive erzielt. Den hinsichtlich der künstlerischen Meisterschaft reifsten Ausdruck fand die neue Kunst der Perspektive bei Leonardo da Vinci in Italien und Dürer in Deutschland.

Leonardo hatte selbst eine zusammenfassende „Perspektive“ geschrieben, doch ging das Manuskript verloren. Herausragend waren seine Illustrationen zu einem Werk des italienischen Geistlichen und Mathematikers Luca Pacioli, das dieser unter dem Titel „*Proportio divina*“ (Göttliches Verhältnis) über den Goldenen Schnitt verfaßt hatte.

Dürer lernte nach 1500 die Erfolge der Italiener auf dem Gebiet der Perspektive kennen und verfaßte ein für Künstler, Handwerker und Ingenieure bestimmtes Lehrbuch dieses Gegenstandes, das unter dem Titel „*Underweysung der Messung mit dem zirkel und richtscheyt*“ (Lineal) erstmals 1525 in Nürnberg im Druck erschien. Zwei Jahre später erschien Dürers Festungskunde „*Etliche underricht zu befestigung der Stett Schloss und flecken*“. Im Jahre darauf publizierte er eine Anweisung zur Berücksichtigung der Proportionslehre bei künstlerischer Darstellung des menschlichen Körpers.

Ausbau der Rechenmethoden

Mit der Entwicklung des Frühkapitalismus stieg das Bedürfnis nach Beherrschung der Zahlen und des Rechnens sprunghaft an. Dem konnten die Klosterschulen und Domschulen nicht mehr gerecht werden.

Die Rechenmeister

So entwickelte sich in den vom Frühkapitalismus erfaßten Ländern ein neuer Berufsstand, der des Rechenmeisters. Im Auftrage der Stadtverwaltungen führten sie die kommunalen Rechenarbeiten durch und unterhielten oft eigene „Rechenschulen“, in denen gegen Entgelt der Umgang mit Zahlen und ihren Schreibweisen, Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, die Anwendungen auf Probleme des täglichen Lebens bei Kauf, Tausch und Geldgeschäften und manches andere mehr gelehrt wurden.

Eines der Hauptgebiete war die sog. „Practica welsch“ (französisch-italienische Praktik) oder „Arte dela Mercadantia“ (Kunst der Kaufmannschaft), d. i. das kaufmännische Rechnen. Es wurde in Mitteleuropa mit dem Ursprungsland (Italien/Frankreich) in Verbindung gebracht, da es sich dort, in den am weitesten fortgeschrittenen Ländern des Frühkapitalismus, am stärksten durchgebildet hatte. So kam es, daß die noch heute verwendeten Grundworte der Geldwirtschaft italienischen Ursprungs sind: Saldo, Diskont, Bilanz, Kredit, Valuta, netto, tara, Konto und sogar Bankrott. Dem mathematischen Inhalte nach handelte es sich bei dem kaufmännischen Rechnen um Umrechnungen der verschiedensten Währungen, Längen- und Raummaße ineinander, um einfachen und mehrfachen Dreisatz, um Zins- und Zinseszinsrechnung, um die Kunst der doppelten Buchführung.

Rechenmeister (Anm. 6.2) und Rechenschulen gab es überall, in Italien, Frankreich, England, den Niederlanden, Deutschland, Böhmen, Polen, in den Städten aller entwickelten europäischen Länder. Sehr häufig legten die Rechenmeister ihren Lehrstoff schriftlich nieder. Diese „Rechenbüchlein“ gehörten charakteristischerweise – neben Bibeln, Kalendern und politischen Flugschriften – zu den frühesten Druckerzeugnissen und bezeugen das hohe gesellschaftliche Interesse an Rechenfertigkeit. Für die damalige Zeit erreichten sie demgemäß auch erstaunliche Verbreitung und hohe Auflagen.

Bei der großen Volkstümlichkeit der Rechenmeister und Rechenbüchlein ist es nicht verwunderlich, daß sie noch heute in der Erinnerung fortleben. Von den deutschen Rechenmeistern erreichte Adam Ries einen geradezu legendären Ruf: Noch heute rufen wir ihn mit den Worten „Nach Adam Ries ist zwei und zwei vier“ zum Kronzeugen für die Richtigkeit eines Rechenergebnisses an. Ries wirkte als Rechenmeister, aber zugleich als Bergschreiber im Erzgebirge, in Annaberg vor allem, in einem Zentrum des europäischen Frühkapitalismus. Auch wurde er von erzgebirgischen Städten mit der Ausarbeitung von „Brotordnungen“, d. h. der Festsetzung des Verhältnisses von Brotpgewicht und Brotpreis beauftragt.

Ähnliche „Rieses“ gab es auch anderswo; auch dort entstanden vorzügliche

Rechenbücher: Etwa vom Jahre 1483 stammt das sog. „Bamberger Rechenbuch“, dessen Verfasser (Ulrich Wagner?) noch nicht eindeutig identifiziert ist. Die 1489 in Leipzig gedruckte „Behende und hübsche Rechenung auf allen kauffmannschafft“ hat den aus Böhmen stammenden Widmann zum Autor. 1514 erschien Köbels erstes Rechenbuch „Eyun Newe geordnet Rechenbüchlein“, 1545 von Jacques Peletier die „Arithmetica“ in französischer Sprache, und viele andere mehr. Auch Schriften von N. Tartaglia und R. Recorde aus England gehören in diese Gruppe von Rechenbüchern.

Die Überwindung des Abacus-Rechnens

Ries hat drei wesentlich verschiedene Rechenbücher geschrieben, die wegen ihrer hervorragenden pädagogischen Darstellung und der engen Verbindung zum Leben des Volkes noch bis weit ins 17. Jh. nachgedruckt wurden: „Rechnung auff der Linihen“ (1518), „Rechnung auff der Linien und Federn“ (1522), „Rechnung nach der lenge auff den Linihen und Feder“ (1550).

Die Wendung „nach der lenge“ bedeutet nur soviel wie „ausführliche Darstellung“. Die Ausdrücke „auf den Linihen“ bzw. „auf der Feder“ aber weisen auf einen wesentlichen historischen Tatbestand hin, auf den grundlegenden Unterschied zwischen zwei Rechenverfahren: Das Rechnen mittels den auf den Linien des Abacus hin und her geschobenen Rechensteinen bzw. das schriftliche Rechnen (Feder!) mit den indisch-arabischen Ziffern.

Beide Rechenmethoden hatten ihre Vorzüge und wurden daher von den Rechenmeistern gelehrt. Das Abacus-Rechnen konnte auch von Personen ausgeführt werden, die Lesen und Schreiben nicht beherrschten. Auch benötigte man kein Papier, das damals sehr teuer und selten war. Mancherlei äußere Verbesserungen – Rechentische, Rechentücher; Bezeichnung der waagrecht angeordneten Linien mit Währungseinheiten – erleichterten noch die Handhabung.

Die indisch-arabische Zahlenschreibweise stieß auf verschiedene Widerstände, gesellschaftliche und innermathematische. Zunächst wirkte die tausendjährige Tradition des Abacus-Rechnens hemmend. Einige Vertreter der Kirche lehnten die Ziffern, die aus nichtchristlichen Kulturkreisen stammten, als „heidnisch“ oder gar als „Teufelswerk“ ab; dies führte beispielsweise 1299 zum Verbot der indisch-arabischen Ziffern in Florenz. Auch boten diese Ziffern bessere Möglichkeiten zur Fälschung etwa in der Buchhaltung als bei der Verwendung der römischen Zahlen (Anm. 6.3)

Aus heutiger Sicht darf man auch nicht die Schwierigkeiten unterschätzen, die sich dem Verständnis des Positionssystems entgegenstellten, insbesondere dem Gebrauch der Null. Es mußte als ein Widersinn empfunden werden, für das Nichts auch noch ein Zeichen einzuführen. Und von der Stellung dieses Nichts hing der Wert der anderen Ziffern ab! Dazu waren die neun Ziffern schwer erlernbar, zumal sie erst nach und nach einheitliche Gestalt gewannen (Abb. 6.5). In jener Zeit gab es eine Menge von Merkversen, um die Ziffern und die Null einprägbare zu machen. In einer Straßburger Handschrift aus dem 15. Jh. heißt es:

„Hab achtung neun sein der figur/
 On all beschwer auszusprechen pur.
 Bei solchen ferner merk auch mich
 Ein nulla steht vnaussprechlich
 Rund vnd formirt recht wie ein o/
 Wirt dann dasselb versteht also
 Ayner deutlichen fürgemalt
 Bringts zehenmal so vil als bald.
 Mit den kanstu recht numeriren
 All Zal aussprechen und volführen“ ([L 6.15], II, S. 257)

(Zum Verständnis: „fürgemalt“ heißt so viel wie von rechts heran dazugeschrieben; entsprechend ändert sich der Stellenwert der davor stehenden „Figuren“, d. h. der Ziffern 1 bis 9 (Anm. 6.4).)

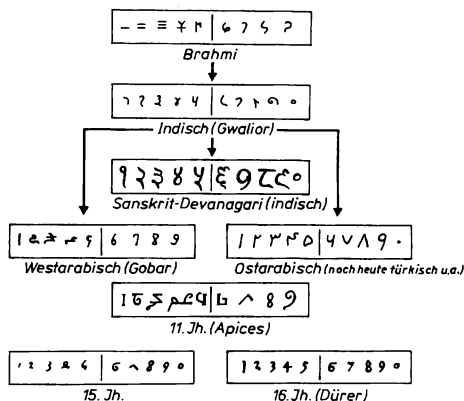


Abb. 6.5. Stammbaum unserer heutigen Zahlzeichen

Zu Ende des 15./Anfang des 16. Jh. befand sich die Auseinandersetzung zwischen den „Abacisten“ und den „Algorithmikern“, den Anhängern der beiden grundverschiedenen Rechenmethoden, auf dem Höhepunkt. Zwar blieben Rechentische noch lange in Gebrauch (in einigen Gebieten Deutschlands noch bis ins 18. Jh.), aber allmählich setzte sich das schriftliche Rechnen mit den indisch-arabischen Ziffern durch. Die Entscheidung fiel in den Handelskontoren und in den Schreib- und Rechenstuben der Kaufleute; dort trat am deutlichsten zutage, daß man mit diesen Ziffern zugleich rechnen und die Büchern führen konnte.

Ein ganz anderes Problem bestand darin, die schriftlichen Rechenverfahren selbst durchzubilden und ihnen einen genügend großen Grad an Beherrschbarkeit und Übersichtlichkeit zu geben. Am schwierigsten erwies sich natürlich die Division; es hat jahrhundertlang gedauert, bis sich unser heutiges Verfahren des Unterwärts-

dividierens durchsetzen konnte. Noch im 17. Jh. war die Bruchrechnung an Universitäten ein Stoffgebiet, das nur mit allergrößter Mühe gemeistert werden konnte.

Dezimalbrüche

Als Folge des Vorstoßes der Türken nach Mitteleuropa gelangten einige Andeutungen über die in den östlichen Ländern verwendeten Dezimalbrüche, die „türkischen Zahlen“, nach Mitteleuropa, wo sich unabhängig davon ebenfalls ähnliche Grundideen herausgebildet hatten, u. a. in der Wiener astronomischen Schule. Die endgültige Einführung der Dezimalbrüche verdankt man dem Niederländer Stevin, einem Ingenieur und vielseitigen Naturforscher, der in dem 1585 veröffentlichten kleinen Büchlein „De Thiende“ erklärte:

„Thiende ist eine Art der Rechenkunst, durch welche man alle unter den Menschen als notwendig anfallende Rechnungen mittels ganzer Zahlen ohne Brüche erledigt: sie wird gefunden aus der Zehnerreihe, bestehend in den Ziffern, durch die irgendeine Zahl geschrieben wird.

Erläuterung.

Es sei eine Zahl gegeben Eintausendeinhundertundelf, in Ziffern so geschrieben: 1111, in welcher sich zeigt, daß jede 1 der zehnte Teil der nächst vorangehenden ist. Ebenso ist auch in 2378 jede Einheit der 8 der zehnte Teil von jeder Einheit der 7, und ebenso bei allen anderen. Aber da es üblich ist, daß Dinge, von denen man sprechen will, Namen haben, und da diese Rechenweise aus der Beachtung einer solchen Thienden-Reihe gefunden ist, ja wesentlich in der Thienden-Reihe besteht, wie es sich im folgenden klar zeigen wird, so nennen wir ihre Behandlung treffend und kurz die Thiende. Durch diese werden alle uns vorkommenden Rechnungen besonders leicht durch ganze Zahlen ohne Brüche ausgeführt, wie nachher klar bewiesen werden wird.“ ([L 6.17], S. 13)

Stevin führte eine spezielle Symbolik ein: Für den Dezimalbruch 6,3759 beispielsweise würde er

6 ⑥ 3 ① 7 ② 5 ③ 9 ④

geschrieben haben. Die Bedeutung der eingeringelten Zahlen ist klar: ① bedeutet den zehnten Teil der ganzen Zahl, usw.

In den weiteren Teilen von „De Thiende“ werden die Grundrechenarten gelehrt, werden Anwendungen auf Landmessung, Tuchmessung, Weinmessung und auf Astronomie vorgenommen, werden Anweisungen für Münzmeister und Kaufleute gegeben. Schließlich fordert Stevin, logische Folge seiner Dezimalbruchrechnung, auch Maße und Gewichte dezimal zu unterteilen, eine Forderung, die damals freilich noch nicht durchgesetzt werden konnte.

Logarithmisches Rechnen

Die Geschichte des Logarithmierens beginnt mit dem Vergleich zwischen der arithmetischen und der geometrischen Reihe, wobei die arithmetische Reihe sozusagen die Logarithmen, die geometrische die Numeri darstellt.

Eine erste derartige Andeutung findet sich bereits bei Archimedes. In der „Sandrechnung“ faßt er eine Regel in Worte, die wir mit der Formel $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ wieder-

geben würden. Am Ende des 15. Jh. parallelisierten Chuquet in Frankreich und Luca Pacioli die Folgen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots, \\ 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & \dots, \end{array}$$

und man formulierte das Gesetz, daß sich als Produkt zweier Glieder der unteren Folge wieder ein Glied dieser Folge ergibt, das zugeordnet ist der Summe der zugeordneten Glieder der oberen Folge. Am weitesten schritt auf diesem Wege der lutherische Prediger Stifel voran, und zwar in seiner berühmten „Arithmetica integra“ (Gesamte Arithmetik) von 1544. Stifel erfaßte sehr deutlich die im Folgenvergleich liegenden Möglichkeiten, daß nämlich durch Rückgriff auf den arithmetische Folge die jeweils einfachere Rechenart eingesetzt werden kann. So schreibt Stifel:

„Man könnte ein ganz neues Buch über die wunderbaren Eigenschaften dieser Zahlen schreiben, aber ich muß mich an dieser Stelle bescheiden und mit geschlossenen Augen daran vorübergehen.“

Und weiter heißt es sogar:

„Addition in der arithmetischen Reihe entspricht der Multiplikation in der geometrischen, ebenso Subtraktion in jener der Division in dieser. Die einfache Multiplikation bei den arithmetischen Reihen wird zur Multiplikation in sich (d. h. Potenzierung, Wg) bei der geometrischen Reihe. Die Division in der arithmetischen Reihe ist dem Wurzelausziehen in der geometrischen Reihe zugeordnet, wie die Halbierung dem Quadratwurzelausziehen.“ (Zit. [LA 33], 2, S. 171)

Dem Prinzip nach hat Stifel offensichtlich das Wesen des logarithmischen Rechnens erfaßt. Eine andere Frage aber war es, die beiden Folgen mit genügend nahe stehenden Gliedern zu berechnen, so daß wirklich brauchbares mathematisches Handwerkszeug entstehen konnte. Hier leistete der Schweizer Urmacher und Feinmechaniker Bürgi Pionierarbeit. Umfangreiche Rechnungen im Zusammenhang mit dem Bau astronomischer Geräte ließen ihn nach Verbesserungen der Prosthaphairesis suchen. Bei der Lektüre eines Rechenbuches von Jacob stieß er auf die von diesem wiedergegebenen Äußerungen Stifels. Zu Anfang des 17. Jh. begann Bürgi, der im Kontakt mit Kepler stand, die Berechnung umfangreicher Tafeln; eine von $2''$ zu $2''$ fortschreitende Sinustafel ging verloren. Eine ausführliche Tafel des Vergleiches arithmetischer und geometrischer Folgen erschien 1620 unter dem Titel „Arithmetische und geometrische Progreß-Tabulen“. Natürlich fehlen bei Bürgi alle unsere heutigen Fachausdrücke wie Logarithmus, Basis, Exponent, Numerus. Er nennt die Glieder x_n der arithmetischen Folge „rote Zahlen“, die Glieder y_n der geometrischen Folge „schwarze Zahlen“, weil sie rot bzw. schwarz gedruckt wurden. Die roten Zahlen sind also die Logarithmen, die schwarzen danach die Numeri. Wenn man die Bürgischen Tafeln nachrechnet, so erkennt man, daß Bürgi — sozusagen instinktiv — als Basis seines Logarithmensystems eine Zahl verwendet hat, die nahe bei e liegt. Trotz des dringlichen Zuredens von Kepler — der Erfinder (also Bürgi) habe in zu großer Bedächtigkeit und Zurückhaltung das Kind seines Geistes im Stich gelassen, statt es für die Öffentlichkeit zu erziehen — konnte sich Bürgi erst spät zur Publikation entschließen, zu spät. Die „Progreßtabulen“ erschienen 1620 in Prag; durch die

Folgen des Dreißigjährigen Krieges wurde fast die gesamte Auflage zerstört. Das Buch erzielte keine Wirkung.

Darüber hinaus war ihm ein anderer mit der Veröffentlichung von Logarithmentafeln zuvorgekommen, der schottische Edelmann Napier (oder Neper). Ausgehend von einem speziellen mechanischen Problem gelangte auch Neper zur Aufstellung von Logarithmentafeln. Neper veröffentlichte seine Tafeln von 1614 an in Edinburgh unter dem Titel „*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*“. Hier tritt zum erstenmal das aus dem Griechischen abgeleitete Fachwort „Logarithmus“ auf, das etwa „Verhältniszahl“, „Rechnungszahl“ bedeutet. Das Buch heißt also etwa „Beschreibung einer Tafel wunderbarer Rechnungszahlen“. Diese Tafel zielte direkt auf eine Vereinfachung der trigonometrischen Rechnungen und enthält die siebenstelligen Logarithmen der Winkelfunktionen Sinus und Kosinus sowie deren Differenzen, also den Logarithmus des Tangens von Winkeln, die von Minute zu Minute fortschreiten.

Die Neperschen Logarithmen erregten große Bewunderung. Logarithmische Tafeln verbreiteten sich relativ rasch als Rechenhilfsmittel, zumal sich auch Kepler für logarithmisches Rechnen einsetzte und seinerseits, zusammen mit seinem Schwiegersohn Bartsch, einem Astronomen, eigene Tafeln berechnete. Der Übergang zu den dekadischen Logarithmen schließlich wurde durch den Engländer Briggs vollzogen, dem Inhaber eines naturwissenschaftlichen Lehrstuhles an dem den praktischen Bedürfnissen verpflichteten Gresham-College in London. In gemeinsamen Diskussionen einigten sich Neper und Briggs auf die Annahme $\log 10 = 1$.

Briggs machte sich mit Feuereifer an die Berechnung der Tafeln; von 1617 an erschienen in Teilen 14stellige Logarithmen, die nach und nach von anderen Autoren ergänzt, verbessert und praktischer gestaltet wurden. Um die Mitte des 17. Jh. hatten die Logarithmen die prosthaphairetische Methode verdrängt.

Die Berechnungsverfahren von Neper, Briggs und anderen waren äußerst mühsam und beruhten auf komplizierten, geschickt gehandhabten Interpolationen. Eine neue, bequemere beherrschbare Methode der Logarithmenberechnung konnte erst durch Verwendung unendlicher Reihen gefunden werden. Die Definition des Logarithmus als Potenzexponent kam erst im 18. Jh. auf. Die Auffassung, daß das Logarithmieren neben dem Radizieren eine zweite Umkehrung des Potenzierens darstellt, wurde schließlich erst von Euler herausgearbeitet.

Algebraisierung

Hatte sich auf der Grundlage eines starken gesellschaftlichen Bedürfnisses die Berufsgruppe der Rechenmeister herausgebildet, so kam es nach und nach zu einer algorithmischen Verarbeitung und zur theoretischen Durchdringung sowohl der alten, aus der Antike übernommenen wie auch der neuen Rechenverfahren und mathematischen Schriften.

Die Coß

Diese Zwischenstufe zwischen bloßer Rechenkunst und vollzogener Algebraisierung, bei der bereits erste mathematische Symbole und Kunstwörter verwendet wurden, bezeichnete man als „Coß“; die Verfasser entsprechender mathematischer Schriften als Cossisten“. Das Wort „Coß“ leitet sich her von der Bezeichnung für „Ding“, „Sache“ für die gesuchte Größe, die aus Gleichungen zu bestimmen war und die anfangs verbal, eben als „Ding“ notiert wurde. Lateinisch hieß dies *res*, italienisch *cosa*, deutsch Coß.

Natürlich war die Grenze zwischen den Rechenmeistern und den Cossisten fließend. Anfangs erfanden die Autoren Abkürzungen nach eigenem Geschmack. Nach und nach aber bürgerten sich verbindlich werdende Bezeichnungen ein, beginnend mit denen für die ersten Potenzen der Variablen und für die Operationen der Addition und Subtraktion. Die Coß erlebte selbst eine innere und äußerlich an ihren Symbolen sichtbar werdende Entwicklung, die in die Algebraisierung einmünden sollte. Geographisch gesehen war sie, wie die Entwicklung des kaufmännischen Rechnens auch, von Oberitalien ausgegangen, wurde dann durch deutsche, niederländische, englische und französische Cossisten weitergeführt und gelangte mit dem Auftreten von Vieta zu einem vorläufigen Abschluß (Anm. 6.5). Im Jahre 1494 erschien die „Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni e Proportionalità“ des Italieners Pacioli, eine für lange Zeit mustergültige Zusammenfassung (*summa*) des damaligen Wissens. In der „Summa“ treten im ersten Teil die Zeichen *p* (von italienisch *piu*) für plus und *m* (von *meno*) für minus sowie *R* für die Quadratwurzel auf. In gewissem Sinne wird dort sogar mit positiven und negativen Zahlen gerechnet; die Rechenregeln für die vier Grundrechenarten werden dort in Form kleiner Merkverse – natürlich ohne tiefere Begründung – gegeben.

Im Deutschen Reich erschien 1525 eine bedeutende „Coß“ aus der Feder von Rudolff, die von Stifel 1553/54 verbessert und erweitert wurde, nachdem dieser selbst 1544 seine hervorragende zusammenfassende „Arithmetica integra“ veröffentlicht hatte. Stifel faßte negative Zahlen ausdrücklich als Zahlen kleiner als Null auf, studierte im Anschluß an Euklid allgemeine Irrationalitäten des Typs $\sqrt[n]{a + \sqrt[n]{b}}$, kannte das arithmetische Dreieck, das unter dem Namen Pascalsches Dreieck in die Mathematik auftritt, verwendete im Anschluß an Widmann die Zeichen + und –, prägte die Bezeichnung Biomialkoeffizienten und kannte deren additives Bildungsgesetz.

Diese „Arithmetica integra“ machte Schule. Andere bedeutende cossische Schriften der Folgezeit sind stark davon inspiriert, so der „Whetstone of Witte“ (Wetzstein des Verstandes, 1557) von Recorde, eines Arztes und zeitlang Direktor der Königlichen Gruben und Münze, der „Arithmetisch-cubbiocossische Lustgarten“ von Faulhaber und andere mehr, auch in Frankreich und den Niederlanden.

Auflösung von Gleichungen dritten und vierten Grades

Noch Pacioli hatte in seiner „Summa“ zwar für die lineare und die quadratische Gleichung rechnerische Auflösungsverfahren dargelegt, doch hatte er die (algebraische) Auflösung der kubischen Gleichung für unmöglich erklärt. Diese fand indes ein Professor namens Scipione del Ferro an der Universität von Bologna schon um das Jahr 1500, also nur wenige Jahre nach Paciolis pessimistischer Äußerung. Doch publizierte del Ferro nicht darüber. Davon ganz unabhängig entdeckte 1535 der aus sehr armen Verhältnissen stammende Rechenmeister Tartaglia die Auflösung der kubischen Gleichung, der Typen $x^3 = px + q$ und $x^3 + q = px$ ($p, q > 0$).

Zur damaligen Zeit war es üblich, öffentliche Rechenwettbewerbe abzuhalten, wobei sich die Konkurrenten gegenseitig Aufgaben in der Hoffnung stellten, der andere werde daran scheitern. Als Tartaglia die ihm vorgelegten kubischen Gleichungen überraschenderweise doch auflösen konnte, erwarb er sich beträchtliches Ansehen und Ruhm, der bis zu dem Professor für Mathematik und Medizin in Venedig, Cardano, gelangte, der seinerseits lange vergeblich nach der Lösung der kubischen Gleichung gesucht hatte. Cardano bat Tartaglia immer dringlicher um Übermittlung der Lösung, die Tartaglia indes anfangs nicht geben wollte und als eine Art Zunftgeheimnis der Rechenmeister betrachtete, das den Gelehrten an Universitäten, nicht zustehe. Erst 1539 übermittelte Tartaglia an Cardano das Lösungsverfahren unter der Bedingung, daß er dies als Geheimnis bewahren werde. Doch Cardano brach den feierlichen Eid und publizierte es 1545 in seiner Schrift „Ars magna ...“ (Die Kunst oder über die algebraischen Regeln). Die natürliche Folge war ein mit großer Erbitterung geführter, ganz Italien bewegender Streit zwischen Tartaglia und den Anhängern von Cardano, in dem sich zugleich auch die Konfrontation zwischen der neuen Wissenschaft und der traditionellen Universitätsgelehrsamkeit widerspiegelte.

Trotz des Plagiates von Cardano an Tartaglia war die „Ars magna“ ein bedeutendes Buch. Es enthält unter anderem die von Cardanos Schüler Ferrari gefundene Auflösung der Gleichung vierten Grades. In der „Ars magna“ werden kubische Gleichungen auf Normalform gebracht, und zwar deutlich in dem Bestreben, Fallunterscheidungen zu vermeiden. Lösungen von Gleichungen dritten und vierten Grades werden daraufhin untersucht, ob sie reell ausfallen. Und schließlich hat sich Cardano in einem nachgelassenen Werk mit dem Auftreten imaginärer Größen beim Lösen kubischer Gleichungen beschäftigt.

Der stark algebraisch orientierten mathematischen Schule Oberitaliens gehörte auch Bombelli an, ein in Bologna wirkender Ingenieur, der in seinem Buch „L'Algebra“ (geschrieben um 1560, Druck 1572) an Ausdrücken der Form $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ in impliziter Form die Multiplikationsgesetze für komplexe Zahlen auseinandersetzt und wesentliche Einsichten beim casus irreducibilis erzielte. Auch das Wort Algebra (Anm. 6.6) hatte sich durchgesetzt und bezeichnete eine neben der Geometrie und dem Rechnen selbständig gewordene mathematische Disziplin, etwa im Sinne des Rechnens mit mathematischen Symbolen und Zeichen, die für konkrete Zahlen stehen, insbesondere, wenn Buchstaben dafür verwendet werden. Bombelli war der letzte bedeutende italienische Algebraiker dieser Periode. Durch die Verlagerung der

ökonomischen Schwerpunkte, durch beginnende Refeudalisierung und reaktionären Klerikalismus mußte Italien im 17. Jh. seine führende Stellung auf wissenschaftlichem, darunter mathematischem Gebiet abgeben. Die Entwicklung der Algebra wurde in zunehmendem Maße von Autoren in Deutschland, den Niederlanden, in England und Frankreich bestimmt.

Vieta

Hatte Cardano in der „Ars magna“ seine Entdeckung mitgeteilt, daß eine Gleichung dritten Grades drei Wurzeln besitzen kann, so hatte der Niederländer Girard 1626 — ohne Beweis — den Fundamentalsatz der Algebra ausgesprochen, daß jede Gleichung n -ten Grades n Wurzeln besitze.

Der bedeutendste Algebraiker jener Periode war jedoch zweifellos der Franzose Viète (oder latinisiert: Vieta); er ist geradezu zum Symbol der sich konstituierenden Algebra geworden. Daneben hat er Bedeutendes in Geometrie und Trigonometrie geleistet.

Natürlich handelt es sich bei Vieta um eine Algebra im Frühzustand, die sich in Terminologie und Bezeichnungsweise noch erheblich von moderner Algebra unterscheidet.

Vieta war sich durchaus des Nutzens der ausgedehnten Verwendung von Symbolen bewußt. So pries er seine neue Kunst in einer Schrift mit dem Titel „In artem analyticam Isagoge“ (etwa: Einführung in die algebraische Kunst) im Jahre 1591 mit den Worten an:

„So ist auch die Kunst, die ich nun vortrage, eine neue oder doch auch wieder eine so alte und von Barbaren so verunstaltete, daß ich es für notwendig hielt, alle ihre Scheinbeweise zu beseitigen, damit auch nicht die geringste Unreinheit an ihr zurückbleibe und damit sie nicht nach dem alten Moder rieche, und ihr eine vollkommen neue Form zu geben, sowie auch neue Bezeichnungen zu erfinden und einzuführen. Da man allerdings bisher an diese zu wenig gewöhnt ist, wird es kaum ausbleiben, daß viele schon von vornherein abgeschreckt werden und Anstoß nehmen. Zwar stimmten alle Mathematiker darin überein, daß in ihrer Algebra oder Almucabala, die sie priesen und eine große Kunst nannten, unvergleichliches Gold verborgen sei, aber gefunden haben sie es nicht. So gelobten sie Hekatomben und rüsteten zu Opfern für Apollo und die Musen für den Fall, daß einer auch nur das eine oder andere der Probleme lösen würde, von deren Art ich zehn oder zwanzig ohne weiteres darlege, da es meine Kunst erlaubt, die Lösungen aller mathematischen Probleme mit größter Sicherheit zu finden.“ (L 6.18, S. 34/35)

In der Tat war der durch Vieta erzielte Fortschritt beträchtlich, auch wenn er nicht jedes mathematische Problem lösen kann, wie er im Überschwang seiner Begeisterung behauptete.

Vieta schuf eine einheitliche Bezeichnungsweise. Durchgehend bezeichnete er die Variablen (Unbekannten) durch die Vokale A, E, I, O, U einschließlich Y und die bekannten Größen durch die Konstanten $B, C, D, \dots$. Einheitlich verwendete er $+$ und $-$ als Operationssymbole, er gebrauchte den Bruchstrich und verwendete das Wörtchen „in“ als feststehendes Kurzzeichen der Multiplikation. Doch benutzte er noch nicht das von Recorde eingeführte Gleichheitszeichen, sondern drückte die

Gleichheit zweier Terme verbal durch „aequibitur“ oder „aequale“ aus. Zusammengehörige Terme schrieb Vieta untereinander und verband sie mittels geschweiffter Klammern. Beispielsweise würde Vieta den Ausdruck

$$\frac{BA}{D} + \frac{BA - BH}{F} = B$$

in der Form

$$\frac{B \text{ in } A}{D} + \left\{ \frac{B \text{ in } A}{F} \right\} \text{aequale } B$$

geschrieben haben ([L 6.18], S. 10). Auf dieser neuen einheitlichen Grundlage hat Vieta eine Menge wesentlicher Ergebnisse am mathematischen Detail erzielen können: interessante Gleichungslösungen, unter anderem beim *casus irreducibilis*, und die Einsicht in den Aufbau der Koeffizienten aus den Lösungen.

In der „*Isagoge*“ und einer anderen bedeutenden, aber erst aus dem Nachlaß herausgegebenen Schrift „*Ad logicam speciosam notae priores*“ (Erste Kennzeichen einer prachtvollen Rechenkunst, 1631) hat Vieta auch die algebraische Umformungstechnik weit entwickelt: Auflösen, Abspalten von Faktoren, Verwandlung unbestimmter Ausdrücke in vollständige Quadrate, Transformationen von Gleichungen durch neu eingeführte Variable, Rationalmachen der Nenner und anderes mehr werden virtuos gehandhabt.

Vietas Leistungen wurden jedoch von den Zeitgenossen nicht recht gewürdigt. Wie er vorausgesehen hatte, wurden sie von der Vielzahl der neuen Kunstwörter und überhaupt von dem hohen Abstraktions- und Symbolisierungsgrad abgestoßen. So kam es, daß Vietas Bedeutung erst nach seinem Tode erkannt wurde, als die Entwicklung der Algebra, ohne direkt auf ihn aufzubauen, in der von ihm gewiesenen Richtung weitergegangen war.

Vorlesung 7

Wissenschaftliche Revolution: Analytische Geometrie. Rechenhilfsmittel

DISCOURS DE LA METHODE

Pour bien conduire la raison, & chercher
la verité dans les sciences.

PLUS

LA DIOPTRIQUE.

LES METEORES.

ET

LA GEOMETRIE.

Qui sont des essais de cete METHODE.



A L'EYDE

De l'Imprimerie de IAN MAIRE.

MDCCXXXVII.

Avec Privilège.

Titelblatt R. Descartes: Discours de la méthode, 1637

Zur gesellschaftlichen Stellung der Mathematik und der Naturwissenschaften

Im Zeitraum von der Mitte des 16. Jh. bis zum Ende des 18. Jh. herrschte die Epoche des Verfalls des Feudalismus und des zunächst allmählichen, dann beschleunigten Übergangs vom Feudalismus zum Kapitalismus. Am Beginn standen die ersten erfolgreichen bürgerlichen Revolutionen in den Niederlanden und in England; die Epoche endete mit der großen bürgerlichen Revolution 1789 in Frankreich. In diesen eineinhalb Jahrhunderten von ungefähr 1630/40 bis 1780/90 erlebte Europa eine bewegte kriegerische, politische Geschichte. Der Dreißigjährige Krieg warf das Heilige Römische Reich Deutscher Nation in seiner ökonomischen und politischen Entwicklung weit zurück. Die traditionellen Kolonialmächte Portugal und Spanien wurden in vielen Teilen der Welt von den bürgerlichen Staaten England und Niederlande verdrängt, die sich ihrerseits in einem lang dauernden Kampf mit dem stärksten feudalabsolutistischen Staat, mit Frankreich, befanden, der unter dem „Sonnenkönig“ Ludwig XIV. zur kontinentaleuropäischen Hegemoniemacht aufgestiegen war. Und während Preußen seine Positionen ausbauen konnte, wurde Rußland seit der Regierungszeit des Zaren Peter I. zur Großmacht.

Der Charakter der Übergangsepoche vom Feudalismus zum Kapitalismus zeigt sich besonders deutlich an der Entstehung, am Aufschwung und an der Weiterentwicklung des Manufakturkapitalismus, an neuen, höheren Formen der Arbeitsteilung in den Manufakturen und an der Wirtschaftspolitik jener Epoche, des Merkantilismus. Das junge Bürgertum hatte in den Niederlanden und England einen echten Anteil auch politischer Macht erobern können; in den absolutistischen Staaten Kontinentaleuropas führte das Mißverhältnis von ökonomischer Stärke und gleichzeitiger politischer Diffamierung auf revolutionäre Positionen. Die Aufklärung, bestimmende Ideologie der aufstrebenden Bourgeoisie im Kampf gegen den Feudalismus, besaß auch eine starke mathematisch-naturwissenschaftliche Komponente.

Grundeinschätzung der Mathematik dieser Periode

Die reifer und stärker werdende Bourgeoisie wandte in ihrem Streben nach ökonomischer und politischer Emanzipation vom historisch überlebten feudalistischen System ihre Aufmerksamkeit auch den Naturwissenschaften und der Mathematik zu, und das mit zunehmender Emanzipation in immer stärkerem Maße: Im 15./16. Jh. waren die Fortschritte der Mathematik als Ergebnis direkter gesellschaftlicher Anforderungen zustande gekommen. Nun aber ergingen die Forderungen der Gesellschaft an die Mathematik in zunehmendem Maße indirekt, durch Vermittlung jener Probleme, die sich bei der Weiterentwicklung der materiellen Produktivkräfte und der Produktionsinstrumente einerseits und andererseits durch die Fortentwicklung der Naturwissenschaften ergaben. Es ist dabei kein Widerspruch zu dieser Einschätzung, sondern geradezu die dialektische Ergänzung, daß zugleich auch aus innermathematischen Entwicklungsgängen starke Anstöße für die Entwicklung ent-

sprangen, getragen von Fragestellungen, die die innere Dynamik der Mathematik als die einer bereits hochentwickelten und weitreichenden selbständigen Wissenschaft von sich aus aufwarf.

In der Mathematik konnten während des 17. und 18. Jh. drei wesentlich neue Errungenschaften erzielt werden, erstens die analytische Geometrie, zweitens die Infinitesimalmathematik (Differential- und Integralrechnung, Potenzreihen) und drittens schließlich die Herausbildung eines Fundamentalbegriffes der Mathematik, des Funktionsbegriffes. Es handelt sich im Grunde um den entscheidenden Übergang von einer Mathematik statischer, konstanter Größen zu einer Mathematik veränderlicher Größen: Die Mathematik vollzog im 17. und 18. Jh. mit dem Übergang zur Mathematik der Variablen eine wissenschaftliche Revolution, gleich revolutionär in den Zielstellungen wie in den Methoden und in der Tragfähigkeit und Reichweite der neuen Verfahren.

Die Entwicklung der materiellen Produktivkräfte als Reizmittel für die Entwicklung der Mathematik

Die Mathematik variabler Größen stellt die mathematische Widerspiegelung eines Grundproblems dar, des Bewegungsproblems: Es ging um die gedankliche und rechnerische Bewältigung der Bewegungsabläufe, um die Auffindung und Durchbildung eines Kalküls zur mathematischen Beherrschung von Bewegungsproblemen. Hier lag die Aufgabe von drei bis vier Mathematikergenerationen, von Descartes und Fermat bis Leibniz und Newton, d. h. von der Mitte des 17. Jh. bis zum ersten Drittel des 18. Jh.

Das Wort „Bewegung“ umschließt viel, sowohl zentrale naturwissenschaftliche Fragestellungen — freier Fall, Wurf, Planetenbewegung — als auch Bewegungsprobleme der praktischen Mechanik jener Zeit und damit die Entwicklung der Produktionsinstrumente. Aus beiden Sphären ergingen entscheidende Impulse an die Herausbildung einer Mathematik der Variablen.

Die Bindung an Fragestellungen der Mechanik insbesondere war im Bewußtsein fast aller Mathematiker des 17. und 18. Jh. ausgeprägt und läßt sich deutlich nachweisen. Gerade die bedeutendsten Mathematiker wandten sich direkt der mathematischen Behandlung praktisch-mechanischer Probleme zu.

Die Konstruktion aller möglichen Mechanismen bewegte immer wieder erfinderische Geister: Windmühlen, Pumpwerke, Papiermühlen, Seilzugaggregate, Treträder, Kräne, Maschinen zur Wasserhaltung und zur Förderung in Bergwerken, Flugmaschinen, Unterseeboote, Wagen, die ohne Pferde fahren, Schleifmaschinen, Gesteinsbohrmaschinen beim Tunnelbau, Schiffshebwerke, Schaufelräder zum Schiffsantrieb und die verschiedenartigsten Maschinerien für die Manufakturen wurden entworfen, ausprobiert, verbessert, in Gang gesetzt. Dazu trat die Jagd nach dem Perpetuum mobile, einer unaufhörlich und damit unerschöpflich Kraft spendenden Vorrichtung, die das physikalische Gegenstück zum „Stein der Weisen“ in der Chemie darstellte.

Es gab in den ökonomisch fortgeschrittenen Ländern Europas eine schon recht starke Gruppe von „Mechanici“, von Wasserbau- und Festungsbaumeistern, von Schiffsbauern, Bergwerk- und Bauingenieuren, die durchaus auch theoretische Interessen und Kenntnisse besaßen. Vielfältig traten in ihrem Wirkungsbereich Probleme auf, von denen man wußte oder ahnte, daß sie einer mathematisch-physikalischen Behandlung bedurften. Ganz typisch hierfür ist die sich aufdrängende Untersuchung der Kraftverhältnisse an beweglichen Teilen von Maschinerien, Wasserrädern (Abb. 7.1) usw. Oft genug konnten nur auf empirischem Wege näherungsweise

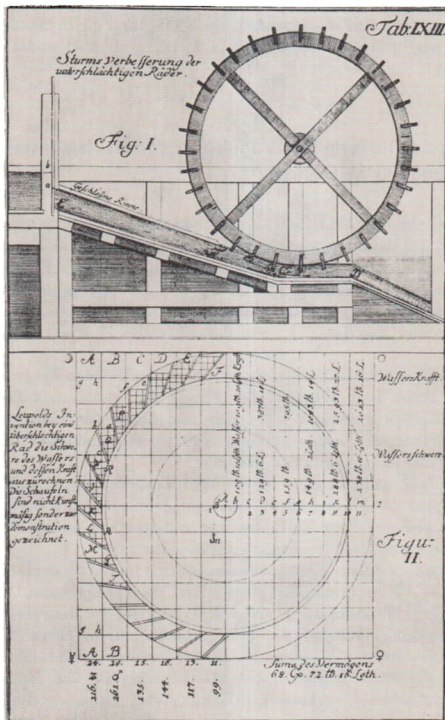


Abb. 7.1. Berechnung der von einem unterschlächtigen Wasserrad geleisteten Arbeit (Anfang 18. Jh.)

Bestimmungen vorgenommen werden: Teils war die Mathematik noch nicht weit genug entwickelt, teils war sie den in der Praxis Stehenden noch nicht bekannt. Jedenfalls drängte die Entwicklung der materiellen Produktivkräfte und insbesondere die der Produktionsinstrumente deutlich zu einer Weiterentwicklung des theoretisch-mechanischen Denkens und damit auch der mathematischen Methoden. Marx hat diesen Zusammenhang so ausgedrückt:

„Sehr wichtig wurde die sporadische Anwendung der Maschinerie im 17. Jahrhundert, weil sie den großen Mathematikern jener Zeit praktische Anhaltspunkte und Reizmittel zur Schöpfung der modernen Mechanik darbot.“ ([L 7.12], S. 369)

Entwicklung der Naturwissenschaften

Im Jahre 1604 hatte Galilei die Gesetze der Fallbewegung aufgefunden. Fünf Jahre später, 1609, veröffentlichte Kepler in seiner „Astronomia nova“ (Neue Astronomie) die ersten beiden, später nach ihm benannten Gesetze der Planetenbewegung. 1638 publizierte Galilei die „Discorsi ...“, die erste Darstellung einer Wissenschaft von der Dynamik, d. h. der Bewegungslehre.

Der Niederländer Huygens beschäftigte sich mit Problemen des Stoßes, und ihm gelang 1656 die Konstruktion der Pendeluhr.

Fallbewegung, Planetenbewegung, Pendelschwingungen und Stoßvorgänge stellten um die Mitte des 17. Jh. Zentralprobleme der Mechanik dar. Die Erkenntnis und Durchbildung der gemeinsamen theoretischen Grundlage aller dieser zunächst als wesensverschieden aufgefaßten Teilfragen der Dynamik verdankt man Newton. Im Jahre 1687 erschienen die „Philosophiae naturalis principia mathematica“ (Mathematische Prinzipien der Naturphilosophie, d. h. nach damaligem Wortgebrauch: der Naturwissenschaft), die einen herausragenden Markstein in der Entwicklungsgeschichte der Naturwissenschaften darstellt. Hier wurde der Aufbau einer wissenschaftlichen Mechanik, sogar auf axiomatisierter Grundlage, vollendet. Die Newtonsche Mechanik bildete dann für mehr als zwei Jahrhunderte die Grundlage der gesamten Physik und großer Teile der Naturwissenschaften.

Zwischen 1600 und 1609 hatten holländische Brillenmacher mehr oder weniger zufällig das Fernrohr entdeckt. Galilei erfand das Fernrohr nach und erkannte, daß damit ein vorzügliches wissenschaftliches Instrument gefunden war. Als erster richtete Galilei das Fernrohr auf den Himmel und machte auf Anhieb sensationelle Entdeckungen, die zur Überwindung des alten mittelalterlichen Weltbildes beitrugen. Er fand, daß der Mond Berge und Täler besitzt, eine Entdeckung, die im schärfsten Widerspruch zur aristotelischen Denkweise stand. Die Sonne mußte nach Aristoteles makellos sein — und Galilei sah Sonnenflecken. Die Bewegungen der Himmelskörper mußten auf vollkommenen, d. h. kreisförmigen Bahnen vor sich gehen — und Kepler erkannte, daß die Planetenbahnen ellipsenförmig sind. Galilei entdeckte auch, daß der Planet Jupiter Monde besitzt, und sah darin eine wesentliche Stütze für das copernicanische Weltbild: Jupiter und seine Monde bilden ein kleines Sonnensystem in dem Sinne für sich, daß Himmelskörper um einen Mittelpunkt kreisen, der nicht die Erde ist. Die Ergebnisse der Naturwissenschaften

standen im deutlichen Gegensatz zur aristotelischen Philosophie und zur christlichen Dogmatik; sie wirkten revolutionär.

Im Jahre 1619 erschien ein weiteres Hauptwerk von Kepler, „*Harmonice mundi*“ (Weltharmonie), in dem das dritte Gesetz der Planetenbewegung formuliert wurde. 1655 erkannte Huygens die Struktur des Saturnringes. 1675 wurde die berühmte Sternwarte Greenwich gegründet, die den Nullmeridian durch ihren eigenen Standort festlegte. Sie erhielt vom britischen König bei der Gründung einen ganz konkreten Auftrag im Interesse der Hochseeschifffahrt, nämlich nach sicheren Methoden zur Bestimmung der geographischen Länge zu suchen. (Die Bestimmung der geographischen Breite dagegen ist sehr einfach durch Messung der Sonnenhöhe.) Doch blieb dieses Problem, das auf die Konstruktion von Uhren einen großen Einfluß ausübte, noch bis zur Mitte des 18. Jh. ungelöst. Erst der englische Uhrmacher Harrison konnte verlässliche Schiffschronometer herstellen.

Im Jahre 1676 wies der Däne Römer die Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit durch Beobachtungen der Jupitermonde nach. Es folgten weitere astronomische Entdeckungen, so die 1705 von Halley geleistete Bahnberechnung des nach ihm benannten Kometen sowie die Entdeckung der Aberration des Lichtes durch Bradley.

Im 17. und 18. Jh. stellte die Mechanik die am weitesten entwickelte naturwissenschaftliche Disziplin dar. Optik und Wärmelehre hatten trotz vieler Einzelerfolge eine tragfähige theoretische Grundlage noch nicht erlangen können; elektrische Erscheinungen waren eben erst entdeckt worden.

Von den anderen naturwissenschaftlichen Disziplinen wie Chemie, Biologie, Geographie gingen zwar weniger direkte Anforderungen an die Mathematik aus als von Mechanik und Astronomie. Aber auch die Entwicklung jener anderen Zweige der Naturwissenschaft, die zu jener Zeit als eine Ganzheit verstanden wurde, gehört zum gesellschaftlichen Hintergrund der Fortschritte der Mathematik.

Ein neuer Erdteil, Amerika, wurde erschlossen, und Australien wurde aufgefunden. Hochseeschifffahrt und Kolonialisierung stellten hohe Anforderungen an die Kartographie. 1618 entdeckte der englische Arzt Harvey den Blutkreislauf, 1620 der Niederländer Snellius das Brechungsgesetz. Um 1640 konstruierte der Magdeburger Bürgermeister Guericke eine wirkungsvolle Luftpumpe und konnte damit in der Folgezeit, wie schon der Galilei-Schüler Torricelli mit seinem Quecksilberexperiment, ein weiteres altes Dogma widerlegen, die Behauptung nämlich, daß es kein Vakuum gebe, daß in der Natur ein „*horror vacui*“ (Abscheu vor dem leeren Raum) herrsche. 1646 wies Pascal bei Auswertung einer spektakulären Bergbesteigung nach, daß der Luftdruck mit der Höhe abnimmt, und bald darauf, 1654, entdeckte Guericke die Veränderlichkeit des Luftdruckes mit dem Wetter.

Von hier aus führt eine direkte Linie zur wissenschaftlichen Wetterkunde. Eine andere Entwicklungsrichtung knüpfte ebenfalls an jene damals sensationellen Experimente an: Über eine Kette technischer Erfindungen führte hier der Weg vom Schießpulvermotor von Huygens über die atmosphärischen Maschinen von Papin, Savery und Newcomen bis zur Dampfmaschine von Watt.

Mit Hilfe eines weiteren neugefundenen wissenschaftlichen Instrumentes, des Mikroskopes, entdeckte man die roten Blutkörperchen und die Aufgüßtierchen; die Biologie der Kleinlebewesen nahm ihren Anfang. Linné systematisierte die Pflanzen-

und Tierwelt. Die Chemie löste sich aus Medizin, Botanik und Physik heraus und formierte sich zu einer naturwissenschaftlichen Arbeitsrichtung mit selbständigen Zielen.

Die Wissenschaftliche Revolution

Naturwissenschaften und die Mathematik traten während des 17. und der ersten Hälfte des 18. Jh. im direkten und indirekten Zusammenhang mit der gesellschaftlichen Entwicklung während der Übergangsepoche vom Feudalismus zum Kapitalismus in eine Periode rascher Entwicklung ein. Auf einigen Gebieten — Mathematik, Mechanik — konnten nach Inhalt und Methode revolutionäre Umgestaltungen vollzogen werden. Auf anderen Gebieten wurden fundamentale neue Einsichten erzielt und neue Ziele abgesteckt, die indes erst in der darauffolgenden Periode, der Industriellen Revolution, erreicht werden konnten. Diese im ganzen gesehen durchgreifende Neuorientierung der Mathematik und der Naturwissenschaften während des 17. und der ersten Hälfte des 18. Jh. bezeichnet man in der Historiographie der Wissenschaften allgemein als „Wissenschaftliche Revolution“.

Die gesellschaftliche Stellung des Naturwissenschaftlers. Die Gründung von Akademien

Auch die neu erreichte gesellschaftliche Stellung des Naturwissenschaftlers gehört zu den Merkmalen der Wissenschaftlichen Revolution.

Giordano Bruno, ein Anhänger des Copernicus, wurde im Jahre 1600 in Rom auf dem Scheiterhaufen hingerichtet. Galilei starb im Gewahrsam der Inquisition. Descartes mußte emigrieren, um Verwicklungen mit kirchlichen Dogmatikern zu entgehen, aber Newton wurde geadelt und erhielt 1727 ein Staatsbegräbnis — eine überaus bemerkenswerte Wandlung in einem reichlichen Jahrhundert, innerhalb von vier Generationen. Diese unterschiedlichen Lebensschicksale spiegeln jedoch nicht lediglich den Ablauf der Zeit wider, sondern zugleich unterschiedliche Reifegrade im sich entwickelnden Frühkapitalismus und differenzierte gesellschaftliche Zustände; die englischen Gelehrten hatten daher ganz andere, erweiterte Wirkungsmöglichkeiten als ihre Vorläufer auf dem Kontinent.

Es wuchs die Anerkennung der gesellschaftlichen Nützlichkeit der von den Naturforschern erzielten Ergebnisse, zugleich aber auch das Selbstbewußtsein der Naturforscher, gepaart mit einer Erstarkung des materialistisch-philosophischen Denkens unter den Naturforschern. Galilei wagte 1613 den Ausspruch, daß die naturwissenschaftliche Wahrheit über den Buchstabentext der Bibel zu stellen sei. Der Naturforscher jener Zeit, der Anspruch auf diesen Titel haben wollte, studierte nun die Natur, wie er sie vorfand, nicht, wie sie auf Grund christlicher und scholastischer Dogmen sein sollte, er studierte sie im Vollgefühl der Nützlichkeit der Naturwissenschaften für den Menschen, nicht mehr, um Gottes Schöpfungsplan zu enthüllen.

Die Entwicklung des gesellschaftlichen Lebens und die Stärkung des allgemeinen

Interesses an den Naturwissenschaften brachten auch neue Organisationsformen der Wissenschaft hervor. Die Universitäten, im Feudalismus die eigentlichen wissenschaftlichen Zentren, traten jetzt immer mehr in ihrer Bedeutung zurück. Statt dessen begannen die *artefici*, die *virtuosi* und andere Praktiker, die an den Universitäten keine Heimstatt finden konnten, sich zu organisieren und zu gruppieren, um sich gemeinsam und systematisch der neuen Naturwissenschaft zu widmen, Ergebnisse auszutauschen und sich gegenseitig zu unterstützen. Die Anhänger der neuen Naturwissenschaft, im bewußten Gegensatz zum mittelalterlich-scholastischen Universitätsleben, traten nach und nach regelmäßig zusammen und gaben sich den Status wissenschaftlicher Gesellschaften, die in freilich mißverständener Anknüpfung an das antike Vorbild des öfteren als „Akademien“ bezeichnet wurden. Dies ist der gesellschaftliche Ausgangspunkt für das Entstehen der Akademien, die während des 17. und 18. Jh. die bestimmende Organisationsform der wissenschaftlichen Arbeit werden sollten (Anm. 7.1).

Eine der berühmtesten frühen italienischen wissenschaftlichen Gesellschaften ist die 1601 in Rom gegründete *Accademia dei Lincei*. Der Name bedeutet Akademie der Luchsäugigen, der Scharfsichtigen, ein Symbol des Kampfes zwischen Wissenschaft und Unwissenheit. Ausdrücklich waren Priester von der Mitgliedschaft ausgeschlossen. Galilei aber z. B. war dort Mitglied; er wurde auch zum geistigen Wegbereiter einer schließlich 1657 in Florenz unter dem Namen „*Accademia del Cimento*“ (Akademie der Experimente) gegründeten Gesellschaft, die jedoch durch Interventionen der Kirche bald aufgelöst wurde.

Die britische Akademie trägt noch heute den Namen „*Royal Society*“. Ihre Entstehung knüpfte an den britischen Staatsmann und Naturforscher Francis Bacon an, der in einem Buch unter dem Titel „*Nova Atlantis*“ einen Inselstaat schilderte, welcher von einer Vereinigung von Gelehrten zu einem glückvollen Leben geführt wird. Begeisterte Anhänger der neuen Wissenschaft und Bacons trafen sich seit 1644/45 ziemlich regelmäßig in London, im sog. Gresham College, das von dem wohlhabenden Manufakturwarenhändler Gresham mit dem Ziel gegründet worden war, Kaufleute und Seeleute auszubilden. Darum standen dort Naturwissenschaften Rechenkunst, Geometrie, Navigation und Astronomie in hohem Ansehen. Am Gresham College fanden die englischen Freunde der Experimentalwissenschaft zunächst eine bleibende Heimstatt, zumal einige von ihnen dort selbst Professoren waren. Dem aktiven Kern der Gruppe gehörten u. a. der Architekt Wren an, der die berühmte St.-Pauls-Kathedrale schuf, der einfallsreiche Experimentator Hooke, der vielseitige Naturforscher Boyle sowie die Mathematiker Viscount Brouncker und Wallis. Diese Initiativgruppe nannte sich „*Invisible (oder philosophical) College*“; sie wurde zur Vorstufe der *Royal Society*. Das „Unsichtbare Kollegium“ gab sich 1660 als private Vereinigung eine Art Statut und erhielt schließlich 1662 durch den englischen König ein Privileg, d. h. die Erlaubnis, nun auch offiziell und unter der Schirmherrschaft der englischen Krone sich den Naturwissenschaften widmen zu dürfen.

Ähnlich verlief die Gründung einer Akademie in Deutschland. Eine Gruppe von Ärzten schloß sich kurz nach dem Ende des 30jährigen Krieges zusammen und erhielt schließlich 1687 vom damaligen deutschen Kaiser Leopold ein Privileg. Diese „Aka-

demie der Naturforscher“, die „Leopoldina“, besteht noch heute, arbeitet sehr erfolgreich und hat jetzt ihren Sitz in der DDR, in Halle.

Auch in Frankreich gab es Gruppen von Anhängern der neuen Wissenschaft. Ihnen gehörten beispielsweise die Mathematiker Pascal, Fermat und Desargues an; Descartes stand mit einigen Mitgliedern verschiedener Gruppen in brieflicher Verbindung. Die Gründung der Pariser Akademie verlief aber im absolutistischen Frankreich anders als in England. Der mächtige Finanzminister Colbert, Hauptvertreter des Merkantilismus, begründete 1666 in Paris die Akademie in einem feierlichen Staatsakt; es gab materielle und finanzielle Zuwendungen und für ihre Mitglieder eine Art Gehalt.

Das französische Beispiel einer vom Staat eingesetzten und unterhaltenen Akademie hat dann in anderen absolutistischen Staaten Europas als Vorbild gewirkt. So wurden, unter aktiver Beteiligung von Leibniz, Akademien in Berlin (1700) und St. Petersburg (1724) gegründet, aus denen die heutige Akademie der Wissenschaften der DDR bzw. die Sowjetische Akademie der Wissenschaften hervorgegangen sind.

Der absolutistische Staat stellte den Akademikern diejenigen Aufgaben, die in seinem ökonomischen oder militärischen Interesse lagen. Für die Mathematik waren es Probleme der Ballistik, der Navigation, des Schiffbaus, der Kartographie, der Verbesserung der wissenschaftlichen Instrumente (Uhren, Kompaß, Fernrohr, Mikroskop), Festungsbau, Technologie in Manufakturen und Bergwerken. Dazu kam von Seiten der absolutistischen Herrscher ein gewisses Repräsentationsbedürfnis. Es galt geradezu als Maß der Stärke eines Staates, wieviel berühmte Gelehrte und Wissenschaftler bei Hofe aufgeboten werden konnten. Das Interesse der Herrscher am wissenschaftlichen Glanz ihrer Akademiker schuf andererseits den Wissenschaftlern, darunter auch den Mathematikern, denjenigen Spielraum, den sie benötigten, um auch den aus innerwissenschaftlicher Entwicklung entspringenden Problemen nachzugehen und das Bündnis mit der progressiven Aufklärungsphilosophie festigen zu können. Aus der Vielzahl der Akademien in Europa ragten im 18. Jh. die Akademien in London, Paris, Berlin und St. Petersburg hervor. An ihnen wirkten auch die bedeutendsten Mathematiker jener Periode.

Geschichte der analytischen Geometrie

Die entscheidenden Schritte zur Herausbildung dessen, was wir analytische Geometrie nennen, wurden nahezu gleichzeitig, in den 30er Jahren des 17. Jh., von zwei französischen Gelehrten getan, von Fermat und Descartes. Beide schlossen an Vorarbeiten an; die von ihnen geschaffene Form der analytischen Geometrie mußte noch weiterentwickelt werden und erhielt erst im Laufe des 19. Jh. im wesentlichen die heute bekannte Gestalt. So kann und muß man für die Geschichte der analytischen Geometrie drei Etappen unterscheiden: Entstehung, Herausbildung und Durchbildung der analytischen Geometrie, sowohl nach ihrem Ideengehalt als auch nach ihren Methoden.

Aus der Entstehungsgeschichte der analytischen Geometrie

Das Wesen der analytischen Geometrie besteht in einer wechselseitigen Durchdringung von Geometrie und Algebra. Demnach umfaßt die Entstehungsphase der analytischen Geometrie auch die antike Kegelschnittslehre, weil sich auch bei Apollonios Ansätze zur Überwindung bloßen geometrischen Denkens zeigen. Zur Vorgeschichte hat man auch Vorformen der Verwendung von Koordinaten zu rechnen. So bezeichneten beispielsweise die antiken Astronomen Hipparchos und Ptolemaios Orte auf der Erdoberfläche, indem sie – ähnlich wie wir – deren „Länge“ und „Breite“ (gemessen von Ost nach West bzw. von Nord nach Süd) angeben, bezogen jeweils auf ihre Wirkungsstätten, die Insel Rhodos bzw. die Stadt Alexandria.

So etwas Ähnliches wie Koordinaten verwendete auch Heron von Alexandria, wenn er bei Vermessungen im Gelände zu einer festen Standlinie Parallelen festlegte, um so die zu bestimmende Fläche in leichter zu berechnende Trapeze und Dreiecke zerlegen zu können. Nach Herons Vorbild verfahren die römischen Agrimensoren

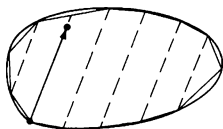


Abb. 7.2. Lineae ordinatae bei Heron, eine Vorstufe der Verwendung von Koordinaten

(Feldmesser). Diese Parallelen zu einer Standlinie hießen „lineae ordinatae“ (geordnete Linien; Abb. 7.2). Auch wurden die römischen Feldlager schachbrettartig angelegt und die Truppen auf das „Koordinatensystem“ verteilt. Solche spontan verwendeten, in praktischem Zusammenhang auftretende „Koordinaten“ findet man ferner bei Bauplänen der bedeutendsten Baumeister der Renaissance, so etwa bei Alberti.

Nicolaus Oresme

In gewissem Sinne gehört zur Vorgeschichte der analytischen Geometrie auch die sog. Theorie der Formlatituden, die von Nicolaus Oresme, Bischof von Lisieux in Frankreich, herrührt.

In der Gedankenwelt der aristotelischen Physik stehend, befaßte sich Oresme mit der graphischen Darstellung von Quantitäten und Qualitäten, besonders mit der Darstellung sich ändernder Intensitäten solcher Größen wie Wärme und Kälte, Feuchtigkeit und Trockenheit, Bewegung. Dazu zeichnete (Abb. 7.3) Oresme eine Strecke (Basis oder extensio oder longitudo genannt), die die untersuchte Größe (etwa Bewegung) versinnbildlichen sollte. Senkrecht dazu wurde durch Strecken die Stärke (Latitudo oder intensio genannt) jener Größe aufgetragen. Auf diese Weise erhält man Flächen (figurae oder formae genannt). Sind die latitudines konstant, so erhält man ein Rechteck, im Falle ihrer gleichmäßigen Abnahme oder Zunahme aber

Trapeze. Auf diese Weise gelang es Oresme, eine anschauliche Vorstellung etwa von einer gleichbleibenden oder gleichförmig abnehmenden Geschwindigkeit beim Bewegungsvorgang zu bilden. Solche Figuren oder Formen haben während der Scho-lastik bei den schwierig sich gestaltenden Bemühungen um eine wissenschaftliche Dynamik eine große Rolle gespielt. Heute nennen wir die von Oresme entwickelte Methode in Anlehnung an den Sprachgebrauch seiner Schüler „Theorie der Form-lituden“.

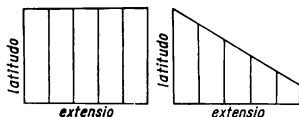


Abb. 7.3. Zur Theorie der Formlituden. Links graphische Repräsentation etwa einer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit, rechts einer gleichförmig abnehmenden Geschwindigkeit

Es handelte sich bei Oresme um eine figürliche Darstellung gewisser physikalischer Größen, noch nicht aber um analytische Geometrie oder gar um eine Vorwegnahme des Funktionsbegriffes. So fehlte bei ihm gerade der Versuch, die graphische Darstellung mit Algebra zu verbinden.

Herausbildung der analytischen Geometrie

Die Bereitstellung algebraischer Methoden gehört zu den innermathematischen historischen Voraussetzungen für die analytische Geometrie; eine ihrer historischen Wurzeln liegt also in der Entwicklung von der Coß bis zu Vieta. Eine weitere historische Wurzel hat man in der Übernahme der antiken Kegelschnittslehre und deren Einordnung in neue Zusammenhänge zu erblicken.

Mit dem Anfang des 17. Jh. trat in der Lehre von den Kegelschnitten eine entscheidende Wende ein: Kegelschnitte waren in der Antike eine mathematische Angelegenheit gewesen, ein bloßes gedankliches System, frei – wenn man vom Kreis absieht – von physikalischen Bezügen. Nun aber erhielten die Kegelschnitte mit der Entwicklung der Naturwissenschaften und der Produktivkräfte eine objektive Existenz: Ellipsen und Parabeln waren Bahnkurven wirklicher Bewegung von Himmelskörpern bzw. Geschossen. Alte Untersuchungsergebnisse wurden in ganz neue, erweiterte wissenschaftliche Zusammenhänge hineingestellt. Die Folge war – und man mag dies geradezu als historische Gesetzmäßigkeit formulieren – ein bedeutender Aufschwung einer traditionellen wissenschaftlichen Disziplin.

Zu den Fortschritten der Kegelschnittslehre kann man auch die Bemühungen von Fermat rechnen, die Bücher V bis VII der „Conica“ von Apollonios zu rekonstruieren. Gregorius a Santa Vincentio, ein Jesuit, beschäftigte sich mit einer zusammenfassenden Darstellung der Ergebnisse von Apollonios und der neu erzielten Einsichten zur Kegelschnittslehre. Sein in den zwanziger Jahren entstandenes Manuskript

konnte wegen der Kriegswirren des 30jährigen Krieges erst 1647 zum Druck gelangen. Zu diesem Zeitpunkt war das „Opus geometricum“ bereits überholt.

Die entscheidenden Schriften zur analytischen Geometrie waren schon geschrieben bzw. sogar gedruckt. Sie stammten von Fermat und Descartes und zeichneten sich durch die objektiv notwendig gewordene Verschmelzung von Algebra und Geometrie aus. Beide befaßten sich um etwa dieselbe Zeit mit denselben Fragen. Heute steht fest, daß Descartes seine Ergebnisse früher zum Druck bringen ließ (1637), daß aber Fermats erst 1679 aus dem Nachlaß veröffentlichte Schrift schon vor 1637 niedergeschrieben wurde. Außerdem bestanden wesentliche Unterschiede im Anliegen und in den Methoden zwischen den Ergebnissen beider Begründer der analytischen Geometrie.

Descartes löste sich von den teilweise ungeschickten Bezeichnungen der Vietaschen Algebra. Doch behielt er das der alten Geometrie verhaftete Ziel noch bei, mittels geometrischer Methoden Gleichungen aufzulösen. Demgemäß ist die neue Methode der analytischen Geometrie bei Descartes nur sozusagen implizit vorhanden; man muß sie aus den von ihm durchgeführten Beispielen herauslesen.

Fermat dagegen zielte auf eine gänzlich neue Behandlungsweise der Kegelschnittslehre und darüber hinaus der Lehre von den geometrischen Örtern ab und strebte daher eine systematische, explizite Darlegung der neuen Methoden an. Dagegen blieb er bei den Bezeichnungen von Vieta stehen.

René Descartes

Der aus Nordfrankreich stammende Descartes wurde Hauptvertreter des philosophischen Systems des Rationalismus, einer spezifischen Form des objektiven Idealismus. Descartes stellte als Ausgangspunkt seiner Philosophie den Satz „Cogito, ergo sum“ (Ich denke, also bin ich) auf und leitete damit die Existenz der Welt nicht aus göttlicher Offenbarung, sondern aus der Kraft des menschlichen Verstandes (ratio) her, der sehr wohl imstande sei, die Welt zu erkennen. Diese antitheologische Philosophie brachte Descartes in Gegensatz zur katholischen, später auch zur protestantischen Kirche. Die mathematische Leistung von Descartes entsprang aus seiner rationalistischen Philosophie. Daraus resultieren seine Bemühungen um klare Begriffe, um scharfe Definitionen, um einprägsame Bezeichnungen für die Philosophie wie für die Mathematik, die ihm gleichzeitig auch als Muster wissenschaftlich-rationaler Methoden entgegentrat. So ist es auch verständlich, daß er sich des neuen Werkzeuges der Algebra bemächtigte, das mehr Klarheit beim Gebrauch von Begriffen und mehr Sicherheit bei Rechnungen ermöglichte. Descartes wurde seinerseits zu einem Verfechter konsequenter Anwendung mathematischer Symbolik, auch beriet er sich mit anderen Mathematikern über die Wahl der Symbole. Auf Descartes geht die noch heute übliche Vereinbarung zurück, die Unbekannten (Variablen) mit den letzten Buchstaben des Alphabets zu bezeichnen. Er gebrauchte durchgehend die Zeichen $+$ und $-$, die Potenzschreibweise, das Quadratwurzelzeichen $\sqrt{}$. Noch altmodisch ist dagegen der Gebrauch des Zeichens ∞ (Verschleifung der Anfangsbuchstaben *ae* von *aequetur*) statt des Gleichheitszeichens.

Descartes hatte zu Anfang der dreißiger Jahre eine großangelegte Darstellung seiner Philosophie samt einer Naturerklärung aus mechanischen Prinzipien vollendet, der er den Titel „Le monde“ (Die Welt) gegeben hatte. Wegen der Verurteilung von Galilei (1633) aber wagte Descartes nur die Publikation relativ ungefährlicher Teile. Im Jahre 1637 erschien anonym, in den Niederlanden, der „Discours de la méthode“. Darin entwickelte Descartes zunächst seine allgemeine rationalistische Methode und wandte sie als Probe auf ihre Tragfähigkeit auf drei Fachgebiete an, auf die Lehre vom Strahlengang, auf die Lehre von den Meteoren und atmosphärischen Erscheinungen und auf die Geometrie. Dieser Teil des „Discours ...“ ist eine der Geburtsurkunden der analytischen Geometrie.

Welche Vorstellung liegt nun der Geometrie von Descartes zugrunde? Eine Schar paralleler, nicht notwendig äquidistanter Geraden schneidet auf einer Geraden, die nicht parallel zu denen der Schar liegt, Strecken ab, die von einem Punkte A an gemessen werden (Anm. 7.2). Auf jeder Parallelen der Schar liegt eine Strecke, und zwar mit einem Endpunkt auf der Geraden. Wenn dann eine von Scharparallele zu

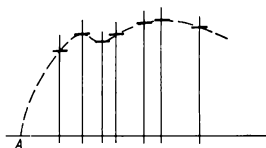


Abb. 7.4. Grundvorstellung der Geometrie von Descartes

Scharparallele sich nicht ändernde Beziehung besteht zwischen den von A an gemessenen Strecken und den Strecken auf den Parallelen, so heißt diese Beziehung eine Gleichung der Kurve. (Das Wort „Gleichung einer Kurve“ tritt in der „Geometrie“ allerdings nur ein einziges Mal auf.) Die Strecken auf den Parallelen der Schar heißen bei Descartes „appliquées par ordre“ bzw. lateinisch in späteren Aufgaben „omnes ordinatim applicatae“ (alle der Reihe nach Hinzugefügten) oder kürzer „applicatae“. So entstanden die gleichbedeutenden Fachworte Applikate bzw. Ordinate; das erste ist inzwischen außer Gebrauch gekommen (Abb. 7.4).

Das Ziel von „La Géométrie“ besteht darin, eine geometrische Basis für die Lösung algebraischer Probleme zu errichten.

„Alle Probleme der Geometrie können leicht auf einen solchen Ausdruck gebracht werden, daß es nachher nur der Kenntniss der Länge gewisser gerader Linien bedarf, um diese Probleme zu construiren. Wie sich der arithmetische Calcül auf die Operationen der Geometrie bezieht. Und gleichwie sich die gesamte Arithmetik nur aus vier oder fünf Operationen zusammensetzt, nämlich aus den Operationen der Addition, der Subtraction, der Multiplication, der Division und des Ausziehens von Wurzeln, welches ja auch als eine Art von Division angesehen werden kann: so hat man auch in der Geometrie, um die gesuchten Linien so umzuformen, dass sie auf Bekanntes führen, nichts anderes zu thun, als andere Linien ihnen hinzuzufügen oder von ihnen abzuziehen; oder aber, wenn eine solche gegeben ist, die ich, um sie mit den Zahlen in nähere Beziehung zu bringen, die Einheit nennen werde, und die gewöhnlich ganz nach Belieben angenommen werden kann, und man hat noch zwei andere, eine vierte Linie zu finden, welche sich zu einer dieser beiden verhält, wie die andere zur Einheit, was dasselbe ist, wie die Multiplication; oder aber eine vierte Linie zu finden, die sich zu einer der beiden ver-

hält wie die Einheit zur anderen, was dasselbe ist wie die Division; oder endlich eine oder zwei oder mehrere mittlere Proportionalen zu finden zwischen der Einheit und irgendwelchen anderen Linien, was dasselbe ist wie das Ausziehen der Quadrat- oder Cubikwurzel u.s.w. — Und ich werde mich nicht scheuen, diese der Arithmetik entnommen Ausdrücke in die Geometrie einzuführen, um mich dadurch verständlicher zu machen.“ ([L 7.7], S. 1/2)

Das folgende Beispiel der Multiplikation wird die Tragweite des eben entwickelten Programms verdeutlichen (Abb. 7.5):

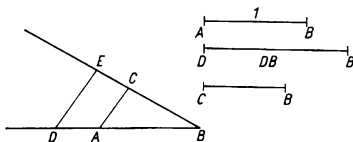


Abb. 7.5. Zur geometrischen Multiplikation von Strecken bei Descartes

„Es sei zum Beispiel AB die Einheit und es wäre BD mit BC zu multiplizieren, so habe ich nur die Punkte A und C zu verbinden, dann DE parallel mit CA zu ziehen und BE ist das Product dieser Multiplication.“ ([LA 1], S. 140)

In diesen harmlos klingenden Passagen lag damals etwas wirklich durchgreifend Neues: Unter den mit Buchstaben bezeichneten Strecken AB , BD usw. waren nicht nur die geometrischen Strecken, sondern zugleich die den Strecken (unter Zugrundelegung einer Einheit) entsprechenden Zahlenwerte zu verstehen. Er kann also in diesem Sinne von der Multiplikation von Strecken sprechen, eine Redeweise, die im Sinne der antiken Geometrie vollständig sinnlos ist. Oder: Ausdrücke wie a^2 , a^3 stellen eine Zahl dar und bedeuten nicht Flächen- bzw. Rauminhalte. Somit befreit er sich von dem hemmenden Prinzip der Dimensionstreue. Nach klassischer Auffassung wäre etwa ein Ausdruck $\sqrt{a^2b^2} - c$ ganz sinnlos. Dritte Wurzeln kann man nur (als Problem der Bestimmung der Kantenlänge eines Würfels) aus Ausdrücken der Dimension 3 ziehen; jetzt handelt es sich um das Wurzelziehen aus einer Zahl (die eine geometrische Bedeutung haben kann).

Auf dieser theoretischen Basis traf Descartes die Unterscheidung zweier wesentlicher verschiedener Typen von Aufgaben:

1. „Bestimmte Aufgaben“. In unserer Sprechweise bedeutet dies die Auflösung von algebraischen Gleichungen durch geometrische Konstruktion.
2. „Unbestimmte Aufgaben“. Wir würden heute von der Konstruktion geometrischer Örter bzw. von der Gleichung einer Kurve bzw. von der Abhängigkeit von Variablen sprechen.

Der erste Fall tritt ein, wenn man „genau so viel Gleichungen aufstellen“ kann wie man „gesuchte Linien“ hat; hat man weniger Gleichungen als gesuchte Linien, so handelt es sich um eine unbestimmte Aufgabe (Abb. 7.6; Abb. 7.7).

„La Géométrie“ mündet in einen dritten Teil, in dem Descartes sozusagen die algebraischen Früchte seiner geometrischen Untersuchungen erntet: Er unterscheidet

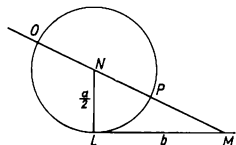


Abb. 7.6. Beispiel einer „bestimmten“ Aufgabe bei Descartes. Lösung der Gleichung $z^2 = az + b^2$, $b = \overline{LM} > 0$, $a > 0$. $\overline{OM}$ ist eine der gesuchten Lösungen, die positive.

bei Wurzeln von Gleichungen wahre (d. h. positive) und falsche (d. h. negative) Lösungen. Er spricht davon, daß es Gleichungen n -ten Grades mit n Lösungen gibt; aber er bezieht keine klare Haltung zu dem von Girard 1629 formulierten Fundamentalsatz der Algebra. Descartes weiß, daß jede ganzzahlige Lösung einer algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten das absolute Glied teilt. Ferner formuliert er die folgenden Regeln (eine schwache Form der sog. Cartesischen Zeichenregel): Die Anzahl der positiven Wurzeln einer algebraischen Gleichung ist höchstens gleich der Anzahl der Vorzeichenwechsel der Koeffizienten. Die Anzahl der negativen Wurzeln ist höchstens gleich der Zeichenfolgen. (Anm. 7.3) Diese Regeln sind richtig; ein Beweis stammt von Gauß aus dem Jahre 1828.

Von einer entwickelten analytischen Geometrie kann bei Descartes also noch keine Rede sein: Es gibt z. B. kein explizit gehandhabtes Koordinatensystem. Dennoch hat Descartes mit der Verschmelzung von Geometrie und Algebra einen bedeutenden, in die Zukunft wirkenden Beitrag geleistet.

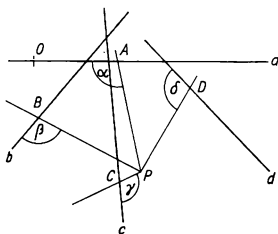


Abb. 7.7. Beispiel zur „unbestimmten“ Aufgabe bei Descartes. Das von Pappos bereits formulierte, aber noch ungelöste Problem „Locus ad quattuor lineas“ (Geometrischer Ort zu vier Linien): Gegeben vier Geraden a, b, c, d . Gesucht der geometrische Ort aller Punkte P mit folgender Eigenschaft: Von P aus werden nach den vier Geraden und vorgegebenen Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Geraden gezogen; dann soll $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$ gelten. Der geometrische Ort ist stets ein Kegelschnitt. Descartes wählt eine Gerade, etwa a , als feste Bezugsgerade aus, wählt einen Anfangspunkt O und führt dort eine Einheit ein. $\overline{OA}$ etwa wird als eine Variable behandelt. Als sozusagen zweite Achse wählt er die durch A und P gehende Gerade, die Applikate (Hinzugefügte); sie nimmt die Stelle der zweiten Variablen (Ordinate) ein

Pierre de Fermat

Weiter als Descartes gelangte Fermat im Hinblick auf eine systematische Darstellung. Doch darf man sich vom Reifezustand der analytischen Geometrie auch bei Fermat keine übertriebenen Vorstellungen machen.

Sein juristisches Amt in Toulouse muß ihm offensichtlich viel Zeit zur Beschäftigung mit Mathematik gelassen haben. Er war unstreitig einer der bedeutendsten Mathematiker überhaupt. Er gehörte zu den Schrittmachern der Infinitesimalmathematik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Besonders berühmt wurden seine Beiträge zur Zahlentheorie; es sei an den sog. kleinen Fermatschen Satz und an den bis heute unbewiesenen sog. großen Fermatschen Satz erinnert, daß die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für alle $n \geq 3$ nicht in ganzen Zahlen lösbar ist.

Zur analytischen Geometrie hat Fermat eine kurze Abhandlung hinterlassen, „Ad locos planos et solidos isagoge“ (Einführung in die ebenen und körperlichen [geometrischen] Örter). Der Titel ist, nach heutiger Terminologie, mißverständlich. Bei den körperlichen Örtern handelt es sich insbesondere nicht um analytische Geometrie des Raumes. Vielmehr schließt sich Fermat an eine aus der Antike übernommene Einteilung der ebenen geometrischen Örter an – ebene Örter: Gerade und Kreis; körperliche Örter: Parabel, Hyperbel, Ellipse; lineare Örter: alle anderen Kurven. Die linearen Örter behandelte Fermat nicht. Er unterschätzte bei weitem die Schwierigkeiten, die sich dem Studium höherer Kurven entgegenstellten, da er glaubte, daß deren Studium auf das der Kegelschnitte reduziert werden könne, daß also die Kurven beliebiger Ordnung auf Kurven zweiter Ordnung zurückgeführt werden können. (Erst viel später, 1643 und 1650, hat Fermat diese Meinung korrigiert und ist zu einigen gedanklichen Ansätzen einer analytischen Geometrie des Raumes vorgestoßen).

Die „Isagoge“ beginnt mit den folgenden Worten:

„Es ist kein Zweifel, daß die Alten sehr viel über Örter geschrieben haben. Zeuge dessen ist Pappos, der zu Anfang des 7. Buches versichert, daß Apollonios über ebene, Aristaios über körperliche Örter geschrieben habe. Aber wenn wir uns nicht täuschen, fiel ihnen die Untersuchung der Örter nicht gerade leicht. Das schließen wir daraus, daß sie zahlreiche Örter nicht allgemein genug ausdrücken, wie man weiter unten sehen wird.

Wir unterwerfen daher diesen Wissenszweig einer besonderen und ihm eigens angepaßten Analyse, damit in Zukunft ein allgemeiner Zugang zu den Örtern offen steht.“ ([L 7.8], S. 7)

Dann kommt ohne weiteren Übergang die entscheidende Stelle, in der das Prinzip der analytischen Geometrie erstmals ausgesprochen wurde:

„Sobald in einer Schlußgleichung zwei unbekannte Größen auftreten, hat man einen Ort, und der Endpunkt der einen Größe beschreibt eine gerade oder krumme Linie. ... Die Gleichungen kann man aber bequem versinnlichen, wenn man die beiden unbekannten Größen in einem gegebenen Winkel (den wir meist gleich einem Rechten nehmen) aneinandersetzt und von der einen die Lage und den einen Endpunkt gibt.“ ([L 7.8], S. 7)

Die Gleichung z. B. der Geraden wird von Fermat so behandelt (zur Erinnerung: Fermat benutzt die Schreibweise von Vieta, d. h., Vokale bedeuten die Veränderlichen, Konsonanten wie *B* und *D* im nachfolgenden Text Konstante) (Abb. 7.8):

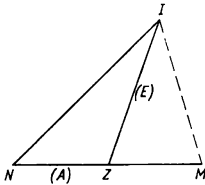


Abb. 7.8. Zur Gleichung der Geraden bei Fermat

„ NZM sei eine der Lage nach gegebene Gerade, N ein fester Punkt auf ihr. NZ sei die eine unbekannte Größe A , und die an sie unter dem gegebenen Winkel NZI angesetzte Strecke ZI sei gleich der anderen unbekannten Größe E . Wenn dann $DA = BE$, so beschreibt der Punkt I eine der Lage nach gegebene Gerade.“ Dann kommt der Beweis: „Es ist nämlich $B : D = A : E$. Daher ist das Verhältnis von A zu E fest, und da außerdem der Winkel bei Z gegeben ist, kennt man die Form des Dreiecks NIZ und damit den Winkel INZ . Der Punkt N ist aber gegeben und die Gerade NZ der Lage nach bekannt. Also ist die Lage von NI gegeben. ...“ ([L 7.8], S. 7/8)

Dazu noch eine Bemerkung: Statt der modernen Form $DA = BE$ schrieb Fermat

D in A aequatur B in E .

Auf ähnliche Weise bewies Fermat, daß eine Gleichung der Art $AE = Z$ planum (Dimensionsproblem!) eine Hyperbel, $AZ = DE$ eine Parabel, $E^2 = DA$ eine Parabel, $B^2 - A^2 = E^2$ einen Kreis, $A^2 + B^2 = E^2$ eine Hyperbel darstellt. Insgesamt lieferte so Fermat einen im wesentlichen vollständigen Beweis des folgenden Satzes:

„Wenn ... keine der unbekannten Größen die zweite Potenz überschreitet, wird der Ort eben oder körperlich ...“ ([L 7.8], S. 7)

Modern ausgedrückt: Kurven zweiter Ordnung stellen stets Kegelschnitte dar; freilich kannte Fermat noch nicht die ausgearteten Fälle.

Fermats Zielstellung läuft also darauf hinaus, die Identität eines durch eine algebraische Gleichung definierten geometrischen Ortes mit schon bekannten Kurven nachzuweisen. Seine Methode besteht aber noch nicht darin, aus der Gleichung der Kurve deren Eigenschaften herzuleiten.

Durchbildung der Methoden der analytischen Geometrie

Die Durchbildung der Methoden der analytischen Geometrie erfolgte recht langsam. Einerseits waren die Ideen zu neuartig, andererseits die konsequente Verwendung neuer Symbole noch zu ungewöhnlich. Fermats Arbeit, die anfangs nur in Abschriften zirkulierte, wurde erst 1679 gedruckt; der „Discours“ mit „La Géométrie“ wurde auf den päpstlichen Index der verbotenen Bücher gesetzt.

Zunächst nahm die holländische mathematische Schule die analytische Geometrie in der von Descartes stammenden Form auf: van Schooten führte interessierte junge Mathematiker in „La Géométrie“ ein und gab 1649 eine lateinische Übersetzung des ursprünglich französisch geschriebenen Werkes heraus.

Dann ging die analytische Geometrie in die in raschem Aufschwung befindliche englische Schule ein. Newton brach mit dem Tabu negativer Koordinaten; auf ihn geht die Verwendung des „cartesischen“ Koordinatensystems zurück. Er gab 1676 eine großangelegte Klassifikation – in allen vier Quadranten! – der Kurven dritter Ordnung.

Einen weiteren wesentlichen Schritt vorwärts beim konsequenten Ausbau der Grundprinzipien der analytischen Geometrie tat Euler mit seiner „Introductio in analysin infinitorum“ (Einführung in die Analysis der unendlich kleinen Größen, 1748). Der fachspezifische Ausdruck „analytische Geometrie“ stammt übrigens wohl erst von Lacroix, der ihn 1796/99 in seinem Lehrbuch „Cours de mathématiques“ verwendete.

Während des 19. Jh. wurde die analytische Geometrie mit weitreichenden algebraischen Hilfsmitteln – Determinanten, Matrizen, Gruppen, Vektoren – ausgerüstet. In den Händen von Möbius, Plücker, Graßmann, C. G. J. Jacobi, Cayley, Sylvester, Hamilton, Hesse, Salmon und vielen anderen erhielt die analytische Geometrie schon damals wesentliche Züge der heutigen im Schul- und Hochschulunterricht verwendeten Gestalt.

Zur Geschichte der frühen mechanischen Rechenmaschinen

In der Antike waren Rechenbrett und Abacus in Gebrauch; sie dienten insbesondere dem kaufmännischen Rechnen. Indem man Rechensteine auf Linien, die Währungs-, Gewichts- oder Wareneinheiten bedeuten, legte und verschob, vermochte man – recht bequem übrigens – Rechengänge zu vollziehen (aus dem lateinischen Wort *calculi* für Rechensteine wurden später die Fachausdrücke *Kalkül*, *kalkulieren*). In verschiedenen Formen – als Rechenbrett, Rechentisch, Rechentuch – ist diese alte Art des Rechenhilfsmittels in Europa noch weit bis ins 17. Jh. verwendet worden. Sogar unsere heutige sog. Kinderrechenmaschine beruht noch auf demselben Prinzip. Auch in anderen geographischen Regionen sind ähnliche Rechengeräte in Gebrauch gewesen bzw. sogar heute noch in Verwendung, in China, in Japan, in Teilen der Sowjetunion.

Erste mechanische Rechenhilfsmittel

Die eigentliche Geschichte der mechanischen Rechenmaschinen beginnt jedoch erst im europäischen Frühkapitalismus. Es ist nur ein scheinbarer Widerspruch, daß dieselbe Ursache – das enorm gestiegene Rechenbedürfnis – sowohl zur Ablösung des Abacus-Rechnens durch das Ziffernrechnen auf dezimaler Grundlage als auch zur Entwicklung mechanischer Rechenhilfsmittel beigetragen hat.

Der auch um die Entwicklung der Logarithmen verdiente Napier entwickelte zu

Beginn des 17. Jh. die nach ihm benannten Rechenstäbchen, mit denen sich Multiplikationen recht leicht ausführen lassen. In der 1617 vorgestellten Form handelte es sich um einen Satz von 10 ebenen Stäbchen, auf denen (Abb. 7.9) das kleine Einmal-eins fixiert war; von anderen Erfindern wurden später gegeneinander drehbare Zylinder benutzt.

3	1	6
6	2	1
9	3	8
1	2	4
1	5	0
1	8	6
2	1	4
2	4	8
2	7	5
7	9	4

Abb. 7.9. Prinzipskizze zum Gebrauch der Neperschen Stäbchen. Die Ziffern in benachbarten Diagonalfeldern werden addiert und liefern die Ziffern des Multiplikationsergebnisses. Beispiel: $316 \cdot 6$ ergibt sich aus den Ziffern der 6. Zeile der zu den Ziffern 3, 1 und 6 gehörenden Stäbchen: also $1/8 + 0/6 + 3/6$, d. h. 1896.“

Fast so alt wie die Erfindung der Logarithmen ist die der Rechenstäbe oder Rechenschieber. Sie gehen vermutlich zurück auf einen Professor am Gresham-College, auf Gunter, der um 1620 durch Aneinanderlegen zweier logarithmisch unterteilter Skalen Multiplikationen ausführte. Diese „Gunterschen Skalen“ (Gunter's scales) wurden bald für praktische Zwecke durchgebildet und erhielten schon um die Mitte des 17. Jh., insbesondere durch Ideen von Oughtred, Wingate und Partridge, nahezu die heutige Grundform des Rechenstabes. Sie besaßen schon damals eine bewegliche Zunge und für Navigationszwecke Skalen für die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen.

Frühe Rechenmaschinen

Den entscheidenden Schritt zur Idee und Konstruktion von wirklichen Rechenmaschinen, die selbständig Überträge von einer (Dezimal-) Stelle zur anderen vornehmen, hat um 1623/24 bereits Schickardt, Professor der Astronomie und biblischen Sprachen in Tübingen, vollzogen. Lange Zeit war seine Leistung in Vergessenheit geraten. Erst in jüngerer Vergangenheit (1957/58) hat man nach seinen Beschreibungen das von ihm entwickelte Rechengerät nachgebaut; es besaß ein sechsstelliges dezimales Addierwerk mit Zehnerübertragung sowie ein Multiplizierwerk und verwendete zylindrische Nepersche Rechenstäbchen. Die von Schickardt selbst gebauten Maschinen sind jedoch sämtlich verlorengegangen, wenn sie je wirklich existiert haben.

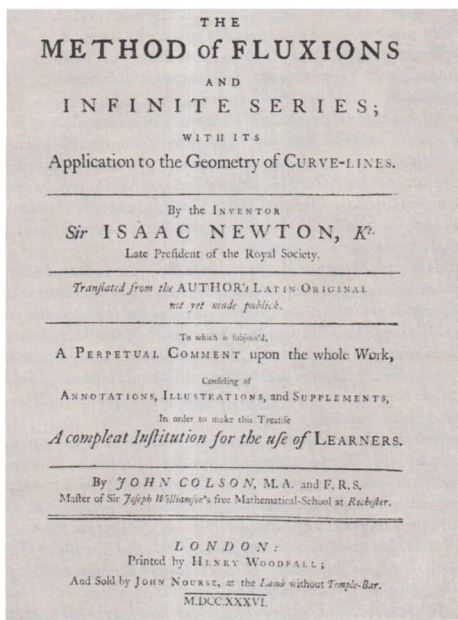
Lange hat man geglaubt, daß der französische Mathematiker Pascal als erster eine Rechenmaschine konstruiert habe. Der kaum Zwanzigjährige entwickelte um 1640/41/42 Additions- und Subtraktionsrechenmaschinen, um seinem Vater, einem hohen königlich-französischen Steuereinnahmer, die Rechenarbeit zu erleichtern. Obwohl Pascal mehrere Exemplare herstellte und dabei eine Menge technischer Feinheiten erfand, war doch der Stand der Feinmechanik zur damaligen Zeit noch so gering, daß kein zuverlässig arbeitendes Exemplar der „Pascaline“ hergestellt werden konnte.

Ähnlichen Schwierigkeiten begegnete auch Leibniz bei der technischen Durchbildung seiner Vierspeziesrechenmaschine. Bei einem Aufenthalt in London an der Royal Society im Winter 1673 führte er ein noch unfertiges Exemplar vor, und zwar im Wettbewerb mit einer Maschine des jungen Engländers Morland. Diese, die auf einer Kombination von Neperschen Stäben und Gunterschen Skalen beruhte, arbeitete zuverlässiger als die noch unausgereifte Maschine von Leibniz, aber Leibniz besaß wohl damals schon die überlegenere technische Idee. Er machte seine entscheidende technische Erfindung, die der Staffelwalze, im Sommer 1674 während seines Pariser Aufenthaltes. In dem französischen Handwerker Olivier fand Leibniz den eigentlichen Vollender seiner Vorstellungen.

Allerdings kam es erst im 18. Jh. zur wirklichen praktischen Verwendung von mechanischen Rechenmaschinen, und zwar mit Konstruktionen, die von dem Italiener Poloni, dem Wiener Braun, dem deutschen Mechaniker Leupold und dem deutschen Pfarrer Hahn stammten, der am Ende des 18. Jh. Vierspeziesrechenmaschinen serienmäßig herstellte.

Vorlesung 8

Wissenschaftliche Revolution: Herausbildung der Infinitesimalmathematik



Titelblatt der Fluxionsrechnung von Newton. I. Newton: Method of Fluxions, London 1736

Herausbildung infinitesimaler Methoden

Die Herausbildung weitreichender infinitesimaler Methoden gehört zu den wichtigsten Merkmalen der Wissenschaftlichen Revolution in der Mathematik während des Zeitraumes von etwa 1620 bis etwa 1730.

Die Problemsituation

In oberflächlichen Darstellungen wird es oft so hingestellt, als hätten Newton und Leibniz die Differential- und Integralrechnung einfach erfunden. Dies steht im Widerspruch zu den historischen Tatsachen. Es gab vielmehr eine lange Reihe von Vorgängern und Wegbereitern, ebenso wie es eine Fülle von tastenden Versuchen gab, die beim Umgang mit Variablen und Grenzwerten auftretenden Probleme zu bewältigen und in eine handhabbare Form zu bringen.

Die Durchführung strenger Grenzübergänge, freilich in geometrischer Einkleidung, reicht bis in die Antike zurück. Seit der Wiedererschließung des antiken mathematischen Wissensschatzes während der Renaissance und noch weit bis ins 17. Jh. wirkten die von Archimedes herrührenden Ergebnisse und Verfahren als methodisches Vorbild. So lassen sich direkte Einflüsse von Archimedes nachweisen bei Kepler, Galilei, Torricelli und Cavalieri, die den Reichtum der archimedischen Denkweise und deren Tragweite demonstrieren konnten.

Aus der großen Zahl einfallsreicher Mathematiker, die da und dort, im Prinzipiellen wie im besonders bemerkenswerten Spezialfall, Wesentliches zur Herausbildung der Infinitesimalmathematik geleistet haben, seien einige Hauptvertreter hervorgehoben: die Italiener Commandino, Valerio, Galilei und seine Schüler Cavalieri und Torricelli, der Deutsche Kepler, der Schweizer Guldin, die Niederländer Gregorius a S. Vincentio und Huygens, die Franzosen Lalouvière, Roberval, Fermat, die Engländer Wallis, Barrow und Newton, der Deutsch-Engländer Mercator und der Schotte Gregory und nicht zuletzt Leibniz.

Bezüglich der Methoden, mit denen die neuen Fragestellungen mit noch traditionellen Verfahren in jener Herausbildungsphase der Infinitesimalmathematik angegriffen wurden, kann man eine grobe Einteilung treffen, indem man zwischen geometrischen und arithmetisch-algebraischen Methoden unterscheidet. Die heutige Einteilung – Differentialrechnung, Integralrechnung, Theorie der unendlichen Reihen, Theorie der Differentialgleichungen usw. – ist aus der Sicht einer einigermaßen entwickelten Analysis getroffen. In der Herausbildungsperiode der Infinitesimalmathematik gruppierten sich dagegen die infinitesimalen Aufgabenstellungen – deren mathematische Struktur noch weitgehend unbekannt war – stärker um Sachprobleme.

Da sind zunächst mechanisch-physikalische Probleme, wie sie u. a. beim Wurf, beim freien Fall und bei der Planetenbewegung auftreten und die Behandlung von Bewegungsvorgängen, insbesondere von beschleunigten Bewegungen, erfordern. Diese Problemgruppe hängt direkt mit dem Fortschritt der Naturwissenschaften und

der raschen Entwicklung der mechanischen Produktionsinstrumente im Frühkapitalismus zusammen.

Ferner handelt es sich um mechanisch-geometrische Probleme, wie etwa solche der Flächen- und Volumenberechnung und der Bestimmung der Schwerpunkte von Flächen und Körpern.

Und schließlich gab es eine Gruppe solcher in einem gewissen Sinne engeren geometrischen Fragestellungen, daß das Studium von Kurven, Flächen und Körpern als abstraktes, als mathematisches (und nicht physikalisch-mechanisches) Problem aufgefaßt wurde. In dieser Problemgruppe dominierte das Tangentenproblem, als die Aufgabe, für eine ganz beliebige Kurve in einem beliebigen Punkte die Tangente zu finden.

Tangentenproblem und Inhaltsbestimmung sollten sich als Schlüsselprobleme für die Entwicklung des differentiellen bzw. integralen Denkens erweisen. Aber es mußte erst erkannt werden, daß Tangentenproblem und Flächeninhaltsproblem inhaltlich zueinander inverse Probleme sind: Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung mußte erst entdeckt werden.

Geometrischer Grenzübergang

Das Fallproblem erwies sich, wie die Geschichte der Physik lehrt, als Zentralproblem für die Herausbildung der Dynamik und damit der klassischen Mechanik. Das Gesetz, wonach sich beim Fall die zurückgelegten Wege wie die Quadrate der Zeiten verhalten, stand im direkten Gegensatz zur aristotelischen Physik. Galilei konnte es durch eine Kombination scharfsinniger Deduktion und geschickter experimenteller Nachprüfung finden und bestätigen. Es war dieser fruchtbare Wechsel von Deduktion und Induktion — demonstriert in Galileis Schriften „Dialog“ (1632) und „Discorsi“ (1638) —, der Galilei sowohl zu einem der Wegbereiter der klassischen Naturwissenschaft als auch der neueren Mathematik werden ließ. Programmatisch hat daher auch diese naturphilosophische Haltung von Galilei gewirkt, wie er sie z. B. so ausdrückte:

„Die Philosophie (d. i. etwa: Naturwissenschaft, Wg) steht geschrieben in dem großen Buch, das uns fortwährend offen vor Augen liegt, dem Universum, aber man kann sie nicht begreifen, wenn man nicht die Sprache verstehen und die Buchstaben kennen lernt, worin es geschrieben ist. Es ist geschrieben in mathematischer Sprache, und die Buchstaben sind Dreiecke, Kreise und andere geometrische Figuren; ohne diese Mittel ist es dem Menschen unmöglich, ein Wort davon zu verstehen; es ist nur ein sinnloses Herumirren in einem finsternen Labyrinth.“ ([L 8.5], Bd. VI, S. 232, deutsch zitiert nach [L 8.3], S. 403)

Aber nicht nur in Italien stand das Fallproblem im Mittelpunkt des Interesses. Aus der erfolgreichen mathematisch-mechanischen Schule in den Niederlanden ist — neben Stevin und Girard — Beeckman hervorzuheben, der um 1618 in Kontakt mit Descartes das Fallgesetz mit Hilfe eines geometrisch vollzogenen Grenzüberganges fand, dies zeitlich sogar noch vor Galilei (Anm. 8.1). Bei der Behandlung des Fallproblems machte Beeckman zwei Voraussetzungen physikalischer Art:

1. Er denkt sich die Schwerkraft nicht kontinuierlich wirkend, sondern so, daß sie

jeweils nach Verlauf einer gewissen kleinen Zeitspanne τ dem fallenden Körper gewissermaßen einen kleinen Ruck gibt („sij treckt met kleyne hurtkens“).

2. Eine einmal erzeugte Geschwindigkeit besteht unverändert fort, solange es keine äußeren Ursachen gibt, die sie vernichtet; dies läuft auf eine Art Trägheitsgesetz hinaus.

Es werde zunächst Ruhe vorausgesetzt. Jeweils nach der Zeitspanne τ wird durch die Rucke eine Geschwindigkeit γ zusätzlich erzeugt. Im ersten Zeitabschnitt ist der zurückgelegte Weg $\gamma\tau$, im zweiten Zeitabschnitt ist der zurückgelegte Weg $2\gamma\tau$, usw. Nach einem Zeitabschnitt von $t_1 = n_1\tau$ wird also der Gesamtweg

$$s(t_1) = \gamma\tau(1 + 2 + \dots + n_1) = \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} \gamma\tau$$

sein. Nach dem Zeitabschnitt $t_2 = n_2\tau$ ist also der Gesamtweg

$$s(t_2) = \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} \gamma\tau.$$

Für das Verhältnis der Wege findet man dann

$$\frac{s(t_1)}{s(t_2)} = \frac{n_1(n_1 + 1)}{n_2(n_2 + 1)} = \frac{t_1^2 + t_1\tau}{t_2^2 + t_2\tau}.$$

Für $\tau \rightarrow 0$ geht das ruckweise Ziehen in eine kontinuierliche Bewegung, in die wahre Fallbewegung über. Bei $\tau \rightarrow 0$ erhält man

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{s(t_1)}{s(t_2)} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{t_1^2 + t_1\tau}{t_2^2 + t_2\tau} = \frac{t_1^2}{t_2^2}.$$

Das ist das Fallgesetz: Die zurückgelegten Wege verhalten sich wie die Quadrate der Fallzeiten.

Nun konnte aber Beeckman den eben angedeuteten, rechnerisch ausgeführten Grenzübergang nicht vollziehen; diese Methoden standen ihm noch nicht zur Verfügung. Beeckman behalf sich daher mit einem geometrischen Verfahren, das auf der Interpretation einer graphischen Darstellung beruht, die ein wenig an die Theorie der Formlituden von Oresme erinnert (Abb. 8.1). Setzt man $\overline{OA} = \tau$, $\overline{OC} = \gamma$, $\overline{OA_1} = n_1\tau = t_1$, $\overline{OA_2} = n_2\tau = t_2$, so sind die Dreiecke in der Treppenfigur graphische Repräsentationen für die Wege, da die Wege — bis auf einen Proportionalitätsfaktor — als Produkt von Zeit und Geschwindigkeit zu messen sind. Also gilt

$$\frac{s(t_1)}{s(t_2)} = \frac{\triangle OA_1A_1^*}{\triangle OA_2A_2^*}.$$

Die wahre Bewegung entsteht für $\tau \rightarrow 0$, also bei „Glättung“ des Treppenzuges. Dies ist die geometrische Form des Grenzübergangs. Da sich nun bei ähnlichen Dreiecken

die Flächeninhalte wie die Quadrate gleichliegender Seiten verhalten, folgt

$$\frac{s(t_1)}{s(t_2)} = \frac{\overline{OA_1}^2}{\overline{OA_2}^2} = \frac{t_1^2}{t_2^2},$$

d. h. das Fallgesetz.

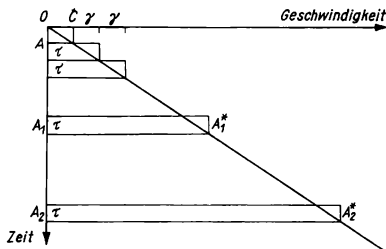


Abb. 8.1. Zur graphischen Herleitung des Fallgesetzes durch I. Beeckman

Die Exhaustionsrechnung

Hatte Commandino schon 1558 wesentliche Teile der Archimedes-Schriften der Gelehrtenwelt zugänglich gemacht, so schrieb er 1565 ein Buch über Rauminhalte und Schwerpunkte von Körpern unter Verwendung der antiken Grundideen. Commandinos Schüler Valerio konnte in einem dreibändigen Werk „De centro gravitatis“ (Über den Schwerpunkt) vom Jahre 1604 u. a. das Volumen der (Halb-) Kugel bestimmen, indem er den Kugelinhalt mit eingeschriebenen Kegeln und Zylindern annäherte. Auf ähnliche Weise vermochte er auch, Volumen und Schwerpunkt des Rotationsellipsoides und des zweischaligen Rotationshyperboloides zu ermitteln.

Dem Verfahren nach lehnten sich Commandino und Valerio und andere Mathematiker eng an die Exhaustionsrechnung der Antike an, indem sie z. B. Flächen mit gekrümmten Begrenzungen durch um- und eingeschriebene Rechtecke (Treppenfürungen) zusammensetzten und so für den wahren Flächeninhalt obere bzw. untere Schranken angaben. Die Vermehrung der Rechteckstreifen lieferte bessere Schranken.

Dies alles erinnert an die heutige Integralrechnung. Man sollte sogar annehmen, daß der Ausbau der Methode der Exhaustion auf direktem historischem Wege zur Integralrechnung hätte führen müssen. Dies ist jedoch nicht der Fall. Der Gang der Geschichte war auch hier nicht glatt und ohne dialektische Sprünge: Die Exhaustionsrechnung stellte wohl eine erste, methodisch sogar in sich geschlossene Form eines Teiles der Infinitesimalmathematik dar. Historisch aber ist ihr Inhalt erst über weitere Zwischenetappen indirekt in die moderne Integralrechnung eingegangen.

Kepler und die Infinitesimalgeometrie

Kepler war von allen Wegbereitern der Infinitesimalrechnung der vielleicht phantasievollste; auch sein astronomisches Lebenswerk trägt die Züge einer faszinierenden Mischung von Phantasie und naturwissenschaftlicher Exaktheit, von Mystizismus und rationellem Denken, von Neuplatonismus und Naturbeobachtung.

Von Keplers Beiträgen zur Infinitesimalmathematik ist seine sog. „Faßrechnung“ am aufschlußreichsten. Kepler selbst berichtet mit dem ihm eigenen hintergründigen

Ein new Visier büchlein/
 welches innhelt/wie man durch den Quadranten
 auffeynes yeden lands Eich/ein Käpfen zöbe
 reyt/en vñ damit yetlichs vñbet ants vaß
 Visieren/vnd solches innhalt erkens
 nen sol/Auffs new gebeßert
 vnd gemert.



Abb. 8.2. Aus einem Visierbüchlein von J. Frey, Nürnberg (15. Jh.)

Humor über den Anlaß zu dieser Schrift „Nova stereometria doliorum vinariorum“ (Neue Raummesskunst der Weinfässer):

„Als ich im November des letzten Jahres (1613, Wg) meine Wiedervermählung feierte, zu einer Zeit, da an den Donaufern bei Linz die aus Niederösterreich herbeigeführten Weinfässer nach einer reichlichen Lese aufgestapelt und zu einem annehmbaren Preise zu kaufen waren, da war es die Pflicht des neuen Gatten und sorglichen Familienvaters, für sein Haus den nötigen Trunk zu besorgen. Als einige Fässer eingekellert waren, kam am 4. Tag der Verkäufer mit der Meßrute, mit der er alle Fässer, ohne Rücksicht auf ihre Form, ohne jede weitere Überlegung oder Rechnung ihrem Inhalte nach bestimmte. Die Visierrute wurde mit ihrer metallenen Spitze durch das Spundloch quer bis zu den Rändern der beiden Böden eingeführt, und als die beiden Längen gleich gefunden worden waren, ergab die Marke am Spundloch die Zahl der Eimer im Fasse. Ich wunderte mich, daß die Querlinie durch die Faßhälfte ein Maß für den Inhalt abgeben könne, und bezweifelte die Richtigkeit der Methode, denn ein sehr niedriges Faß mit etwas breiteren Böden und daher sehr viel kleinerem Inhalt könnte dieselbe Visierlänge besitzen. Es schien mir als Neuvermähltem nicht unzweckmäßig, ein neues Prinzip mathematischer Arbeiten, nämlich die Genauigkeit dieser bequemen und allgemein wichtigen Bestimmung nach geometrischen Grundsätzen zu erforschen und die etwa vorhandenen Gesetze ans Licht zu bringen.“ ([L 8.9], S. 99/100)

Damit wird die Visierkunst, d. h. die Ausmessung des Inhaltes von Fässern, von Kepler einer wissenschaftlichen Behandlung unterworfen. Er kommt zu dem Ergebnis, daß ein aus einem Zylinder und zwei Kegelstümpfen zusammengesetzter Hohlkörper hinsichtlich der Inhaltsbestimmung mittels Visierrute nicht wesentlich von einem Faß mit gekrümmten Dauben abweicht – und zwar bei österreichischer Bauart, dagegen wesentlich bei Fässern rheinischer Konstruktion, die bauchiger waren (Abb. 8.2; Abb. 8.3).

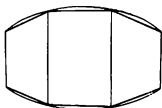


Abb. 8.3. Zur Keplerschen Faßregel in der Originalform

Doch ist mit der Berechnung von Faßinhalten nur ein Teil des Anliegens der „Faßrechnung“ erfüllt. Kepler zeigt, daß und wie viele verschiedene – nämlich 92 – Rotationskörper durch Rotation der Kegelschnitte um verschiedene Achsen entstehen. Diesen neuen Körpern, deren genäherte Volumenbestimmung er angab, verlieh er Namen des täglichen Lebens; Apfel, Zitrone, Spindel, Kürbis, Birne, Pflaume usw.

Damit ging Kepler der Zahl der behandelten Körper nach weit über Archimedes hinaus. Auch für die praktischen Belange leistete Kepler unmittelbare Hilfe, indem er der mit Beweisen arbeitenden lateinischen Schrift 1616 in deutscher Sprache ein für das tägliche Leben bestimmtes Visierbüchlein unter dem Titel „Auszug aus der Uralten Messekunst Archimedis ...“ folgen ließ, das ohne Begründung Vorschriften zur Inhaltsbestimmung und Anfertigung von Fässern, zum Vergleich von unterschiedlichen Gewichts-, Längen- und Getreidemaßen enthält.

Auch methodologisch hat Kepler eine neue Etappe der Entwicklung der Infinitesi-

malthematisch eingeleitet. Durch ihn wurde der bis dahin vorwiegend im philosophischen Sinne gebrauchte Begriff des Unendlich-Kleinen voll in die Geometrie eingeführt; man spricht daher bei Kepler geradezu von Infinitesimalgeometrie. So heißt es zur Flächenbestimmung des Kreises:

„Der Umfang des Kreises BG hat so viele Teile als Punkte, nämlich unendlich viele; jedes Teilchen kann angesehen werden als Basis eines gleichschenkligen Dreiecks mit den Schenkeln AB , so daß in der Kreisfläche unendlich viele Dreiecke liegen, die sämtlich mit ihren Scheiteln im Mittelpunkt A zusammenstoßen. Es werde nun der Kreisumfang zu einer Geraden BC ausgestreckt. So werden also die Grundlinien jener unendlich vielen Dreiecke oder Sektoren sämtlich auf der einen Geraden BC abgebildet und nebeneinander angeordnet.“ ([L 8.9], S. 101)

Die Kreisfläche wird also durch eine „unendliche Anzahl“ von gleichschenkligen Dreiecken ersetzt gedacht. Der Inhalt der Kreisfläche ist dann gleich dem Inhalt des Dreiecks ABC (Abb. 8.4). Auf ähnliche Weise verfuhr Kepler bei der Volumenbestimmung der Kugel:

„Die Kugel besteht aus unendlich vielen Kegeln, deren Scheitel im Mittelpunkte zusammen treffen, und deren auf der Oberfläche gelegene Grundflächen durch Punkte ersetzt sind.“ ([L 8.9], S. 101)

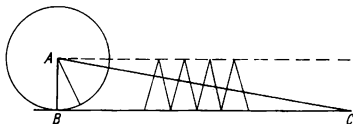


Abb. 8.4. Infinitesimalgeometrie Keplers bei der Kreisflächenbestimmung

Übrigens hat Kepler mit erstaunlichem Scharfsinn seine infinitesimalgeometrischen Ideen bei der Berechnung von Ellipsensegmenten im Zusammenhang mit astronomischen Studien angewandt. Nach heutiger Formelsprache ist dies äquivalent mit der Integration

$$\int_0^{\varphi} r^2 d\varphi = \int_0^u b(a + e \cos u) du = b(au + e \sin u),$$

wobei $r = a + e \cos u$ die Brennpunktsgleichung der Ellipse mit der exzentrischen Anomalie u bedeutet.

Keplers Methoden lassen von unserem Standpunkt aus natürlich Strenge vermissen; auch Kepler selbst war sich der Unzulänglichkeit der Schlußweisen bewußt.

Die Methode der Indivisibeln

Die neue Konzeption der Infinitesimalgeometrie kennzeichnet den Beginn einer zweiten Etappe der Infinitesimalmathematik. Ein Galilei-Schüler, Cavalieri, hat vielleicht am deutlichsten die bei Kepler noch verborgenen Möglichkeiten erkannt. Zum anderen knüpfte Cavalieri bewußt an die antike materialistische Tradition von Demokritos an, insbesondere an die Vorstellung der Atome, der unteilbaren Bestandteile der Materie.

Auch während des Mittelalters hatten, freilich in theoretischer Einhüllung, Vorstellungen über unteilbare Größen eine gewisse Rolle gespielt. Aus dem griechischen Wort *atomis* (*ατομος*, unteilbar) wurde durch Übersetzung ins Lateinische *indivisibel*, nicht teilbar. In der naturphilosophischen Bedeutung als kleinster Teil des Kontinuums dürfte das Fachwort „Indivisible“ im 14. Jh. von dem englischen Scholastiker Bradwardine geprägt worden sein. Auch bei Kepler sind diese Vorstellungen über Indivisible nachweisbar; gelegentlich spricht er davon, daß Körper zu Körpern gewordene Flächen darstellen, indem die Flächen geflossen sind; die Flächen nehmen sozusagen die Rolle der Unteilbaren hinsichtlich des Körpers ein.

Diese und andere Ansätze nun hat Cavalieri zu systematisieren versucht. Im Jahre 1635 erschien sein Buch „*Geometria indivisibilibus continuorum ...*“ (Geometrie der

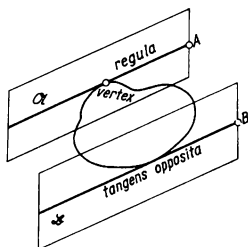


Abb. 8.5. Zum Cavalierischen Prinzip in der Originalform

kontinuierlichen Indivisibeln, nach einer gewissen neuen Methode vorgebracht); 1653 folgte eine verbesserte Ausgabe. Dieses Buch ist gelegentlich so eingeschätzt worden: Wenn es auf Bücher einen Preis für Dunkelheit und Unverständlichkeit geben würde, so hätte Cavalieri hoch dotiert werden müssen. In der Tat ist es schwer, eine klare Vorstellung von Cavalieris Ansichten und Methoden zu erhalten; insbesondere erklärt der Autor nicht genau, was unter einer Indivisibeln im mathematischen Sinne zu verstehen sei. Cavalieri hat daher später, wegen der ihm gemachten Vorwürfe, das folgende Bild gebraucht: Ebene Figuren sind aufzufassen als ein Gewebe aus parallelen Fäden. Körper sind als Bücher aufzufassen, welche aus zueinander parallelen Blättern bestehen. Doch besteht ein Unterschied: Die Fäden bzw. Blätter sind nur in endlicher Anzahl vorhanden, und sie besitzen, zum Unterschied von den Indivisibeln, eine endliche Dicke.

Man könnte Cavalieris sehr verschwommene Ideen vielleicht so wiedergeben: Die Indivisibeln sind unendlich dünne Gebilde, die eine um Eins kleinere Dimension besitzen als das von ihnen in ihrer Gesamtheit gebildete stetige Ganze.

In welcher Weise gebraucht nun Cavalieri die Indivisibeln? Welches ist seine Methode? Wie also sieht das auch heute noch, z. B. im Schulunterricht benutzte, Cavalierische Prinzip in der Originalfassung aus?

Cavalieri unterstellt (Abb. 8.5), daß sich bei jeder geschlossenen ebenen Figur eine Gerade *A* als Berührungslinie (*regula*, d. h. Latte, Leiste, Lineal) denken läßt, welche

nur einen Punkt (vertex, d. h. Scheitel) mit der Berandung gemeinsam hat. Zur regula gibt es unendlich viele parallele Geraden und schließlich wieder eine, die tangens opposita (die gegenüberliegende Berührende) B , die die Figur abschließend berührt. Nun denkt sich Cavalieri durch A eine Ebene $\mathfrak{A}$ und durch B eine weitere, zu $\mathfrak{A}$ parallele Ebene $\mathfrak{B}$ gelegt. $\mathfrak{A}$ bewegt sich parallel zu sich selbst, bis $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ übergeht. Diese Bewegung bezeichnet Cavalieri als „Fließen“ – die Grundvorstellung „fließender Größen“ wird in der weiteren Geschichte der Infinitesimalmathematik eine wesentliche Rolle spielen, insbesondere bei Barrow und Newton. Die Durchschnittsmengen (Geraden) der fließenden Ebenen mit der ebenen Figur bilden in den Worten von Cavalieri die „Gesamtheit der Geraden der Figur“ (omnes liniae figurae) – diese Wendung wird von Leibniz wieder aufgegriffen werden.

Für den Raum geht Cavalieri ähnlich vor; die Stelle der regula nimmt eine Ebene ein. Die regula erzeugt beim Fließen die „Gesamtheit der Ebenen des Körpers“ („omnia plana solidi“).

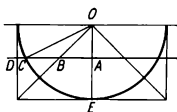


Abb. 8.6. Zur Berechnung des Kugelvolumens nach Cavalieri. Die Schnittfigur zeigt eine Halbkugel mit umbeschriebenem Zylinder, dem ein Kegel einbeschrieben ist

Schließlich formuliert Cavalieri sein Prinzip, ausgedrückt in zwei Fundamentalsätzen.

1. Die Gesamtheit der Indivisibeln eines und desselben Gebildes ist unabhängig von der Regula.
2. Ebene Figuren oder auch Körper stehen in demselben Verhältnisse wie die Gesamtheiten ihrer Geraden bzw. Ebenen, welche nach irgend einer Regula genommen werden.“ ([L 8.1], S. 113, deutsch zitiert nach [LA 7], Bd. II, 1892, S. 761)

Cavalieri benutzte diese Sätze wie eine Art von Axiom und war sich dabei ihres heuristischen Charakters bewußt. Er hat seine Methode im wesentlichen als eine pragmatische Anleitung betrachtet, als eine Methode also, die darum gut und richtig sei, weil sie richtige Ergebnisse liefere.

Zur Berechnung des Kugelvolumens z. B. geht Cavalieri so vor (Abb. 8.6): Einer Halbkugel wird ein Zylinder umbeschrieben und dem Zylinder ein Kegel einbeschrieben. Eine Ebene, die senkrecht auf dem Radius OE steht, schneidet dann Kreise aus mit den Radien AC , AD und AB , wobei $CA^2 + AO^2 = CO^2$ gilt. Wegen $AO = AB$ und $CO = DA$ hat man $CA^2 + AB^2 = DA^2$. Also ist – indem man sich diese Gleichung mit π multipliziert denkt – der Flächeninhalt des Schnittkreises der Halbkugel zusammen mit dem des Schnittkreises des Kegels gleich dem Flächeninhalt des Schnittkreises des Zylinders. Die Ebene war in ihrer Lage nicht beschränkt. Was für das eine Tripel der Quadrate der Indivisibeln gilt, so schließt Cavalieri, gilt

auch für deren Gesamtheiten. Also wendet er sein Prinzip an und erhält $V_{\text{Kugel}} + V_{\text{Kegel}} = V_{\text{Zylinder}}$. Da $V_{\text{Zylinder}} = 3V_{\text{Kegel}}$ ist, folgt $V_{\text{Kugel}} = \frac{2}{3} V_{\text{Zylinder}}$.

Damit hatte Cavalieri natürlich kein neues Ergebnis gefunden; schon Archimedes war ja auf diesen Satz besonders stolz gewesen. Neu war bei Cavalieri nur die auf systematischem Gebrauch der Indivisibeln beruhende Methode. Immerhin aber gelangte er unter Anwendung einiger Kunstgriffe zu Integrationen, die wir durch

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3} a^3 \quad \text{und} \quad \int_0^a x^4 dx = \frac{1}{5} a^5$$

ausdrücken würden. Durch Induktionsschluß bewältigte er schließlich 1647 die Integrationen

$$\int_0^a x^n dx = \frac{1}{n+1} a^{n+1} \quad \text{für } n = 2, 3, \dots, 9.$$

Diese Integrationen über Potenzfunktionen waren freilich in der Zwischenzeit auch andernorts ausgeführt worden, z. B. durch Fermat und Wallis.

In der italienischen Mathematikerschule der ersten Hälfte des 17. Jh. ist Torricelli eine herausragende Persönlichkeit; er spielte auch in der Geschichte der Physik z. B. bei der Widerlegung des alten Aristotelischen naturphilosophischen Axioms vom horror vacui eine entscheidende Rolle. Als einer der letzten direkten Schüler von Galilei übernahm er die Schlußredaktion der Galileischen „Discorsi“ nach den Anweisungen seines erblindeten Lehrers.

Torricelli war bestens vertraut sowohl mit der Exhaustionsmethode als auch mit der Indivisibelnmethode. Unter Benutzung beider Verfahren und durch deren Kombination leistete er auf elf verschiedene Arten die Quadratur der Parabel und schließlich die der Zykloide. (Das Wort Zykloide stammt von Galilei).

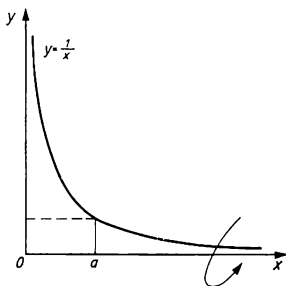


Abb. 8.7. Volumen eines Rotationshyperboloides, erstes Auftreten eines uneigentlichen Integrals bei Torricelli

Bei der Behandlung der Wurfparabel zeigte sich Torricelli ganz unter dem Einfluß von Galilei. Nach dessen Vorbild faßte Torricelli die geometrischen Kurven, speziell die Parabel, als mathematische Repräsentation wirklicher physikalischer Bewegungen auf, speziell der Bewegung eines geworfenen Körpers. Gerade diese mechanische Interpretation leitete Torricelli zum Begriff der Einhüllenden einer Kurvenschar: Er betrachtete die durch Variation des Abwurfwinkels entstehende Schar von Wurfparabeln und fand die Sätze, daß die Einhüllende der Schar ebenfalls eine Parabel ist und daß der geometrische Ort der Scheitelpunkte aller Parabeln der Schar wiederum eine Parabel ist.

Eine weitere mathematische Entdeckung Torricellis führte sogar zu schweren Zweifeln an der Richtigkeit der Mathematik überhaupt. Torricelli gelang nämlich die Kubatur des Rotationshyperboloides; das ist der erste Fall des Auftretens eines uneigentlichen Integrals. In unserer Formelschreibweise fand Torricelli, daß

$$\pi \int_a^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \pi \cdot \frac{1}{a}$$

ist, daß also der Rauminhalt eines sich ins *Unendliche* erstreckenden Körpers *endlich*, und zwar gleich dem Rauminhalt des Zylinders der Höhe a und dem Radius $\frac{1}{a}$ ist. Dieses Ergebnis mußte damals im höchsten Maße paradox wirken (Abb. 8.7).

Die Arithmetisierung der Indivisibelmethode

Die Methode der Indivisibeln konnte nicht zu allgemeiner Anerkennung gelangen; zu fragwürdig und logisch ungesichert waren ihre Schlußweisen. Dazu kamen sachliche Mängel: Die Indivisibelmethode in der von Cavalieri gegebenen Form war kaum geeignet zur Berechnung von Oberflächen und versagte bei der Bestimmung von Bogenlängen. Es kam darauf an, bei Beibehaltung des Kernes des integralen Denkens sich von der geometrischen Form zu lösen und die Infinitesimalmathematik rechnerisch-algebraisch durchzubilden.

An der Lösung dieser Aufgabe hat sich eine große Anzahl der Mathematiker in den 30er und 40er Jahren des 17. Jh. beteiligt, unter ihnen Gregorius, Roberval, Fermat. So vermochte Fermat unter Verwendung Archimedischer Grundgedanken eine große Klasse von Funktionen durch Streifenzerlegung zu quadrieren, nämlich die Gruppe der allgemeinen Parabeln

$$\left(\frac{y}{b}\right)^n = \left(\frac{x}{a}\right)^m,$$

der allgemeinen Spiralen

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n = \left(\frac{r\varphi}{\alpha}\right)^m$$

und der allgemeinen Hyperbeln

$$\left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{x}{a}\right)^m = 1,$$

wobei m und n zueinander teilerfremde natürliche Zahlen sind und $m > n$ ist. Modern ausgedrückt laufen die von Fermat verwendeten Verfahren hinaus auf Wechsel der Integrationsvariablen, auf gliedweise und partielle Integration — dies allerdings verborgen unter einer Fülle von Kunstgriffen und mühsamen Rechnungen.

Um eben diese Zeit, um die Mitte des 17. Jh., erzielte Huygens weitreichende neue Ergebnisse; er lehnte die Cavalierische Indivisibelmethode als unexakt ab und besann sich wieder auf die strenge Archimedische Exhaustionsmethode. Huygens gelang die Rektifikation der Parabel, die Komplanation von Rotationsflächen zweiter Ordnung, und schließlich stellte er um 1673 eine Theorie der Evoluten und Evolventen auf.

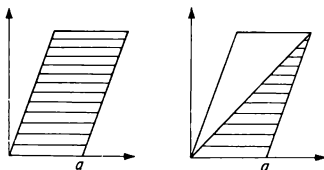


Abb. 8.8. Zur Herleitung des Pyramidenvolumens mittels der Indivisibelmethode

Jedoch vermochte er sich später nicht der durchgebildeten Infinitesimalrechnung anzuschließen, weder in der Form der Fluxionsrechnung von Newton noch in der Form des Calculus von Leibniz.

Ein typisches Beispiel soll die Arithmetisierung der Indivisibelmethode verdeutlichen, die bis an die rechnerische Beherrschung von Grenzübergängen heranführte. Es stammt von dem Engländer Wallis, der auch als Arzt, Logiker, Theologe und Philologe hervorgetreten ist. Wallis hatte sich ursprünglich mit Algebra befaßt, ehe er mit den Arbeiten von Cavalieri und Torricelli zur Infinitesimalmathematik bekannt wurde und sich mit Quadraturen und Kubaturen beschäftigte. Nach einer Reihe von Einzelarbeiten erschien 1656 die zusammenfassende „Arithmetica infinitorum“ (Arithmetik der unendlichen Größen). Der Titel ist gut gewählt. Wohl verfolgt Wallis dasselbe Ziel wie etwa Cavalieri, nämlich Kubaturen und Quadraturen. Während aber Cavalieri seine Methode geometrisch gestaltete, kam es Wallis im Gegenteil darauf an, möglichst rechnerisch zu verfahren.

Cavalieri hatte bewiesen: Die Gesamtheit der Indivisibelquadrate eines Parallelogramms verhält sich zur Gesamtheit der Indivisibelquadrate eines beliebigen, durch eine Diagonale herausgeschnittenen Dreiecks wie 3 : 1. Nach heutiger Schreibweise hatte Cavalieri also sozusagen die „Grenzwerte“

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum a^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} na^2 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{a}{n}\right)^2 + \left(\frac{2a}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{na}{n}\right)^2 \right]$$

bzw. deren Verhältnis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[1^2 + 2^2 + \dots + n^2]}{n \cdot n^2}$$

zu untersuchen. Cavalieris Satz ist stereometrisch interpretierbar; die Volumina des entstehenden Prismas bzw. der entstehenden Pyramide verhalten sich wie 3 : 1, der obige Grenzwert hat also den Wert $\frac{1}{3}$ (Abb. 8.8).

Wallis arbeitete nun den engen Zusammenhang zwischen dem von Cavalieri betrachteten und stereometrisch bestimmten Grenzwert und dem Quadraturproblem der Parabeln heraus (Anm. 8.2). Er erkannte, modern ausgedrückt, die Äquivalenz von

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n \cdot n^2} = \frac{1}{3} \quad \text{mit} \quad \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

also die Äquivalenz des Ergebnisses von Cavalieri (links) mit der Parabelquadratur nach Archimedes, um sogleich nach kühner Induktion für die Quadratur (Integration) der allgemeinen Parabel $y = x^m$ ($m > 0$, ganz) die folgende Äquivalenz zu behaupten:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^m + 2^m + \dots + n^m}{n \cdot n^m} = \frac{1}{m+1} \leftrightarrow \int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}.$$

Den Beweis für den linken Grenzwert führte Wallis, im Unterschied zu Cavalieri, rechnerisch. Für $m = 3$ etwa setzte er voraus, daß $\frac{1}{4}$ herauskommt, und rechnete für $n = 1, 2, 3, \dots$:

$$1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}, \quad \frac{9}{16} = \frac{1}{4} + \frac{5}{16}, \quad \frac{4}{9} = \frac{1}{4} + \frac{7}{36}, \quad \dots$$

Er bestimmte also den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1+2n}{n^2 \cdot 2^2} \right) = \frac{1}{4}.$$

„Der Bruch, um welchen $\frac{1}{4}$ übertroffen wird, hat zum Nenner offenbar stets um 4 zunehmende Zahlen und wird stetig kleiner, so daß er endlich kleiner als jeder beliebige angebbare Wert wird, und wenn man bis ins Unendliche die Versuche ausdehnt, geradezu verschwindet.“

Und an einer anderen Stelle gebraucht Wallis die Formulierung

„der Unterschied (zum wahren Wert, Wg) wird kleiner als jede nur angebbare Größe.“ ([LA 9], Bd. II, S. 823)

Damit hatte Wallis das allgemeine Resultat

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1} \quad \text{für } m > 0, \text{ ganz.}$$

Nun nahm Wallis wiederum eine großangelegte Induktion vor: Er behauptete die Richtigkeit dieser Beziehung für *alle* Potenzfunktionen $\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$ für alle $m \neq -1$, also für alle positiven und negativen, ganzen und gebrochenen und sogar irrationalen m , mit Ausnahmen von $m = -1$.

Mit dieser Induktion stand Wallis unter dem philosophischen Einfluß von Bacon, dem großen Verfechter der Methode des Aufsteigens vom Speziellen zum Allgemeinen. Es handelte sich also keineswegs um mathematische oder vollständige Induktion; diese ist erst von Pascal als mathematische Neuerung aufgebracht worden. Wallis dagegen hatte die Induktion im Baconschen Sinne als allgemeines wissenschaftliches Prinzip benutzt und daher auch gar nicht die Notwendigkeit empfunden, den Satz allgemein zu beweisen. Für irrationale Exponenten hätte er natürlich auch gar nicht die Möglichkeit dazu besessen.

Das Buch von Wallis, die „Arithmetica infinitorum“, enthält übrigens das berühmte unendliche Produkt

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots}$$

Dort wird das heute verwendete Zeichen ∞ für Unendlich eingeführt, die liegende Acht, als Symbol einer in sich geschlossenen, also unendlich lange durchlaufbaren Figur. Auch findet sich das Fachwort „Interpolation“ wohl zum erstenmal bei Wallis.

Und schließlich gelangte Wallis sogar unter Verallgemeinerung des Problems der Kreisflächenberechnung zur Betrachtung der allgemeinen Integrale

$$I(k, n) = \int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{k}}\right)^n dx$$

in Abhängigkeit von den beiden Parametern k und n .

Das Tangentenproblem

Bei der Betrachtung der Methoden und Ergebnisse von Wallis meint man geradezu, die Differential- und Integralrechnung hätte nun gleich „herausspringen“ müssen. Dies war jedoch nicht der Fall. Es war noch eine andere Komponente historisch notwendig, nämlich die Diskussion und Beherrschung des Tangentenproblems und die Hinwendung zu Extremwertproblemen.

Dieser Problemkomplex ist insbesondere von Fermat sehr weit vorangebracht

worden, und zwar schon zu einem relativ frühen Zeitpunkt; um 1628/29 fand er eine Methode, einfache Extremwerte zu berechnen. Und schließlich verband Fermat um 1662 seine Extremwertbetrachtungen mit physikalischen Fragestellungen; u. a. gelangte er zur Konstatierung des kürzesten bzw. extremalen Lichtweges bei der Lichtbrechung.

Ursprünglich hatte er sein Verfahren nur für ganzrationale Funktionen entwickelt; aber später sprach er es in voller Allgemeinheit aus. Freilich fehlt eine strenge Begründung; die Methode rechtfertigt sich durch den Erfolg. Gewöhnlich ruft er daher in solchen Abhandlungen mit berechtigtem Stolz aus: „Eine allgemeinere und schönere Methode kann man wohl nicht angeben.“

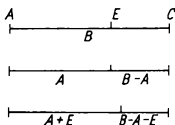


Abb. 8.9. Zur Bestimmung eines einfachen Extremwertes durch Fermat

Das folgende Beispiel stammt aus der Abhandlung „Die Methode zur Bestimmung eines Maximums und Minimums“ (Abb. 8.9):

„Die Strecke AC ist im Punkte E so zu teilen, daß das Rechteck AEC ein Maximum wird. Die Strecke AC sei mit B bezeichnet, für den einen Teil von B setzen wir A , also ist der noch übrige [Teil von B] gleich $B - A$ und das aus den beiden Abschnitten gebildete Rechteck gleich $BA - A^2$, hierfür soll der größte Wert gefunden werden. Setzen wir für den einen Teil von B neuerdings $A + E$, so ist der noch übrige Teil gleich $B - A - E$ und das aus den beiden Abschnitten gebildete Rechteck gleich

$$B \cdot A - A^2 + B \cdot E - 2A \cdot E - E^2,$$

dies ist näherungsweise gleichzusetzen obigem Rechteck

$$B \cdot A - A^2.$$

Nach Wegfall der gemeinsamen Glieder erhält man

$$B \cdot E \approx 2A \cdot E + E^2.$$

Wird alles durch E dividiert, so bleibt

$$B \approx 2A + E.$$

Wird E gestrichen, so ergibt sich

$$B = 2A.$$

Also ist zur Lösung der Aufgabe B zu halbieren.“ ([L 8.4], S. 2)

Dies alles erinnert schon stark an die heutige Bildung des Differentialquotienten. Auch bei Fermat wird sozusagen der Funktionswert an einer um E benachbarten Stelle gebildet, dann wird durch das noch als von Null verschieden vorausgesetzte E dividiert, und erst dann wird $E = 0$ gesetzt; mit E multiplikativ behaftete Terme verschwinden.

Aus der Methode zur Bestimmung der Maxima und Minima entwickelte Fermat ein Verfahren, um die Kurventangenten zu konstruieren (Abb. 8.10). Beispielsweise

(der Leser möge sich nicht dadurch verwirren lassen, daß im nachfolgenden Text Großbuchstaben sowohl als Strecken als auch zur Bezeichnung der Eckpunkte von Strecken verwendet werden; dadurch wird weitgehende Annäherung an Fermats Original erreicht) sei an eine quadratische Parabel mit dem Scheitel D in B eine Tangente zu legen. Dann gilt wegen der Eigenschaften der Parabel $\overline{CD} : \overline{DI} > \overline{BC}^2 : \overline{OI}^2$. Aus Ähnlichkeitssätzen folgt $\overline{BC}^2 : \overline{OI}^2 = \overline{CE}^2 : \overline{IE}^2$, also $\overline{CD} : \overline{DI} > \overline{CE}^2 : \overline{IE}^2$. Es ist $\overline{CD} = D$ gegeben, und $\overline{CE} = A$ ist gesucht. Wenn man $\overline{CI} = E$ setzt (also wieder ein bißchen ändert), dann ist

$$D : (D - E) > A^2 : (A^2 + E^2 - 2AE).$$

Verfährt man nun gemäß der Fermatschen Extremwertmethode, so erhält man schließlich $D E^2 - 2DAE \approx -A^2 E$. Nach Division durch E folgt $DE + A^2 \approx 2DA$. Man streicht den Ausdruck DE . Dann ist $A^2 = 2DA$, also $A = 2D$. Damit ist die Tangente konstruierbar.

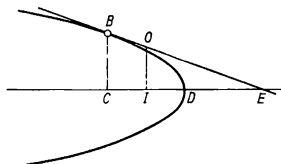


Abb. 8.10. Tangentenkonstruktion an die quadratische Parabel nach Fermat

Pascal und das charakteristische Dreieck

Bezüglich der Tragweite der Fermatschen Tangentenmethode gab es aufgeregte Auseinandersetzungen, insbesondere mit den Anhängern von Descartes. Dadurch auch rückte das Tangentenproblem in den Mittelpunkt des Interesses und wirkte somit beschleunigend auf die Herausbildung der Infinitesimalrechnung.

Noch ein weiterer französischer Gelehrter, Pascal, hat einen wesentlichen Beitrag zur Bewältigung des Tangentenproblems geleistet, der zu einem direkten Ausgangspunkt bei der Erfindung der Differential- und Integralrechnung durch Leibniz werden sollte.

Im Jahre 1659 war von Pascal in Paris eine Schrift erschienen, „Traité des sinus des quarts du cercle“ (Abhandlungen über die Sinus des Viertelkreises). Leibniz nun, der sich zu Anfang der 70er Jahre in Paris aufhielt, bemerkte in dieser Abhandlung, wie er sich ausdrückte, „ein großes Licht, das der Autor (also Pascal, Wg) selbst nicht gesehen habe“.

Bei der Berechnung des statischen Moments eines Viertelkreisbogens wird Pascal auf die folgende (modernisierte) Figur (Abb. 8.11) geführt: Gegeben sei ein Kreisquadrant ABC , E der Fußpunkt des Kreisradius AE und D der Fußpunkt des Lotes von E auf die x -Achse. Mit einem Tangentenstück GH wird ein (kleines) rechtwink-

liges Dreieck FGH konstruiert, dessen Katheten parallel zu den Koordinatenachsen liegen. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle AED$ und $\triangle HGF$ gilt die Proportion $\overline{AE} : \overline{ED} = \overline{HG} : \overline{GF}$.

Anders ausgedrückt: Die beiden Rechtecke mit den Seiten $\overline{AE}$ und $\overline{GF}$ bzw. $\overline{HG}$ und $\overline{ED}$ sind flächengleich. Und beiläufig macht Pascal die Bemerkung: Für kleine Dreiecke kann der Bogen der Kurve durch die Tangente ersetzt werden.

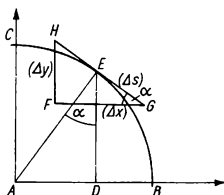


Abb. 8.11. Pascal und das charakteristische Dreieck

Leibniz erkannte nun, daß entsprechende Proportionen bzw. entsprechende Flächengleichheiten nicht nur für den Kreisbogen, sondern für jede Kurve gelten; man hat nur den Kreisradius durch die Kurvennormale zu ersetzen. Leibniz nannte das – infinitesimal klein gedachte – Dreieck $\triangle FGH$ mit den Seiten Δx , Δy und Δs „*triangulum characteristicum*“ (charakteristisches Dreieck); wir sprechen heute vom Anstiegs- oder Steigungsdreieck.

Durchbildung der infinitesimalen Methoden

Die Herausbildung ausgereifter infinitesimaler Methoden setzte die genaueste Kenntnis der antiken und der von Kepler und Cavalieri stammenden geometrischen Methoden ebenso voraus wie die Vertrautheit mit den algebraischen Methoden von Vieta, Descartes und Fermat. Historisch folgten so die Etappen des Ausbaus der antiken Verfahren zur Exhaustionsrechnung, die Theorie der Indivisibeln und deren Arithmetisierung aufeinander. Parallel dazu erfolgte die Behandlung der Tangenten, der Quadratur der allgemeinsten Parabeln sowie die Hinwendung zu Extremwertaufgaben.

Dies alles gehörte zu den logisch-historischen Voraussetzungen für den dialektischen Umschlag in die Durchbildung der infinitesimalen Methoden; er konnte daher erst nach 1660 vollzogen werden. Mit der Ausbildung der Fluxionsrechnung durch Newton und schließlich mit der Erfindung des Calculus durch Leibniz sollte die Infinitesimalmathematik nach Form und Inhalt einen gewissen vorläufigen Abschluß erreichen.

Das 18. Jh. sah den weiteren Ausbau der infinitesimalen Methoden, die volle Herausbildung des Funktionsbegriffs und die Anfänge höherer Gebiete der Analysis, wie z. B. die Theorie der Differentialgleichungen und die Variationsrechnung, dies alles begleitet von ideologischen und methodologischen Auseinandersetzungen um das Wesen des sog. Unendlich-Kleinen.

Mit Walis hatte die Infinitesimalmathematik auf der britischen Insel bereits einen hervorragenden Vertreter gefunden. Ein jüngerer Landsmann, Barrow, verdient es ebenfalls, aus der großen Zahl der Pioniere der Infinitesimalmathematik herausgehoben zu werden. Er fand, daß das Quadraturproblem und das Tangentenproblem zueinander inverse Probleme sind; in moderner Formulierung bedeutet dies die Entdeckung des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung (Anm. 8.3).

Isaac Newton und die Fluxionsrechnung

Bereits als Student lernte Newton von seinem Lehrer Barrow die eine mathematische Grundkonzeption jener in Entwicklung befindlichen Infinitesimalmathematik kennen, nämlich die der „fließenden Größen“, die dieser u. a. in seinen „*Lectiones mathematicae*“ (Mathematische Vorlesungen) von 1664/66 vorgetragen hatte. Als Newton die wegen des verheerenden Pestzuges geschlossene Universität Cambridge verließ und in sein Heimatdorf flüchtete, reiften dort in ländlicher Stille – als er schon im Besitz der wesentlichen Ideen der modernen Naturwissenschaft und Mathematik war – während der Jahre 1665/67 neben den Grundvorstellungen zur Gravitation, zur Lichttheorie auch die zur Infinitesimalmathematik heran. Dort schuf er die Grundlagen sowohl zur Fluxionsrechnung als auch zur Theorie der unendlichen Reihen. Freilich hat es noch lange gedauert, bis Newton diese Ideen in systematischer Form der wissenschaftlichen Öffentlichkeit zugänglich machen konnte und wollte. Dabei stand Newtons Leistung auf dem Gebiet der Infinitesimalmathematik im allerengsten Zusammenhang mit der Vollendung des Aufbaus der klassischen Mechanik. Daher bemerkt Engels:

„Die erste Periode der neueren Naturwissenschaften schließt – auf dem Gebiet des Unorganischen – mit Newton ab. Es ist die Bewältigung des gegebenen Stoffes, sie hatte im Bereich des Mathematischen, der Mechanik und Astronomie, der Statik und Dynamik, Großes geleistet, besonders durch Kepler und Galilei, aus denen Newton die Folgerungen zog.“ ([L 8.16], S. 465)

Von Newtons Beiträgen zur Infinitesimalmathematik kommen im wesentlichen drei selbstständige Abhandlungen in Betracht, dazu einige längere Passagen aus den „*Principia*“.

Da ist zunächst eine „Reihenlehre“. Sie wurde möglicherweise bereits 1665/66 im wesentlichen skizziert, aber erst 1711 im Druck publiziert. Da ist ferner der „*Tractatus de quadratura curvarum*“, ausgearbeitet um das Jahr 1676 und publiziert 1704 als Anhang zu den „*Optics*“. Da ist weiter eine zusammenfassende Darstellung der Fluxionsrechnung, die, um 1671/72 zunächst in lateinischer Sprache niedergeschrieben, erst 1736, nach Newtons Tode, in englischer Sprache als „*The Method of Fluxions and Infinite Series*“ erschien.

Und schließlich geht Newton im Abschnitt I des Buches I der „*Principia*“ auf seine „Methode der ersten und letzten Verhältnisse“ ein, wo theoretisch-mathematische Grundlagen für die rechnerisch-mathematische Behandlung physikalischer Probleme bereitgestellt werden sollen. Er will sich von der antiken Methode der Bestimmung von Grenzwerten mittels indirekter Beweise ebenso lösen wie von der schwer durchschaubaren Methode der Indivisibeln. Vielmehr bemüht er sich um eine

Grundlage für echte Grenzübergänge; er findet sie durch den folgenden Lehrsatz, den er nach Art eines Prinzips benutzt:

„Größen, wie auch Verhältnisse von Größen, welche in einer gegebenen Zeit sich beständig der Gleichheit nähern und einander vor dem Ende jener Zeit näher kommen können als jede gegebene Grösse, werden endlich einander gleich.“ ([L 8.27], S. 46)

„Ich habe ... (dies, Wg) vorausgeschickt, um künftig der weitläufigen Beweisführung mittelst des Widerspruchs, nach der Weise der alten Geometer, überhoben zu sein. Die Beweise werden nämlich kürzer durch die Methode der untheilbaren Größen (d. h. der Indivisibeln, Wg). Da aber die Methode des Untheilbaren etwas anstössig ist und daher für weniger geometrisch (d. i. mathematisch, Wg) gehalten wird, so zog ich es vor, die Beweise der folgenden Sätze auf die letzten Summen und Verhältnisse verschwindender und auf die ersten werdender Größen zu begründen, ...“ ([L 8.27], S. 53)

„Jene letzten Verhältnisse, mit denen die Größen verschwinden, sind in der Wirklichkeit nicht die Verhältnisse der letzten Größen, sondern die Grenzen, denen die Verhältnisse fortwährend abnehmender Größen, sich beständig nähern, und denen sie näher kommen, als jeder angebbare Unterschied beträgt, welche sie jedoch niemals überschreiten und nicht früher erreichen können, als bis die Größen ins Unendliche verkleinert sind.“ ([L 8.27], S. 54)

Man kann nicht umhin, die klare Einsicht Newtons in die mit einem Grenzübergang verbundenen logisch-begrifflichen Schwierigkeiten zu bewundern, eine Aufgabe, um deren Bewältigung er ein Leben lang vergeblich gerungen hat.

So gründete Newton seine Infinitesimalmathematik auf Analogien zur Kinematik, wie überhaupt seine Form der Infinitesimalrechnung letztlich auf physikalisch-mechanischen und naturphilosophischen Grundkonzeptionen beruht.

Nach Newton gibt es eine objektiv existierende, unabhängig von allen Geschehnissen verlaufende Zeit. Alle Körper bewegen sich in einem objektiv existierenden Raum, der unabhängig ist von allen darin befindlichen Körpern. Alle veränderlichen Größen, also auch die mathematischen Größen, sind in dem Sinne physikalische Größen, daß sie von der objektiv verlaufenden Zeit abhängen. Durch „Fließen in der Zeit“, durch stetige Bewegung, entstehen aus Punkten Linien, aus Linien Flächen, aus Flächen Körper usw. Newton steht also voll in der Traditionslinie Demokritos, Kepler, Cavalieri, Wallis, Barrow. Diese fließenden mathematischen Größen nennt Newton Fluenten (d. h. Fließende). Ihre Geschwindigkeiten, die wir heute als Ableitungen einer Variablen nach der Zeit bezeichnen würden, heißen „Fluxionen“.

„Ich betrachte hier die mathematischen Größen nicht als aus äußerst kleinen Teilen bestehend, sondern als durch stetige Bewegung beschrieben.“ ([L 8.19], S. 3)

„Die unbestimmten Größen betrachte ich im folgenden als in stetiger Bewegung wachsend oder abnehmend, d. h. als fließend oder abfließend. Und ich bezeichne sie mit den Buchstaben z , y , x , v und ihre Fluxionen oder Wachstumsgeschwindigkeiten drücke ich durch dieselben Buchstaben mit Punkten versehen aus, also durch $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{v}$. Von diesen Fluxionen gibt es wieder Fluxionen oder mehr oder weniger rasche Änderungen. Man kann sie die zweiten Fluxionen von z , y , x , v nennen und so bezeichnen: $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{v}$.“ ([L 8.19], S. 7)

Der dritte wichtige Begriff der Newtonschen Fluxionsrechnung ist das „Moment einer Größe“. Newton beschreibt es als einen „gerade noch wahrnehmbaren Zuwachs einer Größe“ und bezeichnet es mit o . Demnach ist o das Moment der Zeit, zo das Moment der Fluente z und $\dot{x}o$ das Moment der Fluxion $\dot{x}$; dies letztere würde etwa dem heutigen Differential entsprechen.

Auf diesen Grundkonzeptionen beruht Newtons Fluxionsrechnung, die durch ihn

sowohl zu einem weitreichenden mathematischen Hilfsmittel bei der Bewältigung physikalisch-mechanischer Probleme als auch zu einer in sich geschlossenen mathematischen Theorie ausgestaltet wurde. Newton behandelt drei große Themenkreise:

1. Die Beziehung zwischen den Fluents untereinander ist gegeben. Zu bestimmen ist die Beziehung zwischen ihren Fluxionen. Dies ist das Grundproblem der Differentiation.
2. Eine Gleichung ist vorgegeben, in der neben Fluents auch Fluxionen von Größen enthalten sind. Gesucht sind die Beziehungen zwischen jenen Fluents. Dies ist das Grundproblem der Integration. Es schließt ausdrücklich mehr ein als die Bestimmung der Stammfunktion, zugleich nämlich auch das der Integration von Differentialgleichungen.
3. Anwendungen der Fluxionsrechnung, u. a. auf die Bestimmung der Tangenten an Kurven, auf die Berechnung von Maxima und Minima und des Krümmungsmaßes von Kurven, auf die Quadratur und Rektifikation von Kurven.

Das Integrations- (Quadratur-) Problem erscheint als Umkehrung der Differentiation (Fluxionenbildung). Da die Bildung der Fluxionen rechnerisch relativ einfach, sozusagen routinemäßig zu vollziehen und auch auf Irrationalitäten wie z. B. Wurzelfunktionen auszudehnen ist, stellt Newton in „Quadratura curvarum“ eine Tabelle von Integrationsergebnissen auf, die er durch inverse Interpretation von Differentiationen gewonnen hat.

Bei dieser Grundauffassung – Integration lediglich als Umkehrung des Differenzierens – ist es noch lange geblieben. Erst im 19. Jh. wurde die Integration als selbständige, d. h. von der Differentiation unabhängige mathematische Operation eingeführt.

Die folgenden Beispiele stammen aus der „Method of Fluxions“. Es soll die Gleichung $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ differenziert werden; x und y hat man sich als Variable in Abhängigkeit von der Zeit zu denken. Bei Newton heißt es:

„Sei nun irgendeine Gleichung $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ gegeben und ersetze $x + \dot{x}o$ für x und $y + \dot{y}o$ für y , dann ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2ox + \dot{x}^3o^3 \\ - ax^2 - 2a\dot{x}ox - a\dot{x}^2oo \\ + axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}oo \\ - y^3 - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2oy - \dot{y}^3o^3 \end{aligned} \right\} = 0.$$

Nun ist nach Voraussetzung $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, welche demnach gestrichen werden. Die verbleibenden Terme werden durch o dividiert, es bleiben

$$\begin{aligned} 3\dot{x}x^2 + 3\dot{x}^2ox + \dot{x}^3oo - 2a\dot{x}x - a\dot{x}^2o + a\dot{x}y \\ + a\dot{y}x + a\dot{x}\dot{y}o - 3\dot{y}y^2 - 3\dot{y}^2oy - \dot{y}^3oo = 0. \end{aligned}$$

Aber da vorausgesetzt war, daß o unendlich klein ist und daß es die Momente der Größen repräsentieren kann, werden die Terme, die damit multipliziert sind, nichts sein in Anbetracht des Restes. Deswegen verschmähe ich sie und es bleibt

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0.^{14}$$

[L 8.18], S. 24/25, engl.)

Das folgende Beispiel zeigt die Integration einer Gleichung, die sowohl Fluenten als auch Fluxionen enthält: Für $\dot{y}y = \dot{x}y + x\dot{x}y$ gibt Newton als Lösung die Reihenentwicklung

$$y = x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7 - + \dots$$

an. (Vgl. S. 178)

Die Folgegeschichte der Infinitesimalmathematik war im 18. Jh. stark belastet von einem mit großer Erbitterung geführten Streit um die Priorität der Entdeckung der Infinitesimalrechnung zwischen den Anhängern von Newton bzw. Leibniz, einem Streit, der bis weit ins 20. Jh. von nationalistischen Emotionen begleitet war. Es steht heute einwandfrei fest, daß Newton und Leibniz beide selbständig, also unabhängig voneinander zur Infinitesimalmathematik gelangt sind. Newton fand die Fluxionsrechnung, bevor Leibniz zur Differentialrechnung und Integralrechnung vorstieß; aber Leibniz hat zuerst darüber publiziert (Anm. 8.4).

Es gab während der 70er Jahre auch einiges an Briefwechsel zur Infinitesimalmathematik zwischen Newton und Leibniz, der allerdings von Seiten Newtons mit Zurückhaltung geführt wurde. So teilte Newton im Jahre 1676 seine Fluxionsrechnung nicht direkt mit, sondern nur in Form zweier Anagramme, also in durch Buchstabenversetzung verschlüsselter Form. Das erste Anagramm lautete

6a cc d ae 13e ff 7i 3l 9n 4o 4q rr 4s 9t 12v x.

Der hierin verborgene Text heißt „Data aequatione quocunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa“ (Bei gegebener Gleichung zwischen beliebig vielen fließenden Größen deren Fluxionen zu finden und umgekehrt). Leibniz mußte das Anagramm unverständlich bleiben, obwohl er selbst um eben diese Zeit die Differential- und Integralrechnung gefunden hatte. Man hat einmal gesagt, daß es eines viel größeren Scharfsinns bedurft hätte, dieses Anagramm aufzulösen, als selbständig die Differential- und Integralrechnung zu erfinden.

G. W. Leibniz und die Erfindung des Calculus

War Newton bei der Entwicklung der Fluxionsrechnung von physikalisch-mechanischen Gesichtspunkten geleitet worden, so ging Leibniz – neben dem gedanklichen Anschluß an die Indivisibeln-Theorie – von einer stark philosophisch-erkenntnistheoretisch geprägten Gedankenwelt aus. Aus der Begegnung dieser zwei Ideenkreise ging die Differential- und Integralrechnung hervor, der „Calculus“, wie man damals sagte.

Leibniz besaß eine fast unglaubliche geistige Beweglichkeit und einen schier unerschöpflichen Gedankenreichtum. Seine Leistung umfaßt Mathematik und Theologie, Physik und Biologie, theoretische Logik und Geschichtswissenschaft, Wissenschaftsorganisation und Erkenntnistheorie.

Während der Jahre 1672 bis 1676 weilte er als Diplomat in Paris und eignete sich

dort in einem Sturmloch ohnegleichen die damals neueste Mathematik an. Seit seiner Studienzeit hatte Leibniz die Idee einer allgemeinen Begriffsschrift vorgeschwebt, mit deren Hilfe es möglich sein sollte, aus allen denkmöglichen Aussagen, welche durch Kombination von durch Buchstaben symbolisierten Begriffen erhalten werden können, durch eine Art formaler Rechnung die wahren Aussagen auszusondern. Gewiß war dies eine Utopie, aber es war eine großartige Idee, die auf die Entwicklung der späteren mathematischen Logik hindeutete.

Übrigens ist es dieser Ansatzpunkt, der Leibniz — neben Descartes und Euler — zu einem der bedeutendsten Gestalter der modernen mathematischen Symbolik werden ließ. Von ihm stammt die Forderung:

„Bei den Bezeichnungen ist darauf zu achten, daß sie für das Erfinden bequem sind. Dies ist am meisten der Fall, so oft sie die innerste Natur der Sache mit Wenigem ausdrücken und gleichsam abbilden. So wird nämlich auf wunderbare Weise die Denkarbeit vermindert.“ ([L 8.14], S. 74)

Gemäß dieser Maxime beriet sich Leibniz mit zahlreichen Mathematikern über die Wahl der Symbole. Auf ihn gehen die Zeichen d und $\int$ (das Wort Integral wurde von den Gebrüdern Bernoulli vorgeschlagen), die Verwendung von Indizes und Doppelindizes, die Schreibweise für die Proportion mit Doppelpunkten und Gleichheitszeichen, eine Art Determinantenschreibweise u. a. m. sowie der Fachausdruck „Funktion“ zurück.

Leibniz hatte seines schlechten Gedächtnisses wegen die Gewohnheit, auch Ideen und Absichten schriftlich zu fixieren. Die so erhaltene Notiz vom 29. Oktober 1675, niedergeschrieben in Paris, dokumentiert eine Sternstunde in der Geschichte der Mathematik, die Geburt des Calculus:

„Es wird nützlich sein, statt der Gesamtheiten des Cavalieri: also statt ‚Summe aller y' von nun an $\int y \, dy$ zu schreiben. Hier zeigt sich endlich die neue Gattung des Kalküls, die der Addition und Multiplikation entspricht. Ist dagegen $\int y \, dy = \frac{y^2}{2}$ gegeben, so bietet sich sogleich das zweite auflösende Kalkül, das aus $d\left(\frac{y^2}{2}\right)$ wieder y macht. Wie nämlich das Zeichen $\int$ die Dimension vermehrt, so vermindert sie das d . Das Zeichen $\int$ aber bedeutet eine Summe, d eine Differenz.“ ([L 8.29], S. 46) (Anm. 8.5)

Leibniz trug sich lange mit der Absicht, eine zusammenhängende Darstellung der Infinitesimalmathematik, eine „scientia infiniti“ zu schreiben, doch ließen dies die weiteren Lebensumstände nach 1676 nicht zu. Ihm blieb nur die Publikation von Einzelergebnissen, die freilich bedeutend genug waren. So gab er 1682 die unendliche

Reihe für $\frac{\pi}{4}$ nebst dem Konvergenzkriterium für alternierende Reihen bekannt und

behandelte das Brechungsgesetz der Optik als Extremwertproblem. Im Jahre 1684 erschien die wegweisende Abhandlung „Nova methodus...“ (Neue Methode der Maxima, Minima sowie der Tangenten, die sich weder an gebrochenen, noch an irrationalen Größen stößt, und eine eigentümliche darauf bezügliche Rechenart). Sie enthält eine Art Definition des Differentials, ohne Beweis die Differentiationsregeln für Summe, Produkt, Quotient und Potenz, die Kettenregel, ferner die Bedingungen $dv = 0$ für die Extremwerte und $ddv = 0$ für die Wendepunkte. Zum

erstenmal tritt das Wort „Differentialgleichung“ auf; es folgen geometrische Anwendungen. Zwei Jahre später wurde das Integralzeichen zum erstenmal im Druck verwendet. Daneben stehen Arbeiten, in denen die Tragweite des neuen Kalküls an Beispielen — elastischer Widerstand eines Balkens, Isochrone, Maß der Kraft, Kettenlinie u. a. m. — demonstriert wird. Das Zeitalter der Infinitesimalmathematik hat begonnen.

Der große Vorzug der Leibnizschen Infinitesimalrechnung bestand in ihrer kalkülmäßigen Handhabbarkeit; darauf beruhte ihr schließlicher Sieg über die Newtonsche Fluxionsrechnung.

Leibniz war sich der Unbestimmtheiten und logischen Widersprüchlichkeiten seines Differentialbegriffs und des Umgangs mit den „unendlich kleinen Größen“ sehr wohl bewußt. Es gibt zahlreiche unterschiedliche, ja sogar gelegentlich sich widersprechende Äußerungen von Leibniz über den Umgang mit dem Unendlichen; die folgende Passage stammt aus dem Jahre 1702.

„Um daher diese subtilen Streitfragen zu vermeiden, begnügte ich mich, da ich meine Erwägungen allgemein verständlich machen wollte, das Unendliche durch das Unvergleichbare zu erklären, d. h. Größen anzunehmen, die unvergleichlich größer oder kleiner als die unsrigen sind. Auf diese Weise nämlich erhält man beliebig viele Grade unvergleichlicher Größen, sofern ein unvergleichlich viel kleineres Element, wenn es sich um die Feststellung eines unvergleichlich viel größeren handelt, bei der Rechnung außer acht bleiben kann. So ist etwa ein Teilchen der magnetischen Materie, die das Glas durchdringt, einem Sandkorn, dieses wiederum der Erdkugel, die Erdkugel schließlich dem Firmament nicht vergleichbar ...

Hierbei ist jedoch zu berücksichtigen, daß die unvergleichlich kleinen Größen, selbst in ihrem populären Sinn genommen, keineswegs konstant und bestimmt sind, daß sie vielmehr, da man sie so klein annehmen kann, als man nur will, in geometrischen (d. h. mathematischen, Wg) Erwägungen dieselbe Rolle wie die Unendlichkleinen im strengen Sinne spielen. Will nämlich ein Gegner unseren Sätzen die Richtigkeit absprechen, so zeigt unser Kalkül, daß der Irrtum geringer ist, als irgendeine angebbare Größe, da es in unserer Macht steht, das Unvergleichbar-kleine — das man ja immer so klein, als man nur will, annehmen kann — zu diesem Zwecke hinlänglich zu verringern ... und zweifellos liegt darin der strenge Beweis unserer Infinitesimalrechnung.“ ([LA 1], S. 165/166)

Gewiß stecken in dieser Passage rationale und dialektische Denkelemente, die der Aufhellung der schwierigen begrifflichen Probleme bei den Grenzübergängen hätten dienen können; sie laufen auf Ansätze einer Konzeption des Unendlich-Kleinen als einer potentiell verschwindenden Größe hinaus.

Vorlesung 9

Aufklärung: Ausbau der infinitesimalen Methoden

INTRODUCTIO IN ANALYSIN INFINITORUM.

AUCTORE

LEONHARDO EULERO,

*Professore Regio BEROLINENSI, & Academia Im-
periali Scientiarum PETROPOLITANÆ
Socio.*

TOMUS PRIMUS.



LAUSANNÆ,

Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

MDCCXLVIII

Titelblatt L. Euler: Introductio in analysin infinitorum, Lausanne 1748

Ausbau der infinitesimalen Methoden

Die Fülle der begrifflichen Schwierigkeiten demonstriert die Größe der geistigen Leistung dreier Generationen von Mathematikern, die eine durchgreifende wissenschaftliche Revolution in der Mathematik vollzogen haben. Daher bemerkt Engels:

„Von allen theoretischen Fortschritten gilt wohl keiner als ein so hoher Triumph des menschlichen Geistes wie die Erfindung der Infinitesimalrechnung in der letzten Hälfte des 17. Jahrhunderts. Wenn irgendwo, so haben wir hier eine reine und ausschließliche Tat des menschlichen Geistes.“ ([L 9.20], S. 530)

Entstehung einer Theorie der unendlichen Reihen

Bereits vor dem 17. Jh. hatte es Beispiele für den Umgang mit unendlichen Reihen gegeben. Der junge Leibniz, im Vollgefühl seiner mathematischen Ambitionen, hatte „Summen“ von unendlichen Reihen gesucht und sogar hochtrabend verkündet, er könne die Summe *jeder* unendlichen Zahlenreihe angeben, – wobei er die Schwierigkeiten natürlich bei weitem unterschätzte. Aber es gelang ihm z. B. die Summation der Reihe der reziproken Dreieckszahlen: Gesucht sei die Summe der Reihe

$$A: \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots,$$

Dann ist

$$\frac{1}{2} A: \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots,$$

Diese Reihe vergleicht Leibniz mit der Reihe

$$B: \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

bzw. mit

$$B - 1: \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

Durch Addition von $B - 1$ und $\frac{1}{2} A$ erhält er

$$B - 1 + \frac{1}{2} A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = B.$$

Also hat A die Summe 2. Das Ergebnis ist tatsächlich richtig, aber seine Schlußweisen sind heute vollständig unhaltbar; z. B. ist die zum Vergleich herangezogene Reihe B divergent!

Den historischen Ansatzpunkt, der zu einer Theorie der unendlichen Reihen führen sollte, hat man jedoch im Quadraturproblem zu suchen: Hatte Wallis durch eine großangelegte Induktion das Quadraturproblem für alle Potenzfunktionen

$y = x^m$ (m ganz oder gebrochen, rational oder irrational) bewältigen können, so bereitete der Ausnahmefall $m = -1$ allerlei Kopfzerbrechen. Der Zusammenhang zur Logarithmusfunktion mußte erst hergestellt werden.

So veröffentlichte der Engländer Lord Brouncker 1668 eine Reihenentwicklung, die er durch geometrische Quadratur eines Flächenstücks unterhalb der Hyperbel $x \cdot y = 1$ erhielt. In heutiger Schreibweise entspräche das der Reihenentwicklung

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots,$$

In demselben Jahr noch erschien eine Arbeit von Gregory, die sich mit der Quadratur des Kreises und der Hyperbel befaßte. Dort treten die Worte „divergent“ und „konvergent“ (von lat. vergere, sich nähern) als Fachtermini auf.

Überhaupt war 1668 ein für die Theorie der unendlichen Reihen entscheidendes Jahr: Der aus Holstein stammende, aber in England lebende N. Mercator (Kauffman) gab ein Buch unter dem Titel „Logarithmotechnica“ heraus, das den Zusammenhang zwischen Logarithmusfunktion und Hyperbelquadratur herausarbeitete.

Da die allgemeine Integrationsregel $\int_0^x x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1}$ für $m = -1$ versagt, ging Mercator von dem Integranden $\frac{1}{1+x}$ aus und bildete durch formale Anwendung algebraischer Divisionsregeln

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - + \dots$$

Dann griff Mercator auf die Integration der Parabeln zurück, indem er ohne zu zögern die unendliche Reihe gliedweise integrierte:

$$\int_0^x \frac{1}{1+x} dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \dots;$$

er erhielt so eine Reihenentwicklung, die $\ln(1+x)$ entspricht.

Die Publikationen von Brouncker, Gregory und Mercator über logarithmische Reihen erfolgten zeitlich nach ähnlichen Entdeckungen anderer Wissenschaftler, z. B. von Hudde und Newton. Aber die „Logarithmotechnica“ von Mercator löste eine Art Kettenreaktion aus: Weitere Publikationen folgten rasch, und Newton entschloß sich, eine bereits in Teilen vorhandene zusammenhängende Darstellung der Reihenlehre bei der Royal Society zu hinterlegen und damit seine Verdienste um das neue Gebiet zu dokumentieren. Dies geschah 1669; die Abhandlung trägt den Titel „De analysi per aequationes numero terminorum infinitas“ (Über die Analyse mittels der der Zahl ihrer Glieder nach unendlichen Gleichungen).

Newton knüpft bei seinen Untersuchungen zur Reihenlehre speziell an Barrow und an die „Logarithmotechnica“ an. Aber er geht weit darüber hinaus. Seine eigenen bedeutenden Ergebnisse und die systematische Anordnung des Stoffes begründeten bereits eine selbständige Theorie der unendlichen Reihen.

Newtons unmittelbare Absicht bestand noch in zwei Zielen, in der Quadratur komplizierter Kurven und in der Auflösung von Gleichungen. Hierzu wird als Hauptmittel die Reihenentwicklung eingesetzt; im Falle der Quadratur mit nachfolgender gliedweiser Integration. Mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten findet er beispielsweise für die Gleichung $y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$ in zwei Variablen die Reihenentwicklung

$$y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} - + \dots$$

Dies unterstellt, daß x einigermaßen klein ist. Allerdings hat Newton noch keine Konvergenztheorie, aber er besitzt mathematischen Instinkt genug, um gelegentlich die Reihenentwicklung zu unterscheiden „für kleines x “ und „für sehr großes x “. So gibt er zum Beispiel für die Gleichung

$$y^3 + axy + x^2y - a^3 - 2x^3 = 0$$

und „sehr großes x “ eine Reihenentwicklung nach fallenden Potenzen, nämlich

$$y = x - \frac{a}{4} + \frac{a^2}{64x} + \frac{131a^3}{512x^2} + \dots$$

Insgesamt ist der Spielraum der Methoden in Newtons „De analysi...“ bereits außerordentlich groß. Man begegnet dem Verfahren der Reihenumkehrung und der Methode der unbestimmten Koeffizienten. Mit Reihenentwicklungen werden Wurzeln gezogen, Quadraturen und Rektifikationen vorbereitet, und es werden Reihendarstellungen für spezielle Funktionen gegeben, u. a. für die Exponentialfunktion, die Logarithmusfunktion und die trigonometrischen Funktionen.

Merkwürdigerweise findet sich in „De analysi...“ die Binomialentwicklung nicht, obwohl Newton damals längst in deren Besitz war und ihre große Tragweite erkannt hatte. In einem Brief an Leibniz von 1676 hat Newton später geschildert, wie er von der Kreisquadratur, also vom Integral $\int \sqrt{1-x^2} dx$ ausgehend, zur allgemeinen Binomialreihe gelangt ist. Bei Newton tritt sie in der Form

$$(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \dots$$

auf; dabei bedeuten m und n beliebige positive ganze Zahlen. (Dabei bezeichnet A das erste, B das zweite, C das dritte Glied der Reihe, usw. Durch Einsetzen erhält man die heutige Schreibweise.)

Insgesamt ist Newton imstande gewesen, die Gesamtheit aller Integrale der Form $\int ax^{\lambda}(b+cx^{\mu})^{\nu} dx$ (λ, μ, ν ganzzahlig) durch Reihenentwicklung mit nachfolgender gliedweiser Integration zu bewältigen. Die Reihenentwicklung bricht ab, wenn $\frac{\lambda+1}{\mu}$ positiv und ganz oder wenn $\frac{\lambda+1}{\mu} + \nu$ ganz ist.

Es scheint, daß auch Gregory bereits um 1668/70 im Besitz der Taylorschen Reihe gewesen ist. Überhaupt hat Gregory, der früh verstorben ist, für die Infinitesimal-

mathematik, speziell für die Reihenlehre, Bedeutendes geleistet; u. a. gab er Reihenentwicklungen für $\arctan x$, $1 : \cos x$ und $\ln \tan x$. Gregory gehört auch zu den selbständigen Entdeckern des Fundamentalsatzes der Infinitesimalrechnung.

Während des ganzen 18. Jh. ist die Reihenlehre ein breit und weit behandeltes Thema geblieben. Auch auf dem Kontinent wurden wesentliche Ergebnisse zur Reihenlehre gefunden, etwa durch die Gebrüder Bernoulli, durch Euler. Doch handelte es sich mehr um einen Ausbau in die Breite statt in die Tiefe, also um eine Ausschöpfung der bereits im 17. Jh. eröffneten Möglichkeiten für Quadratur, Rektifikation, Komplanation, Auflösen von Gleichungen, Reihenentwicklung von Funktionen und Lösen von Differentialgleichungen im Zusammenhang mit astronomischen und mechanischen Problemen. Dies ging Hand in Hand mit dem Ausbau der formalen Seite der Reihenlehre, die so zu einem verlässlichen und weitreichenden Hilfsmittel und Bestandteil der Analysis wurde. Doch fehlte es noch an einer Konvergenztheorie.

Herausbildung des Funktionsbegriffs

Bis zu einem gewissen Grade kann man die Rechentafeln der babylonischen Mathematik, einige Tendenzen der Kegelschnittslehre bei Apollonios oder die astronomischen Tafeln des „Almagest“ ebenso als Vorstufen der Herausbildung des Funktionsbegriffs betrachten wie etwa auch die Theorie der Formaltituden des Nicolaus Oresme im europäischen Mittelalter.

Doch soll man bei all solchen „Vorstufen“ nicht übersehen, daß der Durchbruch zum wirklichen Funktionsbegriff erst mit dem Übergang von der Mathematik statisch betrachteter Größen zur Mathematik mit Variablen erfolgen konnte, also erst an der Wende vom 16. zum 17. Jh. Vieta, Fermat und Descartes unterschieden bewußt zwischen konstanten und veränderlichen Größen. Insofern hat die Entstehung der analytischen Geometrie direkt zur Herausbildung des Funktionsbegriffs beigetragen. In diesem Zusammenhang schrieb daher Engels:

„Der Wendepunkt in der Mathematik war Descartes' *variable Größe*. Damit die *Bewegung* und damit die *Dialektik* in der Mathematik, und damit auch sofort mit *Notwendigkeit* die *Differential- und Integralrechnung*, die auch sofort anfängt und durch Newton und Leibniz im ganzen und großen vollendet, nicht erfunden.“ ([L 9.20], S. 522)

Zwar traten die „Variablen“ bei Descartes nur, wie wir heute sagen würden, in algebraischen Ausdrücken auf. Dann aber setzte sich die Konzeption der „fließenden Größen“ (Fluenten, in der Sprechweise von Newton) durch und bildete zusammen mit der überragenden Rolle, die die Potenzreihenentwicklung in der Mathematik zu spielen begann, den innermathematischen Hintergrund zur Herausbildung des Funktionsbegriffs.

Der Sprachgebrauch Funktion (von lat. *functio*; *fungor*, *functus* sum bedeutet soviel wie ausführen, eine Verpflichtung erfüllen) geht auf Leibniz zurück. In einer Abhandlung von 1673 spricht er anfangs noch von der „*relatio*“ (Beziehung) zwischen „*Applikaten*“ (d. h. Ordinaten) und Abszissen, um dann fortzufahren, daß „andere Arten von Linien in einer gegebenen Figur irgendeine Funktion verrichten“ (Anm. 9.1).

In Abhandlungen, die Leibniz 1692 und 1694 publizierte, verwendete er „Funktionen“ (lat. *functiones*, franz. *fonctions*) bereits in einem erweiterten Sinne, und zwar für beliebige Arten von geraden Strecken (Abszissen, Ordinaten, Sehnen, Abschnitte von Tangenten, Normalen, Subtangenten, Subnormalen), die von einem festen Punkt oder von Punkten einer gegebenen Kurve abhängen. In eben diesem Sinne gebrauchte Jakob Bernoulli das Wort Funktion noch im Oktober 1694. Eine neue Etappe der Herausbildung des Funktionsbegriffs wurde durch den Briefwechsel von Leibniz mit Johann Bernoulli zwischen 1694 und 1698 eingeleitet; Bernoulli sprach in Übereinstimmung mit Leibniz von „Größen, die irgendwie aus unbestimmten und konstanten Größen gebildet sind“ (1694), während in eben diesen Jahren Leibniz u. a. die Begriffe Konstante, Variable, Koordinaten, Parameter und algebraische sowie transzendente Gleichung in nahezu demselben Sinne fixierte, wie wir sie heute gebrauchen.

Eine erste explizite Definition des Begriffs „Funktion“, die die verschiedenen Aspekte des sich herausbildenden Funktionsbegriffs in sich aufnahm, stammt von Johann Bernoulli aus dem Jahre 1718.

„Definition: Man nennt Funktion einer veränderlichen Größe eine Größe, die auf irgendeine Weise aus eben dieser veränderlichen Größe und Konstanten zusammengesetzt ist.“ ([L 9.5], Bd. II, S. 241, franz.)

Dort findet sich auch die Verwendung des Buchstabens φ als Funktionszeichen; falls es sich um die Funktion der Variablen x handelte, schrieb Johann Bernoulli φx . (Die Bezeichnung f und die Verwendung der Klammern bei $f(x)$ gehen auf Euler zurück.)

Das Selbstverständnis der Analysis als einer mathematischen Wissenschaft von Variablen und ihren Funktionen scheint erst von Euler ausdrücklich formuliert worden zu sein, und zwar in seinem berühmten Lehrbuch „Introductio in analysin infinitorum“ (Einführung in die Analysis der unendlichen kleinen Größen) von 1748. Dort findet sich eine Präzisierung des Bernoullischen Funktionsbegriffs (Anm. 9.2):

„Eine Funktion einer veränderlichen Größe ist ein analytischer Ausdruck, der in beliebiger Weise aus dieser veränderlichen Größe und aus Zahlen oder konstanten Größen zusammengesetzt ist.“ ([L 9.18], S. 18, lat.)

Dieser Definition hatte Euler eine Bestimmung von „Variable“ vorausgeschickt:

„Eine variable Größe ist eine unbestimmte oder allgemeine Größe, die in sich ohne Einschränkung alle bestimmten Werte einschließt ... Daher schließt eine veränderliche Größe ohne Einschränkung alle Zahlen ein, sowohl positive als auch negative, sowohl ganze als auch gebrochene, sowohl rationale als auch irrationale und transzendente. Sogar Null und imaginäre Zahlen sind nicht von der Bedeutung einer veränderlichen Größe ausgeschlossen.“ ([L 9.18], S. 17/18, lat.)

Mit dem Bernoulli-Eulerschen Funktionsbegriff war eine erste Etappe der Herausbildung des Funktionsbegriffs abgeschlossen. Freilich stieß sich diese Festlegung schon bald an neuen mathematischen Sach- und Problemkreisen: Indem Euler den Terminus „analytischer Ausdruck“ gebraucht hatte, war die Frage aufgeworfen, ob jede beliebig zeichenbare kontinuierliche oder diskontinuierliche Kurve, mit Knicken,

Überkreuzungen, eventuellen Unterbrechungen usw., als Bild einer „Funktion“ aufzufassen sei. Damit war zugleich die Frage gestellt, welche Arten von analytischen Ausdrücken zugelassen seien. Während des 18. Jh. verdichtete sich der Bedeutungsinhalt von analytischer Ausdruck auf algebraische Gleichung und (unendliche) Potenzreihe.

Gerade die beiden Fragen – willkürlicher Kurvenzug, Art des analytischen Ausdrucks – wurden sozusagen hochaktuell, als um die Mitte des 18. Jh. die schwingende Saite einer mathematischen Behandlung unterworfen wurde und neben Potenzreihen auch trigonometrische Reihen auftreten. Hiermit wurden Diskussionen eingeleitet, die schließlich um die Mitte des 19. Jh. im Zusammenhang mit der Verschärfung der Grundlagen der Analysis zu einem verallgemeinerten Funktionsbegriff führen sollten.

Weiterentwicklung der Infinitesimalmathematik

Zu Ende des 17. Jh. lagen mit Fluxionsrechnung und Calculus zwei „Infinitesimalmathematiken“ vor, die, der Reichweite nach einigermaßen äquivalent, sich doch der äußeren Erscheinungsform nach gänzlich verschieden darboten.

Während auf den britischen Inseln die Fluxionsrechnung ihre führende Rolle sogar noch bis in den Anfang des 19. Jh. halten konnte, setzte sich auf dem Kontinent die Leibnizsche Form der Infinitesimalrechnung verhältnismäßig rasch durch, und zwar insbesondere wegen der geschickten und einprägsamen Bezeichnungen. Vielleicht ein wenig hämisch hat Leibniz dies später dahingehend kommentiert, sein Calculus „ermöglichte der Mittelmäßigkeit Probleme anzugreifen, die bisher nur den Hochbegabten zugänglich gewesen“ ([L 9.25], S. 122) seien. Positiv interpretiert zeigt diese Bemerkung doch sehr treffend, um wie viel größer die Möglichkeiten der Mathematik selbst und um wie viel leichter der Zugang zur höheren Mathematik nun geworden war.

Mehrere Generationen von Mathematikern haben am Ausbau der infinitesimalen Methoden gearbeitet. Da wären in der ersten Generation der französischen Mathematiker de l'Hospital zu nennen sowie vor allem Johann Bernoulli und dessen Kreis, dem sein Bruder Jakob Bernoulli, sein Neffe Nikolaus sowie seine Söhne Nikolaus und Daniel Bernoulli angehörten. Sie wirkten teilweise noch zu Lebzeiten von Newton und Leibniz und sind durchaus als Pioniere der Infinitesimalmathematik zu verstehen.

Zur überragenden Gestalt der Mathematik des 18. Jh. wuchs der Schüler Johann Bernoulli, der aus Basel stammende Euler heran; ihm verdankt man die nahezu unglaubliche Anzahl von mehr als 860 Originalabhandlungen und eine große Anzahl pädagogisch hervorragender, zusammenfassender Darstellungen von Gebieten der Mathematik und ihren Anwendungsbereichen.

Das ausgehende 18. Jh. schließlich brachte auf dem Kontinent eine Reihe bedeutender Mathematiker hervor; in erster Linie seien hier im Zusammenhang mit der Analysis d'Alembert, Riccati, Lagrange, Clairaut, Monge, Legendre und Laplace genannt.

Ausbau der Fluxionsrechnung

Die britischen Mathematiker schufen im 18. Jh. zusammenfassende Darstellungen der Fluxionsrechnung. Die bedeutendste dieser Art ist der zweibändige „Treatise of Fluxions“ (1742) von Maclaurin, eine Antwort zugleich auf die Attacken des reaktionären Bischofs Berkeley gegen die Infinitesimalmathematik. Bei Maclaurin findet sich auch die nach ihm benannte Reihe, sogar mit Ansätzen echter Konvergenzbetrachtungen. Allerdings war diese schon früher (1715) von Taylor, zeitweilig Sekretär der Royal Society, aufgestellt worden, sogar in der allgemeineren, nach Taylor benannten Form, in der die Entwicklung einer Funktion an einer der Stelle x benachbarten Stelle sich durch eine unendliche Reihe wiedergeben läßt, wobei in den Termen dieser Reihe die Ableitungen erster, zweiter, ... Ordnung auftreten. Mit den später von Lagrange eingeführten Bezeichnungen schreiben wir heute

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \dots$$

Lagrange gab übrigens auch eine Form des Restgliedes beim Taylorsche Satz an.

Trotz aller im einzelnen erzielten wertvollen Beiträge, zu denen am Ende des 18. Jh. u. a. noch Landen und Waring beisteuerten, standen die britischen Mathematiker unter dem Druck einer nationalistisch gefärbten Verehrung ihres großen Landsmannes Newton und zugleich der Ablehnung des Ausländers Leibniz, dem zudem in einer nicht gründlich genug geführten Untersuchung von englischer Seite der offizielle Vorwurf des Plagiates an Newton gemacht worden war. Die teilweise selbstverschuldete Isolierung von der sich stürmisch entwickelnden Infinitesimalmathematik Leibnizscher Prägung führte dazu, daß die britische Analysis deutlich hinter der des Kontinents zurückblieb. Erst zu Beginn des 19. Jh. sollte hierin eine Wende eintreten; eine Gruppe jüngerer Wissenschaftler, der u. a. Peacock, Babbage und J. Herschel angehörten, gründete 1812 eine sog. „Analytische Gesellschaft“, die gegen alle Widerstände die allgemein verbreitete Leibnizsche Infinitesimalrechnung gegen die Fluxionsrechnung durchzusetzen vermochte.

Erste zusammenfassende Darstellungen der Infinitesimalmathematik

Leibniz hatte – aus Mangel an Zeit und Gelegenheit, aber wohl auch wegen einer gewissen geistigen Sprunghaftigkeit – nur Einzelabhandlungen, freilich überaus bedeutende, geliefert. Er erfüllte die historische Funktion eines großen Anregers, die in die Herausbildung einer Schar begeisterter Anhänger des neuen Calculus einmündete. Noch vor der Jahrhundertwende waren so – durch eine glückliche Verbindung des kalkülmäßigen Elementes mit den mathematischen Grundideen, durch die von Leibniz vorgezeichnete Synthese von Form und Inhalt – die meisten Ergebnisse gefunden, die zum heutigen Grundbestand der Differential- und Integralrechnung gehören, und war der Weg zur Theorie der Differentialgleichungen und zur Variationsrechnung geöffnet.

Bereits 1696 erschien die erste zusammenhängende Darstellung der Leibnizschen Infinitesimalmathematik aus der Feder des französischen Adligen de l'Hospital,

eines Liebhabermathematikers. Seine „Analyse des infiniment petit“ enthält u. a. die Differentiationsregeln algebraischer Ausdrücke, Bestimmung der Tangenten, der Extremwerte, der Wendepunkte, der Evoluten und Enveloppen.

Die Vorlage, d. h. der eigentliche mathematische Inhalt dieses Buches, geht jedoch auf Johann Bernoulli zurück, der um 1691/92 gegen Honorar den Feudalherrn de l'Hospital in die neue Infinitesimalmathematik eingeführt hatte (Anm. 9.3).

Johann Bernoulli, ursprünglich Mediziner, und sein 13 Jahre älterer Bruder Jakob, ein Theologe, hatten sich unter dem Eindruck der Leibnizschen Veröffentlichungen über Infinitesimalmathematik dieser neuartigen Disziplin mit ungeheurer Begeisterung zugewandt. Jakob übernahm 1687 eine Professur für Mathematik in Basel, Johann dagegen 1695 eine entsprechende Professur in Groningen in Holland. Nach dem frühen Tode Jakobs trat Johann 1705 dessen Nachfolge in Basel an und wirkte dort bis zu seinem Tode im Jahre 1748. Unglücklicherweise kam es zwischen den beiden Brüdern zu Eifersüchteleien, die sich schließlich zu immer schlimmeren und bösseren gegenseitigen Beleidigungen steigerten. Jakob war wohl der tiefere, der gründlichere Denker, während Johann mit Eleganz und Einfallsreichtum – und auch durch seine längere Schaffenszeit – noch stärker als Jakob auf die weitere Entwicklung gewirkt hat.

Johann Bernoulli unterrichtete seine Söhne Nikolaus und Daniel gemeinsam mit Euler; Basel war so eine Zeitlang die Hochburg der modernen Mathematik. Alle drei Studienfreunde – Nikolaus und Daniel Bernoulli, Euler – gingen in den 20er Jahren an die vom Zaren Peter I. ins Leben gerufene Akademie nach St. Petersburg, wo bald ein mathematisches Zentrum entstand, insbesondere durch das Wirken von Euler. Er begann dort bereits in den 30er Jahren eine Folge von Lehrbüchern zur Infinitesimalrechnung und ihren Anwendungen zu publizieren, eine Tätigkeit, die Euler auch während der Zeit seines Aufenthaltes an der Berliner Akademie (1741 bis 1766) und während der sich anschließenden zweiten Petersburger Schaffensperiode mit großem Erfolg fortsetzte. Man kann sogar sagen, daß der eigentliche moderne Typ des mathematischen Lehrbuches, der von den Grundlagen eines Gebietes in systematischer Darstellung zur Front der Forschung führt, erst von Euler begründet worden ist.

Euler eröffnete 1734 bzw. 1736 die Reihe seiner Lehrbücher mit einer zweibändigen „Mechanik“, die erstmals auf der Basis der Infinitesimalrechnung als durchgreifender mathematischer Methode geschrieben war. Es folgten eine „Rechenkunst“ (1738 gedruckt) und ein Werk über das „Schiffswesen“ (gedruckt 1749). Bereits in die Berliner Zeit fällt ein Lehrbuch der Berechnung der Planeten- und Kometenbahnen (erschienen 1744). Und dann folgten drei aufeinander abgestimmte Lehrbücher zur Infinitesimalrechnung, die „Introductio in analysin infinitorum“ („Einführung in die Analysis der unendlich kleinen Größen“, 2 Bände, 1745 geschrieben, 1748 gedruckt), die „Institutiones calculi differentialis...“ („Unterweisungen der Differentialrechnung...“, 1748 niedergeschrieben, 1755 erschienen) und „Institutiones calculi integralis...“ („Unterweisungen der Integralrechnung...“, 1763 verfaßt, 1768 bis 1770 in drei Teilen erschienen). Der Zeit seines zweiten Petersburger Aufenthaltes gehört die „Vollständige Anleitung zur Algebra“ (1770) sowie ein Lehrbuch der Optik an.

Die „Introductio ...“ vereinigt in sich nach Eulers Absicht alles, was notwendigerweise vorzuschicken sei, damit man die Infinitesimalrechnung erlernen kann: Funktionsbegriff, Einteilung und Umformung der Funktionen, Entwicklung von Funktionen in unendliche Reihen, Funktionen mehrerer Veränderlicher, Exponential- und Logarithmusfunktion und deren Reihendarstellung, trigonometrische Funktionen und deren Beziehungen untereinander, Kettenbrüche u. a. m. Im zweiten Band gibt Euler eine Einteilung der Kurven und deren Eigenschaften; er behandelt Kegelschnitte, Asymptoten, Kurven dritter und vierter Ordnung, Koordinatentransformationen, Flächen und deren Eigenschaften, usw.

Die „Differentialrechnung“ beginnt mit einer ausführlichen Theorie der Differenzen; auf ihr wird die Differentialrechnung aufgebaut als Rechnung, die bei klein werdenden Differenzen sozusagen „entsteht“. Die Verhältnisse der Zuwächse einer Veränderlichen sollen unter der Voraussetzung „beiderseitigen Nullseins“ untersucht werden. Demnach ist die Differentialrechnung die Methode, das Verhältnis der verschwindenden Zuwächse oder Inkremente zu bestimmen, welche die Funktionen veränderlicher Größen erhalten, wenn die veränderlichen Größen, deren Funktionen sie sind, um ein verschwindendes Inkrement vermehrt werden.

Eulers Vorstellung über die Differentiale läuft darauf hinaus, daß diese definitive Nullen sind. Da es aber unendlich viele Ordnungen von unendlich kleinen Größen gibt – die zwar alle gleich Null werden –, so gibt es echte Verhältnisse mit geometrischer Bedeutung; dies ermöglicht Infinitesimalrechnung.

Abgesehen von diesen logisch-begrifflichen Schwierigkeiten enthält die Differentialrechnung Eulers einen modern anmutenden Apparat der Infinitesimalrechnung: Differentiale aller Ordnungen, Differentiation der algebraischen und transzendenten Funktionen, Lösen von Differentialgleichungen, partielle Differentiation, Extremwerte usw. Ähnlich modern wirkt die „Integralrechnung“, die auch Eulers Meisterschaft bei der Beherrschung des Formalen offenbart.

Alle Lehrbücher Eulers sind mit wunderbarer Klarheit geschrieben und mit größtem methodischem Geschick aufgebaut. Die „Vollständige Anleitung zur Algebra“ soll Euler sogar seinem Diener, einem Schneidergesellen, diktieren haben und nicht eher den Text endgültig verabschiedet haben, bis dieser Laie den Inhalt ganz habe begreifen können.

Die somit im echten Geiste der europäischen Aufklärung geschriebenen Lehrbücher Eulers haben eine kaum zu überschätzende Wirkung auf die Entwicklung der Mathematik selbst ausgeübt, aber auch eine hervorragende Rolle bei der Ausbildung der naturwissenschaftlichen Komponente in der europäischen Aufklärung gespielt.

Neue Möglichkeiten durch die Infinitesimalmathematik

Mit der Durchbildung und dem Ausbau der Infinitesimalmathematik konnte ein großes Feld von Anwendungen der Mathematik neu erschlossen werden oder wenigstens der Weg in Richtung ihrer mathematischen Behandlung angebahnt werden. So zeigt sich ein zweites Spektrum praktischer, insbesondere mechanischer und astro-

nomischer Probleme, an denen die Mathematiker des 18. Jh. ihre eigene Kraft und die Leistungsfähigkeit des neuen Kalküls erproben konnten.

Newtons „Principia“ und die allgemeine Gravitationslehre gaben zusammen mit der Infinitesimalrechnung den Weg frei zur mathematischen Behandlung einer Fülle astronomischer Probleme: Bahn der Planeten und Kometen, Störungsrechnung, Dreikörperproblem, Bewegung des Erdmondes und der Monde des Jupiter, Sonnen- und Mondfinsternisse, Stabilität des Sonnensystems und vieles andere mehr. Mit den französischen Meridianmessungen 1735 in Peru und 1736/37 in Lappland unter Maupertuis konnte erwiesen werden, daß die Erde an den Polen abgeplattet ist, so, wie es aus Newtons Gravitationstheorie folgte. Damit war zugleich die andere, lange Zeit sogar vorherrschende Naturphilosophie widerlegt, die Cartesische Wirbeltheorie, nach der die Erde an den Polen hätte verlängert sein müssen. Im Jahre 1743 konnte Clairaut, der in Peru dabei gewesen war, die Monographie „*Théorie de la figure de la terre*“ der Öffentlichkeit übergeben. Zugleich entwickelte sich die karthographische Erschließung der riesigen Kolonialgebiete zu einem Gebiet starker mathematischer Aktivitäten. Dies alles lieferte bereits im 18. Jh. Ansatzpunkte für die rasche und weit fortgeschrittene Entwicklung der Differentialgeometrie, die im 19. Jh. durch Gauß eine zusammenfassende Darstellung erhielt.

Anfänge der Variationsrechnung

Schon Leibniz und die Bernoullis hatten wechselseitig sich und ihren Fachkollegen mit den Problemen der Kettenlinie, Isochrone und Brachystochrone Aufgaben gestellt, die das Aufsuchen spezieller Kurven zum Ziel hatten und deren Lösung bereits Fragestellungen der Variationsrechnung beantwortete. Jakob Bernoulli erkannte als erster das Wesen dieser Aufgabenstellung, daß es nicht um die Auffindung von Argumentstellen ging, an denen eine Funktion Extremwerte annimmt, sondern darum, aus einer unendlichen Anzahl von Vergleichsfunktionen eine solche Funktion oder Kurve aufzufinden, „welche irgend eine Wirkung am besten hervorbringt“.

Bereits während des 18. Jh. entwickelte sich unter den Händen der Bernoullis, Eulers, Lagranges und anderer aus diesen Ansätzen heraus die Variationsrechnung zu einem erstaunlichen Niveau. Konkrete Einzelprobleme wurden mathematisch behandelbar: Elastizität, z. B. neutrale Faser und Knicken von Balken, das allgemeine isoperimetrische Problem, die Behandlung geodätischer Linien auf konvexen Oberflächen, die Figur von Rotationskörpern bei Bewegung im widerstrebenden Mittel und vieles andere mehr. Darüber hinaus wurde, vom Fermatschen Problem des kürzesten Lichtweges ausgehend, das allgemeine mathematisch-physikalische Prinzip der kleinsten Wirkung aufgestellt und leidenschaftlich diskutiert, da es in enger Beziehung zu philosophisch relevanten Problemen des Aufklärungszeitalters stand.

Beginn einer Theorie der Differentialgleichungen

Wieder andere innermathematische und praktische Fragestellungen (z. B. Schwingungsprobleme) lieferten Motivationen für eine sich entwickelnde Theorie der Differentialgleichungen, sowohl der gewöhnlichen — die schon Newton und Leibniz im Ansatz in ihre Infinitesimalrechnung einbezogen hatten — als auch der partiellen Differentialgleichungen.

Es ist erstaunlich, bis zu welchem Maße bereits im 18. Jh. die Theorie der Differentialgleichungen vorangebracht werden konnte: Leibniz behandelte seit 1693 Differentialgleichungen erster Ordnung durch Separation der Variablen. Er und die Brüder Bernoulli bewältigten zum Ende des Jahrhunderts die nach Jakob Bernoulli benannte Differentialgleichung

$$y' + P(x)y = Q(x) \cdot y^n.$$

Johann Bernoulli benutzte zu Anfang des 18. Jh. das Verfahren des integrierenden Faktors. Insbesondere Euler beschäftigte sich mit einer zusammenhängenden Lösungstheorie der linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung; den für die homogene Gleichung mit konstanten Koeffizienten zum Ziel führenden Ansatz $y = e^{kx}$ machte er 1743 bekannt. Zwar fand Euler später noch Behandlungsformen auch für die inhomogene Differentialgleichung; die heute gebräuchliche Methode der Variation der Konstanten publizierte Lagrange im Jahre 1777, obwohl sie auch von Euler gelegentlich verwendet wurde. Die später nach Bessel benannte Differentialgleichung behandelte bereits Euler. Die Riccatische Differentialgleichung und die Legendreschen Polynome sprechen für sich. Euler und Clairaut studierten Integrabilitätsbedingungen und stießen auf die Methode der Integration vollständiger Differentiale. d'Alembert u. a. gelangten weit bei der Behandlung von Systemen linearer Differentialgleichungen. Die Begriffe allgemeine, singuläre und partikuläre Lösung wurden bereits zur Mitte des 18. Jh. geprägt und dafür geometrische Interpretationen gegeben.

Auf dem Gebiet der partiellen Differentialgleichungen wurden bereits im 18. Jh. wichtige Grundtatsachen entdeckt, insbesondere konnten die wichtigsten Typen linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung in ihrer physikalischen Bedeutung erkannt und studiert werden. d'Alembert (1749) und Euler stießen bis zur Erkenntnis vor, daß die Schwingung einer Saite durch Angabe der Anfangs- und Randbedingungen vollständig bestimmt ist. Um 1755 schlug Daniel Bernoulli für die Differentialgleichung der schwingenden Saite eine neuartige Lösung vor. Er ging von der Einsicht aus, daß der Ton einer schwingenden Saite von dem Grundton und einer Folge von Obertönen gebildet wird, und schloß so, daß die Lösung durch eine trigonometrische Reihe

$$y = a \sin \frac{\pi x}{\alpha} + b \sin \frac{2\pi x}{\beta} + c \sin \frac{3\pi x}{\gamma} + \dots$$

repräsentiert sei. Die Mehrzahl seiner Kollegen bezweifelte jedoch die Allgemeingültigkeit dieses Ansatzes; Daniel Bernoulli aber erhob diesen Ansatz gar in den

Rang eines allgemeinen Prinzips und berührte damit die Definition eines Grundbegriffs der Mathematik, die des Inhalts und Umfangs des Begriffs Funktion. Jedenfalls vertrat Daniel Bernoulli die These, daß man bei entsprechender Wahl der Parameter $a, b, c, \dots, \alpha, \beta, \gamma, \dots$ jede beliebige Kurve bzw. Funktion durch eine Reihe des obigen Typs darstellen könne. Seine Theorie, sagte er, eröffne die Möglichkeit, in der Natur existierende Bewegungen, die keinerlei Gesetz unterworfen zu sein schienen, auf einfache isochrone Bewegungen zurückzuführen.

Bei allen großartigen Erfolgen in der Behandlung von Differentialgleichungen waren grundlegende Fragen offen geblieben; z. B. fehlten Existenzbeweise und Konvergenzuntersuchungen für durch Reihenentwicklung gewonnene Lösungen. Hier blieb noch ein großes Arbeitsgebiet für künftige Mathematikergenerationen.

Infinitesimalmathematik und Anwendungen

Im Jahre 1736 erschien Eulers Lehrbuch der Mechanik. Schon der ausführliche Titel enthält den Hinweis, daß eine neue Ära bei der mathematischen Behandlung der Bewegungsprobleme begonnen hat: „*Mechanica, sive motus scientia analytice exposita*“ (Mechanik oder die Wissenschaft von der Bewegung auf analytische Weise dargestellt). Statt der synthetisch-geometrischen Methode, die bis dahin vorherrschend gewesen war und noch den „*Principia*“ von Newton als mathematisches Instrumentarium gedient hatte, wird nun systematisch die Infinitesimalmathematik, die Analysis, zur Behandlung mechanischer Probleme herangezogen. In diesem Sinne hat Eulers „*Mechanik*“ von 1736 eine programmatische Wirkung auf Mathematiker und Naturforscher seiner Zeit ausgeübt; Euler wurde zum Schrittmacher. Seine sog. zweite Mechanik, fast 30 Jahre später (1765) unter dem Titel „*Theoria notus*“ (Theorie der Bewegung) erschienen, stellte eine erweiterte, systematische Behandlung der Punktmechanik mit analytischen Methoden dar, die u. a. auch zur Behandlung von Kreiselbewegungen (Präzession der Äquinoktion) überging.

Die Himmelsmechanik wurde zu einem bevorzugten Feld der Anwendung der Infinitesimalmathematik; dort vermochte sie geradezu überwältigende Erfolge bei der minutiösen Beschreibung der Bewegung von Planeten und Erdmond zu erzielen. Darüberhinaus gab es einige praktische Fortschritte bei der Anwendung der Infinitesimalrechnung, im Artilleriewesen etwa, beim Entwurf energiespendender Wasserräder oder Turbinen hohen Wirkungsgrades, bei der Bestimmung günstiger Formen von Schiffsrümpfen und der Verteilung der Masten auf Segelschiffen. Im Jahre 1738 konnte Daniel Bernoulli seine „*Hydrodynamica*“ publizieren; Euler lieferte Standardwerke des Artilleriewesens und der praktischen Schiffsbaukunst, die in der Praxis zu großer Bedeutung gelangten.

Dennoch blieb insgesamt gesehen der Nutzen der Infinitesimalmathematik für die Produktionspraxis noch bescheiden. Die analytische Behandlung mechanischer Probleme der Bewegung insbesondere mußte starke Vereinfachungen und Idealisierungen vornehmen, auf die Berücksichtigung von Reibung, Materialeigenschaften etwa verzichten und ging daher oft genug an der Beschreibung wirklicher Abläufe vorbei. Dazu kam die Wirkung der Produktionsverhältnisse des Feudalabsolutismus, die

ihrerseits mit dazu beitrugen, daß die gesellschaftliche Kluft zwischen handwerklicher Praxis und der im Umfeld der Herrschenden angesiedelten Wissenschaft nicht geschlossen werden konnte. So existierten – in zwei ziemlich deutlich getrennten gesellschaftlichen Schichten – einerseits eine auf empirisch-handwerklicher Grundlage staunenswert weitentwickelte Ingenieurkunst und andererseits eine akademische, d. h. vorwiegend an den Akademien betriebene hochgezüchtete, ausgefeilte Mathematik. Erst mit der Ende des 18. Jh. einsetzenden Industriellen Revolution und der beginnenden Verwandlung der Wissenschaft in eine Produktivkraft konnte bewußt auf eine Begegnung von Mathematik und Technik hingearbeitet werden.

Auseinandersetzungen um die Infinitesimalmathematik

Es gehört zur Dialektik der Geschichte, daß das Zeitalter der europäischen Aufklärung von Aktionen der philosophischen Dunkelmänner und der politischen Reaktion begleitet war. Auch die Mathematik stand im Brennpunkt ideologischer Auseinandersetzungen. Den Ansatzpunkt lieferten die zweifellos bestehenden begrifflichen Unklarheiten beim Umgang mit dem Infinitesimalen; aus ihnen wurde der Versuch abgeleitet, idealistisch-philosophische Positionen zu stützen und auszubauen.

Bekanntlich hat Marx ausführliche mathematische Studien getrieben, u. a. auch zu historischen Problemen. Für jene Zeit spricht er direkt von einer „mystischen Periode“ in bezug auf Grundlagenfragen der Infinitesimalmathematik, in bezug also auf den Streit zwischen den Anhängern der Infinitesimalmathematik und denen der traditionellen Denkweise.

„Also: man glaubte selbst an den mysteriösen Charakter der neu entdeckten Rechnungsart, die wahre (und dabei namentlich auch in der geometrischen Anwendung überraschende) Resultate lieferte bei positiv falschem mathematischen Verfahren. Man war so selbst mystifiziert, schätzte den neuen Fund um so höher, machte die Schar der alten orthodoxen Mathematiker um so hirntoller und rief so das gegnerische Geschrei hervor, das selbst in der Laienwelt widerhallt und nötig ist, um den Neuen den Weg zu bahnen.“ ([L 9.19], S. 168)

Gelegentlich wirken die damaligen ideologischen Einkleidungen mathematischer Probleme heute grotesk. Zum Beispiel betrachtete der italienische Mönch und Mathematiker Grandi die Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Da bei verschiedener Klammersetzung

$$\text{entweder } (1 - 1) + (1 - 1) + \dots \quad \text{oder} \quad 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots,$$

diese Reihe entweder 0 oder 1 als Summe „ergab“, interpretierte Grandi dies in einer durchaus ernst gemeinten Abhandlung als Beweis für die Möglichkeit Gottes, die Welt aus dem Nichts zu schaffen. Andere Mathematiker wieder wiesen der Reihe unter diesem Dilemma die Summe $\frac{1}{2}$ zu.

Der Dichter Swift kleidete seine Angriffe gegen die Infinitesimalrechnung in seine Geschichten von „Gullivers Reisen“ (1726) ein. Die Auseinandersetzungen zwischen fortschrittlichen englischen Naturwissenschaftlern und dem Bischof Berkeley, dem

Begründer des idealistisch-philosophischen Systems des Empiriokritizismus, stellten einen typischen historischen Fall des ideologischen Mißbrauchs naturwissenschaftlich-mathematischer Ergebnisse dar; auch dann, wenn man weiß, daß Berkeley berechtigte Kritik an unklaren Punkten der Fluxionsrechnung geübt hat.

In einer 1734 erschienenen Druckschrift „The Analyst ...“ („Der Analytiker, oder eine Erörterung, gerichtet an einen ungläubigen Mathematiker, worin untersucht wird, ob der Gegenstand, die Prinzipien und die Schlußweisen der modernen Analysis deutlicher begriffen oder einleuchtender hergeleitet sind als die religiösen Geheimnisse und Glaubenspunkte“) führte Berkeley einen scharfen Angriff gegen aufklärerisches Denken; der hier apostrophierte ungläubige Mathematiker war der als freidenkerisch geltende Astronom und Mathematiker Halley. Wohl gibt Berkeley zu, daß die christlichen Glaubensgrundsätze nicht eigentlich bewiesen seien, aber er weist den Anspruch der Naturwissenschaften und der Mathematik, eine bessere Wissenschaft als die Theologie zu sein, energisch zurück. Ganz im Gegenteil: Die atheologisch oder antitheologisch sich gebärdende Mathematik sei so unsicher in ihren Grundlagen, daß man, wenn man schon die Mathematik als Wissenschaft bezeichne, erst recht die Theologie als sichere Wissenschaft akzeptieren müsse.

„Es muß in der Tat anerkannt werden, daß der große Autor der Fluxionsmethode (also Newton, Wg) die Fluxionen benutzt wie ein Gerüst bei einem Bau, bestimmt beiseite gelegt zu werden ..., sobald endliche Linien gefunden sind, die ihnen proportional sind. Aber diese endlichen Verhältnissglieder werden gefunden mit Hilfe von Fluxionen. Was also durch solche Proportionen und ihre Glieder erreicht wird, ist den Fluxionen zuzuschreiben — welche daher zuerst verstanden sein müssen. Und was sind diese Fluxionen? Die Geschwindigkeiten von verschwindenden Zuwüchsen. Und was sind diese verschwindenden Zuwüchse? Sie sind weder endliche Größen, noch unendlich kleine Größen noch auch nichts. Dürfen wir sie nicht die Gespenster abgechiedener Größen nennen?“ ([LA 31], S. 337/338, deutsch zitiert ([LA 1], S. 158)

Und schließlich:

„Aber wahrlich braucht jemand, der eine zweite oder dritte Fluxion, eine zweite oder dritte Differenz verträgt, so dünkt mich, in gar keinem Punkt der Theologie etwas am Zeuge zu flicken.“ (Deutsch zitiert [LA 32], S. 133)

Die Fluxionsrechnung fand aber alsbald Verteidiger, so u. a. Jurin, Sekretär der Royal Society und Robins, einen Militäringenieur, der auch ein berühmtes Buch über mathematische Prinzipien des Artilleriewesens geschrieben hat. Schließlich lieferte der „Treatise of Fluxions“ von Maclaurin überzeugende Beweise für die Leistungsfähigkeit der Infinitesimalmathematik.

Ähnlich wie in England gab es auch in Holland eine Kampagne gegen den Leibnizschen Calculus, die durch Nieuwentijt, Bürgermeister von Purmerend nahe Amsterdam, vorgetragen wurde.

Auf dem Kontinent vertraten die der politisch-philosophischen Bewegung der Aufklärung nahestehenden oder sie offen unterstützenden Mathematiker die progressive Seite, insbesondere Euler, Condorcet, Clairaut, Lagrange, Laplace. Unter ihnen ragt hinsichtlich der bewußt progressiven Absichten d'Alembert hervor, der zusammen mit Diderot seit 1751 die „Encyclopédie“ (Enzyklopädie oder nach Vernunftgründen geordnetes Wörterbuch der Wissenschaften, Künste und Gewerbe) herausgegeben hat, die von ungeheurer ideologischer Wirkung war und wesentlich zur Vorbereitung

der Großen Französischen Revolution von 1789–1795 beigetragen hat. d'Alembert verfaßte einen guten Teil der mathematischen Artikel der Enzyklopädie selbst, darunter den berühmten Beitrag zum Stichwort „Grenze“, in dem eine exakte Definition des Grenzwerts gegeben wird.

Zwei Originalzitate, niedergeschrieben am Anfang des 19. Jh., geben – vielleicht gerade aus einem schon historisch gewordenen Abstand – dem unbedingten Vertrauen in die Kraft der Vernunft, der weitgehenden Gleichsetzung von Aufklärung, mechanischen Materialismus und leistungsstarker Mathematik, besonders nachhaltigen Ausdruck. So heißt es bei Laplace:

„Eine Intelligenz, welche für einen gegebenen Augenblick alle in der Natur wirkenden Kräfte sowie die gegenseitige Lage der sie zusammensetzenden Elemente kannte, und überdies umfassend genug wäre, um diese gegebenen Größen der Analysis zu unterwerfen, würde in derselben Formel die Bewegungen der größten Weltkörper wie des leichtesten Atoms umschließen; nichts würde ihr ungewiß sein und Zukunft wie Vergangenheit würden ihr offen vor Augen liegen. Der menschliche Geist bietet in der Vollendung, die er der Astronomie zu geben verstand, ein schwaches Abbild dieser Intelligenz dar. Seine Entdeckungen auf dem Gebiet der Mechanik und Geometrie, verbunden mit der Entdeckung der allgemeinen Gravitation, haben ihn in Stand gesetzt, in demselben analytischen Ausdruck die vergangenen und zukünftigen Zustände des Weltsystems zu umfassen.“ ([L 9.16], S. 1/2)

Der fortschrittliche Physiker Arago, der als Sekretär der Pariser Akademie eine Reihe von höchst lesenswerten Elogen (Lobreden) auf verstorbene Akademiemitglieder hielt, drückte sich 1842 so aus:

„Fünf Geometer, Clairaut, Euler, d'Alembert, Lagrange, Laplace, theilten sich die Welt, deren Dasein durch Newton entschleiert war. Sie erforschten dieselbe nach allen Richtungen, drangen in Regionen vor, welche man für unzulänglich halten konnte, und ermittelten zahllose Erscheinungen, welche durch die Beobachtung noch nicht aufgefunden waren; es gelang ihnen endlich, und das ist ihr unvergänglicher Ruhm, die verstecktesten und geheimnißvollsten Phänomene der himmlischen Bewegungen an ein einziges Prinzip, an ein einziges Gesetz zu knüpfen. Die Geometrie hatte die Kühnheit, über die Zukunft zu verfügen; und der Verlauf der Jahrhunderte bestätigte unwandelbar die Aussprüche der Wissenschaft.“ ([L 9.2], S. 372)

Aber auch eine andere Komponente der Aufklärung, die Überzeugung vom Fortschritt der Menschheit nicht nur durch Vernunft und Denken, sondern auch durch Verbesserung der Produktion mit Hilfe der Wissenschaft, wird von fortschrittlichen Mathematikern ausgedrückt. d'Alembert selbst schreibt in der Vorrede zur Großen Enzyklopädie:

„Das Werk, das wir begonnen haben und zu Ende zu führen wünschen, hat einen doppelten Zweck: Als Enzyklopädie soll es, soweit möglich, die Ordnung und Verkettung der menschlichen Kenntnisse erklären, und als nach Vernunftgründen geordnetes Wörterbuch der Wissenschaften, Künste und Gewerbe soll es von jeder Wissenschaft und jeder Kunst – gehöre sie zu den freien oder den mechanischen – die allgemeinen Grundsätze enthalten, auf denen sie beruhen, und die wesentlichsten Besonderheiten, die ihren Umfang und Inhalt bedingen.“ ([L 9.28], S. 343)

Die Orientierung auf die Erfassung der Gewebe, d. h. der materiellen Produktion, und vor allem auf die Erhellung der der Produktion zugrunde liegenden naturwissenschaftlichen Kenntnisse – das alles erinnert schon an die heraufziehende Zeit der Industriellen Revolution. Sie wird auch an die Mathematik quantitativ und qualitativ neue Forderungen stellen.

Vorlesung 10

Industrielle Revolution: Darstellende Geometrie.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Theorie algebraischer Gleichungen

G É O M É T R I E

D E S C R I P T I V E.

L E C O N S

D O N N É E S A U X É C O L E S N O R M A L E S,

L' A N 3 D E L A R É P U B L I Q U E,

P A R G A S P A R D M O N G E, de l'Institut national.

P A R I S,

B A U D O U I N, Imprimeur du Corps législatif et de l'Institut
national.

A N V I I.

Titelblatt G. Monge: Géométrie descriptive, Paris 1794/95

Zur gesellschaftlichen Stellung von Mathematik und Naturwissenschaften

Im letzten Drittel des 18. Jh. setzte in England die Industrielle Revolution ein; sie ergriff Frankreich und Westeuropa, in den 30er Jahren Deutschland und die USA und zur Mitte des Jahrhunderts Rußland.

Das Wesen der Industriellen Revolution

Die Industrielle Revolution leitete eine sprunghafte Entwicklung der Produktivkräfte und eine tiefgreifende Umgestaltung der Produktion ein (Anm. 10.1), deren Wesen im Übergang von der handwerklichen Arbeit in kapitalistischen Manufakturen zur maschinellen Produktion in Fabriken bestand. Ihr lagen zwei technische Revolutionen zugrunde, das Aufkommen der Werkzeugmaschinen und der Einsatz der Dampfmaschine als Antriebskraft. Die Kombination beider sowie das Vorhandensein freier Lohnarbeiter, der Ruin der kleinen Handwerksproduktion und die Existenz bedeutender Kapitalien im Gefolge der ursprünglichen Akkumulation ermöglichten das Fabrikssystem und die Ausbildung der kapitalistischen Produktionsweise.

Auch in Manufakturen waren Maschinen benutzt worden. Jedoch nicht darin bestand die revolutionisierende Neuerung und auch nicht in der Auflösung des Produktionsvorganges in eine Vielzahl von Handgriffen und Verrichtungen durch die manufaktuelle Arbeitsteilung. Der Kernprozeß der Industriellen Revolution bestand vielmehr in der Einführung von werkzeugetführenden Maschinen, die an die Stelle der Menschen treten konnten, die ihre Gliedmaßen und von Hand zu führende Werkzeuge gebrauchten. „Eine Maschine, um ohne Finger zu spinnen“ — so pries der englische Erfinder J. Wyatt die erste Spinnmaschine an. Eine Geschichte der Technik würde diesen Kernprozeß der Industriellen Revolution im einzelnen verdeutlichen, bei der Spinnmaschine und beim Webstuhl, bei der Supportdrehbank und bei der Fräsmaschine, bei Erfindungen also, die noch im 18. Jh., Anfang 19. Jh. gemacht wurden und die Schrittmacher bei der durchgehenden Einführung der Werkzeugmaschine wurden.

Neue gesellschaftliche Forderungen an die Naturwissenschaften

Die Industrielle Revolution begann, neue und zunehmend nachhaltigere Forderungen an Mathematik und Naturwissenschaften zu stellen. Maschinenbau, Brücken, Eisenbahnen, Waffen, Schiffe und Bergwerke erhöhten sprunghaft den Bedarf an Eisen, Stahl, Nichteisenmetallen, Kohle und anderen Grundmaterialien: Hüttenleute, Chemiker und Ingenieure waren auf den Plan gerufen. Die Gewinnung von Textilhilfsstoffen wie Schwefelsäure, Soda, Bleichmittel und Farben bildete ein weiteres Hauptbetätigungsfeld der Chemiker.

Probleme der Konstruktion von Maschinenelementen, der Kraftübertragung, der

Reibung, der Präzisionsmechanik und der Energiegewinnung brachten Physiker und einen Teil der Mathematiker in engere Beziehungen zur materiellen Produktion als je zuvor. Dazu kam das breite gesellschaftliche Interesse an schnell, zuverlässig und über weite Entfernungen arbeitenden Nachrichtenverbindungen.

Die rasch sich ausdehnenden Industriestädte, in denen das sich entwickelnde Industrieproletariat unter menschenunwürdigen Bedingungen zu hause gezwungen war, warfen Probleme auf wie die der Versorgung mit bisher noch nicht gekannten Mengen an Lebensmitteln, Wasser, Heizmaterial und anderem mehr, solche des innerstädtischen Verkehrs, der Beleuchtung von Straßen und Fabrikationsräumen, des Hoch- und Tiefbaus. Nicht zuletzt schuf die Notwendigkeit der Bereitstellung genügender Mengen Lebensmittel für eine rasch wachsende Bevölkerung eine Vielzahl von Berührungspunkten zwischen Naturwissenschaft und Landwirtschaft.

Aber auch die Rückwirkungen sind deutlich: Unter den Bedingungen der Industriellen Revolution erhielt der Naturwissenschaftler eine neue soziale Stellung: Die sich entwickelnden kapitalistischen Produktionsverhältnisse boten die Möglichkeit, eine naturwissenschaftliche Entdeckung im großen Stil profitbringend auszuwerten; nicht wenige gingen von nun an den Weg vom Naturwissenschaftler zum kapitalistischen Unternehmer, z. B. der Sodafabrikant Leblanc und der Elektroingenieur W. Siemens.

Neues Wechselverhältnis zwischen Naturwissenschaften und Produktion

Es verdient festgehalten zu werden, daß die Industrielle Revolution ohne die Naturwissenschaften ausgelöst wurde, und zwar in dem Sinne, daß sie nicht kausal an der Initialphase der Industriellen Revolution beteiligt war. Die Schrittmacher der technischen Umwälzungen — Wyatt, Kay, Hargreaves, Arkwright, Wood, Maudsley, Whitwey und Crompton — standen als Erfinder, Ingenieure, Uhrmacher, Weber, Geistliche, Feinmechaniker usw. außerhalb der Traditionen bisheriger akademischer Naturwissenschaft.

Sogar noch mehr: Die Wissenschaftliche Revolution des 16./17. Jh. stellt sich dar als Emanzipation einiger Zweige der Naturwissenschaften (Astronomie, Mechanik, Teile der Optik, Geographie, bedeutender Teile der Mathematik) aus dem Produktionsprozeß heraus in Form wirklicher, wissenschaftlicher Widerspiegelungen der Natur und ihrer Gesetzmäßigkeiten. Freilich stand die emanzipierte Naturwissenschaft, die sich auf der Grundlage ihrer eigenen Forschungsmethode auch nach eigenen, systeminneren Gesetzmäßigkeiten zu entwickeln begann, nun als etwas Selbständiges, auch als soziologisch Getrenntes, dem Produktionsprozeß gegenüber. Ein Neubeginn der Begegnung von Naturwissenschaft und Produktion auf höherer Ebene wurde mit dem Übergang vom Manufaktur- zum Fabrikssystem während der Industriellen Revolution eingeleitet. Tatsächlich schuf erst der vollzogene Übergang zur Industriellen Revolution, schufen erst etablierte große Industrie- und Fabrikssysteme erweiterte Möglichkeiten zur Rezeption der Naturwissenschaften durch die materielle Produktion.

Als äußerst aufmerksamer Beobachter seiner Zeit hat Marx der quantitativ und

qualitativ neuen Phase in der Stellung der Naturwissenschaften zum Produktionsprozeß bedeutende Aufmerksamkeit gewidmet und dabei u. a. drei Momente hervorgehoben: Die vorhandene Naturwissenschaft wurde — mit fortgeschrittener Industrieller Revolution — bewußt in den Dienst des kapitalistischen Produktionsprozesses gestellt. Was die Eigentumsverhältnisse an den Naturwissenschaften, d. h. die Stellung der Naturwissenschaften innerhalb der Produktionsverhältnisse betrifft, so spricht Marx mehrfach direkt von der Exploitation der Wissenschaft durch den Kapitalismus. An einer Stelle drückt er sich so aus:

„Die Wissenschaft kostet dem Kapitalismus überhaupt ‚nichts‘, was ihn durchaus nicht hindert, sie zu exploitiern. Die ‚fremde‘ Wissenschaft wird dem Kapital einverleibt, wie fremde Arbeit.“ ([L 10.18], S. 407)

Zum anderen lieferte die Produktion innerhalb der großen Industrie die inhaltlichen und ökonomischen Möglichkeiten und Notwendigkeiten, die noch weitgehend empirisch betriebenen Produktionsverfahren wissenschaftlich aufzuklären und zu durchdringen; damit wurden für weitere naturwissenschaftliche Zweige Möglichkeiten der Emanzipation geschaffen. Und schließlich deuten die so entwickelten Produktivkräfte auf die kommende Verwandlung der Wissenschaft in eine unmittelbare Produktivkraft hin.

Mit anderen Worten: Bei anhaltender Herausbildung neuer selbständiger Zweige der Naturwissenschaften (Chemie, Geologie, Biologie in Teilen) und einer Einschmelzung naturwissenschaftlicher Teilbereiche in technische Wissenschaften (technisches Zeichnen, technische Mechanik, Maschinenlehre u. a. m.) tritt in der Periode der Industriellen Revolution eine quantitativ neue Form des Wechselverhältnisses zwischen Produktion und Naturwissenschaften auf, die man als „Stufe der Applikation“ bezeichnen könnte: Unter der allgemeinen Devise der „Anwendung von ... auf ...“ werden große Gebiete der Mathematik und Physik (Infinitesimalmathematik, darstellende Geometrie, Mechanik, Wärmelehre, Optik), bedeutende Teile der anorganischen und organischen Chemie, Teile von Zoologie, Botanik und Geologie der Produktion an die Seite gestellt.

Grundtendenzen der Entwicklung der Naturwissenschaften

Am Vorabend der europäischen Revolutionen von 1848 analysierten Marx und Engels im „Kommunistischen Manifest“ Folgen und Ursachen der Industriellen Revolution. Dort heißt es unter anderem:

„Die Bourgeoisie hat in ihrer kaum hundertjährigen Klassenherrschaft massenhaftere und kolossalere Produktionskräfte geschaffen als alle vergangenen Generationen zusammen. Unterjochung der Naturkräfte, Maschinerie, Anwendung der Chemie auf Industrie und Ackerbau, Dampfschiffahrt, Eisenbahnen, elektrische Telegraphen, Urbarmachung ganzer Weltteile, Schiffbarmachung der Flüsse, ganze aus dem Boden hervorgestampfte Bevölkerungen — welch früheres Jahrhundert ahnte, daß solche Produktionskräfte im Schoß der gesellschaftlichen Arbeit schlummerten.“ ([L 10.17], S. 467)

Die Naturwissenschaft hat das Ihre dazu beigetragen. Die sich stürmisch entwickelnden Produktivkräfte hatten den Naturwissenschaftlern eine Fülle von Anregungen

gegeben und ihnen zugleich ein neues, ungeahnt weites Anwendungsfeld bereitet. Dies bildete den Hintergrund, auf dem Mathematik und Naturwissenschaften ihren innerwissenschaftlichen Triebkräften folgen und sich rasch entwickeln konnten.

Im Zusammenhang mit der zutage tretenden gesellschaftlichen Relevanz der darstellenden Geometrie kam eine sowohl in die Breite als auch in die Tiefe gehende Aus- und Durchbildung der Geometrie zustande: Die nichteuklidische Geometrie löste eine Revolution in den Grundlagen der Geometrie aus. Projektive Geometrie, analytische Geometrie und synthetische Geometrie traten als gesonderte mathematische Disziplinen mit spezifischen Arbeits- und Forschungsmethoden hervor. Die Methoden der Analysis, d. h. der Differential- und Integralrechnung sowie der Theorie der unendlichen Reihen, erfuhren eine kritische Durchleuchtung und logische Analyse der Grundbegriffe. Noch nicht in expliziter Form, aber doch schon einen anderen, späteren Typ der Mathematik ankündigend, traten in der Algebra gewisse Formen strukturellen Denkens auf. Noch immer lagen die Hauptzentren der Mathematik in den industriell fortgeschrittenen europäischen Ländern; für die eigenständige Entwicklung der Mathematik (und der Naturwissenschaften) in den USA waren Voraussetzungen geschaffen. In der Physik entwickelten sich neben der klassischen Mechanik weitere ihrer Gebiete — Elektromagnetismus, Optik und Thermodynamik — zu selbständigen ausgedehnten Forschungsgebieten. Die Entdeckung und Formulierung des Energieprinzips deckte einen Fundamentalzusammenhang allen Naturgeschehens auf. Zugleich wurde im Gefolge der Großen Französischen Revolution in zahlreichen Ländern der Erde das metrische Maßsystem eingeführt.

Neben den engen Beziehungen zwischen Chemie und Produktion, die sich bereits in den frühen Phasen der Industriellen Revolution manifestiert hatten, vollzog sich in den theoretischen Grundlagen der Chemie eine wissenschaftliche Revolution; sie wird durch die Namen Lavoisier und Dalton symbolisiert. Neben die anorganische trat die organische Chemie und zerstörte das alte Dogma von der grundsätzlichen Trennung zwischen der belebten und unbelebten Natur. Die Aufstellung des periodischen Systems der Elemente eroberte der Chemie ganz neue außerordentliche Formen der Reflexion und Selbstreflexion über den inneren Zusammenhang und die Einheit der Naturkräfte. In den biologischen Wissenschaften wirkte die Entdeckung der Zelle als der Grundstruktur pflanzlichen und tierischen Lebens in ähnlichem Sinne basisbildend und vereinheitlichend für eine ganze große naturwissenschaftliche Disziplin. Zugleich wurde eine Fülle von Einzeleinsichten gewonnen, die, auf dem Wege über die Physiologie, zusammen mit der Chemie für die Medizin eine naturwissenschaftliche Grundlage zu schaffen begann. Astronomie, Kosmogonie, Paläobotanik, Paläozoologie und geologische Wissenschaften bewiesen überzeugend, daß die Erde auch eine Geschichte in Zeit und Raum besessen haben mußte. So trat auch hier der Entwicklungsgedanke als bestimmendes gedankliches Prinzip hervor, so, wie seit der Mitte des 19. Jh. mit der Abstammungslehre der Mensch als Produkt der Natur erkannt wurde.

Neue Organisationsformen der Wissenschaft

Neben einer stürmischen Entwicklung der Naturwissenschaften tritt während der Periode der Industriellen Revolution eine Gruppe neuer Wissenschaften hervor, die der Ingenieur- und technischen Wissenschaften. Sie bildeten sich im Berührungsfeld zwischen den Naturwissenschaften und den Bedürfnissen der Entwicklung der materiellen Produktivkräfte heraus, die bis zum Ausgang des 18. Jh. noch weitgehend auf empirischer oder halbempirischer Grundlage befriedigt worden waren.

Die sich konstituierenden technischen Wissenschaften fanden ihre Heimstatt an einem neuen Typ wissenschaftlicher Zentren, dem der polytechnischen Schulen, der seine Entstehung den neuen gesellschaftlichen Forderungen der Industriellen Revolution an Wissenschaft und Technik verdankt.

„Ein auf Grundlage der großen Industrie naturwüchsig entwickeltes Moment dieses Umwälzungsprozesses (der Industriellen Revolution, Wg) sind polytechnische Schulen ...“ ([L 10.18], S. 512),

Das Urbild aller Polytechnischen Schulen und aller später daraus hervorgehenden technischen Hochschulen, die *École Polytechnique* in Paris, wurde 1794, noch im Feuer der Revolution, ins Leben gerufen und setzte gleich anfangs ganz neue Maßstäbe für die Ausbildung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Nachwuchses, und zwar im direkten Klasseninteresse der französischen Bourgeoisie. Das Geheimnis ihres Erfolgs bestand in der Orientierung auf fortgeschrittenste Mathematik und Naturwissenschaften und auf die bewußt angestrebte Verbindung von Theorie und Praxis. Der Unterricht war reichlich mit praktischen Übungen verbunden und unterschied sich damit grundsätzlich vom Universitätsstudium und dem wissenschaftlichen Leben an den Akademien jener Zeit.

Die Pariser Polytechnische Schule wuchs bald über ihre nationale Zielstellung hinaus. In den ersten vier Jahrzehnten ihres Bestehens, also bis in die 30er Jahre des 19. Jh., konnte sie mit Recht als das führende Forschungs- und Lehrzentrum der Erde für Mathematik und Naturwissenschaften gelten. Dort wirkten u. a. Monge, Lagrange, Laplace, Poisson, Cauchy, Poincaré, Poncelet, Ampère, Gay-Lussac, Malus, Fresnel, Dulong, Petit, Dumas, Berthollet, Vanquelin, Thénard — alles klangvolle Namen. Die Leistungen dieser Männer nehmen einen hervorragenden Platz in der Geschichte der Mathematik, Physik und Chemie ein.

Alle Professoren der Pariser Polytechnischen Schule waren verpflichtet, ihre Vorlesungen in Form von Lehrbüchern zum Druck zu bringen. So entstand eine Fülle herausragender systematischer Darstellungen des modernen mathematisch-naturwissenschaftlichen Lehrstoffes und nicht zuletzt deswegen erreichten französische Mathematik und Naturwissenschaften eine bedeutende Ausstrahlungskraft auf Europa und die USA.

Zugleich aber gab es an der Pariser Polytechnischen Schule heftige Auseinandersetzungen darüber, ob das hohe theoretische Niveau der Vorlesungen und Lehrbücher dem Ausbildungsziel, der Heranbildung nämlich von Militär- und Zivilingenieuren, angemessen sei. Cauchy beispielsweise sah sich ständigen Angriffen ausgesetzt, sein „Cours d'Analyse“ sei unnötig schwierig; er verteidigte sich mit dem Argument, daß

gerade größte begriffliche Strenge und Schärfe den Lehrstoff leichter erlernbar und beherrschbar machen.

Jene Diskussionen zwischen Mathematikern und in der Praxis Stehenden darüber, wieviel und welche Art von Mathematik für die Ausbildung von Ingenieuren und für die Praxis notwendig oder überflüssig sei, sind übrigens seit dem Beginn der Industriellen Revolution während des ganzen 19. Jh. mit großer Vehemenz geführt worden. Auch heute werden — bei rasch sich entfaltenden Forderungen der Praxis an die Mathematik und bei sich aus der Entwicklung der Mathematik ergebenden neuen Möglichkeiten ihrer Anwendung — ganz ähnliche Fragen wie während der Industriellen Revolution erörtert: Es handelt sich naturgemäß um ein grundsätzliches Problem, das unter neuen gesellschaftlichen Umständen ständig neu diskutiert werden muß.

Die Pariser Polytechnische Schule machte Schule. Hand in Hand mit der Ausbreitung der Industriellen Revolution wurden in fast allen ökonomisch fortgeschrittenen europäischen Staaten polytechnische Schulen eingerichtet, in Prag, Wien, Karlsruhe, München, Dresden, Stuttgart, Hannover, Kassel, Zürich, Lissabon, Kopenhagen, Riga und anderswo, wobei natürlich — örtlich und regional geprägt von Traditionen und äußeren Vorbedingungen, von Personen und staatlichen Institutionen, vom unterschiedlichen Reifegrad der Produktivkräfte und Produktionsverhältnisse — das Pariser Grundmuster mehr oder weniger stark variiert wurde. Aus vielen dieser polytechnischen Schulen sind zur Mitte des Jahrhunderts Technische Hochschulen hervorgegangen.

Die Forderung nach Lehrbarkeit der Mathematik

Waren vor Beginn der Industriellen Revolution große Teile der Mathematik im allgemeinen nicht systematisch in die Sphäre der unmittelbaren materiellen Produktion einbezogen worden, so wurden mit der fortschreitenden Industriellen Revolution zielbewußt Versuche unternommen, die Potenzen der Mathematik als Fundament der technischen Wissenschaften in den Produktionsprozeß zu integrieren. Dies betraf — neben dem Inhalt der Mathematik — auch den Lehrstil und die Fragen der Ausbildung. Die durch die gesellschaftliche Entwicklung sich zuspitzende Diskrepanz zwischen den von den jungen Ingenieuren an den polytechnischen Schulen geforderten relativen Höchstleistungen und einer bei dem bisherigen akademischen Lern- und Lehrstil nur durch lange Erfahrung oder ganz außergewöhnliche Begabung zu erwerbenden Könnerschaft und Fähigkeit setzte die Forderungen auf Lehrbarkeit der Mathematik, der mathematischen Behandlung der Mechanik und anderer Teile der Physik in ihre historischen Rechte ein. Es kam darauf an, Kunstgriffe bei der Lösung zu vermeiden und statt dessen prinzipiell gleichliegende Probleme auch mit gleichen Methoden anzugreifen.

Die Forderungen nach Lehrbarkeit und Anwendungsbereitschaft der Mathematik, speziell der Analysis, bedeuten letztlich auch eine von der gesellschaftlichen Entwicklung inaugurierte Unterstützung innermathematischer Tendenzen: Ausmerzung des intuitiven Gebrauchs solcher Begriffe wie Funktion, Stetigkeit, Differential, der

schwankenden Behandlung von Reihenkonvergenz usw. Der allgemeine Lehrsatz, der aus der Aufdeckung des prinzipiellen Sachverhalts hervorgeht, mußte im Pädagogischen zur Regel werden, zum Rechenrezept, zum analytischen Kalkül, zum Formalismus, zum Verfahren, das stets zum Ziel führt. Im Ergebnis vergrößerte sich abermals – wie schon einmal mit der Erfindung des Calculus – spürbar die Anzahl der die höhere Mathematik Ausübenden. Eine entscheidende neue Basis für die Entwicklung der Mathematik im 19. Jh. wurde so gewonnen.

Zur Geschichte der darstellenden Geometrie

Die Herausbildung der wissenschaftlichen darstellenden Geometrie war direktes Produkt der Industriellen Revolution. Sie nahm an der Pariser Polytechnischen Schule und nach deren Vorbild an den späteren Technischen Hochschulen einen zentralen Platz ein. Ihre Entstehungsgeschichte aber reicht weit zurück.

Während der Antike bereits verwendete man für zu errichtende Bauwerke Aufrisse und Grundrisse; dies wird z. B. in dem hervorragenden Werk „De architectura“ des römischen Baumeisters Vitruvius erwähnt, das seinerseits während der Renaissance neue Anregungen für die Lehre von der Perspektive gab. Für diese Periode ist besonders Dürer als bahnbrechend für die Verwendung der Normalrisse in Baukunst und darstellender Kunst zu nennen. Die italienische Schule der Künstleringenieure um Alberti, Francesca und Leonardo pflegte insbesondere die Zentralperspektive. Während des 17. und 18. Jh. leisteten vorwiegend französische Mathematiker und Ingenieure – Desargues, Bosse, Frézier – aber auch britische Mathematiker wie Taylor und Colson wesentliche Arbeiten, die Grundbegriffe und Methoden der Zentralperspektive entwickelten. Das Werk „Die freye Perspective, ...“ (1759) des elsässischen Naturforschers Lambert behandelte die Darstellung des Dreidimensionalen in der zweidimensionalen Zeichenebene mit Methoden der projektiven Geometrie.

Die Begründung der wissenschaftlichen darstellenden Geometrie durch G. Monge

Alle diese Vorstufen der darstellenden Geometrie mündeten jedoch nicht in einen systematischen Aufbau ein. Diesen entscheidenden Schritt vollzog erst Monge.

Er stand während seiner Lektorentätigkeit an der französischen Militäringenieurschule in Mézières in den hervorragenden Traditionen des französischen Festungsbaues, als dessen berühmtester Vertreter de Vauban in ganz Europa als unbestrittene Autorität galt. Und doch verließ Monge gerade dort die traditionellen Methoden der Projektierung im Bauwesen und fand um 1766/70 durchgängig anwendbare konstruktive Verfahren für die Darstellung von Körpern in zwei Bildebenen. Aus Gründen militärischer Geheimhaltung durfte Monge zunächst nichts zu diesem Gegenstand publizieren. Erst die französische Revolution, der sich Monge begeistert anschloß,

befreite ihn von diesem Zwang. Öffentliche Vorlesungen über darstellende Geometrie fanden großen Zuspruch; 1798 erschien sein schrittmachendes Lehrbuch „*Géométrie descriptive*“, mit dem – trotz einiger naturgemäßer Unzulänglichkeiten – die darstellende Geometrie den Rang einer selbständigen zusammenhängenden mathematischen Disziplin erhalten konnte.

Als Ziel der darstellenden Geometrie bezeichnete Monge die Aufgabe, sowohl dreidimensionale Gebilde in einer Ebene darzustellen als auch die Eigenschaften und Maße der Figur aus deren Darstellung zu entnehmen. Als Methode wandte Monge im wesentlichen die Orthogonalprojektion an; das Verfahren ist im Prinzip das heute verwendete.

Monge hatte 1795 eine programmartige Rede gehalten, als er mit Vorlesungen über darstellende Geometrie begann. Seine Lieblingsgedanken finden sich denn auch im Lehrbuch „*Géométrie descriptive*“ bei passenden (und unpassenden) Gelegenheiten eingeschoben. Artikel 103 zum Beispiel handelt von der Nützlichkeit des Unterrichts in darstellender Geometrie an den Mittelschulen. Dies zeigt u. a., wie stark Monge in den Grundideen der Industriellen Revolution stand:

„Dieser Unterricht würde ... in sicherster Weise zu der fortschreitenden Hebung der nationalen Industrie beitragen ...“ ([L 10.20], S. 143)

Die Rede von 1795 zeigt deutlich, daß er das Wesen der aufkommenden maschinenmäßigen Produktion erkannt hatte. Allgemein seien die Ergebnisse der Naturforschung immer weiteren Kreisen bekannt zu machen, da gerade diese Kenntnisse für den Fortschritt der Industrie von Wichtigkeit seien, insbesondere um die nationale (französische) Industrie vom Ausland unabhängig zu machen. Kenntnis derjenigen Maschinen sei nötig, welche Naturkräfte zu benutzen möglich machen oder dazu dienen können, Handarbeit zu vermindern und die Arbeitsprodukte gleichförmiger und genauer zu machen. Zur Erreichung dieser Ziele sei aber die Kenntnis der darstellenden Geometrie, der „für den Ingenieur unerläßlich notwendigen Sprache“, von ganz besonderer Bedeutung:

„Die darstellende Geometrie muß einst einen der Hauptzweige der nationalen Erziehung bilden.“ ([L 10.20], S. 122)

„... wir halten es ... für nützlich, an einigen Beispielen zu zeigen, wie die Analysis durch die darzustellende Geometrie in der Lösung einer großen Anzahl von Aufgaben ... ersetzt werden kann.“ ([L 10.20], S. 122)

Monge hält darstellende Geometrie für leichter lehrbar als Analysis und Algebra. „*Géométrie descriptive*“ als Ei des Columbus für Bau- und Befestigungskunst, für den Bergwerksingenieur, für den Feldherrn, für die Geodäsie, für die Malerei! Darum sind in der „*Géométrie descriptive*“ die Anwendungsbeispiele der Theorie nicht künstlich aufgeprägt, sondern aus der Praxis herausgegriffen und als praktische Aufgaben formuliert, für Fortifikation, Verwendung eines Fesselballons, in der Technik, bei der Konstruktion von Maschinenelementen, Gewölben, Farbton und Helligkeit von Bildern, usw. Durch Monge wurde die darstellende Geometrie zum allgemein verwendbaren Mittel der Verständigung über Konstruktionen. Die Arbeit von Monge wurde weitergeführt von Hachette, der, als Professor an der Pariser Polytechnischen Schule, die darstellende Geometrie auch auf das technische Zeichnen im Maschinen-

bau anwandte. Seitdem hat das technische Zeichnen, eine auf Konstruktionsbedürfnisse zugeschnittene spezifische Form der darstellenden Geometrie, mit der Industriellen Revolution ihren Siegeszug angetreten. Heute gehören darstellende Geometrie bzw. technisches Zeichnen zu den Grundelementen der Ausbildung für alle ingenieurwissenschaftlichen Disziplinen.

Die Herausbildung der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Schon in der Antike tritt der Gedanke auf, daß die Naturgesetze durch eine sehr große Anzahl von zufälligen Ereignissen zur Geltung kommen, z. B. in dem Gedicht „De rerum natura“ von Lukrez. Die Aufdeckung der Gesetzmäßigkeiten, auf deren Auftreten zahlreiche individuelle Einflüsse einwirken, die nicht oder fast nicht miteinander verbunden sind, war auch das Ziel jener Gelehrten, die die Entstehung der Wahrscheinlichkeitsrechnung wesentlich beeinflussten. So schrieb Huygens 1657, daß er sich nicht nur mit Spielen beschäftigte, sondern daß er die Grundlagen einer „tiefsinnigen und hochinteressanten neuen Theorie“ vortrage.

Die mit Glücksspielen zusammenhängenden Probleme bildeten den Anlaß dafür, daß sich bedeutende Gelehrte mit Fragen der Zufälligkeit von Ereignissen u. a. beschäftigten. Die eigentlichen Ursachen liegen jedoch in der Herausbildung frühkapitalistischer Wirtschaftsverhältnisse und den dabei auftretenden Fragestellungen z. B. im Versicherungswesen, der Bevölkerungsstatistik und der Auswertung von Beobachtungen.

Zur Vorgeschichte

Aus der Vorgeschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung seien Pacioli, Tartaglia, Cardano und Galilei erwähnt, die spezielle wahrscheinlichkeitstheoretische Aufgaben meist im Zusammenhang mit Glücksspielen behandelten. Der Chevalier de Méré, ein leidenschaftlicher Spieler, der sich aber auch ernsthaft für Wissenschaft interessierte, regte Pascal durch ein konkretes Problem an, sich mit der Wahrscheinlichkeit dieses oder jenes Spielausganges zu beschäftigen. Pascal führte 1654 darüber einen Briefwechsel mit Fermat. Mit diesem Briefwechsel, in dem einige Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufgestellt wurden, beginnt die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu einer selbständigen mathematischen Disziplin. Als Huygens 1655 in Paris weilte, erhielt er von dem Briefwechsel Kenntnis. In seinem Buch von 1657 „De ratiociniis in ludo aleae“ (Über Berechnungen beim Würfelspiel) stellte er die von Pascal und Fermat behandelten Fragen über Glücksspiele ausführlich dar, behandelte darüber hinausgehende ähnliche Probleme und nannte eine Reihe von ungelösten Aufgaben. Huygens benutzte dabei nicht den Begriff „Wahrscheinlichkeit“, sondern verwandte, wie Pascal, den „Wert der Hoffnung“ – heute als Erwartungswert bezeichnet. Zu diesem Zeitpunkt ließ jedoch der relativ niedrige Entwicklungsstand der Naturwissenschaften nur wenige konkrete Anwendungen zu.

So betrachtete Graunt die Sterbewahrscheinlichkeit in Abhängigkeit vom Lebensalter. Witt und Halley stellten auf der Grundlage ähnlicher Überlegungen Tabellen für Rentenzahlungen auf. Newton nutzte wahrscheinlichkeitstheoretische Gedanken in der Historiographie und der Fehlerrechnung und hat sich auch in einem unveröffentlichten Manuskript (um 1665) mit geometrischen Wahrscheinlichkeiten befaßt.

Wesentliche Fortschritte in der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind mit dem Namen Jakob Bernoulli verbunden. In seinen Arbeiten findet man Betrachtungen über erzeugende Funktionen, die Lösung und Verallgemeinerung einiger Huygensscher Probleme (z. B. Ruin eines Spielers) und die Definition der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als „Grad seiner Gewißheit“, die sich von der Gewißheit, „wie ein Theil vom Ganzen“ unterscheidet. Sein Hauptverdienst ist wohl der Satz von Bernoulli, auch Gesetz der großen Zahlen genannt. Die Bedeutung dieser Leistung gründet sich dabei nicht auf die Formulierung des Sachverhaltes — dazu findet man schon bei Cardano einige Anhaltspunkte —, sondern darauf, daß Bernoulli als erster der beobachteten Tatsache, daß sich die relative Häufigkeit an die Wahrscheinlichkeit annähert, eine exakte theoretische Erklärung gab. Darin unterscheidet er sich von vielen in seiner Zeit und auch später wirkenden Autoren, die den Fakt, daß sich unwesentliche Erscheinungen eines Ereignisses bei der Mittelung über eine große Anzahl von Beobachtungen auslöschen, zwar zur Kenntnis nahmen, ihn aber als Offenbarung der göttlichen Ordnung ansahen und keine theoretische Begründung suchten.

Jakob Bernoulli faßte seine Resultate zur Wahrscheinlichkeitsrechnung in der „Ars conjectandi“ (Kunst des Vermutens) (1713 postum veröffentlicht) zusammen. Dort findet man auch im Zusammenhang mit Permutationen und Kombinationen Aussagen über die Binomialverteilung (Bernoullisches Schema) und die Bernoullischen Zahlen.

Es folgten einige Jahrzehnte, in denen sich zahlreiche Wissenschaftler wahrscheinlichkeitstheoretischen Problemen zuwenden. So publizierte de Moivre 1718 „The Doctrine of Chances“ und 1730 die „Miscellanea analytica“ (Analytische Beiträge). Im ersten Buch stellte er die Methoden zur Lösung von Aufgaben, die mit Glücksspielen im Zusammenhang stehen, systematisch dar und vervollkommnete sie. In der 2. Auflage (1738) definierte de Moivre ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, das mit der späteren klassischen Definition durch Laplace im wesentlichen übereinstimmt. Th. Simpson gab 1740 eine wahrscheinlichkeitstheoretische Aufgabe an, die für die Kontrolle der Produktion wichtig ist. Euler verband theoretische Probleme der Völkerkunde und des Versicherungswesens mit Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und N. Bernoulli formulierte das „Petersburger Spiel“, mit dessen Lösung sich viele bedeutende Gelehrte beschäftigten. Bei seinen Untersuchungen zur Theorie der Beobachtungsfehler warf D. Bernoulli als erster die Frage nach der Berechnung der Wahrscheinlichkeit von Hypothesen auf, wenn schon Beobachtungsergebnisse vorliegen. Die Lösung dieser Aufgabe stammt von Bayes, der außer den nach ihm benannten Formeln noch weitere Ausdrücke zur Lösung spezieller Probleme herleitete. Und es sei noch der französische Naturforscher Graf Buffon erwähnt, der im großen Umfange geometrische Wahrscheinlichkeiten betrachtete, z. B. beim Nadelproblem.

P. S. Laplace

Ein neuer Aufschwung der Wahrscheinlichkeitsrechnung setzte an der Wende vom 18. zum 19. Jh. ein. Angeregt vor allem durch naturwissenschaftliche Fragestellungen aus Ballistik, Astronomie, Theorie der Beobachtungsfehler entwickelten Laplace und Poisson spezielle analytische Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und erzielten damit wertvolle Resultate. Laplace faßte seine Forschungsergebnisse in der „*Théorie analytique des probabilités*“ (1812) zusammen. Die Einleitung zu diesem Werk bildete der auf der Grundlage seiner 1795 gehaltenen Vorlesung entstandene „*Essai philosophique sur les probabilités*“ (1814 erschienen). Dort definierte er das Maß der Wahrscheinlichkeit:

„Die Theorie des Zufalls ermittelt die gesuchte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses durch Zurückführung aller Ereignisse derselben Art auf eine gewisse Anzahl gleich möglicher Fälle, ... und durch Bestimmung der dem Ereignis günstigen Fälle. Das Verhältnis dieser Zahl zu der aller möglichen Fälle ist das Maß dieser Wahrscheinlichkeit, ...“ ([L 10.14], S. 4)

Eigentlich ist dies gar keine Definition, sondern nur eine Rechenvorschrift, wie man in gewissen einfachen Fällen (wenn nämlich „gleichmögliche Ereignisse“ vorliegen) die Wahrscheinlichkeit ermittelt. In dem „*Essai*“ kommt auch Laplaces mechanisch-materialistischer Standpunkt zum Ausdruck. Er lehnte theologische und teleologische Erklärungen der Naturerscheinungen ab und bekämpfte sie. Viele spätere Entdeckungen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung finden sich schon bei Laplace. So diskutierte er Glücksspiele, geometrische Wahrscheinlichkeiten, den Satz von Bernoulli und dessen Beziehungen zur Normalverteilung und in Verbindung mit der Fehlerrechnung die Methode der kleinsten Quadrate, die unabhängig von ihm auch von Legendre und Gauß entdeckt wurde. Sehr oft wandte er erzeugende Funktionen an, insbesondere zur Lösung von Differenzgleichungen (Einführung der „Laplace-Transformation“), und bewahrte die Sätze des unbekannten Bayes vor dem Vergessen, indem er ihnen eine klare Formulierung gab. Laplace stellte als erster die Hauptsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung systematisch dar, bewies jene Sätze, die heute Sätze von Moivre-Laplace heißen, und nutzte seine Resultate für praktische Probleme, z. B. statistische Untersuchungen, Astronomie (Normalverteilung).

Die Normalverteilung und deren Anwendung in der Theorie der Beobachtungsfehler verknüpft sich oft mit dem Namen von Gauß, der sie – ebenso wie Laplace – selbständig entdeckte; doch war sie schon von Moivre untersucht worden. Die Bezeichnung Normalverteilung stammt eventuell von dem belgischen Mathematiker und Astronomen Quételet, einem Schüler von Laplace, der sich große Verdienste um die Vereinheitlichung der Methoden der beschreibenden Statistik erworben hat. Poisson verallgemeinerte sowohl das Bernoullische Gesetz der großen Zahlen als auch die Sätze von Moivre-Laplace auf den Fall unabhängiger Versuche, wobei die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses von der Nummer des Versuchs abhängig ist. In diesem Zusammenhang leitete er auch eine neue Wahrscheinlichkeitsverteilung – die Poisson-Verteilung – her.

Merkwürdigerweise setzte nach Laplace und Poisson zur Mitte des 19. Jh. eine Stagnation in der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein, besonders in

den westeuropäischen Ländern. Beide Gelehrte hatten durch eigene Beiträge Irrtümer hinsichtlich der Einsatzmöglichkeiten der Wahrscheinlichkeitsrechnung gefördert, indem sie ihre Anwendung auf „moralische Wissenschaften“ empfahlen, etwa um den Wahrheitsgehalt eines Gerichtsurteils zu erfassen. Diese Anwendungen, bei denen meist das Wesen der gesellschaftlichen Erscheinungen mißachtet wurde, führte natürlich zu Mißerfolgen, und die Begeisterung für die Wahrscheinlichkeitsrechnung mußte einer Enttäuschung Platz machen.

Algebra als Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen

Mit dem ausgehenden 16. und dem beginnenden 17. Jh. hatte die Algebra einen gewissen Abschluß erreicht; der Name Vieta symbolisiert den Inhalt jener ersten Entwicklungsetappe der Algebra.

Eine zweite Periode der Algebra

Schon im 15. Jh. waren Verfahren zur rechnerischen Auflösung der allgemeinen algebraischen Gleichungen dritten und vierten Grades gefunden und veröffentlicht worden. Die Suche nach Lösungsverfahren für die allgemeine algebraische Gleichung höheren als vierten Grades in Radikalen, d. h. durch Wurzelschachtelungen, stellte anderthalb Jahrhunderte lang, bis zum Ende des 18. Jh., das beherrschende Thema der Algebra dar. Dies – und allgemeiner die Suche nach Lösungsverfahren für Gleichungen – machte den Begriffsinhalt von „Algebra“ in einer ganzen historischen Periode aus.

Das allgemeine Auflösungsproblem für algebraische Gleichungen offenbarte allerdings erst im 18. Jh. seine wirklichen Schwierigkeiten. Der deutsche Naturforscher und Mathematiker von Tschirnhaus erwarb sich einen fast legendären Ruf als geschickter Algebraiker. Die nach ihm benannte Transformation gestattet es, das zweithöchste Glied einer algebraischen Gleichung mittels Variablentransformation zu beseitigen. Eine zeitlang glaubten er und andere Mathematiker – sogar noch Ende des 18. Jh. –, daß sich jede algebraische Gleichung in Radikalen auflösen lassen müsse; es schien nur auf die Entdeckung eines genügend wirksamen Kunstgriffs anzukommen. Doch alle Hoffnungen zerschlugen sich; alle Transformationen und Resolventen, d. h. lösende Ersatzgleichungen, versagten.

Nur langsam keimte die Einsicht in den wahren Sachverhalt. Lagrange sprach 1770/71 die Vermutung aus, daß man mit den bis dahin bekannten algebraischen Mitteln die Auflösung nicht leisten könne. Einen wahren Zugang zum Problem werde man finden, wenn man rationale Funktionen der Wurzeln der Ausgangsgleichung

auf die Anzahl der Werte hin untersucht, die sie bei allen möglichen Vertauschungen der Wurzeln annehmen. Dieser beachtliche Vorstoß deutet auf die Galoissche Gleichungstheorie hin.

Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra

Alle Lösungsverfahren unterstellten dabei die Existenz der Wurzeln der Gleichung. Zwar hatte schon Girard 1629 den fundamentalen Satz ausgesprochen, daß eine Gleichung n -ten Grades genau n Wurzeln besitze, und d'Alembert hatte, neben anderen Mathematikern, 1746 einen schon weitreichenden Beweisversuch für den Fundamentalsatz der Algebra unternommen. Doch erst Gauß vermochte einen vollständigen Beweis zu erbringen; der erste, nahezu korrekte, wurde zum Gegenstand seiner Doktordissertation 1799.

Gauß vermied beim Existenzbeweis von 1799 noch den expliziten Gebrauch der imaginären bzw. komplexen Zahlen, weil diesen nach allgemeiner Auffassung der Mathematiker noch einige Unklarheiten anhafteten; die schon Oktober 1797 gefundene Beweisidee beruhte allerdings bereits auf der geometrischen Repräsentation der komplexen Zahlen.

Auf den Fundamentalsatz der Algebra ist Gauß später noch mehrfach zurückgekommen. Er fand noch weitere drei Beweise und veröffentlichte sie in den Jahren 1815, 1816 und 1849. Der Beweis von 1816 verwendete ausdrücklich komplexe Zahlen. Es ist interessant zu lesen, wie gerecht Gauß (1815) über seine Vorgänger urteilte, zugleich aber das Wesen seines eigenen Beitrages herauszuheben verstand.

„Der hier ausgesprochene Lehrsatz, der wichtigste in der Theorie der Gleichungen, hat bekanntlich mehrere der ersten Geometer vielfältig beschäftigt. Die vornehmsten Versuche, einen vollkommen strengen Beweis davon zu geben, von D'ALEMBERT, EULER, FONCENEX und LAGRANGE, sind von dem Verf. gegenwärtiger Abhandlung bereits in einer vor sechszehn Jahren erschienenen Schrift zusammengestellt und einer Prüfung unterworfen. So sehr man den Scharfsinn, welcher jene Arbeiten auszeichnet, anerkennen muss, so ist doch nicht zu leugnen, dass sie alle mehr oder weniger Lücken übrig lassen, wodurch die Beweiskraft zerstört wird, und wenn gleich durch LAGRANGE'S tiefeindringende Untersuchungen dem grössten Theile jener Mängel abgeholfen worden ist, so können doch auch die Bemühungen dieses grossen Geometers eben so wie die scharfsinnige Art, wie später LAPLACE diesen Gegenstand behandelt hat, gerade von dem Hauptvorwurfe, welcher alle jene versuchten Beweise trifft, nicht freigesprochen werden. Dieser besteht darin, dass man die Sache so genommen hat, als sei bloss die Form der Wurzeln zu bestimmen, deren Existenz man voraussetzte, ohne sie zu beweisen, eine Schlussart, die gerade hier bloss illusorisch, und in der That eine wahre *petitio principii* ist. Alle die erwähnten Beweise sind rein analytisch, auch den von D'ALEMBERT nicht ausgenommen, obgleich er in einer geometrischen Einkleidung erscheint, die aber für die Sache selbst ganz gleichgültig ist; und man könnte daher sich fast zu dem Schlusse verleiten lassen, als sei jene Voraussetzung, deren Unzulässigkeit übrigens den genannten Analysten selbst entgangen ist, bei einer analytischen Behandlung gar nicht zu vermeiden gewesen. Der Verf. vorliegender Abhandlung hatte in der oben erwähnten Schrift diesen Gegenstand auf eine ganz verschiedene Art behandelt, und einen höchst einfachen neuen Beweis gegeben, welcher das Eigenthümliche hat, dass er sich zum Theil auf die Geometrie der Lage gründet, und übrigens in Ansehung der Strenge nichts zu wünschen übrig zu lassen scheint. Zugleich hatte er aber schon damals erklärt, das er keineswegs für unmöglich halte, auf rein analytischem Wege zu einem vollkommen strengen Beweis zu gelangen, und sich die ausführliche Entwicklung seiner Ideen auf eine andere Zeit vorbehalten.“ ([L 10.7], S. 105/106)

Unmöglichkeit der Auflösbarkeit der Gleichung fünften Grades

Während noch bis weit ins 19. Jh. hinein angebliche Lösungen in Radikalen für die allgemeine Gleichung fünften oder höheren Grades gesucht und publiziert wurden, reifte unter führenden Mathematikern die Einsicht in den wirklichen Sachverhalt. Hatte Lagrange die Lösung immerhin noch für möglich gehalten, so sprach Gauß 1799 in seiner Dissertation und nochmals ganz entschieden 1801 die Gewißheit aus, daß die Gleichungen höheren als vierten Grades nicht in Radikalen lösbar sind:

„Bekanntlich sind alle Bemühungen der grössten Geometer, die allgemeine Auflösung der Gleichungen, welche den vierten Grad übersteigen, oder (um genauer zu definieren, was man will) die Reduction der gemischten Gleichungen auf reine Gleichungen zu finden, bisher stets vergeblich gewesen, und es bleibt kaum zweifelhaft, dass dieses Problem nicht sowohl die Kräfte der heutigen Analysis übersteigt, als vielmehr etwas Unmögliches erreichen will.“ (L 10.6), S. 433)

In demselben Jahr, 1799, hatte der Italiener Ruffini — ohne daß Gauß davon gewußt hatte — einen Beweis für den Satz unternommen, daß die allgemeine Gleichung fünften Grades nicht in Radikalen lösbar ist. Sein zweibändiges Lehrbuch der Algebra „Teoria generale ...“ (Allgemeine Theorie der Gleichungen, in der die Unmöglichkeit der algebraischen Auflösbarkeit der Gleichungen höheren als vierten Grades bewiesen wird) behandelte hauptsächlich dieses Problem, und zwar mit Hilfe einer Lehre von den Permutationen, die bereits zum tragenden Bestandteil einer Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen aufgerückt ist. So bestimmte er, modern ausgedrückt, fast alle Untergruppen der symmetrischen Gruppe S_5 . Auf dieser Grundlage gelangte Ruffini zu einem, allerdings noch nicht lückenlosen, Nachweis, daß die allgemeine Gleichung fünften Grades nicht in Radikalen auflösbar sein kann. Der entsprechende Beweis dagegen für die Gleichungen sechsten und höheren Grades ist überaus unvollkommen geblieben, auch in späteren Arbeiten von Ruffini.

Ruffini und seine Ergebnisse blieben verhältnismäßig lange unbekannt. So erfuhr der andere Entdecker der Nichtauflösbarkeit höherer Gleichungen, Abel, erst etwa 1826 von Ruffini, zu einem Zeitpunkt, als er selbst zu diesem Thema zu publizieren begonnen hatte. Abel war stark inspiriert von der Behandlung der Kreisteilungsgleichung durch Gauß. Er kannte ferner die Arbeiten von Lagrange genau. Schon 1824, im Alter von 22 Jahren, veröffentlichte er einen Beweis des Satzes über die Nichtauflösbarkeit der Gleichung fünften Grades in Radikalen, 1826 konnte er den Satz für alle den vierten Grad übersteigenden Gleichungen beweisen. Und schließlich gelangte Abel 1828 — durch Umkehrung der Fragestellung — weit auf dem Wege voran, die gesamte Klasse der durch Radikale lösbaren algebraischen Gleichungen zu bezeichnen.

Einer der von Abel bewiesenen Hauptsätze lautet folgendermaßen; er stammt aus der erst postum 1829 gedruckten Abhandlung „Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement“:

„Obwohl die algebraische Auflösung der Gleichungen im Allgemeinen nicht möglich ist, gibt es doch besondere Gleichungen aller Grade, welche eine solche Auflösung zulassen. Dieser Art sind zum Beispiel die Gleichungen von der Form $x^n - 1 = 0$.

...
Allgemein habe ich den folgenden Satz bewiesen:

Wenn die Wurzeln einer Gleichung beliebigen Grades unter einander derart verbunden sind, dass sich diese sämtlichen Wurzeln rational mittelst einer von ihnen, die wir mit x bezeichnen, ausdrücken lassen; wenn man ferner, falls durch

$$\partial x, \partial_1 x$$

zwei beliebige andere Wurzeln bezeichnet werden,

$$\partial \partial_1 x = \partial_1 \partial x$$

hat, so ist die betreffende Gleichung immer algebraisch auflösbar. Ebenso kann man, wenn man annimmt, daß die Gleichung irreduzibel sei und ihr Grad ausgedrückt werde durch

$$\alpha_1^{\nu_1} \alpha_2^{\nu_2} \dots \alpha_w^{\nu_w}$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_w$ von einander unabhängige Primzahlen sind, die Auflösung dieser Gleichungen zurückführen auf diejenige von ν_1 Gleichungen vom Grade α_1 , ν_2 Gleichungen vom Grade α_2 , ν_3 Gleichungen vom Grade α_3 , u. s. w.“ ([L 10.2], S. 29/30)

Abel geht bereits durchaus gruppentheoretisch vor. Er gelangte zum Begriff der Permutationsgruppe, wenn er auch die Gruppe einer Gleichung noch nicht explizit aufstellte und das von ihm verwendete Wort „le groupe“ noch im Sinne des normalen Sprachgebrauches von Zusammenfassung auftritt, d. h. noch nicht als scharf definierter mathematischer Fachterminus. Implizit findet sich bei Abel auch der Begriff des Rationalitätsbereiches (Körpers).

Die gruppentheoretische Formulierung des Auflösungsproblems

Ähnlich wie Abel, aber noch radikaler, vollzog Galois, der auch im politischen Bereich mit revolutionärem Elan auf republikanischer Seite stand, eine Umorientierung der Mathematik, die auf den Beginn des strukturellen Denkens in der Mathematik, insbesondere der Algebra hinauslaufen sollte. Dies wird besonders deutlich in der Galoisschen Lösungstheorie algebraischer Gleichungen, die wegen ihrer Schönheit und Schwierigkeit zu den besonders eindrucksvollen Stücken der Mathematik gehört.

Der entscheidende Gedanke von Galois besteht darin, daß jeder algebraischen Gleichung eine eindeutig bestimmte (Permutations-) Gruppe zugeordnet wird. Aus ihrer Struktur kann man ablesen, ob eine Gleichung in Radikalen lösbar ist. Galois hat dies erkannt, insbesondere, welche entscheidende Rolle dabei die „ausgezeichneten Untergruppen“ spielen, die man heute Normalteiler nennt.

Damit hatte Galois die Lösung eines jahrhundertelangen Problems gefunden, freilich mit Methoden und Überlegungen, die der Mehrzahl der damaligen Mathematiker unorthodox und fremdartig vorkommen mußten. Es war daher keine vorsätzliche böse Absicht, daß die französische Akademie eine seiner Arbeiten mit dem Bemerkten zurückreichte, der Autor möge seine Ergebnisse klarer darlegen und vor allem ausführliche Beweise beibringen.

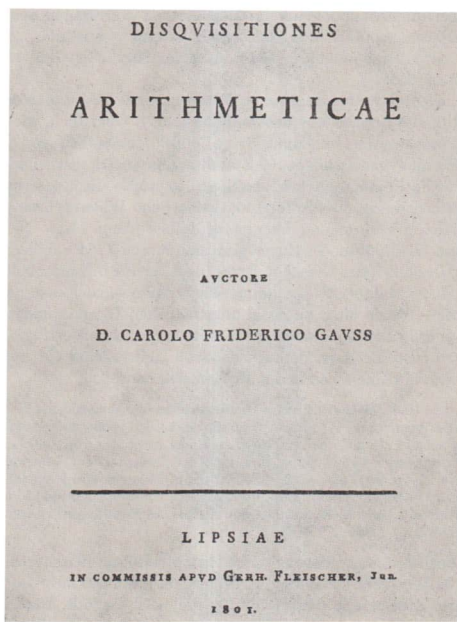
Der frühe Tod hinderte Galois überdies an einer ausführlichen, für andere durchsichtigen Darstellung seiner Ergebnisse. Im Jahre 1846 sind die wichtigsten Arbeiten von Galois, von denen einige nur notizenartigen Charakter trugen, aus dem Nachlaß

herausgegeben worden, zunächst allerdings ohne spürbare Resonanz. Erst die nächste Generation der Mathematiker führte die von Galois skizzierten Ideen in allen Einzelheiten durch. Knapp vierzig Jahre nach dessen Tode, 1870, veröffentlichte der französische Mathematiker Jordan ein umfangreiches Lehrbuch der Substitutionentheorie, in das die insbesondere von Cauchy in den 40er Jahren des 19. Jh. weiterentwickelte Theorie der Permutationsgruppen einging und das die Galoissche Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen in geschlossener Form darstellte. Im Vorwort hat Jordan die Verdienste von Galois gewürdigt:

„Galois war dazu ausersehen, die Theorie der Gleichungen auf ein sicheres Fundament zu stellen ... Das Problem der Auflösung, das früher der einzige Zweck der Theorie der Gleichungen zu sein schien, erscheint nun als das erste Glied einer langen Kette von Fragen, die sich auf die Transformation irrationaler Zahlen und auf ihre Einstellung beziehen. Indem Galois seine allgemeinen Methoden auf diese besondere Aufgabe anwandte, fand er ohne Schwierigkeiten die charakteristische Eigenschaft der Gruppen von Gleichungen, die durch Wurzelgrößen lösbar sind. Doch in der Hast der Formulierung ließ er mehrere grundlegende Lehrsätze ohne ausreichende Beweise ... Es gibt drei grundlegende Begriffe ...: den der Primitivität, auf den schon in den Werken von Gauß und Abel hingewiesen wurde; der der Transitivität, der bei Cauchy auftaucht; und schließlich die Unterscheidung zwischen einfachen und zusammengesetzten Gruppen. Der letztere Begriff, der wichtigste von den dreien, ist Galois zu verdanken.“
([L 10.9], S. 325/326)

Vorlesung 11

Industrielle Revolution: Grundlagen der Analysis. Zahlssystem. Funktionentheorie



Titelblatt C. F. Gauß: Disquisitiones arithmeticae, 1801

Verschärfung der Grundlagen der Analysis

Trotz aller großartigen Erfolge war die Analysis, die nach Eulers Worten „ruhmvolle Erfindung“, mit dem unbehaglichen Gefühl von der Fragwürdigkeit ihrer logischen Prinzipien belastet geblieben.

Die Konstatierung der Mängel

Bis zum Ende des 18. Jh. wurde die Diskussion im ganzen gesehen unter philosophischer Flagge geführt. Es war ein erster erfolgreicher Schritt in die richtige Richtung, daß sich die Diskussion der mathematischen Kernfragen aus der Umklammerung durch eine unzureichende Philosophie befreien konnte oder, wie es Marx ausdrückte, daß es gelang, „von den infinitesimalen Methoden den mystischen Schleier herunterzureißen“.

Auf der eigentlichen, der mathematischen Ebene ging die Diskussion dem Kerne nach um die begriffliche Bewältigung des mathematischen Unendlich, wie es bei der Verwendung der Sprechweisen „unendlich kleine Größe“, „unendlich groß“, „Summe einer unendlichen Reihe“ usw. auftrat. Galt es also, eine breite mathematische und naturwissenschaftliche Praxis logisch abzusichern, so wurde die Lage vollends unhaltbar, als schließlich sogar direkte innermathematische Widersprüche auftraten, z. B. bei der kritiklosen Verwendung divergenter Reihen (Anm. 11.1).

Darum stellten z. B. 1782 die Göttinger Universität und 1784 die Berliner Akademie Preisfragen bezüglich der Ursachen der Mängel bei den infinitesimalen Methoden. Charakteristisch war dabei die Forderung, die Strenge — nach dem großen Vorbild der Geometrie — dürfe nicht zu einer unerträglichen Langatmigkeit der Darstellung führen, sei es in Lehrbüchern oder sei es im mündlichen Vortrag.

So forderte etwa das Berliner Preisausschreiben „eine lichtvolle und strenge Theorie dessen, was man Unendlich in der Mathematik nennt“:

„Die höhere Geometrie (d. h. Mathematik; im 18. Jh. werden Mathematik und Geometrie oft als synonyme Begriffe verwendet, Wg) benutzt häufig unendlich große und unendlich kleine Größen; jedoch haben die alten Gelehrten das Unendliche sorgfältig vermieden, und einige berühmte Analysten unserer Zeit bekennen, daß die Wörter unendliche Größe widerspruchsvoll sind. Die Akademie verlangt also, daß man erkläre, wie aus einer widersprechenden Annahme so viele richtige Sätze entstanden sind, und daß man einen sicheren und klaren Grundbegriff angebe, welcher das Unendliche ersetzen dürfe, ohne die Rechnungen zu schwierig oder zu lang zu machen.“ ([LA 7], Bd. 4, S. 645)

Diese wichtige begleitende Forderung nach kalkülmäßiger Durcharbeitung der Grenzübergänge hatten trotz gedanklich richtiger Ansätze Maclaurin im „Treatise of Fluxions“ und d'Alembert in der „Encyclopédie“ nicht erfüllt. Die bemerkenswerte Schrift „Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitesimal“ (1797) des französischen Mathematikers und Revolutionärs L. N. M. Carnot erklärte die Richtigkeit der Differentialrechnung so, daß sich die bei der Herleitung der Sätze gemachten Fehler gegenseitig aufheben. Diese Auffassung war jedoch der Tendenz nach auf Sanktionierung bestehender Methoden gerichtet.

Von Lagrange, der übrigens die Anregung zur Preisfrage der Berliner Akademie gegeben hatte, stammt ein interessanter Lösungsversuch für die Grundlagenproblematik der Analysis, den Marx in seinen historisch-mathematischen Studien als „algebraische Differentialrechnung“ bezeichnet hat. Die bereits seit 1772 konzipierten Grundideen nahm Lagrange in sein berühmtes Lehrbuch „Théorie des fonctions analytiques“ (1797) auf. Der vollständige Titel ist ein Programm: „Théorie der analytischen Funktionen, enthaltend die Prinzipien der Differentialrechnung, befreit von jeglicher Betrachtung der unendlich kleinen Größen, der Verschwindenden, der Grenzwerte und der Fluxionen und reduziert auf die algebraische Analyse (analyse algébrique) endlicher Größen“ (franz.).

Bei Lagrange werden die ersten bis n -ten Ableitungen einer Funktion $y = f(x)$ als Koeffizienten der Taylorentwicklung definiert. Damit schien die Schwierigkeit beseitigt. Allerdings beruhte der Ansatz von Lagrange auf dem Irrtum, daß jede Funktion eine konvergierende Potenzreihenentwicklung besitzt. Bald darauf wurde diese Grundannahme bestritten und widerlegt; das Problem war wieder offen.

Die exakte Fassung des Grenzbegriffs

Die Forderung nach Klärung der Grundlagen der Analysis verband sich notwendigerweise mit einer Diskussion des Funktionsbegriffs; dies hatte im Grund der Vorstoß von Lagrange ebenso gezeigt wie die im Anschluß an das Studium von Saitenschwingungen und Wärmeausbreitungsproblemen vorgetragene Behauptung Fouriers, alle Funktionen seien in Form trigonometrischer Reihen darstellbar.

Zu Beginn des 19. Jh. trat die Diskussion der Grundlagen der Analysis in eine zweite Etappe ein; von der Konstatierung der Mängel zur Bewältigung der Schwierigkeiten. Das Gebot der Stunde lautete nun: Einzeluntersuchungen! Begriffsanalyse! Befreiung von unkontrollierbaren logischen und psychologischen Voraussetzungen! Das Ergebnis bestand in der Erkenntnis, daß Angabe des Definitionsbereichs, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Existenz der höheren Ableitungen, Entwickelbarkeit in eine konvergente Potenzreihe nicht einander implizierende Eigenschaften einer Funktion einer (reellen) Variablen sind, sondern vielmehr aufeinanderfolgende Stufen von Eigenschaften darstellen, die die Möglichkeit der Klasseneinteilung der Funktionen nach inneren Gründen eröffnen.

Der Beitrag von B. Bolzano

Die entscheidenden Schritte auf diesem Wege verbinden sich im Bewußtsein der heutigen Mathematiker im allgemeinen mit dem Namen Cauchy. Daran ist soviel richtig, daß dessen „Cours d'Analyse“ (1821), der sich mit Erfolg um eine exakte Bestimmung grundlegender Begriffe der Analysis bemühte, eine große Wirkung auf die nachfolgende Entwicklung ausgeübt hat. Der historischen Gerechtigkeit aber sei die Leistung des böhmischen Sozialethikers und Mathematikers Bolzano betont, der in einigen Punkten sogar zeitlich von Cauchy zu entscheidenden Einsichten vor-

gestoßen ist. In einer kleinen Schrift „Der binomische Lehrsatz, ...“ (1816) stellt er fest:

„... wie ich ... auch statt der so genannten unendlich kleinen Größe mich durchgängig ... des Begriffes solcher Größen bediene, die kleiner als jede gegebene werden können, oder (wie ich sie zur Vermeidung der Eintönigkeit zuweilen gleichfalls nenne, obwohl schon minder eigentlich) der Größen, welche so klein werden können, als man nur immer will. Hoffentlich wird man den Unterschied zwischen den Größen dieser Art und dem, was man sich sonst unter dem Nahmen des unendlich Kleinen denkt, nicht verkennen.“ ([L 11.3], S. IV—V)

In einer anderen Schrift Bolzanos vom Jahre 1817, die den strengen Beweis des Zwischenwertsatzes enthält, findet sich zum erstenmal in der Geschichte der Mathematik eine strenge Definition für „Stetigkeit einer Funktion“ mit der explizit geäußerten Absicht, den bis dahin nur intuitiv oder unter Berufung auf die Anschauung gebrauchten Begriff streng zu fassen, damit er so der Einpassung in eine systematische Darstellung der Analysis fähig werde. Bolzano definiert,

„daß eine Function $f(x)$ für alle Werthe von x , die inner- oder außerhalb gewisser Grenzen liegen, nach dem Gesetze der Stetigkeit sich ändere, (...) daß, wenn x irgend ein solcher Werth ist, der Unterschied $f(x + \omega) - f(x)$ kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden könne, wenn man ω so klein, als man nur immer will, annehmen kann.“ ([L 11.5], S. 7/8)

Sieht man davon ab, daß Bolzano den Gebrauch des Absolutzeichens noch nicht kennt, so hat man hier eine Definition der Stetigkeit, wie sie heute jedem Mathematiker selbstverständlich scheint (Anm. 11.2). Bolzano war auch der erste, der das heute nach Cauchy benannte und von ihm 1821 zuerst gebrauchte (Anm. 11.3) notwendige und hinreichende Konvergenzkriterium für unendliche (Funktionen-) Reihen formuliert hat. Es beruht bei Bolzano bereits auf einem — freilich noch verkappten — Gebrauch von Partialsummen.

Es war eine echte mathematikhistorische Sensation, als in den 20er Jahren unseres Jahrhunderts bei der Erschließung des Nachlasses von Bolzano festgestellt wurde, daß er in einer „Functionenlehre“ als erster ein Beispiel einer in einem ganzen Intervall stetigen, aber dort nirgends differenzierbaren Funktion angegeben hat, und das 45 Jahre vor Weierstraß, dem bis zu dieser Entdeckung die Priorität zugesprochen worden war. Überdies enthält die „Functionenlehre“ noch viele weitere beachtenswerte Ergebnisse, z. B. über den Zusammenhang von Monotonie und Stetigkeit von Funktionen.

Der Beitrag von A. L. Cauchy

Bolzano hat zu seiner Zeit kaum Anerkennung finden können: Aus politischen Gründen war ihm öffentliches Wirken untersagt; aber er hat wohl auch jene aus der Industriellen Revolution entspringende Forderung nach Lehrbarkeit der Mathematik nicht erkannt. Cauchy dagegen stand — trotz seiner in politischen Dingen extrem konservativen Haltung — ganz in dieser Entwicklung, die die kalkülmäßige Durcharbeitung mit dem Durchbruch zur Strenge verband.

Im Jahre 1821 erschien Cauchys „Analyse Algébrique“, die den ersten Teil des

offiziellen Lehrbuches der Pariser Polytechnischen Schule darstellte, des „Cours d'Analyse“. Er habe es abgefaßt „zum größeren Nutzen der Zöglinge“ und könne daher nicht umhin, „die Haupteigenschaften der unendlich kleinen Größen, Eigenschaften, die die Basis des Infinitesimalkalküls bilden, bewußt zu machen“. Er sähe sich auch der Strenge der Lehrmethode wegen genötigt, mehrere Lehrsätze auszusprechen,

„die auf den ersten Blick vielleicht ein wenig hart (dure) erscheinen. Zum Beispiel, ... daß eine divergente Reihe keine Summe hat.“ ([L 11.10], S. I, franz.)

Durch Cauchy wurde das Axiom von Eudoxos-Archimedes — in arithmetischer Form — endgültig Grundlage der Infinitesimalrechnung; die Forderungen nach Strenge und nach Handhabbarkeit werden dann im Zusammenwirken mit dem — späteren — formalen Apparat der δ - ϵ -Sprache erfüllt werden. Es wird nun unnötig, sich auf die geometrische Veranschaulichung oder auf die mechanische Deutung der Stetigkeit zu berufen. Demselben Kalkül wird bei Cauchy die Grenzwertbildung, z. B. beim Differentialquotienten, unterworfen. Derselbe Kalkül gestattet es — und damit wurde ein Beweisversuch von Ampère widerlegt —, Stetigkeit und Differenzierbarkeit als einander nicht implizierende Eigenschaften nachzuweisen: Aus der Differenzierbarkeit folgt die Stetigkeit, aber nicht umgekehrt.

Cauchy führte die Sprechweise ein, daß die Glieder einer Folge unendlich klein oder beliebig klein werden. Er definierte den Limes superior und den Limes inferior einer Folge und stellte den Zusammenhang mit dem eventuell existierenden Grenzwert der Folge her. Das von Gauß schon 1812 benutzte Majorantenkriterium wurde von Cauchy ausdrücklich als allgemeines und weitreichendes Konvergenzkriterium benutzt und hieraus unter Verwendung der geometrischen Reihe das Wurzelkriterium abgeleitet. Cauchy stellte 1833 auch klar, daß das Kommutativgesetz für die Glieder einer unendlichen Reihe nur für absolut konvergierende Reihen uneingeschränkt gilt, woran dann 1857 Dirichlet anknüpfte. Die Bedingung der absoluten Konvergenz zweier Reihen erwies sich auch als hinreichend dafür, daß die durch gliedweise Multiplikation entstehende Produktreihe ebenfalls, und zwar gegen das Produkt der Grenzwert der einzelnen Reihen konvergiert.

Weitere, von Cauchy und von Abel, Dirichlet, Fourier, Čebyšev, Olivier, Stokes und anderen gefundene Sätze zur Theorie der unendlichen Reihen betreffen auch schon das Konvergenzverhalten allgemeiner Funktionenreihen und nicht nur das von Potenzreihen. Sie erschließen die funktionalen Eigenschaften — wie Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit — der durch die Reihe definierten Funktion (der Summe) aus den Konvergenzeigenschaften der Reihe und den funktionalen Eigenschaften ihrer Glieder. Entscheidend für die Bewältigung solcher Fragen ist bekanntlich der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz. Bei Cauchy war diese Lücke, die ihn gelegentlich zu Fehlern verführte, noch geblieben. Die hieraus entspringenden Unsicherheiten konnten erst nach Aufdeckung der vollen Tragweite dieses Begriffs, in der zweiten Hälfte des 19. Jh., behoben werden. Und schließlich betonte Cauchy die entscheidende methodische Rolle des Existenzbeweises in der Analysis, sei es für die Reihensumme oder für die Lösung von Differentialgleichungen.

Durch Cauchy wurde eine Entwicklung eingeleitet, die die Integralrechnung

– bisher nur als Umkehrung der Differentialrechnung aufgefaßt – zu einer selbständigen, von der Differentialrechnung unabhängigen mathematischen Disziplin werden ließ. Sie wurde über Dirichlet und Jacobi, über Riemann, Weierstraß, Heine, Borel, Lebesgue und andere zur Untersuchung derjenigen Klasse von Funktionen, die ein Integral (im Riemannschen oder Lebesgueschen usw. Sinne) besitzen. Weitergeführt im strengen Stil der französischen Schule hat diese fruchtbare Denkhaltung noch die Herausbildung der Mengenlehre und der Funktionsanalysis beeinflusst.

Neufassung und Verschärfung des Funktionsbegriffs

Der Bernoulli-Eulersche Funktionsbegriff hat eine bedeutende, positive Rolle bei der Konsolidierung der Analysis während des 18. Jh. gespielt. Euler hatte von „analytischem Ausdruck“ bei der Definition des Funktionsbegriffs gesprochen; durch Aufzählung wird erläutert, was etwa „analytischer Ausdruck“ bedeutet: Gebrauch aller algebraischer Operationen, Bildung der Logarithmus- und der Exponentialfunktion, die Operationen des Bildens einer unendlichen (Potenz-) Reihe.

Die Wortbildung „analytische Funktion“ hatte demnach ursprünglich den Sinn: Funktion, die in der Analysis verwendet wird. In dem präzisierten Sinne als einer durch eine Potenzreihe gebildeten Funktion scheint „analytische Funktion“ zuerst von den französischen Mathematikern aufgebracht worden zu sein; bei Lagrange jedenfalls ist dieser Ausdrucksweise vollständig fixiert, zumal seine „*Théorie des fonctions analytiques*“ von 1797 zugleich als Schlußstein der Grundlegung der Analysis gedacht war.

Es wird oft übersehen, daß sich bei Euler außer dem an Beroulli orientierten Funktionsbegriff noch ein anderer, wesentlich verallgemeinerter Funktionsbegriff findet. In seiner „Differentialrechnung“ von 1755 spricht er allgemein von einer Funktion gewisser Größen von anderen Größen, wenn sich die letzteren in Abhängigkeit von den ersteren ändern.

„Sind nun Größen auf die Art von einander abhängig, daß keine davon eine Veränderung erfahren kann, ohne zugleich eine Veränderung in der anderen zu bewirken: so nennt man diejenige, deren Veränderung man als die Wirkung von der Veränderung der anderen betrachtet, eine Funktion von dieser; eine Benennung, die sich so weit erstreckt, daß sie alle Arten, wie eine Größe durch eine andere bestimmt werden kann, unter sich begreift. Wenn also x eine veränderliche Größe bedeutet, so heißen alle Größen, welche auf irgend eine Art von x abhängen, oder dadurch bestimmt werden, Funktionen von $x \dots$ “ ([L 11.17], S. XLIX).

Freilich vermochte sich dieser in die Zukunft weisende Eulersche Ansatz (Anm. 11.4) damals noch nicht durchzusetzen. Erst die Diskussion mathematischer Schwierigkeiten zunehmender Häufigkeit und Tiefe wirkte mit der entsprechenden historischen Durchschlagskraft. Euler schon hatte die Frage aufgeworfen, ob sich jede mit der Hand willkürlich hinzeichnenbare Kurve als Bild einer Funktion auffassen läßt; diese heftig diskutierte Frage mußte unter den Bedingungen der Mathematik des 18. Jh. unentschieden bleiben.

Eine andere, ebenso heftig diskutierte Frage war die, ob die Einteilung der Funktionen in stetige (d. h. zusammenhängende), nicht stetige und gemischte Funktionen

angemessen sei und ob gegebenenfalls eine „gemischte Kurve“ beispielsweise nach Art der „Sägeblattkurve“ (Abb. 11.1) durch eine Funktion wiedergegeben werden könne. Die Diskussionen wurden aktualisiert durch die Behandlung der Differentialgleichungen der schwingenden Saite und der der Wärmeausbreitung. Bereits Anfang des 19. Jh. und dann später 1822 in seiner „*Theorie analytique de la chaleur*“ vertrat Fourier die Meinung, daß jede Kurve – also auch jede nicht zusammenhängende Kurve – als Bild einer durch eine trigonometrische Reihe bestimmten Funktion darstellen lasse, und stieß dabei zunächst auf große Bedenken bei seinen Kollegen.

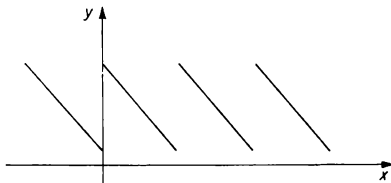


Abb. 11.1. „Sägeblattkurve“

Fourier bewies auch seine Einsicht in die sich hieraus ergebenden Konsequenzen für einen neuzufassenden Funktionsbegriff, indem er 1822 in seiner „*Wärmelehre*“ von einer Funktion als von einer Folge von beliebigen Werten sprach und davon, daß die Ordinaten keinesfalls einem einzigen mathematischen Gesetz folgen, d. h. also nicht durch denselben mathematischen Ausdruck wiedergegeben werden müssen. Als Resultat aller weitgespannten intensiven Diskussionen wurde klar, daß die Identifizierung von Funktion mit analytischem Ausdruck nicht länger aufrechtzuerhalten war und statt dessen die gegenseitige Abhängigkeit von Größen zum Prinzip der Definition des Funktionsbegriffs erhoben werden müsse.

Der erste deutliche Ausdruck dieser Wendung, die in eine zweite Etappe in der Geschichte des Funktionsbegriffs führen sollte, findet sich in einer Arbeit von Lobačevskij aus dem Jahre 1834 über trigonometrische Reihen. Dort heißt es:

„Der allgemeine Begriff erfordert, daß eine Funktion von x eine Zahl genannt wird, die für jedes x gegeben ist und sich fortschreitend mit x ändert. Der Wert der Funktion kann gegeben sein entweder durch einen analytischen Ausdruck oder durch eine Bedingung, welche ein Mittel darbietet, alle Zahlen zu prüfen und eine davon auszuwählen oder schließlich kann die Abhängigkeit bestehen aber unbekannt bleiben.“ (Deutsch zitiert nach [L 11.37], S. 77, engl.)

Die Verwendung des Wortes „fortschreitend“ (oder allmählich, postepenno im russischen Original) deutet an, daß Lobačevskij noch immer ausschließlich stetige Funktionen vor Augen hat; der entscheidende Schritt aber, der Verzicht auf die formelmäßige Zuordnung der Ordinaten zu den Abszissen, weist den Weg zur modernen Definition. Die von Dirichlet 1837 in der Arbeit „Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen“ gegebene Definition der Funktion stimmt mit der von Lobačevskij inhaltlich fast genau überein. Auch Dirichlet definiert eine stetige Funktion einer sich stetig ändernden Variablen;

dabei wird die Bindung an ein einheitliches Bildungsgesetz fallengelassen ([L 11.14], S. 135/136).

Den letzten, entscheidenden Schritt tat schließlich der deutsche Mathematiker Hankel, der — neben der Forderung nach einem die Funktion definierenden Formel-ausdruck — schließlich auch auf die Bindung des Funktionsbegriffs an die Stetigkeit verzichtete:

„Eine Funktion heißt y von x , wenn jedem Werte der veränderlichen Größe x innerhalb eines gewissen Intervalls ein bestimmter Wert von y entspricht; gleichviel, ob y in dem ganzen Intervalle nach demselben Gesetze von x abhängt oder nicht; ob die Abhängigkeit durch mathematische Operationen ausgedrückt werden kann oder nicht.“ ([L 11.22], S. 49)

Diese Definition, die bis weit ins 20. Jh. allgemeine Grundlage der Analysis war, findet sich in seiner von tiefem historischen Verständnis geprägten Einleitung über die Entwicklung des Funktionsbegriffs zu der Abhandlung „Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen“ vom Jahre 1870. Um eben diese Zeit gelangte Cantor, ausgehend von ganz benachbarten Fragstellungen, zur Mengenlehre; auf mengentheoretischer Grundlage wird im 20. Jh. ein neuer, noch allgemeinerer Funktionsbegriff entwickelt werden, der ihn als Teilmenge des cartesischen Produkts zweier (oder mehrerer) Mengen mit bestimmten Eigenschaften festlegt. Es wäre jedoch falsch, diese weitere Verallgemeinerung des Funktionsbegriffs ausschließlich dem Einfluß der Mengenlehre zuzuschreiben; dazu war der Einfluß anderer mathematischer Disziplinen, insbesondere der sich entwickelnden mathematischen Logik zu groß. So kam Dedekind 1887 auf der Grundlage seiner algebraischen, zahlentheoretischen und mengentheoretischen Studien zu einem allgemeinen Begriff der Abbildung einer Menge (nicht notwendig Zahlenmenge) in eine andere, wobei er die Vorstellungen dazu bereits in den Jahren 1872 bis 1878 entwickelte. Er beachtete jedoch kaum den Zusammenhang dieses Begriffs mit der damals üblichen Definition der Funktion und wandte sich dann den eindeutigen Zuordnungen von Mengen zu, die Cantor bereits in seiner Arbeit von 1874 betrachtet hatte. In seinen 1895 bis 1897 publizierten Arbeiten zur transfinitiven Mengenlehre gab Cantor eine Definition der Funktion, die in ihrer Allgemeinheit und ihrem Wesen den Dedekindschen Vorstellungen entspricht.

In dieser Zeit kamen auch Vertreter der mathematischen Logik zu einem allgemeinen Funktionsbegriff. So beschäftigte sich de Morgan im Jahre 1850 mit Relationen, und C. S. Peirce stellte sie bereits als Elementpaare dar und begann 1880/1890 mit ihrer Klassifizierung. Schröder gab im Rahmen seiner Betrachtungen zur Theorie der Abbildungen im Jahre 1895 jene Eigenschaften an, die unter den Relationen die Funktionen charakterisieren. Die Definition der Funktion als Teilmenge des cartesischen Produkts von Mengen mit gewissen Eigenschaften formulierte sinn-gemäß Peano im Jahre 1911, wobei er sowohl an die Forschungen zur Theorie der Funktionen als auch zur mathematischen Logik anknüpfte; Peano hatte bereits 1887 vektorwertige Mengenfunktionen untersucht.

Aufbau des Zahlensystems

Neben der Verschärfung der Grundlagen der Infinitesimalrechnung gehörte auch der strenge Aufbau des Zahlensystems zum schwierigen Weg der Grundlegung der Mathematik im 19. Jh. Bis zu einem gewissen Grade kehrte sich dabei der Prozeß der Entwicklung der Begriffe gegenüber der historischen Entwicklung um: Hatte sich die Menschheit seit ihrem Beginn nach und nach neue Zahlenbereiche erobert und hatte sie den Umgang mit natürlichen, gebrochenen, negativen, irrationalen und schließlich komplexen Zahlen beherrschen gelernt, so erfolgte die strenge Grundlegung des Zahlensystems sozusagen von oben nach unten: Die Theorie der komplexen Zahlen wurde auf die der reellen Zahlen, die der irrationalen auf die der gebrochenen Zahlen zurückgeführt, diese wieder auf die axiomatisch begründete Theorie der natürlichen Zahlen.

Schrittweise Ausdehnung der Zahlbereiche

Die Verwendung der natürlichen Zahlen und der Brüche geht bis in die Antike zurück; trotz der Leistung von Eudoxos hatte die Antike jedoch nicht zur Anerkennung des Irrationalen als Zahl vorstoßen können. Die bewußte Verwendung negativer Zahlen erfolgte bereits innerhalb der chinesischen, der indischen und gelegentlich in der islamischen Mathematik. In Europa erlangten negative ganze und gebrochene Zahlen erst im Frühkapitalismus unter Kaufleuten und Rechenmeistern volle Anerkennung. Lange dagegen war die Frage umstritten, ob etwa Zahlenwerte, die sich durch Radizieren oder bei geometrischen Konstruktionen als Längen ergeben, wirkliche Zahlen sind. Beispielsweise findet man im Jahre 1544 bei Stifel die scharfsinnige Überlegung:

„Mit Recht wird bei den irrationalen Zahlen darüber disputiert, ob sie wahre Zahlen sind oder nur fingierte. ... Denn bei Beweisen an geometrischen Figuren haben die irrationalen Zahlen noch Erfolg, wo uns die rationalen im Stich lassen, und sie beweisen genau das, was die rationalen Zahlen nicht beweisen konnten, jedenfalls mit den Beweismitteln, die sie uns bieten. Wir werden also veranlaßt, ja gezwungen, zuzugeben, daß sie in Wahrheit existieren, nämlich auf Grund ihrer Wirkungen, die wir als wirklich, gewiß und feststehend empfinden.

Aber andere Gründe veranlassen uns zu der entgegengesetzten Behauptung, daß wir nämlich bestreiten müssen, daß die irrationalen Zahlen Zahlen sind. Nämlich wenn wir versuchen, sie der Zählung zu unterwerfen und sie mit rationalen Zahlen in ein Verhältnis zu setzen, dann finden wir, daß sie uns fortwährend entweichen, so daß keine von ihnen sich genau erfassen läßt ... Es kann aber nicht etwas eine wahre Zahl genannt werden, bei dem es keine Genauigkeit gibt und was zu wahren Zahlen kein bekanntes Verhältnis hat. So wie eine unendliche Zahl keine Zahl ist, so ist eine irrationale Zahl keine wahre Zahl, weil sie sozusagen unter einem Nebel der Unendlichkeit verborgen ist.“ ([L 11.32], deutsch zitiert [L 11.20], S. 68/69)

Gleichzeitig hat Stifel offenbar den zahlenartigen Charakter irrationaler Zahlen erfaßt, wenn er feststellt:

„Nun fallen ... unendlich viele gebrochene Zahlen zwischen je zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen und ebenso fallen auch unendlich viele irrationale Zahlen zwischen je zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen.“ ([L 11.32], deutsch zitiert [L 11.20], S. 69)

Eine vollständige Anerkennung der irrationalen Zahlen als Zahl findet sich in Europa bei Stevin; vom Standpunkt seines dezimalen Positionssystems für alle Zahlen mußte dies sogar einigermaßen zwangsläufig erscheinen. Jedoch schuf erst die Herausbildung der Methoden der analytischen Geometrie durch Fermat und Descartes die Voraussetzung zur allgemeinen Anerkennung der irrationalen Zahlen: Jedem Punkt der Zahlengeraden entspricht eine Zahl. Schließlich fixierte Newton, im Anschluß an Barrow, in der „Arithmetica universalis“ (1673/83; Druck erst 1707) einen allgemeinen Zahlbegriff:

„Unter Zahl verstehen wir nicht sowohl eine Menge von Einheiten, sondern vielmehr das abstrakte Verhältnis irgendeiner Größe zu einer anderen Größe derselben Gattung, die als Einheit angenommen wird. Sie ist von dreifacher Art; ganz, gebrochen und irrational; ganz, wenn die Einheit sie mißt; gebrochen, wenn ein Teil der Einheit, dessen Vielfaches die Einheit ist, sie mißt; irrational, wenn die Einheit mit ihr inkommensurabel ist.“ (Deutsch zitiert [L 11.20], S. 71/72)

Der Weg zu den komplexen Zahlen

Noch mühsamer war der Weg zur Anerkennung der komplexen Zahlen. Hatten bereits die Mathematiker der Renaissance erste, sogar ziemlich intensive Berührung mit komplexen Zahlen gehabt, so fanden diese im 17. und 18. Jh. weite Verbreitung, ohne daß freilich begriffliche Klarheit über deren Wesen erreicht werden konnte. Beispielsweise war sich Girard dessen bewußt, daß man nur unter Heranziehung der komplexen Zahlen den Fundamentalsatz der Algebra in voller Allgemeinheit aussprechen könne, daß nämlich eine algebraische Gleichung des Grades n auch genau n Wurzeln habe; umgekehrt folge nur aus diesem Umstand eine Art Existenzberechtigung für den Gebrauch der komplexen Zahlen. In demselben Zusammenhang prägte Descartes den Begriff „imaginäre“ (eingebildete, vermeintliche) Zahl, wobei er zugesteht, daß man noch keine rechte Vorstellung von solchen „Zahlen“ habe. In „La Géométrie“ von 1637 heißt es:

„Endlich bemerken wir, dass sowohl die wahren wie die falschen (positiven wie negativen, Wg) Wurzeln einer Gleichung nicht immer real, sondern manchmal nur imaginär (seulement imaginaires, Wg) sind, d. h. man kann sich zwar allemale bei jeder beliebigen Gleichung so viele Wurzeln, wie ich angegeben habe (nämlich sovielen, wie der Grad der Gleichung ist, Wg) vorstellen, aber manchmal giebt es keine Größen, die den so vorgestellten entsprechen.“ ([L 11.13], S. 79)

Leibniz fand u. a. 1675 die Beziehung

$$\sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}} = 6$$

die in seltsamer Weise das Komplexe mit dem Reellen verknüpfte und die die „Absonderlichkeiten“ beim Umgang mit den „eingebildeten“ Zahlen betonte. So erklärt sich seine geradezu mystische Einschätzung der imaginären Zahlen als einem

„Wunder der Analysis, dem monstrum der idealen Welt, einer feinen und wunderbaren Zuluft des göttlichen Geistes, beinahe einem Zwitterwesen zwischen Sein und Nichtsein.“ ([LA 33], Bd. II, S. 109)

Euler führte 1777 das Symbol i ein und rechnete, „wie wenn $i^2 = -1$ sei“: das Symbol i und die Bezeichnung „komplexe Zahl“ setzten sich jedoch erst durch, nachdem Gauß davon Gebrauch gemacht hatte. Euler hatte die imaginäre Zahl – einigermaßen unbestimmt – folgendermaßen definiert:

„Eine Größe heißt imaginär, wenn sie weder größer als Null, noch kleiner als Null, noch gleich Null ist. Das ist etwas Unmögliches, wie z. B. $\sqrt{-1}$ oder allgemein $a + b \sqrt{-1}$.“ (Deutsch zitiert [L 11.20], S. 66)

Euler konnte zeigen, daß die Menge der komplexen Zahlen $a + ib$ gegenüber den vier Grundrechenarten sowie dem Potenzieren und dem Radizieren abgeschlossen ist und daß bei geeigneter Festsetzung sogar alle damals bekannten transzendenten Operationen, darunter das Logarithmieren, nicht aus dem Bereich der komplexen Zahlen herausführen. So wagte er die Behauptung:

„Wir werden ohne zu schwanken behaupten, daß allgemein alle imaginären Größen, wie kompliziert sie auch sein mögen, stets auf die Form $M + N \sqrt{-1}$ gebracht werden können.“ (Deutsch zitiert [L 11.20], S. 66)

Gerade durch Euler und seine Virtuosität des formelmäßigen Rechnens war der Gebrauch der komplexen Zahlen fast zur Selbstverständlichkeit geworden; erst zu Ende des 18. Jh. begann die Klärung der begrifflichen Schwierigkeiten im Umgang mit dem Komplexen.

Geometrische Interpretation der komplexen Zahlen

Der Weg zur vollständigen Anerkennung der komplexen Zahlen führte über deren geometrische Interpretation. Bereits 1685 hatte Wallis über eine geometrische Repräsentation reflektiert, aber erst der norwegische Geodät Wessel wies einen erfolgreichen Weg dahin, indem er gerichtete Strecken arithmetischen Operationen unterwarf und diese ganz allgemeinen Überlegungen nach Art eines Vektorkalküls im Zwei- und Dreidimensionalen auf Zahlen der Form $a + \epsilon b$ mit $\epsilon = \sqrt{-1}$ anwandte. Doch blieb eine von Wessel 1796 ausgearbeitete und 1799 sogar gedruckte diesbezügliche Abhandlung ohne direkte Wirkung. Ähnlich erging es entsprechenden Überlegungen von L. N. M. Carnot in seiner „Géométrie de position“ (1803) und der bereits in sich abgerundeten Abhandlung „Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques“ (1806) des schweizerischen Buchhalters Argand.

Es bedurfte der Autorität von Gauß, um den komplexen (imaginären) Zahlen den letzten Hauch von Mystik und angeblicher Unklarheit zu nehmen. Hatte Gauß beim ersten Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra in seiner Dissertation noch den expliziten Gebrauch der komplexen Zahlen vermieden, so gründete er 1831 mit unterschiedenen Worten seine Untersuchung zur Theorie der biquadratischen Reste auf komplexe Zahlen:

„Der Verf. nennt jede Grösse $a + bi$, wo a und b reelle Grössen bedeuten, und i der Kürze wegen anstatt $\sqrt{-1}$ geschrieben ist, eine complexe ganze Zahl, wenn zugleich a und b ganze

Zahlen sind. Die complexen Grössen stehen also nicht den reellen entgegen, sondern enthalten diese als einen speciellen Fall, wo $b = 0$, unter sich ... ([L 11.18], S. 171)

Die Versetzung der Lehre von den biquadratischen Resten in das Gebiet der complexen Zahlen könnte vielleicht manchen, der mit der Natur der imaginären Grössen weniger vertraut und in falschen Vorstellungen davon befangen ist, anstössig und unnatürlich scheinen, und die Meinung veranlassen, dass die Untersuchung dadurch gleichsam in die Luft gestellt sei, eine schwankende Haltung bekomme, und sich von der Anschaulichkeit ganz entferne. Nichts würde unbegründeter sein, als eine solche Meinung. Im Gegenteil ist die Arithmetik der complexen Zahlen der anschaulichsten Versinnlichung fähig, ... So wie die absoluten ganzen Zahlen durch eine in einer geraden Linie unter gleichen Entfernungen geordneten Reihe von Punkten dargestellt werden, in der der Anfangspunkt die Zahl 0, der nächste die Zahl 1 u. s. w. vertritt; und so wie dann zur Darstellung der negativen Zahlen nur eine unbegrenzte Verlängerung dieser Reihe auf der entgegengesetzten Seite des Anfangspunktes erforderlich ist: so bedarf es zur Darstellung der complexen Zahlen nur des Zusatzes, dass jene Reihe als in einer bestimmten unbegrenzten Reihe befindlich angesehen, und parallel mit ihr auf beiden Seiten eine unbeschränkte Anzahl ähnlicher Reihen in gleichen Abständen von einander angenommen werde, so dass wir anstatt einer Reihe von Punkten ein System von Punkten vor uns haben, die sich auf eine zweifache Art in Reihen von Reihen ordnen lassen, und zur Bildung einer Eintheilung der ganzen Ebene in lauter gleiche Quadrate dienen ...“ ([L 11.18], S. 174)

Dann folgen weitere Ausführungen, die auf das, was wir heute als Gaußsche Zahlenebene bezeichnen, hinauslaufen:

„Wir haben geglaubt, den Freunden der Mathematik durch diese kurze Darstellung der Hauptmomente einer neuen Theorie der sogenannten imaginären Grössen einen Dienst zu erweisen. Hat man diesen Gegenstand bisher aus einem falschen Gesichtspunkt betrachtet und eine geheimnisvolle Dunkelheit dabei gefunden, so ist dies grossentheils den wenig schicklichen Benennungen zuzuschreiben. Hätte man $+1$, -1 , $\sqrt{-1}$ nicht positive, negative, imaginäre (oder gar unmögliche) Einheit, sondern etwa directe, inverse, laterale Einheit genannt, so hätte von einer solchen Dunkelheit kaum die Rede sein können.“ ([L 11.18], S. 177/178)

Arithmetische Interpretation der complexen Zahlen

Schon bei Cauchy hatte die Idee angeklungen, die complexen Zahlen als Paare reeller Zahlen aufzufassen. Doch erst der bedeutende irische Mathematiker Hamilton hat diesen Schritt explizit getan und dabei eine Theorie der complexen Zahlen auf durch Definition festgelegte Rechenoperationen gegründet. Er deutet komplexe Zahlen als Paare (a_1, a_2) , (b_1, b_2) , ... und definiert Addition und Multiplikation durch die Gesetze

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

bzw.

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1);$$

Hamilton gelingt auf Grund dieses Ansatzes der Nachweis, daß, modern ausgedrückt, die Zahlenpaare hinsichtlich der so definierten Operationen einen Körper bilden, der zum Bereich der von Gauß geometrisch definierten Zahlen isomorph ist und den man den Körper der complexen Zahlen nennt. Diese Ergebnisse fand Hamilton 1833;

im Jahre 1837 wurden sie unter dem Titel „Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; ...“ publiziert.

Bekanntlich entsteht nur bei der obigen Definition der Multiplikation ein kommutativer Körper. Es scheint sicher, daß schon Gauß diesen Sachverhalt erkannt hat, der darauf hinausläuft, daß der Körper der komplexen Zahlen der größte kommutative endliche Erweiterungskörper der reellen Zahlen ist. Einen vollständigen Beweis dieses Sachverhaltes gab Frobenius allerdings erst 1878.

Hamiltons Untersuchungen mündeten zur Mitte des 19. Jh. in Studien über nichtkommutative Verknüpfungen. Die von ihm aufgebaute Theorie der Quaternionen (der hyperkomplexen Zahlen mit vier Einheiten) erreichte durch seine Bemühungen und unter den Händen dogmatischer Schüler die weit über die echte Bedeutung hinausgehende Stellung einer Art „Glaubensbekenntnis“, einer Art „orthodoxer Lehre des mathematischen Credo“ (F. Klein), indem versucht wurde, die Theorie der Quaternionen zur Basistheorie der gesamten Geometrie, womöglich der Mathematik überhaupt zu machen.

Die auf lange Sicht positive Wirkung von Hamiltons Vorstoß lag eher in der Richtung, daß die Verknüpfungen (zwischen abstrakt aufgefaßten Elementen) selbst zum Gegenstand der Untersuchung gemacht wurden; insbesondere wurden nichtkommutative Verknüpfungen in den Blickpunkt der Untersuchungen gerückt. Von Boole und Cayley in Großbritannien, von B. Peirce und seinem Sohne C. S. Peirce in den USA, von Grassmann und Hankel in Deutschland ging eine Entwicklung aus, die noch im 19. Jh. zum Beginn der Strukturalgebra sowie zur Herausbildung der mathematischen Logik und der axiomatischen Methode, zugleich aber auch zur logischen Begründung für das Zahlensystem beitrug.

H. Hankel und das Permanenzprinzip

Hankel hob, anknüpfend an Hamilton, in seiner „Theorie der complexen Zahlensysteme“ (1867) hervor, daß die Gesetze der Verknüpfung nicht Eigenschaften der Zahlen sind, sondern daß vielmehr umgekehrt die durch Definition fixierten Verknüpfungsgesetze den entstehenden Zahlenbereich gleichsam schaffen. Diesen Grundgedanken wandte Hankel insbesondere auf den schrittweisen genetischen Aufbau des Zahlensystems an, indem er forderte, daß bei einer Bereichserweiterung die in einem Zahlenbereich geltenden Rechengesetze sich auch auf den erweiterten Zahlenbereich übertragen müssen, beispielsweise beim Übergang von den rationalen zu den reellen Zahlen. Gedacht ist dies allgemein als ein heuristisches Prinzip. (Die Theorie der Quaternionen lehrt z. B., daß die formale Übertragung von Verknüpfungsgesetzen keineswegs stets möglich ist.)

Dies ist der Grundgedanke des Hankelschen „Prinzips der Permanenz formaler Gesetze“. In seiner originalen Fassung lautet es folgendermaßen:

„Wenn zwei in allgemeinen Zeichen der arithmetica universalis ausgedrückte Formen einander gleich sind, so sollen sie einander auch gleich bleiben, wenn die Zeichen aufhören, einfache Größen zu bezeichnen, und daher auch die Operationen einen irgend welchen anderen Inhalt bekommen.“ ([L 11.21], S. 11)

Wie man sieht, hat Hankel einen wichtigen Schritt auf dem Wege zur modernen Auffassung des Begriffes „Zahl“ zurückgelegt: Die Art der Verknüpfung und die daraus abgeleiteten „Rechenregeln“ zwischen mathematischen Größen sind dafür entscheidend, daß diese Größen „Zahlen“ genannt werden können. Gerade diese abstrakte formalistische Auffassung ist dann später, am Ende des Jahrhunderts, von Hilbert mit Hilfe der von ihm entwickelten axiomatischen Methode durchgebildet worden, und zwar explizit in der Abhandlung „Über den Zahlbegriff“ vom Jahre 1900. Entsprechend verfuhr Hilbert für die Grundlagen der Geometrie.

Aufbau einer Theorie der irrationalen Zahlen

Mit der geometrischen und arithmetischen Interpretation der komplexen Zahlen war der Aufbau des Zahlensystems auf eine Grundlegung der Theorie der reellen Zahlen zurückgeführt. Logischerweise mußte der nächste historische Schritt demnach darin bestehen, die irrationalen Zahlen mit Hilfe der (vorausgesetzten) rationalen Zahlen zu begründen.

Dies geschah auf zwei unterschiedlichen Wegen. Der eine wurde von Dedekind beschritten und noch selbst vollendet; durch die nach ihm benannten „Schnitte“ im Bereich rationaler Zahlen werden die irrationalen Zahlen erzeugt. Dedekind konzipierte die Grundideen im Herbst des Jahres 1858 und publizierte deren Durchführung in dem grundlegenden Büchlein „Stetigkeit und irrationale Zahlen“ (1872), das einen Höhepunkt im Prozeß der Grundlegung der Analysis markiert. Über seine Motive und Zielstellungen hat sich Dedekind rückblickend so geäußert:

„Ich befand mich damals (1858, Wg) ... zum ersten Male in der Lage, die Elemente der Differentialrechnung vortragen zu müssen, und fühlte dabei empfindlicher als jemals früher den Mangel einer wirklich wissenschaftlichen Begründung der Arithmetik ... Für mich war damals dies Gefühl der Unbefriedigung ein so überwältigendes, daß ich den festen Entschluß faßte, so lange nachzudenken, bis ich eine rein arithmetische und völlig strenge Begründung der Principien der Infinitesimalanalysis gefunden haben würde.“ ([L 11.11], S. 3/4)

„Die bisher übliche Einführung der irrationalen Zahlen knüpft nämlich geradezu an den Begriff der extensiven Größen an — welcher aber selbst nirgends streng definiert wird — und erklärt die Zahl als das Resultat der Messung einer solchen Größe durch eine zweite gleichartige. Statt dessen fordere ich, daß die Arithmetik sich aus sich selbst heraus entwickeln soll. Daß solche Anknüpfungen an nicht arithmetische Vorstellungen die nächste Veranlassung zur Erweiterung des Zahlbegriffes gegeben haben, mag im allgemeinen zugegeben werden ...; aber hierin liegt ganz gewiß kein Grund, diese fremdartigen Betrachtungen selbst in die Arithmetik, in die Wissenschaft von den Zahlen aufzunehmen. So wie die negativen und gebrochenen rationalen Zahlen durch eine freie Schöpfung hergestellt, und wie die Gesetze der Rechnungen mit diesen Zahlen auf die Gesetze der Rechnungen mit ganzen positiven Zahlen zurückgeführt werden müssen und können, ebenso hat man dahin zu streben, daß auch die irrationalen Zahlen durch die rationalen Zahlen allein vollständig definiert werden.“ ([L 11.11], S. 9/10)

Einen anderen Weg als Dedekind gingen Cantor, der Begründer der Mengenlehre, und kurz vor und unabhängig von ihm der Franzose Méray um das Jahr 1872. Im Anschluß an ausführliche Überlegungen, die Weierstraß in seinen Vorlesungen vorgetragen hatte, führte Cantor im Bereich der rationalen Zahlen sog. „Fundamentalfolgen“ ein. (Cantor spricht von „Reihen“, wo wir heute „Folgen“ sagen würden.)

Für diese Fundamentalfolgen definierte Cantor Gleichheit und Rechenoperationen. Da bei entsprechender Wahl der Definitionen die Fundamentalfolgen analogen Rechengesetzen genügen wie die rationalen Zahlen, werden sie von Cantor ebenfalls als „Zahlen“ bezeichnet, auch dann, wenn sie keine rationale Zahl als Grenzwert besitzen. Die Fundamentalfolgen mit rationalem Grenzwert können mit den rationalen Zahlen identifiziert werden; die Fundamentalfolgen ohne rationalen Grenzwert liefern die irrationalen Zahlen.

Cantor hat seine Auffassungen im Jahre 1883 als Teil seiner „Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre“ dargestellt und mit denen von Dedekind verglichen:

„Zur Definition einer irrationalen reellen Zahl gehört stets eine wohldefinierte unendliche Menge erster Mächtigkeit von rationalen Zahlen; hierin besteht das gemeinschaftliche aller Definitionsformen, ihr Unterschied liegt in dem Erzeugungsmoment, durch welches die Menge mit der durch sie definierten Zahl verknüpft ist und in den Bedingungen, welche die Menge zu erfüllen hat, damit sie als Grundlage für die betreffende Zahlendefinition sich eigne.“ (I L 11.8), S. 184)

Die von Cantor gegebene strenge Definition der irrationalen Zahlen ist 1892 von dem Zahlentheoretiker Bachmann in seinen „Vorlesungen über die Theorie der Irrationalzahlen“ in der Weise modifiziert worden, daß statt der Fundamentalfolgen Intervallschachtelungen benutzt werden. Die Dezimalbrüche können als spezielle Intervallschachtelungen oder auch als Fundamentalfolgen aufgefaßt werden.

Selbstverständlich sind alle drei Definitionen der irrationalen Zahlen äquivalent.

Theorie der rationalen und der natürlichen Zahlen

Den logischen Erfordernissen gemäß hätten nun, nach der Zurückführung der irrationalen Zahlen auf die rationalen, zunächst die rationalen Zahlen auf die natürlichen Zahlen gegründet werden müssen; doch wich der historische Gang der Dinge von innerwissenschaftlichen Bedürfnissen zeitlich ein wenig ab.

Im Jahre 1888 erschien Dedekinds mit Recht berühmte, gewordene kleine Schrift „Was sind und was sollen die Zahlen“, in der er unter dem Einfluß der Cantorschen Mengenlehre und der sich etablierenden mathematischen Logik – aber ohne noch von ähnlichen Bemühungen Bolzanos zu wissen – einen genetischen Aufbau des Begriffs der natürlichen Zahl vollzog, der sich auf die Grundbegriffe „System“ (d. h. Menge) und Abbildung stützte. Im Vorwort heißt es:

„Was beweisbar ist, soll in der Wissenschaft nicht ohne Beweis geglaubt werden. So erleuchtend diese Forderung erscheint, so ist sie doch, wie ich glaube, selbst bei der Begründung der einfachsten Wissenschaft, nämlich desjenigen Teiles der Logik, welcher die Lehre von den Zahlen behandelt, auch nach den neuesten Darstellungen noch keineswegs als erfüllt anzusehen. ... Verfolgt man genau, was wir bei dem Zählen der Menge oder Anzahl von Dingen tun, so wird man auf die Betrachtung der Fähigkeit des Geistes geführt, Dinge auf Dinge zu beziehen, einem Dinge ein Ding entsprechen zu lassen, oder ein Ding durch ein Ding abzubilden, ohne welche Fähigkeit überhaupt kein Denken möglich ist. Auf dieser einzigen, auch sonst ganz unentbehrlichen Grundlage muß nach meiner Ansicht ... die gesamte Wissenschaft der Zahlen errichtet werden.“ (I L 11.12), S. III/IV)

Einen anderen Weg beschritt der Italiener Peano. Ein Jahr später, 1889, stellte er in dem Büchlein „*Arithmetices principia, nova methodo exposita*“ (Prinzipien der Arithmetik, nach einer neuen Methode dargelegt) ein Axiomensystem für die natürlichen Zahlen auf, das im wesentlichen mit dem heute gebrauchten identisch ist. Wenn auch die von Peano verwendeten Symbole von den jetzigen abwichen, so war sich doch Peano – im Rückgriff auf die formalen Auffassungen innerhalb der britischen algebraischen Schule und bei Graßmann – der mit der Formalisierung verbundenen Vorteile und sogar deren historischer Notwendigkeit bewußt:

„Die Grundlagenfragen der Mathematik sind zwar bis heute von Vielen behandelt worden, haben aber noch keine befriedigende Lösung gefunden. Die Schwierigkeit entspringt hauptsächlich aus der Mehrdeutigkeit der Sprache. Deshalb ist es wichtig, die Worte, die wir benutzen, aufmerksam abzuwägen. Diese Prüfung habe ich mir vorgenommen ... Alle Begriffe, die in den Grundlagen der Arithmetik vorkommen, habe ich durch Zeichen angegeben, so daß jeder Satz lediglich durch diese Zeichen ausgesprochen wird ... Durch diese Bezeichnungen nimmt jeder Satz die Form und Präzision an, die den algebraischen Gleichungen eigen ist, und von den so geschriebenen Sätzen werden andere abgeleitet, und zwar durch Prozesse, die der Lösung der Gleichungen ähnlich sind.“ ([L11.30], S. 21; deutsch zitiert [L11.20], S. 130/131)

Dagegen erfolgte die Definition der rationalen Zahlen durch Paarbildung aus natürlichen Zahlen erst 1895 durch Weber in dessen „Lehrbuch der Algebra“:

„Die natürlichen Zahlen bilden eine geordnete Menge; zwischen zwei auf einander folgenden ihrer Elemente liegt kein weiteres Element. Eine solche Mannigfaltigkeit heisst eine discrete. Eine geordnete Menge von der Eigenschaft, dass zwischen je zwei Elementen immer noch andere Elemente gefunden werden, heisst dicht. Eine dichte Menge kann man bilden, wenn man die natürlichen Zahlen in Paaren zusammenfasst, und diese Paare als Elemente einer Menge auffasst. Diese Paare sollen Brüche genannt und mit $m:n$ oder $\frac{m}{n}$ bezeichnet werden, und zwei solche Brüche $m:n$ und $m':n'$ werden einander gleich gesetzt, wenn $mn' = nm'$ ist. Fasst man alle unter einander gleichen Brüche zu einem Element zusammen, so erhält man eine Mannigfaltigkeit, die geordnet ist, wenn man noch festsetzt, dass $m:n$ größer als $m':n'$ ist, wenn $mn' > nm'$ ist.“ [L 11.33], S. 4/5)

Damit sind die positiven rationalen Zahlen erklärt. Durch Dedekindsche Schnitte werden die positiven reellen Zahlen erzeugt; schließlich entstehen die negativen reellen Zahlen durch eine Art „Umkehrung“ der Größenbeziehung.

Abstrakte Fassung des Zahlbegriffs

Mit der Entwicklung des strukturellen Denkens in der Algebra erhielt der Zahlbegriff schließlich noch eine abstraktere, allgemeingültige Kennzeichnung. Hatten bereits Kronecker und Dedekind den Körperbegriff in seiner zentralen Stellung für die Algebra herausgestellt, so entwickelte Steinitz in seiner „Algebraischen Theorie der Körper“ (1910) eine abstrakte Körpertheorie. Dort wird unter anderem bewiesen, daß sich jeder Integritätsbereich in einen Körper einbetten läßt; der Übergang von den (positiven und negativen) ganzen Zahlen zu den rationalen Zahlen ist nur ein Spezialfall.

Steinitz hatte an Hilbert angeknüpft, der seinerseits im Jahre 1900 in der Ab-

handlung „Über den Zahlbegriff“ einen axiomatischen Aufbau des Zahlensystems vorgenommen hatte. Dort heißt es:

„In der Theorie des Zahlenbegriffes gestaltet sich die axiomatische Methode wie folgt: Wir denken ein System von Dingen; wir nennen diese Dinge und bezeichnen sie mit $a, b, c, \dots$. Wir denken diese Zahlen in gewissen gegenseitigen Beziehungen, deren genaue und vollständige Beschreibung durch die folgenden Axiome geschieht.“ ([L 11.23], S. 181)

Es folgen die bekannten sechs Axiome der Verknüpfung, die sechs Axiome der Rechnung, die vier der Anordnung und die zwei der Stetigkeit (Archimedisches Axiom und Axiom der Vollständigkeit). Dann fährt Hilbert fort:

„Einige der Axiome ... sind Folgen der übrigen, und es entsteht so die Aufgabe, die logische Abhängigkeit der genannten Axiome zu erörtern ...“ ([L 11.23], S. 183)

„In diesem Nachweis (der Widerspruchsfreiheit der aufgestellten Axiome, Wg) erblicke ich zugleich den Beweis für die Existenz des Inbegriffes der reellen Zahlen ... Die Bedenken, welche gegen die Existenz des Inbegriffes aller reellen Zahlen und unendlicher Mengen überhaupt geltend gemacht worden sind, verlieren bei der oben gekennzeichneten Auffassung jede Berechtigung: unter der Menge der reellen Zahlen haben wir uns ... zu denken ... ein System von Dingen, deren gegenseitige Berechnungen durch das obige endliche und abgeschlossene System von Axiomen ... gegeben sind, und über welche neue Aussagen nur Gültigkeit haben, falls man sie mittelst einer endlichen Anzahl von logischen Schlüssen aus jenen Axiomen ableiten kann.“ ([L 11.23], S. 184)

Indessen zeigte sich zu Beginn des 20. Jh., gerade im Zusammenhang mit der Entwicklung der Mengenlehre und den Schwierigkeiten in den Grundlagenfragen der Mathematik, daß sich durchaus begründete Einwände gegen diesen formalisierten Aufbau des Zahlbegriffs ergaben. Neue Antworten, insbesondere hinsichtlich des Beweises der Widerspruchsfreiheit des oben bezeichneten Axiomensystems, auf die aufgeworfenen komplizierten Fragen gab das 20. Jh.; sie stehen in enger Beziehung zu schwierigen erkenntnistheoretischen Problemen.

Theorie der Funktionen komplexer Variabler

Bereits im 17. und 18. Jh. hatte das sozusagen unbefangene, naive Rechnen mit komplexen Zahlen und sogar mit Funktionen komplexen Argumentes eine weite Verbreitung gefunden, erstaunlich, wenn man bedenkt, daß der Gebrauch komplexer Zahlen und erst recht die Verwendung komplexer Variabler in keiner Weise theoretisch gesichert waren.

Frühe Beispiele des Gebrauchs komplexer Variabler

Newton hatte versucht, die Anzahl der komplexen Wurzeln einer algebraischen Gleichung zu bestimmen. In Diskussionen während der Jahre 1712/13 führten Leibniz und Johann Bernoulli die Logarithmusfunktion mit imaginärem Argument ein. Aber erst Euler vermochte den damals sich sehr kompliziert darbietenden Sachverhalt

völlig zu durchschauen, daß nur für positive reelle Zahlen der Wert der Logarithmusfunktion reell ausfällt, während für alle anderen Werte, für negativ reelle und für komplexe Argumente, der Funktionswert nicht mehr reell ist. Doch blieb Eulers Ergebnis noch lange umstritten; d'Alembert z. B. suchte zu beweisen, daß $\ln(-1) = 0$ ist.

Der englische Mathematiker Cotes, der wesentlichen inhaltlichen Anteil an der Edition der zweiten Auflage von Newtons „Principia“ hat, fand 1714 einen bemerkenswerten Zusammenhang zwischen der Logarithmusfunktion und den trigonometrischen Funktionen, den wir heute als

$$ix = \ln(\cos x + i \sin x)$$

wiedergeben würden. In derselben Richtung bewegten sich die Ergebnisse des als Hugenotte in der englischen Emigration lebenden französischen Mathematikers de Moivre, der u. a. 1738 in einer speziellen Form den heute nach ihm benannten Lehrsatz

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

bekannt machte. Zur Mitte des 18. Jh. sprachen N. Bernoulli, d'Alembert und Euler unabhängig voneinander den Satz aus, daß sich jede Funktion von beliebig vielen komplexen Variablen $\alpha_k + i b_k$ stets auf die Form $P + iQ$ bringen läßt. Beim Studium der Bewegung eines Körpers durch ein homogenes, gewichtsloses ideales Medium gelangte d'Alembert 1752 zu den heute nach Cauchy und Riemann benannten Differentialgleichungen, und Euler konnte gegen Lebensende zeigen, daß Real- und Imaginärteil einer differenzierbaren Funktion komplexen Arguments den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen genügen. Laplace schließlich ging bewußt den Weg durch das Komplexe, um dann durch Vergleich der Real- und Imaginärteile komplexwertiger Ausdrücke Integrale zu berechnen.

Beginn des systematischen Aufbaus einer Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen

Zum systematischen Aufbau einer Theorie der Funktionen komplexer Variabler, die den Begriff der Funktion in den Mittelpunkt zu rücken hatte, konnte es jedoch erst im 19. Jh. kommen, nachdem über den Begriff der komplexen Zahl einigermaßen Klarheit hatte erzielt werden können. Über die Tragweite der der Lösung harrenden Fragen hat Gauß im Jahre 1811 in einem Brief an den mit ihm befreundeten Astronomen Bessel reflektiert:

„Zuvörderst würde ich jemand, der eine neue Function in die Analyse einführen will, um eine Erklärung bitten, ob er sie schlechterdings bloss auf reelle Größen (reelle Werthe des Arguments der Function) angewandt wissen will, und die imaginären Werthe des Arguments gleichsam nur als ein Überbein ansieht, oder ob er meinem Grundsatz beitrete, dass man in dem Reiche der Grössen die imaginären $a + b\sqrt{-1} = a + bi$ als gleiche Rechte mit den reellen genießend ansehen müsse. Es ist hier nicht von praktischem Nutzen die Rede, sondern die Analyse ist nur eine selbständige Wissenschaft, die durch Zurücksetzung jener fingirten

Größen ausserordentlich an Schönheit und Ründung verlieren und alle Augenblicke Wahrheiten, die sonst allgemein gelten, höchst lästige Beschränkungen beizufügen genöthigt seyn würde.“ ([L 11.19], S. 366)

Dann wirft Gauß die Frage auf, was unter einem Integral $\int \varphi(x) dx$ zu verstehen sei, wenn x als komplexe Größe aufgefaßt wird. Da man in der komplexen Zahlenebene auf unendlich vielen Wegen von der unteren Grenze des Integrals zur oberen gelangen kann, erhebt sich die von Gauß in ihrer tiefen Bedeutung erkannte Frage, wieweit der Wert des Integrals vom gewählten Integrationsweg unabhängig ist:

„Ich behaupte nun, daß das Integral $\int \varphi x dx$ nach zweien verschiedenen Übergängen immer einerlei Werth erhalte, wenn innerhalb des zwischen beiden die Übergänge repräsentirenden Linien eingeschlossenen Flächenraumes nirgends $\varphi x = \infty$ wird. Diess ist ein schöner Lehrsatz, dessen eben nicht schweren Beweis ich bei einer schicklichen Gelegenheit geben werde.“ ([L 11.19], S. 367)

Zur systematischen Darstellung einer Theorie der Funktionen komplexen Arguments ist Gauß nicht gekommen, obwohl er, wie die zitierte Briefstelle zeigt, bereits 1811 im Besitz des Hauptsatzes der Funktionentheorie, des Cauchyschen Integralsatzes gewesen ist und er, wie weiter aus dem Brief hervorgeht, die Mehrdeutigkeit der durch Integrale darstellbaren Funktionen als durch die von einem geschlossenen Integrationsweg eingeschlossene Pole verursacht begriff:

„Übrigens ist zugleich ... klar, wie eine durch $\int \varphi x dx$ erzeugte Function für einerlei Werthe von x mehrere Werthe haben kann, indem man nemlich beim Übergang dahin um einen solchen Punkt, wo $\varphi x = \infty$ entweder gar nicht, oder einmal, oder mehreremale herumgehen kann.“ ([L 11.19], S. 367)

Auch Poisson hat sich 1815 mit Integrationsproblemen bei Funktionen komplexer Variabler befaßt, ähnlich wie Gauß auch beim konkreten Fall des logarithmischen Integrals $\int \frac{dx}{x}$.

Der Beitrag von A. L. Cauchy zur Funktionentheorie

Die Geschichte einer systematisch aufgebauten Funktionentheorie beginnt so erst mit Cauchy, einem der vielseitigsten und produktivsten Mathematiker überhaupt. Cauchy durchlief verschiedene Etappen: Anknüpfend an Euler suchte er nach Lösungen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und vertrat dabei anfangs die noch dem 18. Jh. verhaftete Auffassung, daß jede Gleichung zwischen komplexen Größen nichts anderes darstelle als eine symbolische Schreibweise für zwei Gleichungen zwischen reellen Größen. Die Wendung trat 1825 ein mit der Arbeit „Mémoire sur les intégrales définies entre des limites imaginaires“.

Cauchy würdigt dort die von seinen französischen Kollegen Laplace und Brisson und die von dem jungen russischen Mathematiker Ostrogradskij bei bestimmten Integralen mit komplexen Grenzen erzielten Ergebnisse. Cauchy stellt aber fest, keine der

„bis jetzt veröffentlichten Abhandlungen über die verschiedenen Zweige der Integralrechnung hat den Grad der Allgemeinheit festgestellt, den ein bestimmtes Integral zwischen imaginären

Grenzen zulässt, und die Zahl der Werthe, die es annehmen kann. Das ist gerade die Frage, die den Gegenstand unserer Untersuchungen bilden wird.“ ([L 11.9], S. 4)

Das methodische Vorbild fand Cauchy 1825 noch in der Variationsrechnung; dort werden verschiedene Kurven zur Konkurrenz zugelassen, hier entsprechen sie verschiedenen Integrationswegen. Es dauerte noch bis 1840, ehe Cauchy alle gedanklichen und rechnerischen Schwierigkeiten beim Umgang mit Kurvenintegralen bewältigt hatte und seine Untersuchungen mit dem fundamentalen Satz krönen konnte, daß das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \oint f(z) dz$$

gleich der Summe aller Residuen der Funktion $f(z)$ ist. Hierin ist speziell das Ergebnis enthalten, daß der Wert des Integrals vom Integrationsweg unabhängig ist, sofern keine Pole (oder andere Singularitäten) umschlossen werden.

Einen anderen Zugang zur Theorie der Funktionen komplexer Variabler eröffnete Cauchy mit mehreren Untersuchungen zur Potenzreihenentwicklung von Funktionen. Sie führten u. a. 1831 zur Entdeckung, daß die Reihenentwicklung in einem Kreis konvergiert; dabei bestimmt die „nächstgelegene“ Singularität den Konvergenzradius.

Schließlich sei noch eine aus dem Jahre 1846 stammende Arbeit von Cauchy erwähnt. Durch sie wurden von einem höheren Gesichtspunkt aus grundlegende Eigenschaften der Umkehrfunktionen von Integralen algebraischer Funktionen durchschaubar, z. B. die mehrfache Periodizität der elliptischen Funktionen. Überhaupt erwies sich dies als ein entscheidendes innermathematisches Entwicklungsmoment für die Funktionentheorie, daß nämlich durch die Betrachtung im Komplexen ein wesentlich tieferes Verständnis für die im Reellen geltenden Beziehungen erzielt werden kann.

Cauchys Untersuchungen wurden zunächst im wesentlichen von zweien seiner Landsleute weitergeführt, von Laurent und Puiseux; u. a. wurden Reihenentwicklungen nach positiven und negativen Potenzen in einem durch Singularitäten begrenzten Kreisring in die Funktionentheorie einbezogen.

B. Riemanns Beitrag zur Funktionentheorie

Ähnlich wie d'Alembert und Cauchy ging Riemann von physikalischen, insbesondere hydrodynamischen Vorstellungen aus; dazu traten die Grundgedanken der konformen Abbildung, die bei Gauß schon 1822 weitgehend ausgeformt waren.

Riemann hatte bereits während seiner Berliner Studienzeit 1847/49 die Absicht geäußert, die Theorie der Funktionen komplexer Variabler auf die der partiellen Differentialgleichungen zurückzuführen. Stellt $w(z)$ mit $w = u + iv$ die komplexe Funktion w der komplexen Variablen $z = x + iy$ dar, so folgt aus der Gültigkeit der sog. Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

für Real- und Imaginärteil $u(x, y)$ bzw. $v(x, y)$ (deren partielle Ableitungen existieren und stetig sind), daß $w(z)$ eine nach z differenzierbare Funktion ist. Falls die zweiten partiellen Ableitungen stetig sind, so erfüllen Real- und Imaginärteil beide die Laplacesche Differentialgleichung. Diese weitreichenden Ergebnisse, die den inneren Zusammenhang zwischen Funktionentheorie, Potentialtheorie und Theorie der partiellen Differentialgleichungen herstellen und den Weg zu vielfältigen Anwendungen in Naturwissenschaft und Technik eröffneten, hat Riemann in seiner 1851 verteidigten Dissertation „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe“ entwickelt, ja sogar direkt zur Definition des Begriffs der Funktion $f(z)$ einer komplexen Variablen benutzt. Zur Interpretation von Mehrdeutigkeiten der Funktionen, die sich bei Fortsetzung ergeben, entwickelte Riemann die weitreichende Idee der „Riemannschen Fläche“, die sich als hervorragend geeignet erwies, schwierige Probleme der höheren transzendenten Funktionen zu veranschaulichen. Riemann selbst hat noch Bedeutendes in dieser Richtung geleistet; so erschien u. a. 1875 postum die schrittmachende Arbeit „Theorie der Abelschen Funktionen“.

Der Beitrag von K. Weierstraß zur Funktionentheorie

Weierstraß geriet schon während seiner Studienzeit und seiner Tätigkeit als Gymnasiallehrer ganz in den Bannkreis der von Abel und Jacobi aufgeworfenen Problemstellungen zur Theorie der elliptischen Funktionen und der hyperelliptischen Integrale, deren Umkehrfunktionen heute als Abelsche Funktionen bezeichnet werden. Er stellte sich das Ziel, eine vollständige Theorie der Abelschen Integrale und Abelschen Funktionen aufzustellen:

„Diese Größen einer ganz neuen Art, für welche die Analysis noch kein Beispiel hatte, wirklich darzustellen und ihre Eigenschaften näher zu ergründen, ward von nun an eine der Hauptaufgaben der Mathematik, an der auch ich mich zu versuchen entschlossen war, ...“ ([L 11.34], S. 224)

Zwar konnte Weierstraß 1853 die allgemeine Lösung des Jacobischen Umkehrproblems publizieren, doch arbeitete er in den nachfolgenden Jahren vorwiegend am strengen Aufbau der reellen Analysis. Die in Berlin gehaltenen Vorlesungen, unmittelbar von aktueller Forschungsarbeit getragen, wandten sich seit dem Ende der 60er Jahre der Funktionentheorie zu. Nachschriften und zahlreiche Schüler – unter ihnen Mittag-Leffler, Kovalevskaja, Schwarz, Cantor – verbreiteten das Weierstraßsche Gedankengut in alle damaligen Zentren der Mathematik auf der Erde.

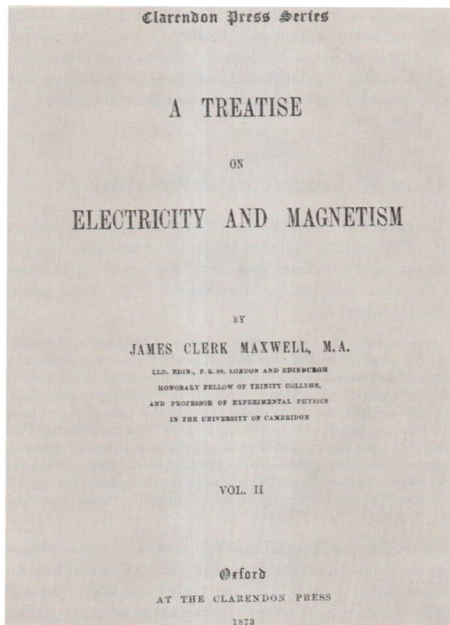
Weierstraß nahm, freilich auf einer höheren Ebene, den von Lagrange in den Mittelpunkt gestellten Begriff der „analytischen Funktion“ wieder auf. Durch eine konvergierende Potenzreihenentwicklung $\mathfrak{P}(z - a)$ bzw. $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ wird eine Funktion definiert; ihre Werte innerhalb des Konvergenzkreises bilden das „Funktionselement“. Durch analytische Fortsetzung werden die Funktionselemente miteinander verknüpft, und es entsteht so die analytische Funktion als „Inbegriff aller aus einem

Funktionselement entstehenden Fortsetzungen“. Der von Weierstraß eingeschlagene Weg zur Gewinnung des „analytischen Gebildes“ der Funktion entspricht also in rechnerischer Form weitgehend dem mehr anschaulich-geometrischen Vorstellungsinhalt der Riemannschen Fläche. Während Riemann weitreichende Ideen von großer intuitiver Kraft entwickelt hatte, zeichnete sich Weierstraß insbesondere durch meisterhafte Beherrschung des analytischen Apparates und bis dahin unerreichte mathematische Strenge aus. Trotz oder gerade wegen der verschiedenen gedanklich-methodischen Ansatzpunkte von Riemann und Weierstraß ergänzten sich beide Grundbetrachtungsweisen zum Aufbau einer Theorie der Funktionen komplexer Variabler weitgehend. Gegen Ende des 19. Jh. erreichte die Funktionentheorie einen gewissen Grad innerer Vollendung, wenn auch eine Vielzahl von schwierigen Fragen bei der Behandlung höherer transzendenter Funktionen offenblieb.

Im übrigen erhielten die mit der Theorie der Funktionen reeller und komplexer Variabler aufgeworfenen Fragen, die am Ende des 19. Jh. zur erneuten Verschärfung des Begriffs „Funktion“ führen sollten, mit der Entwicklung der Funktionalanalysis eine tiefere und weiterreichende Interpretation.

Vorlesung 12

Neunzehntes Jahrhundert: Anwendungen der Mathematik. Algebra



Titelblatt J. Cl. Maxwell: Treatise on Electricity and Magnetism, 1873

Zur gesellschaftlichen Stellung von Mathematik und Naturwissenschaften

Eine neue Periode in der Entwicklung der Mathematik und der Naturwissenschaften wurde in den führenden industriellen Zentren der Erde – England, Frankreich, Deutschland, Italien, Rußland, USA und später in Japan und weiteren europäischen Staaten – während der zweiten Hälfte des 19. Jh. eingeleitet. Die sich verstärkende Abhängigkeit der Naturwissenschaften und der Mathematik vom Ausbau der Industrie und damit von den herrschenden Klasseninteressen der Bourgeoisie beruhte auf der immer deutlicher werdenden Möglichkeit der „Exploitation der Wissenschaften“ (Marx). Zugleich aber veranlaßten die sich einstellenden Erfolge bei der Anwendung von Naturwissenschaften und Mathematik die herrschende Klasse, direkt und indirekt Mittel zu deren Förderung bereitzustellen, seitdem – wie es später der führende deutsche Physikochemiker Ostwald ausdrücken sollte – entdeckt worden war, daß das Entdecken mit einem außergewöhnlichen kommerziellen Erfolg organisiert werden kann.

Die Verwandlung der Wissenschaft in eine Produktivkraft

Marx hat der gesellschaftlichen Funktion der Wissenschaft, insbesondere der Naturwissenschaft, bei der Entwicklung und Festigung der kapitalistischen Produktionsweise große Aufmerksamkeit gewidmet und deren Verwandlung in einen selbständigen Faktor des Produktionsprozesses, in eine bewußt genutzte gesellschaftliche Produktivkraft hervorgehoben:

„Die Natur baut keine Maschinen, keine Lokomotiven, Eisenbahnen, electric telegraphs, selfacting mules etc. Sie sind Produkte der menschlichen Industrie; natürliches Material, verwandelt in Organe des menschlichen Willens über die Natur oder seiner Betätigung in der Natur. Sie sind von der menschlichen Hand geschaffene Organe des menschlichen Hirns: vergegenständlichte Wissenschaft. Die Entwicklung des capital fixe zeigt an, bis zu welchem Grade das allgemeine gesellschaftliche Wissen, knowledge, zur unmittelbaren Produktivkraft geworden ist, und daher die Bedingungen des gesellschaftlichen Lebensprozesses selbst unter die Kontrolle, des general intellect gekommen und ihm gemäß umgeschaffen sind. Bis zu welchem Grade die gesellschaftlichen Produktivkräfte produziert sind, nicht nur in Form des Wissens, sondern als unmittelbare Organe der gesellschaftlichen Praxis, des realen Lebensprozesses.“ ([L 12.15], S. 594)

Seit der Mitte des 19. Jh. wurde die Naturwissenschaft unverzichtbarer Bestandteil des kapitalistischen Produktionsprozesses. Die weitere Entwicklung des Verhältnisses von Naturwissenschaft und Produktion verlief seitdem in zwei Hauptrichtungen: Während einerseits die gegenseitige Wechselwirkung beider gesellschaftlicher Sphären ständig enger wurde, lösten sich andererseits große weitere Teile der Naturwissenschaften vollständig aus der materiellen Produktion heraus. Gerade das letztere ermöglichte umgekehrt erst die wissenschaftliche Durchdringung und Gestaltung des Produktionsprozesses. Nur so ist es historisch verständlich, daß gerade auch hochentwickelte, abstrakte mathematisch-naturwissenschaftliche Disziplinen –

wieder dem Produktionsprozeß angeschlossen — ihre durchgreifende Wirkung in und für die Produktion entfalten konnten und können. In der Periode der Herausbildung und Etablierung des Kapitalismus der freien Konkurrenz entwickelten sich Teile der Naturwissenschaften und der Mathematik zu einem revolutionierenden Element der kapitalistischen Produktion; umgekehrt erreichten Teile der Naturwissenschaft einen bedeutenden theoretischen Vorlauf vor der Produktion, nicht zuletzt durch die Institutionalisierung der Naturwissenschaften direkt innerhalb der Produktionsphäre, z. B. durch Industrielaboratorien.

Die den Produktionsprozeß revolutionierende Wirkung der Naturwissenschaften griff über die Entwicklung der Produktivkräfte sogar hinein in die Umgestaltung der Produktionsverhältnisse und hat damit das Ihre zur Herausbildung des Imperialismus beigetragen; man denke z. B. an die Entwicklung der chemischen Großindustrie und der elektrotechnischen Industrie.

Hauptentwicklungsrichtungen der Naturwissenschaften

Die neue gesellschaftliche Stellung von Mathematik und Naturwissenschaften — die sich auch im Organisatorischen und am sozialen Status des Wissenschaftlers nachweisen ließe — bildete die Basis für den raschen sowohl qualitativen als auch quantitativen Aufschwung der Naturwissenschaften und der Mathematik zwischen 1860/70 und dem ersten Weltkrieg — trotz aller Verzerrungen und Deformationen durch die imperialistische Wissenschaftspolitik, die ökonomischen und zunehmend militärischen Interessen Vorrang vor innerwissenschaftlichen und humanistischen Bedürfnissen einräumte.

Die Spannweite der Biowissenschaften umfaßte die Evolutionstheorie (Darwinismus), Physiologie, Mikrobiologie, Biochemie, Zytologie, Genetik und Embryologie.

Die Chemie, gestützt auf das periodische System der Elemente, stieß zur Neufassung der theoretischen Grundbegriffe Atom, Molekül, Isotopie und zur Theorie der chemischen Bindung vor; erste Atommodelle wurden aufgestellt. Erstaunenderregend waren die Fortschritte der organischen Chemie bei der Strukturaufklärung der Naturstoffe und solcher Naturprozesse wie Gärung, Atmung und Assimilation sowie bei der Synthese von Farbstoffen. Technische Großsynthesen von Ammoniak und Salpetersäure, von Essig, Alkohol, Kautschuk, aber auch von Giftgasen und Sprengstoffen wurden zur Grundlage großer profitbringender Industrien und bereiteten den Weg zur Entstehung mächtiger Chemiemonopole.

Die physikalische Chemie, im Grenzgebiet zwischen Chemie und Physik, trug wesentliche Erkenntnisse über Katalyse, Photolyse, Kolloidchemie und Reaktionskinetik bei, die ihrerseits entscheidende Grundlagen für technische Großsynthesen bereitstellten.

Die Experimentalphysik entwickelte Teildisziplinen wie Elektrochemie, entdeckte Elektronen, Ionen und Radioaktivität und Röntgenstrahlen, setzte elektrodynamische Grundeffekte in handgreifliche Praxis um, die in eine elektrotechnische Industrie einmündete. Die mathematisch orientierte Physik umfaßte kinetische Gastheorie und Thermodynamik, Maxwells mathematische Formulierung des

Elektromagnetismus und der Lichttheorie, die Diskussionen zur Äthertheorie; mit der Entdeckung der Radioaktivität, der Anerkennung des Feldes als Existenzform der Materie, der Entdeckung des Wirkungsquantums und Einsteins Relativitätstheorie vollzog die Physik um die Jahrhundertwende eine durchgreifende wissenschaftliche Revolution ihrer Grundlagen, die die von Galilei und Newton geprägte klassische Physik in sich einschloß, aber zugleich aufhob.

Hauptentwicklungsrichtungen der Mathematik

Während der zweiten Hälfte des 19. Jh. setzte sich der Differenzierungsprozeß innerhalb der sich rasch entfaltenden Mathematik fort. Aus den großen traditionellen Gebieten Geometrie, Algebra und Analysis spalteten sich — nach Inhalt oder Methode oder regionalen Traditionen — spezielle Arbeitsrichtungen ab und gewannen den Charakter selbständiger mathematischer Disziplinen bzw. Teildisziplinen, z. B. algebraische Geometrie, Gruppen- und Körpertheorie, Topologie, Zahlentheorie, Invariantentheorie, die Theorien der gewöhnlichen und der partiellen Differentialgleichungen, Variationsrechnung, Rand- und Eigenwertprobleme, Potentialtheorie, Differentialgeometrie, Theorie der elliptischen Funktionen und der höheren Transzendenten.

Am Ende des 19., Anfang des 20. Jh. bot sich die Mathematik als eine in allen fortgeschrittenen Staaten der Erde hochentwickelte und hochgeschätzte wissenschaftliche Disziplin dar. Rasch war die Zahl der Mathematiker gestiegen. Eine Vielzahl von Fachzeitschriften veröffentlichte eine ständig steigende Anzahl von Forschungsergebnissen und Anwendungen der Mathematik. Es gab Gesellschaften und Vereinigungen von Mathematikern auf nationaler Ebene; seit 1897 wurden internationale Mathematikerkongresse durchgeführt. Noch vor der Jahrhundertwende begann die Herausgabe der großangelegten vielbändigen „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften“. Ein internationales Autorenkollektiv stellte dort nicht nur die reine Mathematik dar, sondern auch deren Anwendungen auf Mechanik, Physik, Astronomie, Geodäsie und verschiedene Zweige der Technik.

Es hat nahezu Symbolcharakter, daß Hilbert, einer der bedeutendsten Mathematiker, um die Jahrhundertwende auf dem zweiten Internationalen Mathematikerkongreß in Paris im August 1900 mit seinem berühmt gewordenen Vortrag „Mathematische Probleme“ im Vollgefühl des Erreichten seinem Vertrauen in die Zukunft lebendigen Ausdruck gab und das am Vorabend einer ausgedehnten Diskussion um Antinomien in der Mengenlehre und um eine Krise in den Grundlagen der Mathematik. Und noch viel weniger vermochten Hilbert und die Mehrzahl der Wissenschaftler jener Zeit das Elend vorauszusehen, das Imperialismus und erster Weltkrieg den Völkern bereiten würden.

So, im vollen Glauben an die humanistischen Werte der Menschheit, vermochte Hilbert in seinem Vortrag von 1900 dreiundzwanzig mathematische Grundprobleme zu formulieren, mit denen er, wie die weitere Entwicklung bestätigen sollte, fast durchgängig Zentralfragen der Mathematik des 20. Jh. getroffen hat.

„Zu einer solchen Musterung der Probleme scheint mir der heutige Tag, der an der Jahrhundert-

wende liegt, wohl geeignet; denn die großen Zeitabschnitte fordern uns nicht bloß auf zu Rückblicken in die Vergangenheit, sondern sie lenken unsere Gedanken auch auf das unbekannte Bevorstehende.

Die hohe Bedeutung bestimmter Probleme für den Fortschritt der mathematischen Wissenschaft im allgemeinen und die wichtige Rolle, die sie bei der Arbeit des einzelnen Forschers spielen, ist unleugbar. Solange ein Wissenszweig Überfluß an Problemen bietet, ist er lebenskräftig; Mangel an Problemen bedeutet Absterben oder Aufhören der selbständigen Entwicklung.“ ([L 12.11], S. 22/23)

Und schließlich mündete Hilberts Vortrag ein in sein wissenschaftsoptimistisches Credo:

„Diese Überzeugung von der Lösbarkeit eines jeden mathematischen Problems ist uns ein kräftiger Ansporn während der Arbeit; wir hören in uns den steten Zuruf: Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden, denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus.“ ([L 12.11], S. 34)

Mathematik und Anwendungen

Industrielle Revolution und Festigung der kapitalistischen Produktionsverhältnisse hatten auch der Mathematik im 19. Jh. eine neue und erweiterte gesellschaftliche Funktion zugewiesen. Man muß sich ferner vergegenwärtigen, daß die Mathematik – sozusagen als Grundlagenwissenschaft – im 19. Jh. eine zentrale Stelle im Ausbildungsgang der Ingenieure an den Technischen Hochschulen einzunehmen begann, daß Mathematik und Naturwissenschaften an den Universitäten aus ihrer bisherigen Nebenrolle herauswuchsen und starke Fachrichtungen entstanden, daß es zur Gründung von selbständigen mathematischen und naturwissenschaftlichen Instituten kam und daß auch an den allgemeinbildenden höheren Schulen (Gymnasien, Oberrealschulen usw.) die Mathematik zu einem Hauptfach avancierte.

Analysisbetonte Anwendungsbereiche der Mathematik

Neben den direkten begegnen wir einer Fülle von indirekten Wechselbeziehungen zwischen der Mathematik und der gesellschaftlichen Entwicklung. Pauschalisierend könnte man von einer vermittelnden und vermittelten, aktiven und passiven Rolle der Mathematik im Begegnungsfeld der materiellen Produktion einerseits und den Natur- und Technikwissenschaften andererseits sprechen.

Nach Lage der Sachprobleme und dem Reifegrad der materiellen Produktivkräfte nahmen dabei einige Zweige der höheren Analysis eine bevorzugte Stellung ein. Es handelte sich dabei nicht schlechthin um Anwendung, also um die bloße Übertragung bekannter mathematischer Sätze auf praktische Probleme. Vielmehr warfen aus der Praxis (im weiteren Sinne) abgeleitete Probleme tiefliegende mathematische Fragestellungen auf, die bei solchen mathematischen Gebieten wie Theorie der gewöhnlichen und der partiellen Differentialgleichungen, Potentialtheorie, Variationsrechnung und der Theorie der unendlichen Reihen zu einem beachtlichen Ausbau

nach Breite und Tiefe führten. Die analysisbetonten Anwendungsbereiche der Mathematik könnte man etwa in folgender Weise klassifizieren: Theoretische Mechanik, Schwingungs- und Elastizitätstheorie, Wärmetheorie und Thermodynamik, Elektromagnetismus und Elektrodynamik.

Hauptelemente der theoretischen Mechanik im neunzehnten Jahrhundert

Bereits im 17. und im 18. Jh. waren Variationsprinzipien mit physikalischer Bedeutung bekannt, z. B. das Prinzip des kürzesten Lichtweges (Fermat) und das Prinzip der kleinsten Wirkung (Leibniz, Maupertuis, Euler, d'Alembert, Lagrange).

Die formale Vollendung der Newtonschen Punktmechanik verdankt man Lagrange; 1788 erschien der erste Band der „*Mécanique analytique*“. Dort finden sich die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen erster und zweiter Art; diese Differentialgleichungen enthalten in sich die gesamte Dynamik der (reibungsfrei gedachten) Punktmechanik als Wechselwirkung zwischen Massenpunkten unter dem Einfluß von Gravitation und Kräften. Es kennzeichnet die neu entstandene Situation, sowohl den bereits vorhandenen Reifegrad der theoretischen Mechanik als auch die Tragweite der mathematischen Methoden, wenn Lagrange als Ziel der „*Mécanique analytique*“ angibt:

„Die Theorie der Mechanik und der Kunst, die sich darauf beziehenden Probleme zu lösen, auf allgemeine Formeln zurückzuführen, deren einfache Entwicklung alle für die Lösung jedes Problems notwendigen Gleichungen ergibt.“ ([L 12.13], S. 6)

Und voller Stolz heißt es im Vorwort:

„Die Methoden, welche ich auseinandersetze, erfordern weder Konstruktionen noch geometrische oder mechanische Betrachtungen, sondern nur algebraische, einem regelmäßigen und gleichförmigen Gange unterworfenen Operationen. Alle, welche die Analysis lieben, werden mit Vergnügen sehen, daß die Mechanik ein neuer Zweig derselben wird, und werden mir Dank wissen, daß ich die Herrschaft derselben in dieser Weise ausgedehnt habe.“ ([L 12.13], S. 6)

Also: die Mechanik als Teil der Analysis, der Mathematik!

Hatten die Variationsprinzipien in der Periode der Aufklärung auch eine wichtige philosophische Funktion ausgeübt, indem sie einer teleologischen Naturerklärung einen mathematisch-rationalen „Beweis“ zu liefern schienen, so rückten sie im 19. Jh. ebenfalls in den Vordergrund, da von dort aus der Weg zur deduktiven Behandlung der theoretischen Mechanik möglich wurde. In diesem Sinne gab es eine Fülle entsprechender Arbeiten, so bei Lagrange (Prinzip der kleinsten Wirkung), bei Gauß (Prinzip des kleinsten Zwanges), vor allem aber bei Hamilton und Jacobi, die die große Tragweite der Variationsprinzipien auch für andere Teile der Physik, z. B. die Optik, herausstellten und ihnen zugleich eine elegante Form verliehen. Hamilton veröffentlichte 1834/35 seine „*General Method in Dynamics*“; Optik und Dynamik erscheinen dort als Teile der Variationsrechnung. Jacobi hielt seine „Vorlesungen über Dynamik“ in den Jahren 1842/43. Um diese Zeit wurde die kanonische Form der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichungen, die den Zusammenhang zwischen

der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, der Variationsrechnung und dem Fundament großer Teile der Physik vermittelte, allmählich zum Gemeingut der Mathematiker. Routh, Rankine, J. J. Thomson und Maxwell in Großbritannien, Helmholtz und Hertz in Deutschland, Ostrogradskij und Bunjakovskij in Rußland — um nur einige herausragende Vertreter zu nennen — dehnten den Anwendungsbereich der theoretischen Mechanik am Ende des 19. Jh. weiter aus, auch auf Elektrodynamik und Thermodynamik.

Allerdings bestand noch bis weit ins 20. Jh. eine bedeutende Kluft zwischen dieser anspruchsvollen Mathematik einerseits, die nur relativ wenigen Spezialisten vertraut war, und dem mathematischen Niveau der Ingenieurausbildung. Nur in den seltensten Fällen wurde die mathematische Physik direkt produktionswirksam, und es bedurfte einer starken Anstrengung, die Leistungsfähigkeit der höheren Analysis für die Praxis — oder, besser gesagt, die Notwendigkeit eines aufwendigen mathematischen Ausbildungsweges in der Ingenieurausbildung — zu verdeutlichen. Klein, einer der Pioniere der Anwendung der Mathematik in der Großproduktion und Begründer der Göttinger Aerodynamischen Versuchsanstalt, forderte noch 1919 für die Naturwissenschaften und die Mathematik:

„Nicht Naturerklären — was sie letzten Grundes nie kann — sondern Naturbeherrschen ist ihre eigentliche Aufgabe. Es darf nie vergessen werden, daß es eine schaffende Technik gibt, welche die Ansätze der theoretischen Wissenschaft in die Tat umsetzt.“ ([LA 20], Bd. I, S. 199)

Mathematische Physik

Im Berührungsfeld zwischen Mathematik und Physik entwickelte sich während des 19. Jh. die mathematische Physik als ein Gebiet relativer Selbständigkeit. Im gewissen Sinne lagen hier — neben der rechnenden Astronomie — die Hauptanwendungsgebiete der Mathematik, indem die Kraft der höheren Mathematik an verschiedenen Gebieten der Physik erprobt werden konnte. Andererseits erhielt die Physik als ganzes eine andere, nahezu deduktive Struktur, ähnlich, wie sie in früherer Zeit vergleichsweise nur die Mathematik bei Newton besessen hatte.

Einige einschlägige, herausragende Ereignisse werden diesen Aspekt der Mathematik des 19. Jh. verdeutlichen. Cauchy z. B. war in hervorragender Weise (um 1835) am Aufbau einer mathematischen Theorie der Dispersion beteiligt, zu einer Zeit, als Young und Fresnel die Wellentheorie des Lichtes zu neuem Leben erweckten. Navier stellte die Differentialgleichungen der Elastizität auf; hier und später bei Hamilton liegen praktische Ansatzpunkte der künftigen Vektor- und Tensorrechnung.

Mit der kleinen Schrift von S. Carnot „Réflexions sur la puissance motrice du feu ...“ (1824) begann die mathematische Durchdringung der Wärmelehre und deren Wechselwirkung mit konstruktiven Verbesserungen an Dampfmaschinen, sei es in Fabriken, Lokomotiven, Hochseeschiffen. Clapeyron z. B. schuf die heute fast selbstverständlich erscheinende Darstellung physikalischer Zusammenhänge in Form von Diagrammen. Die Arbeiten von Clausius, Lord Kelvin, Kirchhoff, Planck und anderen zur Mitte und gegen Ende des 19. Jh. markieren wichtige Stationen auf dem

Wege zur theoretischen Thermodynamik, die ihrerseits — indirekt — im 20. Jh. noch zur Quantenphysik hinführen sollte.

Mathematiker, insbesondere der französischen Schule im Wirkungsbereich der Ecole polytechnique, waren während der 1. Hälfte des 19. Jh. auch in führender Stellung an der Etablierung der technischen Mechanik als selbständiger technischer Wissenschaft beteiligt. Poncelet schrieb 1826 einen „Cours de mécanique appliquée aux machines“; drei Jahre später erschien von Coriolis ebenfalls eine „Mécanik der Maschinen“. Diese und ähnliche Darstellungen zielen — ganz anders als noch die „Mécanik“ von Lagrange — auf die mathematische Beschreibung der Kraft- und Bewegungsverhältnisse an wirklichen Maschinen, also unter Berücksichtigung der Reibung. Dupin in Belgien, Helmholtz in Deutschland mit der Wirbeltheorie, Green, Stokes und W. Thomson in Großbritannien, Ostrogradskij, Bunjakovskij und Čebyšev in Rußland und noch viele andere führten diese Entwicklung auf mathematischer Seite weiter; von seiten der theoretisch orientierten Maschineningenieure seien aus Deutschland Redtenbacher, Reuleaux und Weisbach hervorgehoben, die teilweise mit den Mathematikern in enger Partnerschaft an Technischen Hochschulen zusammenarbeiten.

Der während des 19. Jh. erzielte Fortschritt — der allerdings vielfach erst im 20. Jh. in der ingenieurwissenschaftlichen Praxis wirksam wurde — könnte für das Gebiet der technischen Mechanik so gekennzeichnet werden.

Euler schon hatte, bei der Behandlung von Schiffsbewegungen, eine Grundidee formuliert, die zu dem führen sollte, was das 19. Jh. als „Systemmechanik“ bezeichnen wird: Für jeden Körper, Maschine usw. sind die Gleichungen für Schwerpunkte und Momente aufzustellen, dabei aber die Reaktionskräfte im Innern des Systems zu eliminieren. Auf dieser theoretischen Grundlage, ausgerüstet mit der analytischen Mechanik in der Form von Lagrange, Jacobi, Hamilton, wurden reale Systeme unter Einschluß der Reibung der mathematischen Behandlung unterworfen und so Konstruktionsunterlagen bereitgestellt. Eine breite Palette praktischer Probleme wurde der Mathematik erschlossen: Kolbenmotoren, Pumpen, Regulatoren, Turbinen, Gebläse, elektrische Maschinen, Werkzeugmaschinen, Reibungsgesetze, Maschinengetriebe, Schwungräder, Kraftübertragung, Torsionsprobleme, Stabilität, Knickfestigkeit, Lagerreibung, Seil- und Kettenantrieb, Fahrzeugbau, Schienenführung, Bremsen, Lokomotivbau, Schiffsschwingungen, Schwingungsdämpfung, Förderanlagen und vieles, vieles andere mehr.

Überraschend interessant verlief auch der Prozeß der mathematischen Durchdringung von Elektrodynamik und Elektromagnetismus. Bei Coulomb und Ampère finden sich infinitesimale Betrachtungen. Faraday entwickelte seine Vorstellungen über die Wechselwirkung von fließenden Strömen und Magneten längs Kraftlinien in einem „Feld“ noch ganz intuitiv und anschaulich, noch ohne den entsprechenden mathematischen Apparat. Diese schwierige, auf der Theorie partieller Differentialgleichungen beruhende Ausarbeitung der Theorie des Elektromagnetismus, die auch die Lichttheorie einschloß, wurde schließlich von dem Schotten Maxwell vollbracht; sein zweibändiger „Treatise on Electricity and Magnetism“ erschien 1873. Und bald begannen Poincaré und Lorentz die Grundlagen der klassischen Mechanik — noch unbeabsichtigt — zu erschüttern, als sie nach dem berühmten Experiment von

Michelson (1881) über die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Erdbewegung die räumliche Gruppe der sog. Lorentztransformationen aufstellten; mit der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie Einsteins zu Anfang des 20. Jh. werden sich Mathematik und Physik auf einem wiederum erhöhten Niveau begegnen.

Zur Entwicklung der Algebra im neunzehnten Jahrhundert

Aus Platzgründen können nur einige markante Erscheinungen und Strömungen der Algebra dieses Zeitraums geschildert werden.

Theorie der Determinanten und Matrizen

Die Auflösung linearer Gleichungssysteme gehört zu den ältesten mathematischen Problemen und bemerkenswerterweise sogar im direkten praktischen Zusammenhang. Man findet daher lineare Gleichungssysteme z. B. in der mesopotamischen und in der mittelalterlichen chinesischen und japanischen Mathematik. Im europäischen Mittelalter und in der Renaissance gab es Ansätze zur Behandlung linearer Gleichungssysteme u. a. bei Leonardo Fibonacci und Cardano.

Es scheint aber, daß erst Leibniz eine allgemeine Lösungsmethode angestrebt und dabei zur Determinante gelangt ist. Im Jahre 1693 gab er auch Beispiele von Gleichungssystemen mit allgemeinen Koeffizienten und verwendete die Indexschreibweise.

Die Leibnizschen Ideen gerieten jedoch in Vergessenheit. 1750 veröffentlichte der Schweizer Cramer seine „Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques“. Dort wird mit Hilfe determinantenähnlicher Ausdrücke eine einwandfreie Methode zur Auflösung eines Systems von n Gleichungen mit n Variablen gegeben. Eine Reihe der bedeutendsten Mathematiker des 18. und 19. Jh. führte diese Untersuchungen weiter, unter ihnen Bezout, Vandermonde, Laplace, Lagrange, Cauchy, Jacobi. Laplace beispielsweise lehrte die Entwicklung der Determinanten, Lagrange wendete Determinanten in der analytischen Geometrie an, Cauchy fand den Multiplikationssatz und verwendete die quadratische Anordnung der Elemente. Insbesondere durch die Arbeiten von Jacobi, die 1826 einsetzten, wurden Determinanten zum Gemeingut der Mathematiker und fanden neben dem historischen Ausgangsproblem der Algebra — dem linearen Gleichungssystem — bald auch in Geometrie und Analysis ausgedehnte Verwendung.

Allerdings war es Jacobi noch nicht gelungen, allgemeine Kriterien für die Lösbarkeit eines Systems von n linearen Gleichungen mit m Variablen anzugeben, da ihm der Begriff „Rang einer Matrix“ noch fehlte. Das Verdienst der ersten Einsicht in die Zusammenhänge gebührt dem irischen Mathematiker Sylvester, der Matrizen

einführte und ihren Rang verwendete (freilich ohne dieses Wort zu gebrauchen). Sylvesters Freund und Kollege, Cayley, schuf den Matrizenkalkül und bemerkte auch, daß Matrizen eigentlich nur Abkürzungen für lineare Substitutionen sind.

Am Ende des 19. Jh. bildeten schließlich die US-Amerikaner B. Peirce und C. S. Peirce, der Deutsche Frobenius, der Franzose Hermite und andere den Matrizenkalkül im Hinblick auf die verschiedenartigsten innermathematischen Anwendungen als weitreichende, in sich geschlossene mathematische Disziplin durch. Die Matrizenrechnung wurde in den Händen von Born und Heisenberg am Ende der 20er Jahre des 20. Jh. sogar zum entscheidenden mathematischen Hilfsmittel der Quantenmechanik.

Der Quaternionenkalkül. Die Vektorrechnung

Neben dem Problem der Erweiterung des Bereichs der reellen Zahlen wurde die Geometrie zum Ausgangspunkt der Quaternionentheorie. Können Drehungen im dreidimensionalen Raum durch ähnliche „Zahlen“ beschrieben werden wie Drehungen in der Ebene durch die komplexen Zahlen?

Nach angestrengtem Nachdenken gelangte Hamilton 1843 zur Erfindung der Quaternionen, d. h. viergliedriger „Zahlen“

$$a + bi + cj + dk.$$

In zwei Monographien „Lectures on Quaternions“ (1853) und „Elements of Quaternions“ (1866), lehrte Hamilton die algebraische Theorie der Quaternionen – bei der das Kommutativgesetz aufgegeben werden mußte – und deren Leistungsfähigkeit in Geometrie und Mechanik; allerdings wurden die beiden Bücher auch zum Ausgangspunkt eines völlig übersteigerten Quaternionenkultes. Rückblickend, 1858, äußerte sich Hamilton so:

„Morgen wird der fünfzehnte Geburtstag der Quaternionen sein. Sie traten ins Leben oder ans Licht, voll erwachsen, am 16. Oktober 1843, als ich mit Lady Hamilton nach Dublin wanderte und hinaufkam zur Broughambrücke. Das bedeutet, daß ich damals und dort fühlte, daß sich der galvanische Stromkreis geschlossen hatte und die Funken, die von ihm gesprungen waren, die fundamentalen Gleichungen zwischen I , J , K waren, genau so, wie ich sie seitdem verwendet habe. Ich zog auf der Stelle ein Notizbuch, welches noch existiert, heraus, in welches ich eine Eintragung dazu machte; bereits in diesem Moment fühlte ich, daß es der Mühe wert sein könnte, die Arbeit für wenigstens 10 (oder auch 15) kommende Jahre aufzubringen. Aber dann ist es auch fair zu sagen, daß es deshalb war, weil ich fühlte, daß in diesem Augenblick ein Problem gelöst, ein intellektuelles Bedürfnis befriedigt worden war, welches mich seit wenigstens 15 Jahren verfolgt hatte.“ ([LA 21], S. 779, englisch)

Trotz dieses subjektiven Überschwanges liegen bei Hamilton echte historische Wurzeln der Vektoranalysis. Er führte selbst die Bezeichnung und das Symbol „Nabla“ ein und beteiligte sich an hervorragender Stelle am Ausbau des Formalismus der symbolisierten Feld- und Vektorrechnung, die durch Begriffe wie Gradient, Divergenz, Δ -Operator, curl (= rot) usw. gekennzeichnet ist. Dies spielte seinerseits eine entscheidende Rolle beim Aufbau der elektromagnetischen Lichttheorie durch Maxwell.

Von ähnlichen Fragestellungen wie Hamilton ausgehend schlug in Deutschland

Graßmann einen anderen Weg ein. Er ließ sich in seiner 1844 erstmals erschienenen „Linealen Ausdehnungslehre“ von Leibnizschen Ideen einer „characteristica universalis“ leiten und baute eine geometrisch-algebraische Theorie allgemeiner, nicht mehr notwendig kommutativ verknüpfter Größen auf, die – modern ausgedrückt – schon nahezu einer axiomatischen Betrachtung des n -dimensionalen Vektorraumes entspricht. Da Graßmann außerordentlich abstrakt vorgeing, eine Vielzahl von Symbolen verwendete und noch dazu die damals übliche Vorstellung von der Dreidimensionalität des Raumes verlassen hatte, war das Werk seinen Zeitgenossen praktisch unverständlich. Dennoch sind gegen Ende des Jahrhunderts, als durch Vermittlung von Gibbs und Klein die Gegensätze zwischen den Anhängern Hamiltons und Graßmanns, zwischen den „Quaternionisten“ und den „Bivektorianern“, abgebaut worden waren, auch viele Elemente der Arbeit von Graßmann in den Aufbau einer Vektor- und Tensorrechnung eingeflossen.

Den eigentlich ihnen zukommenden Platz erhielten die Quaternionen, als Frobenius zeigen konnte, daß sie die einzige nichtkommutative Divisionsalgebra endlichen Ranges über dem Körper der reellen Zahlen bilden. Als Poincaré und E. Cartan Untersuchungen einleiteten, die zum Kalkül der äußeren Differentialformen führten und dabei die Analogie zum Graßmann-Kalkül bemerkt wurde, wurde auch die Graßmannsche Lehre in die moderne Mathematik integriert. Um die exakte Begründung des Begriffs des Vektorraumes endlicher oder unendlicher Dimensionen über dem Körper der reellen Zahlen hat sich von 1888 an Peano besondere Verdienste erworben.

Die mehr formale Seite der Erweiterung des Bereiches der reellen Zahlen zu „hyperkomplexen“ Systemen betrachteten – neben den schon angeführten Mathematikern – Hankel, Study, Molien, Dedekind, Weierstraß und B. Peirce, die bei Wedderburn und Dickson in den englischsprachigen Ländern und bei E. Noether und Artin in Deutschland in die Theorie der Algebra und schließlich in die sog. „Moderne Algebra“ des 20. Jh. einmündete.

Die britische algebraische Schule

Um die Mitte des 19. Jh. übertraf die Mathematik in Großbritannien auf einem großen Teilgebiet, dem der Algebra, erstmals wieder nach einem Jahrhundert des Nachhinkens die Mathematik im kontinentalen Europa. Dabei handelt es sich um eine betont formale Algebra in dem Sinne, daß weniger die Art der Elemente als vielmehr die Art der Verknüpfungen zwischen nicht näher erklärten abstrakten Größen in den Vordergrund gerückt wurde.

Eine Dreiergruppe von Mathematikern kann man als Wegbereiter der englischen algebraischen Schule betrachten: Peacock, de Morgan und D. F. Gregory suchten in den 30er Jahren einen neuen Zugang zur Algebra. Ihre Ideen wurden vielleicht am klarsten von Peacock formuliert. In einem Report über Zustand und Fortschritt verschiedener Zweige der Analysis aus dem Jahre 1834 heißt es, daß die symbolische Algebra

„ihrem Wesen nach eine Wissenschaft von Symbolen und deren Kombination werden könnte,

aufgebaut nach ihren eigenen Regeln, welche durch deren Interpretation auf Arithmetik und alle anderen Wissenschaften angewandt werden könnte.“ ([L 12.17], S. 192, englisch)

Aus der Gruppe der hervorragenden Vertreter der englischsprachigen Algebraiker der nächsten Generation sei Cayley, ein überaus fruchtbarer und vielseitiger Mathematiker, hervorgehoben. Er stieß, ausgehend von einer scharfsinnigen Theorie der Invarianten und Kovarianten von Formen — er nannte sie „quantics“ —, schon Mitte des 19. Jh. bis zu einer weitgetriebenen abstrakten Auffassung des Gruppenbegriffs vor, indem er die Gruppe als System definierender Relationen zwischen abstrakten Elementen einführte. Speziell können diese Elemente Permutationen sein; damit stellte Cayley den Anschluß an den durch Cauchy in den 40er Jahren vollzogenen systematischen Aufbau der Permutationstheorie her, in welchem sich ebenfalls bereits Ansätze abstrakter Gruppentheorie erkennen lassen. Hinsichtlich der Wortbildung „Gruppe“ (engl. group, franz. le groupe) nahm Cayley ausdrücklich bezug auf Galois.

Bereits 1854 hatte Cayley die Gruppentafel eingeführt. So heißt es in einer Arbeit „On the Theory of Groups as Depending on the Symbolic Equation $\theta^n = 1$ “ unter anderem:

„Eine Menge von Symbolen

$$1, \alpha, \beta, \dots,$$

die alle untereinander verschieden und derart beschaffen sind, daß das Produkt von je zwei beliebigen (unabhängig von der Reihenfolge) oder das Produkt irgendeines davon mit sich selbst zur Menge gehört, soll eine Gruppe heißen. Es folgt, daß, wenn die ganze Gruppe mit irgend einem der Symbole von links oder von rechts multipliziert wird, man im Effekt einfach die ganze Gruppe reproduziert; oder, was das gleiche bedeutet, daß, wenn man die Symbole der Gruppe miteinander multipliziert, so daß eine Tabelle folgender Form entsteht

		linke Faktoren			
		1	α	β	
rechte Faktoren	1	1	α	β	
	α	α	α^2	$\beta\alpha$	
	β	β	$\alpha\beta$	β^2	

derart, daß sowohl jede Zeile als auch jede Spalte alle Symbole $1, \alpha, \beta, \dots$ enthält. Es folgt auch, daß das Produkt irgendeiner Anzahl von Symbolen mit oder ohne Wiederholungen und in jeder beliebigen Reihenfolge ein Symbol der Gruppe ist.“ ([L 12.3], S. 124, engl.)

Um 1878, als die umfassende Bedeutung des Gruppenbegriffs hervorgetreten war, die sich über die Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen hinaus auch in Geometrie und in der Theorie partieller Differentialgleichungen offenbart hatte, wandte sich Cayley erneut der Gruppentheorie zu. Dann heißt es bei ihm:

„Eine Menge von Symbolen $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ derart, daß das Produkt $\alpha\beta$ je zweier von ihnen (in jeder Reihenfolge, $\alpha\beta$ oder $\beta\alpha$) ein Symbol der Menge ist, ist eine Gruppe ... Eine Gruppe wird definiert mittels der Gesetze der Verknüpfung (combination) ihrer Symbole.“ ([L 12.4], S. 402, engl.)

Von weiteren Mathematikern der algebraisch-geometrisch orientierten englischsprachigen Schule seien noch der Ire Salmon genannt sowie der Engländer Clifford. Salmon trat insbesondere durch hervorragende Monographien und Lehrbücher hervor, in denen die analytische Geometrie methodisch durch breite Verwendung algebraischer Mittel neu fundiert wurde.

Jener Ideensphäre abstrakter Auffassungen entsprang überdies auch ein berühmtes Büchlein von nur 84 Seiten, das 1854 erschienen ist. Es trug den Titel „An Investigation of the Laws of Thought, ...“ und hatte zum Verfasser den Engländer Boole. Anknüpfend an Ideen des mittelalterlichen Denkers Raymundus Lullus und solche von Leibniz vertrat dort Boole die Idee, daß man alle Operationen der Sprache – als Ausdruck des Denkens – durch Systeme von Zeichen (Begriffssymbole, Operationsymbole, identisches Zeichen) darstellen können müsse. Mit dem damals freilich kaum beachteten Versuch der Formalisierung des Denkens und der Mathematik wurde Boole zum Wegbereiter der mathematischen Logik.

Im letzten Drittel des 19. Jh. begannen die in der britischen Schule entwickelten Ideen auch in anderen Ländern Fuß zu fassen. B. Peirce in den USA beispielsweise entwickelte im Anschluß an Beiträge seines Sohnes C. S. Peirce zur mathematischen Logik weitgreifende Ansätze zur allgemeinen linearen assoziativen Algebra. In Deutschland bezog sich Hankel mit seiner „Theorie der complexen Zahlensysteme“ vom Jahre 1867 und dem Permanenzprinzip bewußt auf Hamiltons abstrakte Auffassungen in dessen „Elements of Quaternions“ von 1866. Überhaupt verdankt die gerade in Deutschland in den 70er und 80er Jahren besonders deutlich werdende Tendenz zur Herausbildung der mathematischen Logik als selbständig werdender mathematischer Disziplin Vieles der britischen algebraischen Schule des 19. Jh.

Herausarbeitung algebraischer Grundstrukturen

Es ist bemerkenswert, daß bereits im Laufe des 19. Jh. einige algebraische Grundstrukturen wie Gruppe, Körper, Ideal herausgearbeitet worden sind, daß also die moderne Strukturmathematik der Gegenwart in ihrer algebraischen Komponente bis ins 19. Jh. zurückreicht. Freilich geschah dies, wenigstens im Anfang des 19. Jh., weitgehend in impliziter Form. So laufen z. B. die Theorie der Komposition der quadratischen Formen oder die Theorie der Kreisteilungsgleichung bei Gauß ebenso wie einige Sätze bei Abel auf eine implizite Theorie abelscher Gruppen hinaus. Bei Galois finden sich Sätze, die wir heute der Theorie endlicher Körper (Galois-Felder) zurechnen. Die weitausgebaute Theorie der Permutationsgruppen bei Cauchy kam einer abstrakten Gruppentheorie schon ziemlich nahe; andere Beispiele ließen sich hinzufügen.

Zur Mitte des 19. Jh. und dann verstärkt in den 60er und 70er Jahren setzte eine Phase ein, in der der abstrakte begriffliche Inhalt von algebraischen Grundstrukturen herausgearbeitet wurde. Dedekind, der auf diesem Wege schon sehr früh weit vorangeschritten war, hatte sich – wie Dirichlet 1856 an Kummer berichtete – „ganz in Galois und Abel vertieft“. Dedekind dürfte 1856 in einer Vorlesung als erster die Galoissche Gleichungstheorie in moderner Auffassung vorgetragen haben, indem er

die Galois-Gruppe als Automorphismengruppe des entsprechenden Normalkörpers betrachtete ([L 12.20], [L 12.21]). Auf Dedekind geht auch die abstrakte moderne Auffassung des Idealbegriffes zurück und er prägte das Wort „Körper“. (Kronecker gebrauchte statt dessen das Wort „Rationalitätsbereich“)

In zeitlich dichter Folge konnte — durch Dedekind, durch Cayley u. a. — der abstrakte Gruppenbegriff herauspräpariert werden. Bei Kronecker z. B. heißt es in einer zahlentheoretischen Arbeit aus dem Jahre 1870, daß er sich „um Einfachheit“ und um das „deutliche Hervortreten des allein Wesentlichen“ bemühe. Dann folgt eine implizite, axiomatisch fixierte Definition des Begriffs der endlichen abelschen Gruppe; zugrunde gelegt wird eine abstrakte Verknüpfung zwischen nicht näher bezeichneten Elementen.

„Es seien

$$\theta', \theta'', \theta''', \dots$$

Elemente in endlicher Anzahl und so beschaffen, dass ich aus je zweien derselben mittels eines bestimmten Verfahrens ein drittes ableiten läßt. Demnach soll, wenn das Resultat dieses Verfahrens durch $\mathfrak{f}$ angedeutet wird, für zwei beliebige Elemente θ' und θ'' , welche auch mit einander identisch sein können, ein θ''' existieren, welches gleich: $\mathfrak{f}(\theta', \theta'')$ ist. Ueberdies soll:

$$\mathfrak{f}(\theta', \theta'') = \mathfrak{f}(\theta'', \theta')$$

$$\mathfrak{f}(\theta', \mathfrak{f}(\theta'', \theta''')) = \mathfrak{f}(\mathfrak{f}(\theta', \theta''), \theta''')$$

und aber, sobald θ'' und θ''' von einander verschieden sind, auch

$$\mathfrak{f}(\theta', \theta''') \text{ nicht identisch mit } \mathfrak{f}(\theta', \theta'')$$

sein. Dies vorausgesetzt, kann die mit $\mathfrak{f}(\theta', \theta'')$ angedeutete Operation durch die Multiplikation der Elemente $\theta'\theta''$ ersetzt werden, wenn man dabei an Stelle der vollkommenen Gleichheit eine blosse Äquivalenz einführt.“ ([L 12.12], S. 275/276)

Ganz deutlich werden in abstrakter Form die Abgeschlossenheit des endlichen Systems gegenüber der zugrunde gelegten Operation, das Kommutativgesetz, das Assoziativgesetz und das Gesetz über die eindeutige Umkehrbarkeit der Operation fixiert.

Neben der Zahlentheorie wirkten ferner Geometrie und Algebra als historische Wurzeln bei der Herausbildung des abstrakten Gruppenbegriffs.

Unter Berufung auf die methodologischen Ansichten von Hamilton, Netto, Graßmann, Hankel und Schröder vollzog v. Dyck 1882/83 den Übergang zum abstrakten Gruppenbegriff:

„Es ist die Absicht ..., die bisher studierten Eigenschaften einer Gruppe in ihrer abstracten Formulierung zu verfolgen. Dabei wird insbesondere die Frage zur Geltung kommen, in wie weit diese Eigenschaften durch alle Erscheinungsformen der Gruppe einen invarianten Charakter tragen, was zur exacten Fixierung ihres eigentlichen gruppentheoretischen Inhaltes führt.“ ([L 12.7], S. 70)

Und an anderer Stelle beispielsweise:

„... damit werden alle holoeidisch isomorphen Gruppen in eine einzige Gruppe begriffen ...“, und: „... das Wesen der Gruppe drückt sich nicht mehr an einer speciellen Darstellungsform ihrer Operationen aus, sondern lediglich in der gegenseitigen Beziehung derselben zu einander.“ ([L 12.6], S. 1)

Die moderne Auffassung von der Existenz algebraischer Grundstrukturen ist schon wenige Jahre später, 1895/96, in das „Lehrbuch der Algebra“ von Weber eingegangen; sie wurde sogar zur Grundlage der Betrachtungsweise. Dadurch erklärt sich auch der große Erfolg dieses Buches, das von einer ganzen Generation von Mathematikern benutzt wurde und sozusagen den Inhalt einer ganzen Periode der Algebra geprägt hat. Erst das Buch von van der Waerden, die „Moderne Algebra“ (1930/31), wird eine nächste Entwicklungsstufe der Algebra in ähnlicher Weise markieren.

Der von Weber erreichte Standpunkt tritt in den folgenden Passagen deutlich hervor:

„Es war meine Absicht, ein Lehrbuch zu geben, das, ohne viel Vorkenntnisse vorauszusetzen, den Leser in die moderne Algebra einführen und auch zu den höheren und schwierigeren Partien hinführen sollte, in denen das Interesse an dem Gegenstande erst recht lebendig wird.“ ([L 12.25], S. V)

„Es sind hauptsächlich zwei große allgemeine Begriffe, von denen die moderne Algebra beherrscht wird. Die Existenz und Bedeutung dieser Begriffe konnte allerdings erst erkannt werden, nachdem die Algebra bis zu einem gewissen Grad fertig und zum Eigentum der Mathematiker geworden war. Erst dann konnte in ihnen das verbindende und führende Prinzip erkannt werden.

Es sind die Begriffe der Gruppe und des Körpers, zu deren Erklärung wir jetzt fortschreiten. Der allgemeinere Begriff ist der der Gruppe, mit dem wir also beginnen.“ ([L 12.26], S. 180)

„Eine Gruppe wird zum Körper, wenn in ihr zwei Arten der Composition möglich sind, von denen die erste Addition, die zweite Multiplication genannt wird.“ ([L 12.23], S. 526)

Historisch gesehen liegt mit dem abstrakten Gruppenbegriff der früheste Fall der Emanzipation einer algebraischen Struktur vor. Und so entstanden die ersten Monographien auf abstrakter Grundlage. Es sind dies die noch auf endliche Gruppen beschränkten „*Eléments de la théorie des groupes abstraits*“ (1904) des Franzosen des Séguier und die „*Abstraktnaja teorija grupp*“ (1916) von O. Ju. Schmidt, dem Stammvater der berühmten russisch-sowjetischen gruppentheoretischen Schule, der außerdem ein erfolgreicher Polarforscher war.

Vorlesung 13

Neunzehntes Jahrhundert: Höhere Geometrie. Mengenlehre

18.

Géométrie imaginaire.

(Par Mr. N. Lobatschewsky, recteur de l'université de Kazan.)

Il y a à peu près cinq ans que j'ai fait insérer dans un journal scientifique qui paraissait à Kazan, quelques articles sur les élémens de la géométrie. Après y avoir développé une nouvelle théorie des parallèles, j'ai tâché de prouver que rien n'autorise, si ce ne sont les observations directes, de supposer dans un triangle rectiligne la somme des angles égale à deux angles droits, et que la géométrie n'en peut pas moins exister, si non dans la nature, au moins dans l'analyse, lorsqu'on admet l'hypothèse de la somme des angles moindre que la demi-circconférence du cercle. Dans les articles cités j'étais même parvenu, par des considérations toujours géométriques et ne m'appuyant que sur cette nouvelle hypothèse, à donner des équations fondamentales pour le rapport entre les côtés et les angles d'un triangle rectiligne; enfin j'ai donné aussi les expressions générales pour les élémens différentiels des lignes courbes, des surfaces et du volume des corps dans cette géométrie nouvelle que je veux nommer *imaginaire*. Cependant resserré alors dans les limites d'un journal, je ne crois pas avoir traité ce sujet avec tout le détail nécessaire. Je m'aperçois à présent que beaucoup de propositions que j'y ai annoncées sans en donner en même tems les démonstrations, et le peu de développement qu'on doit remarquer d'abord dans des calculs fort longs et embarrassants, n'ont peut être que trop contribué à rendre inintelligible tout mon travail et à jeter même du doute sur la vérité de ce que je voulais y énoncer. Mais si d'un côté je ne désirais revenir sur cette matière qu'en écrivant déjà d'après un plan un peu plus étendu; de l'autre je me suis résolu à soumettre encore une fois au jugement des savans les résultats que j'ai obtenus, en les vérifiant d'une manière nouvelle. C'est en rebrousant pour ainsi dire chemin et en partant d'abord des équations fondamentales que je tâcherai d'introduire leur adoption dans la géométrie et de mettre hors de doute qu'ils puissent jamais mener à une absurdité, sous quelque rapport que ce soit.

Casles Journal d. M. T. L. XVII. Tit. 4

39

Titelblatt N. I. Lobačevskij: Géométrie imaginaire, 1837

Die Entwicklung der höheren Geometrie im neunzehnten Jahrhundert

Vom Ende des 19. Jh. her betrachtet, schien sich das 19. Jh. für die Mathematik als das Jahrhundert der Geometrie darzubieten. Gewiß hält diese Einschätzung einer vertieften historischen Analyse im heutigen Blickfeld nicht stand, aber tatsächlich nahm die Geometrie während des 19. Jh. nach Inhalt, Umfang, Gestaltung von Methoden und innerer Struktur eine überaus rasche Entwicklung.

Die hohe Wertschätzung der Geometrie im 19. Jh. ist auch als Reflex des gesellschaftlichen Bewußtseins der Mathematiker auf die dominierende Rolle der darstellenden Geometrie an polytechnischen Schulen und Technischen Hochschulen zu verstehen. In diesem Sinne gab der hohe mit der darstellenden Geometrie sich offenbarende Nutzen im Ausbildungsprozeß der Ingenieure den Nährboden ab für die Entfaltung der Geometrie während des 19. Jh. Der mächtige, von Monge und der Pariser Polytechnischen Schule ausgehende Impuls an die Geometrie verkörperte sich geradezu in Poncelet und in der Entwicklung der projektiven Geometrie.

Zugleich aber bildete die Geometrie während der ersten Hälfte des 19. Jh. Entwicklungsgänge aus, die zwar nicht direkt aus der Entwicklung der projektiven Geometrie entsprangen, dennoch aber aus der gegen Ende des 18. Jh. eingeleiteten Umwälzung der gesamten Geometrie resultierten. Tatsächlich handelte es sich bei der Entwicklung der Geometrie vom Ende des 18. bis zur Mitte des 19. Jh. nicht um die bloße Abfolge einer Entwicklungsrichtung, sondern um die Entfaltung einzelner der Geometrie innewohnender, selbständig werdender Tendenzen in scheinbar divergierenden Richtungen. Fundamentale Denkbestimmungen in und über Geometrie hörten auf, durch Gewohnheitsrecht bestimmt zu sein: Begriffe wie Koordinate, Länge, Parallele und Entfernung, die Denkgewohnheit vom Punkt als Ausgangselement aller Geometrie, ja, die ganze Auffassung von Geometrie als Meßkunst konnten und mußten verallgemeinerungsfähig bzw. kritikbedürftig sein, seit *die* Geometrie – verstanden nach Inhalt, Methode und Zielstellung im Sinne der jahrtausendealten euklidischen Tradition – einmal in Bewegung geraten war.

Auf dem Wege zur nichteuklidischen Geometrie

Schon seit der Antike besaß das fünfte Euklidische Postulat, das sog. Parallelenpostulat, eine deutliche Ausnahmestellung. Seither gab es Versuche, dieses Postulat mit Hilfe der anderen zu beweisen; auch aus dem Bereich der islamischen Mathematik sind ähnliche Versuche bekannt, z. B. bei at-Tūsī im 13. Jh. Die Kette der Beweisversuche reicht bis zu Legendre und seinem bedeutenden Lehrbuch „*Éléments de géométrie*“ (1794).

Trotz aller vergeblichen Beweisversuche waren am Ende des 18. Jh. zwei prinzipielle Einsichten erzielt worden: Hinsichtlich des Aufbaus der Euklidischen Geometrie ist das Parallelenpostulat mit einer Reihe anderer Grundannahmen äquivalent, z. B. mit der, daß zu jedem Dreieck ein ähnliches beliebiger Größe existiert (Wallis,

1693), oder mit der, daß die Winkelsumme im Dreieck gleich zwei Rechten ist (Saccheri, Lambert, Legendre). Die Umkehrung des Parallelpostulats ist jedoch beweisbar: Wenn zwei einander schneidende Geraden von einer dritten geschnitten werden, so bildet die schneidende Gerade auf der einen Seite innere Winkel (also im Innern des entstehenden Dreiecks), deren Summe weniger als zwei Rechte beträgt.

Diese beiden Einsichten führten zur gedanklichen Wende. Statt des Versuchs, das Parallelpostulat direkt zu beweisen, wurde der Beweis indirekt versucht: Aus der Annahme, daß das Parallelpostulat falsch sei, wollte man einen Widerspruch herleiten.

Der Italiener Saccheri stellte in dem 1733 publizierten Büchlein „Euclides ab omni naevo vindicatus“ (Der von jedem Makel befreite Euklid) zwei Hypothesen auf, die des spitzen und die des stumpfen Winkels: Wenn in einem Viereck $ABCD$ an den Eckpunkten der Basis $\overline{AB}$ zwei gleichlange Senkrechte $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ errichtet sind,

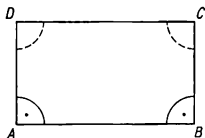


Abb. 13.1. Zur Hypothese des spitzen bzw. stumpfen Winkels

so sind die beiden übrigen Winkel bei C und D aus Symmetriegründen gleich groß. Nach Euklid sind sie rechte Winkel; die beiden Hypothesen lauten: Es sind spitze bzw. stumpfe Winkel (Abb. 13.1).

Tatsächlich schien es Saccheri gelungen zu sein, die Hypothese des stumpfen Winkels widerlegt zu haben, unter der Voraussetzung, daß Geraden unendlich lang sind. Die Hypothese des stumpfen Winkels führte nämlich Saccheri zu dem Schluß, daß die Geraden eine endliche Länge haben müssen. Es ist dies ein völlig korrekter Schluß, Saccheri aber hielt dies für einen Widerspruch — hier ganz euklidisch denkend — und interpretierte sein Ergebnis als Widerlegung der Hypothese des stumpfen Winkels. Saccheris Argumentation zur Widerlegung der Hypothese des spitzen Winkels ist indes fehlerhaft.

Auch der elsässische Naturforscher Lambert hat sich mit einer 1766 niedergeschriebenen, aber erst 1786 aus dem Nachlaß veröffentlichten „Theorie der Parallellinien“ mit ähnlichen Überlegungen wie Saccheri beschäftigt und aus ihnen ziemlich weitgehende Konsequenzen gezogen, die auf Ergebnisse zur nichteuklidischen Geometrie hinauslaufen. Jedenfalls äußerte er sich sogar über die Unbequemlichkeiten dieser ungewöhnlichen Geometrie, daß nämlich die herkömmlichen trigonometrischen Tafeln ungültig würden, daß es dann zwischen Figuren keine Ähnlichkeit und Proportionalität mehr gäbe und daß es dann um die Astronomie übel bestellt wäre.

Gegen Ende des 18. Jh. herrschte ein ziemlich weitverbreitetes Interesse an den Grundlagenfragen der Geometrie, wenn auch die unbedingte Richtigkeit der Euklidischen Geometrie niemand ernstlich in Abrede stellen wollte. So ist bekannt, daß

der Göttinger Mathematiker Kästner, einer der Lehrer von Gauß, systematisch Schriften gesammelt hat, die sich mit der Theorie der Parallelen, wie man damals sagte, beschäftigten. Die (indirekten) Beweisversuche für das Parallelenpostulat hielten noch bis weit ins 19. Jh. an; scharfsinnige, aber eben letztlich doch am Ziel vorbeigehende Beiträge lieferten u. a. Taurinus (1825) und Schweikart (1818), zu einer Zeit also, als Gauß — als erster — längst zur vollen Einsicht in das Wesen der nichteuklidischen Geometrie gelangt war, ohne sich freilich darüber öffentlich zu äußern.

Gauß und die nichteuklidische Geometrie

Bereits als Fünfzehnjähriger begann Gauß, sich mit den Grundlagen der Geometrie zu beschäftigen. Schon 1792 fragte er sich, ähnlich wie Saccheri und Lambert, wie eine Geometrie beschaffen sein würde, in der das Parallelenpostulat nicht gültig ist. Es scheint, daß Gauß schon um diese Zeit oder bald danach anders als andere vor ihm eingesehen hat, daß das Parallelenpostulat a priori unbeweisbar ist. Dies war ein kühner erkenntnistheoretischer Schritt, der auf die damals noch nicht vorhandene Unterscheidung von Geometrie und Raum hinauslief, auf die Unterscheidung zwischen Geometrie als mathematischer Disziplin und einer Raumwissenschaft im Sinne einer Wissenschaft vom objektiv existierenden, physikalischen Raum.

Damit gelangte Gauß immer stärker in Gegensatz zu der vorherrschenden Naturphilosophie Kants. Dieser hatte — obwohl er in jüngeren Jahren noch mehrdimensionale Geometrie und eine Art Rückkopplung von Raum und Sinneswahrnehmung wenigstens erörtert hatte — in der großen Einfluß gewinnenden „Kritik der reinen Vernunft“ (1781) den dreidimensionalen euklidischen Raum als schlechthin denknotwendig erklärt:

„Geometrie ist also eine Wissenschaft, welche die Eigenschaften des Raumes synthetisch und doch a priori bestimmt. Was muß die Vorstellung des Raums denn sein, damit eine solche Erkenntnis von ihm möglich sei? Er muß ursprünglich Anschauung sein; denn aus einem bloßen Begriffe lassen sich keine Sätze, die über den Begriff hinausgehen, ziehen, welches doch in der Geometrie geschieht ... Aber diese Anschauung muß a priori, d. i. vor aller Wahrnehmung eines Gegenstandes, in uns angetroffen werden, mithin reine, nicht empirische Anschauung sein. Denn die geometrischen Sätze sind insgesamt apodiktisch, d. i. mit dem Bewußtsein ihrer Nothwendigkeit verbunden, z. B. der Raum hat nur drei Abmessungen; dergleichen Sätze aber können nicht empirische oder Erfahrungsurtheile sein, noch aus ihnen geschlossen werden.“ ([L 13.20], S. 53/54)

Nach langem gedanklichen Ringen gelangte Gauß um 1815/16 zu der Einsicht, daß auch die nichteuklidischen Geometrien richtig sind, also Geometrien, die mit einem Postulat aufgebaut werden, das eine Negation des Parallelenpostulates impliziert. Über die wirkliche Struktur des Raumes müssen Erfahrung, Experiment und damit Physik und Astronomie entscheiden. Damit hatte Gauß eindeutig eine Position im Sinne des naturwissenschaftlichen Materialismus bezogen; in seiner Sprechweise klingt dies (1817) so:

„Ich komme immer mehr zu der Überzeugung, dass die Nothwendigkeit unserer Geometrie nicht bewiesen werden kann, wenigstens nicht vom menschlichen Verstand noch für den

menschlichen Verstand. Vielleicht kommen wir in einem anderen Leben zu anderen Einsichten in das Wesen des Raums, die uns jetzt unerreichbar sind. Bis dahin muß man die Geometrie nicht mit der Arithmetik, die rein a priori steht, sondern etwa mit der Mechanik in gleichen Rang setzen ...“ ([L 13.11], Bd. VIII, S. 177)

Auch die Abgrenzung gegen Kant wird bewußt vorgenommen, allerdings wiederum lediglich brieflich:

„Gerade in der Unmöglichkeit zwischen Σ (Euklidischer Geometrie, Wg) und S (nicht-euklidischer Geometrie, Wg) a priori zu entscheiden, liegt der klarste Beweis, daß Kant Unrecht hatte zu behaupten, der Raum sei nur Form unserer Anschauung.“ ([L 13.11], Bd. VIII, S. 224)

Gauß hat keine zusammenhängende Abhandlung oder Darstellung zur nicht-euklidischen Geometrie hinterlassen. Doch geht aus vielfältigen brieflichen Mitteilungen an vertraute Freunde — Bessel, Schumacher, Gerling — hervor, daß er tiefe Einsichten in dort geltende Sachverhalte besessen hat (Anm. 13.1). In einem Brief an Schumacher (1831) heißt es:

„... enthält die Nicht-Euklidische Geometrie durchaus nichts widersprechendes, wenn gleich diejenigen [, die sie kennen lernen], viele Ergebnisse derselben anfangs für paradox halten müssen, was aber für widersprechend zu halten nur eine Selbsttäuschung sein würde, hervorgebracht von der früheren Gewöhnung, die Euklidische Geometrie für streng wahr zu halten. In der Nicht-Euklidischen Geometrie gibt es gar keine ähnlichen Figuren ohne Gleichheit, z. B.

die Winkel eines gleichseitigen Dreiecks sind nicht bloss von $\frac{2}{3} R$, sondern auch [bei verschiedenen Dreiecken] nach Massgabe der Größe der Seiten unter sich verschieden und können, wenn die Seite über alle Grenzen wächst, so klein werden, wie man will.“ ([L 13.11], Bd. VIII, S. 216)

„In der Euklidischen Geometrie gibt es nichts absolut grosses, wohl aber in der Nicht-Euklidischen, diess ist gerade ihr wesentlicher Charakter, und diejenigen, die diess nicht zugeben, setzen eo ipso schon die ganze Euklidische Geometrie; aber, wie gesagt, nach meiner Überzeugung ist diess blosser Selbsttäuschung.“ ([L 13.11], Bd. VIII, S. 217)

Gauß hat sich nur vertraulich über nichteuklidische Geometrie geäußert. Er scheute wohl Auseinandersetzungen — „das Geschrei der Böttier“ —, in die er unvermeidlich verwickelt worden wäre. Desto aufmerksamer aber beobachtete er die Entwicklung auf diesem Gebiet, deckte freundschaftlich-streng Fehler bei angeblichen Lösungsversuchen für das Parallelenpostulat bei seinem Jugendfreund, dem Mathematiker W. (Farkas) Bolyai, und bei dem befreundeten Astronomen Schumacher auf, korrespondierte mit und über die Ansätze von Taurinus und Schweikart. Besonders aufmerksam verfolgte Gauß den Gang der Dinge, als zwei weitere Mathematiker — Lobačevskij im fernen Kasan und der Sohn Johann (Janos) seines Jugendfreundes Bolyai — unabhängig voneinander und von ihm den mutigen Schritt der Veröffentlichung zur nichteuklidischen Geometrie taten.

Janos Bolyai und die nichteuklidische Geometrie

Der Vater Bolyai hat seinen Sohn mehrfach mit eindringlichen Worten vor der Beschäftigung mit dem Parallelenproblem gewarnt, vor den „gefährvollen Klippen, wo noch ein jeder Schiffbruch erlitt“, vor dem „unheimlichen Schlachtfeld“, vor

dieser „alles Streben des Forschergeistes trotzend, uneinnehmbaren Felsenburg“. Der Sohn ließ sich allerdings nicht abbringen von seiner Leidenschaft. Ursprünglich auch mit der Hypothese des spitzen Winkels, also einem indirekten Beweis für das Parallelenpostulat befaßt, gelangte Janos Bolyai Ende der 20er Jahre zu Grundeinsichten der nichteuklidischen Geometrie. Nach einigen Diskussionen mit dem Vater erschien die nichteuklidische Geometrie von Janos als „Appendix“ (Anhang) zu einem Lehrbuch der Geometrie („Tentamen“) seines Vaters im Jahre 1832. Dort schreibt Janos Bolyai im Vollgefühl seiner Leistung:

„So ist das Wesen des XI. Axioms (des Parallelenpostulats, Wg) vollendes ergründet und die intrikate Materie der Parallelen vollkommen durchdrungen, und die bis zur Stunde (für die nach Wahrheit dürstenden Geister) so unglücklich geherrscht habende, die Lust zur Wissenschaft benehmende und Zeit und Kraft so Vielen geraubt habende totale Sonnenfinsternis für immer verschwunden. Und es lebt in dem Verfasser die (vollkommen geläuterte) Überzeugung (desgleichen er auch von jedem einsichtsvollen Leser erwartet), daß durch Aufklärung des Gegenstandes Einer der allerwichtigsten und allerglänzendsten Beiträge zur wahren Bereicherung der Wissenschaft, zur Bildung des Verstandes und somit zur Hebung des menschlichen Schicksals gemacht wurde.“ (Zit. nach [L 13.31], S. 65)

Indessen erfüllten sich die Hoffnungen von Janos Bolyai nicht. Seine Arbeit konnte sich nicht durchsetzen, teils wegen des schwierigen Gegenstandes, wohl aber auch wegen der zu knappen, sogar stellenweise ungeschickten Darstellungsweise. Und obwohl Gauß gegenüber dem Vater und anderen Janos lobte und ihn als „Genie erster Größe“ bezeichnete, so nahm Gauß doch — zur Verbitterung von Janos — nirgends öffentlich für den jungen Geometer Partei. Erst im nachhinein konnte Janos Bolyai die verdiente Anerkennung zuteil werden.

N. I. Lobačevskij und die nichteuklidische Geometrie

Ähnlich erging es Lobačevskij hinsichtlich seiner Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie. Er tat den mutigen Schritt der Bekanntgabe der ganz unkonventionellen geometrischen Ergebnisse als erster. Bereits im Februar 1826 trug er an der mathematisch-physikalischen Abteilung der Universität Kasan über nichteuklidische Geometrie vor. Diese Ergebnisse erschienen aber erst 1829/30 in einer Kasaner Zeitschrift und brachten ihm überdies — ganz wie es Gauß für sich vorausgesehen hatte — in Konflikt mit Anhängern der reaktionären, idealistischen Philosophie. Dennoch ließ Lobačevskij, hochverdient um die Entwicklung der Kasaner Universität, nicht nach in seinen Bemühungen, seinen Ideen zur Anerkennung zu verhelfen. Im Jahre 1835 folgte eine neue Darstellung der nichteuklidischen Geometrie unter dem Titel „Imaginäre Geometrie“. Diese Arbeit erschien 1837, ins Französische übersetzt, in der berühmten deutschen mathematischen Zeitschrift „Crelles Journal“, wiederum ohne spürbare Resonanz. Ähnlich erging es Teilarbeiten, die 1835–38 in Kasan erschienen.

Und schließlich vermochte Lobačevskij auch mit einer deutschsprachigen Arbeit „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien“ (1840) nicht die erhoffte Anerkennung zu erringen. Der Gegenstand selbst war noch immer umstritten; nach der Vorgeschichte galt die Beschäftigung mit der Parallelentheorie geradezu als

verdächtig, ähnlich fast wie die Behauptung, die Quadratur des Kreises gelöst zu haben.

Gauß dürfte die Arbeiten von Lobačevskij erst um 1837 kennengelernt haben. Die 1840 gedruckte Arbeit lobte Gauß gegenüber Schumacher sehr, als geschrieben „auf eine meisterhafte Art in ächt geometrischem Geiste“; übrigens wurde Lobačevskij 1842 auf Vorschlag von Gauß zum korrespondierenden Mitglied der Göttinger Societät der Wissenschaften gewählt.

In der Schrift von Lobačevskij aus dem Jahre 1840 heißt es:

„In der Geometrie fand ich einige Unvollkommenheiten, welche ich für den Grund halte, warum diese Wissenschaft, so lange sie nicht in die Analysis übergeht, bis jetzt keinen Schritt vorwärts thun konnte aus demjenigen Zustande, in welchem sie uns von Euclid überkommen ist. Zu den Unvollkommenheiten rechne ich die Dunkelheit in den ersten Begriffen von den geometrischen Größen, in der Art und Weise wie man sich die Ausmessung dieser Größen vorstellt, und endlich die wichtige Lücke in der Theorie der Parallelen, welche auszufüllen, alle Anstrengungen der Mathematiker bis jetzt vergeblich waren ... Die erste Voraussetzung (in allen geradlinigen Dreiecken ist die Summe der Winkel gleich 180° , Wg) dient als Grundlage der gewöhnlichen Geometrie und der ebenen Trigonometrie. Die zweite Voraussetzung (Winkelsumme $< 180^\circ$, Wg) kann ebenfalls zugelassen werden, ohne auf irgendeinen Widerspruch in den Resultaten zu führen, und begründet eine neue geometrische Lehre, welcher ich den Namen: Imaginäre Geometrie gegeben habe, und welche ich hier darzustellen beabsichtige bis zur Entwicklung der Gleichungen zwischen den Seiten und Winkeln der geradlinigen und sphärischen Dreiecke.“ (zit nach [L 13.31], S. 73/74)

Und schließlich geht Lobačevskij sogar noch auf die Frage ein, wie weit die gewöhnliche (d. i. Euklidische) Geometrie die Struktur des Raumes beschreibt. Er beantwortet sie im Sinne der materialistischen Erkenntnistheorie:

„Demnach gibt es kein anderes Mittel als die astronomischen Beobachtungen zu Hülfe zu nehmen, um über die Genauigkeit zu urtheilen, welche den Berechnungen der gewöhnlichen Geometrie zukommen. Diese Genauigkeit erstreckt sich, wie ich in einer meiner Abhandlungen gezeigt habe, sehr weit, so daß z. B. in Dreiecken, deren Seiten für unsere Ausmessungen zugänglich sind, die Summe der drei Winkel noch nicht um den hundertsten Theil einer Secunde von zwei Rechten verschieden ist.“ (zit. nach [L 13.31], S. 74)

Der Beitrag von B. Riemann zur Grundlegung der Geometrie

Die nichteuklidischen Geometrien, wie sie von Gauß, Lobačevskij und J. Bolyai bis zu einem gewissen Grade bereits durchgebildet worden waren, waren — wie wir sie heute nennen — hyperbolische Geometrien. Durch Riemann wurde der Weg frei für den anderen Typ der nichteuklidischen, der elliptischen Geometrie. Riemann nämlich warf das Problem „Raum“ im allgemeinsten Sinne auf, durch die analytische Betrachtung einer beliebigen n -dimensionalen Mannigfaltigkeit; dies — insbesondere die Beschreibung der Maßverhältnisse durch Differentialformen — sind Überlegungen, die später in den analytischen Apparat der Relativitätstheorie eingeflossen sind.

Riemanns Habilitationsvortrag „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“ (1854) (Anm. 13.2) gehört wegen seiner Klarheit und tiefen Ge-

dankenführung zu den hervorragendsten Bausteinen in der Entwicklungsgeschichte der Mathematik. Dort heißt es:

„Bekanntlich setzt die Geometrie sowohl den Begriff des Raumes, als die ersten Grundbegriffe für die Constructionen im Raume als etwas Gegebenes voraus. Sie giebt von ihnen nur Nominaldefinitionen, während die wesentlichen Bestimmungen in Form von Axiomen auftreten. Das Verhältniss dieser Voraussetzungen bleibt dabei im Dunkeln; man sieht weder ein, ob und in wie weit ihre Verbindung nothwendig, noch a priori, ob sie möglich ist.

Diese Dunkelheit wurde auch von Euklid bis auf Legendre, um den berühmtesten neueren Bearbeiter der Geometrie zu nennen, weder von den Mathematikern, noch von den Philosophen, welche sich damit beschäftigen, gehoben. Es hatte dies seinen Grund wohl darin, dass der allgemeine Begriff mehrfach ausgedehnter Grössen, unter welchen die Raumgrössen enthalten sind, ganz unbearbeitet blieb. Ich habe mir daher zunächst die Aufgabe gestellt, den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Grösse aus allgemeinen Grössenbegriffen zu konstruiren. Es wird daraus hervorgehen, dass eine mehrfach ausgedehnte Grösse verschiedener Massverhältnisse fähig ist und der Raum also nur einen besonderen Fall einer dreifach ausgedehnten Grösse bildet. Hiervon ist aber eine nothwendige Folge, dass die Sätze der Geometrie sich nicht aus allgemeinen Grössenbegriffen ableiten lassen, sondern dass diejenigen Eigenschaften, durch welche sich der Raum von anderen denkbaren dreifach ausgedehnten Grössen unterscheidet, nur aus der Erfahrung entnommen werden können. Hieraus entsteht die Aufgabe, die einfachsten Thatssachen aufzusuchen, aus denen sich die Massverhältnisse des Raumes bestimmen lassen — eine Aufgabe, die der Natur der Sache nach nicht völlig bestimmt ist; denn es lassen sich mehrere Systeme einfacher Thatssachen angeben, welche zur Bestimmung der Massverhältnisse des Raumes hinreichen; am wichtigsten ist für den gegenwärtigen Zweck das von Euklid zu Grunde gelegte. Diese Thatssachen sind wie alle Thatssachen nicht notwendig, sondern nur von empirischer Gewissheit, sie sind Hypothesen; man kann also ihre Wahrscheinlichkeit, welche innerhalb der Grenzen der Beobachtung allerdings sehr gross ist, untersuchen und hienach über die Zulässigkeit ihrer Ausdehnung jenseits der Grenzen der Beobachtung, sowohl nach der Seite des Unmessbaregrossen als nach der Seite des Unmessbarkeinen urtheilen.“ [L 13.33], S. 272/273)

Die Anerkennung nichteuklidischer Geometrien

Die Anerkennung der nichteuklidischen Geometrie erfolgte nur langsam. Mit der Veröffentlichung des Briefwechsels von Gauß erwies sich, daß der „*Princeps mathematicorum*“ von der Möglichkeit nichteuklidischer Geometrien überzeugt gewesen war. Seiner Autorität folgend befaßte man sich nun ernsthaft mit Lobačevskij und Bolyai und mit dem Zusammenhang zu Riemanns Vorstoß. Aus den Unterlagen konnte man sogar schließen, daß Gauß, Lobačevskij und Bolyai von der inneren Widerspruchsfreiheit nichteuklidischer Geometrien überzeugt gewesen waren; ein Beweis aber fehlte. Er war gefunden, als es gelang, Modelle nichteuklidischer Geometrien aufzustellen.

Im Jahre 1868 konnte der Italiener Beltrami zeigen, daß auf Flächen konstanter negativer Krümmung die Gesetze der nichteuklidischen Geometrie gelten, und 1871 gab Klein (im Anschluß an Cayley und dessen projektive Maßbestimmung) ein ebenes Modell der nichteuklidischen Geometrie an. Ein weiteres Modell stammt von Poincaré.

Das Kleinsche Modell sieht folgendermaßen aus: Für „Ebene“ steht das Innere einer Ellipse, für „Gerade“ jeder im Inneren der Ellipse liegende Sehnenabschnitt,

für „Punkt“ jeder Punkt im Innern der Ellipse (Abb. 13.2). Ist in der Ellipse eine Gerade g mit den „Endpunkten“ A und B (die selbst nicht zu den Punkten des Modells gehören) und ein Punkt P außerhalb von g gegeben, dann gibt es durch P zu g beliebig viele „Parallelen“, nämlich alle Geraden, die nicht in den Winkel-

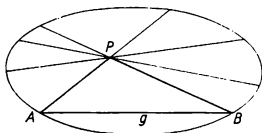


Abb. 13.2. Zu Kleins ebenem Modell der nichteuklidischen Geometrie, projektive Maßbestimmung

raum des Winkels APB hineinreichen. Bei Klein heißt es in der Arbeit „Über die sogenannte Nichteuklidische Geometrie (Vorläufige Mitteilung)“:

„Das Bedürfnis, die sehr abstrakten Spekulationen, welche zur Aufstellung der dreierlei Geometrien (der euklidischen und der beiden nichteuklidischen, Wg) geführt haben, zu versinnlichen, hat dahin geführt, Beispiele von Maßbestimmungen aufzusuchen, die als Bilder der genannten Geometrien aufgefaßt werden könnten, und damit zugleich die innere Folgerichtigkeit jeder einzelnen in Evidenz setzten ...

Die fraglichen Bilder betrachten als Objekt der Maßbestimmung die Ebene resp. den Raum selbst und benutzen nur eine andere Maßbestimmung als die gewöhnliche, welche, im Sinne der projektivischen Geometrie, als eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Maßbestimmung erscheint.“ ([L 13.22], Bd. I, S. 246/247)

Von Klein stammen auch die Bezeichnungen elliptische, parabolische (d. i. euklidische) und hyperbolische Geometrie. Bezüglich der Existenz der Parallelen gelten dann die Aussagen:

elliptische Geometrie:	keine Parallele,
euklidische Geometrie:	genau eine Parallele,
hyperbolische Geometrie:	beliebig viele Parallelen.

Als Modell einer elliptischen Geometrie hat man etwa die Geometrie auf der Fläche einer reellen Kugel, wenn man „Ebene“ durch Kugeloberfläche, „Gerade“ durch Großkreis auf der Kugeloberfläche und „Punkt“ durch ein paar diametral gegenüberliegender Punkte interpretiert.

Mit Kleins Modell der hyperbolischen nichteuklidischen Geometrie hatte sich 16 Jahre nach dem Tode von Gauß die nichteuklidische Geometrie im Kreise der fortgeschrittenen Mathematiker überzeugend ihre mathematische Existenz erobern können; freilich hielten verworrene Diskussionen, u. a. in Philosophenkreisen und unter Laien, noch weit bis ins 20. Jh. hinein an.

Zur Entwicklungsgeschichte der projektiven Geometrie

Die Ansätze der projektiven Geometrie reichen bis in die Antike zurück (Anm. 13.3) und erfuhren im 17. Jh. eine Neubelebung. Es seien nur Pascal und der französische Baumeister und Geometer Desargues genannt; er formulierte den Satz, daß die

Schnittpunkte der drei Seiten zweier in einer Ebene perspektiv gelegener Dreiecke auf einer Geraden liegen (Abb. 13.3).

Indessen ging der entscheidende Impuls für die Herausbildung der projektiven Geometrie zur selbständigen Disziplin von der darstellenden Geometrie aus. Dort war es üblich geworden, zwischen metrischen und „deskriptiven“ Eigenschaften zu unterscheiden; unter letzteren verstand man solche der Lage, d. h. der Inzidenz, welche bei (Orthogonal-) Projektion erhalten bleiben.

Die weitere Entwicklung wurde von direkten Monge-Schülern getragen: Carnot hob in seinen Schriften (1801), (1803) die Forderung hervor, eine ausschließlich auf das Projizieren beschränkte Geometrie aufzubauen. Dies gelang Poncelet, der mit seinem „*Traité des propriétés projectives des figures*“ (1822) bereits eine zusammenhängende Darstellung der projektiven Geometrie schuf.

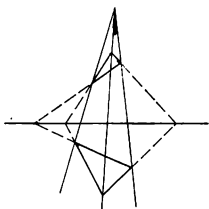


Abb. 13.3. Satz von Desargues. Ein frühes Beispiel eines Satzes der projektiven Geometrie

Poncelet stellte den allgemeinen Begriff der Zentralprojektion an die Spitze und traf die grundsätzliche Unterscheidung zwischen „projektiven“ und „nichtprojektiven“ Eigenschaften von Figuren, d. h. solchen Eigenschaften, die bei Zentralprojektion stets erhalten bleiben bzw. im allgemeinen zerstört werden. Poncelet erkannte die Bedeutung des Dualitätsprinzips und gab sogar die allgemeine metrische Funktion projektiven Charakters an, aus der z. B. die projektive Invarianz des Doppelverhältnisses von vier Punkten auf einer Geraden folgt.

Neben der französischen Schule um Gergonne machten sich insbesondere vier Mathematiker in Deutschland um Durchbildung und Weiterentwicklung der projektiven Geometrie verdient, der aus der Schweiz stammende Steiner, v. Staudt, Möbius und Plücker, wenn auch mit unterschiedlichen Vorstellungen. Während die beiden ersten als Angehörige der synthetischen Geometrie auf den Gebrauch rechnerischer Methoden verzichteten, trugen Möbius und Plücker zum Ausbau der analytischen Geometrie bei und führten u. a. homogene Koordinaten und Linienkoordinaten in die Mathematik ein. (Übrigens kam es zwischen den beiden verschiedenen Schulen der projektiven Geometrie zu wütend ausgetragenen Streitigkeiten.)

Poncelet, Möbius und Steiner hatten zum Aufbau der projektiven Geometrie noch metrische Betrachtungen herangezogen; noch immer beruhte das für die Definition projektiver Koordinaten entscheidende Doppelverhältnis auf einer metrischen Begriffsbestimmung. Erst v. Staudt schloß mit der „Geometrie der Lage“ (1847) und

nachfolgenden „Beiträgen“ diese Lücke. Und schließlich beseitigte Klein 1871 die letzte Inkonsistenz, indem er die auf dem (metriekfreien) Doppelverhältnis beruhende Definition der projektiven Koordinaten metriekfrei angab.

Das Erlanger Programm

Das Ergebnis der Entwicklung im Gebiet der Geometrie bestand bald nach der Mitte des Jahrhunderts in der Aufhebung der bis dahin scheinbar unabdingbaren Kopplung von Geometrie und Metrik, in der Herausbildung der nichteuklidischen Geometrie, in einer Erweiterung des traditionellen kartesischen Koordinatenbegriffs und in einer Wendung zum Abstrakten durch den Übergang zur beliebig hohen (aber endlichen) Dimension.

Alles in allem bot sich den Geometern der ersten Hälfte des 19. Jh. das Bild einer sich stürmisch entwickelnden Geometrie, wobei die ehemals vorhandene innere Geschlossenheit der Geometrie mehr und mehr zerfiel. Um die Mitte des Jahrhunderts herrschte eine gewisse Ratlosigkeit über den inneren Zusammenhang der einzelnen „Geometrien“ und „geometrischen Methoden“.

Die Lösung der entstandenen Divergenz brachte das sog. „Erlanger Programm“, eine Klassifizierung der Geometrie mit gruppentheoretischen Methoden, dessen Grundideen von Lie und Klein stammen und das Klein schließlich ausarbeitete. Der Name „Erlanger Programm“ stammt daher, daß Klein 1872 bei seinem Eintritt als Universitätsprofessor in die philosophische Fakultät der Universität Erlangen gemäß dortiger Tradition einen programmartig angelegten Vortrag zu halten verpflichtet war; der originale Titel lautete „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen“.

Kleins Absichten zielten erklärtermaßen auf die Wiederherstellung der Einheit der Geometrie ab; dies wurde zum Motiv der Ausarbeitung des „Erlanger Programms“:

„Mein Interesse war schon von meiner Bonner Zeit (Studienzeit bei Plücker, 1865–1868, Wg), her darauf gerichtet, im Widerstreite der sich befehdenden mathematischen Schulen das gegenseitige Verhältnis der nebeneinander herlaufenden, äußerlich einander unähnlicher und doch in ihrem Wesen nach verwandter Arbeitsrichtungen zu verstehen und ihre Gegensätze durch eine einheitliche Gesamtauffassung zu umspannen. Innerhalb der Geometrie gab es in dieser Hinsicht noch viel für mich zu tun.“ ([L 13.22], Bd. 1, S. 52)

Erst nach 1872 hat Klein bei historischen Studien bemerkt, daß die von ihm selbst geleistete gruppentheoretische Klassifizierung der Geometrie vor ihm bereits in Angriff genommen worden war, und zwar durch den Leipziger Mathematiker Möbius, freilich in impliziter Form. Dieser hatte in dem 1827 erschienenen Buch „Der barycentrische Calcul...“ – das übrigens eine hervorragende Rolle bei der Weiterentwicklung der analytischen Geometrie spielte – „geometrische Verwandtschaften zweier Figuren“, wie er sich ausdrückte, systematisch untersucht und sich so um die Einheit der Geometrie bemüht. In der Vorrede zählt Möbius folgende geometrische Verwandtschaften auf: Gleichheit, Ähnlichkeit, Affinität und Kollineation, und er stellt ihr gegenseitiges Verhältnis klar: Gleichheit und Ähnlichkeit, so sagt er, unter-

scheiden sich nicht wesentlich — diese Feststellung entspricht den Eigenschaften der sog. Hauptgruppe des „Erlanger Programms“.

Allgemeiner sind die Affinitäten, welche speziell die Ähnlichkeiten und Gleichheiten in sich enthalten — dies entspricht dem gegenseitigen Verhältnis von affiner Gruppe zur äquiformen (oder Haupt-) Gruppe. Noch allgemeiner schließlich sind die Verwandtschaften der Kollineation; auch hier nimmt Möbius die Enthaltensaussage der affinen Geometrie in der projektiven Geometrie vorweg. Man sieht, wie erstaunlich weit Möbius auf dem Wege zum „Erlanger Programm“ vorangeschritten war, mittels eines systematischen Studiums geometrischer Verwandtschaften,

„einer Lehre, welche in dem hier gebrauchten Sinne die Grundlage der ganzen Geometrie in sich fasst, die aber auch eine der schwierigsten sein möchte, wenn sie in voller Allgemeinheit und erschöpfend vorgetragen werden soll“. ([L 13.26], Bd. 1, S. 9)

Die Leistung von Möbius ist um so erstaunlicher, als damals, 1827, die Gruppentheorie überhaupt noch nicht konstituiert war. Klein dagegen lernte sie um 1870 kennen und sah bald deren Möglichkeit für die angestrebte Klassifizierung der Geometrie, nachdem er es vorher auf invariantentheoretischer Grundlage versucht hatte.

Klein geht im „Erlanger Programm“ von der Definition der Gruppe als einem „System in sich geschlossener Transformationen“ aus; dann wird der Begriff der Hauptgruppe erläutert:

„Die Geometrie kann sich ... überhaupt nur mit solchen Eigenschaften der räumlichen Gebilde befassen, welche unabhängig sind von der Stelle im Raum, die von den Gebilden eingenommen wird, sowie von der absoluten Größe der Gebilde. Auch kann sie nicht (immer ohne Zuhilfenahme eines dritten Körpers) zwischen den Eigenschaften eines Körpers und denen seines Spiegelbildes unterscheiden. Durch diese Sätze ist eine Gruppe räumlicher Transformationen charakterisiert — sie mag die Hauptgruppe genannt werden —, deren Transformationen die Gesamtheit der geometrischen Eigenschaften eines Gebildes unberührt lassen.“ ([L 13.22], Bd. I, S. 318)

Der Gruppenbegriff erweist sich als eine Art Zauberstab, um Ordnung, in der Geometrie zu schaffen. Jeder „Geometrie“ wird eine Gruppe „adjungiert“, wie sich Klein ausdrückt:

„Nur ist nicht mehr ... eine Gruppe vor den übrigen durch ihre Bedeutung ausgezeichnet; jede Gruppe ist mit jeder anderen gleichberechtigt. Als Verallgemeinerung der Geometrie entsteht so das folgende umfassende Problem:

Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden.“ ([L 13.22], Bd. I, S. 463)

„Ersetzt man die Hauptgruppe durch eine umfassendere Gruppe, so bleibt nur ein Teil der geometrischen Eigenschaften erhalten In diesem Satz beruht die Eigenart der hier zu besprechenden neueren geometrischen Richtungen und ihr Verhältnis zur elementaren Methode. Sie sind dadurch eben zu charakterisieren, daß sie an Stelle der Hauptgruppe eine erweiterte Gruppe räumlicher Umformungen zugrunde legen. Ihr gegenseitiges Verhältnis ist, sofern sich ihre Gruppen einschließen, durch einen entsprechenden Satz bestimmt. Dasselbe gilt von den verschiedenen hier zu betrachtenden Behandlungsweisen mehrfach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten.“ ([L 13.22], Bd. I, S. 465/466)

Damit ist die gruppentheoretische Untersuchungsmethode dargelegt: Dem Übergang zu einer umfassenderen Gruppe entspricht also der Übergang zu einer „ärmeren“ Geometrie. Durch Einschränkung der Transformationsgruppe gehen alle (klassischen) Geometrien aus der projektiven Geometrie hervor. Diese Zusammenhänge pflegen wir heute (für die klassischen euklidischen Geometrien) in Form des folgenden Schemas zu verdeutlichen:

	äquiforme Gruppe	affine Gruppe	projektive Gruppe
Lage	zerstört	zerstört	zerstört
Größe	zerstört	zerstört	zerstört
Orthogonalität	erhalten	zerstört	zerstört
Parallelität	erhalten	erhalten	zerstört
Inzidenz	erhalten	erhalten	erhalten
	äquiforme Geometrie	affine Geometrie	projektive Geometrie

Die Wirkung des „Erlanger Programms“

Die mit dem „Erlanger Programm“ vollzogene gruppentheoretische Klassifizierung bedeutete – wenigstens aus historischer Sicht – eine echte Zäsur für die Entwicklung der Geometrie (Anm. 13.4), zugleich aber auch wegen der zutage tretenden fusionierenden Kraft des Gruppenbegriffes einen Einschnitt bei den gegen Ende des 19. Jh. sich entwickelnden Ansätzen strukturellen mathematischen Denkens.

Das „Erlanger Programm“ hat dazu beigetragen, die Tragweite axiomatisch fixierter Voraussetzungen in der Geometrie aufzudecken. Obwohl Klein an diesem Prozeß keinen Anteil genommen hat – er stand der modernen mengentheoretisch begründeten und axiomatisch aufgebauten Mathematik, wie sie sich zu Beginn des 20. Jh. herauszubilden begann, sogar ziemlich skeptisch gegenüber –, ist er doch zum Initiator der strengen Auffassung in der Geometrie geworden, die in Deutschland mit Pasch einsetzte und dann von Hilbert führend vertreten wurde.

Axiomatisierung der Geometrie durch D. Hilbert

Bereits bei Lambert und bei Lobačevskij finden sich Bemerkungen, daß die Grundlegung der Geometrie auch eine Neubestimmung ihrer Grundbegriffe nötig mache. Diese Forderung ging parallel mit ähnlichen Überlegungen in anderen Gebieten der Mathematik, z. B. der Analysis und zugleich zeitlich parallel mit dem Hervortreten der mathematischen Logik am Ende des 19. Jh.

Es scheint, daß der deutsche Mathematiker Pasch als erster einen Versuch unter-

nommen hat, den Forderungen nach einem in diesem modernen Sinne strengen Aufbau der Geometrie nachzukommen. Für die projektive Geometrie der Ebene wurde diese Absicht in dem Buch „Vorlesungen über neuere Geometrie der Ebene“ (1882) in Angriff genommen. Die folgende Passage verweist darauf, daß Pasch die Mathematik und speziell die Geometrie historisch-erkenntnistheoretisch als durch Abstraktion von der objektiven Realität entstanden auffaßt und dabei gerade im Interesse des wissenschaftlichen Fortschrittes betonte, daß Mathematik und speziell Geometrie bei ihrem axiomatischen Aufbau nicht mehr auf Anschauung und Versinnlichung zurückgreifen dürfen (Anm. 13.5):

„Die Mathematik stellt Relationen zwischen den mathematischen Begriffen auf, welche den Erfahrungsthatfachen entsprechen sollen, aber weitaus in ihrer Mehrzahl der Erfahrung nicht unmittelbar entlehnt, sondern „bewiesen“ werden; die (ausser den Definitionen der abgeleiteten Begriffe) zur Beweisführung nothwendigen Erkenntnisse bilden selbst einen Theil der aufzustellenden Relationen. Nach Ausscheidung der auf Beweisen gestützten Sätze, der Lehrsätze, bleibt eine Gruppe von Sätzen zurück, aus denen alle übrigen sich folgern lassen, die Grundsätze; diese sind unmittelbar auf Beobachtungen gegründet, freilich auf Beobachtungen, welche seit undenklichen Zeiten sich unaufhörlich wiederholt haben, welche klarer erfasst werden, als die irgendeiner anderen Art, und mit denen die Menschen deshalb längst so vertraut geworden sind, daß ihr Ursprung in Vergangenheit gerathen und Gegenstand des Streites werden konnte.

Die Grundsätze sollen das von der Mathematik zu verarbeitende empirische Material vollständig umfassen, so das man nach ihrer Aufstellung auf die Sinneswahrnehmung nicht mehr zurückzugehen braucht. ... ([L 13.27], S. 17)

Es muss in der That, wenn anders die Geometrie wirklich deductiv sein soll, der Prozess des Folgerns überall unabhängig sein vom Sinn der geometrischen Begriffe, wie er unabhängig sein muss von den Figuren; nur die in den benutzten Sätzen, beziehungsweise Definitionen niedergelegten Beziehungen zwischen den geometrischen Begriffen dürfen in Betracht kommen.“ ([L 13.27], S. 98)

Damit gehört Pasch zu den großen Wegbereitern der modernen Geometrie. Offensichtlich ist bei ihm ein Grundgedanke bereits klar ausgesprochen, den Hilbert bald darauf zur Maxime seiner Methode gemacht hatte.

Hilbert verzichtete bewußt auf eine Definition der Grundbegriffe der Geometrie wie Punkt, Gerade, Ebene; stattdessen treten Beziehungen zwischen nicht näher definierten Elementen in den Vordergrund. Diese Beziehungen werden axiomatisch festgelegt.

In der entscheidenden Arbeit von Hilbert, den „Grundlagen der Geometrie“ von 1899, einer Festschrift übrigens aus Anlaß der Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmals in Göttingen, heißt es:

„Erklärung. Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems nennen wir Punkte und bezeichnen sie mit $A, B, C, \dots$; die Dinge des zweiten Systems nennen wir Geraden und bezeichnen sie mit $a, b, c, \dots$; die Dinge des dritten Systems nennen wir Ebenen und bezeichnen sie mit $\alpha, \beta, \gamma, \dots$; die Punkte heißen auch die Elemente der linearen Geometrie, die Punkte und Geraden heißen die Elemente der ebenen Geometrie und die Punkte, Geraden und Ebenen heißen die Elemente der räumlichen Geometrie oder des Raumes. Wir denken die Punkte, Geraden und Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie ‚liegen‘, ‚zwischen‘, ‚parallel‘, ‚kongruent‘, ‚stetig‘; die genaue und vollständige Beschreibung erfolgt durch die Axiome der Geometrie.“ ([L 13.16], S. 2)

Hier tritt die formalistische Auffassung Hilberts sehr klar zutage; die Verknüpfungen entscheiden, die „Elemente“ selbst bleiben undefiniert und werden nur mit Rücksicht auf Tradition und Gewohnheit mit Worten belegt, die dem Sprachgebrauch der Geometrie entstammen. Hilbert hat, im Scherz zwar, aber doch völlig im Ernst bezüglich seines Anliegens erklärt:

„Wenn ich unter meinen Punkten irgendwelche Systeme von Dingen, z. B. das System Liebe, Gesetz, Schornsteinfeger ... denke und dann nur meine sämtlichen Axiome als Beziehungen zwischen diesen Dingen annehme, so gelten meine Sätze, z. B. der Pythagoras, auch von diesen Dingen.“ Oder noch drastischer: „Man muß jederzeit an Stelle von ‚Punkten‘, ‚Geraden‘, ‚Ebenen‘, ‚Tische‘, ‚Stühle‘, ‚Bierseidel‘ sagen können.“ ([L 13.2], S. 403)

Von Hilbert stammt auch die Einteilung der Axiome nach fünf Axiomgruppen:

- I. Acht Axiome der Verknüpfung,
- II. Vier Axiome der Anordnung,
- III. Fünf Axiome der Kongruenz,
- IV. Das Axiom der Parallelen,
- V. Zwei Axiome der Stetigkeit.

Der von Hilbert gebahnte Weg erwies sich von großer Tragweite, sowohl für die Geometrie selbst als auch für den Fortschritt der Mathematik in methodischer Hinsicht.

In der Folgezeit sind andere, modifizierte Axiomensysteme zum Aufbau der Geometrie vorgeschlagen und zur Grundlage von Lehrbuchdarstellungen gemacht worden; damit wurde ein weites Feld geometrischer Grundlagenforschung eröffnet, das auch heute noch viele interessante Fragestellungen enthält, die wiederum interessant sind für methodische Überlegungen, z. B. im Schulunterricht (Anm. 13.6).

Die moderne Auffassung von Axiomatisierung

Hilbert hat diese Gelegenheit auch benutzt, um herauszuarbeiten, welche Forderungen an ein Axiomensystem — zum Aufbau irgendeiner mathematischen Theorie — zu stellen sind.

Das Axiomensystem muß erstens widerspruchsfrei sein. Für die Geometrie löste Hilbert dieses Problem, indem er das Prinzip der Schaffung eines Modells betonte und die Axiome der Geometrie auf die Arithmetik zurückführte, von denen er voraussetzte (was bis heute noch nicht vollständig bewiesen ist), daß diese widerspruchsfrei seien.

Das Axiomensystem soll zweitens vollständig sein. Es soll also in einem gewissen Sinne genügend umfangreich sein, so, daß der Inhalt der dadurch begründeten Theorie im wesentlichen eindeutig festgelegt ist. Dies gilt z. B. für die Hilbertschen Axiome der Geometrie.

Die Axiome sollten ferner aber auch voneinander unabhängig sein. Ist das nicht der Fall, dann besitzt das Axiomensystem eine Art Schönheitsfehler; dieser ist allenfalls noch hinzunehmen, wenn man sich über die jeweiligen Abhängigkeitsbeziehungen genau im klaren ist. Die Hilbertschen Axiome garantieren den Aufbau der (ebenen)

euklidischen Geometrie. Der Nachweis, daß nichteuklidische Geometrien möglich sind und daß Modelle dafür existieren, zeigt, daß das Parallelenaxiom von den anderen Axiomen der euklidischen Geometrie unabhängig ist.

Zu Beginn des 20. Jh. zeigte sich, daß man wesentliche Teile der euklidischen bzw. nichteuklidischen Geometrie auch unabhängig von Stetigkeitsaussagen aufbauen kann; deren Unabhängigkeit war bereits von Hilbert erkannt worden.

Mit Hilbert erfuhr der von Euklid einst beschrittene Weg der Axiomatisierung der Geometrie seine Vollendung. Die geometrischen Grundbegriffe werden nur noch implizit, d. h. durch die zwischen ihnen geltenden Beziehungen definiert. Der Verzicht auf den Versuch einer expliziten Definition, die Untersuchung der Reichweite der einzelnen Axiome bzw. Axiomengruppen und die Zurückführung des Beweises der Widerspruchsfreiheit von Geometrien auf die Arithmetik verschob das Problem der Grundlegung der Geometrie in den Bereich der Grundlegung der Arithmetik und schloß damit die Geometrie an die allgemeinen erkenntnistheoretischen Fragen der Grundlagen der Mathematik an, wie sie zu Beginn des 20. Jh. diskutiert wurden. Zugleich erfuhren die erkenntnistheoretisch-mathematischen Forderungen an ein Axiomensystem erweiterte und verschärfende Präzisierungen.

Entstehung und Entwicklung der Mengenlehre

Die Vokabel „unendlich“ tritt seit altersher in der Geschichte der Mathematik auf. Doch erst nach Überwindung bedeutender gedanklich-begrifflicher Schwierigkeiten war es zu Anfang des 19. Jh. gelungen, den exakten Grenzwertbegriff herauszuarbeiten. Dem Gebrauch des Unendlichen lag die Vorstellung von einem Prozeß zugrunde, der in beliebig vielen, sozusagen unendlich vielen, Schritten zur Annäherung an einen endlichen Wert führt. Das Unendliche existiert, um die Sprechweise von Aristoteles zu gebrauchen, nur als potentes Unendlich. Zwar gibt es zu jeder Zahl noch eine größere, aber das Unendliche kann nicht wirklich erreicht werden. Analoges gilt auch für das Unendlich-Kleine, für einen bis ins Unendliche fortzusetzenden Teilungsprozeß.

Diese Auffassung war allgemeine Auffassung der Mathematiker bis zur Mitte des 19. Jh. Gauß hatte sie in die Worte gekleidet:

„... so protestire ich ... gegen den Gebrauch einer unendlichen Grösse als einer Vollendeten, welcher in der Mathematik niemals erlaubt ist. Das Unendliche ist nur eine façon de parler (Sprechweise, Wg), indem man eigentlich von Grenzen spricht, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen als man will, während andern ohne Einschränkung zu wachsen verstattet ist.“ (L 13.11), Bd. VIII, S. 216)

Gegen die Autorität von Gauß mußte diejenige Wissenschaft sich durchsetzen, die sich mit dem „Aktual-Unendlichen“ beschäftigte. Allerdings sind in neuerer Zeit berechtigte Zweifel daran geäußert worden, ob man Gauß hier zu Recht so weitgehend interpretiert (Waterhouse, W. C.: Gauss and infinity. In: *Historia mathematica*, 6, 1979, p. 430–436).

Aus der Frühgeschichte der Mengenlehre

In der Antike verwies Proclus Diadochos auf das folgende Paradoxon: Die Kreisfläche wird vom Durchmesser in zwei gleiche Teile geteilt. Der unendlich großen Zahl möglicher Durchmesser entspricht also quasi eine doppelt unendlich große Anzahl von Halbkreisflächen.

Ähnliche Paradoxa über das Unendliche finden sich in mittelalterlichen Texten, gelegentlich in theologischer Einkleidung, aber auch in Form mathematischer Beispiele. Bei konzentrischen Kreisen etwa lassen sich die Punkte der Peripherie eindeutig den Radien zuordnen, und doch hat der größere Kreis „mehr“ Peripheriepunkte als der kleinere Kreis.

Ein besonders schönes Beispiel der Behandlung des Aktual-Unendlichen stammt von Galilei aus den „Discorsi“ (1638); nach heutiger Terminologie stellte er eine eindeutige Zuordnung zwischen den natürlichen Zahlen und ihren Quadraten her und bemerkte dazu, daß die Menge der natürlichen Zahlen einer ihrer echten Teilmengen „gleichzusetzen“ (wir würden sagen: „gleichmächtig“) ist.

Am weitesten, vor Cantor, gelangte Bolzano auf dem Wege zur eigentlichen Mengenlehre. In seiner aus dem Nachlaß herausgegebenen Schrift „Paradoxien des Unendlichen“ (1851), deren Bedeutung insbesondere Cantor selbst würdigend hervorgehoben hat, stieß Bolzano zur klaren Einsicht in einen Sachverhalt vor, den wir heute mit dem Begriff Gleichmächtigkeit von Mengen so beschreiben, daß unendliche Mengen gleichmächtig sind, obwohl die eine Menge als echte Teilmenge in der anderen enthalten ist.

„Schon bei den bisher betrachteten Beispielen des Unendlichen konnte uns nicht entgehen, dass nicht alle unendlichen Mengen in Hinsicht auf ihre Vielheit ein(an)der gleich zu achten seien; sondern dass manche derselben grösser (oder kleiner) als eine andere sei, d. h. die andere als einen Theil in sich schliesse (oder im Gegentheile sich selbst in der andern als bloßer Theil befinde). Auch dieses ist eine Behauptung, die Vielen paradox klingt ...“ ([L 13.3], S. 27)

„Übergehen wir nun zur Betrachtung einer höchst merkwürdigen Eigenheit, die in dem Verhältnisse zweier Mengen, wenn beide unendlich sind, vorkommen kann, ja eigentlich immer vorkommt, die man aber bisher zum Nachtheil für die Erkenntniss mancher wichtigen Wahrheiten der Metaphysik sowohl als Physik und Mathematik übersehen hat, und die man wohl auch jetzt, indem ich sie aussprechen werde, in einem solchen Grade paradox finden wird, dass es sehr nöthig sein dürfte, bei ihrer Betrachtung uns etwas länger zu verweilen. Ich behaupte nämlich: zwei Mengen, die beide unendlich sind, können in einem solchen Verhältnisse zueinander stehen, daß es einerseits möglich ist, jedes der einen Menge gehörige Ding mit einem der anderen zu einem Paare zu verbinden mit dem Erfolg, dass kein einziges Ding in beiden Mengen ohne Verbindung zu einem Paare bleibt, und auch kein einziges in zwei oder mehreren Paaren vorkommt; und dabei ist es doch andererseits möglich, dass die eine dieser Mengen die andere als einen blossen Theil in sich fasst, so dass die Vielheiten, welche sie vorstellen, wenn wir die Dinge derselben alle als gleich, d. h. als Einheiten betrachten, die mannigfaltigsten Verhältnisse zu einander haben.“ ([L 13.3], S. 28/29)

G. Cantor und die Begründung der Mengenlehre

Es verdient festgehalten zu werden, daß Cantor von konkreten mathematischen Problemen ausging. Erst später, als er mit seiner Mengenlehre auf vielfältiges Unverständnis stieß, zog er philosophische — genauer gesagt objektiv-idealistische —

und gelegentlich metaphysische und sogar theologische Argumentationen zugunsten des Aktual-Unendlichen heran.

Cantor war seit seiner Berliner Studienzeit bei Weierstraß mit der strengen Auffassung über die Grundlagen der Analysis vertraut. Später dann in Halle wurde er von seinem Kollegen Heine auf schwierige offene Fragen in der Theorie der trigonometrischen Reihen hingewiesen; dies führte ihn zur Theorie der Punktmengen. In die Frühzeit von Cantors mathematischer Tätigkeit gehört auch die Begründung der Theorie der Irrationalzahlen durch Fundamentalfolgen. Seit 1873 drang Cantor Schritt um Schritt in die Geheimnisse des Aktual-Unendlichen oder, wie er sagt, des „Eigentlich-Unendlichen“ ein. Cantor hat den für die Mengenlehre entscheidenden Unterschied zwischen dem Potentiell- und dem Aktual-Unendlichen 1886 in die Worte gekleidet:

„Wenn man sich über den Ursprung des weit verbreiteten Vorurtheils gegen das actual Unendliche, den ‚horror infiniti‘, in der Mathematik volle Rechenschaft geben will, muß man vor allem den Gegensatz scharf ins Auge fassen, der zwischen dem actualen und potenziellen Unendlichen besteht. Während das potenzielle Unendliche nichts anderes bedeutet, als eine unbestimmte, immer endlich bleibende veränderliche Grösse, die Werthe anzunehmen hat, welche entweder kleiner werden als jede noch so kleine oder größer werden als jede noch so große endliche Grenze, bezieht sich das actual Unendliche stets auf ein in sich festes, constantes Quantum, das grösser ist als jede endliche Grösse derselben Art.“ (zit. nach [L 13.24], S. 249)

Bereits 1873 erkannte er, daß sich zwischen der Menge der natürlichen Zahlen und der Menge der positiven rationalen Zahlen eine eindeutige Zuordnung herstellen läßt und daß die Menge der reellen Zahlen nicht abzählbar ist. Damit waren sozusagen Größenordnungen im Transfiniten gefunden; man könnte diese Entdeckung, die er 1874 in der Arbeit „Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen“ bekanntmachte, als Geburtsurkunde der Mengenlehre bezeichnen.

Indem Cantor diese Überlegungen auf die Geometrie ausdehnte, stieß er 1877, im Briefwechsel mit Dedekind stehend, zu der ihm fast nicht glaubhaften Erkenntnis vor, daß die Menge der Punkte des Einheitsquadrates eindeutig auf die Menge der Punkte der Einheitsstrecke abgebildet werden kann. Damit war die festgefügte altgewohnte Vorstellung von „Dimension“ umgestoßen, zumal sich das Cantorsche Ergebnis auf Gebilde beliebiger Dimensionen erweitern ließ.

Bald darauf ging Cantor zur zusammenhängenden Darlegung seiner Ergebnisse über. Von 1879 bis 1884 erschienen sechs Arbeiten unter dem gemeinsamen Titel „Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten“. Dort finden sich u. a. die Definitionen der abgeschlossenen, der dichten, der in sich dichten, der perfekten und der zusammenhängenden Menge sowie die Grundlagen der Theorie der transfiniten Zahlen, die in den 1895/97 veröffentlichten „Beiträgen zur transfiniten Mengenlehre“ systematisch begründet und ausführlich dargestellt wurde.

Hatte Cantor bis dahin die Termini „Inbegriff“ oder „Mannichfaltigkeit“ gebraucht, so ging er nun zur Verwendung des schon von Bolzano benutzten Begriffs „Menge“ über. Die berühmte Cantorsche Definition lautet:

„Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von M genannt werden) zu einem Ganzen.“ ([L 13.6], S. 282)

In der Arbeit von 1895 wird übrigens auch definiert:

„Mächtigkeit' oder ‚Kardinalzahl' von M nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hilfe unseres aktiven Denkvermögens dadurch aus der Menge M hervorgeht, daß von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente M und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahiert wird.“ ([L 13.6], S. 282)

Es ist also eine gewisse Vorsicht geboten, da die Cantorsche Originalfassung der Definition von Mächtigkeit von der heutigen abweicht.

In der sechsten Arbeit, 1884, formulierte Cantor das Problem, das ihn schon lange beschäftigt hatte — er hatte dieses Problem erstmals in einer Arbeit von 1878 erwähnt — und das zu lösen ihm trotz aller heißen, ja gelegentlich verzweifelten Bemühungen nicht gelingen wollte, das Kontinuumproblem. Er stellte — modern formuliert — die Frage, ob es zwischen der Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen und der Mächtigkeit der Menge der reellen Zahlen noch eine Kardinalzahl gibt. Diese Frage konnte erst 1963 beantwortet werden.

Vieles an der Mengenlehre in der von Cantor gegebenen Form hat sich als zeitbedingend, notwendigerweise als noch zu unpräzise und vielleicht sogar als naiv erwiesen; die weitere Entwicklung hat die nötigen Korrekturen angebracht. Dennoch hat Cantor wie nur wenige vor ihm die Entwicklung der Mathematik beeinflußt, und es ist vielleicht sogar gerechtfertigt, die mengentheoretische Umgestaltung der Grundlagen der Mathematik und deren schließliche mengentheoretische Durchdringung als eine Revolution der Mathematik zu Anfang des 20. Jh. zu bezeichnen. Mit Recht hat Hilbert die Mengenlehre als „die bewundernswerteste Blüte mathematischen Geistes und überhaupt eine der höchsten Leistungen rein verstandesmäßiger menschlicher Tätigkeit“ gewürdigt.

Kampf um die Anerkennung der Mengenlehre

Cantor hatte vorausgesehen, daß es Auseinandersetzungen um die Mengenlehre geben werde; 1883 schrieb er:

„Dabei verhehle ich mir keineswegs, daß ich mit diesem Unternehmen (Aufbau einer allgemeinen Mengenlehre, Wg) in einen gewissen Gegensatz zu weitverbreiteten Anschauungen über das mathematische Unendliche und zu häufig vertretenen Ansichten über das Wesen der Zahlgröße mich stelle.“ ([L 13.6], S. 165)

Insbesondere in Kronecker erwuchs Cantor ein erbitterter Gegner, der, ohne einen stichhaltigen Einwand vorweisen zu können, Cantor fortgesetzter Fehlschlüsse beschuldigte. Kronecker ließ sich — nach einer Äußerung Hilberts — von einer dogmatischen Haltung leiten, die auf der Überzeugung beruhte, daß es das Aktual-Unendliche nicht gäbe. Schon der Gebrauch unendlicher Reihen erschien ihm verdächtig, da er transfinite Schlußweisen für unzulässig hielt.

„Und ich glaube auch, daß es dereinst gelingen wird, den gesamten Inhalt aller dieser mathematischen Disziplinen (Algebra, Analysis, Zahlentheorie, Wg) zu „arithmetisieren“, d. h. einzig und allein auf den im engsten Sinne genommenen Zahlbegriff zu gründen, also die Modifikationen und Erweiterungen dieses Begriffes (namentlich die Hinzunahme der irrationalen und

continuirlichen Größen) wieder abzustreifen, welche zumeist durch die Anwendungen auf Geometrie und Mechanik veranlaßt worden sind.“ ([L 13.23], Bd. 3/1, S. 253)

Man geht nicht fehl in der Annahme, daß der schwere psychische Zusammenbruch Cantors im Jahre 1884 durch die beleidigenden Äußerungen Kroneckers mitverschuldet worden ist; Kronecker hatte sich sogar dazu hinreißen lassen, in der Öffentlichkeit Cantor als „Verderber der Jugend“ hinzustellen.

In der Sache selbst, in der Ablehnung der Mengenlehre, sah sich Cantor anfangs einer energischen, aber doch sachlichen Skepsis der Mehrheit der Mathematiker gegenüber, die sich von der traditionellen Auffassung des Unendlichen nicht zu lösen vermochten. Der einflußreiche Poincaré drückte eine weitverbreitete Auffassung aus, wenn er noch 1909 meinte, daß es „gar kein Aktual-Unendlich gäbe“, sondern mit dem Unendlichen nur die Möglichkeit bezeichnet sei, unaufhörlich neue Objekte zu schaffen, wie zahlreich auch die schon geschaffenen Objekte seien.

Dagegen fand Cantor in Dedekind, dem Engländer Young und dem schwedischen Mathematiker Mittag-Leffler warmherzige Förderer seiner Ansichten. Auf dem ersten internationalen Mathematikerkongreß 1897 in Zürich vermochte der deutsche Mathematiker Hurwitz, einer der Lehrer von Hilbert, in überzeugender Weise die Bedeutung mengentheoretischen Denkens in der Funktionentheorie zu demonstrieren. Gegen Ende des 19. Jh. waren die Vorbehalte gegen die Mengenlehre bereits weitgehend aufgegeben worden. Doch schuf die Entdeckung von Antinomien eine neue Situation. Cantor selbst hatte schon früh erkannt, daß unbeschränkte Mengenbildung zu logischen Widersprüchen führt, seine Unterscheidung zwischen „konsistenten Vielheiten“ (Mengen) und „inkonsistenten“ oder „absolut unendlichen Vielheiten“ jedoch nur in Briefen, u. a. an Hilbert, klar ausgedrückt. Im Jahre 1897 publizierte Burali-Forti die Antinomie der Menge aller Ordinalzahlen, 1902 entdeckte Russell die von der Menge aller Mengen, die nicht Element von sich selbst sind. Die Diskussion um die Mengenlehre lebte wieder auf, zumal nach dem 1904 von Zermelo veröffentlichten Beweis des auf das Auswahlaxiom gegründeten und schon von Cantor behaupteten Wohlordnungssatzes und nachdem 1908 der intuitionistische holländische Mathematiker Brouwer die Anwendung des grundlegenden Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für unzulässig erklärt hatte.

Die Aufdeckung der — unbestreitbaren — Grundlagenschwierigkeiten wurde unter dem Eindruck der schweren gesellschaftlichen und ideologischen Krisen in einigen imperialistischen Staaten zur Existenzkrise der gesamten Mathematik hochgespielt. In dieser schwierigen Situation wandte sich Hilbert gegen jede Form der Dramatisierung und prägte 1926 das Wort:

„Fruchtbaren Begriffsbildungen und Schlußweisen wollen wir, wo immer nur die geringste Aussicht sich bietet, sorgfältig nachspüren und sie pflegen, stützen und gebrauchsfähig machen. Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.“ ([L 13.18], S. 170)

Axiomatisierung der Mengenlehre

Von verschiedenen Seiten her wurde die Beseitigung der Schwierigkeiten in Angriff genommen, die beim uneingeschränkten Umgang mit mengentheoretischen Begriffsbildungen entstehen können.

Als Hauptweg zur Rettung der Mengenlehre hat sich ihre Axiomatisierung erwiesen. Es gibt heute verschiedene Axiomensysteme der Mengenlehre, die sich zum Teil nicht nur in mehr oder weniger formalen Einzelheiten oder in der Hinzunahme oder Fortlassung einzelner Axiome unterscheiden, sondern auch in den ihnen prinzipiell zugrunde liegenden inhaltlichen Vorstellungen. Gemeinsam ist allen diesen Systemen, daß die naive Vorstellung, jeder formulierbaren Eigenschaft $H(x)$ von Objekten x entspreche eine Menge $\{x \mid H(x)\}$, durch eine weit vorsichtiger, schrittweise, durch Axiome geregelte Mengenbildung ersetzt wird, wobei stets alle bisher bekannten Antinomien vermieden werden, andererseits die zugelassenen Mengenbildungsaxiome den Nachvollzug aller in der Mathematik benötigten Mengenkonstruktionen gestatten.

Ein erstes derartiges Axiomensystem stellte bereits 1908 Zermelo auf. Es wurde in den 20er Jahren von Fraenkel und Skolem ergänzt. Ein anderes System, das ab 1925 von v. Neumann vorgeschlagen und später u. a. von Gödel und Bernays weiterentwickelt wurde, unterscheidet sich vom erstgenannten vor allem durch die Einbeziehung von sog. Umengen in der Betrachtung, wobei Umengen gerade solche Gesamtheiten sind, deren Zulassung als Element weiterer Gesamtheiten zu Antinomien führen würde. In allen axiomatischen Systemen der Mengenlehre treten einzelne umstrittene Axiome auf, die nicht in gleicher Weise wie die übrigen Axiome allgemein anerkannte Vorstellungen über den Mengenbegriff präzisieren, die jedoch für den Beweis gewisser mathematischer Sätze im Rahmen der Mengenlehre unerlässlich sind. Zu diesen umstrittenen Axiomen gehören insbesondere das Auswahlaxiom, die Kontinuumhypothese nebst ihrer Verallgemeinerung für höhere Mächtigkeiten, das Fundierungsaxiom und gewisse Aussagen über die Existenz „sehr großer“ Mengen bzw. „unerreichbarer“ Kardinalzahlen. Diese Axiome, an denen, wie wir heute wissen, „die“ Mengenlehre sich jeweils in ähnlicher Weise gabelt wie die Geometrie am Parallelenaxiom, lösten umfangreiche Grundlagenuntersuchungen zur Mengenlehre aus, deren Ergebnisse zu den bewundernswertesten Leistungen der Mathematik im 20. Jh. gehören. Als erstes zeigte Fraenkel bereits 1922 die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms von einem Grundsystem mengentheoretischer Axiome. Gödel bewies 1938, daß sowohl das Auswahlaxiom als auch die verallgemeinerte Kontinuumhypothese widerspruchsfrei zu einem Grundsystem von Axiomen hinzugenommen werden können, falls dieses Grundsystem selbst widerspruchsfrei ist. Sierpiński zeigte Anfang der 40er Jahre, daß aus der verallgemeinerten Kontinuumhypothese das Auswahlaxiom folgt (Anm. 13.7).

Eine lange Reihe ähnlicher Resultate, u. a. auch über das Fundierungsaxiom und die Unabhängigkeit verschiedener mengentheoretischer Definitionen des Begriffs „endliche Menge“, wurde 1963 durch die Leistung des Amerikaners Cohen gekrönt, der mit einer völlig neuen Methode die Unabhängigkeit der Kontinuumhypothese von allen vorangehenden Axiomen einschließlich des Auswahlaxioms bewies. Cohen

löste damit ein Problem, welches bereits Hilbert in seinem berühmten Problemvortrag von 1900 als grundlegend für die Entwicklung der Mathematik im 20. Jh. genannt hatte. Ein Problem in bezug auf die genannten (und analoge) Ergebnisse der „Mengenlehre“ besteht bis heute darin, daß diese Ergebnisse sich auf verschiedene axiomatische Ansätze beziehen und sich im allgemeinen nicht ohne weiteres auf andere axiomatische Systeme der Mengenlehre übertragen lassen. So muß das Kontinuumproblem vom Standpunkt stärker eingeschränkter Mengenbildungsaxiome (etwa des Systems der einfachen Typentheorie) nach wie vor als ungelöst betrachtet werden.

Während die Resultate der mengentheoretischen Grundlagenforschung die neoplatonischen Vorstellungen Cantors von der objektiven Existenz der Mengen und der a-priori-Definitheit aller ihrer Eigenschaften als unhaltbar erwiesen, trat die axiomatische Mengenlehre ihren Siegeszug als einheitliche Grundlage und methodischer Rahmen der gesamten Mathematik an. Eine besonders verdienstvolle Rolle spielte in den Anfängen dieses Prozesses der mengentheoretischen Durchdringung der Mathematik Hausdorff, der sowohl die von Cantor begründete Theorie der Punktmengen wesentlich voranbrachte als auch die daraus hervorgehende abstrakt-axiomatische mengentheoretische Topologie mitbegründete. Sein 1914 erstmals erschienenes Lehrbuch „Grundzüge der Mengenlehre“ erlebte viele Auflagen, Bearbeitungen und Übersetzungen.

Philosophisch-mathematische Schulen

Es ist nun geboten, über einige philosophisch-mathematische Strömungen zur Begründung der Mathematik zu berichten, die sich etwa um die Jahrhundertwende zu entwickeln begannen und mehr oder weniger intensiv bis in die Gegenwart wirken. Obwohl diese Strömungen sich unter dem Eindruck der durch Antinomien erschütterten, um ihren Bestand ringenden Mengenlehre relativ schnell entfalteten, kann man die Antinomien der Mengenlehre nicht als alleinige Ursache dieser Erscheinung ansehen, da einerseits Keime aller drei im folgenden zu besprechenden Denkweisen bereits vor der Entdeckung der Antinomien, ja zum Teil schon lange vor der expliziten Entstehung der Mengenlehre nachweisbar sind, andererseits jede dieser Grundhaltungen einen objektiv vorhandenen Aspekt der Mathematik widerspiegelt, der auch unabhängig von den Grundlagenproblemen der Mengenlehre früher oder später ins Bewußtsein der Mathematiker dringen mußte. Während der grundsätzliche Fehler aller Anhänger einer dieser Richtungen in der (letzten Endes durch bürgerliche philosophische Einflüsse bedingten) Verabsolutierung jeweils eines dieser Aspekte bestand, haben sie andererseits sämtlich die mathematische Grundlagenforschung um wertvolle inhaltliche und methodische Gesichtspunkte und Resultate bereichert und zu äußerst fruchtbaren neuen mathematischen Theorien geführt.

Es ist heute üblich, die drei Richtungen als Logizismus, Formalismus und Intuitionismus zu bezeichnen und alle an den Grundlagenauseinandersetzungen beteiligten Mathematiker jener Zeit in diese Klassifikation „einzuordnen“. Wenn hier auch aus Gründen der Übersichtlichkeit dieser Einteilung gefolgt wird, so muß doch eindeutig

gesagt werden, daß viele führend an der Entwicklung der mathematischen Grundlagenforschung beteiligte Mathematiker, häufig sogar das einzelne Werk, sich einer solchen „Abstempelung“ entziehen und daß überhaupt die übergroße Mehrzahl der Mathematiker diesen Auseinandersetzungen fernblieb.

Am wenigsten entfernte sich der Logizismus von den Positionen Cantors. Die Logizisten — als Vorläufer dieser Denkweise sind vor allem Frege, Peano und Dedekind anzusehen — beharrten auf dem Standpunkt, daß die Mengenlehre und damit die gesamte in sie einbettbare bzw. in ihr darstellbare Mathematik ein Teil der Logik sei, daß das Reich der Mengen und allgemeiner der Relationen eine Art objektiver, vom menschlichen Bewußtsein unabhängiger Realität besitze und daß die aufgetretenen Antinomien lediglich durch eine noch unzureichende Erfassung und Widerspiegelung dieses Reiches verursacht seien. Als Hauptvertreter des Logizismus unternahmen Russell und Whitehead in dem 1910–1913 erschienenen dreibändigen Werk „*Principia mathematica*“ einen Neuaufbau der Mengenlehre und weiter Teile in ihr dargestellter Mathematik, in dem alle bisher bekannten Antinomien durch eine hierarchische Schichtung der Relationen (insbesondere Mengen als einstellige Relationen) vermieden werden: Der Typ einer Relation ist stets höher als die Typen aller Dinge, die in dieser Relation stehen, und in die Definition einer Relation dürfen nur Objekte eines niedrigeren Typs eingehen. Während dieses System, äußerlich betrachtet, nichts anderes als eine Axiomatisierung der Mengenlehre ist und (insbesondere in vereinfachter Form als einfache Typentheorie) heute noch zu diesem Zweck dient, ist der philosophische Logizismus von der als nächstes zu besprechenden formalistischen Auffassung der Mengenlehre durch die objektiv idealistische Auffassung von den Mengen und Relationen unterschieden und daher heute unter dem Eindruck der oben besprochenen Resultate über die Gabelbarkeit der Mengenlehre an bestimmten Axiomen im wesentlichen erloschen.

Durch die auch von den Logizisten benutzte Formalisierung der mathematischen Ausdrucks- und Beweismittel läßt sich jede mathematische Theorie nach Wahl einer geeigneten Sprache und eines in dieser Sprache formulierten Axiomensystems als eine Menge von „Zeichenreihen“ auffassen, die aus den Axiomen mittels formalisierter logischer Schlußregeln nach und nach erzeugt werden. Hilbert formulierte um 1900 das nach ihm benannte Programm, wenigstens für solche Theorien wie die Mengenlehre und die Arithmetik der natürlichen und der reellen Zahlen, auf deren gesicherte Widerspruchsfreiheit die Widerspruchsfreiheit vieler anderer mathematischer Theorien mittels Modellkonstruktion zurückgeführt werden kann, einen finiten Widerspruchsfreiheitsbeweis durch strukturelle Untersuchung der Zeichenreihen und der formalisierten Beweisregeln zu führen. Die Bemühungen, dieses Hilbertsche Programm zu realisieren, führten zur Beweistheorie als einem Zweig der mathematischen Logik, deren Hauptverdienst in der Herausarbeitung des syntaktischen Aspekts der Mathematik besteht. Nach anfänglichen Erfolgen (insbesondere durch Gentzen, Ackermann, v. Neumann) wies Gödel 1930 die prinzipielle Undurchführbarkeit des Hilbertschen Programms nach. Obwohl die mathematische Grundlagenforschung durch dieses Resultat in neue Richtungen gelenkt wurde, entwickelte sich die Beweistheorie weiter und führte auch in den vergangenen Jahrzehnten zu bedeutenden Resultaten. Gegenüber diesen inhaltlich und methodisch fruchtbaren Tendenzen ist

der philosophische Formalismus, dem freilich die Mehrzahl der Beweistheoretiker mehr oder weniger deutlich anhängt, durch die Verabsolutierung des syntaktischen Aspekts und der axiomatischen Methode charakterisiert. Hilbert selbst gab dieser Haltung, die die Mathematik letzten Endes zu einem inhaltslosen Spiel mit Zeichenreihen degradieren will, durch einige überspitzte Formulierungen Nahrung. In seinem bereits mehrfach erwähnten Problemvortrag von 1900 sagte er:

„In dem vorliegenden Falle, wo es sich um die Axiome der reellen Zahlen der Arithmetik handelt, ist der Nachweis für die Widerspruchlosigkeit der Axiome zugleich der Beweis für die mathematische Existenz des Inbegriffs der reellen Zahlen oder des Kontinuums. ... Freilich der Inbegriff der reellen Zahlen, d. h. das Kontinuum ist bei der eben gekennzeichneten Auffassung nicht etwa die Gesamtheit aller möglichen Dezimalbruchentwicklungen oder die Gesamtheit aller möglichen Gesetze, nach denen die Elemente einer Fundamentalreihe fortschreiten können, sondern ein System von Dingen, deren gegenseitige Beziehungen durch die aufgestellten Axiome geregelt werden und für welche alle und nur diejenigen Tatsachen wahr sind, die durch eine endliche Anzahl logischer Schlüsse aus den Axiomen gefolgt werden können. Nur in diesem Sinne ist meiner Meinung nach der Begriff des Kontinuums streng logisch faßbar.“ ([L 13.17], S. 38/39)

Die Kritik der Intuitionisten an der klassischen Mathematik ging in der ersten, vor allem durch Kronecker repräsentierten Phase von der Ablehnung des Aktual-Unendlichen und aller darauf beruhenden mengentheoretisch-genetischen Gedankenkonstruktionen aus, richtete sich in der zweiten, von Brouwer begründeten Phase gegen die klassische Logik, insbesondere das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten, und mündete nach der von Heyting 1930 vorgenommenen Präzisierung der intuitionistischen Logik und der kurz darauf von Kolmogorov gefundenen Deutung dieser Logik als einer Logik der konstruktiven Beweise in eine ganze Palette von Spielarten konstruktiver Mathematik. Der positive Grundzug des Intuitionismus und der aus ihm hervorgegangenen konstruktiven Mathematik besteht in der Neubesinnung auf den „Verfahrensaspekt“ der Mathematik, die insgesamt seit der Antike mehr und mehr zu einer „schöne Sätze beweisenden“ Wissenschaft ausgeartet war.

Da die konstruktive Mathematik in enger Beziehung zu den Grundlagen der programmgesteuerten Informationsverarbeitungs- und Rechentechnik steht, hat sie sich von den drei behandelten Strömungen am lebenskräftigsten erwiesen. Andererseits würde die Behandlung der gesamten Mathematik nach den Prinzipien des Konstruktivismus diese erheblich komplizieren und inhaltlich verarmen. Die Praxis zeigt, daß auch der konstruktive Aspekt der Mathematik nicht allein die Vielfalt der mathematischen Begriffe, Methoden und Inhalte adäquat widerspiegeln kann.

In der axiomatisch fixierten Mengenlehre liegt heute ein wichtiges, gesichertes Fundament der gesamten Mathematik vor, zumal wenn man bedenkt, daß die Mathematik und ihre Methoden spezifische Formen der Widerspiegelung der objektiven Realität darstellen. Doch sind auch heute noch mit der Mengenlehre und den Grundlagenproblemen der Mathematik schwierige erkenntnistheoretisch-philosophische Fragen verknüpft, deren prinzipielle Lösung auf der Basis des dialektischen Materialismus gegeben wird.

Vorlesung 14

Zwanzigstes Jahrhundert: Mathematische Logik. Moderne Algebra

Mathematische Probleme.

Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß
zu Paris 1900.

Von

D. Hilbert.

Wer von uns würde nicht gern den Schleier lüften, unter dem die Zukunft verborgen liegt, um einen Blick zu werfen auf die bevorstehenden Fortschritte unserer Wissenschaft und in die Geheimnisse ihrer Entwicklung während der künftigen Jahrhunderte! Welche besonderen Ziele werden es sein, denen die führenden mathematischen Geister der kommenden Geschlechter nachstreben? welche neuen Methoden und neuen Thatsachen werden die neuen Jahrhunderte entdecken — auf dem weiten und reichen Felde mathematischen Denkens?

Die Geschichte lehrt die Stetigkeit der Entwicklung der Wissenschaft. Wir wissen, daß jedes Zeitalter eigene Probleme hat, die das kommende Zeitalter löst oder als unfruchtbar zur Seite schiebt und durch neue Probleme ersetzt. Wollen wir eine Vorstellung gewinnen von der muthmaßlichen Entwicklung mathematischen Wissens in der nächsten Zukunft, so müssen wir die offenen Fragen vor unserem Geiste passiren lassen und die Probleme überschauen, welche die gegenwärtige Wissenschaft stellt, und deren Lösung wir von der Zukunft erwarten. Zu einer solchen Musterung der Probleme scheint mir der heutige Tag, der an der Jahrhundertwende liegt, wohl geeignet; denn die großen Zeitabschnitte fordern uns nicht blos auf zu Rückblicken in die Vergangenheit, sondern sie lenken unsere Gedanken auch auf das unbekannte Bevorstehende.

Die hohe Bedeutung bestimmter Probleme für den Fortschritt

Titelblatt der Abhandlung von D. Hilbert „Mathematische Probleme“ (Vortrag, gehalten auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900)

Die gesellschaftliche Funktion der Mathematik und der Naturwissenschaften

Die Große Sozialistische Oktoberrevolution des Jahres 1917 leitete eine welthistorische Wende ein. In einem heroischen Alleingang wurden in den 20er und 30er Jahren in der Sowjetunion die Grundlagen einer sozialistischen Gesellschaft errichtet. Der zweite Weltkrieg unterbrach das grandiose Aufbauwerk und forderte von der Sowjetunion die größten personellen und materiellen Opfer. Nach dem Sieg über die Aggressoren in Europa und Asien und der Entstehung weiterer sozialistischer Staaten gingen die USA und ihre Verbündeten zur Politik des Kalten Krieges, der ökonomischen, politischen und militärischen Erpressung gegenüber der Sowjetunion und den sozialistischen Staaten über. Die energische Friedenspolitik der Sowjetunion, im Bunde mit allen progressiven Kräften der Erde, eröffnete die reale Möglichkeit, einen weltweiten verheerenden militärischen Konflikt zu vermeiden; die endgültige Überwindung des menscheitsgefährdenden Imperialismus wird jedoch noch weitere Anstrengungen aller Friedenskräfte erfordern. Gegenwärtig kommt der Erhaltung des Friedens und den ökonomischen Anstrengungen der sozialistischen Staaten die wesentliche Rolle zu. Dies alles erhöht die gesellschaftliche Rolle und Verantwortung der Wissenschaft, sowohl der Mathematik und der Naturwissenschaften als auch der Gesellschaftswissenschaften.

Tendenzen der Entwicklung der Naturwissenschaften

Zu Ende des 19., Anfang des 20. Jh. vollzog sich in der Physik eine wissenschaftliche Revolution. Elektromagnetische Feldtheorie, Entdeckung des Elektrons und der Radioaktivität, Quantenvorstellung und Relativitätstheorie zerstörten die Grundprinzipien der klassischen Newtonschen Physik und öffneten den Weg zur modernen Physik des 20. Jh. mit ihren weitreichenden Folgen. Dieser Umsturz war – ähnlich wie bei der durch die Mengenlehre bewirkten wissenschaftlichen Revolution in der Mathematik – von philosophischen Auseinandersetzungen begleitet, von einem vorübergehenden Abgleiten in idealistische Positionen bei einem Großteil der Physiker und ging einher mit einem verbreiteten Gefühl von einer Krise der Physik. Lenin urteilte so:

„Das Wesen der Krise der modernen Physik besteht in der Zerstörung der alten Gesetze und Grundprinzipien, in der Preisgabe der außerhalb des Bewußtseins existierenden objektiven Realität, d. h. in der Ersetzung des Materialismus durch Idealismus und Agnostizismus.“ ([L 14.13], S. 257)

Trotz aller noch bis in unsere Gegenwart reichenden Auseinandersetzungen zwischen materialistischen und idealistischen Auffassungen konnte die Physik, getragen von einer faszinierenden innerwissenschaftlichen Dynamik und von praktischen Problemstellungen, zwischen den beiden Weltkriegen und danach hervorragende Ergebnisse erzielen; Stichworte wie Atommodelle, Quantentheorie, Unbestimmtheitsbeziehung, Kernspaltung und Kernenergie, Elementarteilchen, Transistor, Hochenergiephysik,

Festkörperphysik deuten diese Entwicklung an. Der Abwurf der beiden amerikanischen Atombomben auf Japan im Jahre 1945 zeigt aber auch den Mißbrauch der Ergebnisse der Physik durch imperialistische Kräfte.

Auch die anderen naturwissenschaftlichen Disziplinen – organische und anorganische Chemie, Biochemie, Biologie, Astronomie, Geowissenschaften – erzielten in der Periode des mit der Oktoberrevolution eingeleiteten Übergangs vom Kapitalismus zum Sozialismus weitreichende Ergebnisse und erreichten ein bisher noch nicht dagewesenes Entwicklungstempo. Man schätzt, daß sich die Menge der erzielten Einsichten in die Gesetzmäßigkeiten der Natur alle 8 bis 10 Jahre verdoppelt.

Die wissenschaftlich-technische Revolution

Mathematik und Naturwissenschaften erreichten nicht nur ihrem Inhalt und Umfang nach während der jetzt betrachteten Übergangsperiode vom Kapitalismus zum Sozialismus qualitativ neue Entwicklungsstufen. Dies gilt auch hinsichtlich der Formen ihrer Wechselbeziehungen zur Entwicklung der materiellen Produktivkräfte. In einigen Bereichen – man denke an chemische Großsynthesen von Kautschuk, Plasten und Arzneimitteln, an elektrische und elektronische Industrie, an hochentwickelte Kommunikationsmittel, an Weltraumflug, an Mikroelektronik, Robotertechnik, Biotechnologie und anderes mehr – ging das Wechselverhältnis von Wissenschaft und Produktion weit über eine auf wissenschaftlicher Grundlage betriebene Produktion hinaus und lief und läuft heute geradezu auf eine Verschmelzung von Wissenschaft und Produktion hinaus. Gelegentlich spricht man auch von „Produktion mittels Wissenschaft“ oder von „Integration der Wissenschaften in die Produktion“.

Die junge Sowjetmacht hat von Anbeginn an die volle Tragweite der Wissenschaft für den Aufbau der neuen Gesellschaftsordnung erkannt und entsprechende wissenschaftlich-organisatorische Maßnahmen ergriffen. Noch unter den außerordentlich schwierigen Bedingungen einer von Krieg und Konterrevolution zerrütteten Wirtschaft, inmitten einer Welt von Feinden, wurden am 8. Februar 1918 auf direkten Befehl Lenins „Thesen zum Projekt der Mobilisierung der Wissenschaft für die Bedürfnisse des staatlichen Aufbaus“ ([L 14.21], S. 62/63) aufgestellt.

In wenigen Jahrzehnten wurde die Sowjetunion zu einer Großmacht der Wissenschaft. Heute arbeiten mehr als ein Drittel aller Wissenschaftler der Erde in der Sowjetunion.

Insbesondere nach dem Ende des zweiten Weltkriegs erlebt die Menschheit einen erneuten stürmischen Aufschwung von Wissenschaft und Technik. Dieser weltweite Prozeß, der sowohl in den sozialistischen als auch in kapitalistischen Staaten sowie in einigen Entwicklungsländern eingesetzt hat, wird im allgemeinen als wissenschaftlich-technische Revolution gekennzeichnet. Sie vollzieht sich also gegenwärtig und für die nähere, überschaubare Zukunft unter unterschiedlichen Produktionsverhältnissen. In einer Einschätzung der wissenschaftlich-technischen Revolution von Anfang 1986 heißt es:

„Die wissenschaftlich-technische Revolution nahm vor etwa drei Jahrzehnten ihren Anfang. Seit den siebziger Jahren hat sie im internationalen Maßstab eine neue Stufe erreicht, die nicht

nur dadurch gekennzeichnet ist, daß sich ihr Tempo ständig beschleunigt, sondern vor allem dadurch, daß eine Reihe von Schlüsseltechnologien in den Vordergrund tritt, deren Anwendung zu einer revolutionierenden Umwälzung der Produktivkräfte praktisch in allen Bereichen der Volkswirtschaft führt.“ [L 14.19, S. 371]

Auch die sozialistische Gesellschaftsordnung in der DDR hat sich den wissenschaftlichen, technischen und sozialen Herausforderungen gestellt, die aus der wissenschaftlich-technischen Revolution resultieren. In der gegenwärtigen Phase kommt es auch in der DDR darauf an, die Entwicklung des wissenschaftlich-technischen Fortschritts und die wissenschaftlich-technische Revolution mit den Vorzügen eines humanistisch orientierten Gesellschaftssystems zu verbinden.

Einige allgemeine Aspekte der Mathematik des zwanzigsten Jahrhunderts

Mit der überaus raschen Entfaltung der Produktivkräfte während des 20. Jh. nahm auch die Mathematik einen schnellen Aufschwung, obwohl diese Entwicklung durch schwere ökonomische Krisen im kapitalistischen Teil der Welt und durch zwei imperialistische Weltkriege empfindlich unterbrochen wurde.

Die Zahl der Mathematiker und der sich der Mathematik bedienenden Wissenschaftler verdoppelte sich seit Beginn des Jahrhunderts etwa alle 10 bis 15 Jahre. Beim Internationalen Mathematikerkongreß 1966 in Moskau, einem glanzvollen wissenschaftlichen Ereignis, gab es mehr als 4000 aktive Teilnehmer.

Ungefähr alle 10 Jahre verdoppelt sich die Zahl der mathematischen Publikationen. Im Jahre 1962 haben mehr als 4100 verschiedene Autoren zur Mathematik publiziert; gegenwärtig werden auf der Erde ungefähr 25000 mathematische Forschungsarbeiten jährlich referiert. Höher noch ist die Zahl der Ergebnisse, da ein Teil der Arbeiten der Geheimhaltung unterliegt. Dazu kommen die Darstellungen des bekannten Stoffes in Lehrbüchern, Lehrbriefen, Schulbüchern und in Fachzeitschriften für Naturwissenschaftler aller Fachrichtungen, Lehrer, Ingenieure und Ökonomen.

Die tiefgreifenden gesellschaftlichen Umwälzungen des 20. Jh. bewirkten auch deutliche Verschiebungen der Zentren der mathematischen Wissenschaften auf der Erde. Während der ersten anderthalb Jahrzehnte unseres Jahrhunderts, d. h. bis zum ersten Weltkrieg, befanden sich die bedeutendsten mathematischen Zentren in Europa und da besonders in Deutschland und Frankreich. Die Forscher der USA orientierten sich noch weitgehend an ihren europäischen Lehrern; die Länder Asiens, Afrikas und Lateinamerikas standen in kolonialer Abhängigkeit und konnten noch keinen wesentlichen Beitrag zur Entwicklung der Weltwissenschaft leisten. Als Folge des ersten imperialistischen Weltkriegs, der zudem auch in den Kreisen der Mathematiker — besonders in Deutschland — zu einer Welle des Chauvinismus geführt hatte, zerbrach die internationale Organisation der mathematischen Wissenschaften und ging die Vorrangstellung der Mathematik in Frankreich und Deutschland verloren.

Zwischen den beiden Weltkriegen entstand mit den USA ein mathematisches

Weltzentrum. Anknüpfend an hervorragende Traditionen und großzügig gefördert, vermochten die russisch-sowjetischen Mathematiker — man denke an Luzin, Kolmogorov, Keldyš, P. S. Alexandroff, Pontrjagin, Schmidt, Gelfond — in einem heroischen Anlauf erfolgreiche mathematische Schulen aufzubauen, so in Moskau, Leningrad und Kiev, aber auch schon in solchen wissenschaftlichen Zentren wie Tbilissi und Taschkent, die erst unter der Sowjetmacht entstanden. Im Zeitraum zwischen den beiden Weltkriegen begannen sich auch in anderen Ländern wie z. B. Indien, Japan, Kanada, erfolgreiche mathematische Gruppierungen zu formieren.

Während der Zeit des Faschismus erlitten Deutschland, Italien, Ungarn und andere Länder beträchtliche Verluste durch die Emigration rassistisch und politisch verfolgter, die ihrerseits wesentlich zur Vergrößerung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Potentials der USA beitrugen. Es sei hier erinnert an Einstein, Noether, Artin, Weyl, v. Neumann, v. Mises, Courant, Neugebauer, Tarski, Gödel, Bernays, Born, Bohr; viele andere wären noch zu nennen. Während des zweiten Weltkriegs wurden auch den mathematischen Schulen in den von faschistischen Truppen besetzten Ländern schwere Schäden zugefügt, insbesondere in der Sowjetunion, Polen, der Tschechoslowakei und Jugoslawien, wo die Faschisten sogar zur Politik der physischen Ausrottung der Wissenschaftler übergingen.

Anders als in der Zeit nach dem ersten Weltkrieg konnten bald nach dem Ende des zweiten Weltkriegs die internationalen Beziehungen auf dem Gebiete der Mathematik wieder geknüpft werden.

Gegenwärtig gibt es zwei mit Abstand führende mathematische Zentren auf der Erde, die Sowjetunion und die USA. In den 60er Jahren entstanden leistungsfähige mathematische Schulen in Indien, China, Afrika, in Kanada, Japan, Australien, Südamerika. Die französische Mathematik hat eine führende Stellung zurückgewonnen. In den sozialistischen Ländern Europas, unter ihnen in der DDR, gibt es international stark beachtete Gruppierungen von Mathematikern.

In der Zeit nach dem zweiten Weltkrieg hat sich neben dem an Universitäten und Akademien beschäftigten Mathematiker ein neuer Mathematikertyp herausgebildet, der des Industriemathematikers. Es gibt ferner zahlreiche mathematische Gruppen an industriellen oder staatlichen Forschungseinrichtungen; ihre Forschungsvorhaben sind auf Spezialfragen der Physik, Chemie und Biologie, der Technik und Ökonomie zugeschnitten und ergeben sich aus den Zielstellungen sozialistischer Produktionsverhältnisse. In entwickelten kapitalistischen Ländern existieren staatliche, vielfach an Einrichtungen der Armee angeschlossene wissenschaftliche, darunter mathematische Zentren, deren Arbeitsrichtungen zunehmend in die Abhängigkeit von staatsmonopolistischen Interessen geraten. Daneben gibt es zahlreiche nichtstaatliche mathematisch — naturwissenschaftlich — technische Forschungsinstitute, die von großen kapitalistischen Unternehmen finanziert werden und deren Profitinteressen dienen.

Seit dem zweiten Weltkrieg haben sich die Schwerpunkte der inhaltlichen Arbeit der Mathematiker deutlich verschoben, einerseits bei den Anwendungen unter dem Einfluß der jeweiligen herrschenden Gesellschaftsordnung und gestützt auf die stürmische Fortentwicklung der maschinellen Rechentechnik, andererseits auch in der Grundlagenforschung der Mathematik. So gibt es eine Anzahl von Hauptarbeits-

gebieten, die zwar schon im 19. Jh. angelegt wurden, deren volle Ausprägung aber erst im 20. Jh. erfolgte. Daneben gibt es mathematische Disziplinen, die erst in jüngster Zeit entstanden sind und überraschende Anwendungen gefunden haben oder direkt den Praxisforderungen entspringen.

Jener ersten Gruppe kann man zurechnen die Strukturmatermathematik, die allgemeine Algebra, die Wahrscheinlichkeitsrechnung und das Eindringen stochastischer Betrachtungsweisen in viele Gebiete der Mathematik, die mengentheoretische Durchdringung der gesamten Mathematik, die Funktionalanalysis, die mathematische Logik, die Topologie, die Umgestaltung der numerischen Methoden durch das gestiegene Leistungsvermögen der modernen Rechenanlagen, die außerordentlich enge Verbindung von Mathematik und Physik in großen Bereichen der theoretischen Physik.

Zu jener zweiten Gruppe neuer mathematischer Disziplinen gehören die Spieltheorie und die Operationsforschung, deren Fragestellungen auf ökonomische und militärische Probleme zurückgehen. Aus der Zusammenarbeit von Ingenieuren, Physikern und Mathematikern ist die Informationstheorie hervorgegangen. Einigen dieser neuen Zweige, die oft auch der Kybernetik als einer übergreifenden wissenschaftlichen Disziplin zugeordnet werden, ist einerseits die enge Verwandtschaft mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung eigentümlich; andererseits hängen ihre realen Anwendungsmöglichkeiten in Wissenschaft, Technik und Ökonomie sehr stark vom Leistungsvermögen der zur Verfügung stehenden Rechenanlagen ab.

Doch darf man beim Blick auf die neuen Zweige der Mathematik nicht die Tatsache verkennen, daß auch die früheren traditionellen, sozusagen klassischen Disziplinen der Mathematik im 20. Jh. weiter ausgebaut wurden und eine ungeheure inhaltliche Bereicherung erfuhren. Charakteristisch für die heutige Zeit ist eher der Umstand, daß die Grenzen zwischen den einzelnen mathematischen Teildisziplinen fließend geworden sind und an deren Berührungsflächen neue und interessante Problemgruppen und Forschungsgebiete entstehen.

Heute ist die Mathematik eine überaus umfangreiche, außerordentlich verzweigte und auf der ganzen Erde erfolgreich betriebene Wissenschaft, die in engen Beziehungen zu allen Sphären des gesellschaftlichen Lebens steht (Anm. 14.1). In einem sowjetischen Sammelband zur Mathematik (1967) wurde versucht, den außerordentlich vielschichtigen Prozeß der Entwicklung der Mathematik der Gegenwart in wenigen Worten zu schildern:

„Vor unseren Augen verläuft der Prozeß einer qualitativen Veränderung der Mathematik; es werden enge Beziehungen zwischen Zweigen der Mathematik entdeckt, die früher weit voneinander entfernt zu sein schienen; neue mathematische Disziplinen entstehen. Die Schaffung der elektronischen Rechentechnik hat die Auffassungen von Grund auf verändert, die man von der Effektivität verschiedener mathematischer Verfahren hatte. Sie hat ferner den Anwendungsbereich der Mathematik in einem bisher nie gekannten Ausmaß erweitert. Die Beziehungen zwischen der Mathematik und den anderen Wissenschaften entwickeln sich ständig. Waren sie früher im wesentlichen auf Mechanik, Astronomie und Physik beschränkt, so dringen jetzt mathematische Methoden immer tiefer in die Chemie, Geologie, Biologie, Medizin, Ökonomie und Sprachwissenschaft ein. Allgemein bekannt ist die Rolle der Mathematik bei der Entwicklung neuer technischer Richtungen, wie Radioelektronik, Kernenergetik, Weltraumflug. Die alte Behauptung, daß die Mathematik die Königin der Wissenschaft sei, gewinnt somit einen um vieles tieferen Inhalt.“ (zit. nach [LA 32], S. 241)

Zur Geschichte der mathematischen Logik

Die mathematische Logik ist von anderen Wissenschaftszweigen, in deren Benennung das Wort Logik vorkommt, vor allem durch zwei Merkmale abgrenzbar. Erstens ist sie ein Teilgebiet der Mathematik, d. h., ihre Methoden der Begriffsbildung und Erkenntnisgewinnung sind typisch mathematisch. Zweitens sind ihre Fragestellungen vorrangig auf die eigenen Grundlagenprobleme der Mathematik zugeschnitten, obwohl ihr Anwendungsbereich wie allgemein der der Mathematik natürlich wesentlich umfassender ist und von den Naturwissenschaften und technischen Disziplinen über die Philosophie bis zu den Sprach- und Rechtswissenschaften reicht. Daher ist es fast selbstverständlich, daß sich die mathematische Logik erst spät, um die Mitte des 19. Jh. herauszubilden begann.

Aus der Frühgeschichte der mathematischen Logik

Die in diesem Sinne noch junge mathematische Logik besitzt jedoch traditionsreiche Vorläufer. Es ist üblich, die antike und mittelalterliche formale Logik und die vergeblichen und verfrühten Bemühungen von Leibniz um einen universellen logischen Kalkül in Darstellungen der historischen Entwicklung der mathematischen Logik einzubeziehen, obwohl tatsächlich alle diese Vorläufer nur einen sehr geringen Einfluß auf die Entwicklung der modernen Logik ausgeübt haben bzw. ihre Begriffe und Ergebnisse – häufig nur in Ansätzen – von historisch interessierten Logikern erst nachträglich und mühevoll in neuzeitliche Konzepte eingeordnet wurden.

Die traditionelle Logik läßt eine Untergliederung in Satz- und Regellogik erkennen, die in der modernen Logik kaum noch eine Rolle spielt. Gegenstand der Regellogik war die Aufstellung und Rechtfertigung von zulässigen bzw. stichhaltigen Schluß- oder Beweisregeln syntaktischer Art, Gegenstand der Satzlogik die Ermittlung von Tautologien, d. h. Sätzen, die allein auf Grund ihrer grammatischen Struktur stets wahr sind.

Die Regellogik wurde von Aristoteles begründet. Er stellte alle zulässigen Schlußweisen zusammen, bei denen im Bereich von Aussagen der vier Formen: alle A sind B ; einige A sind B ; einige A sind nicht B ; kein A ist ein B aus jeweils zwei Voraussetzungen auf eine Behauptung geschlossen werden kann, also z. B.: Aus den Voraussetzungen „alle A sind B “ und „alle B sind C “ folgt „alle A sind C “. Philosophen der antiken Schulen von Megara und der Stoiker begründeten etwa zur gleichen Zeit die Satzlogik, indem sie, ausgehend von einer richtigen Auffassung der Implikation als zweistelliger Funktion im Bereich der Wahrheitswerte „wahr“, „falsch“, zahlreiche allein mittels Implikation formulierbare Tautologien fanden wie z. B. (in moderne Formelsprache übertragen) $p \rightarrow p$, $p \rightarrow (q \rightarrow p)$, $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$ u. a. Diese Ansätze einer formalen Regel- und Satzlogik gingen in den festen Bestand philosophischer Bildung des Mittelalters ein. Sie wurden während vieler Jahrhunderte in einer heute kaum noch vorstellbaren Weise mit mystisch-religiösen Spekulationen verquickt, jedoch ihrem sachlichen Inhalt nach nur wenig weiterentwickelt.

Leibniz entwarf in den Jahren 1679 bis 1690 in mehreren Arbeiten das Projekt einer „logica mathematica“ mit drei Bestandteilen:

- a) „characteristica universalis“, d. h. ein System von Bezeichnungen für Grundbegriffe, aus denen sich Formeln zur Bezeichnung beliebiger Objekte und Sachverhalte kombinieren lassen;
- b) „calculus ratiocinator“, d. h. Verfahren zur Arithmetisierung der in der *characteristica universalis* dargestellten Aussagen, dem Anliegen nach etwa der in der modernen Logik verwendeten Gödelisierung entsprechend;
- c) „ars judicandi“, d. h. ein Verfahren zur rechnerischen Entscheidung über die Wahrheit beliebiger in der *characteristica universalis* dargestellter Aussagen mit Hilfe des *calculus ratiocinator*.

Obwohl derartige Programme im Prinzip schon im 13. Jh. bei dem spanischen Theologen Raymundus Lullus und auch nach Leibniz bis zum Beginn des 19. Jh. bei verschiedenen Philosophen wieder auftauchen – u. a. bei Wolff, Lambert und Maimonides –, blieben diese Ideen bei den eigentlichen Begründern der modernen Logik zunächst weitgehend unbekannt bzw. unbeachtet. So wurden die erwähnten Schriften von Leibniz erst durch den französischen Mathematiker Couturat wiederentdeckt und 1901 veröffentlicht.

Eine eigenartige Zwischenstellung zwischen Vorläufern und Begründern der modernen Logik nimmt Bolzano ein. Einerseits waren in seiner Schaffensperiode in der ersten Hälfte des 19. Jh. die objektiven Bedingungen für das Entstehen einer „Metamathematik“ nahezu herangereift, was sich in der fast gleichzeitigen Wiederholung verschiedener seiner Beiträge zu den Grundlagen der Mathematik bei anderen Mathematikern ausdrückt. Andererseits wurden seine Arbeiten auf Grund ungünstiger Lebensumstände den Zeitgenossen kaum bekannt und übten so keinen unmittelbaren Einfluß auf die Entwicklung aus. Bolzanos Schriften zur Mathematik und deren logisch-methodologischen Grundlagen enthalten neben vielen Beiträgen zur Präzisierung der Analysis und wesentlichen Grundüberlegungen zur Mengenlehre auch wichtige Bausteine der mathematischen Logik. Er erkannte als erster klar den Prädikaten- bzw. relationenlogischen Bau der in der Mathematik verwendeten Sprache und die Möglichkeit verschiedener Interpretation der darin vorkommenden Grundbegriffe und definierte in diesem Zusammenhang so grundlegende Begriffe wie den der Widerspruchsfreiheit eines Systems von Voraussetzungen.

Herausbildung der mathematischen Logik als selbständige Disziplin

Am Anfang der kontinuierlichen Entwicklung der Logik als mathematischer Theorie stehen jedoch einfachere Probleme als die von Bolzano bereits in Angriff genommenen. Boole entwickelte in mehreren zwischen 1847 und 1854 erschienenen Arbeiten den noch heute aktuellen Begriff der Booleschen Algebra als einer Struktur mit Addition, Subtraktion, Multiplikation und zwei ausgezeichneten Elementen 0 und 1. Die Axiome der Booleschen Algebra erweisen sich als aussagenlogisch allgemeingültige Ausdrücke, wenn man 0 und 1 als Wahrheitswerte falsch bzw. wahr, die Addition

$x + y$ als entweder x oder y , die Subtraktion $x - y$ als x und nicht y und die Multiplikation $x \cdot y$ als x und y deutet. Boole arbeitete die weitgehende Analogie zwischen den in der Booleschen Algebra und den in der üblichen Arithmetik geltenden Gesetzen heraus. Seine Theorie gipfelte in der Ermittlung von zu einer vorgegebenen Formel äquivalenten kanonischen Normalformen. Gleichzeitig mit Boole und unabhängig von ihm begann de Morgan mit Veröffentlichungen zur Algebra der Logik. Er bemühte sich u. a. um die Klärung der prädikatenlogischen Natur der Aristotelischen Schlußweisen und suchte diese zu verallgemeinern. Jevons ersetzte die Boolesche Addition durch die Alternative und die Subtraktion durch die Negation und gab der Booleschen Normalformentheorie damit im wesentlichen die heutige Gestalt. C. S. Peirce und Schröder bezogen die Quantifizierung in den von Boole und Morgan vorgezeichneten algebraischen Aufbau der Logik ein, indem sie die Generalisierung als unendliches Produkt und die Partikularisierung als unendliche Alternative deuteten. Schröder beschäftigte sich erstmals systematisch mit dem allgemeinen Relationsbegriff und studierte grundlegende Eigenschaften von Relationen wie Reflexivität, Symmetrie, Transitivität, Möglichkeiten der Verknüpfung von Relationen u. ä. Sein Hauptwerk „Vorlesungen über die Algebra der Logik“ erschien in drei Bänden zwischen 1890 und 1905. Zu den Pionieren der Logik zählt weiterhin Frege, der in seiner Arbeit „Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildeten Formelsprache des reinen Denkens“ (1879) eine formalisierte prädikatenlogische Sprache entwickelte. Frege wendete diese Sprache auch auf konkrete mathematische Fragen an, u. a. in „Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet“ (1893/1903). Freges Formalismus konnte sich jedoch wegen seiner eigenwilligen und unpraktischen Schreibweise nicht durchsetzen.

Einen großen Einfluß auf die Präzisierung und Formalisierung der gesamten damaligen Mathematik im Sinne der mathematischen Logik übte Peano aus. Von 1895 bis 1908 gab er die Zeitschrift „Formulaire de Mathématiques“ heraus, deren einziger Inhalt in formalisierter Sprache niedergeschriebene mathematische Sätze und ganze Theorien und in Ketten von logischen Schlüssen aufgelöste mathematische Beweise waren. Diese „logizistische“ Tendenz fand ihre konsequente Verwirklichung in der von Russell und Whitehead vertretenen sogenannten logizistischen Richtung der Begründung der Mathematik, wobei insbesondere Russell durch eine persönliche Begegnung mit Peano im Jahre 1900 auf diesen Weg geführt wurde.

Zur Geschichte der neueren mathematischen Logik

Die mathematische Logik, deren Entstehung ursprünglich wesentlich durch die Notwendigkeit gefördert wurde, in der Mathematik immer kompliziertere Begriffe und Sachverhalte sprachlich korrekt auszudrücken, wirkte zu Beginn unseres Jahrhunderts bereits erheblich auf die begrifflich-sprachliche Korrektheit auch solcher Mathematiker zurück, die sich den logizistischen Tendenzen zur vollen Formalisierung der Mathematik nicht anschlossen. Sie leistete damit einen ganz wichtigen Beitrag für das richtige Verständnis der axiomatischen Methode und der strukturellen Auffassung der Mathematik (Anm. 14.1).

In den zwanziger Jahren bildeten sich bedeutende Schulen der mathematischen Logik vor allem an österreichischen und polnischen Universitäten, zu deren hervorragenden Vertretern Tarski und Gödel neben vielen anderen bedeutenden Logikern und Mathematikern zählen. Tarski erreichte mit seinem Werk „Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen“ (1935) einen gewissen Abschluß der einst von Bolzano eingeschlagenen Richtung und Auffassung der Logik als Methodologie der deduktiven Wissenschaften. In Weiterführung dieser „semantischen“ Linie der Logik entwickelte sich in den letzten Jahrzehnten vor allem die Modelltheorie als selbständiges Grenzgebiet zwischen mathematischer Logik und allgemeiner Algebra. Die Möglichkeiten, aber auch die Grenzen der formalisierten axiomatischen Methode zeigte vor allem Gödel mit seinen Arbeiten „Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls“ (1930) und „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme“ (1931). Der Faschismus unterbrach die kontinuierliche Entwicklung der genannten Schulen. Viele an den mathematischen Grundlagenuntersuchungen führend beteiligte Mathematiker wurden auf Grund ihrer jüdischen Abstammung oder ihrer Zugehörigkeit zur polnischen Nation ermordet; andere konnten noch emigrieren.

Nach dem zweiten Weltkrieg hat sich das Schwergewicht der Forschung auf dem Gebiet der mathematischen Logik und der mathematischen Grundlagenuntersuchungen in Zentren der USA und der Sowjetunion verlagert. Vor allem unter dem Eindruck der Gödelschen Resultate, aber auch beeinflußt durch die Kritik der Intuitionisten an der klassischen Mathematik, wandte sich die Mehrzahl der auf diesem Gebiet arbeitenden Mathematiker Fragen der effektiven Berechen- und Entscheidbarkeit zu. Die mathematische Logik entwickelte sich insgesamt mehr und mehr zur „Metalogik“: An die Stelle der Konstruktion konkreter formalisierter Sprachen und bestimmter logischer Kalküle treten Fragen wie: Was ist eine formalisierte Sprache? Wie sieht ein geeigneter Oberbegriff für formalisierte Sprachen aller Art (d. h. Aussage- und Befehls- bzw. Programmsprachen) aus? Was ist eine korrekte Begriffsdefinition? Was ist allgemein ein logischer Kalkül, und wie muß er beschaffen sein, damit für ihn gewisse Sätze (etwa das Analogon zum Gödelschen Vollständigkeitssatz) gelten?

Daneben wurden Grundvoraussetzungen der klassischen mathematischen Logik wie Extensionalität und Determiniertheit der Begriffe, Zweiwertigkeit u. a. modifiziert und die so modifizierten Logiken, deren Untersuchung von den mehr philosophisch und sprachtheoretisch orientierten Logikern immer angestrebt, aber von den Mathematikern zunächst als zu kompliziert und für die damals aktuellen mathematischen Grundlagenprobleme nicht wichtig beiseite geschoben wurde, nun mit gereiften mathematischen Methoden neu aufgegriffen. Vor allem die Anwendung der mathematischen Logik in der programmgesteuerten elektronischen Rechentechnik während der letzten Jahrzehnte bewirkte einen gewaltigen Zufluß von Forschungskräften und finanziellen Mitteln, eine sprunghafte Zunahme des Interesses breiter, sonst vorwiegend technisch interessierter Kreise an der Logik und dementsprechend eine Flut von mehr oder weniger einführenden Lehrbüchern über verschiedene Teilgebiete der Logik, auf spezielle Anwenderbedürfnisse und Voraussetzungs-niveaus zugeschnitten.

Entwicklung der Algebra seit der Jahrhundertwende

Die klassische Algebra hatte mit den Arbeiten von Weber und Hilbert einen gewissen Abschluß gefunden. Andererseits sind um die Jahrhundertwende bereits viele Ansätze und Ideen künftiger Entwicklungen erkennbar. Die Hauptmerkmale des folgenden Prozesses bestehen in der Hinwendung zum Abstrakten, der durchgehenden Benutzung der axiomatischen Methode und in der sich wie in der gesamten Mathematik auch in der Algebra vollziehenden mengentheoretischen Durchdringung.

Die Herausbildung der sogenannten Modernen Algebra

Ein erster bedeutender Schritt wurde um 1904 von den Mathematikern um Huntington, Moore und Dickson getan. In ihren Arbeiten wurden einzelne algebraische Strukturen, wie Gruppe, Körper, Algebra, abstrakt betrachtet und eine axiomatische Definition gegeben. Diese Studien waren Teil umfangreicher Untersuchungen zur axiomatischen Methode. Es dominierten Fragen wie Widerspruchsfreiheit bzw. Unabhängigkeit der Axiome usw. Sehr bald rückte auf dieser Basis der algebraische Gesichtspunkt in den Vordergrund. 1907/08 begründeten Dickson und vor allem Wedderburn mit seinen zentralen Struktursätzen die moderne abstrakte Algebrentheorie. Wenig später schrieb Steinitz in seiner „Algebraischen Theorie der Körper“ (1910) programmatisch:

„Eine Übersicht über alle möglichen Körpertypen zu gewinnen, und ihre Beziehungen untereinander in ihren Grundzügen festzustellen, kann als Programm dieser Arbeit gelten.“ ([I. 14.22], S. 5)

Für ihn stand im Gegensatz zu Weber der Körperbegriff selbst im Mittelpunkt der Forschung. Indem er die mit den Körperaxiomen erfaßte Vielfalt an Körpern systematisierte, konnte er sein Ziel in vollem Umfang erreichen. In diesem Zusammenhang definierte Steinitz viele wichtige Begriffe der Körpertheorie, z. B. Erweiterungskörper, Adjunktion einer Menge, Primkörper, äquivalente Erweiterung, einfache Erweiterung u. a. Charakteristisch ist auch die Verbindung von Algebra und Mengenlehre. Insgesamt sind die Arbeiten von Wedderburn (1908) und Steinitz (1910) die ersten Veröffentlichungen, die weitgehend dem Stil der „Modernen Algebra“ gerecht werden. Der allgemeine Ringbegriff wurde erst 1914 von Fraenkel eingeführt, also lange, nachdem sich der Körperbegriff durchgesetzt hatte und man schon zahlreiche Beispiele für Ringe kannte. Aber auch Fraenkels Veröffentlichung ist nur einem sehr speziellen Ringtyp gewidmet.

So wurde es das unbestrittene Verdienst von Emmy Noether, Artin und den Algebraikern ihrer Schule, wie Hasse, Krull, Schreier, van der Waerden, in den 20er Jahren die Auffassungen von einer modernen Algebra als Theorie algebraischer Strukturen voll durchgesetzt zu haben. Es ging ihnen dabei wesentlich um die Aufdeckung der abstrakten Begriffe, die den einzelnen algebraischen Theorien gemeinsam waren. Die Ansichten dieser Algebraiker drückten sich beispielsweise in den Worten van der Waerdens aus, mit denen er die Maxime E. Noethers charakterisiert:

„Alle Beziehungen zwischen Zahlen, Funktionen und Operationen werden erst dann durchsichtig, verallgemeinerungsfähig und wirklich fruchtbar, wenn sie von ihren besonderen Objekten losgelöst und auf allgemeine begriffliche Zusammenhänge zurückgeführt sind.“ ([L 14.26], S. 469)

In ihren Forschungen knüpften sie vor allem an die Arbeiten von Dedekind und Steinitz an. Diese beiden Mathematiker hatten in der Körpertheorie eine Tendenz der „Linearisierung“ begründet, und diese Tendenz wurde zu einem charakteristischen Merkmal der von E. Noether, Artin und ihren Schülern geschaffenen Algebra. So war bei E. Noether die Idealtheorie eine Anwendung der Modultheorie. Die Wahl des abstrakten Modulbegriffs als Ausgangspunkt idealtheoretischer Forschungen führte in natürlicher Weise dazu, daß Konstruktionen der linearen Algebra wie Quotienten- und Produktbildung angewandt wurden. In diesem Zusammenhang wurden durch die Arbeiten von E. Noether und Krull die von Poincaré 1903 und Wedderburn 1907 definierten Rechts- und Linksideale einer Algebra zu neuem Leben erweckt und fest im Begriffssystem der Algebra verankert. Mit der Unterscheidung zwischen einseitigen und zweiseitigen Moduloperationen traten nun nichtkommutative Strukturen als Untersuchungsobjekte auf, die die kommutativen als Spezialfall enthalten. Die homologische Algebra verstärkte die obige Tendenz der Linearisierung weiter, wobei H. Cartan 1948 mehrere grundlegende Begriffe dieser Theorie bei der Untersuchung spezieller Moduln formulierte.

Ende der 20er Jahre waren somit drei Säulen der modernen Algebra – Gruppen-, Körper- und Algebrentheorie (Theorie hyperkomplexer Systeme) – in ihrer abstrakten und axiomatischen Form entwickelt. Durch diese Gliederung in ihre Grundstrukturen war die Algebra zu einem übersichtlichen Zweig der Mathematik geworden. Aber häufig betrachtete man die algebraischen Begriffe und Methoden als zweitrangig gegenüber denen der Analysis. Diese Situation wurde durch van der Waerden und sein Buch „Moderne Algebra“ (1930/31) entscheidend geändert. Das Ziel dieses Buches, das den damaligen Entwicklungsstand repräsentierte und die neuesten Forschungsergebnisse von E. Noether, Artin und ihrer algebraischen Schule zusammenfaßte, charakterisierte der Autor so:

„Die ‚abstrakte‘, ‚formale‘ oder ‚axiomatische‘ Richtung, der die Algebra ihren erneuten Aufschwung in der jüngsten Zeit verdankt, hat vor allem in der Körpertheorie, der Idealtheorie, der Gruppentheorie und der Theorie der hyperkomplexen Zahlen zu einer Reihe von neuartigen Begriffsbildungen, zur Einsicht in neue Zusammenhänge und zu weitreichenden Resultaten geführt. In diese ganze Begriffswelt den Leser einzuführen, soll das Hauptziel dieses Buches sein.“ ([L 14.25], S. 1).

Dieses hervorragend geschriebene Buch, dessen Nachauflagen heute noch zu den besten Algebralehrbüchern zählen, hinterließ bei den Mathematikern einen sehr starken Eindruck. Algebraische Probleme nahmen scheinbar plötzlich einen zentralen Platz unter den mathematischen Forschungen ein.

Die folgenden Jahre kann man als eine Blütezeit der abstrakten Algebra bezeichnen. So knüpften Birkhoff, v. Neumann u. a. an die grundlegenden Arbeiten von Dedekind zur Verbandstheorie an und bauten die Theorie weiter aus, um sie insbesondere bei der Lösung algebraischer Fragen anzuwenden. Die Axiomatisierung anderer mathematischer Disziplinen war in dieser Zeit schon so weit fortgeschritten,

daß es möglich wurde, die algebraischen Methoden auf viele Gebiete sehr nutzbringend anzuwenden. Die grundlegende Voraussetzung hierzu war die Herausarbeitung des algebraischen Substrats der jeweiligen Theorie, um ihre algebraischen Grundstrukturen und deren eventuell vorkommenden Mischungen klar zu kennen.

Die Betonung des abstrakten strukturellen Denkens wurde durch die Mathematiker der Bourbakigruppe noch verstärkt. In den „*Eléments de Mathématique*“, die ab 1939 erschienen, versuchten sie, die gesamte Mathematik durch weitere Axiomatisierung und Formalisierung neu aufzubauen. Ausgehend von den Begriffen der Menge und der Funktion entwickelten sie die Mathematik als Lehre von den Strukturen und den Abbildungen zwischen ihnen. Bei der damit verbundenen Suche nach den logisch einfachsten, mathematischen Strukturen fanden sie die algebraischen als zu den Grundstrukturen gehörig heraus. Die seit der Herausbildung der „*Modernen Algebra*“ betriebene Analyse der algebraischen Strukturen führte zu einer starken Hinwendung zu rein begrifflichen Beweismethoden und zu einer Vielzahl von Problemen, die eine stürmische Entwicklung stimulierten. Gleichzeitig wurden der Formelkalkül und die expliziten Algorithmenprozesse zurückgedrängt, was sich auch in einem teilweisen Übergang von konstruktiven Beweisen zu reinen Existenzbeweisen ausdrückt. Die Tendenz zur weiteren Abstraktion setzte sich bis in die 60er Jahre fort, wovon etwa die 1960 erschienene „*Algebra*“ von Birkhoff und MacLane zeugt. In diesem Buch benutzten die Autoren insbesondere die Sprache der Kategorientheorie, deren Anwendung auf die einzelnen mathematischen Disziplinen eine wesentliche Vereinheitlichung der Mathematik bewirkte.

Mit der Konstruktion und der verstärkten Nutzung elektronischer Datenverarbeitungsanlagen wurden jedoch in der Algebra wieder Bestrebungen spürbar, die sich an praktischen Erfordernissen orientierten. Verschiedene algebraische Strukturen (z. B. Gruppoid, Halbgruppe, Verband u. a.), die ein gewisses Schattendasein geführt hatten, gelangten nun zu größerer Bedeutung. Gleichzeitig bemühte man sich erfolgreich um den Einsatz der modernen abstrakten Theorien (z. B. universelle Algebra) zur Lösung der praktischen Probleme. Bei der Suche nach effektiveren und genaueren Algorithmen stieß man oft auf Fragen, die zur „klassischen“ Algebra gehören; es entstand die „neue numerische Algebra“. Die Algebra unserer Zeit ist also durch eine Vielfalt von Wechselwirkungen und Anwendungen gekennzeichnet, wobei „moderne“ und „klassische“ Ideen ständig vermischt und neugestaltet werden.

Entwicklung spezieller Gebiete der neueren Algebra

Der Grundgedanke der Theorie der p -adischen Zahlen, über die Hensel erstmals 1899 veröffentlichte, beruht auf der Anwendung der Potenzreihenmethode in Zahlkörpern. Trotz der anfänglich mangelhaften Fundierung wirkten Hensels Ideen äußerst anregend auf die weiteren Forschungen. Einerseits sind sie Ausgangspunkt der Untersuchungen, die Steinitz bzw. Fraenkel zum abstrakten Körper- bzw. Ringbegriff führten; andererseits lieferten sie ein Beispiel für einen bewerteten Körper, der 1913 von Kürschak allgemein definiert wurde.

In den folgenden Jahren erlangte der Bewertungsbegriff eine große Bedeutung in Zahlentheorie, Arithmetik und Algebra, wie Ostrowski 1932 in einer umfangreichen Arbeit darlegte. Für die zahlentheoretischen Anwendungen sind insbesondere die Komplettierungen eines algebraischen Zahlkörpers wichtig. Ausgehend von einer Henselschen Idee benutzte Chevalley 1936 die Einbettung eines algebraischen Zahlkörpers in das Produkt seiner Komplettierungen und die damit verbundene Möglichkeit, durch die Einführung einer geeigneten Topologie die Theorie der lokal-kompakten Gruppen anwenden zu können, in zahlentheoretisch fruchtbarer Weise. Bereits 1918 hatte Ostrowski alle Bewertungen des rationalen Zahlkörpers bestimmt, während Hasse, F. K. Schmidt, Teichmüller und Witt bis Mitte der 30er Jahre alle Bewertungen beliebiger Körper klassifizierten. Eine weitere Verallgemeinerung der Bewertungen stammt von Krull, der 1932 statt der reellen Zahlen eine geordnete Gruppe als Wertebereich der Bewertung annahm. Später wurde die Bewertungstheorie von van der Waerden, Zariski und seinen Schülern erfolgreich in der algebraischen Geometrie eingesetzt.

Wichtige Fortschritte wurden 1927 in der Theorie der reellen Körper durch die Veröffentlichungen von Artin und Schreier erzielt. Eines der bemerkenswertesten Ergebnisse bestand darin, die Existenz einer Ordnungsrelation über einem Körper als rein algebraische Eigenschaft dieses Körpers nachzuweisen.

Eine Neubegründung und eine Formulierung mit den Begriffen der abstrakten Algebra erhielt die Galoistheorie, die eine Zuordnung zwischen den Zwischenkörpern eines normalen Erweiterungskörpers und den Untergruppen der zugehörigen Galoisgruppe herstellt. Im Prinzip deutete Dedekind bereits um 1857 erstmals die Elemente der Galoisgruppe nicht als Substitutionen, sondern als Körperautomorphismen. Diese Auffassung vertraten dann auch Hilbert, E. Noether und Artin und deren Schüler.

Steinitz hatte andererseits in seiner fundamentalen Arbeit das körpertheoretische Fundament für eine Galoistheorie geliefert, die nicht auf Zahl- und Funktionenkörper beschränkt war. In seiner Vorlesung (1926) lehrte Artin die Galoistheorie als Strukturtheorie der normalen Erweiterungskörper, also ganz im Sinne der Hilbert-Noetherschen Vorstellungen. Aber erst in seinem Buch „Galois Theory“ (1938) konnte er den „Makel“, die Verwendung des primitiven Elements beim Beweis des Hauptsatzes der Galoistheorie, beseitigen.

Die Galoistheorie hatte auch Lie schon im 19. Jh. zur Schaffung seiner Theorie der kontinuierlichen Gruppen angeregt. Lie hatte die Idee, daß es für Differentialgleichungen ebenfalls eine Galoistheorie geben müsse. Der Begriff der Lieschen Gruppe wurde dann zu dem der topologischen Gruppe erweitert. Wichtige Ideen zu dieser Entwicklung lieferten Hilbert und Brouwer. Der Begründer der Theorie der topologischen Gruppen war Schreier (1925). Hier hat man ein Beispiel für die Algebraisierung der Mathematik, insbesondere der Wechselwirkung zwischen der aufstrebenden abstrakten Algebra und anderen Gebieten der Mathematik (Analysis, Topologie). Dies ist ein wesentlicher Grund für die stürmische Entwicklung, die die topologischen Gruppen einschließlich der Lieschen Theorie in den letzten Jahrzehnten genommen haben. Die Entwicklung dieser Theorie erforderte tiefgehende Untersuchungen in den verschiedensten Einzeldisziplinen, doch die erzielten Fort-

schritte geben zusammen mit dem verbesserten oder neu geschaffenen algebraischen Apparat oft Anlaß zu wertvollen Anwendungen in den Einzeldisziplinen. Diese gegenseitige Beeinflussung wird etwa in der Theorie der Mannigfaltigkeiten deutlich. Weyl nutzte eine Idee von Hurwitz zur Integration über Gruppen systematisch aus und vollendete 1927 die von E. Cartan schon vor der Jahrhundertwende begonnenen Forschungen zur Struktur der einfachen Lieschen Gruppen und ihrer irreduziblen Darstellungen. Zu Beginn der 30er Jahre leisteten Haar, v. Neumann und Pontrjagin außerordentlich wichtige Beiträge zur Integration nach einem invarianten Maß auf lokal kompakten Gruppen und wandten dies erfolgreich bei Strukturuntersuchungen topologischer Gruppen an. Weitere Fortschritte sind mit den Namen Gleason, Montgomery und Zippin verbunden, die u. a. 1952 das 5. Hilbertsche Problem lösten.

Als weiteres Beispiel der Wechselwirkung zwischen Algebra und Topologie sei die algebraische Topologie, die um die Jahrhundertwende mit der Einführung der Fundamentalgruppen eines topologischen Raumes und der Betti-Gruppen ihren Anfang nahm, wenigstens genannt. Auch das interessante und vielschichtige Problem der Strukturuntersuchung von Gruppen und Algebren kann nur erwähnt werden. Dabei war es wieder der modultheoretische Ausgangspunkt, der es E. Noether erlaubte, die Darstellungstheorie der Algebren als primär gegenüber der Darstellung von Gruppen zu charakterisieren und damit die Verbindung zwischen diesen beiden Problemkreisen herzustellen. Die Darstellungstheorie fand schon in den 20er Jahren erfolgreiche Anwendung in der Quantenphysik und erwies sich in der Folge auch in der Funktionalanalysis und in der Theorie der fastperiodischen Funktionen als sehr nützlich.

Die Geschichte der modernen Algebra wurde von einer Vielzahl von bedeutenden Mathematikern getragen; stellvertretend für viele andere seien hier noch A. Weil, Macaulay, H. Cartan, Grothendieck und Serre genannt.

Vorlesung 15

**Zwanzigstes Jahrhundert: Funktionalanalysis.
Wahrscheinlichkeitsrechnung. Lineare Optimierung.
Rechentechnik**



Elektronisches Datenverarbeitungssystem EC 1040

Zur Entstehung und Entwicklung der Funktionalanalysis

Die moderne Funktionalanalysis hat ihren Vorläufer in jener sog. „Funktionalrechnung“ (calcul fonctionnel), die um die Jahrhundertwende ihr Anwendungsgebiet in der Analyse von Abbildungen von Funktionenmengen in Zahlenmengen sah. Diese Arbeitsrichtung wurde insbesondere in Frankreich gepflegt. Hadamard, der Schöpfer des Prinzips der topologischen Dualität, prägte den Ausdruck „fonctionnelle“ und trug erste Gedanken einer verallgemeinerten Analysis auf dem I. Internationalen Mathematikerkongreß 1897 in Zürich vor. Nach einem von wichtigen Entdeckungen gefüllten Zeitraum führte der Ungar Riesz 1910 mit Hilfe seines Darstellungssatzes für Funktionale sog. „adjungierte Operatoren“ in den Räumen der zur p -ten Potenz Lebesguesummierbaren Funktionen (L^p) ein. Das war der Beginn der abstrakten Operatoretheorie, die einen inhaltlichen Schwerpunkt der Funktionalanalysis darstellt.

Unter Funktionalanalysis versteht man heute eine „allgemeine“ Analysis, die die Verallgemeinerungen aller Grundbegriffe der klassischen Analysis wie Grenzwert, Konvergenz, Stetigkeit, Differenzierbarkeit usw. auf den Fall der Abbildung einer Menge in die andere bei immer allgemeineren Annahmen bezüglich dieser Mengen behandelt. Damit gelingt es der Funktionalanalysis, die verschiedensten mathematischen Probleme unter einem einheitlichen Gesichtspunkt zu betrachten, von den für die Aufgabe unwesentlichen speziellen Bedingungen zu abstrahieren und durchgängige Lösungsverfahren zu verwenden. Die Funktionalanalysis durchdringt sich in vielen Fällen mit anderen mathematischen Disziplinen wie Topologie, Algebra und Geometrie und benutzt teilweise deren Methoden.

Die Anfänge der Funktionalanalysis

Die Anfänge der Funktionalanalysis lagen in Italien. Ascoli versuchte 1884, den Bolzano-Weierstraßschen Häufungstellensatz auf Funktionenmengen auszudehnen, und erhielt so seinen Satz über die Kompaktheit einer gleichgradig stetigen und gleichmäßig beschränkten Funktionenmenge. Dieser Satz ist dann von Arzelà auf Kurvenmengen ausgedehnt worden. Andererseits war Volterra vor allem von physikalischen Problemen inspiriert, als er 1887 seine „Linienfunktionen“ (funzioni di linee) einführte; eine solche ist z. B. die Energie eines Stromes in Abhängigkeit von der Gestalt des Drahtes, der sich in einem Magnetfeld verschiebt oder verbiegt.

Der Durchbruch zur vollen Allgemeinheit gelang erst den französischen Mathematikern um Hadamard und seinem Schüler Fréchet. Ihr Ausgangspunkt war die Variationsrechnung: Wenn nämlich z. B. unter allen zulässigen Konkurrenzfunktionen $y(x)$ diejenige gesucht wird, für die das Integral $\int_a^b f(x, y, y') dx$ einen Extremwert annimmt, so bedeutet das nichts anderes, als daß ein Funktional, dessen De-

initionsbereich eine Menge von Funktionen $y(x)$ ist, auf Extremwerte untersucht wird.

Um die Jahrhundertwende konnte die Mengenlehre internationale Anerkennung erreichen, in Frankreich sogar etwas früher als in Deutschland; sie befruchtete vor allem in methodischer Hinsicht entscheidend die Entwicklung der Funktionalanalysis. Es wurde durch die Arbeiten von Borel, Baire und Lebesgue aus der Zeit der Jahrhundertwende die grundlegende Bedeutung der Mengenlehre für ein tiefergehendes Studium der reellen Funktionen, z. B. mit Hilfe der Maßtheorie, erwiesen.

Hier knüpften die Funktionalanalytiker unmittelbar an. In seiner berühmten „Pariser Thèse“ von 1906, der Dissertation, die eines der markantesten Ereignisse in der Geschichte der Funktionalanalysis darstellt, bemühte sich Fréchet um eine noch weitergehende Verallgemeinerung des Begriffs der stetigen Funktion. Gestützt auf die Cantorsche Punktmengentheorie als allgemeine Grundlage heißt es bei Fréchet:

„Die erste Verallgemeinerung, die sich in natürlicher Weise ergab, ist die des Begriffes der stetigen Funktion. Wenn man aber wünscht, ihn auf Operationen auszudehnen, deren Variablen von willkürlicher Natur sind, dann muß man zuerst wissen, was unter benachbarten Elementen oder unter Grenzwert einer Folge von Elementen verstanden wird.“ ([15.11], S. 2, franz.)

Und ferner:

„... wir werden sagen, daß ein Funktional U in einer Menge E von Elementen willkürlicher Natur (Zahlen, Kurven, Punkte usw.) definiert ist, wenn jedem Element A von E ein durch U bestimmter Zahlenwert $U(A)$ zugeordnet wird.“ ([L 15.11], S. 1, franz.)

Ganz folgerichtig ging Fréchet zur Aufstellung von Axiomen für abstrakte Räume über, also für „Räume“, deren Elemente abstrakt waren; bisher hatte man konkrete Objekte — Zahlen, Funktionen, Vektoren usw. — vor Augen gehabt.

Die Herausbildung der selbständigen Funktionalanalysis

Fréchets Ideen, die auf eine qualitativ höhere Stufe der Abstraktion hinausliefen, waren damals etwas völlig Neues und Ungewohntes. Dennoch wurden sie aufgegriffen und weiterentwickelt von Mathematikern, die ohnedies schon der Mengenlehre nahestanden, z. B. von Hausdorff in Deutschland und von Riesz.

Um eben diese Zeit, zu Anfang des Jahrhunderts, wurde die Theorie der linearen Integralgleichungen zur zweiten historischen Wurzel der modernen Funktionalanalysis. Im Wintersemester 1900/1901 hielt ein Student aus Uppsala in Göttingen einen Vortrag über die von dem Schweden Fredholm entwickelte Theorie der Integralgleichungen; auch dort findet sich ein Keim unserer heutigen Konzeption von Funktionenräumen.

Fredholm behandelte Integralgleichungen vom Typ

$$f(s) = \varphi(s) + \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt$$

mit unbekannter Funktion $\varphi(x)$ und gegebenem Kern $K(x, t)$. Fredholm setzte dieses Problem – ähnlich wie auch Volterra – in Analogie zum linearen Gleichungssystem

$$\Phi_p + \sum_{q=1}^n K_{pq} \Phi_q = f_p, \quad p = 1, 2, \dots, n,$$

fürte den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ durch, indem er eine Verallgemeinerung des Cramerschen Determinantenlösungsverfahrens anwendete, und wies schließlich nach, daß die so erhaltenen Funktionen die Ausgangsgleichung lösen.

Hilbert griff die Anregung auf und begründete mit seinen sechs berühmt gewordenen Abhandlungen über Integralgleichungen (zwischen 1904 und 1910) eine deutsche Schule der Funktionalanalysis. Hilbert erkannte den weitreichenden Ansatz, den Fredholm vollzogen hatte, als er zu einer Analysis mit einer unendlich großen Zahl von Variablen übergegangen war. Hilbert baute diesen Ansatz – unter Würdigung der Verdienste von Fredholm, C. Neumann, Volterra, Poincaré – systematisch aus, sowohl im Hinblick auf das auslösende Grundproblem, das der Behandlung von linearen Integralgleichungen, als auch im Hinblick auf eine allgemeine Theorie der linearen Funktione im Hilbertschen Folgenraum, die auch die Theorie der Integralgleichungen in sich enthalten müsse:

„Die Methode, die ich ... anwende, besteht darin, daß ich von einem algebraischen Problem, nämlich dem Problem der orthogonalen Transformation einer quadratischen Form von n Variablen in eine Quadratsumme ausgehe und dann durch strenge Ausführung des Grenzüberganges für $n \rightarrow \infty$ zur Lösung des zu behandelnden transzendenten Problems gelange. Dieselben Theoreme über Integralgleichungen mit symmetrischem Kern werde ich ... auf einem anderen Weg mittels der Methode der unendlich vielen Variablen entwickeln.“ ([15.17], S. 3)

Gerade diese bewußt angestrebte methodisch einheitliche Gestaltung von Analysis und Algebra, der Versuch, einen zusammenfassenden Gesichtspunkt in einer als einheitlichen Organismus aufgefaßten Mathematik in den Vordergrund zu stellen, ließ Hilbert einen großen Einfluß auf die nachfolgende Entwicklung gewinnen. Seine Schüler auf diesem Gebiet, insbesondere Riesz und E. Schmidt, dehnten die Gültigkeit der Sätze und Methoden auf noch allgemeinere Funktionenklassen aus. Riesz bewies 1907 in der Arbeit „Über orthogonale Funktionensysteme“ mit Hilfe des sog. Satzes von Fischer-Riesz, daß der Hilbertsche Folgenraum isomorph zum Raum der nach Lebesgue quadratisch integrierbaren Funktionen ist, daß also diese beiden Räume nicht mehr unterschieden werden müssen. E. Schmidt dagegen führte die geometrische Sprechweise in die Untersuchungen über den Hilbertraum ein; von ihm stammen Begriffe wie Orthogonalität, Norm und Projektion.

Mit dem Satz von Fischer-Riesz (1907) wurde auch der Wert der Ideen von Lebesgue deutlicher; von nun an sollte die Integrationstheorie eng mit der Funktionalanalysis verbunden bleiben. Arbeiten von Radon (1913), Fréchet (1915) und Daniell (1917) erwiesen die Bedeutung der Untersuchung positiver linearer Funktionale für eine Theorie der Integration auf abstrakten Räumen; der funktionalanalytische Zugang zur Integrationstheorie war geschaffen.

Andererseits blieben diese Auffassungen, Ideen und Methoden wegen ihres hohen Grades an Abstraktion durchaus nicht unbestritten. So berichtete der Engländer Young, der sich frühzeitig der Mengenlehre verschrieben hatte, von einem prominenten

(aber ungenannt gebliebenen) französischen Mathematiker, der sich noch 1900 weigerte zu glauben, daß Funktionen $f(x, y)$, die einzeln in x und y stetig sind, Unstetigkeiten besitzen können.

Der Weg zur Anerkennung der abstrakten Denkweise war mühsam. Fréchet selbst hatte betont, daß eine allgemeine Theorie nicht deshalb nützlich ist, weil sie allgemein ist. Vielmehr konnte erst ein langer Umgang mit den Begriffen und Methoden der Funktionalanalysis deren Anerkennung herbeiführen, indem die fusionierende Kraft ihrer Sätze und Methoden an einer Vielzahl von Fällen erwiesen wurde.

Weiterentwicklung der Funktionalanalysis

Gerade dies macht den Inhalt einer dritten historischen Etappe der Funktionalanalysis aus. Unterstützend in dieser Richtung wirkten auch die ersten Anwendungen der Funktionalanalysis. Die Entwicklung der Quantenmechanik zum Beispiel zeigte 1923, daß die beobachtbaren Größen eines atomaren Systems durch lineare symmetrische Operatoren im Hilbertraum repräsentiert werden können. Die von Hilbert 15 Jahre zuvor definierten Eigenwerte des Operators, der hierbei die Energie repräsentiert, konnten z. B. als Energieniveaus von Elektronen eines Atoms gedeutet werden.

Mit Hausdorffs „Grundzügen der Mengenlehre“ (1914), in denen der Begriff des topologischen Raumes eingeführt wurde, begann die moderne mengentheoretische Topologie; sie ist z. B. für die Theorie der linearen topologischen Räume, die später im Zusammenhang mit den verallgemeinerten Funktionen bei Sobolev und Schwartz besondere Bedeutung erlangte, von grundlegender Wichtigkeit. Besonders verdient es die 1922 im Druck erschienene Arbeit des polnischen Mathematikers Banach „Sur les opérations dans les ensembles abstraits ...“ hervorgehoben zu werden. Hier schuf Banach eine einheitliche Methode für die (lineare) Funktionalanalysis, wobei er, ebenso wie vorher Fréchet, auf konkrete Vorstellungen über die Natur der Elemente des Raumes ganz verzichtete. Er axiomatisierte die vollständigen linearen normierten Räume abstrakter Elemente; sie tragen heute seinen Namen. Die verschiedenen Hauptrichtungen der Funktionalanalysis wie etwa die von v. Neumann 1929 begründete abstrakte Theorie des Hilbertraumes und die Theorie der Operatoren in ihm stellen einen weiteren Ausbau der von Fréchet, Hausdorff und Banach gegebenen Ansätze dar, wobei den Mengen der abstrakten Elemente zusätzlich gewisse Strukturen aufgeprägt wurden.

Der obigen Arbeit von Banach, mit der er 1920 promovierte, kommt in der Geschichte der Funktionalanalysis eine entscheidende Rolle zu. Sie schuf die Basis für die rasche Entfaltung der Funktionalanalysis in den 20er und 30er Jahren, an der z. B. Steinhaus und der Banach-Schüler Schauder sowie Luzin, Kolmogorov, P. S. Alexandroff, Birkhoff, Kellogg, v. Neumann, Stone und andere führend beteiligt waren. In die Zeit vor dem zweiten Weltkrieg fällt das Entstehen neuer Teildisziplinen der Funktionalanalysis, die neben den schon traditionell gewordenen bald in den Mittelpunkt der Aufmerksamkeit gelangten. Es seien nur die Theorie der normierten

Algebren (Gel'fand, 1940) und die Theorie der halbgeordneten Räume erwähnt, die um 1935 von dem sowjetischen Mathematiker Kantorovič begründet wurde.

In den zwanziger Jahren — zur Zeit der Schaffung des Banachraumes und der Anwendung der Funktionalanalysis auf die Quantenmechanik — glaubten viele Mathematiker, in der Funktionalanalysis eine Art Vorstufe für eine „Zukunftsmathematik“ erblicken zu können, die mit allgemeinen Methoden die Mehrzahl der speziellen mathematischen Probleme lösen könnte. Diese Vermutung oder Hoffnung hat sich nicht bestätigt. Vielmehr zeigte sich nach einiger Zeit ein gewisser Mangel an neuen Anwendungsmöglichkeiten auf die großen klassischen Probleme der Analysis; diese können offenbar nur mit verfeinerten, speziellen Methoden gelöst werden.

Dessenungeachtet hat die Funktionalanalysis heute, gerade wegen der Allgemeingültigkeit und großen Reichweite ihrer Methoden, sowohl in der reinen als auch in der angewandten Mathematik einen festen Platz gefunden. Insbesondere in der Mechanik wächst der Einfluß der Funktionalanalysis noch ständig an.

Zur Entwicklung der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung

Zu Beginn des 19. Jh. hatte in der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung Stagnation eingesetzt. Unfruchtbare Auffassungen wirkten besonders in Westeuropa noch lange Zeit nach, trotz bedeutender Erfolge der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der kinetischen Gastheorie, in Fehlerrechnung und Ballistik.

Die russische wahrscheinlichkeitstheoretische Schule

Lediglich Rußland bildete eine Ausnahme. Zwar sind auch hier negative Einflüsse spürbar, z. B. bei Bunjakovskij, aber die Ideen von Čebyšev wirkten so stark, daß es in Petersburg (Leningrad) zu einer Weiterentwicklung und zur Herausbildung einer russischen Schule der Wahrscheinlichkeitsrechnung kam. So verfaßte Bunjakovskij das erste russische Lehrbuch zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und tat damit viel für die Verbreitung der Lehren von Laplace und Poisson, doch propagierte er darin auch die unbegründete Anwendung auf Gerichtsurteile und andere Fragen des gesellschaftlichen Lebens. Unter Čebyšev wurde die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu einer strengen mathematischen Disziplin. Diese Forderung nach mathematischer Strenge verwirklichte er beispielsweise dadurch, daß er unklare Formulierungen und unsachgemäße Anwendungen ausmerzte und daß er nach genauen Abschätzungen der Abweichungen von den Grenzesetzmäßigkeiten suchte, wobei diese Ungleichungen bei einer beliebigen Anzahl von Versuchen gelten sollten. Weiter verdanken wir Čebyšev den Grenzwertsatz für Summen unabhängiger Zufallsgrößen, die Momentenmethode, eine Verallgemeinerung des Gesetzes der großen Zahlen sowie die Tatsache, daß er den Begriffen „Zufallsgröße“ und „Erwartungswert“ einen zentralen

Platz im Begriffssystem der Wahrscheinlichkeitsrechnung zuwies und sie entsprechend ausnutzte. Čebyšev war auch ein ausgezeichnete Lehrer und scharte viele sehr gute Schüler um sich. Auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind dabei besonders Markov und Ljapunov zu nennen. Ljapunov wandte als erster die charakteristischen Funktionen in der Theorie der Grenzwertsätze an. Der Ljapunovsche Grenzwertsatz wurde später durch Bernštejn, Chinčîn, Feller, Lévy und Linnik verallgemeinert. Auf Markov gehen u. a. die „Markovschen Ketten“ zurück. Diese bilden zusammen mit den Ideen und Untersuchungen von Poincaré und Bachelier den Ausgangspunkt für die Theorie der zufälligen Prozesse, um deren Schaffung sich Kolmogorov und Chinčîn sehr verdient machten. Die Theorie der zufälligen Prozesse führte auf Grund zahlreicher mathematischer Resultate und der großen Anwendungsmöglichkeiten in der Naturwissenschaft zu einem Aufschwung in der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Es wäre jedoch falsch, diese Fortschritte nur im Zusammenhang mit der Theorie der zufälligen Prozesse zu sehen. Denn auch diese Theorie verdankt ihre Fundierung jenen Ideen der Mengenlehre und der Funktionentheorie, die die weitere Profilierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung außerordentlich beeinflussten. Die neuen Methoden aus der Theorie der reellen Funktionen finden wir zuerst besonders in den Arbeiten der französischen Mathematiker Borel, Lévy und Fréchet. Die Ausnutzung der analytischen Mittel und Methoden erlaubte es auch, die Behandlung der immer vielfältiger werdenden Probleme aus Physik, Technik und Ökonomie zu erweitern und die Untersuchung einer Reihe klassischer Aufgaben abzuschließen. Auch in dieser Zeit blieb die russische Schule der Wahrscheinlichkeitsrechnung führend. In England und den USA waren bereits unter Pearson, Fisher und Wald leistungsfähige Zentren der mathematischen Statistik entstanden, während in diesen Staaten die Wahrscheinlichkeitsrechnung eine vergleichsweise geringe Rolle spielte.

Nach der Oktoberrevolution ging aus der Moskauer funktionentheoretischen Schule unter Luzin ein weiteres Zentrum der Wahrscheinlichkeitsrechnung hervor. An der Spitze standen Chinčîn, Kolmogorov und Sluckij, während Bernštejn in Leningrad wirkte. In Gegensatz zu den Vorkriegsjahren wurde auch die mathematische Statistik stark gefördert.

Auf dem Wege zur Axiomatisierung

So groß die Erfolge in der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu Beginn des 20. Jh. auch waren, die logischen Grundlagen waren noch nicht genügend entwickelt und aufgeklärt und boten so die Möglichkeit zu vielen Mißdeutungen und fehlerhaften Anwendungen, z. B. beim Bertrandischen Paradoxon. Immer stärker wurde die Laplace'sche Definition der Wahrscheinlichkeit als unzureichend erkannt. So forderte Hilbert aus Einsicht in dieses Dilemma die Präzisierung der Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung mittels der axiomatischen Methode.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung wurde vom Prozeß der Axiomatisierung relativ spät erfaßt. Die ersten Schritte unternahmen Poincaré und Borel. Von Borel stammt der Hinweis auf den Zusammenhang zwischen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Maßtheorie, der sich für die weitere Entwicklung als sehr fruchtbringend erwies.

1917 veröffentlichte Bernštejn den ersten systematischen Aufbau der Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung, den er später noch ausbaute und ausführlich darlegte. Sein Axiomensystem basiert auf dem qualitativen Vergleich zufälliger Ereignisse nach ihrer größeren oder kleineren Wahrscheinlichkeit. Dieser Ansatz wurde auch von Koopman und Glivenko weiterbearbeitet, wobei letzterer 1939 zeigen konnte, daß dieser Ansatz, der auf der Betrachtung vollständiger normierter Boolescher Algebren beruht, mit der Axiomatik Kolmogorovs übereinstimmt. Einen weiteren Versuch der axiomatischen Charakterisierung unternahm v. Mises. Seine Ideen weckten das Interesse bei vielen Mathematikern und Naturwissenschaftlern und lösten sehr heftige, durchaus fruchtbringende Diskussionen aus. v. Mises, der die Wahrscheinlichkeitsrechnung als mathematische Naturwissenschaft, nicht als Disziplin der Mathematik betrachtete, knüpfte an Arbeiten zur „Kollektivmaßlehre“ an und schuf eine Theorie auf der Basis des Konzepts der relativen Häufigkeit. Der grundlegende Begriff ist der des Kollektivs:

„Zuerst muß ein Kollektiv da sein, dann erst kann von Wahrscheinlichkeit gesprochen werden.“ ([L 15.30], S. 14)

„Kollektiv ist eine unendliche Folge von Beobachtungen, deren jede mit der Feststellung eines Merkmals endet. Die relative Häufigkeit, mit der ein Merkmal auftritt, besitzt einen Grenzwert (Existenz des Grenzwerts, K.-H. S.), und dieser ändert sich nicht, wenn durch Stellenauswahl eine Teilfolge herausgehoben wird (Regellosigkeit, K.-H. S.).“ ([L 15.30], S. 75)

Das „Kollektiv“ stellt also ein Modell für das Auftreten zufälliger Ereignisse dar, wobei gewisse Bedingungen erfüllt sein müssen. Mit diesem Konzept, einschließlich der darin geforderten Bedingungen, und vier von ihm eingeführten Operationen konnte v. Mises einen Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung geben, der die klassischen Sätze enthielt, aber recht umständlich war. In dieser Theorie führte er bereits 1919 mehrdimensionale Verteilungsfunktionen ein. Da die theoretischen Grundlagen wie auch praktische Realisierung Anlaß zu Kritiken gaben, erscheint es verständlich, daß sich der Kolmogorovsche Zugang durchsetzte und die v. Misessche Theorie in den Hintergrund gedrängt wurde. Erst in den 60er Jahren regten Fortschritte in der Algorithmen- und Komplexitätstheorie neue Studien zur Konvergenz von relativen Häufigkeiten und der Definition von Zufallsfolgen an. Durch die Arbeiten von Fine, Kolmogorov und Schnorr wurde gezeigt, daß das v. Misessche Modell in modifizierter Form gleichberechtigt zu anderen Theorien als Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung angesehen werden kann, insbesondere bewies Schnorr, daß die Kolmogorovschen Axiome aus dem modifizierten Häufigkeitsmodell ableitbar sind.

Die Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung durch Kolmogorov

Unmittelbar an die Ideen von Borel knüpfte Lomnicki an und publizierte 1923 eine Axiomatik auf der Grundlage der mengentheoretischen Konzeption. Doch in allen solchen Versuchen zum axiomatischen Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung

blieben grundlegende Probleme ungelöst und wurden nicht einmal mathematisch exakt formuliert. Dies betraf vor allem die axiomatische Begründung der Rechenoperationen mit Ereignissen und ihren Wahrscheinlichkeiten und die Definition grundlegender Begriffe wie Zufallsgröße, mathematische Erwartung und bedingte Wahrscheinlichkeit. 1933 stellte Kolmogorov in der Monographie „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ das heute noch übliche Axiomensystem auf. Im Vorwort bemerkte Kolmogorov zur axiomatischen Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung:

„Vor der Entstehung der Lebesgueschen Maß- und Integrationstheorie war diese Aufgabe ziemlich hoffnungslos. Nach den Lebesgueschen Untersuchungen lag die Analogie zwischen dem Maße einer Menge und der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses sowie zwischen dem Integral einer Funktion und der mathematischen Erwartung einer zufälligen Größe auf der Hand. ... Um, ausgehend von dieser Analogie, die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu begründen, hatte man noch die Maß- und Integrationstheorie von den geometrischen Elementen, welche bei Lebesgue noch hervortreten, zu befreien. Diese Befreiung wurde von Fréchet vollzogen.“ ([L 15.21], S. III)

Die Axiomatik von Kolmogorov ist nicht die einzig mögliche. Doch wird bei ihm nicht nur eine logisch einwandfreie Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung gegeben, sondern es ist auch möglich, die neu entstandenen Begriffe und Probleme in einem einheitlichen und einfachen System zu erfassen. Wichtig war, daß er in diesem Rahmen „für Anwendungen interessante Probleme“ durch die Betrachtung von Wahrscheinlichkeiten im unendlichdimensionalen Raum behandeln konnte. Durch seinen Hauptsatz wurde es möglich, die phänomenologische Theorie der stochastischen Prozesse in den axiomatischen Aufbau einzuordnen. Dies macht die Bedeutung und die Leistungsfähigkeit seines Ansatzes aus. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung wurde damit als mathematische Disziplin fest in das Gebäude der Mathematik integriert und gestattete nun insbesondere die Anwendung hochentwickelter moderner mathematischer Theorien.

Seit der Aufklärung ihrer Grundlagen nahm die Wahrscheinlichkeitsrechnung eine stürmische Entwicklung sowohl hinsichtlich der Theorie als auch der Anwendungen dieser Theorie. Aus der Vielzahl der einzelnen Aufgaben aus Naturwissenschaft, Technik und Ökonomie wurden die grundlegenden Gesichtspunkte herausgefiltert, um viele konkrete Probleme mit den allgemeinen Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu lösen. Unter den zahlreichen Zentren, die sich mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Fragestellungen beschäftigen, nimmt die Sowjetunion weiterhin einen führenden Platz ein.

Entstehung und Entwicklung der linearen Optimierung

Die Entstehung und Entwicklung der mathematischen Theorie der linearen Optimierung hängt eng mit der Entwicklung des industriellen Produktionsprozesses sowohl im Kapitalismus als auch im Sozialismus zusammen. Entscheidend für die Konstituierung der linearen Optimierung als eine selbständige Teildisziplin waren

ökonomisch-technische Probleme, die in den verschiedensten Bereichen der Industrie und Landwirtschaft auftraten und deren Lösung zur Erhöhung der Effektivität der Produktion und zur weiteren Rationalisierung beitrugen. Dieser Schritt zur Konstituierung der linearen Optimierung als selbständige mathematische Teildisziplin wurde vom Ende der dreißiger bis zum Ende der vierziger Jahre des 20. Jh. vollzogen. Er begann in der Sowjetunion durch Arbeiten Leningrader Mathematiker und Ökonomen und wurde durch amerikanische Mathematiker, Ökonomen und Militärfachleute beendet.

Zur Vorgeschichte der linearen Optimierung

Quesnay war der Begründer der physiokratischen Schule der bürgerlichen politischen Ökonomie, die während des 18. Jh. große Bedeutung erlangte. Die Physiokraten fragten nach der Entstehung der Nationalprodukts und seiner Verteilung zwischen den Klassen und versuchten Bedingungen für eine stabile Wirtschaft aufzudecken. Die bedeutendste Leistung war das „Tableau Économique“ von Quesnay. Die wichtigste Erkenntnis, die dort ihren Ausdruck fand, bestand in der Darstellung des Produktionsprozesses; die Zirkulation wurde nur als eine Form des Reproduktionsprozesses gewertet.

Für die Geschichte der linearen Optimierung ist das „Tableau Économique“ von Bedeutung, da es das erste lineare Modell zur Beschreibung wirtschaftlicher Beziehungen darstellt. Obgleich es noch kein Optimierungsmodell ist, da eine lineare Zielfunktion fehlt und die Verflechtungsbeziehungen in Gleichungsform gegeben sind, finden sich doch bereits gewisse Optimalitätsvorstellungen in dem Sinne, daß nach den Bedingungen gefragt wird, die mindestens erfüllt sein müssen, um von einer stabilen Wirtschaft sprechen zu können (Anm. 15.1).

Im Rahmen der politischen Ökonomie führte die Entwicklung über mehrere Etappen, die mehr oder weniger — als Bestandteile mathematisch-ökonomischer Methoden und Modelle — zur Geschichte der linearen Optimierung gerechnet werden müssen. In die erste Entwicklungsrichtung gehören das Paretosche Optimierungskriterium und die Diskussion dänischer, österreichischer und deutscher Ökonomen in den dreißiger Jahren des 20. Jh. über die Gleichgewichtsmodelle der Lausanner Schule der Grenznutzentheorie. In dieser Zeit erschien auch das Modell einer expandierenden Wirtschaft von v. Neumann. Diese Arbeit ist besonders wegen der Feststellungen zur Dualität der beiden durch v. Neumann formulierten Aufgaben und der in ihnen verwendeten Variablen für die Geschichte der linearen Optimierung von Bedeutung. v. Neumann sollte dann Ende der vierziger Jahre auch einer der ersten sein, der den Zusammenhang zwischen der linearen Optimierung und der Spieltheorie entdeckte.

Eine zweite Linie zeigte sich in der Entstehung der Wirtschaftswissenschaft im 20. Jh., insbesondere in der Schaffung empirischer ökonomischer Modelle zur Behandlung ökonomisch-technischer Probleme und von Fragen der Planung und Bilanzierung. Auf diesem Gebiet wurden gleichzeitig Schritte in den USA und in der UdSSR unternommen. Dabei liegen der von Leontief 1939 an Hand der amerikanischen

Wirtschaft geschaffenen Input-Output-Methode Erkenntnisse von sowjetischen Verflechtungsbilanzen aus den Jahren 1924/25 zugrunde. Das Leontief-Modell seinerseits bildete die Grundlage für die von Danzig 1947/48 im Auftrag der US-AIR FORCE (USAF) geschaffenen linearen Optimierungsmodelle.

Zwischen Leontiefs und Dantzig's Modellen liegt zeitlich aber noch die Entwicklung eines Modells der Transportoptimierung durch Koopmans, der es im zweiten Weltkrieg im Auftrag des Combined Shipping-Board's der USA und Großbritannien zur Minimierung der Verluste in der Handelsschifffahrt während des faschistischen U-Boot-Krieges schuf. Er erkannte zwar das dem Modell zugrunde liegende mathematische Problem und einige seiner Eigenschaften, es gelang ihm aber erst nach seiner Bekanntschaft mit Dantzig's Ideen, diese Erkenntnisse in mathematisch formalisierte Algorithmen umzusetzen.

In der Sowjetunion wurden in den 20er und 30er Jahren gewaltige Anstrengungen zur Rekonstruktion der Industrie und damit auch des Verkehrswesens unternommen. Das führte zu der Frage, wie man rationale Transportpläne entwickeln könne und was darunter zu verstehen sei. Tolstoj schuf dazu aus der Sicht eines Ökonomen drei mathematische Methoden, die das Transportproblem in Netzwerkform behandelten. Aus mathematischer Sicht waren diese Methoden jedoch in ungenügendem Maße formuliert, die Voraussetzungen ihrer Anwendbarkeit nicht klar genug herausgearbeitet und mathematische Beweise der getroffenen Behauptung fehlten völlig. Diese Schritte wurden erst Anfang der vierziger Jahre durch Kantorovič und Gavurin vollzogen.

Eine dritte Linie der Vorgeschichte der linearen Optimierung hat man in der Bereitstellung entsprechender mathematischer Hilfsmittel zu erblicken. Dies betraf vor allem die Grundlagen, die Theorie linearer Ungleichungssysteme und die Theorie konvexer Mengen, insbesondere konvexer Polyeder. Bei Fourier führte die Beschäftigung mit linearen Ungleichungssystemen direkt zur Formulierung und Lösung einer dreidimensionalen linearen Optimierungsaufgabe. Er scheint der erste gewesen zu sein, der die allgemeine Aufgabe der linearen Optimierung formulierte und sie im Fall von drei Variablen löste. Seine Lösung erfolgte auf geometrischem Weg und stellt eine geometrische Version der Simplexmethode von Danzig dar. Fourier behauptete auch ihre Gültigkeit für den n -dimensionalen Fall. Die Art und Weise seines Vorgehens läßt seine tiefe Einsicht in die Struktur und das Wesen von linearen Optimierungsaufgaben erkennen, womit er seiner Zeit weit vorausseilte. Allerdings erkannte er nicht die Bedeutung dieser besonderen Klasse linearer Ungleichungsprobleme. Außerdem gab er die Lösungsschritte nur verbal an und bewies die von ihm aufgestellten Behauptungen nicht.

An Fourier anknüpfend stellte sich Farkas Ende des 19. Jh. die Aufgabe, eine Theorie der linearen Ungleichungssysteme zu entwickeln. Das wichtigste Ergebnis dieser Bemühungen vom Standpunkt der Geschichte der linearen Optimierung aus war ein Satz, der heute als sogenanntes Farkas-Lemma (oder das schwache Farkas-Minkowski-Weyl-Theorem) eine Schlüsselstellung einnimmt. Die zweite Bezeichnung dieses Satzes verweist auf zwei Mathematiker, die sowohl auf dem Gebiet der Theorie linearer Ungleichungssysteme als auch auf dem Gebiet konvexer Mengen Bedeutendes geleistet haben. Minkowski wurde 1896 durch das Studium eines berühmten Problems

der Zahlentheorie zur Erkenntnis der Wichtigkeit konvexer Mengen geführt. In diesem Zusammenhang schuf er auch wesentliche Begriffe sowie zwei Sätze zur Theorie linearer Ungleichungen. Von ihm stammen u. a. eine erste Definition einer konvexen Menge, der Stützebene, des Eckpunktes, des Polarkörpers u. ä. Im Jahre 1935 publizierte Weyl eine Arbeit, in der er den Versuch unternahm, eine Theorie endlicher konvexer Kegel mit finiten Methoden zu entwickeln. Das hervorragendste Ergebnis bestand in der Formulierung und dem Beweis über die beiden äquivalenten Darstellungsmöglichkeiten konvexer polyedrischer Kegel als Lösungsraum eines endlichen Systems linearer Ungleichungen bzw. als endlicher Durchschnitt linearer Halbräume; Vorarbeiten dazu stammen von Minkowski.

Neben diesen vier Mathematikern wurden noch von anderen Mathematikern im 20. Jh. wichtige Beiträge geleistet, sowohl zur Theorie konvexer Mengen als auch zur Theorie linearer Ungleichungssysteme. Aber zur Formulierung einer linearen Optimierungsaufgabe ist niemand vorgedrungen. Dieser Schritt der Zusammenführung der Forschungen auf theoretischen Gebieten der Mathematik und zu angewandten Fragen sollte der Phase des Konstituierungsprozesses der linearen Optimierung als selbständige mathematische Teildisziplin vorbehalten bleiben. In die Vorgeschichte der linearen Optimierung fallen außerdem noch einige Arbeiten, die in keine der bisher behandelten Entwicklungstendenzen eingeordnet werden können, sondern singuläre Erscheinungen darstellen. Dahin gehören z. B. die Behandlung eines stetigen Transportproblems durch Monge (1776) beim Festungsbau sowie die Formulierung des klassischen Transportproblems in Matrixform durch Hitchcock (1940).

Der Beginn des Konstituierungsprozesses der linearen Optimierung als selbständige mathematische Teildisziplin in der UdSSR

Im Sommer 1939 erschien an der Leningrader Staatlichen Universität eine 65seitige Broschüre eines erst 27 Jahre alten, aber schon durch zahlreiche wissenschaftliche Publikationen bekannten Mathematikers unter dem Titel „Matematičeskie metody organizacii i planirovanija proizvodstva“. In der Einleitung nannte der Autor Kantorovič als die Ursachen seiner Beschäftigung mit mathematischen Methoden der Organisation und Planung der Produktion die durch die Entwicklung der sozialistischen Volkswirtschaft entstandenen Anforderungen an die Gestaltung des Produktionsprozesses. Er verwies darauf, daß der weitere Aufbau der sozialistischen Volkswirtschaft die allseitige Ausnutzung aller vorhandenen Reserven in der Produktion sowie maximale Produktionsergebnisse erfordert. Um diese Aufgabe zu erfüllen, schrieb der Autor, gibt es zwei Wege – ein Weg besteht in der ständigen Verbesserung der Technik, der andere Weg in der Verbesserung der Organisation und Planung der Produktion. Kantorovič wandte sich der zweiten Möglichkeit zu und erkannte, daß sich viele konkrete Aufgaben mathematisch modellieren lassen und daß all die konkreten Modelle durch eine allgemeine mathematische Struktur charakterisiert sind; es geht darum, eine lineare Funktion unter linearen Nebenbedingungen minimal (maximal) werden zu lassen.

Die Arbeit Kantorovičs ist die erste mathematische Arbeit, in der diese allgemeine mathematische Struktur herausgearbeitet, eine allgemeine – wenn auch noch nicht vollständige – Lösungsmethode angegeben und die Bedeutung dieses Typs mathematischer Probleme untersucht wird. Man kann sie demzufolge als die Geburtsurkunde der linearen Optimierung bezeichnen.

Allerdings sollte der Geburtsprozeß dieser neuen Teildisziplin nicht geradlinig und einfach verlaufen. Nachdem die lineare Optimierung erste Entwicklungsschritte unter Leitung Kantorovičs gegangen war – die mathematischen Grundlagen wurden im Zusammenhang mit Forschungen zur Funktionalanalysis genau studiert, ein vollständiger Algorithmus für die Aufgabe der klassischen Transportoptimierung wurde entwickelt, die diskrete Transportaufgabe wurde durch die stetige Formulierung ergänzt, man wandte sich der unmittelbaren Anwendung der gewonnenen Erkenntnisse im Produktionsprozeß zu u. a. m. –, überfielen die faschistischen Truppen die UdSSR. Das hatte zur Folge, daß die Mehrzahl der jungen Wissenschaftler, die in dieser oder jener Form mit der linearen Optimierung verbunden waren, an die Front gingen, um ihre Heimat zu verteidigen. Andere, wie z. B. Kantorovič, wurden zur Erfüllung anderer kriegswichtiger Aufgaben im Hinterland eingesetzt. Dadurch wurde eine Fortsetzung der Forschung zur linearen Optimierung für einige Jahre nahezu unmöglich gemacht.

Hinzu kamen noch zwei weitere hemmende Faktoren für die kontinuierliche und breite Entfaltung der Theorie der linearen Optimierung. Zur Überprüfung der Effektivität der geschaffenen Lösungsverfahren und zur tatsächlichen praktischen Nutzung der linearen Optimierung erwiesen sich Computer als wesentliche Hilfsmittel. Über Computer verfügten aber die sowjetischen Universitäten und Institute der Akademie der Wissenschaften erst seit der zweiten Hälfte der fünfziger Jahre, d. h. zu einem Zeitpunkt, als die Herausbildung der linearen Optimierung zu einer selbständigen mathematischen Teildisziplin in den USA bereits seit fünf Jahren vollzogen war. Dazu kam, daß in der Periode des Personenkults die mathematischen Methoden in der Ökonomie ideologisch in Verdacht gerieten, geradezu als idealistisch oder als unmarxistisch charakterisiert wurden und so zur Stagnation verurteilt wurden. So wurde der Prozeß der in der UdSSR schon weit fortgeschrittenen Konstituierung der Theorie der linearen Optimierung nicht dort, sondern in den USA abgeschlossen.

Der Abschluß des Konstituierungsprozesses in den USA

In den USA führten im wesentlichen zwei Gründe zur Auslösung der Geburt der linearen Optimierung.

Während des zweiten Weltkrieges wirkten amerikanische Wissenschaftler im Rahmen der US-Armee als Fachleute zur Erhöhung der Kampfkraft der Armee. Nach dem zweiten Weltkrieg war es vor allem die Leitung der US-AIR FORCE, die bei der Führung des Kalten Krieges gegen die sozialistischen Länder ein großes Interesse an der Fortsetzung der wissenschaftlichen Forschung für die Luftwaffe aufbrachte. Es wurden Forschungs- und Planungsabteilungen innerhalb des Ober-

kommandos der US-AIR FORCE gebildet, und 1948 entstand ein bedeutendes Forschungszentrum.

Speziell arbeitete die US-AIR FORCE an dem Problem der Planung der ökonomischen Ressourcen, der Mobilisierung für einen Krieg sowie der Planung des Kriegsablaufes. Dabei wurde festgestellt, daß diese Planungsarbeiten sehr aufwendig sind, oft die erforderlichen Daten nicht zur Verfügung stehen und die fertigen Pläne i. a. nicht mehr verwendet werden können, da sich im Prozeß ihrer Aufstellung wesentliche Bedingungen verändert hatten. Als 1946 Wood, ein Mitarbeiter der Planungsabteilung der US-AIR FORCE, vorschlug, die Planungsarbeit zu mechanisieren, stieß dieser Vorschlag auf große Resonanz bei den Verantwortlichen im Oberkommando.

Mit Dantzig wurde ein Mathematiker, der bereits über Erfahrungen in der Planung für die Luftwaffe verfügte, für die Realisierung dieser Idee gewonnen. Er bekam eine große Unterstützung durch das Oberkommando. So wurden z. B. unter besonderer Berücksichtigung des von Dantzig geleiteten Forschungsprojektes SCOOP (Wissenschaftliche Berechnungen von optimalen Programmen) durch das National Bureau of Standards (NBS) Rechner für die US-AIR FORCE entwickelt. Dafür zahlte die USAF allein 1947 \$ 400.000 an das NBS. Dantzigs grundlegende Idee bestand in dem Versuch, das Planungsproblem mathematisch zu modellieren, nach einer allgemeinen mathematischen Struktur zu forschen und dann geeignete mathematische Lösungsverfahren zu entwickeln. Die Kontakte mit anderen amerikanischen Wissenschaftlern (beispielsweise v. Neumann, Leontief, Koopmans, Hurwicz u. a.) bestätigten die Richtigkeit seines Vorgehens. Besonders die Gespräche mit v. Neumann, Koopmans und Hurwicz wirkten sich fruchtbar auf die Forschungen Dantzigs aus. Sie führten ihn zu wichtigen Erkenntnissen, z. B. zur Kenntnis des von Koopmans behandelten Transportproblems, zu einer weiteren, effektiver scheinenden geometrischen Interpretation eines Verfahrens, das von Dantzig Simplexverfahren genannt wurde, sowie zur Erkenntnis des Zusammenhangs zwischen Matrixspielen und den von Dantzig untersuchten Problemen.

In den Jahren 1947/48 beendete Dantzig die mathematische Modellbildung. Sein Modell verallgemeinerte das von Leontief geschaffene Bilanzierungsmodell. Es war dynamisch und erlaubte die Auswahl einer optimalen Variante. Im Dezember 1947 und Januar 1948 löste Dantzig das von Stigler formulierte Diätproblem mit Hilfe der Simplexmethode auf Rechnern des National Bureau of Standards.

Dieser Test beeinflusste nachhaltig die weitere Entwicklung der linearen Optimierung in den USA. Mit dem Nachweis der Effektivität des Simplexverfahrens durch diesen Rechnertest konzentrierte sich die weitere Forschung auf dieses von Dantzig entwickelte Modell und auf Methoden, die der Simplexmethode ähnlich waren. Untersuchungen zur physikalischen Modellbildung wurden eingestellt. Im Sommer 1948 führte die von der USAF gegründete Forschungseinrichtung „RAND Corporation“ ein Sommerseminar zu Planungsfragen durch. Während dieses Seminars trat Dantzig erstmalig mit Vorträgen zur linearen Optimierung vor einem größeren Kreis von Wissenschaftlern auf. In einem Gespräch mit Koopmans wurde der Name für die neue Disziplin geboren: „linear programming“. Im Jahre 1949 erschienen die ersten Publikationen von Dantzig und Wood, und im September fand in Chicago die

erste Konferenz statt, die sich vorrangig mit linearen Optimierungsproblemen beschäftigte; dies bildete den Abschluß des Konstituierungsprozesses der linearen Optimierung als selbständige mathematische Teildisziplin.

Zur historischen Entwicklung der programmgesteuerten Rechentechnik

Anfänge der Programmsteuerung

Der englische Erfinder Charles Babbage stellte 1821 den Mitgliedern der Royal Astronomical Society die Idee einer Maschine vor, die auf der Berechnung der Differenzen zwischen Zahlen beruhte, daher „Differenzmaschine“ (Difference Engine) benannt. Als Modell sollte sie bei der Berechnung von Prämien für Versicherungsgesellschaften dienen (1859). Babbage erkannte schon in der Phase des Entwurfs den begrenzten Einsatz der „Difference Engine“. Er begann eine „Allzweckrechenmaschine“ zu konstruieren, die nach seiner Meinung der „Entlastung des menschlichen Intellekts“ dienen sollte. Diese „Analytical Engine“ bestand aus fünf Bestandteilen, die im wesentlichen bei den elektronischen Rechenanlagen heutiger Bauart noch anzutreffen sind:

1. Eingabe, um Informationen (Zahlen) in die Maschine zu transportieren. Babbage benutzte Lochkarten, die Jacquard 1801 für die automatische Steuerung von Webstühlen entwickelt hatte;
2. Speicher, der als „Gedächtnis“ für die Rechnung der benötigten Zahlen und Programminstruktionen fungieren sollte. Babbage sah dafür Lochkarten und Räder auf Spindeln vor;
3. Arithmetische Einheit („mill“), um arithmetische Operationen vorzunehmen;
4. Leitwerk, das mit Hilfe eines Programms die Steuerung der Rechenvorgänge übernehmen sollte. Die arithmetische Einheit und das Leitwerk sind in unseren Tagen in Form einer Zentraleinheit (CPU) zusammengefaßt;
5. Ausgabe, für die Babbage Lochkarten bzw. einen automatischen Typensatz für eine gedruckte Ausgabe erwog.

Die unzulängliche mechanische Technik gestattete es zum Leidwesen von Babbage nicht, zuverlässig, funktionstüchtig und ökonomisch vertretbar zu bauen.

Man kann Babbage zu Recht als geistigen Vater der modernen programmgesteuerten Rechentechnik bezeichnen. Aus dem Nachlaß seiner langjährigen Mitarbeiterin, Auguste Ada, Gräfin von Lovelace, Tochter von Lord Byron, sind uns Kommentare zur „Analytical Engine“ überliefert, in denen sie den „ersten Programmierfehler“ von Babbage bei der Berechnung von Bernoulli-Zahlen (1843)

nachweist. Sie gilt als erste „Programmiererin“ der „Analytical Engine“, die nach ihrer Auffassung algebraische Muster genauso wie der Jacquard-Webstuhl Blumen- und Blättermuster webte.

Einen zweiten Markstein in der Geschichte der frühen programmgesteuerten Rechentechnik bildet die „Statistikmaschine“ von Hollerith, die 1890 für die elfte amerikanische Volkszählung eingesetzt wurde. Hollerith benutzte elektrischen Strom bei den elektrischen Schaltungen für seine Lochkartenmaschinen, die als Zähl-, Sortier-, Tabellier- und Mischmaschinen verwendet wurden. Die Hollerith-Maschine vereinigte in sich einige Funktionen moderner Rechenanlagen, war aber nur für bestimmte Operationen konzipiert. Übrigens entstand aus der Hollerith-Gesellschaft der Computerkonzern „IBM“, der heute auf dem kapitalistischen Markt eine überragende Stellung einnimmt.

Erste programmgesteuerte Rechner

Erst in den 30er Jahren unseres Jahrhunderts war die Technik so weit entwickelt, daß man ernsthaft an die Verwirklichung der Ideen von Babbage gehen konnte. In den USA, Deutschland, Großbritannien und Frankreich setzte unabhängig voneinander der Bau programmgesteuerter Rechner ein. Militärische Geheimhaltung seit Anfang des zweiten Weltkrieges führte zu einer noch stärkeren Isolierung der Forschungsgruppen und verhinderte einen wissenschaftlichen Gedankenaustausch. Die Franzosen Valtat und Couffignal (1933/1938) befaßten sich mit der binären Codierung von Rechenanlagen. Shannon legte 1938 mit seiner Arbeit zu binären Logikschaltungen ein Fundament für weitere Entwicklungen. Die theoretischen Konzepte von Turing („Turingmaschine“) und Church (1936), wonach alle formalisierbaren mathematischen Probleme auf einer programmgesteuerten Rechenanlage bewältigt werden können, waren für die Computerentwicklung richtungsweisend.

In Deutschland begann 1936 (erstes Patent 11. April 1936) der Bauingenieur Konrad Zuse in enger Zusammenarbeit mit dem Nachrichteningenieur Helmut Schreyer, einen programmgesteuerten Relaisrechner zu bauen, um baustatische Berechnungen zu automatisieren. Im Jahre 1941 wurde der erste funktionsfähige programmgesteuerte elektromechanische Relaisrechner (Z 3) der Welt durch Zuse fertiggestellt; Lochstreifen dienten als Eingabemedium. Diese Rechenmaschine konnte eine Reihe von Programmen abarbeiten, z. B. Programme zum Lösen linearer Gleichungssysteme und Spezialprogramme der Aerotechnik. Der Rechner Z 3 wurde 1944 durch einen Bombenangriff auf Berlin zerstört, ein verbesserter Z 4 im Jahre 1945 vollendet. Diesen charakterisierte Zuse als Babbage-Booleschen Typ, weil das von Babbage erfundene Prinzip der Programmsteuerung auf Boolesche Variable angewendet wurde. Zuse war an der Entwicklung spezieller Prozeßrechner in der Flugzeugindustrie beteiligt. Mit der Niederlage des deutschen Faschismus wurde die Forschung an diesen Projekten zum größten Teil vorerst eingestellt.

Die Zuse-Rechner zeichneten sich durch einige Neuerungen aus. Zuse nutzte die duale Darstellung von Zahlen und Operationen unter Verwendung von Binäroperationen, führte das Gleitkomma ein und gebrauchte als erster die logischen

Grundoperationen „UND“, „ODER“ und „NEGATION“. 1945 entwickelte er eine allgemeine algorithmische Sprache, das „Plankalkül“ für eine universelle Digitalrechenanlage. Parallel zu Zuse arbeiteten Forschungsgruppen in den USA und England an ähnlichen Rechenanlagen. Unter strengster Geheimhaltung bauten 1943 englische Wissenschaftler – die Leitung hatte Newman – den ersten elektronischen Rechner der Welt, den „Colossus 1“, der von Turing für eine kryptographische Aufgabe programmiert wurde. Mit Hilfe des „Colossus 1“ wurden Nachrichten, die die deutsche Codiermaschine „Enigma“ verschlüsselte, automatisch entschlüsselt.

In den USA entwickelten u. a. Aiken an der Harvard-Universität (Harvard Mark I) 1944 und Stibitz bei der Bell Corporation elektromechanische Rechenanlagen, die an Leistungsfähigkeit den Zuse-Rechnern entsprachen. Eckert und Mauchly von der Universität Pennsylvania errichteten den mit 18.000 Röhren bestückten Electronic Numerical Interpreter and Calculator (ENIAC). Zum ersten Mal wurde die hohe Schaltgeschwindigkeit von Elektronenröhren im großen Stil für das automatische Rechnen ausgenutzt. Dieser 30 Tonnen schwere Großrechner erwies sich als Spezialrechner und konnte nur mit großem Arbeitsaufwand umprogrammiert werden. Im Juni 1945 trat John v. Neumann der Projektierungsgruppe eines neuen Rechners, des Electronic Discrete Variable Automatic Computers (EDVAC), bei. Seine Berichte zu diesem Projekt stellten einen Wendepunkt in der Computertechnik dar, obwohl die EDVAC-Anlage erst Anfang der fünfziger Jahre gebaut wurde. Der Mathematiker v. Neumann hatte die revolutionäre Idee, an die Stelle der starren Programmsteuerung eine interne Programmsteuerung zu setzen. Der Programmablauf sollte wie die zu verarbeitenden Daten codiert und in der Maschine gespeichert werden. Das aus einer Folge von Einzelbefehlen bestehende Programm enthielt bedingte Befehle, die Vorwärts- und Rückwärtsverzweigungen ermöglichten. Jeder Programmbefehl konnte von der Maschine selbst, wie jeder andere Operand, geändert werden. Dadurch wurden die Voraussetzungen für eine moderne flexible, sequentielle Datenverarbeitung geschaffen, die als „v.-Neumann-Architektur“ in die Computergeschichte eingegangen ist. Dieses Konzept der Steuerung durch ein gespeichertes Programm wurde bei dem elektronischen Digitalrechner des Typus „Manchester Mark I“ (1948) zum ersten Mal realisiert.

Die Entwicklung der Computertechnik während der letzten Jahrzehnte

Eine Periodisierung der Entwicklung der Computertechnik während der letzten vier Jahrzehnte ergibt etwa das folgende Bild.

Um 1945 war das Versuchsstadium beendet; die Idee eines programmgesteuerten Rechners hatte sich als realisierbar erwiesen. Die Produktion der Rechenanlagen der *ersten Generation* begann mit der ENIAC. Diese erste Generation, im Zeitraum von 1946 bis 1955/58, war gekennzeichnet durch einen Schaltungsaufbau mit Elektronenröhrentechnik und wies Operationszeiten im Millisekundenbereich bei Schaltungseinheiten auf. Ihr Einsatz erfolgte im wissenschaftlich-technischen Bereich, vorwiegend jedoch im militärischen. Der Bau war außerordentlich teuer. In der DDR

begann die Entwicklung mit den Rechenanlagen ZR 1 und OPREMA und in der Sowjetunion mit BESEM 1 und URAL.

Mit dem Bau der EDSAC-Anlage im Jahre 1949 durch Wilkes in Cambridge (England) wurde eine Schlüsselersfindung, die Entwicklung der Software, gemacht. Sie bestand in der Einführung von Programmierkonzepten, wie Standortprogrammen und Hilfsmitteln, die zum Auffinden von Programmierfehlern dienten (Betriebs-system).

Im Jahre 1948 ließen Brittain, Shockley und Bardeen in den Bell Telephone Laboratories den Transistor patentieren. Ende der fünfziger Jahre ersetzte man beim Bau von Rechenanlagen der zweiten Generation die Röhrentechnologie durch Transistoren. Damit wurde der erste Schritt zur Miniaturisierung gemacht. Diese zweite Generation von Computern (1955/58–65) — dazu gehörten IBM 1401, IBM 7090, NCR 304, Siemens, UNIVAC-Familie — wurde verstärkt für kommerzielle Zwecke eingesetzt. Gegenüber dem internationalen Entwicklungsstand zeitlich verzögert kam in Industrie und Wirtschaft der DDR mit dem R 300 ein Rechner aus eigener Produktion verstärkt zum Einsatz. Die Operationszeiten dieser Rechner lagen im Durchschnitt im 100-Mikro-Sekundenbereich bei 10 Schaltungseinheiten/cm². Mit dem PDP 8 von der Digital Equipment Corporation wurde 1960 der erste Mini-computer in Serie gebaut. Nach 1955 setzte mit ALGOL, COBOL und FORTRAN die Entwicklung von problemorientierten Sprachen im Softwarebereich ein.

Rechner der dritten Generation (1965 bis ca. 1975) wurden mit integrierten Schaltkreisen (MSI) ausgestattet. Die Operationszeiten liegen im Mikro-Sekundenbereich mit ca. 1000 Schaltungseinheiten/cm². Es entstanden sogenannte Familiensysteme von EDVA, die im Baukastensystem ausbaufähig sind und hohe Programmkompatibilität besitzen. IBM S/360 und 370, ICL 1900 stellen leistungsfähige informationsverarbeitende Systeme dar, die sich durch ein hochentwickeltes Betriebssystem, IBM OS oder ICL George 3, auszeichnen. Datenfernübertragung und Vernetzung zu Datenverarbeitungssystemen sind Kennzeichen dieser Entwicklungsstufen bei den Großrechnern. Die sozialistischen Staaten schufen ein einheitliches System der elektronischen Rechentechnik (ESER), welches ein modulares, aufwärts kompatibles Familienkonzept darstellt. Die Anlage EC 1057 (R ESER-Reihe III) stellt gegenwärtig die höchste Entwicklungsstufe der ESER-Familie dar.

Als Intel 1971 den ersten Mikroprozessor — ein Siliziumblättchen von 6 Millimeter Kantenlänge besaß ein Äquivalent von 2250 Transistoren — entwickelte, eröffnete sich eine neue technologische Dimension in der Hardwareproduktion. Schon 1972 spezialisierte sich die Firma „Unimation“ auf die ausschließliche Produktion von Industrierobotern. Etwa ab 1975 bildete sich die vierte Computergeneration heraus. Die integrierten und höchstintegrierten Großschaltungen (LSI und VLSI) ließen eine neue Generation von Supercomputern, so die CRAY-Organisation, CDC Cyber 205-Familie, (Hitachi) HAP-1-System u. a. entstehen. Einige Supercomputer — mit 16 Prozessoren ausgerüstet — erreichen nahezu eine Milliarde Gleitkommaoperationen in der Sekunde, und die Abarbeitung erfolgt im Parallelbetrieb. Die IBM-Systeme 3033 bzw. 3081 sowie das Fujitsu-M-380-System beinhalten eine Vielzahl von Software- und Architekturinnovationen, die aber im wesentlichen noch in der v.-Neumann-Konfiguration liegen.

In der vierten Generation tritt besonders der Personalcomputer (PC), als arbeitsorientierte Rechentechnik mit billigem Hauptspeicher, Floppy oder kleinem Winchester-Speicher ausgestattet, in Erscheinung. Der PC ist ein nutzerfreundliches und preisgünstiges Massenprodukt sowie für fast alle denkbaren Anwendungsbereiche geeignet.

Die „Home-Computer“ (Kleincomputer) haben die weiteste Verbreitung gefunden. Obwohl diese Rechner zu 80% für Unterhaltung (Spiele, Musik, Grafik) genutzt werden, sollte man ihre Bedeutung nicht unterschätzen. Sie bringen Kindern und Jugendlichen „spielend“ neue Technik und neue Denkweisen näher. Diese jungen Menschen, die wahrscheinlich in ihrem produktiven Alter in der „Informationsgesellschaft“ leben werden, überwinden fast problemlos die Schwellenangst, die häufig Erwachsene bei der Nutzung von Computern erleben. Home-Computer von Atari, Commodore, Schneider und Sinclair u. a. haben auf Grund ihrer Anwenderfreundlichkeit große Marktanteile in dieser Branche des internationalen Computermarktes erobert. Die aus der DDR-Produktion stammenden Modelle des KC 85 sowie der KC 87 werden für Lehre und Ausbildung (Schule) verwendet. Die anspruchsvolleren Büro-, Personal- und Arbeitsplatzcomputer finden als individuelle Arbeitsmittel vorwiegend im kommerziellen Bereich ihre Anwender und werden zum geistigen Handwerkzeug im komfortablen Dialogverkehr zwischen Mensch und Maschine. In der DDR werden die Bürocomputer BC 5120, 5130, der Personalcomputer PC 1715, der 16-Bit-Rechner AC 7100 produziert, und zur Zeit wird an der Entwicklung eines 32-Bit-Rechners gearbeitet.

Leicht erlernbare Sprachen (BASIC) und neue Dimensionen der Computergrafik erleichtern den Umgang mit dieser Klasse von Computern.

Ausblick

Im Jahre 1979 wurden in Japan Pläne zur Entwicklung der *fünften Computer-generation* vorgestellt, die z. T. Anfang der neunziger Jahre verwirklicht werden sollen. Das japanische Konzept kann man als „eine Computerideologie“ bezeichnen, weil neben den technologisch-wirtschaftlichen Aspekten auch soziale Auswirkungen der Mensch/Maschine-Beziehung zur Diskussion gestellt werden. Es soll ein Computersystem entwickelt werden, das „zugleich nützlich und liebenswürdig“ sein soll. Der Kerngedanke in der Entwicklung zum System der fünften Generation besteht darin, daß bisher unabhängige Strömungen in der Computerwissenschaft/Informatik und angrenzende Wissenschaftsbereiche (Linguistik, Bionik u. a.) zusammengeführt werden sollen, um zu einem hochkomplexen Wissenverarbeitungssystem zu gelangen. In Zukunft sollen „intelligente“ Computer als selbstorganisierende Systeme, die damit eine künstliche Intelligenz besitzen, entwickelt werden. Dafür müssen Expertensysteme, Wissensbanken und Inferenzprozessoren (Entscheidungssysteme) sowie Problemlösungsmaschinen konzipiert werden.

Bei der fünften Generation wird besonderes Gewicht auf Datenflußarchitekturen gelegt, um von der traditionellen v.-Neumann-Konfiguration abzurücken. Die „Softwarekrise“ in den letzten Jahren (das Softwareangebot wurde immer unüber-

schaubarer) erforderte neue Wege der Symbolverarbeitung und Veränderungen in der logischen Programmierung (PROLOG, LISP). Neue, benutzerfreundliche Ein- und Ausgabemethoden mit automatischer Sprach- und Mustererkennung und Verarbeitung der natürlichen Sprache sollen den Mensch-Maschine-Dialog gestalten. Innovationen sind auch bei der Herstellung der Hardware zu erwarten.

Eine Reihe von wissenschaftlichen Disziplinen und Technologien — Elektronik, Biologie (Genforschung), Psychologie (kognitive Prozesse), Methoden der Wissensvermittlung, fuzzy-sets-Logik, neue formalisierte Methoden des Schließens, Mathematik, Sprachforschung, Robotik, Sensortechnik u. a. — müssen kombiniert werden, um die zukünftige Computergeneration hervorzubringen. Insofern sind zur Zeit keine quantitativen und qualitativen Grenzen der weiteren Entwicklung erkennbar. Der Computer unter Einsatz der Mikroelektronik bleibt weiterhin eine der großen technologisch-wissenschaftlichen und sozialen Herausforderungen unseres Jahrhunderts und stellt ein wesentliches Merkmal in der gegenwärtigen Entwicklungsetappe der Wissenschaftlich-Technischen Revolution dar.

Anhang

Übersicht¹⁾ über die Entstehungszeit heutiger mathematischer Symbole

1228	Leonardo von Pisa	Bruchstrich bei gewöhnlichen Brüchen
1464	Regiomontanus	Multiplikationspunkt
1489	Widmann	Die Zeichen + und — im Druck
1524	Ries	Wurzelhaken handschriftlich
1525	Rudolff	Wurzelhaken im Druck
1557	Recorde	Gleichheitszeichen =
1571	Reinhold	Gradzeichen °
1585	Stevin	Wurzelhaken mit danebengesetzten Exponenten, $\sqrt[3]{3}$ (d. i. $\sqrt[3]{-}$) Dezimalbruchschreibweise
1593	Vieta	ausgiebiger Gebrauch von eckigen und geschweiften Klammern
1617	Neper	Dezimalkomma
1624	Kepler	log. für Logarithmus
1629	Girard	Wurzelhaken mit darübersetztem Exponenten $\sqrt[2]{}, \sqrt[3]{}$
1631	Harriot	Ungleichheitszeichen >, <
1637	Descartes	Potenzschreibweise a^3, b^4
1655	Wallis	das Zeichen ∞
1675	Leibniz	$\int$ und dx
1679	Leibniz	Überstreichung von Buchstaben
1684	Leibniz	Buchstaben mit Indizes
1693	Leibniz	determinantenähnliche Ausdrücke, Multiplikationspunkt Proportionsschreibweise $a : b = c : d$
1694	Joh. Bernoulli	Funktionssymbole
1734	Euler	Funktionszeichen $f(x)$
1736	Euler	π
1739	Euler	e für Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1750	Cramer	Determinantenschema
1753	Euler	Symbole $\sin, \cos$
1755	Euler	Summenzeichen $\sum$, Differenzzeichen Δ
1777	Euler	Symbol i (für $\sqrt{-1}$)
1816	Crelle	einheitlicher Gebrauch von α, β, γ für Dreieckswinkel

¹⁾ Angelehnt an J. Tropfke [LA 33], Bd. II, S. 115—118.

Anmerkungen

Anm. 1.1. In der DDR gibt es, wie in vielen Staaten der Erde, ein „Nationalkomitee für Geschichte und Philosophie der Wissenschaften“, die „Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin (NTM)“ und größere naturwissenschaftshistorische Institutionen in Leipzig, Berlin, Dresden, Jena, Rostock. Innerhalb der Mathematischen Gesellschaft der DDR existiert eine Fachsektion Geschichte, Philosophie und Grundlagen der Mathematik, die regelmäßig Konferenzen organisiert. Beim Ministerium für Hoch- und Fachschulwesen der DDR arbeitet ein Wissenschaftlicher Beirat für Wissenschaftsgeschichte

Anm. 1.2. Aus der Vielzahl bürgerlicher Mathematiker, die Bleibendes geleistet haben, seien die folgenden herausgehoben: O. Becker, F. Cajori, M. Cantor, S. Günther, H. Hankel, G. Loria, O. Neugebauer, G. Sarton, H. Suter, P. Tannery, J. Tropfke, H. Wieleitner, H. Zeuthen. — Nach dem zweiten Weltkrieg sind besonders M. Daumas, J. E. Hofmann, J. Itard, M. Kline, K. O. May, D. J. Struik, R. Taton, K. Vogel, B. L. van der Waerden hervorgetreten. — Die Mathematikgeschichte in der DDR verdankt in sachlicher und persönlicher Hinsicht der Mathematikgeschichte in der Sowjetunion, insbesondere A. P. Juškevič, sehr viel.

Anm. 1.3. Das Wort „Geschichte der Mathematik“ ist doppeldeutig. Der Klarheit wegen soll begrifflich unterschieden werden, und zwar die Geschichte der Mathematik als objektiver, in der Zeit ablaufenden historischen Prozeß von der Historiographie der Mathematik, also der historischen Wissenschaft vom Entwicklungsprozeß der Mathematik.

Anm. 1.4. Die Erforschung der historischen Wechselbeziehungen zwischen der Entwicklung der Mathematik und der Entwicklung der Produktivkräfte gehört zu jenen Gebieten der Historiographie der Mathematik, die von der bürgerlichen Historiographie bisher vernachlässigt oder sogar bewußt ausgelassen wurden, wie auch umgekehrt dieses Gebiet besonders fruchtbare und interessante Ergebnisse gezeigt hat. Man kann ohne Übertreibung sagen, daß die marxistische Historiographie, die ihrem Wesen nach der Entwicklung der Produktivkräfte besondere Aufmerksamkeit widmet, auch für die Historiographie der Mathematik den Weg zu einer qualitativ neuen Entwicklungsstufe eröffnet hat.

Anm. 2.1. Neugebauer, ein hervorragender Kenner der altägyptischen Mathematik, schreibt dazu: „Überhaupt ist es, geschichtlich gesehen, ein grundsätzlicher Fehler, die ‚mathematischen‘ Texte als eine besondere Textklasse von den übrigen Papyri zu trennen. In Wirklichkeit gehören sie zum praktischen Handwerkszeug der Schreiber, die ja im Verwaltungswesen des alten Ägypten eine so wichtige Rolle gespielt haben.“ ([L 2.9], S. 120)

Anm. 2.2. Näheres bei Neugebauer [L 2.9], S. 137–166.

Anm. 2.3. In Anbetracht der wechsellvollen politischen Geschichte des Zweistromlandes ist es gerechtfertigt, von mesopotamischer Mathematik zu sprechen, statt den traditionellen Ausdruck „babylonische“ Mathematik zu gebrauchen.

Ann. 2.4. Im außerwissenschaftlichen Bereich rechnete man in der Antike auf dem Abacus, seit der ionischen Zeit mit dem attischen (oder herodianischen) Zahlensystem, in der hellenistischen Zeit vorwiegend nach dem jüngeren milesischen Zahlensystem. Die römischen Zahlzeichen waren zum kalkülmäßigen Rechnen ebenfalls ungeeignet. Näheres vgl. etwa [LA 36].

Ann. 3.1. Zur Periodisierung der antiken Mathematik gibt es verschiedene Auffassungen. Einen Überblick über die Probleme gibt [L 3.3].

Ann. 3.2. Zu Demokrit und überhaupt zur ionischen Naturphilosophie vgl. etwa die „Geschichte der Philosophie“, herausgegeben von der Sowjetischen Akademie der Wissenschaften, Bd. 1, Berlin 1959 (Übersetzung aus dem Russischen). Vgl. ferner [L 3.8].

Ann. 3.3. Diese Bezeichnung leitet sich davon her, daß die Pythagoreer vier „mathémata“, d. h. systematisch geordnete Lehrfächer unterschieden, die sämtlich auf der Vorstellung einer nach Zahl und Maß geordneten Welt beruhen: Zahlentheorie (arithmetika), Geometrie (geometria), Musiklehre (harmonika) und Astronomie (astrologia). — So erklärt sich schließlich auch der Name „Mathematik“.

Ann. 3.4. Zu Anfang von Buch X der „Elemente“ definiert Euklid: „Kommensurabel heißen Größen, die von demselben Maß gemessen werden, und inkommensurabel solche, für die es kein gemeinsames Maß gibt.“ ([L 3.4], IV. Teil, S. 1).

Ann. 3.5. Die „Wechselwegnahme“ spielte in der griechischen Mathematik in methodischer Hinsicht eine zentrale Rolle; mit ihr wurde z. B. auch das größte gemeinsame Maß (größter gemeinsamer Teiler) zweier Zahlen bestimmt. Die Methode der Wechselwegnahme verläuft so: Man nehme (bei zwei verschiedenen großen Größen a und b , $a < b$) die kleinere von der größeren weg; bei den so erhaltenen Größen $b - a$ und a nimmt man wieder die kleinere von der größeren weg, usw. Das Verfahren bricht nicht ab, wenn die Größen inkommensurabel sind. Dieser Satz wird von Euklid in Buch X bewiesen. Seine Formulierung lautet: „Mißt, wenn man unter zwei ungleichen Größen abwechselnd immer die kleinere von der größeren wegnimmt, der Rest niemals genau die vorhergehende Größe, so müssen die Größen inkommensurabel sein.“ ([L 3.4], IV. Teil, S. 2)

Ann. 3.6. Diese Meinung wurde überzeugend durch K. von Fritz (The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum, *Annals Math.* 46 (1945), 242–264; Übersetzung aus dem Englischen von Karl Nicolai in [L 3.19], S. 271–307) und S. Heller ([L 3.7], Wiederabdruck in [L 3.19], S. 319–354) vorgetragen.

Ann. 3.7. Für diesen inneren Widerspruch in den Grundlagen der griechischen Mathematik hat der französische Mathematikhistoriker Tannery 1887 die Bezeichnung „logischer Skandal“ geprägt. Heute spricht man auch von einer Grundlagenkrise; andere Autoren bestreiten terminologisch das Vorhandensein einer echten Krise damals ebenso wie bei den Grundlagen-schwierigkeiten zu Anfang des 20. Jh. Jedenfalls entstanden Probleme, die mit den gegebenen mathematischen Mitteln einer Zeit nicht gelöst werden konnten; der Ausweg mußte durch innere Weiterentwicklung der Mathematik im Methodologischen etwa gesucht werden.

Ann. 3.8. In jüngeren Arbeiten werden von einigen Autoren Begriff und historische Tragweite der geometrischen Algebra relativiert. Vgl. dazu [L 3.3] und [L 3.13].

Ann. 3.9. Die Lesart dieser Stelle ist umstritten. Vgl. dazu insbesondere A. Szabó [L 3.13].

Ann. 4.1. Elementarmathematik bedeutete also ursprünglich die Mathematik im Sinne der Euklidischen „Elemente“; erst später, nach dem erstaunlichen Ausbau der Mathematik, der die „Elemente“ inhaltlich weit hinter sich ließ, trat ein Bedeutungswandel ein: Elementarmathematik als niedere (= elementare) Mathematik.

Ann. 4.2. Es gab, allerdings nicht weitergeführte, Ansätze für heliozentrische Weltbilder auch während der Antike, so bei Aristarchos von Samos während der hellenistischen Zeit.

Anm. 4.3. Von den 13 Büchern der „Arithmetik“, von denen Diophantos selbst spricht, sind sechs griechisch überliefert worden. In jüngster Zeit nun sind fehlende Teile in arabischer Sprache gefunden worden; sie werden als Bücher IV bis VII eingeordnet. Vgl. dazu [L 4.9] und [L 4.11].

Anm. 4.4. Vgl. zur Wirkungsgeschichte von Diophantos die Broschüre I. G. Bašmakova: *Diophant und diophantische Gleichungen*. Berlin oder Basel/Stuttgart 1974 (Übersetzung aus dem Russischen).

Anm. 5.1. Genannt nach dem englischen Mathematiker Horner, der diese Methode 1819 bekannt machte, etwa zur gleichen Zeit wie Ruffini in Italien.

Anm. 5.2. Interessant ist die Herkunft der Bezeichnung „sinus“: Die Sinuslinie hieß ursprünglich *ardhajiva*, d. h. halbe (*ardha*) Bogensehne (*jiva*). Später sprach man lediglich von *jiva*. Daraus wurde in der arabischen Literatur *giba*, ein Fremdwort für das Arabische, das dann gleichgesetzt wurde mit dem echt arabischen Wort *gaib* (Busen, Kleiderausschnitt). Bei der Übersetzung der arabischen Fachliteratur ins Lateinische wurde daraus im 12. Jh. *sinus* ([LA 17], S. 163/164).

Anm. 5.3. Vgl. dazu ausführlich A. P. Juškevič [LA 17], S. 167–174.

Anm. 6.1. Der Ausdruck geht auf G. Harig [L 6.9] zurück.

Anm. 6.2. Für Einzelheiten sei u. a. auf folgende Schriften verwiesen: H. Grosse: *Historische Rechenbücher des 16. und 17. Jahrhunderts*. Leipzig 1901. Dazu *Ergänzungen* von I. G. Spasskij in *Ist.-matem. issled.* 5 (1952), 269–420. P. Treutlein: *Das Rechnen im 16. Jahrhundert*. In: *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik 1*, Leipzig 1877 ([LA 16], I, S. 142–145). K. Vogel: *Der Donauraum, die Wiege mathematischer Studien in Deutschland*. München 1973.

Anm. 6.3. Ausführlich kann man sich über Historisches zur Schreibweise der Ziffern, über die Schwierigkeiten bei der Bewältigung der Null und über die Entwicklung der Wortbezeichnungen für die Ziffern in [L 6.15] und [LA 33], Bd. 1, informieren.

Anm. 6.4. Das Wort „Ziffer“ selbst hat eine sehr bewegte Geschichte, in der sich des öfteren Bedeutungswandel vollzogen haben. Das indische Wort für leer – „*sunya*“ – erhielt im Arabischen die Bezeichnung „*aṣ-ṣifr*“. Es wurde latinisiert zu „*zephirum*“ oder „*cifra*“ und bedeutete „*figura nihil*“ (Figur des Nichts). Im Französischen entstand hieraus „*chiffre*“. Es wurde zu „*cifra*“ in der lateinischen Fachsprache der Neuzeit. (Wegen des schwierigen, beinahe geheimnisvollen Charakters der Null-Ziffer erhielt „*chiffre*“ den noch heute gebräuchlichen Nebensinn von Geheimschriftzeichen.) Da die Ziffer Null das Kernstück der neuen Zahlenschreibweise darstellt, repräsentierte im deutschen Sprachgebrauch bald „*Ziffer*“ alle zehn Ziffern. Im Englischen dagegen heißen die Ziffern noch heute „*figures*“. Das lateinische Wort „*nulla*“, abgeleitet von „*nullus*“ (keiner, niemand, nichts) tritt seit dem 15. Jh. als arithmetischer Fachausdruck auf, und zwar in der Verbindung „*nulla figura*“, keine Figur, d. h. kein Zahlzeichen. Aus der Verselbständigung des Adjektivs wurde im deutschen Sprachgebrauch die „*Null*“.

Anm. 6.5. Die Geschichte der Coß ist ein hochinteressantes und für die Forschung lohnenswertes Gebiet. Der Herkunft mancher mathematischer Symbole, z. B. des Wurzelzeichens, ist noch immer nicht eindeutig geklärt. – Für Einzelheiten der Entwicklung der mathematischen Symbole im Rahmen der Coß vgl. etwa [LA 33], Bd. II, und [L 6.4].

Anm. 6.6. Näheres über das Aufkommen des Wortes Algebra und der algebraischen Terminologie findet man in [LA 33], Bd. II, S. 48–54.

Anm. 7.1. Ausführlich wird die Geschichte der frühen wissenschaftlichen Gesellschaften bei M. Ornstein [L 7.14] dargestellt.

Anm. 7.2. Aus dieser Vorstellung entwickelte sich nach dem Ende des 17. Jh., insbesondere im Anschluß an Leibniz, das Wort „abscissae“, „Abgeschnittene“, zum mathematischen Fachausdruck.

Anm. 7.3. Bei Descartes heißt es: Es können so viele wahre (dh. positive) Wurzeln vorhanden sein, als die Anzahl der Wechsel der Vorzeichen + und – beträgt, und so viele falsche (dh. negative), wie oft zwei Zeichen + oder zwei Zeichen – aufeinander folgen. Vgl. [LA 33], Bd. 1, 4. Aufl. S. 491–494.

Anm. 8.1. Vgl. dazu E. J. Dijksterhuis [L 8.3], S. 366ff.

Anm. 8.2. Genau dieser Grenzwert tritt auf, wenn man im Sinne des Riemannschen Integralbegriffs für die Parabel $y = x^2$ beim bestimmten Integral $\int_1^0 x^2 dx$ die Obersumme bildet und zur Grenze übergeht.

Anm. 8.3. Zum Fundamentalsatz bei I. Barrow vgl. etwa G. Kropp [L 8.11], S. 151–154.

Anm. 8.4. Vgl. zum Prioritätsstreit etwa J. E. Hofmann [L 8.6] und G. W. Leibniz. Schriften und Briefe. Dritte Reihe, Erster Band. Berlin 1976.

Anm. 8.5. Die gewählte deutschsprachige Fassung stützt sich auf C. J. Gerhardt: Die Entdeckung der höheren Analysis. Halle 1855, S. 125/126, und auf M. Cantor [LA 7], Bd. III, 1898, S. 159/160.

Anm. 9.1. Zur komplizierten Geschichte des Funktionsbegriffs vgl. die gründliche Analyse von A. P. Juškevič [L 9.31]. — Die zitierte Stelle heißt im Original „... ex aliis linearum in figura data functiones facientium generibus assumtis.“ (Zitiert nach [L 9.31], S. 56.) Dazu schreibt D. Mahnke 1926: „Leibniz gebraucht allerdings in der vorliegenden Handschrift (Methodus tangentium inversa, seu de functionibus, August 1673) für diese gesetzliche Beziehung, in der die Ordinate einer Kurve zu ihrer Abszisse ... steht, noch nicht das Wort Funktion; aber wie der Anfang der Handschrift beweist, hat er den Funktionsbegriff schon im weitesten Sinne gebildet und benennt ihn mit dem Worte relatio. Auch an der vorliegenden Stelle, bei der allgemeinen Formulierung der dem umgekehrten Tangentenproblem ähnlichen Probleme, hat das Wort Funktion noch nicht ganz den heutigen mathematischen Sinn, sondern eher den, den wir in der Sprache des täglichen Lebens mit ihm verbinden; es bedeutet also etwa die ‚Verrichtung‘, die ein Glied eines Organismus oder ein Teil einer Maschine zu leisten hat, seine Aufgabe, Stellung oder Wirkungsweise. ‚In figura functionem facere‘ bedeutet also z. B.: die Kurve berühren, auf ihr senkrecht stehen, ihre Subtangente oder Subnormale bilden usw., wobei natürlich immer ein begrenztes Stück der so oder so ‚funktionierenden‘ Linie, z. B. das Tangentenstück zwischen Berührungspunkt und X-Achse, in Betracht zu ziehen ist.“ (D. Mahnke: Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis, Abh. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl., 1926, S. 47)

Anm. 9.2. Der besonderen Bedeutung wegen die Originalpassage: „Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitibus constantibus.“ ([L 9.18], S. 18)

Anm. 9.3. Das 1691/92 niedergeschriebene Manuskript Johann Bernoullis zur Differentialrechnung ist ebenso erhalten geblieben wie seine Integralrechnung.

Anm. 11.1. Vgl. dazu H. Burkhardt: Über den Gebrauch divergenter Reihen in der Zeit von 1750–1860. Math. Annalen 70 (1911), 169–206.

Anm. 11.2. Dabei geht aus den von Bolzano gegebenen Beispielen als „unstetig“ bezeichneter Funktionen hervor, daß stetige Funktionen für ihn Funktionen waren, die nach heutiger Terminologie stetig und reellwertig sind. Bolzano schreibt $f x$ statt $f(x)$.

Anm. 11.3. Vgl. dazu A. L. Cauchy [L 11.10], S. 124–126.

Anm. 11.4. Eine ähnlich allgemeine Formulierung des Funktionsbegriffs findet sich übrigens auch bei dem französischen Politiker und Mathematiker Condorcet in der 1779 erschienenen überarbeiteten Fassung seiner Vorlesung zur Integralrechnung von 1765.

Anm. 18.1. Eine gründliche Analyse der von Gauß, Lobachevskij, J. Bolyai u. a. geleisteten Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie findet man bei H. Reichardt [L. 13.31]. — Vgl. dazu auch MfL Bd. 6 und 7.

Anm. 18.2. In bewußter Anlehnung an Riemanns Vortrag legte Helmholtz der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften 1866/68 die Abhandlung „Ueber die Thatfachen, welche der Geometrie zugrunde liegen“ vor. Von Helmholtz stammt z. B. auch das heute noch oft herangezogene Gedankenexperiment über die Vorstellungswelt denkender, ideal zweidimensionaler Wesen, welche sich in einer Kugelwelt bewegen: Die spezielle Beschaffenheit der Umgebung prägt den denkenden Wesen die naiv verwendeten geometrischen Axiome auf.

Anm. 18.8. Der Satz von Desargues findet sich nach dem Zeugnis von Pappos schon in den verlorengegangenen „Porismen“ des Euklid und der Satz von Pascal seinem wesentlichen Inhalt nach in den „Konika“ des Apollonios.

Anm. 18.4. Die dem „Erlanger Programm“ nachfolgende Entwicklung hat gelehrt, daß es Geometrien gibt, die sich nicht in seinen Rahmen einordnen lassen. Man unterscheidet daher — nach Untersuchungen von Cartan, Schouten und Veblen aus den 20er Jahren — vielfach Kleinsche Räume von anderen Räumen als solche, die aus einer Punktmenge mit einer gegebenen Transformationsgruppe bestehen; die Invariantentheorie solcher Räume heißt eine Kleinsche Geometrie.

Anm. 18.5. Man vergleiche die Meinung von Pasch mit der von Lenin. Im „Philosophischen Nachlaß“ heißt es über Axiome: „Die praktische Tätigkeit des Menschen mußte das Bewußtsein des Menschen milliardenmal zur Wiederholung der verschiedenen logischen Figuren führen, damit diese Figuren die Bedeutung von Axiomen erhalten konnten.“ (L 1.7), S. 181)

Anm. 18.6. Einen besonderen Weg des axiomatischen Aufbaus der Geometrie schlug F. Schur 1909 vor: Er ersetzte die Hilbertschen Kongruenzaxiome durch Axiome der Bewegung.

Anm. 18.7. Als Folge des zweiten Weltkrieges konnte dieses Resultat erst 1947 publiziert werden.

Anm. 14.1. Im Jahre 1974 erschien ein äußerst lesenswerter Sammelband ([LA 22]), in dem sich führende Mathematiker aus aller Welt zu Inhalt, Methode und Zweckbestimmung der Mathematik sowie über deren Wechselbeziehung zu anderen Wissenschaften äußern. Das Spektrum der dort geäußerten Meinungen ist außerordentlich breit, einige aber sind sich die Autoren darin, daß die gesellschaftliche Relevanz der Mathematik gerade in jüngster Zeit bedeutend zugenommen hat und noch zunehmen wird. Auch über das Verhältnis traditioneller und moderner Gebiete der Mathematik in unserer Zeit der sich stürmisch entfaltenden Produktivkräfte gibt es mehrfach Reflexionen, u. a. von L. Budach. Es heißt da: „Der moderne Produktionsprozeß und die modernen Wissenschaften stellen, wie wir sahen, an die Mathematik ungeheuer viele neue Anforderungen. Die Zahl der Mathematiker aber ist begrenzt. Man fragt sich, ob man da die traditionellen Gebiete der Mathematik — z. B. die Zahlentheorie, die Algebra, die Geometrie — überhaupt noch aufrechterhalten soll und kann. Um diese Frage zu beantworten, muß man den komplizierten gesellschaftlichen Arbeitsprozeß erforschen, in dem neue mathematische Resultate produziert werden. Außer Äußerungen profilierter Mathematiker ist darüber z. Z. noch nichts bekannt. Eines scheint jedoch sicher zu sein: sind aus der Konfrontation der Mathematik mit der Wirklichkeit (oder mit anderen Wissenschaften) neuartige mathematische Fragestellungen hervorgegangen, so führen diese zu neuen mathematischen Theorien, die sich — zumindest für eine gewisse Zeit — eigenständig entwickeln und dazu keiner direkten Anregung aus der Wirklichkeit mehr bedürfen. In dieser Zeit aber nimmt die neue Theorie Anregungen aus Nachbargebieten auf (die ihrerseits aus Problemen der Wirklichkeit geschöpft haben). Sie ist nicht auf ein Endprodukt orientiert, wie das in der Industrieforschung notwendig

ist; innermathematische Kriterien — z. B. nicht unwesentlich auch ästhetische Gesichtspunkte — entscheiden, welche Entwicklungen fortgeführt und welche Anregungen aufgenommen werden, und gerade dadurch kann die ‚reine Mathematik‘ Modelle für künftige Bedürfnisse der Gesellschaft schaffen.“ ([LA 22], S. 341)

Anm. 14.2. So zeigt z. B. ein Vergleich verschiedener Auflagen von Hilberts „Grundlagen der Geometrie“ Korrekturen in der Formulierung von Axiomen und Sätzen, die nur durch wachsende Einsicht in den prädikatenlogischen Bau der Sprache und die Gesetze der Logik erklärbar sind. Beispielsweise lautet das erste Anordnungsaxiom 1899: Wenn A, B, C Punkte einer Geraden sind und B zwischen A und C liegt, so liegt B auch zwischen C und A . Gemeint ist aber, wie aus dem Zusammenhang hervorgeht, eine wesentlich andere Aussage, die ab 1930 wie folgt formuliert wird: Wenn ein Punkt B zwischen einem Punkt A und einem Punkt C liegt, so sind A, B, C drei verschiedene Punkte einer Geraden, und B liegt dann auch zwischen C und A .

Anm. 15.1. Eine positive Kritik der Quesnayschen Ideen wurde von K. Marx gegeben. Vgl. K. Marx: Theorien über den Mehrwert, 1. Teil, Berlin 1956, S. 306/307. Vgl. ferner etwa J. Kuczynski: François Quesnay. Ökonomische Schriften, Bd. I, 1756–1769, Ökonom. Studentexte Bd. 5, Berlin 1969.

Literatur

Allgemeine Literatur

- [LA 1] Becker, O.: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. Freiburg/München 1954.
- [LA 2] Bernal, J. D.: Die Wissenschaft in der Geschichte. 3. Aufl., Berlin 1967 (Übers. a. d. Engl.).
- [LA 3] Biographien bedeutender Mathematiker. Ed. H. Wußing/W. Arnold. 3. Aufl., Berlin 1985.
- [LA 4] Biographien bedeutender Physiker. Ed. W. Schreier. Berlin 1984.
- [LA 5] Bourbaki, N.: Elemente der Mathematikgeschichte. Göttingen 1971 (Übers. a. d. Französ.). (Russ. Ausgabe Moskau 1963).
- [LA 6] Cajori, F.: A History of Mathematical Notations. 2 Bde. Chicago 1928/29.
- [LA 7] Cantor, M.: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Leipzig. Bd. 1, 3. Aufl. 1907; Bd. 2, 2. Aufl. 1899/1900; Bd. 3, 2. Aufl. 1900/1901; Bd. 4, 1908.
- [LA 8] Dauben, J. W.: The History of Mathematics from Antiquity to the Present. A Selective Bibliography. New York/London 1985.
- [LA 9] Dictionary of Scientific Biography. Ed. Ch. C. Gillispie. 16 Bde. New York 1970–1980.
- [LA 10] Dieudonné, J.: Geschichte der Mathematik 1700–1900. Braunschweig/Wiesbaden bzw. Berlin 1985 (Übers. a. d. Franz.).
- [LA 11] Autorenkollektiv unter Leitung von A. P. Juškevič: Geschichte der Mathematik (russ.). Bd. 1 und 2, Moskau 1970; Bd. 3, Moskau 1972.
- [LA 12] Geschichte der Naturwissenschaften. Ed. H. Wußing. Leipzig 1983. (2. Aufl. 1987)
- [LA 13] Geschichte der Technik. Ed. B. Brentjes, S. Richter, R. Sonnemann. Leipzig 1978. (2. Aufl. 1987)
- [LA 14] Histoire de la science. Unter der Redaktion von M. Daumas. Paris 1957.
- [LA 15] Histoire générale des sciences, publiée sous la direction de R. Taton. Tome I, Paris 1957; II, Paris 1958; III, Vol. I, Paris 1961; III, Vol. II, Paris 1964.
- [LA 16] Hofmann, J. E.: Geschichte der Mathematik. Bd. 1, 2. Aufl. Berlin 1963; Bd. 2 und 3, Berlin 1957.
- [LA 17] Juschkewitsch, A. P.: Geschichte der Mathematik im Mittelalter. Leipzig 1964 (Übers. a. d. Russ.).
- [LA 18] Juškevič, A. P.: Geschichte der Mathematik in Rußland bis 1917 (russ.). Moskau 1968.
- [LA 19] Kedrovskij, O. J.: Wechselbeziehungen von Philosophie und Mathematik im geschichtlichen Entwicklungsprozeß. Leipzig 1984 (Übers. a. d. Russ.).
- [LA 20] Klein, F.: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Bd. 1, Berlin 1926; Bd. 2, Berlin 1927. Reprint (in einem Band) Berlin/Heidelberg/New York 1979.

- [LA 21] Kline, M.: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York 1972.
- [LA 22] *Mathematiker über die Mathematik*. Ed. M. Otte. Berlin/Heidelberg/New York 1974.
- [LA 23] *Mathematisches Wörterbuch*. Ed. J. Naas und H. L. Schmid. 2 Bde., Berlin/Leipzig 1961.
- [LA 24] May, K. O.: *Bibliography and Research Manual of the History of Mathematics*. Toronto 1973.
- [LA 25] Menninger, K.: *Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl*. 2. Aufl. Göttingen 1958.
- [LA 26] Meschkowski, H.: *Problemgeschichte der Mathematik*. 2 Bde. Mannheim/Wien/Zürich 1979/1981.
- [LA 27] Molodski, W. N.: *Studien zu philosophischen Problemen der Mathematik*. Berlin 1977 (Übers. a. d. Russ.).
- [LA 28] *Philosophenlexikon*. Ed. E. Lange/D. Alexander. Berlin 1982.
- [LA 29] Rybnikov, K. A.: *Geschichte der Mathematik* (russ.), Moskau 1960.
- [LA 30] Smith, D. E.: *History of Mathematics*. 2 Bde. New York 1925. Reprint 1958.
- [LA 31] *A Source Book in Mathematics, 1200—1800*. Ed. D. J. Struik. Cambridge (Mass.) 1969. 2. Aufl. 1986.
- [LA 32] Struik, D. J.: *Abriß der Geschichte der Mathematik*. 6. Aufl. Berlin 1976 (Übers. a. d. Amer.).
- [LA 33] Tropfke, J.: *Geschichte der Elementarmathematik*. 7 Bände. Bd. 1—4, 3. Aufl. Berlin 1930/40; Bd. 5—7, 2. Aufl. Berlin 1921—24. Bd. 1. 4. Aufl. Berlin/New York 1980.
- [LA 34] *Weltgeschichte in Daten*. 2. Aufl. Berlin 1973.
- [LA 35] *Weltgeschichte in 10 Bänden*. Herausgegeben von der Akademie der Wissenschaften der UdSSR. Berlin 1965—1968 (Übers. a. d. Russ.).
- [LA 36] Wußing, H.: *Mathematik in der Antike*. 2. Aufl., Leipzig 1965.

Literaturangaben

Vorlesung 1

- [L 1.1] *Beiträge zur Wissenschaftsgeschichte*. Ed. G. Wendel im Auftrage des Wissenschaftlichen Beirates für Wissenschaftsgeschichte beim MHF. Die Zeit der Industriellen Revolution, Berlin 1982. Wissenschaft im kapitalistischen Europa 1871—1917, Berlin 1983. Wissenschaft und Gesellschaft 1917—1945, Berlin 1984. Wissenschaftsentwicklung von 1945 bis zur Gegenwart, Berlin 1985. Wissenschaft in der Antike, Berlin 1986.
- [L 1.2] Böhme, H.-J.: Zur Erbe- und Traditionspflege an den Universitäten und Hochschulen in der Deutschen Demokratischen Republik. Vortrag des Ministers für Hoch- und Fachschulwesen, Prof. Dr. h. c. Hans-Joachim Böhme, auf der Festveranstaltung zur Otto-von-Guericke-Ehrung der DDR am 21. Mai 1986 in Magdeburg. In: NTM, 24. Jg. (1987), Heft 1, S. 1—11.
- [L 1.3] Böhme, H. J.: Zur weiteren Realisierung der sozialistischen Hoch- und Fachschulpolitik der DDR im Studienjahr 1977/78. Das Hochschulwesen 25 (1977), 218—236.
- [L 1.4] Kästner, A. G.: *Geschichte der Mathematik*. 4 Bde. Göttingen 1796—1800.
- [L 1.5] *Klassenkampf, Tradition, Sozialismus*. Hrsg. vom Zentralinstitut für Geschichte der AdW der DDR. Berlin 1974.
- [L 1.6] Kröber, G.: *Wissenschaftswissenschaft und Wissenschaftsgeschichte*, Spektrum 5 (1977), 5—9.
- [L 1.7] Lenin, V. I.: *Werke*. Bd. 38, Berlin 1964.
- [L 1.8] Marx, K.: *Ökonomisch-philosophische Manuskripte (1844)*. In: Marx/Engels, *Werke*, Ergänzungsband, Erster Teil, Berlin 1968.

- [L 1.9] Montucla, J. E.: Histoire des mathématiques. 4 Bde., Paris 1799–1802. Nachdruck Paris 1960.
- [L 1.10] Sarton, G.: The Study of the History of Science. Cambridge (Mass.) 1936.
- [L 1.11] Autorenkollektiv. Ed. G. Harig. Von Adam Ries bis Max Planck. Leipzig 1962.
- [L 1.12] Wissenschaft. Studien zu ihrer Geschichte, Theorie und Organisation (Eine Auswahl sowjetischer Arbeiten). Deutsch herausgegeben von G. Kröber und H. Steiner, Berlin 1972.
- [L 1.13] Wußing, H.: Historiographie der Mathematik: Ziele, Methoden, Aufgaben. Mittel. Math. Ges. DDR, Heft 3–4 (1976), 120–132.
- [L 1.14] Wußing, H.: Versuch einer Klassifikation des historischen Wechselverhältnisses zwischen Naturwissenschaften und materieller Produktion. NTM 1 (1975), 98–104

Vorlesung 2

- [L 2.1] Gericke, H.: Mathematik in Antike und Orient. Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo 1984.
- [L 2.2] Geschichte des wissenschaftlichen Denkens im Altertum. Ed. F. Jürss. Berlin 1982.
- [L 2.3] Hoyrup, J.: Babylonian Algebra from the Viewpoint of Geometrical Heuristics. Roskilde 1984.
- [L 2.4] Kleine Enzyklopädie Natur. 20. Aufl., Leipzig 1979, Neufassung 1987.
- [L 2.5] Lexikon früher Kulturen. Ed. J. Herrmann, H. Quitta, H. Klengel, J. Irmscher, I. Sellnow. Leipzig 1984.
- [L 2.6] Mathematischer Papyrus des staatlichen Museums der schönen Künste in Moskau. Herausgegeben und kommentiert von W. W. Struve. Unter Benutzung einer hieroglyphischen Transkription von B. A. Turajeff. In: Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, A 1. Berlin 1930.
- [L 2.7] Neugebauer, O.: Mathematische Keilschrift-Texte. In: Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, A 3, 1/3. Berlin 1935 und 1937. Teil I. Texte; Teil II. Register, Glossar, Nachträge, Tafeln; Teil III. Ergänzungsheft.
- [L 2.8] Neugebauer, O.: The Exact Sciences in Antiquity. Providence (R. I.) 1957. (Russ. Ausgabe Moskau 1968).
- [L 2.9] Neugebauer, O.: Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften. Erster Band. Vorgriechische Mathematik. 2. Aufl., Berlin/Heidelberg/New York 1969.
- [L 2.10] Neugebauer, O./Sachs, O.: Mathematical Cuneiform Texts. New Haven 1945.
- [L 2.11] Ptolemaios von Alexandria: Almagest. Des Claudius Ptolemäus Handbuch der Astronomie. Aus dem Griechischen übersetzt und mit erklärenden Anmerkungen versehen von K. Manitius. Bd. 1, Leipzig 1912; Bd. 2, Leipzig 1913.
- [L 2.12] The Rhind Mathematical Papyrus. Introduction, Transcription, Translation and Commentary by T. Eric Peet. Liverpool/London 1923.
- [L 2.13] Vogel, K.: Vorgriechische Mathematik. Teil I, Hannover/Paderborn 1958; Teil II, Hannover/Paderborn 1959.

Vorlesung 3

- [L 3.1] Anderhub, H. J.: Joco-Seria. Aus den Papieren eines reisenden Kaufmannes. Wiesbaden 1941.
- [L 3.2] Archimedes: Kugel und Zylinder. Übersetzt und mit Anmerkungen versehen von Dr. A. Czwalina. Leipzig 1922.
- [L 3.3] Brentjes, S.: Die Entwicklung der antiken griechischen Mathematik im Lichte

- einiger Tendenzen in der gegenwärtigen Forschung. In: Beiträge zur Wissenschaftsgeschichte. Wissenschaft in der Antike, Berlin 1986, S. 81–102.
- [L 3.4] Euklid von Alexandria: Die Elemente. Nach Heibergs Text aus dem Griechischen herausgegeben von Clemens Thaer. I. Teil (Buch I–III), Leipzig 1933; II. Teil (Buch IV–VI), Leipzig 1933; III. Teil (Buch VII–IX), Leipzig 1935; IV. Teil (Buch X), Leipzig 1936; V. Teil (Buch XI–XIII), Leipzig 1937. Reprint Leipzig 1984.
- [L 3.5] Die Fragmente der Vorsokratiker. Griechisch und deutsch von Hermann Diels. Erster Band. 2. Aufl., Berlin 1906.
- [L 3.6] Gericke, H.: Mathematik in Antike und Orient. Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo 1984.
- [L 3.7] Heller, S.: Die Entdeckung der stetigen Teilung durch die Pythagoreer. Abh. Dtsche Akad. Wiss. Berlin, Klasse f. Mathematik, Physik und Technik, 6 (1958), 1–28.
- [L 3.8] Jürß, F.: Von Thales zu Demokrit. Frühe griechische Denker. Leipzig, Jena, Berlin o. J. (1977).
- [L 3.9] Lexikon der Antike. Ed. J. Irmscher u. a., Leipzig 1971. 5. Aufl. 1982.
- [L 3.10] Platon: Theaitetos. Ins Deutsche übertragen von Karl Preisendanz. Jena 1910.
- [L 3.11] Platon: Staat. Langenscheidtsche Bibliothek sämtlicher griechischen und römischen Klassiker. Bd. 40. Berlin und Stuttgart 1855–1914.
- [L 3.12] Sarton, G.: A History of Science. Ancient Science through the Golden Age of Greece. Cambridge (Mass.) 1952.
- [L 3.13] Szabó, A.: Anfänge der griechischen Mathematik. München/Wien 1969.
- [L 3.14] van der Waerden, B. L.: Die Arithmetik der Pythagoreer. Math. Annalen 120 (1947/49), 127–153.
- [L 3.15] van der Waerden, B. L.: Erwachende Wissenschaft. 2. Aufl., Basel/Stuttgart 1966.
- [L 3.16] Wußing, H.: Zur Grundlagenkrise der griechischen Mathematik. In: Hellenische Poleis. Bd. IV. Ed. E. Ch. Welskopf. Berlin 1974. S. 1872–1895.
- [L 3.17] Zeuthen, H. G.: Geschichte der Mathematik im Altertum und im Mittelalter. Kopenhagen 1895. (Russ. Ausgabe Moskau/Leningrad 1966).
- [L 3.18] Zeuthen, H. G.: Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum. Kopenhagen 1886. Nachdruck Hildesheim 1966.
- [L 3.19] Zur Geschichte der griechischen Mathematik. Ed. O. Becker. Darmstadt 1985.

Vorlesung 4

- [L 4.1] Archimedes: Kugel und Zylinder. Übersetzt und mit Anmerkungen versehen von Dr. A. Czwalina. Leipzig 1922.
- [L 4.2] Archimedes: Die Quadratur der Parabel und Über das Gleichgewicht ebener Flächen oder über den Schwerpunkt ebener Flächen. Übersetzt und mit Anmerkungen versehen von Dr. A. Czwalina. Leipzig 1923.
- [L 4.3] Die Arithmetik des Diophantos aus Alexandria. Aus dem Griechischen übertragen und erklärt von Arthur Czwalina. Göttingen 1952.
- [L 4.4] Die Arithmetik und die Schrift über Polygonalzahlen des Diophantos von Alexandria. Übersetzt und mit Anmerkungen begleitet von G. Wertheim. Leipzig 1890.
- [L 4.5] Eukleides von Alexandria: Die Elemente. Nach Heibergs Text aus dem Griechischen herausgegeben von Clemens Thaer. I. Teil (Buch I–III), Leipzig 1933; II. Teil (Buch IV–VI), Leipzig 1933; III. Teil (Buch VII–IX), Leipzig 1935; IV. Teil (Buch X), Leipzig 1936; V. Teil (Buch XI–XIII), Leipzig 1937. Reprint 1984.
- [L 4.6] Heron von Alexandria: Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia. Griechisch-deutsch herausgegeben von W. Schmidt, L. Nix, H. Schöne, J. L. Heiberg. 5 Bde., Leipzig 1899–1914.
- [L 4.7] Proklus Diadochos: Kommentar zum ersten Buch von Euklids „Elementen“. Ed. (deutsch) von Max Steck. Halle/Saale 1945.

- [L 4.8] Ptolemaios von Alexandria: *Almagest*. Des Claudius Ptolemäus Handbuch der Astronomie. Aus dem Griechischen übersetzt und mit erklärenden Anmerkungen versehen von K. Manitius. 1. Band, Leipzig 1912; 2. Band, Leipzig 1913.
- [L 4.9] Rashed, R.: *Les travaux perdus de Diophante*. In: *Revue d'histoire des sciences* 17 (1974), 97–122; 18 (1975), 3–30.
- [L 4.10] Schneider, I.: *Archimedes*. Darmstadt 1979.
- [L 4.11] Sesiano, J.: *Books IV to VII of Diophantus' Arithmetica in the Arabic Translation Attributed to Qustā ibn Lūqā*. New York/Heidelberg/Berlin 1982.
- [L 4.12] Steck, M.: *Bibliographia Euclidiana*. Nach dem Tode des Verfassers herausgegeben von Menso Folkerts. Hildesheim 1981.
- [L 4.12] van der Waerden, B. L.: *Die Arithmetik der Pythagoreer*. *Math. Annalen* 120 (1947/49), 127–153.
- [L 4.14] van der Waerden, B. L.: *Erwachende Wissenschaft*. 2. Aufl., Basel/Stuttgart 1966.
- [L 4.15] Wußing, H.: *Zur Grundlagenkrise der griechischen Mathematik*. In: *Hellenische Poleis*. Bd. IV. Ed. E. Ch. Welskopf. Berlin 1974, S. 1872–1895.
- [L 4.16] Zeuthen, H. G.: *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*. Kopenhagen 1895. (Russ. Ausgabe, Moskau/Leningrad 1966).
- [L 4.17] Zeuthen, H. G.: *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*. Kopenhagen 1886. Nachdruck Hildesheim 1966.
- [L 4.18] Zinner, E.: *Astronomie. Geschichte ihrer Probleme*. Freiburg/München 1951.

Vorlesung 5

- [L 5.1] Bag, A. K.: *Mathematics in Ancient and Medieval India*. Varanasi/Dehli 1979.
- [L 5.2] Berggren, J. L.: *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*. New York/Berlin/Heidelberg/London/Paris/Tokyo 1986.
- [L 5.3] Bose, D. M./Sen, S. N./Subbarayappa, B. V.: *A Concise History of Science in India*. Calcutta 1971.
- [L 5.4] Chiu chuan suan-shu. *Neun Bücher arithmetischer Technik*. Deutsch mit Erläuterungen von K. Vogel. Braunschweig 1968.
- [L 5.5] Datta, B./Singh, A. N.: *History of Hindu Mathematics*. 2 Bde., Lahore 1935/1938.
- [L 5.6] Elfering, K.: *Die Mathematik des āryabhaṭa*. I. München 1975.
- [L 5.7] Juškevič, A. P./Rozenfel'd, B. A.: *Die Mathematik der Länder des Ostens im Mittelalter*. Sowjetische Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften. Ed. G. Harig. Berlin 1962 (Übers. a. d. Russ.).
- [L 5.8] Kogelschatz, H.: *Bibliographische Daten zum frühen mathematischen Schrifttum Chinas im Umfeld der „Zehn mathematischen Klassiker“ (1. Jh. v. Chr. bis 7. Jh. n. Chr.)*. Veröffentlicht. Forschungsinstitut Dtsch. Museum München. Reihe B. München 1981.
- [L 5.9] Libbrecht, U.: *Chinese Mathematics in the Thirteenth Century*. The Shu-shu chiu-chang of Ch'in Chiu-shao. Cambridge (Mass.)/London 1973.
- [L 5.10] Matvievskaia, G. P.: *K istorii matematiki Srednej Azii IX–XI vekov*. Taškent 1962.
- [L 5.11] Menninger, K.: *Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl*. Göttingen 1958.
- [L 5.12] Mikami, Y.: *The Development of Mathematics in China and Japan*. Leipzig 1913. Nachdruck New York 1962.
- [L 5.13] Muhammad ibn Musa al-Chorezmi. *Matem. traktaty*. Taschkent 1983 (russ.).
- [L 5.14] Needham, J.: *Science and Civilisation in China*. Vol. III. Cambridge 1959.
- [L 5.15] Rathmann, L.: *Geschichte der Araber*. Bd. 1, 2. Aufl., Berlin 1975.
- [L 5.16] Smith, D. E./Karpinski, L. Ch.: *The Hindu-Arabic Numerals*. Boston 1911.
- [L 5.17] Suter, H.: *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke*. Leipzig 1900/02. Mit Ergänzungen von H. P. I. Reinaud. *Isis* 18 (1932), 166–183.
- [L 5.18] Volodarskij, A. I.: *Očerki istorii srednevekovoj indijskoj matematiki*. Moskva 1977.

Vorlesung 6

- [L 6.1] A Bibliography of Early Modern Algebra, 1500—1800. Ed. R. E. Rider. Berkeley 1982.
- [L 6.2] Boas, M.: Die Renaissance der Naturwissenschaften 1450—1630. Gütersloh 1965 (Übers. a. d. Engl.).
- [L 6.3] Braunnühl, A. v.: Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. 2 Bde., Leipzig 1900—1903.
- [L 6.4] Cajori, F.: A History of Mathematical Notations. 2 Bde., Chicago 1928—1929.
- [L 6.5] Deubner, F.: ... nach Adam Ries. Leben und Wirken des großen Rechenmeisters. Leipzig/Jena 1959.
- [L 6.6] Fierz, M.: Girolamo Cardano. 1501—1576. Boston/Basel/Stuttgart 1983.
- [L 6.7] Goldstine, H. H.: A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Century. New York/Heidelberg/Berlin 1977.
- [L 6.8] Harig, G.: Die Tat des Kopernikus. Leipzig/Jena/Berlin 1962.
- [L 6.9] Harig, G.: Über die Entstehung der klassischen Naturwissenschaften in Europa. Dtsch. Z. Philos. 6 (1958), 419—450.
- [L 6.10] Hoppe, J.: Johannes Kepler. Leipzig 1975. 5. Aufl. 1987.
- [L 6.11] Kaunzner, W.: Zur Entwicklung der Mathematik im 15. Jahrhundert. In: Österr. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Klasse, 116 (1979), 135—142.
- [L 6.12] Kepler, J.: Gesammelte Werke. Ed. M. Caspar/F. Hammer u. a. München, seit 1937.
- [L 6.13] Marx, K./Engels, F.: Werke, Bd. 20, Berlin 1962.
- [L 6.14] Matvievskaja, G. P.: Albrecht Djurer — Utschenyi (russ.). Moskva 1987.
- [L 6.15] Menninger, K.: Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl. Göttingen 1958.
- [L 6.16] Regiomontani opera collectanea. Ed. F. Schmeidler, Osnabrück 1972.
- [L 6.17] Stevin, S.: De Thiende. Übersetzt und erläutert von H. Gericke und K. Vogel. Frankfurt/M. 1965.
- [L 6.18] Viète, F.: Einführung in die neue Algebra. Übersetzt und erläutert von K. Reich und H. Gericke, München 1973.
- [L 6.19] Wollgast, S./Marx, S.: Johannes Kepler. Leipzig/Jena/Berlin 1976, 2. Aufl. 1980.
- [L 6.20] Wußing, H.: Nicolaus Copernicus. Leipzig/Jena/Berlin 1973.
- [L 6.21] Wußing, H.: Zum Charakter der europäischen Mathematik in der Periode der Herausbildung frühkapitalistischer Verhältnisse. Math., Phys., Astr. in der Schule 8 (1981), 519—532, 585—593.

Vorlesung 7

- [L 7.1] Beaclair, W. de: Rechnen mit Maschinen. Eine Bildgeschichte der Rechentechnik. Braunschweig 1968.
- [L 7.2] Bašmakova, I. G.: Diofant i Ferma (russ.). In: Ist. Mat. Issl. 17 (1966), 185—207.
- [L 7.3] Boyer, C. B.: History of Analytic Geometry. New York 1956.
- [L 7.4] Cohen, I. Bernhard: The Newtonian Revolution with illustrations of the transformation of scientific ideas. Cambridge/London/New York/New Rochelle/Melbourne/Sydney 1983.
- [L 7.5] Curtze, M.: Die mathematischen Schriften des Nicole Oresme. Berlin 1870.
- [L 7.6] Descartes, R.: Ausgewählte Schriften. Ed. G. Irritz. Leipzig 1980.
- [L 7.7] Descartes, R.: Die Geometrie. Dtsch. ed. L. Schlesinger. Berlin 1894.
- [L 7.8] Fermat, P. de: Einführung in die ebenen und körperlichen Örter. Leipzig 1923.
- [L 7.9] Glade, H. K./Manteuffel, K.: Am Anfang stand der Abacus. Aus der Kulturgeschichte der Rechenggeräte. Leipzig/Jena/Berlin 1973.
- [L 7.10] Hall, A. R.: Die Geburt der naturwissenschaftlichen Methode 1630—1720. Gütersloh 1965 (Übers. a. d. Engl.).

- [L 7.11] Itard, J.: Pierre Fermat. Basel 1950.
 [L 7.12] Marx, K.: Das Kapital. Bd. 1. In: K. Marx/F. Engels. Werke. Bd. 23, Berlin 1962.
 [L 7.13] Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions. Ed. M. Clagett. Madison 1968.
 [L 7.14] Ornstein, M.: The Role of Scientific Societies in the Seventeenth Century. Chicago 1928.
 [L 7.15] Scott, J. F.: The Scientific Work of René Descartes. London 1952.
 [L 7.16] Wissenschaftsgeschichte und wissenschaftliche Revolution. Ed. K. Bayertz. Pahl-Rugenstein Verlag 1981.

Vorlesung 8

- [L 8.1] Cavalieri, B.: Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota. Bologna 1653.
 [L 8.2] Costabel, P.: Leibniz et la dynamique. Paris 1960.
 [L 8.3] Dijksterhuis, E. J.: Die Mechanisierung des Weltbildes. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1956.
 [L 8.4] Fermat, P. de: Abhandlungen über Maxima und Minima (1629). Ed. M. Müller. Leipzig 1934.
 [L 8.5] Galilei, G.: Le Opere di Galileo Galilei. 20 Bde., Firenze 1890—1909.
 [L 8.6] Hofmann, J. E.: Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik während des Aufenthaltes in Paris (1672—1676). München 1949.
 [L 8.7] Humbert, P.: L'oeuvre scientifique de Pascal. Paris 1947.
 [L 8.8] Juškevič, A. P.: Gottfried Wilhelm Leibniz und die Grundlagen der Infinitesimalrechnung. In: Akten des Internationalen Leibniz-Kongresses, Hannover 1966. Wiesbaden 1969, S. 1—19.
 [L 8.9] Kepler, J.: Neue Stereometrie der Fässer, besonders der in der Form am meisten geeigneten österreichischen. Ergänzung zur Stereometrie des Archimedes. Leipzig 1908. Reprint 1987.
 [L 8.10] Knobloch, E.: Der Beginn der Determinantentheorie. Leibnizens nachgelassene Studien zum Determinantenkalkül. Hildesheim 1980.
 [L 8.11] Kropp, G.: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Mannheim/Zürich 1969.
 [L 8.12] Leibniz, G. W.: Mathematische Schriften. Ed. C. I. Gerhardt. 7 Bde., Berlin/Halle 1849/1883. Nachdruck Hildesheim 1962.
 [L 8.13] Leibniz, Gottfried Wilhelm: Sämtliche Schriften und Briefe. Dritte Reihe. Erster Band, Berlin 1976.
 [L 8.14] Leibniz, G. W.: Über die Analysis des Unendlichen. Ed. G. Kowalewski. Leipzig 1908.
 [L 8.15] Mahnke, D.: Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis. In: Abh. Preuß. Akad. d. Wiss. Jg. 1925. Math. Nat. Klasse. Nr. 1. Berlin 1926.
 [L 8.16] Marx, K./Engels, F.: Werke. Bd. 20. Berlin 1962.
 [L 8.17] More, L. T.: Isaac Newton. A Biography. 1934. 2. Aufl., New York 1962.
 [L 8.18] Newton, I.: Method of Fluxions. London 1736.
 [L 8.19] Newtons Abhandlungen über die Quadratur der Kurven. Ed. G. Kowalewski. Leipzig 1908.
 [L 8.20] Osmond, H.: Isaac Barrow. His Life and Times. London 1944.
 [L 8.21] Pogrebyskij, I. B.: Gottfried Wilhelm Leibniz (russ.). Moskau 1971.
 [L 8.22] Schmutzer, E./Schütz, W.: Galileo Galilei. 5. Aufl., Leipzig 1983.
 [L 8.23] Scriba, C. J.: James Gregorys frühe Schriften zur Infinitesimalrechnung. Mitteil. Math. Sem. Gießen 55 (1957).
 [L 8.24] Scriba, C. J.: Studien zur Mathematik des John Wallis. Wiesbaden 1966.
 [L 8.25] Scott, J. F.: The Mathematical Work of John Wallis. London 1938.
 [L 8.26] Seidel, W.: Gottfried Wilhelm Leibniz. Leipzig/Jena/Berlin 1975.

- [L 8.27] Sir Isaac Newton's Mathematische Prinzipien der Naturlehre. Mit Bemerkungen und Erläuterungen. Herausgegeben von J. Ph. Wolfers. Berlin 1872.
 [L 8.28] Wawilow, S. I.: Isaac Newton. Berlin 1951 (Übers. a. d. Russ.).
 [L 8.29] Wußing, H.: Gottfried Wilhelm Leibniz und die Mathematik. Spektrum 9 (1975), 45—47.
 [L 8.30] Wußing, H.: Isaac Newton. 3. Aufl., Leipzig 1984.

Vorlesung 9

- [L 9.1] d'Alembert, J. L.: Discours préliminaire de l'Encyclopédie, Paris 1751. Dtsch. ed. G. Klaus, Berlin 1958.
 [L 9.2] Arago, F.: Sämmtliche Werke. Bd. III, Leipzig 1855.
 [L 9.3] Artikel aus der von Diderot und d'Alembert herausgegebenen Enzyklopädie. Ed. M. Naumann. 2. Aufl. Leipzig 1984.
 [L 9.4] Bernoulli, Joh.: Differentialrechnung. Ed. in deutscher Sprache P. Schafheitlein. Leipzig 1924.
 [L 9.5] Bernoulli, Joh.: Opera omnia. 4 Bde. Lausanne et Genevae 1742.
 [L 9.6] Dickstein, S.: Zur Geschichte der Prinzipien der Infinitesimalrechnung. — Die Kritiker der „Theorie der analytischen Funktionen“ von Lagrange. In: Abh. z. Gesch. d. Math. Wiss., Heft IX, Leipzig 1899, S. 66—79.
 [L 9.7] Euler, L.: Briefe an eine deutsche Prinzessin. Ed. G. Kröber. 3. Aufl. Leipzig 1983.
 [L 9.8] Euler, L.: Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung. Aus dem Lateinischen übersetzt und mit Anmerkungen und Zusätzen begleitet von J. A. Chr. Michelsen. Erster Theil. Berlin und Libau 1790.
 [L 9.9] Fleckenstein, J. O.: Johann und Jacob Bernoulli. Basel 1949.
 [L 9.10] Fueter, R.: Leonhard Euler. Basel 1948.
 [L 9.11] Goldstine, H. H.: A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century, New York/Heidelberg/Berlin 1980.
 [L 9.12] Grattan-Guinness, I.: The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann. Cambridge (Mass.) 1970.
 [L 9.13] Juškevič, A. P.: Der Begriff der Funktion bei Condorcet (russ.). Ist.-matem. issled. 19 (1974), 158—166.
 [L 9.14] Kropp, G.: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Mannheim/Zürich 1969.
 [L 9.15] Lagrange, J. L.: Analytische Mechanik. Ed. H. Servus. Berlin 1887.
 [L 9.16] Laplace, P. S. de: Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit. Ed. R. v. Mises. Leipzig 1932.
 [L 9.17] Leonhard Euler 1707—1783. Beiträge zu Leben und Werk. Gedenkband des Kantons Basel-Stadt. Basel/Boston/Stuttgart 1983.
 [L 9.18] Leonardi Euleri Opera omnia, ser. I, vol. VIII, ed. A. Krazer und F. Rudio. Lipsiae & Berolini 1922.
 [L 9.19] Marx, K.: Mathematische Handschriften (dtsh. u. russ.). Moskau 1968.
 [L 9.20] Marx, K./Engels, F.: Werke, Bd. 20, Berlin 1962.
 [L 9.21] Medvedev, F. A.: Abriß der Geschichte der Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen (russ.). Moskau 1975.
 [L 9.22] Paplauskas, A.: Trigonometrische Reihen (russ.). Moskau 1968.
 [L 9.23] Reiff, R.: Geschichte der unendlichen Reihen. Tübingen 1889.
 [L 9.24] Sammelband zum 250. Geburtstag von L. Euler. Berlin 1959/Moskau 1958.
 [L 9.25] Simon, M.: Zur Geschichte und Philosophie der Differentialrechnung. Abh. z. Gesch. d. Math. Wiss., Heft VIII, Leipzig 1898.
 [L 9.26] Spieß, O.: Die Mathematiker Bernoulli. Basel 1948.
 [L 9.27] Stepanow, W. W.: Lehrbuch der Differentialgleichungen. 5. Aufl., Berlin 1982 (Übers. a. d. Russ.).
 [L 9.28] Störig, H. J.: Kleine Weltgeschichte der Wissenschaft. Stuttgart 1954.
 [L 9.29] Szabo, I.: Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwen-

dungen. Dritte, korrigierte und erweiterte Auflage. Ed. P. Zimmermann und E. A. Fellmann. Basel/Boston/Stuttgart 1987.

- [L 9.30] Todhunter, I.: A History of the Calculus of Variations during the Nineteenth Century. London 1861. Nachdruck New York 1961.
- [L 9.31] Youschkevitch, A. P.: The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century. Archive History Exact Sciences 16 (1976), 37–85.

Vorlesung 10

- [L 10.1] Abel, N. H.: Oeuvres complètes. Publiée aux frais de l'état norvégien par MM L. Sylow et S. Lie. 2 Bde., Christiana 1881.
- [L 10.2] Abel, N. H. Galois, E.: Abhandlungen über die Algebraische Auflösung von Gleichungen. Dtsch. ed. H. Maser, Berlin 1889.
- [L 10.3] Bernoulli, Jac.: Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi). Leipzig 1899.
- [L 10.4] Biermann, K.-R.: Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität 1810–1920. Berlin 1973.
- [L 10.5] Edwards, H. M.: Galois Theory. New York/Berlin/Heidelberg/Tokyo 1984.
- [L 10.6] Galois, E.: Ecrits et mémoires mathématiques d'Evariste Galois. Paris 1962.
- [L 10.7] Gauß, C. F.: Untersuchungen über höhere Arithmetik. Deutsch ed. H. Maser, Berlin 1889.
- [L 10.8] Gauß, C. F.: Werke, Bd. III, Göttingen 1876.
- [L 10.9] Gnedenko, B. W.: Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. 6. Aufl., Berlin 1970 (Übers. a. d. Russ.).
- [L 10.10] Infeld, L.: Wen die Götter lieben. Wien 1954 (nach der engl. Ausgabe).
- [L 10.11] Kiernan, B. M.: The Development of Galois Theory from Lagrange to Artin. Archive History Exact Sciences, 8 (1971), 40–154.
- [L 10.12] Kollros, E.: Evariste Galois. Basel 1949.
- [L 10.13] Kuczynski, J.: Die vier Revolutionen der Produktivkräfte. Berlin 1976.
- [L 10.14] Kuczynski, J.: Wissenschaft und Gesellschaft. Studien und Essays über sechs Jahrtausende. Berlin 1972.
- [L 10.15] Laplace, P. S.: Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit. Leipzig 1932.
- [L 10.16] Maibaum, G.: Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik. MfL Bd. 11, 2. Aufl., Berlin 1980.
- [L 10.17] Majstrov, L. E.: Wahrscheinlichkeitsrechnung. Historischer Abriß (russ.), Moskau 1967.
- [L 10.18] Marx, K./Engels, F.: Werke, Bd. 4, Berlin 1959.
- [L 10.19] Marx, K./Engels, F.: Werke, Bd. 23, Berlin 1962.
- [L 10.20] Moivre, A. de: The Doctrine of Chances. 2. Aufl., London 1738.
- [L 10.21] Monge, G.: Darstellende Geometrie. Leipzig 1900.
- [L 10.22] Obenrauch, F. J.: Geschichte der darstellenden und projektiven Geometrie. Brunn 1897.
- [L 10.23] Ore, O.: Niels Henrik Abel. Basel 1950.
- [L 10.24] Rényi, A.: Briefe über die Wahrscheinlichkeit. Berlin 1969.
- [L 10.25] Schröder, E.: Darstellende Geometrie. MfL Bd. 8, 3. Aufl., Berlin 1979.
- [L 10.26] Schubring, G.: Die Entstehung des Mathematiklehrerberufes im 19. Jahrhundert. Weinheim/Basel 1983.
- [L 10.27] Social History of Nineteenth Century Mathematics. Ed. H. Mehrtens, H. Bos, I. Schneider. Boston/Basel/Stuttgart 1981.
- [L 10.28] Taton, R.: Gaspard Monge. Basel 1950.
- [L 10.29] Taton, R.: Les relations d'Evariste Galois avec les mathématiciens de son temps. Revue d'histoire des sciences et de leurs applications 1 (1947), 114–130.
- [L 10.30] Taton, R.: L'oeuvre scientifique de Monge. Paris 1951.
- [L 10.31] Wissenschaft als Produktivkraft. Der Prozeß der Umwandlung der Wissenschaft in eine unmittelbare Produktivkraft. Berlin 1974.

- [L 10.32] Wußing, H.: Die Ecole Polytechnique — eine Errungenschaft der Französischen Revolution. *Pädagogik* 18 (1958), 646—662.
 [L 10.33] Wußing, H.: Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes. Berlin 1969.

Vorlesung 11

- [L 11.1] Bachmann, P.: Vorlesungen über die Theorie der Irrationalzahlen. Leipzig 1892.
 [L 11.2] Bolzano, B.: Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik. Prag 1810. Mit einer Einleitung zum Neudruck von H. Wußing. Darmstadt 1974.
 [L 11.3] Bolzano, B.: Der binomische Lehrsatz, und als Folgerung aus ihm der polynomische, und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und der Exponentialgrößen dienen, genauer als bisher erwiesen. Prag 1816.
 [L 11.4] Bolzano, B.: Functionenlehre. Herausgegeben und mit Anmerkungen versehen von Karel Rychlík. In: Bernard Bolzanos Schriften, herausgegeben von der Königlichen Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. 1, Prag 1930.
 [L 11.5] Bolzano, B.: Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. Leipzig 1905.
 [L 11.6] Bottazini, U.: The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass. New York/Berlin/Heidelberg/London/Paris/Tokyo 1986.
 [L 11.7] Brill, A./Noether, M.: Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit. Jahresber. DMV 8 (1894), 107—566 + XXIII.
 [L 11.8] Cantor, G.: Gesammelte Abhandlungen. Ed. E. Zermelo, Berlin 1932.
 [L 11.9] Cauchy, A. L.: Abhandlungen über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen. Leipzig 1900
 [L 11.10] Cauchy, A. L.: Cours d'Analyse. Ire Partie. Analyse Algébrique. Paris 1821.
 [L 11.11] Dedekind, R.: Stetigkeit und irrationale Zahlen. Braunschweig 1872. 9. Aufl. Braunschweig bzw. Berlin 1969 (zusammen mit [L 11.12]).
 [L 11.12] Dedekind, R.: Was sind und was sollen die Zahlen? 12. Aufl., Braunschweig bzw. Berlin 1969 (zusammen mit [L 11.11]).
 [L 11.13] Descartes, R.: Die Geometrie. Dtsch. ed. L. Schlesinger. Berlin 1894.
 [L 11.14] Dickson, L. E.: History of the Theory of Numbers. 3 Bde., Washington 1919/23, 2. Aufl. 1934.
 [L 11.15] Dirichlet, P. G. Lejeune: Gesammelte Werke, Bd. 1, Berlin 1889.
 [L 11.16] Enneper, A.: Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte. 2. Aufl., Halle/Saale 1890.
 [L 11.17] Euler, L.: Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung. Dtsch. ed. J. A. Chr. Michelsen. 1. Teil, Berlin und Libau 1790.
 [L 11.18] Gauß, C. F.: Werke, Bd. II, Göttingen 1876.
 [L 11.19] Gauß, C. F.: Werke, Bd. X 1, Göttingen 1917.
 [L 11.20] Gericke, H.: Geschichte des Zahlbegriffs. Mannheim/Wien/Zürich 1975.
 [L 11.21] Hankel, H.: Theorie der complexen Zahlensysteme. Leipzig 1867.
 [L 11.22] Hankel, H.: Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Functionen. Leipzig 1905.
 [L 11.23] Hilbert, D.: Über den Zahlbegriff. Jahresber. DMV 8 (1900), 180—184.
 [L 11.24] Kuczynski, J.: Die vier Revolutionen der Produktivkräfte. Berlin 1975.
 [L 11.25] Kuczynski, J.: Wissenschaft und Gesellschaft. 2. Aufl., Berlin 1974.
 [L 11.26] Lagrange, J. L.: Mécanique analytique. Paris 1788.
 [L 11.27] Markuschewitsch, A. L.: Skizzen zur Geschichte der analytischen Functionen. Berlin 1955 (Übers. a. d. Russ.).
 [L 11.28] Medvedev, F. A.: Abriß der Geschichte der Theorie der Functionen einer reellen Veränderlichen (russ.). Moskau 1975.
 [L 11.29] Ore, O.: Number, Theory and its History. New York/London/Toronto 1948.
 [L 11.30] Peano, G.: Opere scelte. Roma 1958.

- [L 11.31] Rychlik, K.: Theorie der reellen Zahlen im Bolzano's handschriftlichen Nachlasse. Prag 1962.
- [L 11.32] Stifel, M.: Arithmetica integra. Nürnberg 1544.
- [L 11.33] Weber, H.: Lehrbuch der Algebra. 1. Bd., 2. Aufl., Braunschweig 1898. Neuer Abdruck Braunschweig 1912.
- [L 11.34] Weierstraß, K.: Werke. Bd. 1, Berlin 1894.
- [L 11.35] Wußing, H.: Bernard Bolzano und die Grundlegung der Infinitesimalrechnung. NTM 1 (o. J.) 3, 57–73.
- [L 11.36] Wußing, H.: Zur Geschichte der Zahlzeichen und des Zahlbegriffes. In: J. Wisliceny: Grundbegriffe der Mathematik II. MfL Bd. 2, 3. Aufl., Berlin 1979, S. 146–164.
- [L 11.37] Youschkevitch, A. P.: The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century. Arch. Hist. Exact Sci. 16 (1976), 37–85.

Vorlesung 12

- [L 12.1] Bernkopf, M.: A History of Infinite Matrices. Arch. Hist. Exact Sci. 4 (1968), 308–358.
- [L 12.2] Birkhoff, G.: Current Trends in Algebra. Amer. Math. Monthly 80 (1973), 760–782.
- [L 12.3] Cayley, A.: The Collected Mathematical Papers. Bd. 2, Cambridge 1889.
- [L 12.4] Cayley, A.: The Collected Mathematical Papers. Bd. 10, Cambridge 1896.
- [L 12.5] Crowe, M. H.: A History of Vector Analysis. University of Notre Dame Press 1967.
- [L 12.6] Dyck, W. v.: Gruppentheoretische Studien. Math. Annalen 20 (1882), 1–44.
- [L 12.7] Dyck, W. v.: Gruppentheoretische Studien II. Math. Annalen 22 (1883), 70–108.
- [L 12.8] Gauß, C. F.: Untersuchungen über höhere Arithmetik. Dtsch. ed. H. Maser. Berlin 1889.
- [L 12.9] Die gegenwärtige wissenschaftlich-technische Revolution. (Autorenkollektiv). Berlin 1972.
- [L 12.10] Hankel, H.: Theorie der complexen Zahlensysteme. Leipzig 1867.
- [L 12.11] Hilbert, D.: Die Hilbertschen Probleme. Redaktion P. S. Alexandrov (russ.). Moskau 1969. Dtsch. ed. H. Wußing, Leipzig 1971.
- [L 12.12] Kronecker, L.: Werke. Bd. 1, Leipzig 1895.
- [L 12.13] Lagrange, J. L.: Analytische Mechanik. Dtsch. ed. von H. Servus. Berlin 1887.
- [L 12.14] Lange, H.: Geschichte der Grundlagen der Physik. 2 Bde., Freiburg/München 1954–1961.
- [L 12.15] Marx, K.: Grundrisse der Kritik der politischen Ökonomie. Berlin 1953.
- [L 12.16] Mises, R. von: Dynamische Probleme der Maschinenlehre. In: Encyclopädie der mathem. Wissenschaften. Bd. 4/2, Leipzig 1904–1935, S. 159–355.
- [L 12.17] Nový, L.: Origins of Modern Algebra. Prague 1973.
- [L 12.18] Peacock, G.: Report on the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Analysis. In: British Association for Advancement of Science. Report for 1833. London 1834.
- [L 12.19] Purkert, W.: Die Entwicklung des abstrakten Körperbegriffes (Dissertation). Leipzig 1972.
- [L 12.20] Purkert, W.: Ein Manuskript Dedekinds über Galois-theorie. NTM 18 (1976) 2, 1–16.
- [L 12.21] Scharlau, W. (Herausgeber): Richard Dedekind 1831–1981. Braunschweig/Wiesbaden 1981.
- [L 12.22] Steinitz, E.: Algebraische Theorie der Körper. J. reine u. angew. Math. 137 (1910), 167–309. Neu herausgegeben von H. Hasse und R. Baer, Berlin 1930. Nachdruck 1950.
- [L 12.23] Weber, H.: Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie. Math. Annalen 48 (1893), 521–549.
- [L 12.24] Weber, H.: Lehrbuch der Algebra. Bd. 1, Braunschweig 1895.

- [L 12.25] Weber, H.: Lehrbuch der Algebra. Bd. 1, 2. Aufl., Braunschweig 1898. Neuer Abdruck Braunschweig 1912.
- [L 12.26] Weber, H.: Lehrbuch der Algebra. Kleine Ausgabe in einem Band. Braunschweig 1912.
- [L 12.27] Wußing, H.: Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes. Berlin 1969.

Vorlesung 13

- [L 13.1] Asser, G.: 100 Jahre Mengenlehre. Mitteil. Math. Ges. DDR, Heft 3 (1974), 17–42.
- [L 13.2] Blumenthal, O.: Lebensgeschichte (über D. Hilbert). In: David Hilbert: Gesammelte Abhandlungen. Bd. 3, Berlin 1935, S. 388–429.
- [L 13.3] Bolzano, B.: Paradoxien des Unendlichen. 2. Aufl., Berlin 1889.
- [L 13.4] Briefwechsel zwischen C. F. Gauß und H. C. Schumacher. Ed. C. A. F. Peters, 6 Bde., Altona 1860–1865.
- [L 13.5] Briefwechsel zwischen C. F. Gauß und W. Bolyai. Ed. F. Schmidt und P. Stäckel. Leipzig 1899.
- [L 13.6] Cantor, G.: Gesammelte Abhandlungen. Ed. E. Zermelo. Berlin 1932.
- [L 13.7] Cantor, Georg: Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. Arbeiten zur Mengenlehre aus den Jahren 1872–1884. Herausgegeben und kommentiert von G. Asser. Leipzig 1984.
- [L 13.8] Engel, Fr./Stäckel, P.: Die Theorie der Parallelllinien von Euklid bis auf Gauß. 2 Bde., Leipzig 1895.
- [L 13.9] Fraenkel, A./Bar-Hillel, Y.: Foundations of Set-Theory. Amsterdam 1958 (Russ. Ausgabe Moskau 1966).
- [L 13.10] Gauß, C. F.: Gedenkband aus Anlaß seines 100. Todestages am 23. Februar 1955. Ed. H. Reichardt. Leipzig 1957.
- [L 13.11] Gauß, C. F.: Werke. 12 Bde. Herausgegeben Ges. Wiss. Göttingen 1863–1933.
- [L 13.12] Carl Friedrich Gauss/Bernhard Riemann/Hermann Minkowski: Gaußsche Flächentheorie, Riemannsche Räume und Minkowski-Welt. Herausgegeben und mit einem Anhang versehen von J. Böhm, Jena, und H. Reichardt, Berlin. Leipzig 1984.
- [L 13.13] Halameisär, A./Seibt, H.: N. I. Lobatschewski. Leipzig 1978.
- [L 13.14] Heitsch, W.: Mathematik und Weltanschauung. Berlin 1976.
- [L 13.15] Hilbert, D.: Gesammelte Abhandlungen. 3 Bde. Berlin 1932–1935.
- [L 13.16] Hilbert, D.: Grundlagen der Geometrie. 3. Aufl., Leipzig/Berlin 1909.
- [L 13.17] Hilbert, D.: Die Hilbertschen Probleme. Red. P. S. Alexandrov (russ.). Moskau 1969. Dtsch. ed. H. Wußing, Leipzig 1971.
- [L 13.18] Hilbert, D.: Über das Unendliche. Math. Annalen 95 (1926), 161–190.
- [L 13.19] Hilbert, D./Frege, H. und G.: Briefwechsel. Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss., Math.-nat. Klasse, Jg. 1944, 2. Abh.
- [L 13.20] Kant, I.: Kritik der reinen Vernunft. 2. Aufl. von 1787. Ed. A. Messer, Berlin o. J.
- [L 13.21] Klein, F.: Das Erlanger Programm. Eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von H. Wußing. Leipzig 1974.
- [L 13.22] Klein, F.: Gesammelte mathematische Abhandlungen. Bd. 1. Ed. R. Fricke und A. Ostrowski. Berlin 1921.
- [L 13.23] Kronecker, L.: Werke. 5 Bde., Leipzig/Berlin 1895–1930.
- [L 13.24] Meschkowski, H.: Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors. Braunschweig 1967.
- [L 13.25] Meschkowski, H.: Wandlungen des mathematischen Denkens. 2. Aufl., Braunschweig 1960.
- [L 13.26] Möbius, A. F.: Gesammelte Werke. 4 Bde., Leipzig 1885–1887.
- [L 13.27] Pasch, M.: Vorlesungen über neuere Geometrie. Leipzig 1882.
- [L 13.28] Purkert, W./Ilgauds, H. J.: Georg Cantor. Leipzig 1985.
- [L 13.29] Purkert, W./Ilgauds, H. J.: Georg Cantor. Basel/Boston/Stuttgart 1987.

- [L 13.30] Reichardt, H.: Gauß und die Anfänge der nichteuklidischen Geometrie. Mit Originalarbeiten von J. Bolyai, N. I. Lobatschewski und F. Klein. Leipzig 1985.
- [L 13.31] Reichardt, H.: Gauß und die nicht-euklidische Geometrie. Leipzig 1976.
- [L 13.32] Reid, C.: Hilbert. Berlin/Heidelberg/New York 1970.
- [L 13.33] Riemann, B.: Gesammelte Mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlaß. Ed. R. Dedekind und H. Weber. 2. Aufl., Leipzig 1892.
- [L 13.34] Schreiber, P.: Grundlagen der Mathematik. MfL Bd. 12, 2. Aufl., Berlin 1984.
- [L 13.35] Wußing, H.: C. F. Gauß. 4. Aufl., Leipzig 1982.
- [L 13.36] Wußing, H.: Zur Entstehungsgeschichte des Erlanger Programms. Mitteil. Math. Ges. DDR, Heft 1 (1968), 23–40.

Vorlesung 14

- [L 14.1] Berka, K./Kreiser, L.: Logik-Texte. Kommentierte Auswahl zur Geschichte der modernen Logik. Berlin 1971.
- [L 14.2] Birkhoff, G.: Current Trends in Algebra. Amer. Math. Monthly 80 (1973), 760–782.
- [L 14.3] Chandler, B./Magnus, W.: The History of Combinatorial Group Theory: A Case Study in the History of Ideas. New York/Heidelberg/Berlin 1982.
- [L 14.4] Dick, A.: Emmy Noether. Basel 1970.
- [L 14.5] Dieudonné, J.: Introductory Remarks on Algebra. Topology and Analysis. Historia mathematica 2 (1975), 537–548.
- [L 14.6] Die gegenwärtige wissenschaftlich-technische Revolution. Eine historische Untersuchung. Berlin 1972 (Autorenkollektiv) (Übers. a. d. Russ.).
- [L 14.7] Grzegorzczak, A.: An Outline of Mathematical Logic. Warsaw 1974.
- [L 14.8] Hasse, H.: Kurt Hensel zum Gedächtnis. J. reine u. angew. Math. 187 (1950), 1–13.
- [L 14.9] Hilbert, D.: Die Hilbertschen Probleme. Red. P. S. Alexandrov (russ.). Moskau 1969. Dtsch. ed. H. Wußing, Leipzig 1971.
- [L 14.10] Hopf, H.: Ein Abschnitt aus der Entwicklung der Topologie. Jahresber. DMV 68 (1966), 182–192.
- [L 14.11] Kennedy, H. C.: Giuseppe Peano. Basel 1974.
- [L 14.12] Knobloch, E.: Die mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik. Wiesbaden 1976.
- [L 14.13] Lenin, V. I.: Werke, Bd. 14, Berlin 1970.
- [L 14.14] Matem. sbornik 74 (116) (1967), 323–325.
- [L 14.15] Mehrtens, H.: Die Entstehung der Verbandstheorie. Hildesheim 1979.
- [L 14.16] Mostowski, A. (u. a.): Der gegenwärtige Stand der Grundlagenforschung in der Mathematik. In: Die Hauptreferate des 8. Polnischen Mathematiker-Kongresses. Berlin 1954, S. 11–44.
- [L 14.17] Pogrebysski, I.: Die Mathematik des 20. Jahrhunderts. Anhang zu D. J. Struik: Abriß der Geschichte der Mathematik. 6. Aufl., Berlin 1976.
- [L 14.18] Purkert, W.: Die Entwicklung des abstrakten Körperbegriffes (Dissertation). Leipzig 1972.
- [L 14.19] Reinhold, O.: Sozialistische und wissenschaftstechnische Revolution. Einheit 4/5 (1986), 371–376.
- [L 14.20] Schröter, K.: Mathematik im System der Wissenschaften. Sitzungsber. Akad. Wiss. DDR 11/1972, S. 5–23.
- [L 14.21] Sowjetmacht und Wissenschaft. Dokumente zur Rolle Lenins bei der Entwicklung der Akademie der Wissenschaften. Herausgegeben von G. Kröber und B. Lange. Berlin 1975.
- [L 14.22] Steinitz, E.: Algebraische Theorie der Körper. J. reine u. angew. Math. 187 (1910), 167–309. Neu herausgegeben von H. Hasse und R. Baer, Berlin 1930. Nachdruck 1950.
- [L 14.23] Stjazzkin, N. I.: Die Entstehung der Ideen der mathematischen Logik (russ.). Moskau 1964.

- [L 14.24] Surma, St. J. (ed.): *Studies in the History of Mathematical Logic*. Warsaw 1973.
- [L 14.25] van der Waerden, B. L.: *Moderne Algebra*. Berlin 1930/31.
- [L 14.26] van der Waerden, B. L.: Nachruf auf Emmy Noether. *Math. Annalen* 111 (1935), 469–476.
- [L 14.27] van der Waerden, B. L.: Die Galoistheorie von Heinrich Weber bis Emil Artin. *Arch. Hist. Exact Sci.* 9 (1972/73), 240–248.
- [L 14.28] van der Waerden, B. L.: Die Algebra seit Galois. *Jahresber. DMV* 68 (1966), 155 bis 165.
- [L 14.29] Wendel, G.: Die Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft 1911–1914. Zur Anatomie einer imperialistischen Forschungsgesellschaft. Berlin 1975.
- [L 14.30] Wessel, K.-F.: Weltanschaulich-philosophische Bildung und Erziehung im naturwissenschaftlichen Unterricht. *Einheit* 11 (1974), 1280–1288.
- [L 14.31] Wissenschaft. Studien zu ihrer Geschichte. Theorie und Organisation. Ed. G. Kröber, H. Steiner. Berlin 1972.
- [L 14.32] Wissenschaftlich-technische Revolution und Gesellschaft. Leipzig 1976 (Autorenkollektiv) (Übers. a. d. Russ.).

Vorlesung 15

- [L 15.1] Banach, S.: Sur les opérations dans les ensembles abstraites et leurs applications aux équations intégrales. *Fundamenta Math.* 3 (1922), 133–181.
- [L 15.2] Beaucclair, W. de: Rechnen mit Maschinen. Braunschweig 1968.
- [L 15.3] Borgwadt, H.: Die historische Entwicklung der Funktionalanalysis zu einer selbständigen mathematischen Disziplin. *NTM* 1 (1975), 1–11.
- [L 15.4] Brentjes, S.: Untersuchungen zur Geschichte der linearen Optimierung (LO) von ihren Anfängen bis zur Konstituierung als selbständige mathematische Theorie. Eine Studie zum Problem der Entstehung mathematischer Disziplinen im 20. Jahrhundert (Dissertation). Dresden 1977.
- [L 15.5] Dantzig, S. B.: Programming of Interdependent Activities, II. *Mathematical Model. Econometrica* 17 (1949), 200–211.
- [L 15.6] Dieudonné, J.: *History of Functional Analysis*. Amsterdam 1981
- [L 15.7] Doetsch, G.: Überblick über Gegenstand und Methode der Funktionalanalysis. *Jahresber. DMV* 86 (1927), 1–30.
- [L 15.8] *Entwicklung der Mathematik in der DDR*. Ed. H. Sachs, Berlin 1974.
- [L 15.9] Farkas, J.: Anwendung des mechanischen Principes von Fourier. *Math. u. naturwiss. Berichte* 12 (1895), 263–281.
- [L 15.10] Fourier, J. B. J.: *Analyse des Equations Déterminées*. Paris 1931.
- [L 15.11] Fréchet, M.: Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rendiconti circ. Mat. Palermo* 22 (1906), 1–74.
- [L 15.12] Glade, H./Manteuffel, K.: *Am Anfang stand der Abacus*. Leipzig/Jena/Berlin 1973.
- [L 15.13] Gnedenko, B. W.: *Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. 6. Aufl., Berlin 1967 (Übers. a. d. Russ.).
- [L 15.14] Goldstine, H. H.: *The Computer from Pascal to von Neumann*. Princeton 1972.
- [L 15.15] Halacy, D. St.: Charles Babbage, Father of the Computer. New York 1970.
- [L 15.16] Hawkins, Th.: *Lebesgue's Theory of Integration. Its Origin and Development*. Madison/Milwaukee/London 1970.
- [L 15.17] Hilbert, D.: *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*. Leipzig und Berlin 1912.
- [L 15.18] Hilbert, D.: Die Hilbertschen Probleme. Red. P. S. Alexandrov (russ.). Moskau 1969. Dtsch. ed. H. Wußing, Leipzig 1971.
- [L 15.19] Hofmann, U./Kempe, V.: Die 5. Rechnergeneration. *Sitzungsberichte d. Akad. d. Wiss. DDR*, Jg. 1985, Nr. 15/N. Berlin 1986.
- [L 15.20] Kantorovič, L. V.: *Matematičeskie metody organizacii planirovanija proizvodstva*. Leningrad 1939.

- [L 15.21] Kolmogoroff, A. N.: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin 1933.
- [L 15.22] Koopmans, I. C.: Activity Analysis of Production and Allocation. New York 1951.
- [L 15.23] Krötenheerdt, J.: Aspekte der Entwicklung der Rechentechnik sowie der Informationsverarbeitung. In: Beiträge zur Wissenschaftsgeschichte. Ed. G. Wendel. Berlin 1985, S. 111—123.
- [L 15.24] Leontief, W.: The Structure of the American Economy, 1919—1939. New York, 2. erw. Aufl., 1966.
- [L 15.25] Maibaum, G.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. MfL Bd. 11, 2. Aufl., Berlin 1980.
- [L 15.26] Majstrov, L. E.: Teorija verojatnostej. Istoričeskij očerok (russ.). Moskva 1967.
- [L 15.27] Majstrov, L. E./Petrenko, O. L.: Pribory i instrumenty istoričeskogo značeniya, vyčislitel'nye mašiny (russ.). Moskva 1981.
- [L 15.28] Merkel, G.: Entwicklung und Anwendung der elektrischen Rechentechnik in der DDR. Ed. VEB Robotron, Zentrum für Forschung und Technik Dresden. Berlin 1976.
- [L 15.29] Minkowski, H.: Geometrie der Zahlen. Leipzig 1896.
- [L 15.30] Mises, R. von: Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. Wien 1951.
- [L 15.31] Neumann, J. von: Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums 8 (1935/36), 73—83.
- [L 15.32] Pareto, V.: Manuel d'économie politique. 2. éd., Paris 1925.
- [L 15.33] Randell, B. (Herausgeber): The Origins of Digital Computers. Selected Papers. Berlin/Heidelberg/New York 1973.
- [L 15.34] Rényi, A.: Briefe über die Wahrscheinlichkeit. Berlin 1969.
- [L 15.35] Riesz, F.: Sur les ensembles de fonctions. In: Gesammelte Arbeiten. Budapest 1960, Bd. I., S. 375—377.
- [L 15.36] Siegmund-Schultze, R.: Die Anfänge der Funktionalanalysis und ihr Platz im Umwälzungsprozeß der Mathematik um 1900. Arch. Hist. Exact Sci. 26 (1982), 13—71.
- [L 15.37] Siegmund-Schultze, R.: Der Strukturwandel in der Mathematik um die Wende vom 19. zum 20. Jahrhundert, untersucht am Beispiel der Entstehung der ersten Begriffsbildungen der Funktionalanalysis. NTM 18 (1981), 1, 4—20.
- [L 15.38] Simons, G. L.: Die Fünfte Computergeneration, Konzepte und Wege — Eine Einführung. München/Wien 1986.
- [L 15.39] Tolstoj, A. N.: Teorija i praktika planirovanija perevozok gruzov v prostranstve (russ.). Moskva 1931.
- [L 15.40] Vorndran, E. P.: Entwicklungsgeschichte des Computers, Berlin [West] 1982.
- [L 15.41] Weyl, H.: Elementare Theorie der konvexen Polyeder. Comm. Math. Helv. 7 (1935), 290—306.
- [L 15.42] Zuse, K.: Der Computer — Mein Lebenswerk. Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo 1984.

Abbildungsnachweis

- Copernicus, N., Complete Works I, London/Warsaw/Cracow 1957: *Abb. 6.2*
Descartes, R., Discours de la méthode, Leyde 1637: *Abb. Vorlesung 7*
Euklid, Elemente, Venedig 1509: *Abb. 4.1*
Euler, L., Introductio in analysin infinitorum, Lausanne 1748: *Abb. Vorlesung 9*
Frey, J., Visierbüchlein, Nürnberg 15. Jh.: *Abb. 8.2*
Gauß, C. F., Disquisitiones arithmeticae, Lipsiae 1801: *Abb. Vorlesung 11*
Hilbert, D., Mathematische Probleme (Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900). In: Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1900, Heft 3, S. 253–297: *Abb. Vorlesung 14*
Hogben, L., Die Entdeckung der Mathematik, Stuttgart 1963: *Abb. 5.4, Abb. Vorlesung 6*
Köbel, J., Ain New geordnet Rechenbiechlin auf den linien mit Rechenpfennigen ..., Oppenheim 1514: *Abb. 6.1*
Leupold, J., Theatrum machinarum generale: Schauplatz des Grundes mechanischer Wissenschaften, Leipzig 1724: *Abb. 7.1*
Lobatschewsky, N. I., Géométrie imaginaire, J. reine u. angew. Math. 17 (1837), 295–320: *Abb. Vorlesung 13*
Maxwell, J. Cl., Treatise on Electricity and Magnetism, Oxford 1873: *Abb. Vorlesung 12*
Menninger, K., Zahlwort und Ziffer, 2. Aufl., Göttingen 1958: *Abb. Vorlesung 3, Abb. 6.5*
Monge, G., Géométrie descriptive, Paris 1794/95: *Abb. Vorlesung 10*
Montucla, J. E., Histoire des mathématiques, Bd. 1, Paris 1799: *Abb. Vorlesung 1*
Needham, J., Science and civilisation in China, Vol. III. Mathematics and the sciences of the Heavens and the Earth, Cambridge 1959: *Abb. 5.1*
Neugebauer, O., Mathematische Keilschrift-Texte, Teil II, Berlin 1935: *Abb. Vorlesung 2, Abb. 2.6*
Newton, I., Method of Fluxions, London 1736: *Abb. Vorlesung 8*
Propyläen-Weltgeschichte, Band 1, Berlin 1931: *Abb. 2.1*
Richter, J. P.: The literary works of Leonardo da Vinci, Vol. I, London 1883: *Abb. 6.4*
Robotron Export-Import, Leipzig: *Abb. Vorlesung 15*
Ryff, W. H., Geometrische Büxenmeisterei, Nürnberg 1547: *Abb. 6.3*
Schöne, H., Herons von Alexandria Vermessungslehre und Dioptra, Leipzig 1903: *Abb. 4.6*
Smith, D. E., History of Mathematics, Vol. 1, New York 1923: *Abb. Vorlesung 5, Abb. 5.2, Abb. 5.3*
Struve, W. W., Mathematischer Papyrus des staatlichen Museums der schönen Künste in Moskau, Berlin 1930: *Abb. 2.5*
Wußing, H., Mathematik in der Antike, 2. Aufl., Leipzig 1965: *Abb. 2.3, Abb. 3.1*
Zentralbild, Berlin: *Abb. Vorlesung 4*

Bei der Beschaffung und Anfertigung von Abbildungsunterlagen halfen dankenswerterweise:

VEB Bibliographisches Institut, Leipzig — Bibliothek der Sektion Mathematik der Humboldt-Universität, Berlin — Bibliothek des Karl-Sudhoff-Instituts für Geschichte der Medizin und Naturwissenschaften an der Karl-Marx-Universität, Leipzig — Frau Karin Döring, Berlin — Hochschulbildstelle der Karl-Marx-Universität, Leipzig — Robotron Export-Import, Leipzig — BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig

Biographischer Anhang

In diesem biographischen Anhang haben — ohne Seitenangaben — einige bedeutende Persönlichkeiten Aufnahme gefunden, die nicht im Text erwähnt sind.

- Abel, Niels Henrik, * 5. 8. 1802 Finnö (Süd-norwegen), † 6. 4. 1829 Froland (Südost-norwegen), als Stipendiat in Paris, Berlin und Italien, fundamentale Arbeiten zur Reihenlehre, über elliptische Funktionen und zur Algebra. 205—207, 213, 229, 243, 244
- Abū Kāmil, * um 850, † um 930, wirkte in Ägypten, algebraische Schriften. 96, 98
- Abū-l-Wafā, * 10. 6. 940 Buzgan (Persien), † 997/8 Bagdad, tätig in Bagdad, trigonometrische Arbeiten. 96, 101
- Ackermann, Wilhelm, * 29. 3. 1896 Schönebecke, † 24. 12. 1962 Münster, Professor in Münster, mathematische Logik. 269
- Adelard von Bath, lebte im 11./12. Jh., wirkte in Toledo, Übersetzer, Schriften über das Abakus-Rechnen. 105
- Aiken, Howard Hathaway, * 8. 3. 1900 Hoboken (N. J.), † 14. 3. 1973 Fort Lauderdale, Professor in Cambridge (Mass.) und Miami, Computer(-Science), Elektronik. 303
- al-Battānī, * vor 858 Harran(?), † 929, wirkte in ar-Rakka am Euphrat, Astronom, trigonometrische Arbeiten. 96
- Alberti, Leone Battista, * 18. 2. 1404 Genua, † April 1472 Rom, Physiker, Techniker, Mathematiker. 119, 140, 198
- al-Bīrūnī, * 4. 9. 973 Biruni (Usbekistan, UdSSR), † nach 1050 Ghasna, tätig in Rai, Gurgan, in Choresm und in Ghasna, theoretische und angewandte Trigonometrie, mathematische Geographie. 96, 98, 101, 102
- Alcuin, * um 735 York, † 19. 5. 804 Tours, Mönch, seit 781 am Hofe Karls des Großen, baute ein Schulsystem auf, schrieb Aufgabenbücher. 103
- Alexandrov, Pavel Sergeevič, * 7. 5. 1896 Noginsk (Bogorodsk), † 16. 11. 1982 Moskau, Professor in Moskau, Mengenlehre, Topologie. 275, 291
- d'Alembert, Jean Baptiste le Rond, * 16. 11. 1717 Paris, † 29. 10. 1783 Paris, Mitglied der Akademie seit 1741, Mitherausgeber der Encyclopedie, Arbeiten zur Dynamik, Planetentheorie, Integralrechnung. 181, 186, 189, 190, 204, 210, 226, 228, 236
- Alexander der Große, * 356 v. u. Z., † 323 v. u. Z., König von Mazedonien. 54, 64, 88
- al-Fārābī, * 870(?) bei Farab am Syr-Darja † 950 Damaskus, tätig in Bagdad und Damaskus, Philosoph, kommentierte die „Elemente“, Musik. 100
- al-Fāzārī, † um 777, wirkte in Bagdad, konstruierte die ersten arabischen Astrolabien, Astronom. 100
- Alfons X., * 1226, † 1284, König von Kastilien und Léon, Trigonometrie. 116
- al-Ḥabāš, * Mary (Turkmenien, UdSSR), † um 870, Astronom, tätig in Bagdad, schuf trigonometrische Tafeln. 99
- al-Ḥayyām, * 15. 5. 1048? Nischapur (Persien) † 4. 12. 1131? Nischapur, wirkte in Bagdad und Isfahan, Proportionentheorie, Parallelenpostulat, Gleichungen, berühmter Dichter. 96, 98, 100, 102
- al-Ḥwārizmī, * 780 in Choresm, † um 850, tätig in Choresm und Bagdad, verbreitete die indischen Ziffern, Schriften zur Algebra, Astronomie, Geographie. 95—99, 105
- al-Karāğī, † zwischen 1019 und 1029, tätig in Bagdad, algebraische Arbeiten. 96—98
- al-Kāšī, * nach 1350 Kašan (Persien), † 22. 6. 1429 Samarkand, tätig in Samarkand, Astronom, herausragende arithmetische Berechnungen. 84, 96, 99, 102
- al-Kindī, * um 801, † um 866 Bagdad, tätig

- in Bagdad, Philosoph, gab eine Beschreibung der indischen Arithmetik. 95
- al-Māhānī, * Mahān (Persien), † um 880, tätig in Bagdad, kommentierte die „Elemente“ des Euklid, Verhältnislehre, Astronomie. 96
- al-Mansūr, * 745, † 775, Abbasidenkalif. 95
- al-Marwāzī, siehe 'l-Fath
- al-Qalasādī, * 1412 Basta (Spanien), † Dez. 1486 Béja (Tunesien), wirkte in Granada und Tunis, Arithmetik, algebraische Symbole. 99
- Ampère, André Marie, * 22. 1. 1775 Lyon, † 10. 6. 1836 Marseille, tätig in Lyon, Bourg und Paris, Elektrodynamik, Differentialgleichungen. 196, 213, 238
- Anaximandros, * um 611 v. u. Z., † um 546 v. u. Z., griechischer Philosoph, Astronom. 44
- Anaximenes, * um 584 v. u. Z., † um 525 v. u. Z., griechischer Philosoph. 44
- Apollonios von Perge, * um 262 v. u. Z. Perge, † um 190 v. u. Z. Pergamon?, Kegelschnitte, Astronomie. 57, 64, 68, 71, 72, 76–78, 107, 110, 140, 141, 146, 179, 313
- Arago, Dominique François Jean, * 26. 2. 1786 Estagel, † 2. 10. 1853 Paris, wirkte in Paris, Geodäsie, Astronomie, Analysis. 190
- Archimedes, * um 287 v. u. Z. Syrakus, † 212 v. u. Z. Syrakus, wirkte in Syrakus, „Integralrechnung“, Hebelgesetz, „Archimedisches Prinzip“. 19, 46, 60, 61, 64, 68–71, 74, 76–77, 98, 107, 110, 123, 152, 155, 156, 161, 162, 163, 164, 213, 225
- Archytas, * um 400 v. u. Z. Tarent, † 365 v. u. Z., mathematische Erkenntnistheorie 52, 54, 55
- Argand, Jean Robert, * 18. 7. 1768 Genf, † 13. 8. 1822 Paris, lebte in Paris, komplexe Zahlen, Fundamentalsatz der Algebra. 219
- Aristaios, lebte um 330 v. u. Z., Kegelschnitte, regelmäßige Körper. 71, 146
- Aristarchos von Samos, * um 310, † 230 v. u. Z., Vertreter des heliozentrischen Weltbildes, arbeitete zur Sehneneigung. 310
- Aristophanes, * um 445 v. u. Z., † um 386 v. u. Z., griechischer Komödiendichter. 54
- Aristoteles, * 384 v. u. Z., † 322 v. u. Z., bedeutender griechischer Philosoph. 21, 45, 48, 54, 64, 67, 100, 104, 135, 136, 140, 153, 161, 262, 277, 279
- Arkwright, Richard, * 1732, † 1792, englischer Erfinder
- Artin, Emil, * 3. 3. 1898 Wien, † 20. 12. 1962 Hamburg, Professor in Hamburg und Princeton, Algebra, Zahlentheorie. 241, 275, 281, 282, 284
- Äryabhata, * 476, † ?, Verfasser eines Werkes über Mathematik und Astronomie. 89, 91, 92
- Arzelà, Cesare, * 6. 3. 1847 Stefano di Magra, † 15. 3. 1912 Stefano di Magra, Professor in Palermo und Bologna, Analysis. 288
- Ascoli, Giulio, * 20. 11. 1843 Triest, † 12. 7. 1896 Mailand, Professor in Mailand, Analysis. 288
- as-Samaw'al, * Bagdad, † um 1180 Marāgha (Iran), wirkte in Marāgha, Algebra, Astronomie, Medizin. 97
- Asser, Günter, * 26. 2. 1926, Professor in Greifswald, mathematische Logik
- at-Tūsī, * 18. 2. 1201 Tūs (Persien), † 26. 6. 1274 bei Bagdad, tätig in Tūs, Bagdad und Marāgha, Astronomie, Trigonometrie, Parallelenlehre, Musik. 96, 100, 102, 248
- Augustinus, Aurelius, * 354, † 430, Bischof in Afrika, Philosoph. 102, 103
- Babbage, Charles, * 26. 12. 1792 Teignmouth, † 18. 10. 1871 London, Privatgelehrter, Erfinder, Konstrukteur von Rechenanlagen. 182, 301, 302
- Bachelier, Louis, * 11. 3. 1870 Le Havre, † 28. 4. 1946 Saint-Servan-sur-Mer, Professor in Besancon, Wahrscheinlichkeitsrechnung. 293
- Bachmann, Paul, * 22. 6. 1837 Berlin, † 31. 3. 1920 Weimar, Professor in Wrocław und Münster, mustergültige Darstellungen der Zahlentheorie seiner Zeit. 223
- Bacon, Francis, * 1561, † 1626, englischer Philosoph und Wissenschaftstheoretiker. 138, 165
- Bacon, Roger, * um 1214, † 1294, englischer Philosoph, Kalenderreform, Optik. 106
- Baire, René-Louis, * 21. 1. 1874 Paris, † 5. 7. 1932 Bassens près de Chambéry, Professor in Montpellier, Dijon und Paris, Theorie der reellen Funktionen. 289
- Banach, Stefan, * 30. 3. 1892 Kraków, † 31. 8. 1945 Lwow, Professor in Lwow, Funktionalanalysis. 291, 292
- Bardeen, John, * 1908, amerikanischer Physiker. 304
- Barrow, Isaac, * 1630 London, † 4. 5. 1677 London, Professor in London und Cambridge, seit 1669 als Theologe tätig, Optik, Infinitesimalrechnung. 152, 160, 169, 170, 177, 218, 312

- Bartsch, Jacob, * 1600 Lauban/Lausitz (heute Lubau), † 26. 12. 1633 Lauban, Schwiegersohn Keplers, berechnete Logarithmen. 125
- Bašmakova, Izabella Grigor'evna, * 1921, Professor in Moskau, Geschichte der Mathematik. 311
- Bayes, Thomas, * 1702 London, † 17. 4. 1761 Turbridge Wells, Geistlicher, vorwiegend in London tätig, gab grundlegende Untersuchungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. 201
- Becker, Oskar Joachim, * 5. 9. 1889 Leipzig, † 13. 11. 1964 Bonn, tätig in Freiburg und Bonn, Philosophie und Geschichte der Mathematik. 309
- Beeckman, Isaac, * 10. 12. 1588 Middelburg, † 19. 5. 1637 Dordrecht, Mediziner, mathematisch-physikalische Schriften. 153, 154, 155
- Beltrami, Eugenio, * 16. 11. 1835 Cremona, † 18. 2. 1900 Rom, Professor in Bologna, Pisa, Pavia, Rom, Analysis, Differentialgeometrie, Potentialtheorie. 254
- Berkeley, George, * 1685, † 1753, englischer Geistlicher, Philosoph. 182, 188, 189
- Bernal, John Desmond, * 1901, † 1971, englischer Kristallograph und Wissenschaftstheoretiker
- Bernays, Isaak Paul, * 17. 10. 1888 London, † 18. 9. 1977 Zürich, tätig in Göttingen und Zürich, mathematische Logik, Philosophie. 267, 275
- Bernoulli, Daniel, * 8. 2. 1700 Groningen, † 17. 3. 1782 Basel, Professor in St. Petersburg und Basel, Schriften zur Analysis und Hydrodynamik. 183, 186, 187, 201
- Bernoulli, Jakob, * 27. 12. 1654 Basel, † 16. 8. 1705 Basel, seit 1687 Professor in Basel, grundlegende Arbeiten zur Analysis. 180, 181, 183, 185, 186, 201, 301
- Bernoulli, Johann, * 6. 8. 1667 Basel, † 1. 1. 1748 Basel, Professor in Groningen und Basel, lieferte grundlegende Untersuchungen zur Infinitesimalrechnung und zur Mechanik. 179–181, 183, 185, 186, 202, 225, 312
- Bernoulli, Nikolaus I, * 21. 10. 1687 Basel, † 29. 11. 1759 Basel, Professor in Padua und Basel, Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung. 181, 183, 214, 226
- Bernoulli, Nikolaus II, * 6. 2. 1695 Basel, † 31. 7. 1726 St. Petersburg, Professor (Jura) in Bern und Professor (Mathematik) in St. Petersburg, Arbeiten zur Analysis. 181, 201
- Bernštejn, Sergej Natanovič, * 6. 3. 1880 Odessa, † 26. 10. 1968 Moskau, Professor in St. Petersburg, Charkov und Leningrad, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Approximationstheorie, Differentialgleichungen, Funktionentheorie. 293, 294
- Berthollet, Claude Louis, * 1748, † 1822, französischer Chemiker. 196
- Bertrand, Joseph Louis Francois, * 11. 3. 1822 Paris, † 5. 4. 1900 Paris, Professor in Paris, Geometrie, Lehrbücher. 293
- Bessel, Friedrich Wilhelm, * 1784, † 1846, deutscher Astronom. 186, 226, 251
- Betti, Enrico, * 21. 10. 1823 bei Pistoia, † 11. 8. 1892 Pisa, Professor in Pisa, Algebra, Funktionentheorie. 285
- Bezout, Etienne, * 31. 3. 1730 Nemours, † 27. 9. 1783 Basses-Loges, tätig in Paris, algebraische Gleichungen, Determinanten. 239
- Bhāskara I., lebte im 7. Jh., verleiht der silbenhaften Ziffernschreibweise Stellenwertcharakter, Astronomie. 89
- Bhāskara II., * 1115, † 1185?, Verfasser von „Der Kranz der Wissenschaften“, Astronomie. 89, 91, 93
- Birkhoff, George David, * 21. 3. 1884 Overisel (Michigan), † 12. 11. 1944 Cambridge (Mass.), Professor in Cambridge (Mass.), Mechanik, Relativitätstheorie, Differenzen- und Differentialgleichungen. 282, 283, 291
- Blumenthal, Otto, * 20. 7. 1876 Frankfurt (Main), † Nov. 1944 in KZ Theresienstadt, Professor in Aachen, Funktionentheorie, Kugelfunktionen
- Boccaccio, Giovanni, * 1313, † 1375, italienischer Dichter. 110
- Bohr, Niels Henrik David, * 1885, † 1962, Professor in Kopenhagen, Physik. 275
- Bolyai, Farkas, * 9. 2. 1775 Bolya, † 20. 11. 1856 Maros-Vásárhely, Professor in Maros-Vásárhely, Arithmetik, Geometrie. 251, 252
- Bolyai, Janoš, * 15. 12. 1802 Kolozsvár, † 27. 1. 1860 Maros-Vásárhely, kurzzeitig österreichischer Offizier, Mitbegründer der nichteuklidischen Geometrie. 251–254, 313
- Bolzano, Bernard, * 5. 10. 1781 Prag, † 18. 12. 1848 Prag, Professor der Religionsphilosophie in Prag, grundlegende Arbeiten zur Analysis und Mengenlehre. 211, 212, 223, 263, 264, 278, 280, 288, 312
- Bombelli, Rafael, * Jan. 1526 Bologna,

- † 1572, Ingenieur, rechnete als erster mit komplexen Zahlen. 127
- Boole, George, * 2. 11. 1815 Lincoln, † 8. 12. 1864 Cork, Professor in Cork, einer der Begründer der modernen formalen Logik. 221, 243, 278, 279, 294, 302
- Borel, Felix Edouard Justin (Émile), * 7. 1. 1871 Saint-Affrique, † 3. 2. 1956 Paris, Professor in Paris, grundlegende Arbeiten zur Funktionentheorie und zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. 214, 289, 293
- Born, Max, * 1882, † 1970, deutscher Physiker. 240, 275
- Bosse, Abraham, * 1602 Tours, † 14. 2. 1676 Paris, Professor der Perspektive in Paris, Schriften zur Perspektive. 198
- Boyle, Robert, * 1627, † 1691, englischer Chemiker. 133
- Bradley, James, * 1693, † 1762, englischer Astronom. 136
- Bradwardine, Thomas, * um 1290 Hortfield, † 26. 8. 1349 Lambeth, Theologe, Professor in Oxford, Erzbischof von Canterbury, Schriften zur Theorie des Kontinuums. 107, 159
- Brahmagupta, * 598, lebte in Ujjayini, Verfasser der „Vervollkommnung der Lehre Brahmas“, arithmetische und geometrische Arbeiten. 89, 93
- Brattain, Walter Houser, * 1902, amerikanischer Physiker. 304
- Braun, Antoni, Instrumentenmacher in Wien und Prag, baute um 1726 die erste funktionstüchtige Vierspezies-Rechenmaschine. 150
- Briggs, Henry, * 1561 Warley Wood bei Halifax, † 26. 1. 1630 Oxford, Professor in London und Oxford, führte die Berechnung dekadischer Logarithmen durch. 125
- Brisson, Mathurin Jacques, * 1723, † 1806 französischer Physiker und Wissenschaftstheoretiker. 227
- Brouncker, William Lord Viscount, * 1620 Castle Lyons (Irland), † 5. 4. 1684 London, führender Politiker, Mitbegründer und erster Präsident der Royal Society, Arbeiten zur Reihenlehre. 138, 177
- Brouwer, Luitzen Egbertus Jan, * 27. 2. 1881 Overschie, † 2. 12. 1966 Blaricum (Niederlande), Professor in Amsterdam, Topologie, Logik, intuitionistische Mathematik. 266, 270, 284
- Brunelleschi, Filippo, * 1377, † 1446, italienischer Baumeister und Bildhauer. 119
- Bruno, Giordano, * 1548, † 1600, italienischer Philosoph. 110, 137
- Budach, Lothar, * 14. 11. 1935 Berlin, Professor in Berlin, Algebra, Berechnungstheorie. 313
- Buddha, Gautama, lebte im 6./5. Jh. v. u. Z., indischer Philosoph. 83, 87, 88
- Bürgi, Joost, * 28. 2. 1552 Lichtensteig (Schweiz), * 31. 1. 1632 Kassel, berühmter Uhrmacher und Instrumentenbauer, tätig in Prag und Kassel, Mitentdecker der Logarithmen. 124
- Buffon, Georges Louis Leclerc Comte de, * 1707, † 1788, französischer Naturforscher. 201
- Bunjakovskij, Viktor Jakovlevič, * 4. 12. 1804 Bar, † 30. 11. 1889 St. Petersburg, tätig in St. Petersburg, Analysis, Zahlentheorie, Wahrscheinlichkeitsrechnung. 237, 238, 292
- Burali-Forti, Cesare, * 13. 8. 1861 Arezzo, † 21. 1. 1931 Turin, tätig in Turin, Arithmetik, mathematische Physik. 266
- Burkhardt, Heinrich, * 10. 10. 1861 Schweinfurt, † 2. 11. 1914 München, Professor in Zürich und München, Analysis, Algebra, Potentialtheorie. 312
- Burnside, William, * 2. 7. 1852 London, † 21. 8. 1927 West Wickham (Kent), Professor in Greenwich, Gruppentheorie
- Byron, George Noel Gordon, Lord, * 1788, † 1824, englischer Dichter. 301
- Cajori, Florian, * 28. 2. 1859 St. Aignan (Schweiz), * 14. 8. 1930 Berkeley, tätig in New Orleans, Colorado Springs und Berkeley, Geschichte der Mathematik. 309
- Cantor, Georg, * 3. 3. 1845 St. Petersburg, † 6. 1. 1918 Halle, Professor in Halle, Begründer der neueren Mengenlehre. 19, 21, 216, 222, 223, 229, 263–266, 268, 269, 289
- Cantor, Moritz, * 23. 8. 1829 Mannheim, † 10. 4. 1920 Heidelberg, Professor in Heidelberg, Geschichte der Mathematik. 18, 309, 312
- Cardano, Girolamo, * 24. 9. 1501 Pavia, † 21. 9. 1576 Rom, Mediziner, arbeitete über Wahrscheinlichkeitsrechnung, veröffentlichte die Lösung der kubischen Gleichung. 127, 128, 200, 201, 239
- Carnot, Lazare Nicolas Marguerite, * 13. 5. 1753 Nolay, † 2. 8. 1823 Magdeburg, Ingenieur, geometrische und analytische Arbeiten. 210, 219, 256
- Carnot, Sadi, * 1796, † 1832, französischer Thermodynamiker. 237

- Cartan, Élie, Joseph, * 9. 4. 1869 Dolomieu, † 6. 5. 1951 Paris, Professor in Paris, Gruppentheorie, Topologie, Tensorrechnung, Geometrie. 241, 285, 313
- Cartan, Henri Paul, * 8. 7. 1904 Nancy, Professor in Strasbourg und Paris, Gruppentheorie, algebraische Geometrie. 282, 285
- Cauchy, Augustin Louis, * 21. 8. 1789 Paris, † 22. 5. 1857 Sceaux, Professor in Paris, grundlegende Arbeiten zur Infinitesimalrechnung und mathematischen Physik. 196, 207, 211–214, 220, 226–228, 237, 239, 242, 243, 312
- Cavalieri, Bonaventura, * 1598 ? Mailand, † 30. 11. 1647 Bologna, Jesuit, Professor in Bologna, wichtiger Vorläufer der Infinitesimalrechnung. 115, 152, 158–164, 168, 170
- Cayley, Arthur, * 16. 8. 1821 Richmond, † 26. 1. 1895 Cambridge, Professor in Cambridge, Invariantentheorie, Matrizen, algebraische Geometrie, Gruppentheorie. 148, 221, 240, 242, 244, 254
- Čebyšev, Pafnuti Lvovič, * 16. 5. 1821 Okatovo, † 8. 12. 1894 Petersburg, seit 1859 Professor in Petersburg, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Zahlentheorie, angewandte Mathematik. 213, 238, 292, 293
- Cervantes, Saevedra, Miguel de, * 1547, † 1616, spanischer Dramatiker. 110
- Ceulen, Ludolph van, * 28. 1. 1540 Hildesheim, † 31. 12. 1610 Leiden, tätig in Breda, Amsterdam und Leiden, berechnete Näherungen für π . 119
- Chevalley, Claude, * 11. 2. 1909 Johannesburg, tätig in Paris, Rennes, Princeton und seit 1939 in New York, Algebra. 284
- Chinčhin, Aleksandr Jakovlevič, * 19. 7. 1894 Kondrovo, † 18. 11. 1959 Moskau, Professor in Moskau, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Analysis, Statistik, Informationstheorie, Pädagogik. 293
- Chuquet, Nicolas, * ? Paris, † um 1500, Mediziner, lebte in Lyon, Potenzrechnung, mathematische Symbolik. 124
- Church, Alonzo, * 14. 6. 1903 Washington, Professor in Princeton, Logik. 302
- Clairaut, Alexis Claude, * 7. 5. 1713 Paris, † 17. 5. 1765 Paris, Akademiemitglied, geodätische, astronomische und Schriften zur Analysis. 181, 185, 186, 189, 190
- Clapeyron, Benoit-Pierre-Émile, * 1799, † 1864, französischer Ingenieur. 237
- Clausius, Rudolf Julius Emanuel, * 1822, † 1888, deutscher Physiker. 237
- Cleopatra, * 69 v. u. Z., † 30 v. u. Z., letzte ägyptische Königin. 64
- Clifford, William Kingdon, * 4. 5. 1845 Exeter, † 3. 3. 1879 Madeira, Professor in London, Biquaternionen, Abelsche Funktionen, Philosophie. 243
- Cohen, Paul, * 2. 4. 1934 Longbranch (New Jersey), Professor in Stanford, Mengenlehre mathematische Logik. 267, 268
- Colbert, Jean-Baptiste, * 1619, † 1683, französischer Staatsmann. 139
- Colson, John, * ?, † 20. 12. 1760, tätig in Rochester und Cambridge, Arbeiten zur Arithmetik. 198
- Commandino, Federico, † 1509 Urbino, † 3. 9. 1575 Urbino, tätig in Urbino und Rom, Herausgeber der Werke antiker Mathematiker. 152, 155
- Condorcet, Marie Jean Antoine de, * 17. 9. 1743 Ribemont, † 27. 3. 1794 Bourg-La-Reine, Sekretär der Akademie zu Paris, Schriften zur Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Philosophie. 189, 313
- Copernicus, Nicolaus, * 1473, † 1543, polnischer Astronom, Naturforscher. 72, 113, 118, 137
- Coriolis, Gaspard Gustave de, * 1792, † 1843, französischer Physiker. 238
- Cotes, Roger, * 10. 7. 1682 Burbage, † 5. 6. 1716 Cambridge, Professor in Cambridge, Analysis, mathematische Physik. 226
- Couffignal, Louis, * 16. 3. 1902 Monflanquin, Professor in Paris, Rechentechnik, Kybernetik. 302
- Coulomb, Charles Augustin, * 1736, † 1806, französischer Physiker. 238
- Courant, Richard, * 8. 1. 1888 Lublinitz, † 27. 1. 1972 New Rochelle, Professor in Münster, Göttingen und seit 1934 in New York, mathematische Physik. 275
- Couturat, Louis, * 17. 1. 1888 Paris, † 3. 8. 1914 bei Melun, tätig in Caen und Paris, Logik, Wissenschaftsgeschichte. 278
- Cramer, Gabriel, * 31. 7. 1704 Genf, † 4. 1. 1752 Bagnols bei Nîmes, Professor in Genf, Determinanten. 239, 290
- Crelle, August Leopold, * 17. 3. 1780 Eichwerder, † 6. 10. 1855 Berlin, hoher Beamter, förderte viele Mathematiker. 252
- Crompton, Samuel, * 1753, † 1827, englischer Erfinder. 193
- Dalton, John, * 1766, † 1844, englischer Chemiker. 195
- Damaskios, lebte im 4. Jh., Verfasser des

- Buches XV der „Elemente“ des Euklid. 66
- Daniell, Percy John, * 9. 1. 1889 Valparaiso, † 25. 5. 1946 Sheffield, Professor in Houston und Sheffield, Funktionalanalysis, Integralbegriff. 290
- Dantzig, George Bernhard, * 8. 11. 1914 Portland, Professor an der Stanford Universität, Statistik, Programmierung. 297, 300
- Dumas, Maurice, * 11. 10. 1910 Béziers, † 18. 3. 1984, wirkte in Paris, Technikgeschichte, Geschichte der Chemie. 309
- Dedekind, Richard, * 6. 10. 1831 Braunschweig, † 12. 2. 1916 Braunschweig, Professor in Braunschweig, grundlegende algebraische und mengentheoretische Arbeiten. 216, 222–224, 241, 243, 244, 264, 266, 269, 282, 284
- Demokritos von Abdera, * 460 v. u. Z., † 371 v. u. Z., Atomistik, Inhaltsberechnung. 45, 46, 69, 158, 170, 310
- Desargues, Girard, * 21. 2. 1591 Lyon, † 1661 Paris, Architekt, Mitbegründer der synthetischen Geometrie. 139, 198, 255, 256, 313
- Descartes, René, * 31. 3. 1596 La Haye, † 11. 2. 1650 Stockholm, wirkte in Frankreich, der Schweiz, Italien, Holland und Schweden, Mitbegründer der neuen analytischen Geometrie, philosophische Schriften. 21, 97, 131, 133, 137, 139, 142 bis 147, 153, 167, 168, 173, 179, 185, 216, 218, 257, 312
- Deuring, Max Friedrich, * 9. 12. 1907 Göttingen, † 20. 12. 1984 Göttingen, Professor in Marburg, Hamburg und Göttingen, Algebra
- Dickson, Leonard Eugene, * 22. 1. 1874 Independence, † 17. 1. 1954 Harlingen (Texas), Professor in Chicago, Gruppentheorie, Algebra, Zahlentheorie. 241, 281
- Diderot, Denis, * 1713, † 1784, französischer Philosoph und Schriftsteller. 189
- Dijksterhuis, Eduard Jan, * 28. 10. 1892 Tilburg, † 18. 5. 1965 Bithoven, tätig in Tilburg, Amsterdam und Leiden, Geschichte der Naturwissenschaften. 312
- Diokles, lebte um 200 v. u. Z., geometrische Arbeiten. 76
- Dionysodoros, wird von Heron zitiert, arbeitete über Kugelteilung. 76
- Diophantos, lebte um 250 in Alexandria, arbeitete über Arithmetik und Zahlentheorie. 36, 64, 75, 76, 78, 97, 110, 311
- Dirichlet, Peter Gustav Lejeune, * 13. 2. 1805 Düren, † 5. 5. 1859 Göttingen, Professor in Berlin und Göttingen, Begründer der analytischen Zahlentheorie, grundlegende Arbeiten zur Analysis und Potentialtheorie. 213–216, 243
- Domninos von Larissa, lebte um 450, schrieb über Arithmetik. 78
- Dürer, Albrecht, * 21. 5. 1471 Nürnberg, † 6. 4. 1528 Nürnberg, berühmter Maler, setzte sich mit der Perspektive theoretisch auseinander. 119, 198
- Dulong, Pierre-Louis, * 1785, † 1838, französischer Chemiker und Physiker. 196
- Dumas, Jean-Baptiste, * 1800, † 1884, französischer Chemiker. 196
- Dupin, Pierre-Charles-François, * 1784, † 1873, französischer Mathematiker und Ökonom. 238
- Dyck, Walter von, * 6. 12. 1856 München, † 5. 11. 1934 München, Professor in Leipzig und München, Kulturgeschichte, Differentialgleichungen, Gruppentheorie. 244
- Eckert, John Presper, * 9. 4. 1919 Philadelphia, tätig bei staatl. Behörden u. der Industrie der USA, Computer. 303
- Einstein, Albert, * 1879, † 1955, deutscher Physiker. 234, 239, 275
- Engels, Friedrich, * 1820, † 1895, Begründer des wissenschaftlichen Sozialismus. 16, 17, 110, 169, 176, 179, 194
- Epikur, * 342/41 v. u. Z., † 271/70 v. u. Z., griechischer Philosoph. 64
- Erasmus von Rotterdam, * 1466, † 1536, niederländischer Humanist und Schriftsteller. 110
- Eratosthenes von Kyrene, * um 276 v. u. Z., † um 195 v. u. Z., wirkte in Alexandria, mathematische Geographie, Zahlentheorie. 64, 76
- Eudemos von Rhodos, lebte um 300 v. u. Z. auf Rhodos, Philosoph. 17
- Eudoxos, * um 408 v. u. Z. Knidos, † 355 v. u. Z. Knidos, Urheber der Bücher V und VII der „Elemente“ des Euklid, geniale Theorie des Irrationalen. 46, 55, 57, 59–61, 66, 69, 213, 217
- Euklid von Alexandria, * um 365 v. u. Z., † um 300 v. u. Z., wirkte in Alexandria, Verfasser der „Elemente“, Arbeiten zur Optik und zur Musiktheorie. 19, 46, 51, 57, 64–68, 72–74, 76–78, 97, 100, 105, 106, 110, 126, 248–255, 257, 262, 310, 313
- Euler, Leonhard, * 15. 4. 1707 Basel, † 18. 9. 1783 St. Petersburg, Akademiemitglied in Berlin und St. Petersburg, bedeutendster

- Mathematiker des 18. Jh., grundlegende Arbeiten zur Infinitesimalrechnung, Zahlentheorie, Variationsrechnung, Algebra, angewandten Mathematik. 19, 119, 125, 148, 173, 175, 179—181, 183, 184, 186, 187, 189, 190, 204, 210, 214, 219, 225—227, 236, 238
- Euripides, * um 480 v. u. Z., † 406 v. u. Z., griechischer Dramatiker. 54
- Eyck, Jan van, * um 1390, † 1441, niederländischer Maler. 119
- Faraday, Michael, * 1791, † 1867, englischer Naturforscher. 238
- Farkas, Julius, * 28. 3. 1847 Sarosd, † 27. 12. 1930 Pestzentlörinc, Professor in Cluj, mathematische Physik. 297
- Faulhaber, Johann, * 5. 5. 1580 Ulm, † 1635 Ulm, Kriegsbaumeister und Lehrer in Ulm, berühmter Cossist. 126
- Feller, William, * 1. 7. 1906 Zagreb, † 14. 1. 1970 New York, tätig in Kiel, Providence, Ithaca und Princeton, bedeutende Arbeiten zur Wahrscheinlichkeitstheorie, Operatorenrechnung, Differentialgeometrie. 293
- Fermat, Pierre, * 20. 8. 1601 Beaumont-de-Lomagne, † 12. 1. 1665 Castres, Jurist, tätig in Beaumont und Toulouse, Mitbegründer der analytischen Geometrie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung, grundlegende Arbeiten zur Infinitesimalrechnung und zur Zahlentheorie. 133, 139, 141, 142, 146, 147, 152, 161—163, 165—168, 179, 185, 200, 218, 236
- Ferrari, Ludovico, * 2. 2. 1522 Bologna, † Okt. 1565 Bologna, Entdecker der Auflösung der biquadratischen Gleichung. 127
- Ferro, Scipione del, * 6. 2. 1465 Bologna, † Okt./Nov. 1526 Bologna, lehrte Mathematik in Bologna, entdeckte die Methode zur Auflösung kubischer Gleichungen. 127
- Fibonacci (Leonardo von Pisa), * 1170 Pisa, † nach 1240 Pisa, Kaufmann, bürgerte die indischen Ziffern in Europa ein, bearbeitete zahlentheoretische Probleme. 105, 239
- Fine, Terence Leon, * 9. 3. 1939 New York, Elektroniker, Wahrscheinlichkeitsrechnung. 294
- Fisher, Ronald Aylmer, * 17. 2. 1890 London, † 29. 7. 1962 Adelaide, Professor in London, Cambridge und Adelaide, Statistik. 293
- Foncenex, François Daviet de, * 1734 Thonon, † 1799 Casale, Offizier, Schriften zur Mechanik und über komplexe Zahlen. 204
- Fourier, Jean-Baptiste-Joseph de, * 21. 3. 1768 Auxerre, † 16. 5. 1830 Paris, Professor in Paris, grundlegende Untersuchungen über trigonometrische Reihen und zur mathematischen Physik. 211, 213, 215, 297
- Fraenkel, Abraham, * 17. 2. 1891 München, † 15. 10. 1965 Jerusalem, Professor in Kiel und Jerusalem, Mengenlehre, Philosophie der Mathematik. 267, 281, 283
- Francesca, Piero della, * um 1416, † 1492, italienischer Maler, Arbeiten zur Perspektive. 198
- Fréchet, René Maurice, * 2. 9. 1878 Maligny, † 4. 6. 1973 Paris, Professor in Paris, Funktionalanalysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung. 288—291, 293, 295
- Fredholm, Erik Ivar, * 7. 4. 1866 Stockholm, † 17. 8. 1927 Mörby, Professor in Stockholm, Integralgleichungen, Potentialtheorie. 289, 290
- Frege, Gottlob, * 8. 11. 1848 Wismar, † 26. 7. 1925 Bad Kleinen, Professor in Jena, mathematische Logik, führender Vertreter des Logizismus. 269
- Fresnel, Jean-Augustin, * 1788, † 1827, französischer Physiker. 196, 237, 279
- Frey, Johann, lebte um 1450 in Nürnberg, Eichmeister. 157
- Frézier, Amédée Francois, * 1682, Chambéry, † 16. 10. 1773 Brest, Ingenieur, Arbeiten zur Stereometrie und zur darstellenden Geometrie. 198
- Fritz, Kurt von, 20. Jh., Geschichte der Mathematik. 310
- Frobenius, Georg, * 26. 10. 1849 Berlin, † 3. 8. 1917 Berlin, Professor in Zürich und Berlin, bedeutungsvolle Arbeiten zur Algebra, besonders zur Gruppentheorie. 221, 240, 241
- Galilei, Galileo, * 1564, † 1642, italienischer Physiker und Astronom. 20, 115, 135 bis 138, 143, 152, 153, 158, 161, 162, 200, 234, 263
- Galois, Evariste, * 25. 10. 1811 Bourg-la-Reine, † 31. 5. 1832 Paris, studierte in Paris, einer der Begründer der neueren Algebra. 204, 206, 207, 242—244, 284
- Ganeśa, * 1507 Nandod (Indien), Kommentator, Astronom. 89
- Gauß, Carl Friedrich, * 30. 4. 1777 Braunschweig, † 23. 2. 1855 Göttingen, Professor in Göttingen, bedeutendster Mathematiker der Neuzeit, fundamentale Arbeiten zur Zahlentheorie, Potentialtheorie, nicht-

- euklidischen Geometrie, Analysis, angewandten Mathematik, Physik und Astronomie. 19, 21, 145, 185, 202, 204, 205, 207, 209, 213, 219–221, 226–228, 236, 243, 250–255, 260, 262, 313
- Gavurin, Mark-Konstantinovič, * 16. 11. 1911 Mir, Professor in Leningrad, Funktionalanalysis, Operationsforschung. 297
- Gay-Lussac, Joseph-Louis, * 1778, † 1850, französischer Chemiker und Physiker. 196
- Gel'fand, Israil' Moiseevič, * 20. 8. 1913 Gebiet Odessa, Professor in Moskau, Funktionalanalysis. 292
- Gel'fond, Aleksandr Osipovič, * 24. 10. 1906 St. Petersburg, † 7. 11. 1968 Moskau, seit 1931 Professor in Moskau, Zahlentheorie, Funktionentheorie. 275
- Gentzen, Gerhard, * 24. 11. 1909 Greifswald, † 4. 8. 1945 Prag, Professor in Göttingen und Prag, mathematische Logik. 269
- Gerbert von Aurillac, * um 940 Aquitaine, † 12. 5. 1003 Rom, Geistlicher, seit 999 Papst Sylvester II, führte den Abacus ein ließ astronomische Geräte herstellen. 104
- Gerhardt, Carl Immanuel, * 1816, † 1899, Geschichte der Mathematik. 312
- Gergonne, Joseph Diaz, * 19. 6. 1771 Nancy, † 4. 5. 1859 Montpellier, Professor in Nîmes und Montpellier, Mitbegründer der neueren projektiven Geometrie. 256
- Gerling, Christian Ludwig, * 10. 7. 1788 Hamburg, † 15. 1. 1864 Marburg, Professor in Marburg, Geodäsie, Geometrie, Astronomie. 251
- Gerson, Levi ben, * 1288 Bagnols, † 20. 4. 1344, wirkte in Südfrankreich, entdeckte das Prinzip der vollständigen Induktion, erfand den Jakobstab, trigonometrische Arbeiten. 117
- Gibbs, Josiah Willard, * 1839, † 1903, nord-amerikanischer Physiker. 241
- Giotto di Bondone, * um 1266, † 1337, italienischer Maler und Baumeister. 119
- Girard, Albert, * 1595 St. Mihiel, † 8. 12. 1632 Leiden, niederländischer Mathematiker, ihm wird die erste Fassung des Fundamentalsatzes der Algebra zugeschrieben. 128, 145, 153, 204, 218
- Gleason, Andrew Mattei, * 4. 11. 1921 Fresno (Kalifornien), Professor in Cambridge (Mass.), topologische Gruppen, Banach-Algebren. 285
- Glivenko, Valerij Ivanovič, * 2. 1. 1897 Kiev, † 15. 2. 1940 Moskau, Professor in Moskau, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Analysis. 294
- Gmunden, Johannes von, * um 1380 Gmunden (Traunsee), † 23. 2. 1442 Wien, lehrte in Wien, erster „Berufsmathematiker“. 116
- Gnedenko, Boris Vladimirovič, * 1. 1. 1912 Uljanovsk, Professor in Moskau, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik
- Gödel Kurt, * 28. 4. 1906 Brno, † 14. 1. 1978 Princeton, Professor in Wien und seit 1938 in Princeton, der führende Vertreter der mathematischen Logik der Gegenwart. 267, 269, 275, 278, 280
- Goethe, Johann Wolfgang von, * 1749, † 1832, deutscher Dichter. 5, 51
- Grammateus (eigentlich Schreyber, Heinrich), * um 1496 Erfurt, † ?, lehrte in Wien, Schriften zur Coß
- Grandi, Guido, * 1. 10. 1671 Cremona, † 4. 7. 1742 Pisa, Professor in Pisa, Schriften zur Analysis und über höhere Kurven. 188
- Graßmann, Hermann, * 15. 4. 1809 Stettin (heute Szczecin), † 26. 9. 1877 Stettin, Gymnasiallehrer in Stettin, grundlegende Arbeiten zur Vektoralgebra, Tensorrechnung, Physik und Sprachwissenschaft. 148, 221, 224, 241, 244
- Graunt, John, * 24. 4. 1620 London, † 18. 4. 1674 London, tätig als Händler, Lehrer, Verwaltungsbeamter, Mitglied der Royal Society, Arbeiten zur Bevölkerungsstatistik. 201
- Green, George, * Juli 1793 Nottingham, † 31. 5. 1841 Sneinton, eigentlich von Beruf Müller, tätig in Cambridge, mathematische Physik, Potentialtheorie. 238
- Gregorius a Sancto Vincentio, * 8. 9. 1584 Brügge, † 27. 1. 1667 Gent, Jesuit, lehrte Mathematik in Rom, Prag und in Spanien, Schriften zur Analysis und zur Astronomie. 141, 142, 152, 162
- Gregory, Duncan Farquharson, * 13. 4. 1813 Edinburgh, † 23. 2. 1844 Edinburgh, wirkte in Cambridge, Algebra. 241
- Gregory, James, * Nov. 1638 Drumoak, † Okt. 1675 Edinburgh, Professor in St. Andrews und Edinburgh, Arbeiten zur Reihenlehre und zur Optik 152, 177, 178, 179
- Gresham, Thomas, * 1519, † 1579, britischer Kaufmann. 125, 138, 149
- Grothendieck, A. * 1928, Algebra. 285
- Günther, Siegmund, * 6. 2. 1848 Nürnberg, † 3. 2. 1923 München, tätig in Ansbach und München, Geschichte der Mathematik und Geographie. 309
- Guericke, Otto von, * 1602, † 1686, deutscher Physiker. 136

- Guldin, Paul (Habakuk), * 12. 6. 1577 St. Gallen, † 3. 11. 1643 Graz, Professor in Rom, Wien und Graz, fand 1641 die „Guldinsche Regeln“, 78, 152
- Gunter, Edmund, * 1581 Hertfordshire, † 10. 12. 1626 London, Professor der Astronomie in London, erfand den Rechenstab, Tabellenwerke. 149, 150
- Gutenberg, Johann, * um 1396, † 1468, Erfinder des Buchdrucks mit beweglichen Lettern. 110
- Haar, Alfred, * 11. 10. 1885 Budapest, † 16. 3. 1933 Szeged, Professor in Budapest und Szeged, Maßtheorie, Analysis. 285
- Hachette, Jean Nicolas Pierre, * 6. 5. 1769 Mézières, † 16. 1. 1834 Paris, tätig in Mézières, Collioure und Paris, theoretische Maschinenlehre, darstellende Geometrie, mathematische Physik. 199
- Hadamard, Jacques Salomon, * 8. 12. 1865 Versailles, † 17. 10. 1963 Paris, Professor in Paris, Analysis. 288
- Hahn, Hans, * 27. 9. 1879 Wien, † 24. 7. 1934 Wien, Professor in Bonn und Wien, Mengenlehre, Funktionentheorie, reelle Funktionen, Logik
- Hahn, Philipp Matthäus, * 25. 7. 1739 Scharnhausen, † 2. 5. 1790 Echterningen, Pfarrer, entwickelte seit 1768 Rechenmaschinen. 150
- Halley, Edmond, * 1656 ?, † 1743, englischer Astronom und Geophysiker. 136, 189, 201
- Hamilton, William Rowan, * 4. 8. 1805 Dublin, † 2. 9. 1865 Dunsink bei Dublin, Präsident der Königlich-Irischen Akademie seit 1837, theoretische Optik, Mechanik, Quaternionenkalkül. 148, 220, 221, 236 bis 238, 240, 241, 243, 244
- Hankel, Hermann, * 14. 2. 1839 Halle, † 29. 8. 1873 Schramberg, Professor der Mathematik in Leipzig, Erlangen und Tübingen, Arbeiten zur Analysis, Algebra und Geschichte der Mathematik. 216, 221, 222, 241, 243, 244, 309
- Hargreaves, James, † 1778, englischer Weber, konstruierte erste brauchbare Wagenspinnmaschine. 193
- Harig, Gerhard, * 1902, † 1966, deutscher Wissenschaftshistoriker. 311
- Harriot, Thomas, * um 1560 Oxford, † 2. 7. 1621 London, tätig in Amerika und London, arbeitete über Gleichungen und mathematische Physik. 308
- Harrison, John, * 1693, † 1776, englischer Erfinder. 136
- Härūn-ar-Rašīd, lebte im 8./9. Jh., Abbasidenkalif. 95
- Harvey, William, * 1578, † 1657, englischer Anatom und Arzt. 136
- Hasse, Helmut, * 25. 8. 1898 Kassel, † 26. 12. 1979 Ahrensburg, Professor in Halle, Marburg und Göttingen, algebraische Zahlentheorie. 281, 284
- Hausdorff, Felix, * 8. 11. 1868 Breslau (heute Wrocław), † 26. 1. 1942 Bonn, Professor in Leipzig, Greifswald und Bonn, Mengenlehre. 268, 289, 291
- Heisenberg, Werner, * 1901, † 1976, deutscher Physiker. 240
- Heine, Heinrich Eduard, * 16. 3. 1821 Berlin, † 21. 10. 1881 Halle, Professor in Halle, Arbeiten über Kugelfunktionen und zur Potentialtheorie. 214, 264
- Heller, Siegfried, * 1. 12. 1876 Rohrbach, † 9. 6. 1970 Schleswig, Zahlentheorie, Geschichte der Mathematik. 310
- Helly, Eduard, * 1. 6. 1884 Wien, † 28. 11. 1943 Chicago, tätig in Wien und Chicago, Mengenlehre
- Helmholtz, Hermann von, * 1821, † 1894, deutscher Physiker. 237, 238, 313
- Hensel, Kurt, * 29. 12. 1861 Königsberg (heute Kaliningrad), † 1. 6. 1941 Marburg, Professor in Marburg, Zahlentheorie. 283, 284
- Hermite, Charles, * 24. 12. 1822 Dieuze, † 14. 1. 1901 Paris, Professor in Paris, Arbeiten zur Algebra und Analysis, bewies die Transzendenz von e . 240
- Heron von Alexandria, lebte im 1. Jh., angewandte Mathematik. 64, 73–76, 91, 103, 140
- Herschel, John Frederick, * 1792, † 1871, englischer Astronom, Physiker und Chemiker. 182
- Hertz, Heinrich Rudolf, * 1857, † 1894, deutscher Physiker. 237
- Hesse, Ludwig Otto, * 22. 4. 1811 Königsberg (heute Kaliningrad), † 4. 8. 1874 München, Professor in Königsberg, Halle, Heidelberg und München, Invariantentheorie, analytische Geometrie, Determinanten. 148
- Heyting, Arend, * 9. 5. 1898 Amsterdam, † 9. 6. 1980 Lugano, Professor in Enschede und Amsterdam, intuitionistische Mathematik. 270
- Hilbert, David, * 23. 1. 1862 Königsberg (heute Kaliningrad), † 14. 2. 1943 Göt-

- tingen, Professor in Königsberg und Göttingen, fundamentale Arbeiten zur Zahlentheorie, über Integralgleichungen und mathematische Physik, über die Grundlagen der Geometrie. 21, 222, 224, 225, 234, 235, 259–262, 265, 266, 268–271, 281, 284, 285, 290, 291, 292, 313, 314
- Hipparchos von Nicäa, * um 190 v. u. Z., † nach 127 v. u. Z., bedeutendster Astronom der Antike, führte die Trigonometrie in die Astronomie ein. 107, 140
- Hippasos von Metapontum, lebte um 450 v. u. Z., verbreitete die Kenntnis des Irrationalen. 52
- Hippokrates von Chios, lebte um 440 v. u. Z., Geometrie. 46, 47, 60
- Hitchcock, Frank Lauren, * 6. 3. 1875 New York, † 29. 5. 1957 Los Angeles, Professor in Cambridge (Mass.), angewandte Mathematik. 298
- Hofmann, Joseph, Ehrenfried, * 7. 3. 1900 München, † 7. 5. 1973 Günzburg, Professor in Berlin, Freiburg, Tübingen und Karlsruhe, führender Vertreter der Geschichte der Mathematik. 309, 312
- Hollerith, Hermann, * 29. 2. 1860 Buffalo (New York), † 17. 1. 1929 Washington, Ingenieur, entwickelte die ersten elektromechanischen Rechenanlagen. 302
- Hooke, Robert, * 1635, † 1702, englischer Physiker. 138
- Hopf, Heinz, * 19. 11. 1894 Gräbschen, † 3. 6. 1971 Zollikon (Schweiz), tätig in Göttingen, Princeton und seit 1931 in Zürich, algebraische Topologie
- Horner, William George, * 1786 Bristol, † 22. 9. 1837 Bath, wirkte in Grosvenor Place, Bath, Algebra, gab 1819 sein Lösungsverfahren für algebraische Gleichungen an. 86, 311
- l'Hospital, Guillaume-François-Antoine de, * 1661 Paris, † 2. 2. 1704 Paris, Privatgelehrter, verfaßte die ersten Lehrbücher der Analysis. 181, 182, 183
- Hudde, Johann, * 1628 Amsterdam, † 15. 4. 1704 Amsterdam, Bürgermeister von Amsterdam, Schriften zur Analysis. 177
- Huntington, Edward Vermiliye, * 26. 4. 1874 Clinton (New York), † 25. 11. 1952 Cambridge (Mass.), seit 1919 Professor in Cambridge (Mass.), Logik, Mechanik. 281
- Hurwicz, Leonid, 20. Jh., amerikanischer Mathematiker. 300
- Hurwitz, Adolf, * 26. 3. 1859 Hildesheim, † 18. 11. 1919 Zürich, Professor in Königsberg (heute Kaliningrad) und Zürich, Funktionentheorie, Algebra. 266, 285
- Hutten, Ulrich von, * 1488, † 1523, deutscher Publizist und Dichter. 110
- Huygens, Christiaan, * 14. 4. 1629 Den Haag, † 8. 7. 1695 Den Haag, lebte in den Niederlanden und Paris, arbeitete über Wahrscheinlichkeitsrechnung und Analysis, entdeckte den Saturnring und den Orionnebel, stellte die Wellentheorie des Lichts auf. 135, 136, 152, 163, 200, 201
- Hypathia, * um 370 Alexandria, † 415 Alexandria, letzte Vertreterin der alexandrinischen Mathematikerschule, Philosophin. 78
- Hypsikles, lebte im 2. Jh. v. u. Z. in Alexandria, Verfasser des Buches XIV der „Elemente“ des Euklid. 66, 76
- ibn al-Haitam, * 965, † um 1040 Kairo, wirkte in Kairo, optische Arbeiten, Parallelentheorie. 96, 100
- ibn Lait, lebte im 11. Jh., Beiträge über kubische Gleichungen. 98
- ibn Qurra, * 836 Harran, † 18. 2. 901 Bagdad ?, tätig in Bagdad, Arbeiten zum Parallelenpostulat, Übersetzungen antiker Autoren. 95, 97
- Itard, Jean, * 16. 6. 1902 bei Serrières, † 8. 5. 1979 Paris, wirkte in Alençon, Marseille und Paris, Geschichte der Mathematik. 309
- Iustinian, * 482, † 565, byzantinischer Kaiser. 78
- Jacob, Simon, * in Coburg, † 24. 6. 1564 Frankfurt (Main), berühmter Rechenmeister. 124
- Jacobi, Carl Gustav Jakob, * 10. 12. 1804 Potsdam, † 18. 2. 1861 Berlin, Professor in Königsberg (heute Kaliningrad), später in Berlin als Akademienmitglied tätig, Arbeiten zu elliptischen Funktionen, Differentialgleichungen, zur analytischen Mechanik. 143, 214, 229, 236, 238, 239
- Jacquard, Joseph-Marie, * 1762, † 1834, französischer Ingenieur. 301, 302
- Jevons, William Stanley, * 1. 9. 1835 Liverpool, † 13. 8. 1882 Hastings, Professor in Manchester und London, Logik, Ökonomie, Philosophie. 279
- Johannes von Sevilla, wirkte im 12. Jh. in Toledo, Übersetzer und Compiler. 105
- Jordan, Camille, * 5. 1. 1838 Lyon, † 20./21. 1. 1922 Mailand, Ingenieur, Professor

- in Paris, Schriften zur Algebra, besonders zur Gruppentheorie. 207
- Jurin, James, * 1684, † 1750, englischer Mediziner. 189
- Juškevič, Adol'f-Andrej Pavlovič, * 1906, Professor in Moskau, Geschichte der Mathematik. 309, 311, 312
- Kästner, Abraham Gotthelf, * 27. 9. 1719 Leipzig, † 20. 6. 1800 Göttingen, Professor in Leipzig und Göttingen, Arbeiten zur Geometrie und Geschichte der Mathematik. 17, 250
- Kant, Immanuel, * 1724, † 1804, deutscher Philosoph. 21, 250, 251
- Kantorovič, Leonid Vital'evič, * 19. 1. 1912 St. Petersburg, † April 1986, Professor in Leningrad, Arbeiten zur Funktionalanalysis, mathematischen Ökonomie, Mengenlehre. 292, 297–299
- Karl der Große, * 742, † 814, deutscher König und römischer Kaiser. 103
- Kay, John, * 1704, † 1764, britischer Erfinder. 193
- Keldyš, Matislav Vsevolodovič, * 10. 2. 1911 Riga, † 24. 6. 1978 Znkovka bei Moskau, Professor in Moskau, Arbeiten zur Funktionentheorie, Potentialtheorie und über Rechenanlagen. 275
- Kellogg, Oliver Dimon, * 10. 7. 1878 Lincoln, † 26. 8. 1932 Hills of Maine Professor in Cambridge (Mass.), Potentialtheorie, Integralgleichungen. 291
- Kelvin, Lord, eigentlich Thomson, William, * 1824, † 1907, schottischer Physiker. 237, 238
- Kepler, Johannes, * 27. 12. 1571 Weil der Stadt, † 15. 11. 1630 Regensburg, wirkte in Prag, Linz und Sagan, fundamentale Arbeiten zur Astronomie, Probleme der Infinitesimalrechnung. 20, 91, 99, 124, 125, 135, 136, 152, 156–159, 168, 170
- Killing, Wilhelm, * 10. 5. 1847 Burbach, † 11. 2. 1923 Münster, Professor in Münster, Arbeiten zur Algebra und Geometrie
- Kirchhoff, Gustav, * 1824, † 1887, deutscher Physiker. 237
- Klein, Felix, * 25. 4. 1849 Düsseldorf, † 22. 6. 1925 Göttingen, Professor in Erlangen, München, Leipzig und Göttingen, Arbeiten zur Gruppentheorie, Geschichte der Mathematik, pädagogisch und wissenschaftspolitisch sehr einflußreich. 221, 237, 241, 254, 255, 257–259, 313
- Kline, Morris, * 1. 5. 1908 New York, Prof. in New York, Topologie, Elektrotechnik, Elektrodynamik, Pädagogik, Geschichte der Mathematik. 309
- Köbel, Jakob, * 1470 Heidelberg, † 31. 1. 1533 Oppenheim, Rechenmeister, Graveur, Bildschnitzer und Dichter, Elementarmathematik. 112, 121
- Kolmogorov, Andrej Nikolaevič, * 25. 4. 1903 Tambov, † 20. 10. 1987, Professor in Moskau, fundamentale Arbeiten zur Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Topologie. 270, 275, 291–295
- Koopman, Bernard Osgood, * 19. 1. 1900 Paris, Professor in Cambridge (Mass.) und New York, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Operationsforschung. 294
- Koopmans, Tjalling, * 28. 8. 1910 Graveland (Niederlande), tätig in Genf und seit 1940 in den USA, mathematische Ökonomie. 297, 300
- Kovalevskaja, Sofia Vassilevna, * 15. 1. (3. 1. 1850 Moskau, † 10. 2. (29. 1.) 1891 Stockholm, Professor in Stockholm, Analysis, Kinematik. 229
- Kronecker, Leopold, * 7. 12. 1823 Liegnitz, † 29. 12. 1891 Berlin, Professor in Berlin, Arbeiten zur Idealtheorie, Zahlentheorie, über elliptische Funktionen. 224, 244, 265, 266, 270
- Kropp, Gerhard, * 1910, tätig in Berlin (West), Geschichte der Wissenschaften. 312
- Kršpa, kommentierte 1580 das Werk von Bhāskara II. 89
- Krull, Wolfgang, * 26. 8. 1899 Baden-Baden, † 12. 4. 1971, seit 1928 Professor in Erlangen, Algebra. 281, 282, 284
- Kuczynski, Jürgen, * 1904, Professor in Berlin, Wirtschaftsgeschichte. 314
- Kürschak, Josef Andreas, * 14. 3. 1864 Budapest, † 26. 3. 1933 Budapest, Professor in Budapest, Variationsrechnung. 283
- Kummer, Ernst Eduard, * 29. 1. 1810 Sorau, † 14. 5. 1893 Berlin, Professor in Breslau (Wrocław) und Berlin, Funktionentheorie, Geometrie, Zahlentheorie. 243
- Lacroix, Sylvestre François, * 28. 4. 1765 Paris, † 24. 5. 1843 Paris, Professor in Rochefort, Besançon und Paris, Verfasser sehr geschätzter Lehrbücher, vorwiegend zur Infinitesimalrechnung. 148
- Lagrange, Joseph Louis, * 25. 1. 1736 Turin, † 10. 4. 1813 Paris, Professor in Turin, Berlin und Paris, grundlegende Arbeiten

- zur Himmelsmechanik. Infinitesimalrechnung und analytischen Mechanik. 17, 181, 182, 184, 186, 189, 190, 196, 203–205, 211, 214, 229, 236, 238, 239
- Laguerre, Edmond Nicolas, * 9. 4. 1834 Bar-le-Duc, † 14. 8. 1886 Bar-le-Duc, Professor in Paris, höhere Theorie der Kurven
- Lalouère, Antoine de, * 24. 8. 1600 Rieux, † 2. 9. 1664 Toulouse, Jesuit, Lehrer der Mathematik, Vorläufer der Infinitesimalrechnung. 152
- Lambert, Johann Heinrich, * 26. 8. 1728 Mulhouse, † 25. 9. 1777 Berlin, Akademienmitglied in Berlin, bewies die Irrationalität von π , Begründer der Photometrie, Arbeiten zur Himmelsmechanik, Physik, Philosophie. 198, 249, 250, 259, 278
- Landen, John, * 23. 1. 1719 Peakirk, † 15. 1. 1790 Milton, Verwaltungsbeamter, Schriften zur Analysis und Astronomie. 182
- Laplace, Pierre-Simon, * 28. 3. 1749 Beaumont-en-Auge, † 5. 3. 1827 Paris, seit 1767 Professor in Paris, grundlegende Arbeiten zur Himmelsmechanik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Entstehung des Weltalls. 181, 189, 190, 196, 201, 202, 203, 204, 226, 227, 229, 239, 292, 293
- Lasker, Emanuel, * 24. 12. 1868 Berlinchen (heute Berlinek, Kreis Myślībórz, VR Polen), † 13. 1. 1941 New York, 1894–1921 Schachweltmeister, Arbeiten zur Idealtheorie
- Laurent, Pierre Alphonse, * 18. 7. 1813 Paris, † 2. 9. 1854 Paris, Offizier, seit 1846 in Paris tätig, Funktionentheorie. 228
- Lavoisier, Antoine Laurent, * 1743, † 1794, französischer Chemiker. 195
- Lebedev, Sergej Alekseevič, * 2. 11. 1902 Gorki, † 3. 7. 1974 Moskau, Professor in Moskau, elektronische Rechenanlagen, Energetik.
- Lebesgue, Henri Léon, * 28. 6. 1875 Beauvais, † 26. 7. 1941 Paris, Professor in Rennes, Poitiers und Paris, Begründer der modernen Theorie der reellen Funktionen. 214, 288, 289, 290, 295
- Leblanc, Nicolas, * 1742, † 1806, französischer Chemiker. 193
- Legendre, Adrien-Marie, * 18. 9. 1752 Paris, † 9. 1. 1833 Paris, Professor in Paris, Arbeiten zur Zahlentheorie, Analysis, Parallelen-theorie, Kosmogonie. 181, 186, 202, 248, 249, 254
- Leibniz, Gottfried Wilhelm, * 1. 7. 1646 Leipzig, † 14. 11. 1716 Hannover, wirkte in Paris, London, Berlin und Hannover, Mitentdecker der Infinitesimalrechnung, Begründer der neueren mathematischen Logik, grundlegende philosophische Arbeiten. 19, 21, 119, 133, 139, 150, 152, 160, 163, 167, 168, 172–174, 176, 178–183, 185, 186, 218, 225, 236, 239, 241, 243, 277, 278, 312
- Lenin, Vladimir Il'ič, * 1870, † 1924, Begründer der Sowjetunion. 5, 17, 19, 20, 272, 273, 313
- Leonardo von Pisa siehe Fibonacci
- Leonardo da Vinci, * 1452, † 1519, italienischer Maler und Techniker. 115, 119, 198
- Leontief, Vasilij, * 1906, tätig in Cambridge (Mass.), mathematische Ökonomie. 296, 297, 300
- Leopold I., * 1658, † 1705, deutscher Kaiser. 138, 139
- Leukippos, lebte um 450 v. u. Z., griechischer Philosoph. 45
- Leupold Jacob, * 25. 7. 1674 Planitz, † 12. 1. 1727 Leipzig, Mechaniker, Ökonom und Bergkommissar, Schriften zum Maschinenwesen. 150
- Lévy, Paul Pierre, * 15. 9. 1886 Paris, † 15. 12. 1971 Paris, Professor in St. Etienne und Paris, Arbeiten zur Analysis, Funktionalanalysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung. 293
- 'l-Fath, lebte im 12. Jh. in Merv, Physiker und Astronom, erarbeitete trigonometrische Tafeln. 102
- Lie, Marius Sophus, * 17. 12. 1842 Nordfjordeide, † 18. 2. 1899 Kristiania (Oslo), Professor in Kristiania und Leipzig, Transformationsgruppen. 257, 284, 285
- Lindemann, Ferdinand von, * 12. 4. 1852 Hannover, † 6. 3. 1939 München, tätig in Würzburg, Freiburg, Königsberg (heute Kaliningrad) und München, bewies 1882 die Transzendenz von π . 119
- Linné, Carl von, * 1707, † 1778, schwedischer Naturforscher. 136
- Linnik, Jurij Vladimirovič, * 8. 1. 1915 Belaja Zerkov, † 1972, Professor in Leningrad, Arbeiten zur Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitsrechnung. 293
- Liouville, Joseph, * 24. 3. 1809 St.-Omer, † 8. 9. 1882 Paris, Professor in Paris, Analysis, Geometrie, Zahlentheorie. 119
- Lui Hui, lebte im 3. Jh., chinesischer Kommentator. 83, 85
- Lui Zhuo, * 544, † 610, Kommentator, bearbeitete Interpolationsprobleme. 83
- Li Ye, * 1192 Ta-hsing (heute Peking),

- † 1279 Provinz Hopeh, chinesischer Lehrer und Beamter, Untersuchungen zur Geometrie und über algebraische Gleichungen. 83, 86
- Ljapunov, Aleksandr Michailovič, * 6. 6. 1857 Jaroslavl, † 3. 11. 1918 Odessa, Professor in Charkov und St. Petersburg, Differentialgleichungen, Potentialtheorie, Wahrscheinlichkeitsrechnung. 293
- Lobačevskij, Nikolaj Ivanovič, * 2. 12. 1792 Nishni-Novgorod (heute Gorki), † 24. 2. 1856 Kasan, Professor in Kasan, einer der Begründer der nichteuklidischen Geometrie. 215, 247, 251–254, 259, 313
- Lomnicki, Anton Marjan, * 17. 1. 1881 Lemberg (Lwow), † Juli 1941 Lwow, Professor in Lwow, Arbeiten zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kartographie, Statistik. 294
- Lorentz, Hendrik Antoon, * 1853, † 1928, niederländischer Physiker. 238, 239
- Loria, Gino, * 19. 5. 1862 Mantua, † 30. 1. 1954 Genua, tätig in Genua, Untersuchungen zur Geometrie und Geschichte der Mathematik. 309
- Lovelace, Augusta Ada, Gräfin von, * 1815, † 1852. 301, 302
- Ludwig XIV., * 1638, † 1715, französischer König. 132
- Lukrez, Lucretius Carus, * um 96 v. u. Z., † 55 v. u. Z., römischer Philosoph und Dichter. 200
- Lullus, Raymundus, * um 1232 Palma (Mallorca), † 1316 Palma, Theologe und Alchemist, logische Untersuchungen. 243, 278
- Luther, Martin, * 1483, † 1546, deutscher Philosoph und Theologe. 110
- Luzin, Nikolaj Nikolaevič, * 9. 12. 1883 Tomsk, † 28. 2. 1950 Moskau, Professor in Moskau, Funktionentheorie, Mengenlehre, Differential- und Integralgleichungen. 275, 291, 293
- Macaulay, Louis Floyd, * 21. 8. 1924 Traversers Rest (S.C.), seit 1963 Professor in New Brunswick (New Jersey), Topologie, abstrakte Räume. 285
- Machiavelli, Niccolò, * 1469, † 1527, italienischer Politiker und Philosoph. 110
- MacLane, Saunders, * 4. 8. 1909 Norwich (Conn.), Professor in Chicago, Topologie, Logik. 283
- Maclaurin, Colin, * Febr. 1698 Kilmodan, † 14. 1. 1746 Edinburgh, Professor in Aberdeen und Edinburgh, Analysis, Algebra, Astronomie. 182, 189, 210
- Mahāvīra, lebte im 9. Jh. in Maisor, geometrische und arithmetische Untersuchungen. 89
- Mahnke, Dietrich, * 1884, † 1939, Geschichte der Mathematik. 312
- Maimonides, Salomon, * 1753, † 1800, litauischer Philosoph und Logiker. 278
- Malus, Étienne, Louis, * 1775, † 1812, französischer Physiker. 196
- Markov, Andrej Andreevič, * 14. 6. 1856 bei Rjasan, † 20. 7. 1922 Petrograd (heute Leningrad), Professor in St. Petersburg, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Zahlentheorie, Analysis. 293
- Marx, Karl, * 1818, † 1883, Begründer des wissenschaftlichen Sozialismus. 16, 17, 135, 188, 193, 194, 210, 211, 232, 314
- Mauchly, John William, * 30. 8. 1907 Cincinnati, tätig an der Univ. Philadelphia, dann bei staatl. Behörden u. in der Industrie, Rechenanlagen, Geophysik, Statistik. 303
- Maudslay, Henry, * 1771, † 1831, britischer Techniker. 193
- Mauerpertuis, Pierre Louis Moreau de, * 28. 9. 1698 St. Malo, † 27. 7. 1759 Basel, Akademiemitglied in Paris und Berlin, Geodäsie, Analysis. 185, 236
- Maxwell, James Clerk, * 1831, † 1879, englischer Physiker. 231, 233, 237, 238, 240
- May, Kenneth Ownsworth, * 1915, † 1977, wirkte in Toronto, Geschichte der Mathematik. 309
- Melanchthon, Philipp, * 1497, † 1560, deutscher Theologe und Philosoph. 110
- Menaichmos, lebte um 350 v. u. Z., behandelte das Delische Problem mit Kegelschnitten. 55, 71
- Menelaos von Alexandria, lebte um 100, Sphärik, Astronomie. 72, 100
- Méray, Charles, * 12. 11. 1835 Chalon, † 2. 2. 1911 Dijon, Professor in Dijon, gab eine Theorie der reellen Zahlen. 222
- Méré, Antoine Gombauld Chevalier de (Brossin, George), * 1610, † 1685. 200
- Mercator, Nicolaus, * um 1619 Holstein, † 14. 1. (?) 1687 Paris, lebte in Kopenhagen, London und Paris, Reihenlehre, Astronomie. 152, 177
- Mertens, Franz, * 20. 3. 1840 Schroda (Polen), † 5. 3. 1927 Wien, Professor in Wien, Algebra, Zahlentheorie
- Meschkowski, Herbert, * 13. 2. 1909 Berlin

- Professor in Berlin (West), Geometrie, Geschichte der Mathematik
- Michelangelo, Buonarroti, * 1475, † 1564, italienischer Bildhauer, Maler, Baumeister, Dichter. 110
- Michelson, Albert Abraham, * 1852, † 1931, nordamerikanischer Physiker. 239
- Mikulinskij, Semjon Romanovič, * 1919, sowjetischer Wissenschaftshistoriker. 18
- Minkowski, Hermann, * 22. 6. 1864 Alexotas, † 12. 1. 1909 Göttingen, Professor in Königsberg (heute Kaliningrad), Zürich und Göttingen, mathematische Physik, Zahlentheorie. 297, 298
- Mises, Richard von, * 19. 4. 1883 Lwow, † 14. 7. 1953 Boston, Professor in Strasbourg, Dresden, Berlin, Istanbul, Cambridge (Mass.), angewandte Mathematik, Wahrscheinlichkeitstheorie, Philosophie. 275, 294
- Mittag-Leffler, Gösta, * 16. 3. 1846 Stockholm, † 7. 7. 1927 Djursholm, Professor in Helsingfors und Stockholm, Analysis. 229, 266
- Möbius, August Ferdinand, * 17. 11. 1790 Schulpforta, † 26. 9. 1868 Leipzig, Professor in Leipzig, grundlegende Arbeiten zur analytischen Geometrie. 148, 256–258
- Moiivre Abraham de, * 26. 5. 1667 Vitry, † 27. 11. 1754 London, Privatlehrer in London, Wahrscheinlichkeitsrechnung. 118, 201, 202, 226
- Molin (Molien), Fedor Eduardovič, * 10. 9. 1861 Riga, † 25. 12. 1941 Tomsk, tätig in Dorpat und Tomsk, Algebra. 241
- Molodši, Vladimir Nikolaevič, * 1906, Geschichte und Philosophie der Mathematik
- Monge, Gaspard, * 9. 5. 1746 Beaune, † 28. 7. 1818 Paris, arbeitete in Mézières und Paris, Schöpfer der modernen darstellenden Geometrie, Arbeiten zur Statik, zur Theorie höherer Kurven und Flächen. 181, 191, 196, 198, 199, 248, 256, 298
- Montgomery, Deane, * 2. 9. 1909 Weaver (Minn.), Professor in New Haven und Princeton, Topologie. 285
- Montucla, Jean, Étienne, * 1725, † 1799, Geschichte der Mathematik. 15, 17
- Moore, Eliakim Hastings, * 28. 1. 1862 Marietta (Ohio), † 30. 12. 1932 Chicago, Professor in Chicago, Geometrie, Algebra, Zahlentheorie, Integralgleichungen. 281
- Morgan, Augustus de, * 27. 6. 1806 Madura (Indien), † 18. 3. 1871 London, Professor in Cambridge und London, Algebra, Differentialgleichungen, analytische Geometrie. 216, 241, 279
- Morland, Samuel, * 1825 Sulhamstead, † 30. 12. 1895 Hammersmith, als Politiker tätig, erfand das Sprachrohr und eine Rechenmaschine. 150
- Morus, Thomas, * 1477/78, † 1535, englischer Humanist und Staatsmann. 110
- Müntzer, Thomas, * 1490, † 1525, deutscher Theologe und Revolutionär. 110
- Muhammad ibn' Abdallāh, * um 570, † 631, Prophet. 94
- Nan Gong-yue, lebte im 8. Jh., Astronom, leitete 725 die erste Gradmessung in China. 83
- Nārāyaṇa, lebte im 14. Jh., algebraische Arbeiten. 93
- Napier (Neper), John, * 1550 Merchiston Castle b. Edinburgh, † 4. 4. 1617 Merchiston Castle, entdeckte um 1594 die Logarithmen. 118, 125, 148, 149, 150
- Navier, Claude Louis Marie Henry, * 10. 2. 1785 Dijon, † 21. 8. 1836 Paris, wirkte in Paris, Analysis, Mechanik. 237
- Neil, Paul, * 1613, † 1686, englischer Adliger, Mitglied der Royal Society
- Netto, Eugen, * 30. 6. 1846 Halle, † 13. 5. 1919 Gießen, Professor in Strasbourg, Berlin und Gießen, Algebra, Kombinatorik. 244
- Neugebauer, Otto, * 26. 5. 1899 Innsbruck, Professor in Kopenhagen und seit 1939 in Providence (Rhode Island), antike Mathematik und Astronomie. 275, 309
- Neumann, Carl, * 7. 5. 1832 Königsberg (heute Kaliningrad), † 27. 3. 1925 Leipzig, Professor in Halle, Basel, Tübingen und Leipzig, mathematische Physik, Mechanik, Kugelfunktionen. 290
- Neumann, John von, * 28. 12. 1903 Budapest, † 8. 2. 1957 Washington, wirkte in Berlin, Hamburg und Princeton, Mengenlehre, Quantenmechanik, Rechenanlagen, Spieltheorie. 267, 268, 275, 282, 285, 291, 296, 300, 303–305
- Newcomen, Thomas, * 1663, † 1729 englischer Ingenieur. 136
- Newman, Maxwell Herman Alexander, * 7. 2. 1897 London, Professor in Manchester, Canberra, Madison, Houston, Algebra, Logik, Topologie, Rechenanlagen. 303
- Newton, Isaac, * 4. 1. 1643 (25. 12. 1642) Woolthorpe, † 20. 3. 1727 (31. 3. 1727) Kensington, wirkte in Cambridge, Begrün-

- der der klassischen Physik und Himmelsmechanik, Mitentdecker der Infinitesimalrechnung. 19, 21, 133, 137, 148, 151, 152, 160, 163, 168–172, 174, 177–179, 181, 182, 185–187, 189, 190, 201, 218, 225, 226, 234, 236, 272
- Nieuwentijt, Bernard, * 10. 8. 1654 Westgraftdijk, † 30. 5. 1718 Pumerend, Mediziner, Bürgermeister von Purmerend, Analysis. 189
- Nicolaus von Cues, * um 1401 Kues bei Trier, † 11. 8. 1464 Todi (Italien), Geistlicher, seit 1448 Kardinal, Kreisquadratur, Kalenderreform. 110, 117
- Nikomedes, lebte um 250 v. u. Z., Entdecker der Konchoide. 76
- Nilakantha Somasutvan, * 1444 Tr-k-Kantipur (Kerala, Indien) † nach 1501, lebte in Südindien, Potenzreihenentwicklungen. 89, 92
- Noether, Emmy, * 23. 3. 1882 Erlangen, † 14. 4. 1935 Bryn Mawr (Penn.), Professor in Göttingen und seit 1933 in Bryn Mawr, grundlegende Arbeiten zur Invariantentheorie und zur modernen Algebra. 241, 275, 281, 282, 284, 285
- Nový, Luboš, * 1929, tschechischer Mathematikhistoriker
- Nunz (Nonius), Pedro, * 1502 Alcácer do Sol, † 11. 8. 1578 Coimbra, Professor in Coimbra, stellte erste Theorie der Loxodromen auf
- Oinopides von Chios, lebte um 475 v. u. Z., elementare geometrische und astronomische Arbeiten. 46
- Olivier, französischer Mechaniker, Gehilfe von Leibniz. 150
- Olivier, Theodore, * 21. 1. 1793 Lyon, † 5. 8. 1853 Lyon, Offizier, später Professor in Paris, darstellende Geometrie. 213
- Oresme, Nicolaus, * um 1320 Allemagne bei Caen, † 1382 Lisieux, Geistlicher, seit 1377 Bischof von Lisieux, Potenzrechnung, Reihenlehre, „mathematische Physik“. 107, 140, 141, 154, 179
- Ostrogadskij, Michail Vasiljevič, * 24. 9. 1801 bei Poltava, † 1. 1. 1862 Poltava, Professor in Petersburg, Analysis, Variations- und Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mechanik, 227, 237, 238
- Ostrowski, Alexander Markowitsch, * 25. 9. 1893 Kiev, † 20. 11. 1986 bei Lugano, 1927–1958 Professor in Basel, Algebra, Analysis. 284
- Ostwald, Wilhelm, * 1853, † 1932, deutscher Physiko-Chemiker und Wissenschaftstheoretiker. 232
- Oughtred, William, * 5. 3. 1575 Eton, † 30. 6. 1660 Albury, Pfarrer in Albury, Algebra, Trigonometrie, Instrumentebau. 149
- Pacioli, Luca, * um 1445 San Sepolcro, † 1517 San Sepolcro, Franziskaner, tätig in Perugia, Rom, Neapel, Bologna, Venedig, schrieb Gesamtdarstellungen der Mathematik seiner Zeit. 119, 124, 126, 127, 200
- Papin, Denis, * 1647, † 1712?, französischer Techniker. 136
- Pappos von Alexandria, lebte um 320, bedeutende Kommentare, geographische Werke. 77, 78, 145, 146, 313
- Pareto, Vilfredo, * 1848, † 1923, italienischer Ökonom. 296
- Pascal, Blaise, * 19. 6. 1623 Clermont-Ferrand, † 19. 8. 1662 Saint-Étienne du Mont, Privatgelehrter, philosophische und mathematische Schriften, einer der Begründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung. 86, 97, 126, 136, 139, 150, 165, 167, 168, 200, 255, 313
- Pasch, Moritz, * 8. 11. 1843 Breslau (heute Wrocław), * 20. 9. 1930 Bad Homburg, Professor in Gießen, Arbeiten zu den Grundlagen der Mathematik. 67, 259, 260, 313
- Patridge, Seth, gab 1657 dem Rechenstab die heutige Form. 149
- Peacock, George, * 9. 4. 1791 Denton, † 8. 11. 1858 Ely, Professor in Cambridge, arithmetische und algebraische Arbeiten. 182, 241
- Peano, Giuseppe, * 27. 8. 1858 Spinetta bei Cundo, † 20. 4. 1932 Turin, Professor in Turin, formale Logik. 216, 224, 241, 269, 279
- Pearson, Karl, * 27. 3. 1857 London, † 27. 4. 1936 Coldharbour, Professor in London, Mechanik, Statistik, Eugenik. 293
- Peirce, Benjamin, * 4. 4. 1809 Salem, † 6. 10. 1880 Cambridge (Mass.), Professor in Cambridge (Mass.), Arbeiten zur Astronomie, über Algebren und zur Geodäsie. 221, 240, 241, 243
- Peirce, Charles Sanders, * 10. 9. 1839 Cambridge (Mass.), † 19. 4. 1914 Milford, tätig in Baltimore, Cambridge (Mass.) und Boston, Begründer des amerikanischen Pragmatismus, Logik, mathematische Physik. 216, 221, 240, 243, 279
- Peletier, Jacques, * 25. 7. 1517 Le Mans,

- † Juli 1582 Paris, Mediziner, veröffentlichte Schriften über Arbeiten von Euklid und Nunez. 121
- Perikles, * 491 v. u. Z., † 429 v. u. Z., griechischer Staatsmann. 53
- Peter I., * 1672, † 1725, russischer Zar. 132, 183
- Petit, Alexis, * 1791, † 1820, französischer Physiker. 196
- Petrarca, Francesco, * 1304, † 1374, italienischer Dichter. 110
- Peuerbach, Georg von, * 30. 5. 1423 Peuerbach, † 8. 4. 1461 Wien, lehrte in Wien, arithmetische und astronomische Schriften. 116
- Pfaff, Johann Heinrich, * 22. 12. 1765 Stuttgart, † 21. 4. 1825 Halle, Professor in Helmstedt und Halle, Infinitesimalrechnung, Kombinatorik
- Philipp von Mazedonien, * 382 v. u. Z., König von Mazedonien. 54
- Philolaos von Tarent, lebte um 430 v. u. Z., Zahlenmystik. 49
- Planck, Max, * 1858, † 1947, deutscher Physiker. 237
- Platon, * 427 v. u. Z., † 348 v. u. Z., griechischer Philosoph. 21, 45, 48, 52, 54, 55, 57–59, 64, 66–68, 71–73, 75, 77–78
- Plücker, Julius, * 16. 7. 1801 Elberfeld. † 22. 5. 1868 Bonn, Professor in Halle und Bonn, grundlegende Arbeiten zur algebraischen Geometrie, erfolgreicher Experimentalphysiker (Gasentladungen). 148, 256, 257
- Plutarch, * um 46, † nach 119, griechischer Historiker, Schriftsteller und Philosoph. 55
- Poincaré, Jules Henri, * 29. 4. 1854 Nancy, † 17. 7. 1912 Paris, Professor in Paris, bahnbrechende Arbeiten zur Funktionentheorie, Topologie, Himmelsmechanik, mathematischen Physik, Philosophie der Mathematik. 238, 241, 254, 266, 282, 290, 293
- Poinsot Louis, * 3. 1. 1777 Paris, † 5. 12. 1859 Paris, Professor in Paris, Mechanik, Zahlentheorie. 196
- Poisson, Siméon-Denis, * 21. 6. 1781 Pithiviers, † 25. 4. 1840 Paris, Professor in Paris, Mechanik, Infinitesimalrechnung, mathematische Physik, Wahrscheinlichkeitsrechnung. 196, 202, 203, 227, 292
- Poleni, Giovanni, * 23. 8. 1683 Venedig, † 15. 11. 1761 Padua, Professor in Padua, entwickelte eine Rechenmaschine. 150
- Poncelet, Jean-Victor, * 1. 7. 1788 Metz, † 22. 12. 1867 Paris, Offizier, Professor in Metz und Paris, Begründer der neueren projektiven Geometrie. 196, 238, 248, 256
- Pontrjagin, Lev Semenovič, * 3. 9. 1908 Moskau, seit 1935 Professor in Moskau, grundlegende Untersuchungen zur Topologie, Gruppentheorie, Differentialgleichungen. 275, 285
- Praxiteles, lebte um 380 v. u. Z., griechischer Bildhauer. 54
- Proclus Diadochos, * 410 Byzanz, † 485 Athen, Leiter der Akademie in Athen, Verfasser des „Geometerkatalogs“. 78, 263
- Ptolemaios, Klaudios, * nach 83 Ptolemaios, † nach 161, Astronomie, Geographie, mathematische Physik, Trigonometrie. 35, 64, 72, 73, 76, 100, 101, 102, 107, 110, 140
- Puiseux, Victor Alexandre, * 16. 4. 1820 Argenteuil, † 9. 9. 1883 Frontenay, Professor in Rennes, Besançon und Paris, mathematische Physik, Funktionentheorie, Astronomie. 228
- Pythagoras, * um 560 v. u. Z. Samos, † um 480 v. u. Z. Metapontum, Zahlenmystik 21, 32, 36, 46, 48–52, 57, 58, 66, 77, 81, 91, 106, 261, 310
- Quesnay, François, * 1694, † 1774, französischer Ökonom und Mediziner. 296, 314
- Quételet, Lambert-Adolphe-Jacques, * 22. 2. 1796 Gent, † 17. 2. 1874 Brüssel, Professor in Gent und Brüssel, astronomische, statistische und physikalische Schriften. 202
- Quin Jiu-shao, lebte im 13. Jh., chinesischer Verwaltungsbeamter und Militär, Verfasser der „Neun Bücher über Mathematik“ (1247). 83, 86
- Qusta ibn Lūqā, lebte um 880 in Bagdad und Armenien, Arithmetik, Astronomie, Medizin, Übersetzungen. 96
- Rabelais, François, * um 1494, † um 1553, französischer Arzt und Schriftsteller. 110
- Radon, Johann, * 16. 12. 1887 Tetschen, (heute Děčín), † 25. 5. 1956 Wien, Professor in Breslau (heute Wrocław) und Wien, Variationsrechnung, Funktionalanalysis. 290
- Rankine, William John Macquorn, * 1820, † 1872, schottischer Ingenieur. 237
- Recorde, Robert, * ?, † 1558 London, Mediziner, mathematisch-arithmetische Schriften. 121, 126
- Redtenbacher, Jacob Ferdinand, * 1809, † 1863, deutscher Ingenieur. 238
- Regiomontanus (Müller, Johannes), * 6. 6.

- 1436 Königsberg (Franken), † 8. 7. 1476 Rom, wirkte in Wien, Buda, Nürnberg und Rom, begründete die neuere Trigonometrie, bedeutende astronomische Tafeln. 102, 116–118
- Reichardt, Hans, * 2. 4. 1908 Altenburg, Professor in Leipzig und Berlin, Zahlentheorie, Algebra. 313
- Reinhold, Erasmus, * 22. 10. 1511 Saalfeld, † 19. 2. 1553 Saalfeld, Professor in Wittenberg, erarbeitete Planetentafeln
- Reuleaux, Paul, * 1829, † 1905, deutscher Ingenieur. 238
- Rhaeticus, Georg Joachim, * 15. 2. 1514 Feldkirch, † 4. 12. 1574 Kaschau (Košice, ČSSR), Professor in Wittenberg, berechnete trigonometrische Tafeln. 118
- Rhind, A. Henry, lebte im 19. Jh., englischer Archäologe. 29
- Riccati, Vincenzo, * 11. 1. 1707 Castelfranco, † 17. 1. 1775 Treviso, Professor in Bologna, Differentialgleichungen, Physik. 181, 186
- Riemann, Bernhard, * 17. 9. 1826 Breselenz, † 20. 7. 1866 Selasca, tätig in Göttingen, epochale Arbeiten zu den Grundlagen der Geometrie, zur analytischen Zahlentheorie und zur Analysis. 214, 226–230, 253, 254, 312, 313
- Ries, Adam, * 1492 Staffelstein, † 30. 3. 1559 Annaberg, Rechenmeister in Erfurt und Annaberg, bedeutender Cossist. 120, 121
- Riesz, Frigyes (Frédéric), * 22. 1. 1880 Győr, † 28. 2. 1956 Budapest, Professor in Kolozsvár, Szeged und Budapest, Funktionalanalysis. 288–290
- Roberval, Gilles Persone de, * 10. 8. 1602 bei Genlis, † 27. 10. 1675 Paris, seit 1627 Professor der Philosophie, später der Mathematik in Paris, Infinitesimalrechnung, Kinematik. 152, 162
- Robins, Benjamin, * 1707 Bath, † 29. 7. 1751 Fort St. David, Beamter der ostindischen Kompanie, Infinitesimalrechnung. 189
- Rodnyj, N. J., 20. Jh., sowjetischer Wissenschaftstheoretiker. 18
- Römer, Olaf, * 1664, † 1710, dänischer Physiker. 136
- Routh, Edward John, * 1831, † 1907, kanadisch-englischer Ingenieur und Physiker. 237
- Rudolff, Christoff, * 1500? Jauer, † 1545? Wien, war wahrscheinlich in Wien tätig, Arbeiten zur Coß. 126
- Ruffini, Paolo, * 22. 9. 1765 Valentano, † 10. 5. 1822 Modena, Mediziner, Professor in Modena, Gruppentheorie. 205, 311
- Russell, Bertrand, * 18. 5. 1872 Trelleck, † 2. 2. 1970 Plas Penrhyn, vorwiegend in Cambridge tätig, formale Logik, Philosophie. 266, 269, 279
- Saccheri, Girolamo, * 5. 9. 1667 San Remo, † 25. 10. 1733 Mailand, Jesuit, Professor in Mailand, Turin und Pavia, nichteuklidische Geometrie. 249, 250
- Salmon, George, * 25. 9. 1819 Cork, † 22. 1. 1904 Dublin, Professor in Dublin, analytische Geometrie. 148, 243
- Sarton, George Alfred Léon, * 1884, † 1956, Geschichte der Naturwissenschaften. 309
- Savery, Thomas, * um 1650, † 1715, Bergmann, englischer Erfinder. 136
- Schauder, Juliusz Pawel, * 21. 9. 1899 Lwow, † Sept. 1943 (durch die Gestapo ermordet), Professor in Lwow, Funktionalanalysis. 291
- Scheffers, Georg Wilhelm, * 21. 11. 1866 Altendorf, † 12. 8. 1945 Berlin, Professor in Berlin, darstellende Geometrie, Berührungsinformationen
- Schickard, Wilhelm, * 22. 4. 1592 Herrenberg, † 23. 10. 1635 Tübingen, erst Geistlicher, dann Professor (Hebräisch, Mathematik) in Tübingen, baute 1623 die erste Vierspeziesrechenmaschine, Vermessungstechnik. 149
- Schmidt, Erhard, * 14. 1. 1876 Dorpat, † 6. 12. 1959 Berlin, Professor in Berlin, Integralgleichungen, isoperimetrische Probleme, Zahlentheorie, Topologie. 290
- Schmidt, Friedrich Karl, * 22. 9. 1901 Düsseldorf, † 25. 1. 1977 Heidelberg, Professor in Jena, Münster und Heidelberg, Algebra. 284
- Schmidt, Otto Jul'evič, * 30. 9. 1891 Mogilev, † 7. 9. 1956 Moskau, Professor in Moskau, Gruppentheorie, berühmter Polarforscher. 245, 275
- Schnorr, Claus-Peter, * 4. 8. 1943, deutscher Mathematiker, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik. 294
- Schooten, Frans van, * um 1615 Leiden, † 29. 5. 1660 Leiden, Professor in Leiden, gab Werke von Descartes heraus, algebraische Arbeiten. 147
- Schouten, Jan Arnoldus, * 28. 8. 1883 Nieuwer Amstel, † 20. 1. 1971 Zwolle, seit 1914 Professor in Delft, Tensorrechnung, Feldtheorie, Gruppentheorie. 313
- Schreiber, Peter, * 1938, tätig in Greifswald, Grundlagen der Mathematik

- Schreier, Otto, * 3. 3. 1901 Wien, † 2. 6. 1929, wirkte in Hamburg, Algebra. 281, 284
- Schreyer, Helmut, deutscher Nachrichten-Ingenieur. 302
- Schröder, Ernst, * 25. 11. 1841 Mannheim, † 16. 6. 1902 Karlsruhe, Professor in Karlsruhe, mathematische Logik. 216, 244, 279
- Schumacher, Heinrich Christian, * 1780, † 1850, deutscher Astronom und Geodät. 251, 253
- Schur, Friedrich Heinrich, * 27. 1. 1856 Maciejowo, † 18. 3. 1923 Wrocław, Professor in Wrocław, Geometrie. 313
- Schur, Issai, * 10. 1. 1875 Mohilev (Dnjepr), † 10. 1. 1941 Tel Aviv, Professor in Bonn und Berlin (1919–1933), Algebra
- Schwarz, Hermann Amandus, * 25. 1. 1843 Hermsdorf, † 30. 11. 1921 Berlin, Professor in Berlin, Funktionentheorie, Differentialgeometrie, Variationsrechnung. 229
- Schwartz, Laurent, * 5. 3. 1915 Paris, Professor in Paris, Distributionen, mathematische Physik, reelle Funktionen. 291
- Schweikart, Ferdinand Karl, * 28. 2. 1780 Erbach, † 17. 8. 1859 Königsberg (heute Kaliningrad), Jurist, Professor in Gießen, Charkov, Marburg und Königsberg, Parallelenproblem. 250, 251
- Séguier, Jean Armand Mariéde, * 10. 11. 1862 Paris, † 19. 4. 1935, Privatgelehrter in Paris, Gruppentheorie. 245
- Seki, Shinsuke Kowa (= Takakazu), * 1642? Fujioka?, † 24. 10. 1708 Edo (Tokio), Tempelmathematiker, Determinanten, Potenzreihen. 86
- Serre, Jean-Pierre, * 15. 9. 1926 Bages, Professor in Paris, Algebra. 285
- Shakespeare, William, * 1564, † 1616, englischer Dramatiker. 110
- Shannon, Claude Elwood, * 30. 4. 1916 Gaylord, Mich., Professor in Cambridge (Mass.), Informationstheorie, Kybernetik, angewandte Mathematik. 302
- Shockley, William Bradford, * 1910, englischer Physiker. 304
- Siemens, Werner von, * 1816, † 1892, deutscher Elektrotechniker. 193
- Sierpiński, Waclaw, * 14. 3. 1882 Warschau, † 21. 10. 1969 Warschau, Professor in Warschau, Mengenlehre, Funktionentheorie, Zahlentheorie. 267
- Simpson, Thomas, * 20. 8. 1710 Market-Bosworth, † 14. 5. 1761 Market-Bosworth, Professor in Woolwich, Analysis, Astronomie. 201
- Skolem, Albert Thoralf, * 23. 5. 1887 Sandsvaer, † 23. 3. 1963 Oslo, Professor in Bergen und Oslo, Logik, Algebra, Zahlentheorie. 267
- Sluckij, Evgenij Evgen'evič, * 19. 4. 1880 Novoje, Jaroslavl Gebiet, † 10. 3. 1948 Moskau, Professor in Kiev und Moskau, Wahrscheinlichkeitsrechnung. 293
- Snellius (Snel), Willebrord van Royen, * 1580 Leiden, † 30. 10. 1626 Leiden, Professor in Leiden, Inhaltsberechnungen, Navigationstheorie, Gradmessung, entdeckte das Brechungsgesetz. 136
- Sobolev, Sergej L'vovič, * 6. 10. 1908 St. Petersburg, Professor in Moskau, Funktionalanalysis. 291
- Sokrates, * 470 v. u. Z., † 399 v. u. Z., griechischer Philosoph. 54
- Sophokles, * um 496 v. u. Z., † 406 v. u. Z., griechischer Dramatiker. 54
- Spartacus, lebte im 1. Jh. v. u. Z., römischer Sklave, Führer des bedeutendsten Sklavenaufstandes. 77
- Śrīdhara, lebte im 9.–10. Jh. in Indien, gab klare Darstellungen der zeitgenössischen Mathematik. 89
- Staudt, Christian von, * 24. 1. 1798 Rothenburg, † 1. 6. 1867 Erlangen, arbeitete in Nürnberg, Würzburg und Erlangen, Vollender der synthetischen Geometrie. 256
- Steiner, Jakob, * 18. 3. 1796 Utzenstorf (Schweiz), † 1. 4. 1863 Bern, Professor in Berlin, synthetische Geometrie. 256
- Steinhaus, Hugo Dyonizy, * 14. 1887 Jasło, † 25. 2. 1972 Wrocław, Professor in Lwow, Funktionalanalysis. 291
- Steinitz, Ernst, * 13. 6. 1871 Laurahütte, † 29. 9. 1928 Kiel, Professor in Breslau (heute Wrocław), Berlin und Kiel, Arbeiten zur Algebra (Körperbegriff). 224, 281, 282, 283, 284
- Stevin, Simon, * 1548 Brugge, † um 1620 Den Haag, Quartiermeister der holländischen Armee, führte in Europa die Dezimalbrüche ein, entdeckte das hydrostatische Paradoxon. 84, 123, 153, 218
- Stibitz, George Robert, * 30. 4. 1904 York, Pa., Professor in Hanover (Indiana), tätig auch in der Industrie, Computer, Physiologie, Medizin und Mathematik. 303
- Stifel, Michael, * um 1487 Esslingen, † 1567 Jena, erst als Pfarrer tätig, seit 1559 an der Universität Jena, gab ausgezeichnete Darstellungen der Mathematik seiner Zeit. 124, 126, 217

- Stigler, George Joseph, * 17. 1. 1911 Renton (Washington), Professor in Providence und New York, mathematische Ökonomie.
- Stokes, George Gabriel, * 13. 8. 1819 Skreen (Irland), † 1. 2. 1903 Cambridge, Professor in Cambridge, mathematische Physik. 213, 238, 300
- Stone, Marshall Harvey, * 8. 4. 1903 New York, Professor in Cambridge (Mass.) und Chicago, Mengenlehre, Funktionalanalysis. 291
- Struik, Dirk Jan, * 1894, Professor in Cambridge (Mass.), Geschichte der Mathematik, Differentialgeometrie, Quantenmechanik. 309
- Study, Eduard, * 23. 3. 1862 Coburg, † 6. 1. 1930 Bonn, Professor in Marburg, Greifswald und Bonn, Geometrie, Gruppentheorie, Philosophie der Mathematik. 241
- Sun-zi, lebte im 3. oder 4. Jh., Kommentator. 83
- Suter, Heinrich, * 1848, † 1922, Lehrer in Zürich und Aarau, Geschichte der Mathematik. 309
- Swift, Jonathan, * 1667, † 1745, irischer Satiriker. 188
- Sylvester, James Joseph, * 3. 9. 1814 London, † 15. 3. 1897 London, Jurist, Professor der Mathematik in Woolwich, Baltimore und Oxford, Invariantentheorie, Matrizen, Determinanten. 148, 239, 240
- Szabó, Arpad, 20. Jh., Professor in Budapest, Geschichte der Mathematik.
- Tannery, Paul, * 1843, † 1904, französischer Ingenieur, Arbeiten zur Geschichte der Mathematik. 309, 310
- Tarski, Alfred, * 14. 1. 1902 Warschau, † 26. 10. 1983 Berkeley Professor in Warschau und seit 1939 in den USA, mathematische Logik. 275, 280
- Tartaglia, Nicolò, * um 1500 Brescia, † 13. 12. 1557 Venedig, lehrte in Verona, Brescia und Venedig, fand die Lösung der kubischen Gleichung, ballistische Arbeiten. 121, 127, 200
- Taton, René, 20. Jh., Professor in Paris, Geschichte der Mathematik. 309
- Taurinus, Franz Adolph, * 15. 11. 1794 Bad König (Odenwald), † 13. 2. 1874 Köln, Jurist, Schriften zur nichteuklidischen Geometrie. 250, 251
- Taylor, Brook, * 18. 8. 1685 Edmonton, † 29. 12. 1731 London, Privatgelehrter, Analysis, Physik. 182, 198, 211
- Teichmüller, Oswald, * 18. 6. 1913 Nordhausen, seit Herbst 1943 vermißt, Dozent in Berlin, Algebra und Zahlentheorie. 284
- Tertullian, Septimius Lorens, * um 160, † nach 220, frühchristlicher Schriftsteller. 102
- Thales von Milet, * um 624 v. u. Z., † um 546 v. u. Z., griechischer Naturphilosoph, Elementarmathematik. 36, 44, 45
- Theaitetos von Athen, * um 417 v. u. Z., † 368 v. u. Z., wirkte in Athen, Irrationalzahlen, regelmäßige Körper. 57—59, 66
- Thénard, Louis-Jacques de, * 1777, † 1857, französischer Chemiker. 196
- Theodoros von Kyrene, * um 465 v. u. Z., † nach 399 v. u. Z., Irrationalzahlen. 57 bis 59
- Theon, lebte um 370 in Alexandria, Trigonometrie, Astronomie. 78
- Thomson, Joseph John, * 1856, † 1940, englischer Physiker. 237
- Thomson, W., siehe Lord Kelvin
- Tolstoj, A. N., 20. Jh., sowjetischer Ökonom. 297
- Torricelli, Evangelista, * 15. 10. 1608 Faenza, † 25. 10. 1647 Florenz, Mitarbeiter Galileis, erzeugte das erste künstliche Vakuum, erfand das Barometer, Infinitesimalrechnung. 136, 152, 161—163
- Treutlein, Josef Peter, * 26. 1. 1845 Wiebilingen, † 26. 7. 1912 Karlsruhe, wirkte in Karlsruhe, Elementargeometrie, Geschichte der Mathematik. 311
- Tropfke, Johannes, * 1866, † 1939, wirkte in Berlin, Geschichte der Mathematik. 309
- Tschirnhaus, Ehrenfried Walther von, † 10. 4. 1651 Kieslingswalde, † 11. 10. 1708 Dresden, Privatgelehrter, Infinitesimalrechnung, Gleichungen, Physik, Technik, Philosophie. 203
- Turing, Alan Mathison, * 23. 6. 1912 London, † 7. 6. 1954 Manchester, tätig in Cambridge und Manchester, Logik, Computer, Algebra. 302, 303
- Ulugbëk, * 1394 Sultāniyya, † 1449 bei Samarkand, Enkel des Mongolenherrschers Timur, begründete die Hochschule von Samarkand, astronomische Arbeiten. 102
- Valerio, Luca, * 1552 Neapel, † 17. 1. 1618 Rom, Professor in Rom, Analysis, mathematische Physik. 152, 155
- Valtat, Raymond, 20. Jh., tätig in Paris, Rechenanlagen. 302
- Vandermonde, Alexandre-Théophile, * 28. 2.

- 1735 Paris, † 1. 1. 1796 Paris, tätig in Paris, Determinanten. 239
- Vauban, Sébastien Le Prestre de, * 1633, † 1707, französischer Militäringenieur. 198
- Vauquelin, Nicolas Louis, * 1763, † 1829, französischer Chemiker. 196
- Veblen, Oswald, * 24. 6. 1880 Decorah (Iowa), † 10. 8. 1960 Brooklin (Maine), Professor in Chicago und Princeton, Geometrie. 313
- Vieta (Viète), François, * 1540 Fontenay-le-Comte, * 23. 2. 1603 Paris, Jurist, wirkte in Paris, Schöpfer der Buchstabenalgebra. 118, 126, 128, 129, 141, 142, 146, 168, 203
- Vitruvius, Pollio, lebte im 1. Jh. v. u. Z., Architektur, Technik, „technisches Zeichnen“. 73, 198
- Vogel, Kurt, * 1888, † 1985, deutscher Mathematikhistoriker. 309, 311
- Voltaire, François-Marie, eigentlich Arouet de, * 1694, † 1778, französischer Philosoph und Schriftsteller
- Volterra, Vito, * 3. 5. 1860 Ancona, † 11. 10. 1940 Rom, Professor in Pisa, Turin und Rom, Funktionalanalysis, Integralgleichungen, Variationsrechnung, mathematische Physik. 288, 290
- Waerden, Barthel Leendert van der, * 2. 2. 1903 Amsterdam, Professor in Leipzig, Amsterdam und Zürich, grundlegende algebraische Arbeiten, Geschichte der Mathematik. 55, 245, 281, 282, 284, 309
- Wald, Abraham, * 31. 10. 1902 Cluj, † 13. 12. 1950 Nilgiri-Berge (Indien) bei Flugzeugabsturz, Professor in New York und Chapel Hill, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, mathematische Ökonomie. 293
- Wallis, John, * 3. 12./23. 11. 1616 Ashford, † 8. 11./28. 10. 1703 Oxford, erst Geistlicher, dann Professor der Geometrie in Oxford, Reihenlehre, analytische Geometrie. 138, 152, 161, 163–165, 169, 170, 176, 219, 248
- Wantzel, Pierre Laurent, * 5. 6. 1814, † 21. 5. 1848, tätig in Paris, Zahlentheorie, Differentialgleichungen
- Waring, Edward, * um 1736 bei Shrewsbury, † 15. 8. 1798 Plealey, Professor in Cambridge, Analysis, Zahlentheorie. 182
- Watt, James, * 1736, † 1819, englischer Techniker. 136
- Weber Heinrich, * 5. 3. 1842 Heidelberg, † 17. 5. 1913 Strasbourg, Professor in Berlin, Marburg, Göttingen und Strasbourg, Algebra und Zahlentheorie. 224, 245, 281
- Wedderburn, Joseph, * 26. 2. 1882 Forfar (Schottland), † 9. 10. 1948 Princeton, Professor in Princeton, Analysis, Algebren, Matrizen. 241, 281, 282
- Weierstraß, Karl, * 31. 10. 1815 Ostenfelde, † 19. 2. 1897 Berlin, erst Lehrer, seit 1856 Professor in Berlin, Erneuerer der Analysis. 212, 214, 222, 229, 230, 241, 264, 288
- Weil André, * 6. 5. 1906 Paris, tätig in Strasbourg, Sao Paulo und seit 1947 in Chicago, Zahlentheorie und Algebra. 285
- Weisbach, Julius Ludwig, * 10. 8. 1806 Mittelschmiedeberg, † 24. 2. 1871 Freiberg, Professor in Freiberg, angewandte Mathematik, darstellende Geometrie. 238
- Werner, Johann, * 14. 2. 1468 Nürnberg, † Mai 1528 Nürnberg, Geistlicher, wirkte in Rom und Nürnberg, Begründer der prosthaphairetischen Methode, astronomische und geographische Arbeiten. 117, 118
- Wessel, Caspar, * 8. 6. 1745 Vestby, † 25. 3. 1818 Kopenhagen, Landmesser, gab 1797 eine geometrische Theorie der komplexen Zahlen. 219
- Weyl, Hermann, * 9. 11. 1885 Elmsborn, † 8. 12. 1955 Zürich, Professor in Göttingen und Zürich, Integralgleichungen, Feldtheorie, Relativitätstheorie, Geometrie, Philosophie der Mathematik. 275, 285, 297, 298
- Whitehead, Alfred North, * 15. 2. 1861 Ramsgate, † 30. 12. 1947 Cambridge (Mass.), Professor in Cambridge, London, und seit 1924 in Cambridge (Mass.), Logik, Algebra, Philosophie. 269, 279
- Whitwey, H., lebte im 18. Jh., englischer Techniker. 193
- Widmann, Johann, * um 1460 Eger, † nach 1498 Leipzig, hielt algebraische Vorlesungen in Leipzig, schrieb das erste deutsche algebraische Buch. 121, 126
- Wieleitner, Heinrich, * 31. 10. 1874 Wasserburg, † 27. 12. 1931 München, tätig in Augsburg und München, Theorie der Kurven, Geschichte der Mathematik. 309
- Wiener, Norbert, * 26. 11. 1894 Columbia (Missouri), † 18. 3. 1964 Stockholm, Professor in Cambridge (Mass.), Begründer der Kybernetik, stochastische Prozesse, Analysis, Potentialtheorie, Philosophie
- Wilkes, Maurice Vincent, * 26. 6. 1913 Dudley, Professor in Cambridge, Computer, Geophysik. 304
- Wingate, Edmund, * 1593 Bedford, † 1656

- London, Jurist, ab 1624 Lehrer in Paris, verbesserte den Rechenstab. 149
- Witt, Ernst, * 26. 6. 1914 Augustenburg/Alsen, Professor in Göttingen und Hamburg, Algebra. 284
- Witt, Jan de, * 24. 8. 1625 Dordrecht, † 20. 8. 1672 Den Haag, Großpensionär von Holland, Wahrscheinlichkeitsrechnung. 201
- Wolff, Christian, * 24. 1. 1679 Breslau (heute Wrocław), † 9. 4. 1754 Halle, Professor in Halle und Marburg, Logik, Analysis, Physik. 278
- Wood, Connias, lebte im 18. Jh, englischer Techniker. 193
- Wood, M., * 19. 2. 1914 Washington, tätig in Washington, Rechentechnik, mathematische Ökonomie. 300
- Wußing, Hans, * 15. 10. 1927, Professor in Leipzig, Geschichte der Mathematik
- Wren, Christopher, * 20. 10. 1632 East Knoyle, † 25. 2. 1723 London, Professor in London und Oxford, Astronomie, Geometrie, Architektur. 138
- Wyatt, John, * 1700, † 1766, englischer Erfinder. 192, 193
- Yang, Hui, lebte im 13. Jh., Kommentator. 83, 86
- Young, William Henry, * 20. 10. 1863 London, † 7. 7. 1942 Lausanne, Professor in Cambridge, Göttingen, Kalkutta, Liverpool, Abrystwyth und Lausanne, Analysis, Mengenlehre. 237, 266, 290
- Zariski, Oscar, * 7. 5. 1899 Kobryn (Polen), Professor in Baltimore, Algebra. 284
- Zenodoros, lebte um 180 v. u. Z., führte isoperimetrische Untersuchungen durch. 76
- Zermelo, Ernst, * 27. 7. 1871 Berlin, † 21. 5. 1953 Freiburg, Professor in Göttingen, Zürich und Freiburg, Mengenlehre. 266, 267
- Zeuthen, Hieronymus Georg, * 15. 2. 1839 Grimstrup, † 6. 1. 1920 Kopenhagen, Professor in Kopenhagen, Geometrie, Geschichte der Mathematik. 56, 309
- Zhang Heng, * 78, † 139, Astronom, Arbeiten zur Kosmogonie. 83
- Zhu Shi-jie, lebte im 13. Jh., Wanderlehrer, algebraische Schriften. 86
- Zippin, Leo, * 25. 1. 1905 New York, Professor in Flushing (New York), Topologie, Gruppentheorie. 285
- Zuse, Konrad, * 22. 6. 1910 Berlin, Ingenieur, tätig vorwiegend in Berlin, stellte die erste programmgesteuerte Rechenanlage her. 302, 303