Studienbücherei

Autorenkollektiv
unter Leitung von J. Wisliceny

Aufgabensammlung I

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

Mathematik für Lehrer
Band 14

Herausgegeben von:
W. Engel, S. Brehmer, M. Schneider, H. Wussing

Unter Mitarbeit von:
G. Asser, J. Böhm, J. Flachsmeyer, G. Geise, T. Glocke,
K. Härtig, G. Kasdorf, O. Krötenheerdt, H. Lugowski,
P. H. Müller, G. Porath

Studienbücherei

Aufgabensammlung

Autorenkollektiv
unter Leitung von
J. Wisliceny

I. Aufgaben zu den Bänden 1 bis 5
der Studienbücherei — Mathematik
für Lehrer

Zweite Auflage

VEB Deutscher Verlag
der Wissenschaften
Berlin 1989

Leiter des Autorenkollektivs: Dr. Jürgen Wisliceny, Güstrow

Mitarbeiter des Kollektivs sind: Prof. Dr. Günter Asser, Greifswald; Wolfgang Baumann, Güstrow; Prof. Dr. Jürgen Flachsmeyer, Greifswald; Dr. Ludwig Prohaska, Rostock; Gerhard Raetz, Güstrow; Dr. Ernst-Ludolph Schneider, Güstrow

ISBN 3-326-00511-3
ISSN 0081-7384

Verantwortlicher Verlagslektor: E. Arndt
Verlagshersteller: B. Burkhardt
Umschlaggestaltung: R. Wendt

Printed in the German Democratic Republic
Lizenz-Nr. 206 · 435/70/89
Satz: VEB Druckhaus „Maxim Gorki", DDR-7400 Altenburg
Offsetdruck und buchbinderische Verarbeitung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer", DDR-5820 Bad Langensalza
LSV 1004
Bestellnummer: 570 894 2
01280

Vorwort

Die mit diesem Band vorliegende Aufgabensammlung ist eine wesentliche Ergänzung der Bände 1 bis 5 der Studienbücherei — Mathematik für Lehrer. Der Leser erhält hiermit — geordnet nach den Kapiteln der genannten Bände — ein recht umfangreiches Aufgabenmaterial sowie Kontrollfragen, mit deren Hilfe er die einzelnen Stoffkomplexe überdenken und sein erworbenes Wissen überprüfen sollte.

In der Mathematik ist das Lösen von Übungsaufgaben eine sehr wichtige Form des Selbststudiums. Durch die selbständige Bearbeitung geeigneter Aufgaben wird das erworbene Wissen gefestigt und aktiviert sowie das Bedürfnis nach weiterführendem Wissen geweckt. Die meisten Aufgaben dieser Aufgabensammlung nehmen direkt Bezug auf die in den Bänden 1 bis 5 behandelten Stoffinhalte und oftmals auch auf die Art der Stoffvermittlung. Das Lösen dieser Aufgaben erfordert ein gewisses Verständnis und Beherrschen entsprechender Begriffe, Bezeichnungen, Sätze und Verfahren, also ein Grundwissen, welches vorher erarbeitet werden muß. Die Erfolge beim selbständigen Lösen der gestellten Aufgaben bilden den wichtigsten Gradmesser für das im Selbststudium erworbene Wissen.

Einige Aufgaben wurden mit vollständigen Lösungen versehen. Vielfach lassen sich weitere Aufgaben genauso oder in ähnlicher Weise bearbeiten, so daß die vorgestellten Lösungen teilweise den Charakter einer Musterlösung (es muß allerdings nicht immer die kürzeste oder eleganteste sein) für bestimmte Aufgabentypen haben und damit eine sehr direkte Hilfe darstellen. Manchmal soll durch die formulierte Lösung (nur) verdeutlicht werden, wie bekannte Ergebnisse und Verfahren genutzt bzw. verschiedene Beweismethoden wirksam werden können. Bei seinen eigenen Formulierungen möge sich der Leser anfangs an diesen Musterlösungen orientieren. Die angegebenen Ergebnisse der Aufgaben dienen lediglich der Kontrolle für den Leser. Aufgaben, die nach unserer Meinung besonders hohe Anforderungen an den Studierenden stellen, wurden durch einen Stern (*) gekennzeichnet.

Es sind eine ganze Reihe von Aufgaben eingearbeitet, die aus Schülerolympiaden oder Olympiadevorbereitungen stammen. Wir müssen immer wieder feststellen, daß viele unserer Studenten bei der Lösung dieser Aufgaben Schwierigkeiten haben. Was ist das aber für ein (zukünftiger) Lehrer, der Aufgaben, die seine Schüler in der Olympiade selbständig lösen sollen, selbst nicht lösen kann? Andere Aufgaben sind aus anderen Aufgabensammlungen übernommen bzw. auf unterschiedlichstem Wege an die Autoren gelangt. Die Autoren können also nur bei wenigen Aufgaben als Autoren der Aufgaben angesprochen werden. In den meisten Fällen waren sie nur Sammler oder Auswählende.

Wir empfehlen den Studenten und den die Übungen leitenden Lehrkräften, Aufgaben aus früheren Teilen der Vorlesung kontinuierlich in die weitere Ausbildung einzubauen. Hierzu sind eine nicht geringe Anzahl der hier vorgelegten Aufgaben gut geeignet. Insbesondere sollte dem Studenten dabei zu Bewußtsein kommen, daß ihm die Lösung von Aufgaben, die ihm z. B. im ersten Semester noch unheimlich schwer erschien, im Laufe der Zeit immer leichter fällt. Wir meinen, daß diese Form der immanenten Wiederholung sowohl an der Schule als auch an der Hochschule viel zu wenig genutzt wird.

Wir möchten die Nutzer bitten, uns auf eventuell vorhandene Fehler hinzuweisen und uns für spätere Auflagen weiteres gutes Übungsmaterial zur Verfügung zu stellen.

Unser Dank gilt dem Herausgeber Herrn Prof. Dr. W. Engel für zahlreiche Hinweise hinsichtlich der inhaltlichen Gestaltung dieser Aufgabensammlung. Ferner danken wir dem VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, insbesondere der Fachgebietsleiterin Frau Dipl.-Math. E. Arndt, für die gute Zusammenarbeit sowie den Mitarbeitern des VEB Druckhaus „Maxim Gorki", Altenburg, für die sorgfältige Drucklegung.

Güstrow, im Frühjahr 1980 Die Autoren

Inhalt

I. Allgemeine Grundlagen

Grundbegriffe der Mengenlehre

Kontrollfragen

1. Was beinhalten das Mengenbildungs- und das Extensionalitätsprinzip?
2. Wie ist $\{x: H(x)\}$ erklärt?
3. Was versteht man unter dem Durchschnitt, der Vereinigung, der Differenz und der symmetrischen Differenz von Mengen M_1, M_2 bzw. Mengensystemen $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$?
4. Wie lassen sich die Booleschen Mengenoperationen durch Tabellen beschreiben? Wie sind sie durch Eulersche Kreise (Venn-Diagramme) zu veranschaulichen?
5. Wie lauten die wichtigsten Rechengesetze für die Booleschen Operationen?
6. Wann nennt man Mengen M_1, M_2 bzw. ein Mengensystem $\mathfrak{M}$ disjunkt?
7. Wann nennt man die Menge M_1 eine Teilmenge (echte Teilmenge, Obermenge, echte Obermenge) der Menge M_2?
8. Welches sind die wichtigsten Eigenschaften der Inklusion?
9. Was versteht man unter der Potenzmenge einer Menge M?
10. Welche Bedeutung haben $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$? Was ist bei diesen Bildungen zu beachten?
11. Was versteht man unter dem Durchschnitt und der Vereinigung eines Mengensystems bzw. einer Mengenfamilie?
12. Wie lauten die wichtigsten Rechengesetze für die verallgemeinerten Booleschen Operationen?

Aufgaben

1. Man bestätige die folgenden Mengengleichungen durch Angabe der vollen Wertetabelle für die Zugehörigkeit eines Elementes x zur Menge auf der linken bzw. rechten Seite dieser Gleichung und veranschauliche diese Mengengleichungen durch Eulersche Kreise:
   a) $(M_1 \cap M_2) \cup M_3 = (M_1 \cup M_3) \cap (M_2 \cup M_3)$,
   b) $(M_1 \triangle M_2) \cap M_3 = (M_1 \cap M_3) \triangle (M_2 \cap M_3)$,
   c) $M_1 \setminus (M_2 \cap M_3) = (M_1 \setminus M_2) \cup (M_1 \setminus M_3)$,
   d) $(M_1 \setminus M_2) \setminus M_3 = M_1 \setminus (M_2 \cup M_3)$,
   e) $M_1 \triangle M_2 = (M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1)$.

Da die Tabellen zum Nachweis der Gleichheit von Mengen, die aus gegebenen Mengen $M_1, \ldots, M_n$ mittels der Booleschen Operationen zusammengesetzt sind, mit der Anzahl n der gegebenen Mengen und der Anzahl der Verknüpfungen sehr rasch anwachsen, beweist man kompliziertere Mengengleichungen durch logische Umformung der die Mengen auf der linken bzw. rechten Seite der Gleichung charakterisierenden Eigenschaften oder durch Rückführung auf schon bewiesene Gesetze der Mengenlehre. Die folgenden Beispielaufgaben mögen das erläutern:

2. Man zeige, daß für beliebige Mengen M_1, M_2, M_3, M_4 folgendes gilt:

(*) $(M_1 \setminus M_2) \cap (M_3 \setminus M_4) = (M_1 \setminus M_4) \cap (M_3 \setminus M_2)$.

Beweis: Nach dem Extensionalitätsprinzip sind Mengen genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten. Daher genügt es zum Beweis von (*) zu zeigen, daß für beliebiges x folgendes gilt:

$$x \in (M_1 \setminus M_2) \cap (M_3 \setminus M_4) \Leftrightarrow x \in (M_1 \setminus M_4) \cap (M_3 \setminus M_2).$$

Ist $x \in (M_1 \setminus M_2) \cap (M_3 \setminus M_4)$, so ist nach Definition des Durchschnitts $x \in M_1 \setminus M_2$ und $x \in M_3 \setminus M_4$, und hieraus folgt nach Definition der Differenz

(i) $x \in M_1$, (ii) $x \notin M_2$, (iii) $x \in M_3$, (iv) $x \notin M_4$.

Aus (i) und (iv) folgt

(v) $x \in M_1 \setminus M_4$,

und aus (iii) und (ii) folgt

(vi) $x \in M_3 \setminus M_2$.

Also gilt $x \in (M_1 \setminus M_4) \cap (M_3 \setminus M_2)$. Mithin ist jedes Element von $(M_1 \setminus M_2) \cap (M_3 \setminus M_4)$ auch Element der Menge $(M_1 \setminus M_4) \cap (M_3 \setminus M_2)$.

Zum Beweis der Umkehrung, daß jedes Element der Menge $(M_1 \setminus M_4) \cap (M_3 \setminus M_2)$ zu $(M_1 \setminus M_2) \cap (M_3 \setminus M_4)$ gehört, genügt es entweder zu bemerken, daß alle obigen Schlüsse umkehrbar sind bzw. daß die Umkehrung die bewiesene Implikation mit vertauschtem M_2 und M_4 ist.

3. Man zeige, daß für beliebige Mengen M_1, M_2, M_3, M_4 folgendes gilt:

(**) $(M_1 \cap M_3) \setminus (M_2 \cup M_4) = (M_1 \setminus M_2) \cap (M_3 \setminus M_4)$.

Beweis: Wir benutzen das Assoziativ- und das Kommutativgesetz für den Durchschnitt (in kombinierter Form), die Mengengleichungen 1.4.(21), 1.4(24), 1.4.(17) und die in der vorangehenden Aufgabe 2 bewiesene Gleichung (*):

$$\begin{aligned}
&(M_1 \cap M_3) \setminus (M_2 \cup M_4) \\
&= (M_1 \setminus (M_2 \cup M_4)) \cap (M_3 \setminus (M_2 \cup M_4)) && (1.4.(21)) \\
&= ((M_1 \setminus M_2) \cap (M_1 \setminus M_4)) \cap ((M_3 \setminus M_2) \cap (M_3 \setminus M_4)) && (1.4.(24)) \\
&= ((M_1 \setminus M_2) \cap (M_3 \setminus M_4)) \cap ((M_1 \setminus M_4) \cap (M_3 \setminus M_2)) && (\text{Assoziativ- und Kommutativgesetz}) \\
&= (M_1 \setminus M_2) \cap (M_3 \setminus M_4) && ((*),\ 1.4.(17)).
\end{aligned}$$

Bemerkung: Natürlich kann man (**) auch ohne Mühe nach dem bei Aufgabe 2 benutzten Verfahren beweisen. Der vorangehende Beweis ist ein Beispiel für die Bestätigung einer Mengengleichung durch algebraische Umformungen nach Regeln der sogenannten Booleschen Algebra.

4. Man beweise die folgenden Mengengleichungen:

a) $M_1 \cap (M_2 \setminus M_3) = (M_1 \cap M_2) \setminus M_3$,

b) $M_1 \setminus (M_2 \cup M_3) = (M_1 \setminus M_2) \cap (M_1 \setminus M_3)$,

c) $M_1 \triangle M_2 = (M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2)$,

d) $(M_1 \triangle M_2) \setminus M_3 = (M_1 \cup M_3) \triangle (M_2 \cup M_3)$,

e) $M_1 \setminus (M_2 \triangle M_3) = [M_1 \setminus (M_2 \cup M_3)] \cup [M_1 \cap M_2 \cap M_3]$.

5. Man untersuche die folgenden Mengengleichungen auf ihre Gültigkeit für beliebige Mengen. Die gültigen Gleichungen sind zu beweisen, die nicht für beliebige Mengen gültigen Gleichungen sind durch Gegenbeispiele zu widerlegen:

a) $M \triangle M \triangle M = M$,

b) $(M_1 \setminus M_2) \cup (M_3 \setminus M_4) = (M_1 \cup M_3) \setminus (M_2 \setminus M_4)$,

c) $M_1 \triangle M_2 \triangle M_3 = (M_1 \cup M_2 \cup M_3) \setminus (M_1 \cap M_2 \cap M_3)$,

d) $M_1 \triangle M_2 \triangle M_3 = [M_1 \setminus (M_2 \cup M_3)] \cup [M_2 \setminus (M_1 \cup M_3)] \cup [M_3 \setminus (M_1 \cup M_2)] \cup [M_1 \cap M_2 \cap M_3]$,

e) $(M_1 \cup M_2 \cup M_3) \setminus (M_1 \cap M_2 \cap M_3) = [(M_1 \cup M_2) \setminus M_3] \cup [(M_1 \cup M_3) \setminus M_2] \cup [(M_2 \cup M_3) \setminus M_1]$.

6. a) Man zeige, daß die Differenzmenge $M \setminus N$ die eindeutig bestimmte Lösung X des folgenden „Gleichungssystems" ist:

$$X \cap N = \emptyset, \quad X \cup N = M.$$

b) Es seien X, Y beliebige Mengen, so daß für eine gewisse Menge A die Gleichungen $A \cap X = A \cap Y$ und $A \cup X = A \cup Y$ erfüllt sind. Man zeige, daß dann $X = Y$ ist.

7. Man beweise die folgenden Gesetze für die Inklusion:

a) Die Vereinigung $M_1 \cup M_2$ ist die bezüglich der Inklusion kleinste gemeinsame Obermenge von M_1 und M_2, und $M_1 \cup M_2$ ist durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt.

b) $M_1 \subseteqq M_2 \Leftrightarrow M_1 \cap M_2 = M_1$.

c) Ist M eine beliebige Menge und $a \notin M$, so ist $M \cup \{a\}$ oberer Nachbar von M bezüglich der Inklusion.

8. Man beweise die folgenden Gesetze für die Potenzmenge:

a) $M \subseteqq N \Rightarrow \mathfrak{P}(M) \subseteqq \mathfrak{P}(N)$;

b) $\mathfrak{P}(M \cap N) = \mathfrak{P}(M) \cap \mathfrak{P}(N)$;

c) $\mathfrak{P}(M) \cup \mathfrak{P}(N) \subseteqq \mathfrak{P}(M \cup N)$;

d) sind die Mengen M und N bezüglich der Inklusion unvergleichbar, so gilt sogar $\mathfrak{P}(M) \cup \mathfrak{P}(N) \subset \mathfrak{P}(M \cup N)$.

9. Man beweise die folgenden Rechengesetze für den Durchschnitt und die Vereinigung eines Mengensystems:

a) $\bigcup (\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2) = \bigcup \mathfrak{M}_1 \cup \bigcup \mathfrak{M}_2$,

b) $\mathfrak{M}_1 \subseteqq \mathfrak{M}_2 \Rightarrow \bigcup \mathfrak{M}_1 \subseteqq \bigcup \mathfrak{M}_2$.

10. Man zeige, daß die Menge $\bigcap \mathfrak{M}$ die bezüglich der Inklusion größte Menge ist, die Teilmenge jeder Menge X des Mengensystems $\mathfrak{M}$ ist, und daß $\bigcap \mathfrak{M}$ durch diese Eigenschaft eindeutig charakterisiert ist.

11. Man zeige, daß für jedes Mengensystem $\mathfrak{M}$ und jede Menge N folgendes gilt:

$$\bigcap \{N \cup X: X \in \mathfrak{M}\} = N \cup \bigcap \mathfrak{M}.$$

Dabei bedeutet $\{N \cup X: X \in \mathfrak{M}\}$ das System $\mathfrak{N}$ aller Vereinigungen $N \cup X$ mit $X \in \mathfrak{M}$.

Beweis: a) Es sei $x \in \bigcap \{N \cup X: X \in \mathfrak{M}\}$. Dann ist $x \in N \cup X$ für alle $X \in \mathfrak{M}$. Wir unterscheiden folgende beiden Fälle:

1. Fall: $x \in N$. Dann ist $x \in N \cup \bigcap \mathfrak{M}$ wegen $N \subseteq N \cup \bigcap \mathfrak{M}$.

2. Fall: $x \notin N$. Dann ist $x \in X$ für alle $X \in \mathfrak{M}$ (wegen $x \in N \cup X$ und $x \notin N$), also ist $x \in \bigcap \mathfrak{M}$ und somit $x \in N \cup \bigcap \mathfrak{M}$.

Folglich ist

$$\bigcap \{N \cup X: X \in \mathfrak{M}\} \subseteq N \cup \bigcap \mathfrak{M}.$$

b) Es sei nun umgekehrt $x \in N \cup \bigcap \mathfrak{M}$. Dann ist $x \in N$ oder $x \in \bigcap \mathfrak{M}$. Im ersten Fall ist $x \in N \cup X$ für alle $X \in \mathfrak{M}$ (wegen $N \subseteq N \cup X$) und mithin $x \in \bigcap \{N \cup X: X \in \mathfrak{M}\}$. Im zweiten Fall ist $x \in X$ für alle $X \in \mathfrak{M}$ und damit erst recht $x \in N \cup X$ für alle $X \in \mathfrak{M}$, also ebenfalls $x \in \bigcap \{N \cup X: X \in \mathfrak{M}\}$. Folglich ist

$$N \cup \bigcap \mathfrak{M} \subseteq \bigcap \{N \cup X: X \in \mathfrak{M}\}.$$

Aus a) und b) folgt auf Grund der Antisymmetrie der Inklusion die Behauptung.

12. Man beweise die folgenden Gesetze für den Durchschnitt und die Vereinigung eines Mengensystems:

a) $N \cap \bigcup \mathfrak{M} = \bigcup \{N \cap X: X \in \mathfrak{M}\}$,

b) $N \setminus \bigcap \mathfrak{M} = \bigcup \{N \setminus X: X \in \mathfrak{M}\}$,

c) $N \setminus \bigcup \mathfrak{M} = \bigcap \{N \setminus X: X \in \mathfrak{M}\}$,

d) $\bigcup \mathfrak{M} \cap \bigcup \mathfrak{N} = \bigcup \{X \cap Y: X \in \mathfrak{M} \wedge Y \in \mathfrak{N}\}$,

e) $\bigcap \mathfrak{M} \cup \bigcap \mathfrak{N} = \bigcap \{X \cup Y: X \in \mathfrak{M} \wedge Y \in \mathfrak{N}\}$.

Grundbegriffe der Abbildungstheorie

Kontrollfragen

1. Wie lautet die grundlegende Eigenschaft des geordneten Paares, des Tripels und allgemein des n-Tupels, und welcher Unterschied besteht zur Zweiermenge, Dreiermenge, Menge aus n Elementen? Was sind die Komponenten eines geordneten Paares bzw. n-Tupels?

2. Was versteht man unter dem kartesischen Produkt $M_1 \times M_2$ von Mengen M_1, M_2, wie kann man es sich veranschaulichen und was sind seine wichtigsten Eigenschaften?

3. Was ist eine Korrespondenz, eine Abbildung, eine eindeutig umkehrbare Korrespondenz, eine eineindeutige Abbildung, eine Permutation?
4. Was versteht man unter den Begriffen Bild, volles Bild, Urbild, volles Urbild, Definitionsbereich, Wertebereich, Korrespondenz (Abbildung) aus — in, aus — auf, von — in, von — auf?
5. Wann sind Korrespondenzen bzw. Abbildungen gleich und was ist dabei zu beachten?
6. Was ist die Inverse einer Korrespondenz bzw. Abbildung, was die Verkettung (das Produkt) von Korrespondenzen bzw. Abbildungen? Was für allgemeine Gesetzmäßigkeiten gelten hierfür?
7. Was versteht man unter Permutationen, welche Eigenschaften besitzen diese?
8. Welcher Unterschied besteht zwischen Relation und Operation?
9. Wann nennt man eine Relation reflexiv, irreflexiv, transitiv, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch?
10. Was ist eine Äquivalenzrelation und was ist über diese bekannt?
11. Was ist eine teilweise Ordnung, was eine totale Ordnung? Welcher Zusammenhang besteht zwischen der reflexiven und der irreflexiven Form einer solchen Ordnung?
12. Wann nennt man eine Operation kommutativ, assoziativ, distributiv, monoton?
13. Welche Problematik tritt bei der Umkehroperation auf?
14. Was beinhaltet das Auswahlaxiom?
15. Was sind endliche Mengen?

Aufgaben

1. Man zeige, daß für

$$(a, b) := \{\{a, b\}, \{a\}\}$$

die charakteristische Eigenschaft des geordneten Paares erfüllt ist.

2. Man beweise die folgenden Rechengesetze für das kartesische Produkt:

a) $(M_1 \cap M_2) \times N = (M_1 \times N) \cap (M_2 \times N)$,

b) $(M_1 \setminus M_2) \times N = (M_1 \times N) \setminus (M_2 \times N)$,

c) $M_1 \subseteqq M_2 \Rightarrow M_1 \times N \subseteqq M_2 \times N$,

d) $M_1 \times M_2 = \emptyset \Leftrightarrow M_1 = \emptyset \vee M_2 = \emptyset$,

e) $M_1 \times N \subseteqq M_2 \times N \wedge N \neq \emptyset \Rightarrow M_1 \subseteqq M_2$,

f) $M_1 \times N = M_2 \times N \wedge N \neq \emptyset \Rightarrow M_1 = M_2$.

Beweis von b): Auf Grund von 1.5.(5) genügt es zu zeigen, daß folgendes gilt:

α) $(M_1 \setminus M_2) \times N \subseteqq (M_1 \times N) \setminus (M_2 \times N)$,

β) $(M_1 \times N) \setminus (M_2 \times N) \subseteqq (M_1 \setminus M_2) \times N$.

Zum Beweis von α) sei $(x, y) \in (M_1 \setminus M_2) \times N$. Dann gilt

(1) $x \in M_1 \setminus M_2$ und (2) $y \in N$.

Aus (1) folgt

(3) $x \in M_1$ und (4) $x \notin M_2$.

Aus (3) und (2) bzw. (4) und (2) folgt

(5) $(x, y) \in M_1 \times N$ und (6) $(x, y) \notin M_2 \times N$.

Aus (5) und (6) folgt $(x, y) \in (M_1 \times N) \setminus (M_2 \times N)$.

Zum Beweis von β) sei $(x, y) \in (M_1 \times N) \setminus (M_2 \times N)$. Dann gilt

(1) $(x, y) \in M_1 \times N$ und (2) $(x, y) \notin M_2 \times N$.

Aus (1) folgt

(3) $x \in M_1$ und (4) $y \in N$.

Aus (2) folgt

(5) $x \notin M_2$ oder (6) $y \notin N$.

Da (4) gilt, kann (6) nicht gelten. Also gilt (5). Aus (3) und (5) folgt

(7) $x \in M_1 \setminus M_2$.

Aus (7) und (4) folgt $(x, y) \in (M_1 \setminus M_2) \times N$.

3. Es sei F die Menge aller Paare (x, y) von natürlichen Zahlen, die folgenden Ungleichungen genügen:

$$10x - 2y \geqq 0,$$
$$10y - 2x \geqq 0,$$
$$x + y \leqq 12.$$

Offenbar ist F eine Korrespondenz aus $\mathbf{N}$ in $\mathbf{N}$.

a) Man nenne fünf Paare (x, y) mit xFy.

b) Man bestimme $B_F(0)$, $B_F(1)$, $B_F(2)$, $B_F(5)$, $B_F(6)$, $B_F(10)$, $B_F(12)$, $B_F(15)$.

c) Man bestimme $U_F(0)$, $U_F(1)$, $U_F(2)$, $U_F(5)$, $U_F(6)$, $U_F(10)$, $U_F(12)$, $U_F(15)$.

d) Man bestimme $D(F)$ und $W(F)$.

e) Man beschreibe F durch eine 0, 1-Matrix.

f) Man bestimme F^{-1}.

g) Man bestimme $F^2 = F \circ F$.

4. Man beweise:

a) Ist f Abbildung von M auf N, g Abbildung von N auf P, so ist $g \circ f$ Abbildung von M auf P.

b) Ist f 1-1-Abbildung von M in N, g 1-1-Abbildung von N in P, so ist $g \circ f$ 1-1-Abbildung von M in P.

c) Ist f Abbildung von M in N, g Abbildung von N in P und $g \circ f$ Abbildung von M auf P, so ist auch g Abbildung von N auf P. (Ist dann stets auch f surjektiv?)

d) Ist f Abbildung von M in N, g Abbildung von N in P und $g \circ f$ eineindeutig, so ist auch f eineindeutig. (Ist dann stets auch g eineindeutig?)

5. * Man beweise:

a) Eine Abbildung f von M in N ist genau dann surjektiv, wenn für beliebige Abbildungen g_1, g_2 von N in P gilt:

$$g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2.$$

b) Eine Abbildung f von M in N ist genau dann injektiv, wenn für beliebige Abbildungen g_1, g_2 von P in M gilt:

$$f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2$$

(P ist dabei eine beliebige Menge).

c) Man beweise c) und d) aus Aufgabe 4 mittels a) und b).

Beweis von a):

α) Es sei f Abbildung von M auf N, und es seien g_1, g_2 Abbildungen von N in P mit $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Zu zeigen ist $g_1 = g_2$, d. h. $g_1(x) = g_2(x)$ für alle $x \in N$. Es sei dazu x ein beliebiges Element aus N. Da f surjektiv ist, gibt es ein $z \in M$ mit $x = f(z)$. Dann gilt

$$(g_1 \circ f)(z) = g_1(f(z)) = g_1(x), \quad (g_2 \circ f)(z) = g_2(f(z)) = g_2(x).$$

Wegen $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ ist $(g_1 \circ f)(z) = (g_2 \circ f)(z)$ und folglich $g_1(x) = g_2(x)$, was zu beweisen war.

β) Es sei nun umgekehrt f eine Abbildung von M in N, so daß für beliebige Abbildungen g_1, g_2 von N in P aus $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ stets $g_1 = g_2$ folgt. Zu zeigen ist, daß f surjektiv ist. Angenommen, es gibt ein $y_0 \in N$, das nicht Bild eines gewissen Elementes aus M ist. Dann seien a_1, a_2 zwei verschiedene Objekte, und für $i = 1, 2$ sei

$$g_i(y) := \begin{cases} y & \text{für} \quad y \in N \setminus \{y_0\}, \\ a_i & \text{für} \quad y = y_0. \end{cases}$$

Offenbar sind g_1, g_2 Abbildungen von N in $N \cup \{a_1, a_2\}$ mit $g_1 \neq g_2$, aber $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

6. Für eine beliebige reelle Zahl x bezeichne $[x]$ die größte in x enthaltene ganze Zahl, d. h., es sei $[x] \in \mathbf{Z}$ mit $[x] \leqq x < [x] + 1$.

a) Man bestimme

$$[-1{,}5],\ \left[-\frac{1}{2}\right],\ [0],\ [1],\ \left[\sqrt{2}\right],\ [2{,}5],\ [\pi],\ \left[3\frac{1}{2}\right].$$

b) Man zeige, daß für beliebiges $g \in \mathbf{Z}$ und $x \in \mathbf{R}$ folgendes gilt:

$$[g + x] = g + [x],$$

$$[g \cdot x] \geqq g \cdot [x], \quad \text{falls } g \geqq 0 \text{ ist.}$$

c) Welche Beziehungen bestehen zwischen

$$[x + y] \text{ und } [x] + [y] \quad \text{bzw.} \quad [x \cdot y] \text{ und } [x] \cdot [y]\,?$$

d) Man analysiere die durch

$$f(x) := [x]$$

definierte Abbildung von $\mathbf{R}$ in $\mathbf{Z}$.

7. * Man analysiere die für $x, y \in \mathbf{N}$ durch

$$c^2(x,y) := \frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2},$$

$$c_{21}(x) := x - \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{8x+1}+1}{2}\right]\left[\frac{\sqrt{8x+1}-1}{2}\right],$$

$$c_{22}(x) := \left[\frac{\sqrt{8x+1}+1}{2}\right]\left(1 + \left[\frac{\sqrt{8x+1}-1}{2}\right]\right) - x - 1$$

definierten Abbildungen (wobei [...] die in Aufgabe 6 erklärte Bedeutung hat).

a) Man zeige, daß c^2 die 1-1-Abbildung von $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ in $\mathbf{N}$ ist, die die Paare natürlicher Zahlen in folgender Reihenfolge „durchnumeriert":

(x, y)	$c^2(x, y)$	Bemerkung
(0, 0)	0	$x + y = 0$
(0, 1) (1, 0)	1 2	$x + y = 1$
(0, 2) (1, 1) (2, 0)	3 4 5	$x + y = 2$
(0, 3) (1, 2) (2, 1) (3, 0)	6 7 8 9	$x + y = 3$
⋮	⋮	⋮

(Cantor-Numerierung).

b) Für beliebiges $x, y \in \mathbf{N}$ gilt

$$c_{21}(c^2(x,y)) = x, \quad c_{22}(c^2(x,y)) = y, \quad c^2(c_{21}(x), c_{22}(x)) = x.$$

c) Was kann man von den Funktionen

$$c^3(x,y,z) := c^2(c^2(x,y), z),$$

$$c_{31}(x) := c_{21}(c_{21}(x)), \quad c_{32}(x) := c_{22}(c_{21}(x)), \quad c_{33}(x) := c_{22}(x)$$

behaupten?

d) Man definiere analoge Funktionen c^k und c_{ki} $(1 \leqq i \leqq k)$ für $k \geqq 4$.

8. Man analysiere die für $x, y \in \mathbf{N}$ durch

$$\bar{c}^2(x,y) := 2^x(2y+1)$$

definierte Abbildung von $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ in $\mathbf{N}$.

Bemerkung: Der kleine Unterschied zu den Resultaten für c^2 aus Aufgabe 7 ist beabsichtigt; wie müßte man die Definition abändern, damit dieser Unterschied verschwindet?

9. Man analysiere die für $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ durch

$$f(x, y) := (1 - y, 1 - x)$$

definierte Abbildung.

10. a) Es sei F die Menge aller Paare der Form $\big((a, b, c), x\big)$ mit $a, b, c, x \in \mathbf{R}$ und $ax^2 + bx + c = 0$. Was kann man über F aussagen?

b) Es sei F die Menge aller Paare der Form $\big((a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2), (x, y)\big)$ mit $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, x, y \in \mathbf{R}$, $a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$. Was kann man über F aussagen?

c) Es sei F die Menge aller Paare der Form $\big((p, q), (x, y)\big)$ mit $p, q, x, y \in \mathbf{R}$, $x + y = 2p$, $x \cdot y = q$. Was kann man über F aussagen?

11. a) Man konstruiere eine 1-1-Abbildung von $M = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ auf die Menge $\mathfrak{P}(\{0, 1, 2\})$, so daß für beliebige $m, n \in M$ folgendes gilt:

$$m \mid n \Leftrightarrow f(m) \subseteq f(n).$$

b) Man verallgemeinere dieses Resultat auf die Menge $\mathfrak{P}(\{0, 1, \ldots, k\})$ $(k \in \mathbf{N})$.

Hinweis: Bei b) darf benutzt werden, daß es unendlich viele Primzahlen gibt und eine natürliche Zahl sich bis auf die Reihenfolge der Faktoren nur auf eine Weise als Produkt von Primzahlen darstellen läßt.

12. a) Man berechne die Potenzen $f, f^2 = f \circ f, f^3 = f \circ f \circ f, \ldots$ der Permutation

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Es sei M die endliche Menge $\{1, \ldots, n\}$ $(n \in \mathbf{N})$, $f \in \mathfrak{T}(M)$ (in diesem Fall nennt man $\mathfrak{T}(M)$ auch die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$). Man zeige, daß es eine natürliche Zahl $k > 0$ gibt, so daß $f^k = e_M$ ist (die kleinste derartige Zahl k wird die Ordnung von f genannt).

Hinweis: Beim Beweis von b) darf benutzt werden, daß die Menge $\mathfrak{T}(M)$ endlich ist.

13. Man stelle die folgenden Permutationen als Produkt von elementefremden Zyklen und als Produkt von Transpositionen dar

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 & 3 & 7 & 10 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 10 & 9 & 7 & 6 & 1 & 8 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

14. Es sei

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

eine Permutation der Menge $\{1, \ldots, n\}$. Man sagt, daß die Zahlen i_μ, i_ν in f in Inversion stehen, wenn $\mu < \nu$ und $i_\mu > i_\nu$ ist. Mit $I(f)$ werde die Anzahl der Zahlen-paare (i_μ, i_ν) bezeichnet, die in f in Inversion stehen. f heißt gerade oder ungerade Permutation, je nachdem, ob $I(f)$ gerade oder ungerade ist.

a) Man ermittle $I(f)$ für die Permutationen aus Aufgabe 13 und stelle fest, ob diese Permutationen gerade oder ungerade sind.

b) Man zeige, daß jede Transposition eine ungerade Permutation ist.

c) Ist f eine gerade (ungerade) Permutation und τ eine Transposition, so sind $f \circ \tau$ und $\tau \circ f$ ungerade (gerade) Permutationen.

d) Eine Permutation f ist genau dann gerade (ungerade), wenn sich f als Produkt einer geraden (ungeraden) Anzahl von Transpositionen darstellen läßt.

e) Ein Produkt zweier gerader oder zweier ungerader Permutationen ist gerade; ein Produkt aus einer geraden und einer ungeraden Permutation ist ungerade.

f) Es gibt genauso viele gerade wie ungerade Permutationen (falls $n > 1$ ist).

15. * Bei dem bekannten 15er Spiel sind 15 mit den Zahlen 1 bis 15 numerierte Täfelchen in der in der Abbildung angegebenen Weise in einem quadratischen Rahmen verschiebbar angebracht (das 16. Feld ist frei). Durch horizontale oder vertikale Verschiebung eines Täfelchens in das jeweils freie Feld kann die Reihenfolge der Täfelchen permutiert werden. Welche Permutationen sind möglich?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Hinweis: Man ordne einer beliebigen Stellung s der Täfelchen die Zahl $\chi(s) := I(f_s) + k_s$ zu, wobei $I(f_s)$ die Anzahl der Inversionen in der durch Aneinanderreihen der Zeilen entstehenden Permutation f_s der Zahlen $1, \ldots, 15$ ist und k_s die Nummer der Zeile bezeichnet, in der sich in der Stellung s das freie Feld befindet. Dann gilt: Eine Stellung s kann genau dann aus der gezeichneten „Anfangsstellung" durch Verschiebungen erhalten werden, wenn $\chi(s)$ gerade ist.

16. Es seien $M, N, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2$ beliebige Mengen. Man zeige, daß folgendes gilt:

a) $M \times N \sim N \times M$,

b) $M_1 \times (M_2 \times M_3) \sim (M_1 \times M_2) \times M_3$,

c) $M_1 \sim M_2 \wedge N_1 \sim N_2 \Rightarrow M_1 \times N_1 \sim M_2 \times N_2$,

d) $M_1 \cap M_2 = \emptyset \Rightarrow N^{M_1 \cup M_2} \sim N^{M_1} \times N^{M_2}$,

e) $N^{M_1 \times M_2} \sim (N^{M_1})^{M_2}$, f) $(N_1 \times N_2)^M \sim N_1^M \times N_2^M$,

g) $M \sim N \Rightarrow \mathfrak{P}(M) \sim \mathfrak{P}(N)$, h) $M \sim N \Rightarrow \mathfrak{T}(M) \sim \mathfrak{T}(N)$,

i) $M_1 \sim M_2 \wedge N_1 \subseteqq M_1 \wedge N_2 \subseteqq M_2 \wedge N_1 \sim N_2 \Rightarrow M_1 \setminus N_1 \sim M_2 \setminus N_2$.

Anleitung zu e): Definitionsgemäß ist $N^{M_1 \times M_2}$ die Menge aller Abbildungen von $M_1 \times M_2$ in N. Es sei $f \in N^{M_1 \times M_2}$. Dann ordnet f jedem Paar (x, y) mit $x \in M_1$, $y \in M_2$ ein eindeutig bestimmtes Element $f(x, y)$ der Menge N zu. Es sei nun y_0 ein beliebiges Element aus M_2. Dann ist

$$f_{y_0} := \{(x, f(x, y_0)) : x \in M_1\}$$

eine Abbildung von M_1 in N mit $f_{y_0}(x) = f(x, y_0)$ für $x \in M_1$, d. h. $f_{y_0} \in N^{M_1}$. Hieraus folgt, daß

$$\Phi_f := \{(y, f_y) : y \in M_2\}$$

eine Abbildung von M_2 in N^{M_1} mit $\Phi_f(y) = f_y$ für $y \in M_2$ ist, d. h. $\Phi_f \in (N^{M_1})^{M_2}$. Dann ist aber

$$\Phi := \{(f, \Phi_f) : f \in N^{M_1 \times M_2}\}$$

eine Abbildung von $N^{M_1 \times M_2}$ in $(N^{M_1})^{M_2}$, und man beweist, daß Φ eine 1-1-Abbildung von $N^{M_1 \times M_2}$ auf $(N^{M_1})^{M_2}$ ist.
Analog konstruiert man in den Aufgaben d) und f) die als existent nachzuweisenden 1-1-Abbildungen.

17. Man konstruiere in der Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$ Relationen R_1, R_2, R_3, R_4, für die folgendes gilt:

a) R_1 ist reflexiv in M, R_1 ist transitiv, R_1 ist nicht symmetrisch.

b) R_2 ist reflexiv in M, R_2 ist nicht transitiv, R_2 ist symmetrisch.

c) R_3 ist reflexiv, R_3 ist nicht transitiv, R_3 ist asymmetrisch.

d) R_4 ist nicht reflexiv in M, R_4 ist nicht irreflexiv in M, R_4 ist transitiv, R_4 ist symmetrisch.

e) Man bilde einige weitere Möglichkeiten.

18. Es bezeichne $Q_{10}(n)$ die Quersumme der Dezimaldarstellung der natürlichen Zahl n. Es sei ferner M eine beliebige nichtleere Menge von natürlichen Zahlen. Mit R_M werde die folgende Relation in M bezeichnet:

$$(x, y) \in R_M :\Leftrightarrow x, y \in M \wedge Q_{10}(x) = Q_{10}(y).$$

a) R_M ist für jedes M mit $\emptyset \subset M \subseteqq \mathbf{N}$ eine Äquivalenzrelation in M.

b) Man beschreibe die Zerlegung $\mathfrak{Z}_{R_M}$ in den Fällen $M = \mathbf{N}$, $\{0, 1, \ldots, 1000\}$, $\{3i : i \in \mathbf{N}\}$.

c) Man gebe eine unendliche Menge M an, bei der $\mathfrak{Z}_{R_M}$ endlich ist (z. B. aus 11 Elementen besteht).

d) Man gebe eine unendliche Menge M an, bei der alle Restklassen endlich sind.

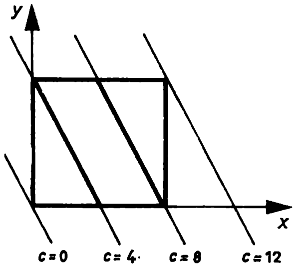
e) Man gebe eine Menge M an, bei der alle Restklassen endlich sind und zu jeder natürlichen Zahl $n \geqq 1$ genau eine Restklasse aus genau n Elementen existiert.

f) Man gebe eine Menge M an, bei der zu jeder natürlichen Zahl $n \geqq 1$ genau eine Restklasse aus genau n Elementen und genau eine unendliche Restklasse existieren.

g) Man bilde selbst weitere Beispiele.

19. Man charakterisiere die durch die folgenden Zerlegungen $\mathfrak{Z}$ der Menge $\mathbf{R}$ der reellen Zahlen definierten Äquivalenzrelationen:
    a) $\mathfrak{Z} = \{\{x, -x\} : x \in \mathbf{R}_+\}$,
    b) $\mathfrak{Z} = \{\{g + x : 0 \leqq x < 1\} : g \in \mathbf{Z}\}$,
    c) $\mathfrak{Z} = \{\{g + x : g \in \mathbf{Z}\} : 0 \leqq x < 1\}$.

20. Man beschreibe die kanonische Zerlegung $f = g \circ \bar{f}$ der folgenden Funktionen:
    a) $f(x) := \sin x \quad (x \in \mathbf{R})$,
    b) $f(x) := x^2 \quad (x \in \mathbf{R})$,
    c) $f(x, y) := 8x + 4y \quad (0 \leqq x, y \leqq 1)$.



Lösung zu c): Wertebereich der Funktion $f(x, y) = 8x + 4y$ über dem „Einheitsquadrat" $Q = \{(x, y) : 0 \leqq x, y \leqq 1\}$ ist das Intervall $[\![0, 12]\!]$. Für einen gegebenen Wert c aus diesem Intervall besteht das volle Urbild $U_f(c)$ aus allen Punkten (x, y) aus Q mit $8x + 4y = c$. Für beliebiges $c \in \mathbf{R}$ stellt in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Menge aller Punkte (x, y) mit $8x + 4y = c$ die Gerade γ_c durch den Punkt $\frac{c}{8}$ der x-Achse mit dem Anstieg -2 dar. Folglich besteht das Restsystem Q/R_f aus allen nichtleeren Durchschnitten von derartigen Geraden mit Q (vgl. Abb.). Die Abbildung $\bar{f}$ ordnet einem beliebigen Punkt (x, y) aus Q die „Strecke" $Q \cap \gamma_c$ auf der Geraden γ_c mit $0 \leqq c \leqq 12$ zu, die durch (x, y) geht, und g ordnet einer solchen Strecke $Q \cap \gamma_c$ den „Parameter" c der entsprechenden Geraden γ_c zu.

21. * Es sei M eine beliebige nichtleere Menge, R eine binäre Relation in M. Unter der *transitiven Hülle* von R werde die folgendermaßen definierte Relation $\tau(R)$ verstanden:

$$\tau(R) := \bigcap \{S : S \subseteqq M \times M \wedge R \subseteqq S \wedge S \text{ transitiv}\}.$$

Man beweise:
    a) $R \subseteqq \tau(R) \subseteqq M \times M$,
    b) $\tau(R)$ ist transitiv,
    c) $\bigwedge_S (S \subseteqq M \times M \wedge R \subseteqq S \wedge S \text{ transitiv} \Rightarrow \tau(R) \subseteqq S)$
    d) R transitiv $\Leftrightarrow \tau(R) = R$,

e) $R_1, R_2 \subseteq M \times M \wedge R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow \tau(R_1) \subseteq \tau(R_2)$,

f) $\tau(\tau(R)) = \tau(R)$,

g) für beliebige $x, y \in M$ gilt $(x, y) \in \tau(R)$ genau dann, wenn eine endliche Folge $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ $(n \geqq 1)$ von Elementen aus M existiert, so daß $x_0 = x$, $x_n = y$ und $(x_i, x_{i+1}) \in R$ ist für $i = 0, \ldots, n - 1$.

h) $\tau(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup \cdots$.

Bemerkung: Die Bedingungen a) bis c) beinhalten, daß $\tau(R)$ die kleinste R umfassende transitive Relation ist.
Eine Mengenabbildung (!) τ, die die Bedingungen a), e) und f) erfüllt, nennt man einen *Hüllenoperator* (im vorliegenden Fall in $M \times M$). Ist τ ein Hüllenoperator, so nennt man die Mengen X, für die $\tau(X) = X$ ist, die *τ-abgeschlossenen* Mengen. Damit beinhaltet d), daß die τ-abgeschlossenen Mengen für den Operator der transitiven Hülle gerade die transitiven Relationen sind. g) gibt eine explizite Charakterisierung der Relation $\tau(R)$. h) ist nur eine andere Formulierung für g).

Beweis: Das Mengensystem $\{S: S \subseteq M \times M \wedge R \subseteq S \wedge S$ transitiv$\}$ werde zur Abkürzung mit $\mathfrak{S}(R)$ bezeichnet. Da alle Relationen S aus $\mathfrak{S}(R)$ die Relation R umfassen, umfaßt nach 1.6.(10) auch der Durchschnitt $\tau(R)$ von $\mathfrak{S}(R)$ die Relation R, und da alle S aus $\mathfrak{S}(R)$ in $M \times M$ enthalten sind, ist auch $\tau(R)$ in $M \times M$ enthalten. Es gilt also a). Zum Beweis von b) seien x, y, z Elemente aus M mit $(x, y) \in \tau(R)$ und $(y, z) \in \tau(R)$. Dann gehören (x, y) und (y, z) zu allen Relationen S aus $\mathfrak{S}(R)$. Da alle diese Relationen transitiv sind, gehört dann auch (x, z) zu jeder Relation S aus $\mathfrak{S}(R)$. Folglich gehört (x, z) zum Durchschnitt $\tau(R)$. Zum Beweis von c) sei S_0 eine beliebige Relation in M, die transitiv ist und R umfaßt. Dann gehört S_0 zu $\mathfrak{S}(R)$, und es ist wegen 1.6.(9) nun $\tau(R) \subseteq S_0$. Ist R transitiv, so ist R in $\mathfrak{S}(R)$ enthalten, also $\tau(R) \subseteq R$ und damit wegen a) sogar $\tau(R) = R$. Und wegen b) ist im Fall $\tau(R) = R$ die Relation R transitiv. Es gilt also d). Zum Beweis von e) seien R_1, R_2 Relationen in M mit $R_1 \subseteq R_2$. Dann ist das System $\mathfrak{S}(R_2)$ Teilsystem von $\mathfrak{S}(R_1)$, und nach 1.6.(7) gilt $\tau(R_1) \subseteq \tau(R_2)$. Da $\tau(R)$ transitiv ist, gilt wegen d) auch f). Zum Beweis von g) sei $\bar{\tau}(R)$ die Relation in M, die auf ein Paar (x, y) von Elementen aus M genau dann zutrifft, wenn es eine endliche Folge $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ $(n \geqq 1)$ von Elementen aus M gibt, so daß $x_0 = x$, $x_n = y$ und $(x_i, x_{i+1}) \in R$ für $i = 0, \ldots, n - 1$ gilt. Offenbar gilt $R \subseteq \bar{\tau}(R) \subseteq M \times M$, und $\bar{\tau}(R)$ ist transitiv (Beweis!). Daher gehört $\bar{\tau}(R)$ zu $\mathfrak{S}(R)$ und es gilt $\tau(R) \subseteq \bar{\tau}(R)$. Es sei nun umgekehrt $(x, y) \in \bar{\tau}(R)$, und es sei $(x_0, \ldots, x_n)$ $(n \geqq 1)$ eine Folge von Elementen aus M mit $x_0 = x$, $x_n = y$ und $(x_i, x_{i+1}) \in R$ für $i = 0, \ldots,$ $n - 1$. Es sei ferner S eine beliebige Relation aus $\mathfrak{S}(R)$. Wegen $R \subseteq S$ gilt $(x_i, x_{i+1}) \in S$ für $i = 0, \ldots, n - 1$, und auf Grund der Transitivität von S folgt aus $(x_0, x_1) \in S$, $(x_1, x_2) \in S$, $(x_2, x_3) \in S, \ldots, (x_{n-1}, x_n) \in S$ der Reihe nach $(x_0, x_2) \in S$, $(x_0, x_3) \in S, \ldots, (x_0, x_n) \in S$, d. h. $(x, y) \in S$. Also ist $\bar{\tau}(R)$ in jeder Relation S aus $\mathfrak{S}(R)$ enthalten, und folglich gilt auch $\bar{\tau}(R) \subseteq \tau(R)$.

22. Es sei M eine beliebige nichtleere Menge, R eine binäre Relation in M. Unter der *symmetrischen Hülle* von R werde die folgendermaßen definierte Relation $\sigma(R)$ verstanden:

$$\sigma(R) := \bigcap \{S: S \subseteq M \times M \wedge R \subseteq S \wedge S \text{ symmetrisch}\}.$$

Man beweise.

a) $\sigma(R)$ ist die kleinste R umfassende symmetrische Relation.

b) σ ist Hüllenoperator in $M \times M$.

c) R symmetrisch $\Leftrightarrow$ R σ-abgeschlossen (d. h. $\sigma(R) = R$).

d) $\sigma(R) = R \cup R^{-1}$.

23. Es sei

$$\varrho_M(R) := \bigcap \{S : S \subseteqq M \times M \wedge R \subseteqq S \wedge S \text{ reflexiv in } M\}$$

(*reflexive Hülle* von R). Man formuliere und beweise die einschlägigen Eigenschaften.

24. Es sei M eine beliebige Menge, R eine beliebige Relation in M. Es bezeichne $\tau(R)$, $\sigma(R)$, $\varrho_M(R)$ die transitive, symmetrische bzw. reflexive Hülle von R. Man beweise:

a) $\sigma(\tau(R)) = \tau(\sigma(R))$, $\sigma(\varrho_M(R)) = \varrho_M(\sigma(R))$, $\tau(\varrho_M(R)) = \varrho_M(\tau(R))$ (d. h. $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$, $\sigma \circ \varrho_M = \varrho_M \circ \sigma$, $\tau \circ \varrho_M = \varrho_M \circ \tau$).

b) $\sigma(\tau(R))$ ist die kleinste symmetrische und transitive Relation, die R umfaßt (analog für $\sigma(\varrho_M(R))$, $\tau(\varrho_M(R))$).

c) $\sigma \circ \tau$, $\sigma \circ \varrho_M$, $\tau \circ \varrho_M$ sind Hüllenoperatoren in $M \times M$.

d) $\sigma \circ \tau(R) = R \Leftrightarrow R$ symmetrisch und transitiv (analog für $\sigma \circ \varrho_M$ und $\tau \circ \varrho_M$).

e) Für beliebige $x, y \in M$ gilt $(x, y) \in \sigma(\tau(R))$ genau dann, wenn eine endliche Folge $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ $(n \geqq 1)$ von Elementen aus M existiert, so daß $x_0 = x$, $x_n = y$ und $(x_i, x_{i+1}) \in R$ oder $(x_{i+1}, x_i) \in R$ für $0 \leqq i < n$ gilt.

f) Man charakterisiere $\sigma \circ \varrho_M$ und $\tau \circ \varrho_M$ analog zu e).

25. Es sei M eine beliebige nichtleere Menge, R eine beliebige Relation in M. Es sei ferner

$$\omega(R) := \bigcap \{S : S \subseteqq M \times M \wedge R \subseteqq S \wedge S \text{ Äquivalenzrelation in } M\}.$$

Man beweise:

a) $\omega(R)$ ist die kleinste Äquivalenzrelation in M, die R umfaßt.

b) ω ist Hüllenoperator in $M \times M$.

c) $\omega(R) = \tau \circ \sigma \circ \varrho_M(R)$.

d) R Äquivalenzrelation in $M \Leftrightarrow \omega(R) = R$.

e) Für beliebiges $x, y \in M$ gilt $(x, y) \in \omega(R)$ genau dann, wenn $x = y$ ist oder eine endliche Folge $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ $(n \geqq 1)$ von Elementen aus M existiert, so daß $x_0 = x$, $x_n = y$ und $(x_i, x_{i+1}) \in R$ oder $(x_{i+1}, x_i) \in R$ für $0 \leqq i < n$ gilt.

f) $\omega(R_1 \cap R_2) = \omega(R_1) \cap \omega(R_2)$ (gilt Analoges auch für die Vereinigung?).

26. a) Man bilde die transitive Hülle der folgenden binären Relation R in $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$:

$$R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (4, 2)\}.$$

b) Man bilde die kleinste Äquivalenzrelation in M, die R umfaßt.

27. Es seien R_1, R_2, R_3 Relationen über M (d. h. Teilmengen von $M \times M$). Man zeige, daß folgendes gilt:

a) $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$,

b) $(R_1 \setminus R_2)^{-1} = R_1^{-1} \setminus R_2^{-1}$,

c) $R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$,
d) $(R_2 \cup R_3) \circ R_1 = (R_2 \circ R_1) \cup (R_3 \circ R_1)$,
e) $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteqq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$,
f) $(R_2 \cap R_3) \circ R_1 \subseteqq (R_2 \circ R_1) \cap (R_3 \circ R_1)$,
g) $R_1 \circ R_2 \setminus R_1 \circ R_3 \subseteqq R_1 \circ (R_2 \setminus R_3)$,
h) $R_2 \circ R_1 \setminus R_3 \circ R_1 \subseteqq (R_2 \setminus R_3) \circ R_1$.

Man zeige ferner, daß die umgekehrten Inklusionen in e) bis h) im allgemeinen falsch sind.

28. Es sei M eine beliebige Menge, $R \subseteqq M \times M$, R reflexiv in M und R transitiv. Es sei T die für $x, y \in M$ durch

$$xTy :\Leftrightarrow xRy \wedge yRx$$

definierte binäre Relation in M. Man beweise:

a) T ist Äquivalenzrelation in M.
b) Es bezeichne $[x]$ die Restklasse des Elements $x \in M$ modulo T. Dann gilt:

$$xRy \wedge x_1 \in [x] \wedge y_1 \in [y] \Rightarrow x_1 R y_1$$

(d. h., stehen x und y in der Relation R, so auch alle Elemente $x_1 \in [x]$ und $y_1 \in [y]$).

c) Daher wird durch

$$[x]\bar{R}[y] :\Leftrightarrow xRy \quad (x, y \in M)$$

eine binäre Relation in M/T definiert. Diese ist eine reflexive teilweise Ordnung in M/T.

29. Es seien M_1, M_2 beliebige nichtleere Mengen, und es bezeichne $\mathfrak{M}$ das System aller Paare (X, Y) mit $X \subseteqq M_1$, $Y \subseteqq M_2$. In $\mathfrak{M}$ werde die folgende binäre Relation betrachtet:

$$(X_1, Y_1) \leqq (X_2, Y_2) :\Leftrightarrow X_1 \cup Y_1 \subseteqq X_2 \cup Y_2 \quad (X_1, X_2 \subseteqq M_1;\ Y_1, Y_2 \subseteqq M_2).$$

a) Man zeige, daß $\leqq$ eine Quasiordnung in $\mathfrak{M}$ ist.
b) Wann und nur wann ist $\leqq$ eine teilweise Ordnung?
c) Man führe in diesem Beispiel die Überlegungen der Aufgabe 28 durch.
d) Man illustriere das Verfahren am Beispiel

$$M_1 = \{0, 1, 2, 3\}, \quad M_2 = \{0, 2, 4\}.$$

30. Es sei M eine beliebige nichtleere Menge, R eine reflexive teilweise Ordnung in M. Für ein beliebiges $y \in M$ sei

$$R_y := \{x : x \in M \wedge xRy\}.$$

Ferner sei

$$\mathfrak{M}_R := \{R_y : y \in M\}.$$

Man beweise:

a) Die Zuordnung

$$F(y) := R_y \quad (y \in M)$$

ist eine 1-1-Abbildung von M auf $\mathfrak{M}_R$, und es gilt bei beliebigem $y_1, y_2 \in M$

$$y_1 R y_2 \Leftrightarrow F(y_1) \subseteqq F(y_2).$$

b) Für jedes $x_0 \in M$ ist

$$R_{x_0} = \bigcap \{R_y : y \in M \wedge x_0 \in R_y\}.$$

c) Die Relation R ist genau dann linear, wenn für beliebige $y_1, y_2 \in M$ ein $y_3 \in M$ existiert, so daß

$$R_{y_1} \cup R_{y_2} = R_{y_3}$$

gilt (d. h., wenn $\mathfrak{M}_R$ mit zwei Mengen X_1, X_2 stets auch deren Vereinigung enthält).

31. Nach Aufgabe 30 besitzt für jede reflexive teilweise Ordnung R in M das System $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_R$ der Mengen

$$R_y := \{x : x \in M \wedge xRy\}$$

die folgenden Eigenschaften:

(i) Für jedes $x_0 \in M$ gilt
$\bigcap \{X : X \in \mathfrak{M} \wedge x_0 \in X\} \in \mathfrak{M}$.

(ii) Zu jedem $X_0 \in \mathfrak{M}$ existiert genau ein $x_0 \in M$ mit
$X_0 = \bigcap \{X : X \in \mathfrak{M} \wedge x_0 \in X\}$.

Man zeige, daß umgekehrt zu jedem Mengensystem $\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{P}(M)$, das die Eigenschaften (i) und (ii) besitzt, genau eine reflexive teilweise Ordnung R existiert, so daß $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_R$ ist. Diese teilweise Ordnung ist genau dann eine totale Ordnung, wenn $\mathfrak{M}$ Vereinigungs-abgeschlossen ist, d. h., zusätzlich die folgende Eigenschaft besitzt:

(iii) $\bigwedge_{X_1, X_2} (X_1 \in \mathfrak{M} \wedge X_2 \in \mathfrak{M} \Rightarrow X_1 \cup X_2 \in \mathfrak{M})$.

Anleitung: Man zeigt, daß die durch

$$xRy :\Leftrightarrow x \in \bigcap \{X : X \in \mathfrak{M} \wedge y \in X\}$$

definierte Relation das Verlangte leistet.

Bemerkung: Das in den Aufgaben 30 und 31 erhaltene Resultat kann als Gegenstück zum Hauptsatz über Äquivalenzrelationen für teilweise und totale Ordnungen angesehen werden.

32. Es sei R_1 eine binäre Relation in M_1, R_2 eine binäre Relation in M_2. Unter $R_1 * R_2$ werde die folgendermaßen definierte Relation in $M_1 \times M_2$ verstanden:

$$(x_1, y_1) R_1 * R_2 (x_2, y_2) :\Leftrightarrow x_1 R_1 x_2 \wedge y_1 R_2 y_2 \quad (x_1, x_2 \in M_1;\, y_1, y_2 \in M_2).$$

Man beweise:

a) Ist R_1 reflexiv in M_1, R_2 reflexiv in M_2, so ist $R_1 * R_2$ reflexiv in $M_1 \times M_2$.

b) Sind R_1 und R_2 transitiv, so ist auch $R_1 * R_2$ transitiv.

c) Sind R_1 und R_2 symmetrisch, so ist auch $R_1 * R_2$ symmetrisch.

d) Sind R_1 und R_2 antisymmetrisch, so ist auch $R_1 * R_2$ antisymmetrisch.

e) Ist R_1 Äquivalenzrelation in M_1, R_2 Äquivalenzrelation in M_2, so ist $R_1 * R_2$ Äquivalenzrelation in $M_1 \times M_2$. Man beschreibe das Restsystem $M_1 \times M_2/R_1 * R_2$.

f) Ist R_1 reflexive teilweise Ordnung in M_1, R_2 reflexive teilweise Ordnung in M_2, so ist $R_1 * R_2$ reflexive teilweise Ordnung in $M_1 \times M_2$. Gilt Analoges für totale Ordnungen?

33. Es sei M_1 die Menge aller Zweierpotenzen $\{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots\}$, R_1 die übliche $\leqq$-Relation in $\mathbf{N}$, eingeschränkt auf M_1. Analog sei M_2 die Menge aller Dreierpotenzen $\{3^0, 3^1, 3^2, 3^3, \ldots\}$, R_2 die Einschränkung der Relation „$\leqq$" auf M_2. Dann sind R_1, R_2 totale Ordnungen in M_1 bzw. M_2. Man beweise, daß folgendes gilt:

a) Die Abbildung

$$\Phi(x, y) := x \cdot y \quad (x \in M_1, y \in M_2)$$

ist eine 1-1-Abbildung von $M_1 \times M_2$ in $\mathbf{N}$ (genauer: auf die Menge M aller Produkte $2^i \cdot 3^j$ mit $i, j \in \mathbf{N}$).

b) $(x_1, y_1)\, R_1 * R_2\, (x_2, y_2) \Leftrightarrow \Phi(x_1, y_1) \mid \Phi(x_2, y_2)$
(vgl. Aufgabe 32).

c) Die Teilbarkeitsrelation ist in M keine totale Ordnung.

d) Folglich (!) ist auch $R_1 * R_2$ keine totale Ordnung in $M_1 \times M_2$.

Bemerkung: Die Bedingungen a) und b) besagen, daß die Abbildung Φ ein Isomorphismus der durch $R_1 * R_2$ teilweise geordneten Menge $M_1 \times M_2$ auf die durch die Einschränkung der Teilbarkeitsrelation teilweise geordnete Menge M ist. In d) soll allgemein gezeigt werden, daß von zwei isomorphen teilweise geordneten Mengen entweder beide total geordnet sind oder keine total geordnet ist.

34. Es sei M eine nichtleere Menge, die mindestens drei Elemente enthalte, und R eine irreflexive totale Ordnung in M. Mit ζ_R werde die folgende ternäre Relation in M bezeichnet:

$$(x, y, z) \in \zeta_R :\Leftrightarrow (xRy \wedge yRz) \vee (zRy \wedge yRx) \quad (x, y, z \in M).$$

Man nennt ζ_R die von R erzeugte *Zwischenrelation*. Offenbar ist $\zeta_R = \zeta_{R^{-1}}$. Man beweise, daß für ζ_R folgende Eigenschaften gelten:

a) $(x, y, z) \in \zeta_R \Rightarrow x \neq y \neq z \neq x$,

b) $(x, y, z) \in \zeta_R \Rightarrow (z, y, x) \in \zeta_R$,

c) $(x, y, z) \in \zeta_R \Rightarrow (x, z, y) \notin \zeta_R$,

d) $x \neq y \neq z \neq x \Rightarrow (x, y, z) \in \zeta_R \vee (y, z, x) \in \zeta_R \vee (z, x, y) \in \zeta_R$,

e) $(x, y, z) \in \zeta_R \wedge u \neq x \wedge u \neq y \wedge u \neq z \Rightarrow (x, y, u) \in \zeta_R \vee (u, y, z) \in \zeta_R$.

35. * Es sei nun umgekehrt ζ eine ternäre Relation in M, die folgende Eigenschaften besitzt (eine *abstrakte Zwischenrelation*):

(i) $(x, y, z) \in \zeta \Rightarrow x \neq y \neq z \neq x$,

(ii) $(x, y, z) \in \zeta \Rightarrow (z, y, x) \in \zeta$,

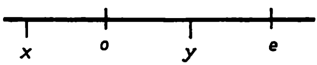
(iii) $(x, y, z) \in \zeta \Rightarrow (x, z, y) \notin \zeta$,

(iv) $x \neq y \neq z \neq x \Rightarrow (x, y, z) \in \zeta \vee (y, z, x) \in \zeta \vee (z, x, y) \in \zeta$,

(v) $(x, y, z) \in \zeta \wedge u \neq x \wedge u \neq y \wedge u \neq z \Rightarrow (x, y, u) \in \zeta \vee (u, y, z) \in \zeta$.

Es seien ferner o, e Elemente aus M mit $o \neq e$. Wir betrachten die folgende binäre Relation $<_{(o,e)}$ in M (man veranschauliche sich die Relation $<_{(o,e)}$ an einem Zahlenstrahl).

$$\begin{aligned} x <_{(o,e)} y :\Leftrightarrow & \Big[(x, o, e) \in \zeta \wedge \Big[\big((y, o, e) \in \zeta \wedge (x, y, o) \in \zeta\big) \\ & \qquad\qquad \vee y = o \vee (x, o, y) \in \zeta\Big]\Big] \\ & \vee \big[x = o \wedge [(o, y, e) \in \zeta \vee y = e \vee (o, e, y) \in \zeta]\big] \\ & \vee \Big[(o, x, e) \in \zeta \wedge \Big[\big((o, y, e) \in \zeta \wedge (o, x, y) \in \zeta\big) \\ & \qquad\qquad \vee y = e \vee (x, e, y) \in \zeta\Big]\Big] \\ & \vee [x = e \wedge (o, e, y) \in \zeta] \\ & \vee [(o, e, x) \in \zeta \wedge (e, x, y) \in \zeta]. \end{aligned}$$



Man beweise:

a) $<_{(o,e)}$ ist eine irreflexive totale Ordnung in M.

b) Ist $\zeta = \zeta_R$, wobei R eine gegebene irreflexive totale Ordnung in M ist, so stimmt $<_{(o,e)}$ im Fall $(o, e) \in R$ mit R und im Fall $(o, e) \notin R$ $\big(\Leftrightarrow (e, o) \in R\big)$ mit R^{-1} überein.

c) $\zeta_{<_{(o,e)}}$ stimmt mit ζ überein.

Anleitung: Es empfiehlt sich, aus (i) bis (v) zunächst die folgenden weiteren Eigenschaften von ζ herzuleiten:

(vi) $(x, y, z) \in \zeta \wedge (y, z, u) \in \zeta \Rightarrow (x, z, u) \in \zeta$,

(vii) $(x, y, z) \in \zeta \wedge (y, z, u) \in \zeta \Rightarrow (x, y, u) \in \zeta$,

(viii) $(x, y, z) \in \zeta \wedge (x, z, u) \in \zeta \Rightarrow (y, z, u) \in \zeta$,

(ix) $(x, y, z) \in \zeta \wedge (x, z, u) \in \zeta \Rightarrow (x, y, u) \in \zeta$.

Entsprechend der Definition von $<_{(o,e)}$ erfordert der Beweis eine große Anzahl von Fallunterscheidungen.

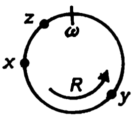
Zusatzaufgabe: Unter Voraussetzung von (i) bis (iv) gilt:

$$\begin{aligned} \text{(v)} & \Leftrightarrow \text{(vi)} \wedge \text{(viii)} \\ & \Leftrightarrow \text{(vii)} \wedge \text{(ix)}. \end{aligned}$$

36. Es sei M eine nichtleere Menge, die wenigstens drei Elemente enthalte, und R eine irreflexive totale Ordnung in M. Es sei ferner $\omega \notin M$ und ϱ_R die folgende ternäre Relation in $N = M \cup \{\omega\}$:

$$\begin{aligned}\varrho_R := &\{(x, y, z) \colon x, y, z \in M \wedge (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R\}\\ &\cup \{(x, y, z) \colon x, y, z \in M \wedge (y, z) \in R \wedge (z, x) \in R\}\\ &\cup \{(x, y, z) \colon x, y, z \in M \wedge (z, x) \in R \wedge (x, y) \in R\}\\ &\cup \{(x, y, \omega) \colon x, y \in M \wedge (x, y) \in R\}\\ &\cup \{(x, \omega, y) \colon x, y \in M \wedge (y, x) \in R\}\\ &\cup \{(\omega, x, y) \colon x, y \in M \wedge (x, y) \in R\}.\end{aligned}$$

Man nennt ϱ_R die von R erzeugte *zyklische Ordnung* (vgl. Abb.).



Man beweise, daß ϱ_R folgende Eigenschaften besitzt (a, b, c, d sind jetzt beliebige Elemente aus $N = M \cup \{\omega\}$):

a) $(a, b, c) \in \varrho_R \Rightarrow a \neq b \neq c \neq a$,

b) $(a, b, c) \in \varrho_R \Rightarrow (a, c, b) \notin \varrho_R$,

c) $(a, b, c) \in \varrho_R \Rightarrow (b, c, a) \in \varrho_R$,

d) $a \neq b \neq c \neq a \Rightarrow (a, b, c) \in \varrho_R \vee (b, a, c) \in \varrho_R$,

e) $(a, b, c) \in \varrho_R \wedge d \neq a \wedge d \neq b \wedge d \neq c \Rightarrow (a, b, d) \in \varrho_R \vee (d, b, c) \in \varrho_R$.

37. * Es sei nun umgekehrt ϱ eine in der Menge N definierte ternäre Relation, die folgende Eigenschaften besitzt (eine *abstrakte zyklische Ordnung*):

(i) $(a, b, c) \in \varrho \Rightarrow a \neq b \neq c \neq a$,

(ii) $(a, b, c) \in \varrho \Rightarrow (a, c, b) \notin \varrho$,

(iii) $(a, b, c) \in \varrho \Rightarrow (b, c, a) \in \varrho$,

(iv) $a \neq b \neq c \neq a \Rightarrow (a, b, c) \in \varrho \vee (b, a, c) \in \varrho$,

(v) $(a, b, c) \in \varrho \wedge d \neq a \wedge d \neq b \wedge d \neq c \Rightarrow (a, o, d) \in \varrho \vee (d, b, c) \in \varrho$.

Es sei ferner ω ein beliebiges, aber festes Element aus N. Wir betrachten die folgende binäre Relation $<_\omega$ in $M = N \setminus \{\omega\}$:

$$x <_\omega y :\Leftrightarrow (x, y, \omega) \in \varrho \quad (x, y \in M).$$

Man beweise:

a) $<_\omega$ ist eine irreflexive totale Ordnung in M.

b) Ist $\varrho = \varrho_R$, wobei R eine gegebene irreflexive totale Ordnung in M ist und ω das bei Bildung von N zu M hinzugenommene Element, so stimmt $<_\omega$ mit R überein.

c) $\varrho_{<_\omega}$ stimmt mit ϱ überein.

Anleitung: Es empfiehlt sich, aus (i) bis (v) zunächst die folgende weitere Eigenschaft von ϱ herzuleiten:

(vi) $(a, b, c) \in \varrho \wedge (b, d, c) \in \varrho \Rightarrow (a, b, d) \in \varrho \wedge (a, d, c) \in \varrho$.

Zusatzaufgabe: Man zeige, daß unter Voraussetzung von (i) bis (iv) folgendes gilt:

$$(\mathrm{v}) \Leftrightarrow (\mathrm{vi}).$$

38. * Es sei N eine nichtleere Menge und ϱ eine zyklische Ordnung in N (vgl. Aufgabe 37). Man zeige, daß dann auch die durch

$$\varrho^{-1} := \{(a, b, c) : (b, a, c) \in \varrho\}$$

definierte Relation eine zyklische Ordnung in N ist, die man die zu ϱ inverse zyklische Ordnung nennt. Man zeige, daß für eine beliebige irreflexive totale Ordnung R stets

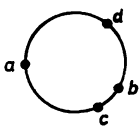
$$\varrho_{R^{-1}} = \varrho_R^{-1}$$

gilt (vorausgesetzt, daß ϱ_R und $\varrho_{R^{-1}}$ beide in $N = M \cup \{\omega\}$ mit $\omega \notin M$ gebildet werden).

39. * Es sei N eine nichtleere Menge, die wenigstens vier Elemente enthalte, und ϱ eine abstrakte zyklische Ordnung in N. Mit τ_ϱ bezeichnen wir die folgende quaternäre Relation in N:

$$(a, b; c, d) \in \tau_\varrho :\Leftrightarrow [(a, b, c) \in \varrho \wedge (b, a, d) \in \varrho] \vee [(b, a, c) \in \varrho \wedge (a, b, d) \in \varrho]$$

(gelesen: a, b *trennt* c, d).



Offenbar ist

$$\tau_\varrho = \tau_{\varrho^{-1}}.$$

Man zeige, daß τ_ϱ folgende Eigenschaften besitzt:

a) $(a, b; c, d) \in \tau_\varrho \Rightarrow a, b, c, d$ paarweise verschieden,

b) $(a, b; c, d) \in \tau_\varrho \Rightarrow (b, a; c, d) \in \tau_\varrho \wedge (c, d; a, b) \in \tau_\varrho$,

c) $(a, b; c, d) \in \tau_\varrho \Rightarrow (a, c; b, d) \notin \tau_\varrho$,

d) a, b, c, d paarweise verschieden
$$\Rightarrow (a, b; c, d) \in \tau_\varrho \vee (c, a; b, d) \in \tau_\varrho \vee (b, c; a, d) \in \tau_\varrho,$$
e) $(a, b; c, d) \in \tau_\varrho \wedge (b, c; d, e) \in \tau_\varrho \Rightarrow (c, d; e, a) \in \tau_\varrho$.

40. * Es sei nun umgekehrt τ eine *abstrakte Trennbarkeitsrelation* in N, d. h. eine quaternäre Relation in N, die die Eigenschaften a) bis e) aus Aufgabe 39 erfüllt, und ω ein beliebiges festes Element aus N. Dann wird durch

$$(x, y, z) \in \zeta_\tau :\Leftrightarrow (x, z; y, \omega) \in \tau \quad (x, y, z \in M = N \setminus \{\omega\}),$$

eine abstrakte Zwischenrelation in M definiert (vgl. Aufgabe 35). Die von dieser Zwischenrelation induzierten zueinander inversen irreflexiven totalen Ordnungen erzeugen zueinander inverse zyklische Ordnungen, die ihrerseits gemäß Aufgabe 39 zu τ zurückführen.

41. Es sei M eine beliebige nichtleere Menge und R eine reflexive teilweise Ordnung in M. Es sei ferner A eine nichtleere Teilmenge von M und $x \in M$. Dann definiert man:

(i) x ist eine *obere Schranke* von A bezüglich R
$$:\Leftrightarrow \bigwedge_y (y \in A \Rightarrow yRx),$$
(ii) x ist eine *untere Schranke* von A bezüglich R
$$:\Leftrightarrow \bigwedge_y (y \in A \Rightarrow xRy),$$
(iii) x ist eine *obere Grenze* von A bezüglich R
$$:\Leftrightarrow x \text{ ist obere Schranke von } A \text{ bezüglich } R \wedge \bigwedge_y (y \text{ obere Schranke von } A \Rightarrow xRy),$$
(iv) x ist eine *untere Grenze* von A bezüglich R
$$:\Leftrightarrow x \text{ ist untere Schranke von } A \text{ bezüglich } R \wedge \bigwedge_y (y \text{ untere Schranke von } A \Rightarrow yRx),$$
(v) x ist ein *größtes Element* von A bezüglich R
$$:\Leftrightarrow x \in A \wedge \bigwedge_y (y \in A \Rightarrow yRx),$$
(vi) x ist ein *kleinstes Element* von A bezüglich R
$$:\Leftrightarrow x \in A \wedge \bigwedge_y (y \in A \Rightarrow xRy),$$
(vii) x ist ein *maximales Element* von A bezüglich R
$$:\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg \bigvee_y (y \in A \wedge y \neq x \wedge xRy),$$
(viii) x ist ein *minimales Element* von A bezüglich R
$$:\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg \bigvee_y (y \in A \wedge y \neq x \wedge yRx).$$

Statt „größtes Element", „kleinstes Element", „obere Grenze" und „untere Grenze" sagt man auch „*Maximum*", „*Minimum*", „*Supremum*", „*Infimum*".

Offenbar sind die Begriffe (ii), (iv), (vi), (viii) in dem Sinne „*dual*" zu den Begriffen (i), (iii), (v), (vii), daß bei Übergang zu R^{-1} sich die Begriffe paarweise vertauschen.

Man beweise:

a) x obere Schranke von A bezüglich $R \wedge xRx'$
$\Rightarrow x'$ obere Schranke von A bezüglich R.

b) x größtes Element von A bezüglich R
$\Rightarrow x$ obere Grenze von A bezüglich R.

c) x größtes Element von A bezüglich R
$\Rightarrow x$ maximales Element von A bezüglich R.

d) x_1 obere Grenze von A bezüglich R
$\wedge\, x_2$ obere Grenze von A bezüglich $R \Rightarrow x_1 = x_2$.

e) x_1 größtes Element von A bezüglich R
$\wedge\, x_2$ größtes Element von A bezüglich $R \Rightarrow x_1 = x_2$.

f) Man formuliere die dualen Sätze.

Aus d) und e) folgt, daß das Supremum (Infimum) und das Maximum (Minimum), wenn sie existieren, eindeutig bestimmt sind, so daß hier der Gebrauch des bestimmten Artikel (*das* Supremum usw.) gerechtfertigt ist. Bei oberer Schranke und maximalem Element ist das im allgemeinen nicht der Fall, so daß man hier den unbestimmten Artikel (*eine* obere Schranke, *ein* maximales Element) verwenden muß.

g) Man belege durch Beispiele, daß teilweise Ordnungen existieren, bezüglich denen Mengen ohne obere Schranken, mit oberen Schranken, aber ohne obere Grenze, mit oberer Grenze, aber ohne Maximum, mit mehreren maximalen Elementen existieren.

h) Ist R eine totale Ordnung, so fallen die Begriffe „größtes Element" und „maximales Element" zusammen (analog „kleinstes Element" und „minimales Element").

i) Bei einer totalen Ordnung R enthält jede nichtleere *endliche* Teilmenge ein größtes (und ein kleinstes) Element.

42. * Es sei M eine beliebige nichtleere Menge, R eine teilweise Ordnung in M. Man sagt, daß M bezüglich R einen *Verband* bildet, wenn in M zu beliebigen Elementen $x, y \in M$ für die Zweiermenge $\{x, y\}$ das Supremum und das Infimum existieren. Das Studium dieser Strukturen bildet den Gegenstand eines eigenen Gebietes der Mathematik, der sogenannten Verbandstheorie. Spezielle und besonders wichtige Verbände sind die sogenannten *Booleschen Algebren*.

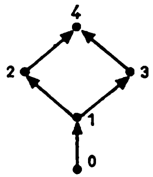
a) Man verifiziere, daß die Menge $\mathfrak{P}(E)$ aller Teilmengen einer gegebenen Menge E bezüglich der Inklusion „$\subseteq$" einen Verband bildet. Dieser Verband ist sogar *vollständig*, d. h., in $\mathfrak{P}(E)$ existieren nicht nur zu allen Zweiermengen $\{X_1, X_2\}$ mit $X_1, X_2 \in \mathfrak{P}(E)$ (also $X_1, X_2 \subseteq E$) das Supremum und das Infimum, sondern sogar zu jedem Teilsystem $\mathfrak{X}$ von $\mathfrak{P}(E)$. Was ist in diesem Fall das Supremum bzw. Infimum?

b) Man konstruiere sämtliche Typen von Verbänden aus 1, 2, 3, 4, 5 Elementen.

Bemerkung: Endliche Verbände und allgemeine teilweise geordnete Mengen veranschaulicht man sich gern durch ihre sogenannten *Hasse-Diagramme*. Beispielsweise symbolisiert das folgende Diagramm die teilweise Ordnung $\{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$ in der Menge $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, d. h. die reflexiv-transitive Hülle der Relation

$$\{(0,1), (1,2), (1,3), (2,4), (3,4)\}$$

aus allen den Paaren (a, b), zu denen im Diagramm ein Pfeil von a nach b existiert.



c) Man zeige, daß die Menge $E(M)$ aller Äquivalenzrelationen in M bezüglich der Inklusion einen Verband bildet. Infimum zweier Äquivalenzrelationen R_1, R_2 in M ist die Äquivalenzrelation (!) $R_1 \cap R_2$, Supremum die Äquivalenzrelation $\omega(R_1 \cup R_2)$ (vgl. Aufgabe 25).

d) Man beweise:

$$\begin{aligned}&M_1 \text{ Verband bezüglich } R_1 \wedge M_2 \text{ Verband bezüglich } R_2\\ &\Rightarrow M_1 \times M_2 \text{ Verband bezüglich } R_1 * R_2\end{aligned}$$

(vgl. Aufgabe 32).

43. Es sei E eine beliebige Grundmenge. Dann kann man in der Menge $\mathfrak{P}(E) \times \mathfrak{P}(E)$ auf mannigfache Weise binäre Operationen einführen, z. B.

$$(M_1, N_1)\, o_1(M_2, N_2) := (M_1 \cap M_2, N_1 \cap N_2),$$
$$(M_1, N_1)\, o_2(M_2, N_2) := (M_1 \cap M_2, N_1 \cup N_2),$$
$$(M_1, N_1)\, o_3(M_2, N_2) := (M_1 \cup N_2, N_1 \cap M_2),$$
$$(M_1, N_1)\, o_4(M_2, N_2) := (M_1 \cup N_1, M_2 \cap N_2).$$

Man studiere diese und analoge Operationen (auch solche mit „$\setminus$" und „Δ") auf ihre Eigenschaften.

44. Es sei o_1 eine binäre Operation in M_1, o_2 eine binäre Operation in M_2. Mit $o_{1,2}$ sei die folgendermaßen definierte Operation in $M_1 \times M_2$ bezeichnet:

$$(x_1, y_1)\, o_{1,2}(x_2, y_2) := (x_1 o_1 x_2, y_1 o_2 y_2) \quad (x_1, x_2 \in M_1;\ y_1, y_2 \in M_2).$$

Man beweise:

a) Mit o_1, o_2 ist auch $o_{1,2}$ kommutativ.

b) Mit o_1, o_2 ist auch $o_{1,2}$ assoziativ.

c) Mit o_1, o_2 ist auch $o_{1,2}$ idempotent.

d) Ist e_1 neutral für o_1 und e_2 neutral für o_2, so ist (e_1, e_2) neutral für $o_{1,2}$.

e) Ist o_1 distributiv bezüglich o_1' und o_2 distributiv bezüglich o_2', so ist $o_{1,2}$ distributiv bezüglich $o_{1,2}'$.

f) Man nenne Beispiele mit $M_1 = M_2 = \mathbf{R}$.

45. Es sei M eine beliebige nichtleere Menge und o eine binäre Operation in M. In der Menge M^N aller Abbildungen von N in M werde die folgende Operation $\bar{o}$ betrachtet:

$$(f\bar{o}g)(x) := f(x)og(x) \quad (x \in N; f, g \in M^N).$$

Wie übertragen sich die Eigenschaften von o auf $\bar{o}$?

46. Für beliebiges $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ sei $o_{\alpha,\beta}$ die durch

$$xo_{\alpha,\beta}y := \alpha x + \beta y \quad (x, y \in \mathbf{R})$$

definierte binäre Operation in $\mathbf{R}$. Man untersuche $o_{\alpha,\beta}$ auf Assoziativität, Kommutativität, links- bzw. rechtsseitige Distributivität in bezug auf Addition, Multiplikation sowie $o_{\gamma,\delta}$ $(\gamma, \delta \in \mathbf{R})$, Monotonie bezüglich $\leqq$ und $<$, Existenz von links- bzw. rechtsseitig neutralen Elementen.

Anmerkung: Man beachte, daß die Antwort wesentlich von der Wahl der Parameter α, β abhängt!

47. In der Menge aller Paare (x, y) von reellen Zahlen werden die folgenden Operationen betrachtet:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Man untersuche diese Operationen auf Kommutativität, Assoziativität, Distributivität, Existenz neutraler Elemente, Kürzbarkeit und Umkehrbarkeit.

48. * Man beweise die folgenden Behauptungen:

a) M endlich $(R) \wedge N \subseteqq M \Rightarrow N$ endlich (R),

b) M endlich $(R) \Rightarrow \mathfrak{P}(M)$ endlich (R),

c) M endlich $(R) \wedge N$ endlich $(R) \Rightarrow M^N$ endlich (R),

d) M endlich $(D) \wedge N \subseteqq M \Rightarrow N$ endlich (D),

e) M endlich $(D) \Rightarrow M \cup \{x\}$ endlich (D),

f) M unendlich $(D) \Rightarrow \mathfrak{P}(M)$ unendlich (D),

g) M unendlich $(D) \wedge N \neq \emptyset \Rightarrow M \times N$ unendlich (D).

Das System der natürlichen Zahlen

Kontrollfragen

1. Was beinhaltet das Peanosche Axiomensystem?
2. Wie lautet die Beweismethode der vollständigen Induktion und die der ordnungstheoretischen Induktion?
3. Welches ist die Problematik der induktiven Definitionen?
4. Wie lauten die Rekursionsgleichungen zur Definition der Addition, der Multiplikation, der Potenzierung, der allgemeinen Summe und des allgemeinen Produkts?
5. Wie lauten die wichtigsten Rechengesetze für die Addition, Multiplikation und Potenzierung, und wie kann man diese beweisen?
6. Wie wird die Ordnung der natürlichen Zahlen über die Addition eingeführt, und welches sind die wichtigsten Eigenschaften dieser Ordnungsrelation?
7. Was versteht man unter $n!$, was unter $\binom{n}{k}$?
8. Man gebe einige Rechengesetze für die Binomialkoeffizienten an.
9. Welche wichtigen Anzahlbeziehungen für endliche Mengen gibt es?
10. Wie ist die Teilbarkeitsrelation definiert und welche elementaren Eigenschaften besitzt sie; welche Analogien bestehen zur $\leqq$-Relation, welche zur Inklusion von Mengen?
11. Was ist Division mit Rest?
12. Was versteht man unter dem größten gemeinsamen Teiler und dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen zweier natürlicher Zahlen, wie steht es mit deren Existenz, und wie kann man sie berechnen?
13. Was sind die wichtigsten Eigenschaften des größten gemeinsamen Teilers und des kleinsten gemeinsamen Vielfachen?
14. Was sind Primzahlen, und welche Rolle spielen sie im System der natürlichen Zahlen?
15. Was bedeutet die Schreibweise $a \equiv b \bmod m$? Welche Eigenschaften besitzt diese Relation?
16. Was versteht man unter dem Positionsprinzip der Zahldarstellung? Auf welchem allgemeinen Satz beruht die Dezimaldarstellung und allgemeiner die g-adische Darstellung der natürlichen Zahlen? Wie spiegeln sich in der systematischen Zahldarstellung die Grundrechenarten wider?

Aufgaben

1. Man zeige, daß es genau eine binäre Operation „·" im Bereich der natürlichen Zahlen gibt, die den folgenden Rekursionsgleichungen genügt:

$$m \cdot 0 = 0, \quad m \cdot \sigma(n) = (m \cdot n) + m.$$

2. Man beweise die folgenden Rechengesetze für die Multiplikation natürlicher Zahlen (unter Benutzung der Rechengesetze für die Addition!):

   a) $0 \cdot m = 0$, b) $1 \cdot m = m$, c) $(n_1 \cdot n_2) \cdot n_3 = n_1 \cdot (n_2 \cdot n_3)$,

   d) $n_1 \cdot n_2 = n_2 \cdot n_1$, e) $(n_1 + n_2) \cdot n_3 = n_1 \cdot n_3 + n_2 \cdot n_3$.

3. Man beweise die folgenden Monotoniegesetze für die Addition bzw. Multiplikation natürlicher Zahlen:

   a) $n_1 < n_2 \Rightarrow n_1 + m < n_2 + m$,

   b) $n_1 < n_2 \wedge m \neq 0 \Rightarrow n_1 \cdot m < n_2 \cdot m$.

4. Man beweise auf der Grundlage der Rekursionsgleichungen für die Potenz die folgenden Potenzgesetze:

   a) $m^{n_1+n_2} = m^{n_1} \cdot m^{n_2}$, b) $m^{n_1 \cdot n_2} = (m^{n_1})^{n_2}$, c) $(m_1 \cdot m_2)^n = m_1^n \cdot m_2^n$.

5. Man beweise die folgenden Monotoniegesetze für die Potenzoperation:

   a) $m_1 \leqq m_2 \Rightarrow m_1^n \leqq m_2^n$, b) $m_1 < m_2 \wedge n \neq 0 \Rightarrow m_1^n < m_2^n$,

   c) $n_1 \leqq n_2 \wedge m \neq 0 \Rightarrow m^{n_1} \leqq m^{n_2}$, d) $n_1 < n_2 \wedge m > 1 \Rightarrow m^{n_1} < m^{n_2}$.

6. Man bestimme alle Paare (x, y) von natürlichen Zahlen, für die folgendes gilt:

   a) $x + y = x \cdot y$, b) $x + y = x^y$, c) $x \cdot y = x^y$, d) $x^y = y^x$.

7. Man beweise:

   a) $\sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu + b_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu$.

   b) $a \cdot \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} (a \cdot a_\nu)$.

   c) Für jedes $n \in \mathbf{N}$ ist $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$.

   d) Für beliebiges $m, n \in \mathbf{N}$ ist $\sum_{\nu=0}^{n} \binom{m+\nu}{\nu} = \binom{m+n+1}{n}$.

   e) Für beliebiges $n \in \mathbf{N}$ ist $\prod_{j=0}^{n} (2^{2^j} + 1) = 2^{2^{n+1}} - 1$.

   f) Für beliebiges $n \in \mathbf{N}$ ist $\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu}^2 = \binom{2n}{n}$.

   g) Man berechne $\sum_{\nu=0}^{n} \nu^2$.

   h) Man beweise das Additionstheorem für die Binomialkoeffizienten.

8. Bekanntlich gilt für die Vereinigung endlicher (nicht notwendig disjunkter) Mengen M, N die folgende Anzahlformel:

   $$|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap N|.$$

   a) Man verallgemeinere diese Formel auf die Vereinigung von k Mengen $M_1, \ldots, M_k$.

b) Mittels des Resultats aus a) bestimme man die Anzahl aller Permutationen der Menge $M = \{1, \ldots, n\}$, die keinen „Fixpunkt" haben, d. h., für die kein i mit $1 \leqq i \leqq n$ und $f(i) = i$ existiert.

Anleitung: Die Menge P aller dieser Permutationen ist offenbar gleich der Menge $\mathfrak{T}(M) \setminus (P_1 \cup \cdots \cup P_n)$, wobei P_i die Menge aller der Permutationen ist, die das Element i als Fixpunkt haben ($i = 1, \ldots, n$). Man zeige, daß $|P_i| = (n-1)!$ ist.

c) Wie viele Permutationen von M gibt es, bei denen genau $1, \ldots, k$ $(1 \leqq k \leqq n)$ fest bleiben?

d) Wie viele Permutationen von M gibt es, die genau k Fixpunkte haben?

9. Bei Anzahluntersuchungen leistet häufig das folgende sogenannte *Dirichletsche Schubfachprinzip* gute Dienste:

Es seien M, N nichtleere endliche Mengen mit $|M| = m > n = |N|$. Es sei ferner F eine beliebige Abbildung von M in N. Dann gibt es wenigstens zwei Elemente $x, y \in M$, so daß $x \neq y$ und $F(x) = F(y)$ ist.

a) Man beweise, daß dies richtig ist.

b) Man suche eine Erklärung für die Bezeichnung „Schubfachprinzip".

10. Man beweise mit Hilfe des Schubfachprinzips, daß folgendes gilt:

a) Unter $n + 1$ natürlichen Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ gibt es immer wenigstens zwei, deren Differenz durch n teilbar ist.

b) Unter k natürlichen Zahlen $a_1, \ldots, a_k$ gibt es stets Zahlen $a_i, \ldots, a_j$ $(1 \leqq i \leqq j \leqq k)$, so daß $a_i + \cdots + a_j$ durch k teilbar ist.

c) Unter $n + 1$ natürlichen Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ mit $0 < a_0 < a_1 < \cdots < a_{n+1} < 2n$ kann man stets drei Zahlen a_i, a_j, a_k finden, so daß $a_i + a_j = a_k$ ist.

d) In einem quadratischen Waldgebiet mit einer Fläche von einem Quadratkilometer stehen 4500 Bäume mit einem Stammdurchmesser von 50 cm. Dann gibt es eine rechteckige Fläche von 10 m × 20 m, die frei von Bäumen ist.

11. * Es sei $U = (u_1, \ldots, u_m)$ eine endliche Folge, deren Glieder nur die Werte $+1$ oder -1 haben. Es sei ferner

$$p(U) := (u_1 \cdot u_2, u_2 \cdot u_3, \ldots, u_{m-1} \cdot u_m, u_m \cdot u_1),$$

$$p^2(U) := p(p(U)),$$

$$p^3(U) := p(p^2(U)), \ldots$$

Man zeige, daß folgendes gilt:

a) Ist $m = 2^n$ $(n \in \mathbf{N})$, so existiert ein $k \leqq 2^n$ mit $p^k(U) = (1, 1, \ldots, 1)$.

b) Ist m ungerade und existieren u_i, u_j mit $u_i = +1$, $u_j = -1$, so gibt es kein k mit $p^k(U) = (1, 1, \ldots, 1)$.

c) Man bestimme für gegebenes $m \in \mathbf{N}$, $m \geqq 1$, sämtliche Folgen $U = (u_1, \ldots, u_m)$, zu denen ein k mit $p^k(U) = (1, 1, \ldots, 1)$ existiert.

12. * Für eine Folge $N = (n_1, \ldots, n_k)$ von natürlichen Zahlen sei

$$d(N) := (|n_2 - n_1|, |n_3 - n_2|, \ldots, |n_k - n_{k-1}|, |n_1 - n_k|),$$
$$d^2(N) := d(d(N)),$$
$$d^3(N) := d(d^2(N)), \ldots$$

Man zeige, daß es im Fall $k = 2^n$ ($n \in \mathbf{N}$) stets ein $s \in \mathbf{N}$ gibt mit

$$d^s(N) = (0, 0, \ldots, 0).$$

Anleitung: Man benutze die Resultate aus Aufgabe 11.

13. Gegeben seien $2n$ natürliche Zahlen mit $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{2n}$. Wie muß man sie zu Paaren zusammenfassen, damit
    a) die Summe der Produkte der Paare maximal wird,
    b) die Summe der Produkte der Paare minimal wird,
    c) das Produkt der Summen der Paare maximal wird,
    d) das Produkt der Summen der Paare minimal wird?

Lösung von a):
Behauptung: Für die Paarungen $a_1a_2 + a_3a_4 + \cdots + a_{2n-1}a_{2n}$ nimmt die Summe den maximalen Wert an.
Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über n. Für $n = 1$ ist die Behauptung trivialerweise richtig. Wir nehmen an, die Behauptung sei für $2n$ Zahlen schon bewiesen, und zeigen, daß sie dann auch für $2(n + 1)$ Zahlen

$$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{2n-1} < a_{2n} < a_{2n+1} < a_{2n+2}$$

richtig ist. Dazu seien i, j beliebige Indizes mit $i \neq j$ und $1 \leqq i, j < 2n + 1$. Dann gilt

$$0 < (a_{2n+1} - a_j)(a_{2n+2} - a_i) = a_{2n+1}a_{2n+2} + a_ia_j - a_ia_{2n+1} - a_ja_{2n+2},$$

also

$$a_ia_j + a_{2n+1}a_{2n+2} > a_ia_{2n+1} + a_ja_{2n+2}.$$

Es ist also „günstiger", in eine Summe die Paarungen $a_ia_j + a_{2n+1}a_{2n+2}$ aufzunehmen, als die Paarungen $a_ia_{2n+1} + a_ja_{2n+2}$. Es brauchen nun nur noch die restlichen Zahlen $a_1, \ldots, a_{2n}$ so gepaart zu werden, daß die Summe maximal wird, und das geschieht nach Induktionsvoraussetzung bei $a_1a_2 + \cdots + a_{2n-1}a_{2n}$.

14. Es seien M, N endliche Mengen mit $|M| = m$, $|N| = n$.
    a) Wie viele Korrespondenzen aus M in N gibt es?
    b) Wie viele Korrespondenzen von M in N gibt es?
    c) Wie viele Abbildungen aus M in N gibt es?
    d) Wie viele Abbildungen von M in N gibt es?
    e) Wie viele Abbildungen von M auf N gibt es?
    f) Wie viele 1-1-Abbildungen aus M in N gibt es?
    g) Wie viele 1-1-Abbildungen von M in N gibt es?
    h) Wie viele 1-1-Abbildungen von M auf N gibt es?

15. Es sei $S(n, k)$ die Anzahl der Zerlegungen einer Menge N von n Elementen in k Klassen ($1 \leqq k \leqq n$).

a) Man zeige, daß die Funktion S den folgenden Rekursionsgleichungen genügt:

$$S(n, 1) = 1, \quad S(n, n) = 1,$$
$$S(n + 1, k + 1) = S(n, k) + (k + 1)\, S(n, k + 1).$$

b) Man stelle nach dem Muster des Pascalschen Dreiecks (3.5.(22)) ein Berechnungsschema für die Funktion $S(n, k)$ für $1 \leqq k \leqq n \leqq 10$ auf.

c) Man zeige für beliebiges n, k mit $1 \leqq k \leqq n$

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu} \binom{k}{\nu} (k - \nu)^n.$$

d) Man bestimme die Anzahl aller Abbildungen von einer Menge M mit m Elementen in eine Menge N mit n Elementen, deren Wertebereich genau k Elemente enthält.

16. a) Man bestimme die Anzahl der Tipmöglichkeiten beim Tele-Lotto („5 aus 35").

b) Man bestimme die Anzahl der Tipmöglichkeiten beim Zahlenlotto („5 aus 90"), die bei einer Ziehung von fünf Zahlen einen Vierer bilden.

c) Man bestimme die Anzahl der Tipmöglichkeiten beim Tele-Lotto, die bei einer Ziehung von fünf Zahlen nur falsche Nummern enthalten.

d) Man bestimme die Anzahl der Tipmöglichkeiten beim Fußball-Toto, bei denen das Zusatzspiel und genau ein weiteres Spiel richtig angekreuzt sind.

17. Ein Studienjahr besteht aus 26 männlichen und 38 weiblichen Studenten, unter denen drei Ehepaare sind. Für die männlichen Studenten stehen sechs 4-Bett-Zimmer, für die Studentinnen zwölf 3-Bettzimmer und für die Ehepaare drei 2-Bettzimmer zur Verfügung.

a) Wie viele verschiedene Einweisungen in die Zimmer sind möglich?

b) Auf wie viele verschiedene Weisen können „Zimmerbesatzungen" gebildet werden?

Hinweis: Man drücke diese Anzahlen mit Hilfe „kombinatorischer Funktionen" aus und berechne sie näherungsweise unter Benutzung der sogenannten Stirlingschen Formel

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

wobei e die Basis der natürlichen Logarithmen ist ($e \approx 2{,}7182$).

18. a) Es sind zehn unterschiedliche elektrische Geräte an fünf unterschiedliche Verteilerwürfel anzuschließen, von denen drei Würfel drei Anschlußmöglichkeiten und zwei Würfel vier Anschlußmöglichkeiten haben. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

b) Bei einem Schießwettkampf gibt jeder Schütze fünf Schüsse auf eine 10er Scheibe ab. Sein Resultat besteht in der Angabe der bei den einzelnen Schüssen erzielten Ringe, wobei es nicht auf die Reihenfolge ankomme, in der die Ringe erzielt werden. Wie viele Resultate sind möglich?

c) Von fünf Fußballspielen soll eine Fernsehübertragung gesendet werden. Es stehen acht Reporter zur Verfügung. Wie viele Möglichkeiten des Einsatzes gibt es?

d) Wie viele 10stellige Zahlen gibt es, in deren Dezimaldarstellung dreimal die Ziffer 1, zweimal die Ziffer 2, zweimal die Ziffer 3, zweimal die Ziffer 4 und einmal die Ziffer 5 auftritt?

e) Auf wie viele Weisen läßt sich die Zahl 30030 als Produkt $a \cdot b$ von zwei natürlichen Zahlen $a, b > 1$ darstellen, auf wie viele Weisen als Produkt von endlich vielen natürlichen Zahlen? Dabei werde von der Reihenfolge und der Klammerung der Faktoren abgesehen.

f) Wie viele Äquivalenzrelationen gibt es in einer Menge von sieben Elementen?

19. a) Es sei n eine beliebige natürliche Zahl. Wie viele Lösungen in positiven natürlichen Zahlen $x_1, \ldots, x_k$ hat die Gleichung

$$x_1 + \cdots + x_k = n?$$

b) Wie viele paarweise nicht kongruente Dreiecke mit ganzzahliger Seitenlänge gibt es, deren Umfang 200 cm ist?

20. a) In der (euklidischen) Ebene seien n Geraden gegeben, von denen keine zwei parallel sind und keine drei durch einen Punkt gehen. In wie viele Teile zerlegen sie die Ebene?

b) Man beweise, daß n Ebenen in allgemeiner Lage (keine zwei sind parallel, keine drei haben eine gemeinsame Gerade, keine vier gehen durch einen Punkt) den Raum in $\frac{1}{6}(n^3 + 5n) + 1$ Teile zerlegen.

21. a) Auf $k + 1$ Feldern, die mit den Zahlen $0, 1, \ldots, k$ bezeichnet sind, liegen wahllos k Marken, die mit $1, \ldots, k$ bezeichnet sind. Ein Feld ist leer. Ein „Zug" besteht darin, daß man eine Marke von einem beliebigen Feld auf das leere Feld legt. In maximal wie vielen Zügen kann man die Marken auf die gleichbezeichneten Felder bringen?

Anmerkung: Es ist die optimale Lösung gesucht, d. h., es ist zu zeigen, daß es eine Anfangsverteilung gibt, bei der man mit weniger Zügen nicht zum Ziel kommt.

b) k Marken, die mit $1, 2, \ldots, k$ bezeichnet sind, liegen in der Reihenfolge $12 \ldots k$ nebeneinander. Eine „Umordnung" bestehe darin, daß eine bestimmte Anzahl von Paaren von Marken ihren Platz vertauscht. Man zeige, daß man im Fall $k \geqq 3$ durch zwei derartige Umordnungen die Reihenfolge $k12 \ldots k-1$ herstellen kann, jedoch eine einzelne Umordnung nicht zum Ziel führt.

22. a) * Gegeben sei eine Menge N von n Jungen und eine Menge M von m Mädchen. Für je k Jungen aus N $(1 \leqq k \leqq n)$ sei die Gesamtzahl der Mädchen aus M, die mit wenigstens einem der k Jungen befreundet sind, mindestens gleich k. Man zeige, daß man jeden Jungen mit einem befreundeten Mädchen verheiraten kann. Man formuliere diesen Satz als Satz über Abbildungen von Mengensystemen.

b) An einem Tanzabend hat jeder der anwesenden Herren mit mindestens einer der anwesenden Damen getanzt und jede der anwesenden Damen mit mindestens einem der anwesenden Herren. Kein Herr hat mit jeder der Damen und keine Dame mit jedem der Herren getanzt. Man zeige, daß es unter den Anwesenden zwei Damen und zwei Herren gibt, so daß jede der beiden Damen mit genau einem der beiden Herren und jeder der beiden Herren mit genau einer der beiden Damen getanzt hat. Man formuliere auch diesen Satz als Satz über Abbildungen.

23. Man zeige:

a) Ein gewöhnliches 8×8-Schachbrett kann mit einem Springer nicht so durchlaufen werden, daß man in der linken oberen Ecke beginnt, in der rechten unteren Ecke endet und auf jedem Feld genau einmal absetzt.

b) Ein 4×5-Schachbrett kann in der unter a) genannten Weise durchlaufen werden.

c) Ein $4 \times n$-Schachbrett kann durch einen Springer nicht so durchlaufen werden, daß man zu jedem Feld genau einmal gelangt und mit dem letzten Zug zum Anfangspunkt zurückgelangt.

24. Auf ein kariertes Papier, dessen Karos Quadrate der Seitenlänge 1 (cm) sind, ist ein Rechteck aus $m \times n$ Karos gezeichnet. Aus den Linien des Quadratnetzes soll ein geschlossener Polygonzug gebildet werden, welcher genau einmal durch jeden Knoten des Netzes geht, der innerhalb oder auf dem Rande des Rechtecks gelegen ist und der das Rechteck nicht verläßt.

a) Für welche Werte von m und n ist dies möglich?

b) Wie lang ist dieser Polygonzug?

c) Welchen Inhalt hat die vom Polygonzug umrandete Fläche?

Anmerkung: Bei b) und c) ist zu beweisen, daß die ermittelten Werte bei allen Polygonzügen dieselben sind.

25. Auf ein kariertes Papier, dessen Karos Quadrate der Seitenlänge 1 (cm) sind, ist ein Rechteck aus $m \times n$ Karos gezeichnet. Aus den Linien des Netzes ist ein einfacher Polygonzug zu bilden, der die linke untere Ecke des Rechtecks mit der rechten oberen Ecke des Rechtecks verbindet und der das Rechteck nicht verläßt.

a) Wie viele derartige Polygonzüge der Länge $m + n$ gibt es?

b) Wie groß ist im Fall $m = n$ die Anzahl derartiger Polygonzüge der Länge $2n$, deren sämtliche Ecken mit Ausnahme von Anfangs- und Endpunkt unterhalb der Diagonalen liegen?

c) Wie groß ist im Fall $m = n$ die Anzahl derartiger Polygonzüge der Länge $2n$, die die Diagonale in genau einem inneren Punkt schneiden?

d) Wie groß ist im Fall $m = n$ die Anzahl derartiger Polygonzüge der Länge $2n$, die die Diagonale in genau einem inneren Punkt berühren (ohne zu schneiden)?

26. * Auf ein kariertes Papier, dessen Karos die Seitenlänge 1 (cm) haben, soll ein geschlossener Polygonzug der Länge $2n$ gezeichnet werden, dessen Seiten Linien des Netzes sind und dessen Anfangs- und Endpunkt in einem festen Knoten des Netzes liegt. Dabei kann der Polygonzug gewisse Knoten des Netzes mehrfach durchlaufen und auch ein und dieselbe Strecke mehrmals enthalten. Auf wie viele Weisen ist das möglich?

Anleitung: Man benutze das Resultat aus Aufgabe 7f).

27. In dem „Liber abaci" des berühmten italienischen Mathematikers LEONARDO VON PISA, der sich auch FIBONACCI („filius Bonacci" = Sohn des Bonacci) nannte, wird folgende Aufgabe behandelt:

„Wie viele Kaninchenpaare werden in jedem Jahr von einem Paar erzeugt?" Dabei wird vorausgesetzt, jedes Kaninchenpaar bringe monatlich ein neues Paar zur Welt, und die Kaninchen würden vom zweiten Monat nach ihrer Geburt an gebären. Man löse diese Aufgabe.
Es bezeichne $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ die durch $u_0 = 0, u_1 = 1, u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ $(n \geqq 0)$ rekursiv definierte Folge der *Fibonaccischen Zahlen* (d. h. die Folge $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$).
Man beweise, daß folgendes gilt:

a) $\sum_{i=1}^{n} u_i + 1 = u_{n+2}$, b) $\sum_{i=1}^{n} u_{2i-1} = u_{2n}$,

c) $\sum_{i=1}^{n} u_{2i} + 1 = u_{2n+1}$, d) $\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = u_n \cdot u_{n+1}$,

e) $u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}$ $(n \geqq 1)$,

f) $u_{2n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2$, g) $u_{3n} = u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3$,

h) $u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2} + (-1)^n$, i) $\sum_{i=1}^{2n-1} u_i u_{i+1} = u_{2n}^2$,

j) $\sum_{i=1}^{2n} u_i u_{i+1} = u_{2n+1}^2 - 1$, k) $\sum_{i=1}^{n} (n - i + 1)\, u_i = u_{n+4} - (n + 3)$,

l) $$u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$ (Formel von BINET).

Hinweis: Da die Folge der Fibonaccischen Zahlen eindeutig durch ihre Rekursionsgleichungen festgelegt ist, genügt es zu zeigen, daß die Zahlen u_n aus der Formel von BINET diesen Rekursionsgleichungen genügen.

m) $\sum_{i=1}^{n} u_{3i} = \frac{1}{2}(u_{3n+2} - 1)$,

n) $\sum_{i=1}^{n} u_i^3 = \frac{1}{10}\left(u_{3n+2} + (-1)^{n-1}\, 6u_{n-1} - 1\right)$.

Beweis von m): Mit $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, $\beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ wird nach l)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} u_{3i} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^3 + \alpha^6 + \cdots + \alpha^{3n} - \beta^3 - \beta^6 - \cdots - \beta^{3n}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+3} - \alpha^3}{\alpha^3 - 1} - \frac{\beta^{3n+3} - \beta^3}{\beta^3 - 1}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+3} - \alpha^3}{2\alpha} - \frac{\beta^{3n+3} - \beta^3}{2\beta}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}}(\alpha^{3n+2} - \beta^{3n+2} - \alpha^2 + \beta^2) \\ &= \frac{1}{2}(u_{3n+2} - u_2) = \frac{1}{2}(u_{3n+2} - 1)\end{aligned}$$

(beim Übergang von der ersten zur zweiten Zeile wurde die geometrische Summenformel verwendet, und beim Übergang von der zweiten zur dritten Zeile wurden die Identitäten $\alpha^3 - 1 = 2\alpha$, $\beta^3 - 1 = 2\beta$ benutzt).

28. Eine nichtleere Teilmenge I der Menge $\mathbf{Z}$ aller ganzen Zahlen heißt *Ideal* in $\mathbf{Z}$, wenn sie folgende beiden Bedingungen erfüllt:

(i) $a, b \in I \Rightarrow a + b \in I$,

(ii) $a \in I \wedge g \in \mathbf{Z} \rightarrow ga \in I$.

Man zeige, daß folgendes gilt:

a) $\{0\}$ und $\mathbf{Z}$ sind Ideale in $\mathbf{Z}$.

b) Für jedes $g \in \mathbf{Z}$ ist $(g) := \{g \cdot h : h \in \mathbf{Z}\}$ Ideal in $\mathbf{Z}$. (Man nennt (g) das von der Zahl g erzeugte *Hauptideal*.)

c) Es seien g_1, g_2 beliebige ganze Zahlen; dann ist die Menge

$$\{\alpha g_1 + \beta g_2 : \alpha, \beta \in \mathbf{Z}\}$$

Ideal in $\mathbf{Z}$.

d) Es sei I ein beliebiges Ideal in $\mathbf{Z}$ und $I \neq \{0\}$. Es sei ferner n die kleinste positive natürliche Zahl in I. Dann ist $I = (n)$ (d. h., alle Ideale in $\mathbf{Z}$ sind Hauptideale).

Hinweis: Der Beweis von d) benutzt wesentlich die Division mit Rest!

e) Es seien m, n beliebige natürliche Zahlen, die nicht beide Null sind, und $I(m, n)$ das Ideal in $\mathbf{Z}$ aus allen ganzen Zahlen der Form $\alpha m + \beta n$ $(\alpha, \beta \in \mathbf{Z})$ (vgl. c)). Nach d) existiert ein $d \in \mathbf{Z}$, $d > 0$, so daß $I(m, n) = (d)$ ist. Man zeige, daß d größter gemeinsamer Teiler von m und n ist.
(Man vergleiche diesen Beweis mit dem im Buch dargestellten Beweis (wie hängen $I(m, n)$ und das dortige $D(m, n)$ zusammen?).)

f) Man verallgemeinere das Resultat aus Aufgabe c) so, daß die Anwendung von d) die Existenz des größten gemeinsamen Teilers von k Zahlen $n_1, \ldots, n_k$ und seine Darstellbarkeit als

$$\alpha_1 n_1 + \cdots + \alpha_k n_k \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbf{Z})$$

liefert (vgl. 3.7.(15′)).

29. Man beweise die folgenden Eigenschaften der Operationen „$\sqcap$“ und „$\sqcup$“:

a) $m \sqcap n = n \sqcap m$, b) $n \sqcap n = n$,

c) $m \mid n \Leftrightarrow m \sqcap n = m$, d) $m \sqcup n = n \sqcup m$,

e) $n_1 \sqcup (n_2 \sqcup n_3) = (n_1 \sqcup n_2) \sqcup n_3$,

f) $n \sqcup n = n$, g) $m \mid n \Leftrightarrow m \sqcup n = n$,

h) $(n_1 \sqcup n_2) \sqcap n_1 = n_1$, i) $(n_1 \sqcap n_2) \sqcup n_1 = n_1$.

(Man beachte, daß diese Beweise allein die Definitionen 3.7.(14) und 3.7.(32) erfordern.)

30. Man beweise, daß das kleinste gemeinsame Vielfache von k positiven Zahlen $n_1, \ldots, n_k$ gegeben wird durch

$$n_1 \sqcup \cdots \sqcup n_k = \frac{n_1 \cdots n_k}{m_1 \sqcap \cdots \sqcap m_k}$$

mit

$$m_i = n_1 \cdots n_{i-1} \cdot n_{i+1} \cdots n_k \quad (i = 1, \ldots, k).$$

31. Man bestimme mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der folgenden Paare, Tripel bzw. Quadrupel von natürlichen Zahlen und stelle ihn dar als $\alpha n_1 + \beta n_2 (+\gamma n_3 + \delta n_4)$ mit $\alpha, \beta\ (, \gamma, \delta) \in \mathbf{Z}$:

a) 3584, 497; b) 4823, 975;

c) 33 803 504, 478 547; d) 2123, 825, 1045;

e) 27 324, 113 022, 44 054, 62 244.

32. Man bestimme das kleinste gemeinsame Vielfache der folgenden Paare, Tripel bzw. Quadrupel von natürlichen Zahlen:

a) 3584, 497; b) 4173, 143;

c) 2123, 825, 1045; d) 16 562, 693, 3773, 286.

33. Man zeige, daß bei beliebigem $m, n \in \mathbf{N}$ mit $m > 0, n > 0$ und $p \in P$ ($P =$ Menge der Primzahlen) folgendes gilt:

a) $\exp_p(m \cdot n) = \exp_p(m) + \exp_p(n)$,

b) $\exp_p(m \sqcap n) = \min\{\exp_p(m), \exp_p(n)\}$,

c) $\exp_p(m \sqcup n) = \max\{\exp_p(m), \exp_p(n)\}$,

d) $m \mid n \Leftrightarrow \bigwedge_{p \in P} \big(\exp_p(m) \leq \exp_p(n)\big)$.

34. Man zeige, daß folgendes gilt:

a) $a \sqcap b \mid a \sqcap bc$, b) $a \sqcap c = 1 \Rightarrow a \sqcap bc = a \sqcap b$,

c) $b \mid c \Rightarrow a \sqcap b = (a + c) \sqcap b$.

35. * Man beweise die Distributivgesetze

$$(n_1 \sqcup n_2) \sqcap n_3 = (n_1 \sqcap n_3) \sqcup (n_2 \sqcap n_3),$$
$$(n_1 \sqcap n_2) \sqcup n_3 = (n_1 \sqcup n_3) \sqcap (n_2 \sqcup n_3).$$

Hinweis: Jedes der beiden Distributivgesetze kann aus dem anderen durch elementare Schlüsse gewonnen werden, die nur die Definition der Operationen „$\sqcup$“ und „$\sqcap$“ verwenden. Daher genügt es im wesentlichen, eines der beiden Gesetze zu beweisen. Hierfür ist dann entweder der Satz über die eindeutige Primzahlzerlegung oder der zu seinem Beweis benötigte Satz 3.7.(30) erforderlich, der auf dem Satz über die Darstellbarkeit des größten gemeinsamen Teilers als Vielfachendifferenz beruht.

36. Man löse die Aufgaben 31 und 32 unter Benutzung der Primzahlzerlegungen der auftretenden Zahlen.

37. * Für $x, y, z \in \mathbf{N}$ sei

$$\Gamma(x, y, z) := r\big(x, (z + 1)\, y + 1\big),$$

wobei $r(n, m)$ der Rest bei der Division von n durch m ist.

a) Man zeige, daß für jede endliche Folge $a_0, a_1, \ldots, a_n$ von natürlichen Zahlen das Gleichungssystem

$$\Gamma(x, y, 0) = a_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Gamma(x, y, n) = a_n$$

wenigstens eine Lösung (x, y) hat.

b) Was kann man folglich von der für $x \in \mathbf{N}$ durch

$$f(x) := \big(\Gamma(c_{31}(x), c_{32}(x), 0), \ldots, \Gamma(c_{31}(x), c_{32}(x), c_{33}(x))\big)$$

definierten Funktion behaupten (c_{31}, c_{32}, c_{33} seien dabei die Umkehrfunktionen der Cantor-Numerierung c^3 der Tripel natürlicher Zahlen)?

c) Man konstruiere Funktionen, die Analoges wie f leisten.

Hinweis: Man benutze den Satz über die eindeutige Primzahlzerlegung oder die Dualdarstellung. Hierbei ist die Sonderrolle der Zahl 0 zu beachten.

38. Man zeige, daß jede natürliche Zahl $n \geqq 1$, die keine Primzahl ist, einen Primteiler p besitzt, für den $p^2 \leqq n$ ist.

39. Man bestimme mit dem Sieb des Eratosthenes alle Primzahlen p mit $p \leqq 1000$. Man ermittle aus der erhaltenen Primzahltabelle alle Primzahlzwillinge unterhalb 1000. Man bestimme für $n = 50, 100, 150, 200, \ldots, 950, 1000$ die Anzahl $\pi(n)$ der Primzahlen unterhalb n und vergleiche diesen Wert mit $\dfrac{n}{\ln n}$.

40. Man zeige, daß folgendes gilt:

a) $n_1 \geqq n_2 \Rightarrow (n_1 \equiv n_2 \bmod m \Leftrightarrow m \mid n_1 - n_2)$,

b) $n_1 \equiv n_2 \bmod m \Rightarrow n_1 + k \equiv n_2 + k \bmod m$,

c) $n_1 \equiv n_2 \bmod m \Rightarrow n_1 \cdot k \equiv n_2 \cdot k \bmod m$,

d) $n_1 \equiv n_2 \bmod m \Rightarrow n_1^k \equiv n_2^k \bmod m$.

41. Man beweise:

a) Für jede Primzahl $p \geqq 5$ ist $p^2 - 1$ durch 24 teilbar.

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 2$ ist $n^4 + 4$ eine zusammengesetzte Zahl.

c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $7^{2n} - 4^{2n}$ durch 33 teilbar.

d) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 1$ ist $5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1}$ durch 19 teilbar.

42. Man beweise:

a) $3^{2^n} - 1$ ist durch 2^{n+2} und nicht durch 2^{n+3} teilbar.

b) $2^{3^n} + 1$ ist durch 3^{n+1} und nicht durch 3^{n+2} teilbar.

43. Man beweise, daß folgendes gilt:

a) Bei beliebigem $n \in \mathbb{N}$ sind die Zahlen $2^{2^0} + 1, 2^{2^1} + 1, \ldots, 2^{2^n} + 1$ paarweise teilerfremd.

b) Es sei p eine beliebige Primzahl. Dann ist $n!$ für kein $n \in \mathbb{N}$ durch p^n teilbar.

c) Es ist stets $(n!)!$ durch $(n!)^{(n-1)!}$ teilbar.

44. Man zeige, daß $2^m - 1$ und $2^n - 1$ genau dann teilerfremd sind, wenn m und n teilerfremd sind.

Anleitung: Man bestimme $(2^m - 1) \sqcap (2^n - 1)$.

45. Es seien m, n natürliche Zahlen mit $m \sqcap n = 1$. Man bestimme alle Paare (x, y) von natürlichen Zahlen, für die $x^m = y^n$ ist

46. Man zeige, daß folgendes gilt:

$$\bigwedge_{n,k \in \mathbb{N}} \left(n \sqcap k = 1 \Rightarrow n \,\middle|\, \binom{n}{k} \right).$$

Kann man auf die Voraussetzung $n \sqcap k = 1$ verzichten?

47. Gibt es natürliche Zahlen n, die sich auf zwei verschiedene Weisen in der Form $n = n_1! + n_2!$ mit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $0 < n_1 \leqq n_2$, darstellen lassen?

48. Man bestimme sämtliche Primzahlen der Form $x^4 + 4y^4$ $(x, y \in \mathbb{N})$.

49. Man zeige, daß folgendes gilt:

a) $30 \,\Big|\, \sum_{i=1}^{n} a_i \Rightarrow 30 \,\Big|\, \sum_{i=1}^{n} a_i^5$,

b) $6 \mid a + b + c \Rightarrow 6 \mid a^3 + b^3 + c^3$.

50. a) Für welche Werte von n ist $2^n - 1$ bzw. $2^n + 1$ eine Quadratzahl?

b) Gesucht sind notwendige Bedingungen dafür, daß $2^n - 1$ bzw. $2^n + 1$ eine Primzahl ist.

51. Man zeige, daß es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, die nicht Summe aus einer Primzahl und einer Quadratzahl sind.

52. a) Man zeige, daß es unendlich viele Primzahlen gibt, die bei Division durch 4 den Rest 3 lassen.

b) Man zeige, daß es unendlich viele Primzahlen gibt, die bei Division durch 6 den Rest 5 lassen.

c) Man verallgemeinere diese Resultate.

53. Auf einem unendlichen Schachbrett steht ein (m, n)-Springer (das ist eine Figur, welche um m Felder horizontal und n Felder vertikal oder n Felder horizontal und m Felder vertikal zieht).

a) Man charakterisiere die Felder, die der Springer von einem gegebenen Feld aus erreichen kann.

Anleitung: Man zeige, daß man sich im wesentlichen auf den Fall $m \sqcap n = 1$ beschränken kann, wobei in diesem Fall Zahlen $a, b \in \mathbf{N}$ mit $am - bn = 1$ existieren.

b) Für welches n kann man mit einem $(1, n)$-Springer von einem festen Feld aus alle anderen Felder erreichen?

c) Man zeige, daß bei einem (m, n)-Springer jedes erreichbare Feld entweder durch eine gerade oder durch eine ungerade Anzahl von Zügen erreichbar ist.

Achtung: Was bedeutet: entweder — oder?

54. Man beweise die folgenden Teilbarkeitseigenschaften der Fibonaccischen Zahlen (vgl. Aufgabe 27):

a) $m \mid n \Rightarrow u_m \mid u_n$, b) $u_{n+1} \sqcap u_n = 1$,

c) $u_m \sqcap u_n = u_{m \sqcap n}$, d) $u_m \mid u_n \Rightarrow m \mid n$,

e) $2 \mid u_n \Leftrightarrow 3 \mid n$, $3 \mid u_n \Leftrightarrow 4 \mid n$, $4 \mid u_n \Leftrightarrow 6 \mid n$, $5 \mid u_n \Leftrightarrow 5 \mid n$, $7 \mid u_n \Leftrightarrow 8 \mid n$ usw.

f) $\bigwedge\limits_m \bigvee\limits_i (i \leqq m^2 \wedge m \mid u_i)$.

Beweis von c): Es sei o. B. d. A. $m > n$. Wir wenden auf die Zahlen m, n den Euklidischen Algorithmus an:

$$\begin{aligned}
m &= q_1 n + r_2, & 0 &< r_2 < n,\\
n &= q_2 r_2 + r_3, & 0 &< r_3 < r_2.\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
r_{k-1} &= q_k r_k + r_{k+1}, & 0 &< r_{k+1} < r_k.\\
r_k &= q_{k+1} r_{k+1}.
\end{aligned}$$

Dann ist $r_{k+1} = m \sqcap n$. Damit gilt $u_m \sqcap u_n = u_{q_1 n + r_2} \sqcap u_n$. Hieraus folgt nach Aufgabe 27 c)

$$u_m \sqcap u_n = (u_{q_1 n - 1} u_{r_2} + u_{q_1 n} u_{r_2 + 1}) \sqcap u_n.$$

Nun ist $n \mid q_1 n$. Also gilt nach a) $u_n \mid u_{q_1 n}$. Hieraus folgt nach Aufgabe 34 c)

$$(u_{q_1 n - 1} u_{r_2} + u_{q_1 n} u_{r_2 + 1}) \sqcap u_n = u_{q_1 n - 1} u_{r_2} \sqcap u_n.$$

Nach b) gilt $u_{q_1 n - 1} \sqcap u_{q_1 n} = 1$. Folglich ist wegen $u_n \mid u_{q_1 n}$ auch $u_{q_1 n - 1} \sqcap u_n = 1$. Also gilt nach Aufgabe 34 b) $u_{q_1 n - 1} u_{r_2} \sqcap u_n = u_n \sqcap u_{r_2}$. Damit erhalten wir

$$u_m \sqcap u_n = u_n \sqcap u_{r_2}.$$

Analog folgt

$$u_n \sqcap u_{r_1} = u_{r_1} \sqcap u_{r_2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u_{r_{k-1}} \sqcap u_{r_k} = u_{r_k} \sqcap u_{r_{k+1}}$$

und

$$u_{r_k} \sqcap u_{r_{k+1}} = u_{q_{k+1}r_{k+1}} \sqcap u_{r_{k+1}} = u_{r_{k+1}} = u_{m \sqcap n}.$$

Insgesamt gilt also $u_m \sqcap u_n = u_{m \sqcap n}$, was zu beweisen war.

55. Man zeige, daß die Funktionen $q(n, m)$ und $r(n, m)$ (Quotient und Rest bei der Division von n durch m) den folgenden simultanen Rekursionsgleichungen genügen:

$$q(0, m) = 0, \quad r(0, m) = 0,$$
$$q(n + 1, m) = q(n, m) + \gamma\big(r(n, m) + 1, m\big),$$
$$r(n + 1, m) = \big(r(n, m) + 1\big) \cdot \varkappa\big(r(n, m) + 1, m\big),$$

wobei $\varkappa$ und γ die folgende Bedeutung haben:

$$\varkappa(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x < y, \\ 0 & \text{für} \quad x \geqq y, \end{cases}$$

$$\gamma(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x = y, \\ 0 & \text{für} \quad x \neq y. \end{cases}$$

Man berechne allein nach diesen Rekursionsgleichungen schrittweise $q(5, 3)$ und $r(5, 3)$. Man beachte, daß man hierbei keinerlei Wissen über die konkrete Bedeutung der Funktionen benötigt, d. h., daß diese Rechnung auch rein schematisch von einem Automaten durchgeführt werden kann.

56. Man charakterisiere den Werteverlauf der folgenden Funktionen:

a) $\alpha(n, m) := \gamma\big(r(n, m), 0\big)$,

b) $\nu(n, 0) = 0, \quad \nu(n, m + 1) = \nu(n, m) + \alpha(n, m + 1)$,

c) $\tau(n) = \nu(n, n)$,

d) $\pi(n) = \gamma\big(\tau(n), 2\big)$;

dabei sei

$$\gamma(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x = y, \\ 0 & \text{für} \quad x \neq y. \end{cases}$$

Im folgenden bedeutet $[z_n \dots z_0]_g$ die g-adische Darstellung mit den Ziffern $z_n, \dots, z_0$, während $z_n \dots z_0$ die Dezimaldarstellung bezeichnet.

57. a) Man stelle die Zahlen 4149, 2138, 749, 10 538 im Dualsystem, im Ternärsystem, im Oktalsystem, im Duodezimalsystem und im 60er System dar.

b) Man stelle die Zahlen

$$[110101101]_2, \quad [201201201]_3, \quad [570170]_8, \quad [1A0B71A]_{12}$$

im Dezimalsystem dar.

c) Für welches g ist

$$[4231]_g = 566, \quad [778]_g = 1282,$$
$$[987]_g = [1011000011000]_2, \quad [631]_g = [202021]_3?$$

58. a) Wie hängen allgemein die g-adische und die g^k-adische Darstellung einer Zahl n miteinander zusammen?

b) Man erläutere dies genauer am Beispiel $k = 3$.

c) Man stelle $[101101011101]_2$ im Oktalsystem dar, man stelle $[716327]_8$ im Dualsystem dar.

59. Man führe die folgenden Rechnungen im jeweiligen Zahlensystem durch und kontrolliere sie durch Transformation in das Dezimalsystem:

a) $[120121]_3 + [22122]_3$, b) $[343]_5 \cdot [2114]_5$, c) $[101101]_2 : [101]_2$.

60. a) Man zeige, daß eine natürliche Zahl n genau dann durch 2^k $(k \geqq 1)$ teilbar ist, wenn die durch die letzten k Ziffern der Dezimaldarstellung von n gebildete Zahl durch 2^k teilbar ist.

b) Man verallgemeinere a) auf die g-adische Darstellung.

c) Was ist von folgender Teilbarkeitsregel zu halten: Von einer im Dezimalsystem geschriebenen Zahl z, die mindestens zweistellig sei, wird die letzte Ziffer gestrichen und von der erhaltenen Zahl das Doppelte der gestrichenen Zahl subtrahiert. Die so entstandene (evtl. negative) Zahl ist genau dann durch 7 teilbar, wenn z durch 7 teilbar ist?

61. a) Man zeige, daß bei beliebigem $k \geqq 1$ die Zahl

$$\underbrace{11\ldots1}_{3^k}$$

durch 3^{k+1}, aber nicht durch 3^{k+2} teilbar ist.

b) Man zeige, daß alle Zahlen der Form 1331, 1030301, 1003003001, ... Kubikzahlen sind.

c) Setzt man vor eine dreistellige Zahl ihr Doppeltes, so entsteht eine sechs- oder siebenstellige Zahl, die durch 23 und 29 teilbar ist.

d) Man konstruiere analoge Aufgaben.

62. a) Man berechne

$$\underbrace{44\ldots45^2}_{k} + \underbrace{11\ldots1}_{k} - \underbrace{44\ldots44^2}_{k}.$$

b) Man übertrage dieses Resultat auf die g-adische Zahldarstellung.

Anmerkung: Es sind unterschiedliche Übertragungen möglich!

63. a) Auf welche Ziffer endet die Dezimaldarstellung der Zahl 2^{100}?

b) Auf welche Ziffer endet die Dezimaldarstellung von $2^{2^n} + 1$ für $n > 1$?

c) Wie lauten die letzten beiden Ziffern der Dezimaldarstellung von $3^{999} - 2^{999}$?

d) Wie lauten die letzten beiden Ziffern der Dezimaldarstellung von

$$7^{7^{7^7}} - 7^{7^7}?$$

e) Man konstruiere analoge Aufgaben.

Der Bereich der gebrochenen Zahlen

Kontrollfragen

1. Mit welcher Zielstellung erfolgt die Erweiterung des Bereiches der natürlichen Zahlen zum Bereich der gebrochenen Zahlen?
2. Was versteht man unter den Begriffen Bruch und gebrochene Zahl?
3. Was versteht man unter der Bruchdarstellung gebrochener Zahlen?
4. Wie ist die Anordnung gebrochener Zahlen definiert und welche Eigenschaften besitzt sie?
5. Man beweise die Dichtheit der Menge der gebrochenen Zahlen bezüglich der Ordnung und begründe die Unendlichkeit dieser Menge.
6. Wie ist die Addition im Bereich der gebrochenen Zahlen definiert und welche Eigenschaften besitzt sie?
7. Was versteht man unter einer Differenz gebrochener Zahlen?
8. Wie lautet die Definition der Multiplikation im Bereich der gebrochenen Zahlen und welche Eigenschaften hat diese Operation?
9. Was versteht man unter einem Quotienten gebrochener Zahlen?
10. Inwiefern kann man den Bereich der gebrochenen Zahlen als Erweiterung des Bereiches der natürlichen Zahlen ansehen?
11. Welche wichtige Regeln für das Rechnen mit Quotienten und Potenzen im Bereich der gebrochenen Zahlen gibt es?
12. Man beschreibe den Divisionsalgorithmus als ein Verfahren zur Begründung und Berechnung der Dezimalbruchdarstellung gebrochener Zahlen.
13. Wie läßt sich die Periodizität der Dezimalbruchdarstellung einer gebrochenen Zahl begründen?
14. Wie gewinnt man die Bruchdarstellung einer gebrochenen Zahl aus ihrer Dezimalbruchdarstellung?
15. Wie sind Anordnung, Addition und Multiplikation gebrochener Zahlen in der Dezimalbruchdarstellung beschreibbar?
16. Wie sind die Begriffe Vorperiode, Periode, Vorperioden- und Periodenlänge sowie primitive Vorperioden- und primitive Periodenlänge eines unendlichen periodischen g-adischen Bruches erklärt?

17. Wie kann man die primitive Vorperiodenlänge und die primitive Periodenlänge berechnen? Man gebe dazu Beispiele an.
18. Was versteht man unter der Kettenbruchdarstellung einer gebrochenen Zahl?
19. Wie sind die Begriffe Näherungsbruch und Zwischenbruch erklärt?
20. Welches ist die Problematik der besten Approximation?
21. Wie kann man den Bereich der gebrochenen Zahlen algebraisch charakterisieren?

Aufgaben

1. Man beweise, daß die Quotientengleichheit eine Äquivalenzrelation in der Menge $\mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$ ist.

2. Es seien k und l von 0 verschiedene natürliche Zahlen. Mit $k\mathbf{N}$ werde die Menge $\{kn: n \in \mathbf{N}\}$, mit $l\mathbf{N}^*$ entsprechend die Menge $\{ln: n \in \mathbf{N}^*\}$ bezeichnet. Man zeige:

   a) Die Einschränkung der Quotientengleichheit auf die Menge $k\mathbf{N} \times l\mathbf{N}^*$ ist eine Äquivalenzrelation.

   b) Wird jeder Äquivalenzklasse von $k\mathbf{N} \times l\mathbf{N}^*$ (bezüglich der Einschränkung der Quotientengleichheit) die sie enthaltende Äquivalenzklasse von $\mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$ (bezüglich der Quotientengleichheit) zugeordnet, so wird damit eine 1-1-Abbildung von der Menge aller Äquivalenzklassen von $k\mathbf{N} \times l\mathbf{N}^*$ auf die Menge $\mathbf{Q}_+$ definiert.

3. Es bezeichne $\sim$ eine Relation in der Menge $\mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$ mit folgenden Eigenschaften:

   (a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation,

   (b) $(m, n) \sim (k, n) \Rightarrow m = k$,

   (c) $(m, n) \sim (mk, nk)$ für $k > 0$.

   Man beweise, daß es genau eine solche Relation $\sim$ gibt.

   Anleitung: Man zeige, daß die Relation $\sim$ mit der Quotientengleichheit übereinstimmt.

4. a) Man veranschauliche die Menge $\mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$ in der Ebene unter Nutzung eines kartesischen Koordinatensystems (Gitterpunktdiagramm).

   b) Durch geeignetes Hervorheben kennzeichne man Gitterpunkte, die zur gleichen Äquivalenzklasse bezüglich der Quotientengleichheit gehören.

   c) Alle Punkte, die zu derselben Äquivalenzklasse gehören, liegen auf einer vom Nullpunkt ausgehenden Halbgeraden. Man wähle die Schnittpunkte dieser Halbgeraden mit der Halbgeraden $y = 1$, $x \geqq 0$ zur Veranschaulichung von $\mathbf{Q}_+$. Man vergleiche diese Veranschaulichung mit der in MfL Bd. 2, 4.3., angegebenen.

5. Man führe den Nachweis der Repräsentantenunabhängigkeit für die Definition der Multiplikation gebrochener Zahlen (vgl. MfL Bd. 2, 4.5.(1)). Man erläutere die Notwendigkeit des Nachweises für diese und bei ähnlichen Definitionen.

6. Für beliebige gebrochene Zahlen a, b, c, d beweise man:
   a) $a \leqq b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d$,
   b) $a \leqq b \wedge c < d \Rightarrow ac \leqq bd$,
   c) $ab > 0 \Leftrightarrow a > 0 \wedge b > 0$.

7. Für das Rechnen mit Differenzen im Bereich der gebrochenen Zahlen beweise man die folgenden Regeln:
   a) $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$, wenn $a \geqq b$ und $c \geqq d$;
   b) $(a - b) - (c - d) = (a + d) - (b + c)$, wenn $a \geqq b, c \geqq d$ und $a + d \geqq b + c$;
   c) $(a - b)(c - d) = (ac + bd) - (bc + ad)$, wenn $a \geqq b, c \geqq d$.

   Beweis von a): Wegen $a + c \geqq b + d$ ist die Gleichung $b + d + x = a + c$ im Bereich der gebrochenen Zahlen lösbar. Ihre (eindeutig bestimmte) Lösung wird mit $(a + c) - (b + d)$ bezeichnet. Aus

   $$(b + d) + ((a - b) + (c - d)) = b + (a - b) + d + (c - d) = a + c$$

   folgt daher $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$.

8. Man begründe die Gültigkeit folgender Gleichungen für gebrochene Zahlen a, b $(b \neq 0)$ bzw. natürliche Zahlen m, n $(n \neq 0)$:
   a) $\frac{m}{n} = m : n$, b) $\frac{a}{b} = a : b$, c) $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$, d) $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$.

9. Man beweise die folgenden Regeln für das Rechnen mit Quotienten im Bereich der gebrochenen Zahlen:
   a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$, b) $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$,
   c) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$ $(ad \geqq bc)$, d) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, e) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

10. Zu $\frac{35}{396}$ und $\frac{28}{297}$ finde man die kleinste gebrochene Zahl $(\neq 0)$, die bei der Division durch jede dieser gegebenen Zahlen eine natürliche Zahl ergibt.

    Lösung: Die gesuchte Zahl ist das Minimum der Menge

    $$M = \left\{x: x \in \mathbf{Q}_+ \wedge x \neq 0 \wedge x \cdot \frac{396}{35} \in \mathbf{N} \wedge x \cdot \frac{297}{28} \in \mathbf{N}\right\}.$$

    Eine Zahl $\frac{m}{n}$ $(\neq 0)$ mit $m \sqcap n = 1$ gehört genau dann zu M, wenn die vier Bedingungen $35 \mid m$, $28 \mid m$, $n \mid 396$, $n \mid 297$ erfüllt sind. Die gesuchte Zahl ist daher $\frac{35 \sqcup 28}{396 \sqcap 297}$.

11. Zu $\frac{8}{15}$ und $\frac{18}{35}$ finde man die größte gebrochene Zahl, so daß bei der Division der gegebenen Zahlen durch diese eine natürliche Zahl entsteht.

12. Man beweise: Wenn $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ drei aufeinanderfolgende Glieder einer arithmetischen Folge erster Ordnung sind, dann sind auch a^2, b^2, c^2 aufeinanderfolgende Glieder einer solchen Folge.

13. Es seien k, l, m natürliche Zahlen größer als 0. Man zeige, daß

$$\left(\frac{l^2 - lm + m^2}{k} + \frac{k^2}{l+m} - \frac{3}{\frac{1}{l} + \frac{1}{m}}\right) \cdot \frac{\frac{2}{l} + \frac{2}{m}}{\frac{1}{lm} + \frac{1}{km} + \frac{1}{kl}} + (k + l + m)^2$$

eine natürliche Zahl $\geqq 9$ ist.

14. Es ist zu beweisen, daß jede gebrochene Zahl genau eine reduzierte Bruchdarstellung besitzt.

15. Man bestimme die reduzierte Bruchdarstellung der folgenden gebrochenen Zahlen:

a) $\frac{2904}{3234}$, b) $\frac{2^{19} \cdot 27^3 + 15 \cdot 4^9 \cdot 9^4}{(6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}) \cdot 3}$,

c) $\frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{(5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6) \cdot 5}$, d) $\frac{m^3 - 1}{m^4 + m^2 + 1}$,

e) $\frac{81n^2 - 1}{162n^2 + 9n - 3}$, f) $\frac{44n^3 + 10n^2 - 22n - 5}{66n^3 + 14n^2 - 33n - 7}$,

g) $\frac{2n^4 + n^3 - 3n^2 - 2n + 2}{4n^5 + 2n^4 - 5n^3 - 4n^2 + 2n + 1}$.

16. Wie lautet der Nenner der reduzierten Bruchdarstellung von

a) $\frac{2^{3^n} + 1}{3^{n+2}}$, b) $\frac{3^{2^n} - 1}{2^{n+3}}$?

17. Wie lautet der Zähler der reduzierten Bruchdarstellung von

a) $\frac{1}{95!} + \frac{1}{97!} - \frac{1}{98!}$, b) $\frac{133}{11^{n+2} + 12^{2n+1}}$?

18. Es sei $\frac{m}{n}$ die reduzierte Bruchdarstellung der gebrochenen Zahl a kleiner 1. Man bestimme die reduzierte Bruchdarstellung der gebrochenen Zahl $1 - a$.

19. Man zeige, daß die folgenden Bruchdarstellungen genau dann reduziert sind, wenn die natürlichen Zahlen m und n teilerfremd sind:

a) $\frac{2m + n}{7m + 3n}$, b) $\frac{m(35m + 4n)}{9m + n}$, c) $\frac{2m + n}{m(m + n)}$.

Beweis von b): Es gilt $m(35m + 4n) = 4m(9m + n) - m^2$. Die gegebene Bruchdarstellung läßt sich daher genau dann durch eine Primzahl p kürzen, wenn p ein Teiler von $9m + n$ und m ist. Das ist jedoch genau dann der Fall, wenn p ein Teiler von m und n ist.

20. Man beweise:

a) Die Bruchdarstellung $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2k(2k+2)(2k+4)}$ kann durch 24 gekürzt werden.

b) Die Bruchdarstellungen $\frac{m}{n}$ und $\frac{5m+3n}{13m+8n}$ können durch die gleichen Zahlen gekürzt werden.

21. Die gebrochenen Zahlen a, b vergleiche man hinsichtlich ihrer Größe:

a) $a = \frac{m+1}{n+1}$, $b = \frac{m}{n}$;

b) $a = 4 + \frac{5}{8} + \frac{6}{8^2} + \frac{3}{8^3} + \frac{7}{8^4}$, $b = 4 + \frac{5}{8} + \frac{5}{8^2} + \frac{7}{8^3} + \frac{6}{8^4}$;

c) $a = \frac{5678901234}{6789012345}$, $b = \frac{5678901235}{6789012347}$;

d) $a = \frac{100^{99}+1}{100^{89}+1}$, $b = \frac{100^{100}+1}{100^{90}+1}$;

e) $a = \frac{2{,}000004}{1{,}000004^2 + 2{,}000004}$, $b = \frac{2{,}000002}{1{,}000002^2 + 2{,}000002}$.

Lösung von c): Ist $\frac{m}{n}$ die gegebene Bruchdarstellung von a, so ist $\frac{m+1}{n+2}$ diejenige von b. Wegen $\frac{m}{n} > \frac{m+1}{n+2} \Leftrightarrow 2m > n$, gilt $a > b$.

22. Man beweise:

a) $\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2} \Rightarrow \frac{m_1}{n_1} < \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2} < \frac{m_2}{n_2}$,

b) $\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2} \Rightarrow \frac{m_1}{n_1} < \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2} < \frac{m_2}{n_2}$.

23. Man vergleiche die in Aufgabe 22 auftretenden Zahlen $\frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$, $\frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}$ hinsichtlich ihrer Größe.

24. Es seien a, b gebrochene Zahlen mit $a < b$. Man bestimme eine unendliche Menge gebrochener Zahlen c mit $a < c < b$.

25. Es seien a, b, c, d gebrochene Zahlen mit $a > 0$, $b > 0$, $c \neq d$. Man zeige:

$$\frac{(a+b)\,cd}{ad+bc} < \frac{ac+bd}{a+b}.$$

26. Es seien a, b beliebige gebrochene Zahlen. Man zeige:

a) $a + b \geqq 1 \Rightarrow a^4 + b^4 \geqq \frac{1}{8}$, b) $a + b \geqq 1 \Rightarrow a^8 + b^8 \geqq \frac{1}{128}$,

c) $0 < a < b \Rightarrow \frac{b-a}{b+a} < \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$.

27. Für gebrochene Zahlen a, b mit $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{n}{m}$ (also $ab = 1$) beweise man $a + b \geqq 2$. Wann gilt die Gleichheit?

28. Jede gebrochene Zahl a erfüllt die Ungleichung

$$\frac{a^2}{1 + a^4} \leqq \frac{1}{2}.$$

29. Es ist zu beweisen, daß für beliebige gebrochene Zahlen a, b, c aus der Bedingung $a \cdot b \cdot c = 1$ die Ungleichung $(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geqq 8$ folgt.

30. Man beweise die Gültigkeit folgender Ungleichungen:

a) $\frac{n^4 - 3n^2 + 1}{n^4 - n^2 - 2n - 1} < 1 \quad (n \in \mathbf{N}, n \geqq 2)$,

b) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24} \quad (n > 1)$.

Hinweis: Man benutze das Beweisverfahren der vollständigen Induktion.

c) $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} < 2$,

d) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} < 2$,

e) $1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1}$.

Hinweis: Man benutze die Umformung

$$\frac{1}{2n+1} + \left(\frac{1}{(2n+1) - 1} + \frac{1}{(2n+1) + 1}\right) + \left(\frac{1}{(2n+1) - 2} + \frac{1}{(2n+1) + 2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2n+1) - n} + \frac{1}{(2n+1) + n}\right)$$

der auftretenden Summe.

f) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$.

Hinweis: Man multipliziere das links stehende Produkt mit dem Produkt $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{98}{99} \cdot \frac{100}{101}$.

31. Für von 0 verschiedene natürliche Zahlen k, l, m zeige man die Gültigkeit der Ungleichungen

a) $\frac{2k}{l+m} + \frac{2l}{m+k} + \frac{2m}{k+l} \geqq 3$, b) $\frac{k^8 + l^8 + m^8}{k^3 l^3 m^3} \geqq \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m}$.

Hinweis: Man zeige zunächst $k^2 + l^2 + m^2 \geqq kl + lm + mk$.

32. Man beweise

$$\frac{k}{l}+\frac{l}{m}+\frac{m}{n}+\frac{n}{k}>1.$$

Beweis: Ist $\frac{n}{k}>1$, so ist die Gültigkeit der Ungleichung klar. Es werde also $\frac{n}{k}\leqq 1$ vorausgesetzt. Dann gilt

$$\frac{k}{l}+\frac{l}{m}+\frac{m}{n}+\frac{n}{k}>\frac{k}{l}+\frac{l}{m}+\frac{m}{n}\geqq\frac{k}{l}+\frac{l}{m}+\frac{m}{n}\,\frac{n}{k}=\frac{k}{l}+\frac{l}{m}+\frac{m}{k}.$$

Für den Fall $\frac{m}{k}>1$ bleibt nichts weiter zu beweisen. Es sei also noch $\frac{m}{k}\leqq 1$. Wir erhalten

$$\frac{k}{l}+\frac{l}{m}+\frac{m}{n}+\frac{n}{k}>\frac{k}{l}+\frac{l}{m}\geqq\frac{k}{l}+\frac{l}{m}\,\frac{m}{k}=\frac{k}{l}+\frac{l}{k}=\frac{k^2+l^2}{kl}$$

$$=2+\frac{k^2+l^2-2kl}{kl}=2+\frac{(k-l)^2}{kl}\geqq 2>1$$

(vgl. Aufgabe 27).

33. Für welche natürlichen Zahlen k, l gilt

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{l}=\frac{2}{7}?$$

34. Für welche natürlichen Zahlen k, l, m gilt

a) $\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}=1$, b) $\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}=\frac{13}{12}$?

Lösung von b): Wir beschränken uns auf $k\leqq l\leqq m$. Die übrigen Möglichkeiten erhält man durch Umbenennung.
Aus $\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}\leqq\frac{3}{k}$, also $\frac{13}{12}\leqq\frac{3}{k}$, folgt $13k\leqq 36$. Wir haben daher die Fälle $k=1$ und $k=2$ zu betrachten.

$k=2$: Wir erhalten $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}=\frac{7}{12}$. Aus $\frac{1}{l}\leqq\frac{7}{12}=\frac{1}{l}+\frac{1}{m}\leqq\frac{2}{l}$ folgt $\frac{12}{7}\leqq l\leqq\frac{24}{7}$. Es gibt für (l, m) also nur die Möglichkeiten $(2, 12)$ und $(3, 4)$.

$k=1$: Wir erhalten $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}=\frac{1}{12}$. Aus $\frac{1}{l}<\frac{1}{12}=\frac{1}{l}+\frac{1}{m}\leqq\frac{2}{l}$ folgt $12<l\leqq 24$. Andererseits muß die natürliche Zahl m die Gleichung $m=\frac{12\cdot l}{l-12}$ erfüllen. Man hat also nachzuprüfen, für welche der möglichen l noch $l-12\mid 12\cdot l$ gilt. Das kann durch Probieren erfolgen. Ein anderer Weg ist folgender: Es sei p ein Primteiler von $l-12$, wobei $l-12\mid 12\cdot l$ gelte. Dann gilt auch $p\mid 12\cdot l$. Aus $p\mid l-12$ und $p\mid 12\cdot l$ folgt $p\mid 12$. Wir können also $l-12$ in der Form $l-12=2^r\cdot 3^s$ ansetzen. Damit erhalten wir die zu $l-12\mid 12\cdot l$ gleichwertige Bedingung $2^r\cdot 3^s\mid 12\cdot 2^r\cdot 3^s+144$. Diese ist genau dann erfüllt, wenn $2^r\cdot 3^s\mid 144$ und daher $r\leqq 4$, $s\leqq 2$ gilt. Aus $12<l\leqq 24$ folgt schließlich $12<2^r\cdot 3^s+12\leqq 24$, also $0<2^r\cdot 3^s\leqq 12$. Wir erhalten für $l-12=2^r\cdot 3^s$ die Möglichkeiten 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12. Das liefert für (l, m) die Paare (13, 156), (14, 84), (15, 60), (16, 48), (18, 36), (20, 30), (21, 28), (24, 24).

35. Man bestimme alle natürlichen Zahlen n, für die die folgenden gebrochenen Zahlen natürliche Zahlen sind:

a) $\dfrac{n^6 - n^2}{10}$, b) $\dfrac{(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3}{10}$,

c) $\dfrac{n}{3} + \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n^3}{6}$, d) $\dfrac{n^3 + 11n}{6}$, e) $\dfrac{n^3 + 3n^2 - n - 3}{48}$.

36. Es sei a eine gebrochene Zahl mit $0 < a < 1$. Man zeige, daß $\dfrac{1}{a} - a$ keine natürliche Zahl sein kann.

37. Man beweise, daß die Gleichung $x(x + 1) = y^2$

a) in $\mathbf{N}$ keine Lösung besitzt,

b) in $\mathbf{Q}_+$ lösbar ist.

38. Man zeige, daß für jede natürliche Zahl n wenigstens eine der beiden gebrochenen Zahlen

$$\frac{4n^2 + 3n + 7}{10}, \quad \frac{n^4 - 8}{26}$$

keine natürliche Zahl ist.

39. Es seien m und n teilerfremde natürliche Zahlen größer als 1. Man beweise:

a) Zwei gebrochene Zahlen der Form

$$\frac{k(m+n)}{m}, \frac{l(m+n)}{n} \quad (k = 1, \ldots, m-1;\, l = 1, \ldots, n-1)$$

können nicht gleich sein.

b) Keine der unter a) genannten gebrochenen Zahlen ist eine natürliche Zahl.

c) Für die $m + n - 2$ gebrochenen Zahlen

$$\frac{m+n}{m}, \frac{2(m+n)}{m}, \ldots, \frac{(m-1)(m+n)}{m},$$

$$\frac{m+n}{n}, \frac{2(m+n)}{n}, \ldots, \frac{(n-1)(m+n)}{n}$$

gilt: Zwischen zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $k, k+1$ mit $1 \leq k \leq m + n - 2$ liegt genau eine dieser gebrochenen Zahlen.

40. Es seien k, l, m natürliche Zahlen größer als 1. Man bestimme die sämtlichen Möglichkeiten, so daß $\dfrac{kl+1}{m}, \dfrac{km+1}{l}, \dfrac{lm+1}{k}$ zugleich natürliche Zahlen sind.

41. Für eine beliebige natürliche Zahl g überprüfe man die Gültigkeit der Gleichung

$$\frac{1 + g^2 + g^4 + g^6 + g^8}{1 + g + g^4 + g^7 + g^8} = \frac{1 - g + g^2 - g^3 + g^4}{1 - g^2 + g^4}.$$

Daran anknüpfend ist

$$\frac{101010101}{110010011} = \frac{10101110101}{11001110011} = \frac{1010111110101}{1100111110011} = \cdots$$

zu beweisen, wenn Zähler und Nenner in der g-adischen ($g \geqq 2$) Darstellung gegeben sind.

42. Es seien a und b beliebige gebrochene Zahlen. Man zeige:

a) Gilt $b > 1$, so existiert eine natürliche Zahl n mit $a < b^n$.

b) Gilt $a > 0$ und $b < 1$, so existiert eine natürliche Zahl m mit $b^m < a$.

43. Man formuliere den Divisionsalgorithmus für eine beliebige Basiszahl $g \geqq 2$ und erkläre damit die g-adische Bruchdarstellung einer gebrochenen Zahl.

44. Man bestimme die g-adische Bruchdarstellung der in der Form $\frac{p}{q}$ (dezimal) gegebenen gebrochenen Zahlen:

a) $\frac{23311}{343}$, $g = 7$; b) $\frac{1744}{278}$, $g = 5$; c) $\frac{8473}{12189}$, $g = 12$.

45. Das folgende Rechenschema zur Gewinnung der Bruchdarstellung aus der Dezimalbruchdarstellung $a_0,a_1 \ldots a_l\overline{a_{l+1} \ldots a_{l+k}}$ einer gebrochenen Zahl a ist zu begründen:

$$a = a_0 + 0,a_1 \ldots a_l\overline{a_{l+1} \ldots a_{l+k}},$$

$$10^l \cdot a = \underbrace{10^l \cdot a_0 + a_1 \ldots a_{l\,(10)}}_{m} + \underbrace{0,\overline{a_{l+1} \ldots a_{l+k}}}_{x} = m + x,$$

$$10^k \cdot x = a_{l+1} \ldots a_{l+k},\overline{a_{l+1} \ldots a_{l+k}} = a_{l+1} \ldots a_{l+k} + x,$$

$$x = \frac{a_{l+1} \ldots a_{l+k\,(10)}}{10^k - 1},$$

$$a = \frac{m + \dfrac{a_{l+1} \ldots a_{l+k\,(10)}}{10^k - 1}}{10^l}.$$

46. Man formuliere und beweise eine Umrechnungsformel für die Gewinnung der Bruchdarstellung einer gebrochenen Zahl aus der g-adischen Bruchdarstellung.

47. Man bestimme die reduzierte Bruchdarstellung der folgenden in der Dezimalbruchdarstellung gegebenen gebrochenen Zahlen:

a) $0,36$; b) $0,\overline{36}$; c) $0,75\overline{3}$;

d) $0,\overline{142857}$; e) $247,413\overline{5421}$.

48. Es ist die Gleichheit der folgenden gebrochenen Zahlen zu begründen (ohne Rechnung):

$$a = \frac{23}{99}, \quad b = \frac{2323}{9999}, \quad c = \frac{232323}{999999}, \ldots$$

49. Man zeige, daß die gebrochenen Zahlen

$$r_1 = 0,\overline{a_1a_2a_3a_4}, \quad r_2 = 0,\overline{a_4a_1a_2a_3},$$
$$r_3 = 0,\overline{a_3a_4a_1a_2}, \quad r_4 = 0,\overline{a_2a_3a_4a_1}$$

in der reduzierten Bruchdarstellung alle den gleichen Nenner haben.

Hinweis: Man bestätige die Beziehungen $10r_1 = a_1 + r_4$, $10r_2 = a_4 + r_1$, $10r_3 = a_3 + r_2$, $10r_4 = a_2 + r_3$ und benutze diese zum Nachweis von $q_1 \mid q_2$, $q_2 \mid q_3$, $q_3 \mid q_4$, $q_4 \mid q_1$ für die Nenner q_i der reduzierten Bruchdarstellungen von r_i.

50. Man bestimme die primitive Vorperiodenlänge und die primitive Periodenlänge von der Dezimalbruchdarstellung der folgenden gebrochenen Zahlen:

a) $\frac{1}{19}$, b) $\frac{3}{76}$, c) $\frac{1}{13 \cdot 37}$, d) $\frac{5}{31}$, e) $\frac{25}{74}$,

f) $\frac{4}{194}$, g) $\frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 19}$, h) $\frac{1}{7 \cdot 23 \cdot 31}$, i) $\frac{1}{5 \cdot 2 \cdot 29 \cdot 43}$.

Lösung von g): Die primitive Vorperiodenlänge l_0 ergibt sich als kleinste natürliche Zahl l, für die $10^l \equiv 0 \bmod 5$ erfüllt ist, also $l_0 = 1$. Die primitive Periodenlänge k_0 ist die kleinste natürliche Zahl k, für die $10^k \equiv 1 \bmod 7 \cdot 19$ und $k \geqq 1$ gilt. Wegen $7 \cdot 19 \mid m \Leftrightarrow 7 \mid m \wedge 19 \mid m$ können wir statt der einen Kongruenz $10^k \equiv 1 \bmod 7 \cdot 19$ die beiden Kongruenzen $10^k \equiv 1 \bmod 7$, $10^k \equiv 1 \bmod 19$ betrachten. Nach Aufgabe a) ist 18 die kleinste natürliche Zahl $k \geqq 1$, für die die zweite Kongruenz erfüllt ist. Da $\varphi(7) = 6$ ein Teiler von 18 ist, gilt auch $10^{18} \equiv 1 \bmod 7$. Somit ist $k_0 = 18$.

51. a) Wie groß kann die minimale Vorperiodenlänge einer echt gebrochenen Zahl $a = \frac{p}{q}$ mit $q \leqq 1000$ höchstens sein?

b) Man bestimme alle q mit $2 \leqq q \leqq 100$, für die die minimale Periodenlänge von der Dezimalbruchdarstellung der gebrochenen Zahl $\frac{1}{q}$ gleich $q - 1$ ist.

52. Man beweise unmittelbar unter Verwendung der Umrechnungsformel für die Gewinnung einer Bruchdarstellung aus der g-adischen Bruchdarstellung folgende Aussage (vgl. MfL Bd. 2, 4.9., Satz 1):
Die g-adische Bruchdarstellung der gebrochenen Zahl $a = \frac{p}{q}$ (reduzierte Bruchdarstellung) ist

a) reinperiodisch genau dann, wenn g und q teilerfremd sind,

b) endlich genau dann, wenn jeder Primteiler von q auch ein Primteiler von g ist.

53. Für welche Zahlen g ist die g-adische Bruchdarstellung der gebrochenen Zahl $\frac{17}{108}$ endlich?

54. Für die reduzierte Bruchdarstellung $\frac{m}{n}$ der gebrochenen Zahl $a < 1$ gelte $m \cdot n = 550$. Ferner sei die Dezimalbruchdarstellung von a endlich. Welche Möglichkeiten kommen für die gebrochene Zahl a in Frage?

55. Für die folgenden gebrochenen Zahlen bestimme man die Kettenbruchdarstellung. Man berechne ferner die Näherungsbrüche $\frac{p_5}{q_5}$ sowie die Fehler, die beim Ersetzen der gebrochenen Zahlen durch diese Näherungsbrüche entstehen:

a) $\frac{571}{359}$, b) $\frac{1882}{1651}$, c) $\frac{2341}{1721}$.

56. Man finde die reduzierte Bruchdarstellung der in der Kettenbruchdarstellung gegebenen gebrochenen Zahlen:

a) $[1; 1, 2, 3, 4]$, b) $[2; 5, 3, 2, 1, 4, 2, 3]$, c) $[1; 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3]$.

57. In einem Zahnradgetriebe wird ein Übersetzungsverhältnis von 587:113 benötigt, wobei ein Fehler von $\pm 0{,}001$ zulässig ist. Die Realisierung soll durch zwei Zahnräder mit möglichst wenig Zähnen erfolgen.

a) Zu welchem Ergebnis kommt man unter alleiniger Nutzung der Näherungsbrüche?

b) Kann eine weitere Verbesserung bei Verwendung der Zwischenbrüche erzielt werden?

c) Man gebe analoge Beispiele an, bei denen
— bereits die Näherungsbrüche zur optimalen Lösung führen,
— die optimale Lösung durch Zwischenbrüche erreicht wird.

58. Man berechne die Kettenbruchdarstellung von $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}$ sowie die Näherungsbrüche dieser Zahl. Man bestätige damit, daß zwei aufeinanderfolgende Fibonaccische Zahlen teilerfremd sind. (Vgl. die Aufgaben 27 und 54 des vorhergehenden Abschnittes.)

59. Es sei $\frac{p}{q}$ die (reduzierte) Bruchdarstellung und $[a_0; a_1, \ldots, a_k]$ $(a_k > 1)$ die Kettenbruchdarstellung der gebrochenen Zahl $a > 1$. Man beweise die Ungleichung $u_{k+2} \leqq q$. Wann gilt die Gleichheit?

Hinweis: Man vergleiche die beim Euklidischen Algorithmus auftretenden Reste r_k, $r_{k-1}, \ldots$ mit den Fibonaccischen Zahlen $u_1, u_2, \ldots$

60. * Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Aufgabe 59 beweise man, daß die Anzahl k der Teilnenner höchstens fünfmal so groß sein kann wie die Anzahl der Ziffern der Zahl q im Dezimalsystem. Bei welchen Zahlen a kommt die Anzahl k nahe an die genannte Schranke heran?

Folgerung: Die Anzahl der Divisionen beim Euklidischen Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen ist nicht größer als das 5fache der Stellenzahl der kleineren der beiden Zahlen in der Dezimaldarstellung.

Hinweis: Man zeige zunächst $u_{n+5} > 10u_n$, $u_{n+5l} > 10^l u_n$ für $n = 2, 3, \ldots$; $l = 1, 2, \ldots$ Unter Nutzung der Aufgabe 59 gelangt man damit zum Ergebnis.

61. Eine algebraische Struktur $(A, +, \cdot)$ wird ein *Halbring* genannt, wenn die Strukturgesetze (A0), (A1), (A3); (M0), (M1), (M4) (vgl. MfL Bd. 2) sowie die Regularität bezüglich der Addition:

$$(A2_0) \qquad a + x = a + y \Rightarrow x = y$$

gelten. Wird darüber hinaus die Regularität bezüglich der Multiplikation:

$$(M2_0) \qquad a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y$$

(wobei $a \neq 0$, wenn ein Nullelement 0 existiert) gefordert, so wird $(A, +, \cdot)$ ein regulärer Halbring genannt. Für diese und weitere Aufgaben werden hier übersichtsmäßig einige algebraische Strukturen mit den sie definierenden Strukturgesetzen (vgl. MfL Bd. 2) zusammengestellt:

Halbring	(A0), (A1), $(A2_0)$, (A3); (M0); (M1); (M4)
regulärer Halbring	(A0), (A1), $(A2_0)$, (A3); (M0), (M1), $(M2_0)$; (M4)
Halbring mit Null	(A0), (A1), $(A2_0)$, $(A2_1)$, (A3); (M0), (M1); (M4)
Halbring mit Eins	(A0), (A1), $(A2_0)$, (A3); (M0), (M1), $(M2_1)$; (M4)
kommutativer Halbring	(A0), (A1), $(A2_0)$, (A3); (M0), (M1), (M3); (M4)
Halbkörper	(A0), (A1), $(A2_0)$, (A3); (M0), (M1), $(M2_1)$, $(M2_2)$, (M 3); (M4)
geordneter Halbring	(A0), (A1), (A3); (M0), (M1); (M4); (O1), (O2), (O3).

Man erkläre die genannten Strukturen unter Einbeziehung der durch die Strukturgesetze geforderten Eigenschaften.

(Muster: Eine algebraische Struktur $(A, +, \cdot)$ mit zwei algebraischen Operationen — genannt Addition bzw. Multiplikation — wird ein Halbring genannt, wenn die Addition assoziativ, kommutativ und regulär, die Multiplikation assoziativ sowie bezüglich der Addition distributiv ist.)

62. Man beweise:

a) Jeder Halbkörper ist ein regulärer kommutativer Halbring.

b) Jeder geordnete Halbring ist ein regulärer Halbring.

c) * Jeder endliche reguläre kommutative Halbring ist ein Halbkörper.

63. Es sei $A(+, \cdot)$ ein Halbkörper und $B(+, \cdot)$ ein Halbring mit Null und Eins. Man zeige: Ist $B(+, \cdot)$ ein Teilhalbring von $A(+, \cdot)$ (Schreibweise: $B(+, \cdot) \subseteqq A(+, \cdot)$, vgl. MfL Bd. 2, S. 56), so ist $B(+, \cdot)$ ein regulärer kommutativer Halbring.

64. * Gilt $B(+, \cdot) \subseteqq A\,(+, \cdot)$ und läßt sich jedes Element x des Halbkörpers A in der Form $x = a \cdot b^{-1} = \dfrac{a}{b}$ $(a, b \in B)$ darstellen, so heißt $A(+, \cdot)$ ein *Quotientenhalbkörper* des Halbringes $B(+, \cdot)$.

Beispiel: $\mathbb{Q}_+(+, \cdot)$ ist Quotientenhalbkörper von $\mathbb{N}(+, \cdot)$.

Man beweise:

a) Zu je zwei Quotientenhalbkörpern $A(+, \cdot)$, $A'(+, \cdot)$ von $B(+, \cdot)$ gibt es genau einen Halbkörperisomorphismus von A auf A', bei dem die Elemente von B fest bleiben (Eindeutigkeit des Quotientenhalbkörpers).

b) Zu jedem regulären kommutativen Halbring gibt es einen Quotientenhalbkörper (Existenz des Quotientenhalbkörpers).

Hinweis: Man übertrage sinngemäß das Verfahren für die Konstruktion von $\mathbf{Q}_+$ aus $\mathbf{N}$.

65. * Es sei $B(+, \cdot)$ ein regulärer kommutativer Halbring mit Null und Eins. Ferner bezeichne f einen Halbringisomorphismus von $B(+, \cdot)$ in einen Halbkörper $A(+, \cdot)$. Man zeige, daß f zu einem Halbkörperisomorphismus des Quotientenhalbkörpers von $B(+, \cdot)$ in $A(+, \cdot)$ fortgesetzt werden kann (Minimalität des Quotientenhalbkörpers).

66. * Mit $B(+, \cdot, <)$ werde ein geordneter kommutativer Halbring mit Null und Eins bezeichnet.

a) Man zeige, daß die Ordnung auf genau eine Weise auf den Quotientenhalbkörper von B fortgesetzt werden kann, so daß der Quotientenhalbkörper ein geordneter Halbkörper wird.

b) Man beweise, daß der (geordnete) Quotientenhalbkörper eines geordneten Halbringes B minimal unter allen geordneten Halbkörpern ist, die B als Teilstruktur enthalten (vgl. Aufgabe 65. Halbringisomorphismus ist durch Isomorphismus geordneter Halbringe zu ersetzen.).

67. * Man untersuche die Möglichkeit der Quotientenhalbkörperbildung für reguläre kommutative Halbringe, die keine Null bzw. Eins besitzen.

68. * Man bilde den Quotientenhalbkörper des Halbringes der geraden natürlichen Zahlen.

Hinweis: Vgl. Aufgabe 2.

Der Bereich der rationalen Zahlen

Kontrollfragen

1. Auf welche Weise läßt sich der Bereich der rationalen Zahlen mit Hilfe der Differenzengleichheit von geordneten Paaren konstruieren?
2. Wie kann man den Bereich der rationalen Zahlen algebraisch charakterisieren?
3. Welche Rechenregeln für das Umformen von Ungleichungen gibt es?
4. Wie sind die Begriffe beschränkte und unbeschränkte Menge, Schranke, Maximum, Supremum und Infimum definiert? Man gebe Beispiele an.
5. Was versteht man unter dem absoluten Betrag einer rationalen Zahl? Welche wichtigen Regeln für Rechnungen mit absoluten Beträgen gibt es?
6. Wie läßt sich der Bereich der ganzen Zahlen charakterisieren?

7. Wie lauten die Eigenschaften der Teilbarkeitsrelation und wie sind die Begriffe größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches im Bereich der ganzen Zahlen definiert?
8. Was versteht man unter Restklassen? Wie sind die Addition und Multiplikation von Restklassen erklärt? Man charakterisiere die Menge aller Restklassen bezüglich dieser Operationen.
9. Wie läßt sich eine lineare Kongruenz lösen?
10. Wie sind die Potenzen mit ganzzahligen Exponenten definiert und welche wichtigen Eigenschaften haben sie?
11. Was versteht man unter einer diophantischen Gleichung? Man gebe Lösungsverfahren für diophantische Gleichungen mit zwei Unbekannten an.
12. Welche verschiedenen Wege zur Konstruktion der rationalen Zahlen gibt es?

Aufgaben

1. Es sei $\bar{\mathbf{Q}}$ die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich der Relation

$$(a, b) \sim (c, d) :\Leftrightarrow a + d = b + c .$$

$a \ominus b$ sei die Äquivalenzklasse, die das Paar (a, b) enthält. Man beweise die Unabhängigkeit von den Repräsentanten bei folgenden Definitionen in $\bar{\mathbf{Q}}$:

a) $a \ominus b < c \ominus d :\Leftrightarrow a + d < b + c,$

b) $(a \ominus b) + (c \ominus d) := (a + c) \ominus (b + d).$

2. Es sei $\mathbf{Q}_-$ eine zu $\mathbf{Q}_+$ gleichmächtige Menge mit $\mathbf{Q}_+ \cap \mathbf{Q}_- = \{0\}$ und f eine eineindeutige Abbildung von $\mathbf{Q}_+$ auf $\mathbf{Q}_-$ mit $f(0) = 0$. Für $a, b \in \mathbf{Q}_+$ wird $a + f(b)$ durch folgende Festlegung erklärt:

$$a + f(b) := \begin{cases} a - b & \text{für} \quad a \geqq 0, \quad a, b \in \mathbf{Q}_+, \\ f(b - a) & \text{für} \quad a < b. \end{cases}$$

Man zeige, daß sich jedes Element von $\mathbf{Q}$ in der Form $a + f(b)$ $(a, b \in \mathbf{Q}_+)$ darstellen läßt und dabei

$$a + f(b) = a' + f(b') \Leftrightarrow a + b' = a' + b$$

gilt.

3. Man zeige, daß folgende Definitionen in $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_+ \cup \mathbf{Q}_-$ repräsentantenunabhängig sind (vgl. Aufgabe 2):

a) $a + f(b) < c + f(d) :\Leftrightarrow a + d < c + b,$

b) $\big(a + f(b)\big) + \big(c + f(d)\big) := (a + c) + f(b + d),$

c) $\big(a + f(b)\big) \cdot \big(c + f(d)\big) := (ac + bd) + f(ad + bc).$

4. Man beweise, daß $\mathbb{Q}$ mit den in Aufgabe 3 definierten Operationen und der definierten Relation einen geordneten Körper bildet.

5. Man zeige, daß die Zuordnung

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{me}{ne}, \quad f\left(-\frac{m}{n}\right) = -\frac{me}{ne}$$

(vgl. MfL Bd. 2, S. 68) einen Isomorphismus von $\mathbb{Q}(<, +, \cdot)$ in einen geordneten Körper $K(<, +, \cdot)$ definiert.

6. Es sei M die Menge der Restklassen modulo 5. Man zeige, daß in M keine irreflexive totale Ordnung definiert werden kann, so daß ein geordneter Körper entsteht.

Lösung: Es sei $M = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ die Menge der Restklassen. Unter der Annahme, daß in M eine irreflexive totale Ordnung existiert, existiert dann auch in M o. B. d. A. die Kette

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5.$$

Wir zeigen, daß (O2) nicht erfüllt ist. Es sei $a_i < a_k$ mit $k \neq 5$. Wir addieren $a_j = a_5 - a_i$ und erhalten $a_i + (a_5 - a_i) < a_k + a_j$ und daraus

$$a_5 < a_k + a_j = a_l \quad \text{mit} \quad 0 < l \leqq 5.$$

7. Es sei K' ein Teilkörper eines Körpers K. Man beweise, daß K'

a) das Nullelement von K als Nullelement,

b) das Einselement von K als Einselement

enthält.

8. Man beweise, daß der Durchschnitt beliebig vieler Teilkörper eines Körpers K selbst wieder ein Teilkörper von K ist.

9. Man zeige, daß die Relation

$$(a, b) = (c, d) :\Leftrightarrow a + d = b + c$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist.

10. Mit $m \ominus n$ werden die Äquivalenzklassen bezüglich der in Aufgabe 9 eingeführten Relation bezeichnet. Auf folgende Art und Weise werden eine Ordnung und eine Addition bzw. Multiplikation in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert:

(i) $a \ominus b > c \ominus d :\Leftrightarrow a + d > b + c$,

(ii) $(a \ominus b) + (c \ominus d) := (a + c) \ominus (b + d)$,

(iii) $(a \ominus b) \cdot (c \ominus d) := (ac + bd) \ominus (bc + ad)$.

Man zeige, daß diese Definitionen repräsentantenunabhängig sind.

11. Man zeige, daß die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit den in Aufgabe 10 eingeführten Operationen und der Relation für die Äquivalenzklassen einen geordneten Ring $\overline{\mathbb{Z}}$ bildet.

12. Man beweise, daß $\mathbb{N}$ isomorph in $\overline{\mathbb{Z}}$ enthalten ist.

13. Diese Eigenschaft gestattet es, $\bar{\mathbf{Z}}$ als eine Erweiterung von $\mathbf{N}$ anzusehen und den zu $\mathbf{N}$ isomorphen Teilhalbring von $\bar{\mathbf{Z}}$ mit $\mathbf{N}$ zu identifizieren. Dieser so konstruierte Ring $\mathbf{Z}$ ist der kleinste Ring, der $\mathbf{N}$ enthält, d. h., daß kein echter Teilring von $\mathbf{Z}$ existiert, der $\mathbf{N}$ enthält. Man bezeichnet $\mathbf{Z}$ als Differenzenring von $\mathbf{N}$. Man beweise die Minimalität von $\mathbf{Z}$.

14. Man zeige, daß die Relation

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = cb$$

eine Äquivalenzrelation in $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ ist.

15. Man zeige, daß folgende Definitionen repräsentantenunabhängig sind. Mit $\frac{a}{b}$ werden dabei die Äquivalenzklassen bezüglich der in Aufgabe 14 eingeführten Äquivalenzrelation bezeichnet.

(i) $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} :\Leftrightarrow ad > cb,$

(ii) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + cb}{bd},$

(iii) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}.$

16. Mit den Definitionen aus Aufgabe 15 bildet die Menge der Äquivalenzklassen von $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ einen geordneten Körper $\bar{\bar{\mathbf{Q}}}$, den Quotientenkörper von $\mathbf{Z}$.

17. Man beweise, daß $\mathbf{Z}$ isomorph in $\bar{\bar{\mathbf{Q}}}$ enthalten ist.

18. Man beweise, daß $\bar{\mathbf{Q}}$ und $\bar{\bar{\mathbf{Q}}}$ isomorph sind (vgl. Aufgabe 1).

Hinweis: Die Abbildung wird folgendermaßen definiert:

$$a \ominus b \overset{f}{\longmapsto} \frac{cg - ed}{dg}$$

mit $a = \frac{c}{d}$ und $b = \frac{e}{g}$ ($c, e \in \mathbf{N}$ und $d, g \in \mathbf{N}^*$).

19. Man kann $\mathbf{Q}$ also auf zwei Wegen konstruieren:

1. aus $\mathbf{N}$ den Differenzenring $\mathbf{Z}$ und aus $\mathbf{Z}$ dann den Quotientenkörper $\mathbf{Q}$,
2. aus $\mathbf{N}$ den Quotientenhalbkörper $\mathbf{Q}_+$ und daraus dann den Differenzenring $\mathbf{Q}$. Dieser Differenzenring ist auf Grund der Eigenschaften von $\mathbf{N}$ ein Körper.

Der Differenzenring eines Quotientenhalbkörpers $Q(H)$ ist ein Körper, wenn der zugrunde liegende kommutative und reguläre Halbring H folgende Eigenschaft erfüllt:

(i) Für je zwei verschiedene Elemente a und b aus H ist wenigstens eine der Gleichungen $b + x = a$ oder $a + y = b$ in H lösbar.

Dann gilt:

a) Mit H erfüllt auch $Q(H)$ die Bedingung (i).

b) Mit H ist auch $D(H)$ regulär.

c) Mit H ist auch $D(H)$ ein kommutativer Halbkörper und damit Körper.

Beweis: Zu a) Da zwei beliebige Elemente von $Q(H)$ stets mit gleichem Nenner dargestellt werden können, seien $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{b}$ zwei verschiedene Elemente aus $Q(H)$. Wir haben zu zeigen, daß wenigstens eine der beiden Gleichungen

$$\frac{a}{b} + x = \frac{c}{b} \quad \text{bzw.} \quad \frac{c}{b} + y = \frac{a}{b}$$

in $Q(H)$ lösbar ist.
Nach Voraussetzung ist wenigstens eines der beiden Elemente

$$x_1 = a - c, \quad x_2 = c - a$$

in H enthalten. Daraus folgt, daß wenigstens eines der Elemente

$$x = \frac{c-a}{b} \quad \text{und} \quad y = \frac{a-c}{b}$$

in $Q(H)$ enthalten ist.
Zu b). Wir betrachten in $D(H)$ die Gleichung

$$(a - b)(c_1 - d_1) = (a - b)(c_2 - d_2) \quad \text{mit} \quad a - b \neq 0.$$

Nach (i) gilt wenigstens eine der beiden Gleichungen

$$x(c_1 - d_1) = x(c_2 - d_2), \quad -y(c_1 - d_1) = -y(c_2 - d_2)$$

mit $x \in H$ und $y \in H$. In jedem Fall gibt es aber ein $z \in H$ mit $z(c_1 - d_1) = z(c_2 - d_2)$. Daraus folgt aber $z(c_1 + d_2) = z(c_2 + d_1)$ und daraus wegen der Regularität von H

$$c_1 + d_2 = c_2 + d_1.$$

Das bedeutet aber, daß $c_1 - d_1 = c_2 - d_2$ gilt.
Analog zeigt man, daß aus

$$(c_1 - d_1)(a - b) = (c_2 - d_2)(a - b) \quad \text{mit} \quad a - b \neq 0$$

ebenfalls $c_1 - d_1 = c_2 - d_2$ folgt.
Zu c). Das Einselement des Halbkörpers H ist auch das Einselement von $D(H)$ (vgl. MfL Bd. 2, S. 61). Damit bleibt zu zeigen, daß jedes Element $a - b \neq 0$ aus $D(H)$ ein Inverses in $D(H)$ besitzt und daß die Multiplikation in $D(H)$ auch kommutativ ist.
Wegen $a - b = x$ oder $a - b = -y$ mit $x \in H$ bzw. $y \in H$ gilt aber

$$(a - b)^{-1} = x^{-1} \quad \text{oder} \quad (a - b)^{-1} = -y^{-1}$$

mit $x^{-1} \in H$ bzw. $y^{-1} \in H$, d. h. $-y^{-1} \in D(H)$.
Zur Kommutativität:

$$\begin{aligned}(a - b)(c - d) &= (ac + bd) - (ad + bc) = (ca + db) - (da + cb)\\ &= (ca + db) - (cb + da) = (c - d)(a - b).\end{aligned}$$

20. Man beweise folgenden Satz: Es sei H ein (nichttrivialer) kommutativer regulärer Halbring mit der Eigenschaft (i) aus Aufgabe 19. Dann läßt sich die Differenzenring- und Quotientenhalbkörperbildung in beiden Reihenfolgen nacheinander ausführen, und es gilt

$$Q(D(H)) \cong D(Q(H)).$$

21. Die Menge aller ganzrationalen Ausdrücke

$$a_0 + a_1\pi + \cdots + a_n\pi^n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \pi^\nu,$$

die sich mit der transzendenten Zahl $\pi \in \mathbf{R}$ und Koeffizienten $a \in \mathbf{N}$ bilden lassen, ist ein Unterhalbring H von $\mathbf{R}$. Man bilde $D(H)$, $Q(H)$, $Q(D(H))$ und $D(Q(H))$ und zeige, daß $D(Q(H))$ ein echter Unterring von $Q(D(H))$ ist.

22. Man beweise:

a) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, b) $|a^n| = |a|^n$.

23. Man beweise: Aus $a < c < b$ folgt $|c| < \max(|a|, |b|)$.

24. Man beweise: Ist $|b - a| < |b|$, dann haben a und b das gleiche Vorzeichen.

Anleitung: Man beweise die Kontraposition dieser Aussage.

25. Man beweise:

$$\bigwedge_{x,y,z \in \mathbf{Q}} \max(|x + y - 2z|, |x - y|) = |x - z| + |y - z|.$$

26. Man zeige:

a) $\max(a, b) = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$, b) $\min(a, b) = \dfrac{a + b - |a - b|}{2}$.

27. Es sei $\varphi\colon \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}_+$ eine eindeutige Abbildung mit den Eigenschaften

(1) $\varphi(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$,

(2) $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$, (3) $\varphi(a + b) \leqq \varphi(a) + \varphi(b)$.

Dann gelten folgende Eigenschaften:

(4) $\varphi(1) = 1$, (5) $\varphi\left(\dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{1}{\varphi(a)}$, $a \neq 0$,

(6) $\varphi(-1) = 1$, (7) $\varphi(-a) = \varphi(a)$,

(8) $\varphi(a - b) \geqq |\varphi(a) - \varphi(b)|$.

Man zeige, daß die genannten Eigenschaften in folgenden Fällen erfüllt sind:

a) $\varphi(a) := |a|$. b) $\varphi(a) := \begin{cases} 0 & \text{für } a = 0, \\ 1 & \text{für } a \neq 0. \end{cases}$

c) Es sei p eine Primzahl. Jede von 0 verschiedene Zahl $a \in \mathbf{Z}$ besitzt eine eindeutige Darstellung der Form $a = p^k a'$ mit $k \geqq 0$ und $a' \sqcap p = 1$. Man setzt

$$\varphi_p(a) = p^{-k}, \quad \varphi_p(0) = 0$$

und für $a = \dfrac{b}{c} \in \mathbf{Q}$, $b, c \in \mathbf{Z}$,

$$\varphi_p(a) = \varphi_p\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{\varphi_p(b)}{\varphi_p(c)}.$$

28. Man beweise durch vollständige Induktion die Bernoullische Ungleichung

$$(1 + a)^n > 1 + na \quad \text{für} \quad a > -1, a \neq 0 \text{ und } n > 1.$$

29. Man beweise die Ungleichung

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n < \frac{1}{1-a}, \quad 0 < a < 1.$$

30. Man beweise die Abschätzung

$$\bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq 2}} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Anleitung: Zum Beweis der ersten Ungleichung forme man diese in eine bekannte Ungleichung um.
Zum Beweis der zweiten Ungleichung verwende man die Abschätzung $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ und die Ungleichung aus Aufgabe 29.

31. Man untersuche, für welche n die Ungleichung $n^{n+1} < (n+1)^n$ und für welche n die Ungleichung $n^{n+1} > (n+1)^n$ gilt.

32. Man beweise, daß für alle rationalen Zahlen a, b, c, d mit $0 < a \leqq b \leqq c \leqq d$

$$\text{(i)} \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geqq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d}$$

ist. Man gebe eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß in (i) das Gleichheitszeichen gilt.

Hinweis: Man forme die Ungleichung so um, daß auf der einen Seite der Ungleichung ein Produkt und auf der anderen Seite Null entsteht.

33. Man untersuche, ob unter allen Paaren (a, b) positiver rationaler Zahlen solche existieren, für die

$$f(a, b) = \frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

einen kleinsten Wert annimmt. Wenn ja, dann ist dieser kleinste Wert anzugeben.

34. Es seien x_i, y_i $(i = 1, \ldots, n)$ rationale Zahlen, und es gelte $x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$ und $y_1 \geqq y_2 \geqq \cdots \geqq y_n$. Es sei $z_1, z_2, \ldots, z_n$ irgendeine Anordnung der Zahlen $y_1, \ldots, y_n$. Man beweise die Abschätzung

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \leqq \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2.$$

Lösung: Da $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2$ ist, folgt nach Auflösung der Klammern der obigen Ungleichung, daß sie äquivalent ist zu

$$\text{(i)} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geqq \sum_{i=1}^{n} x_i z_i.$$

Da es nur endlich viele Umordnungen für die y_i geben kann, können nur endlich viele Werte für die rechte Seite von (i) auftreten; unter diesen existiert ein größter Wert. Wir werden zeigen, daß dieser nur dann angenommen wird, wenn $y_i = z_i$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt.
Es gilt

(ii) $\sum_{i=1}^{n} x_i z_i = x_1 z_1 + \cdots + x_l z_l + \cdots + x_k z_k + \cdots + x_n z_n.$

Gilt in (ii) $x_l = x_k$ und $z_l < z_k$, so vertauschen wir die Summanden $x_l z_l$ und $x_k z_k$.
Es sei nun in (ii) $x_l > x_k$ und $z_l < z_k$. Dann gilt $(x_l - x_k)(z_l - z_k) < 0$ und damit

(iii) $x_l z_l + x_k z_k < x_l z_k + x_k z_l.$

Aus (iii) folgt, daß $\sum_{i=1}^{n} x_i z_i$ für diesen Fall kleiner ist als in einer Anordnung, in der z_l und z_k miteinander vertauscht wurden. Gilt für alle (z_l, z_k) mit $l < k$ die Relation $z_l \geqq z_k$, so nimmt $\sum_{i=1}^{n} x_i z_i$ seinen größten Wert an. Dann muß aber die Anordnung $z_1, \ldots, z_n$ — bis auf die Anordnung eventuell gleicher z_i, die dann auch vertauscht werden dürfen — mit $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ übereinstimmen. Damit ist (i) und somit auch die Gültigkeit der vorgegebenen Ungleichung bewiesen.

35. Man untersuche die Lösbarkeit der Gleichung

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x + y + z}$$

im Bereich der rationalen Zahlen.

36. Man beweise die Abschätzung

$$\bigwedge_{a,b,c \in \mathbf{Q}_+} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqq \frac{9}{a + b + c}.$$

37. Man beweise: Ist $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ und $b > 0$ und $d > 0$, dann gilt

$$\frac{a}{b} < \frac{a + c}{b + d} < \frac{c}{d}.$$

38. Man beweise: Für alle $a_i \in \mathbf{Q}$ und alle $b_i \in \mathbf{Q}_+^*$ gilt

$$\min\left(\frac{a_i}{b_i} : 1 \leqq i \leqq n\right) \leqq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \leqq \max\left(\frac{a_i}{b_i} : 1 \leqq i \leqq n\right).$$

39. Man bestimme n rationale Zahlen, deren Summe gleich der Summe ihrer Quadrate ist.

Lösung: Es seien $c_1, c_2, \ldots, c_n$ beliebige rationale Zahlen, wobei mindestens zwei voneinander verschieden sind:

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n = \alpha \neq 0 \quad \text{und} \quad c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2 = \beta \neq 0.$$

Gesuchte Zahlen sind $x_i = c_i \cdot \frac{\alpha}{\beta}$ für $i = 1, \ldots, n$.

Beweis: Es ist

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = (c_1 + \cdots + c_n)\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2}{\beta},$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = (c_1^2 + \cdots + c_n^2)\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \beta\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha^2}{\beta}.$$

Ist $c = c_1 = \cdots = c_n \neq 0$, dann gilt $\alpha = nc$ und $\beta = nc^2$. Daraus folgt $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{c}$ und daraus $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$. Ist $c_1 + c_2 + \cdots + c_n = \alpha = 0$, aber $\beta \neq 0$, dann gilt $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

40. Man zeige

$$\frac{1}{3}n^3 < 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 < \frac{1}{3}(n+1)^3 \quad \text{für} \quad n \geqq 1.$$

Beweis: Der Beweis wird mittels vollständiger Induktion geführt.
Induktionsanfang:

$$n = 1: \quad \frac{1}{3} < 1 < \frac{1}{3}2^3 = \frac{8}{3}.$$

Induktionsvoraussetzung:

$$n = k: \quad \frac{1}{3}k^3 < 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 < \frac{1}{3}(k+1)^3.$$

Induktionsbehauptung:

$$n = k+1: \quad \frac{1}{3}(k+1)^3 < 1^2 + \cdots + (k+1)^2 < \frac{1}{3}(k+2)^3.$$

Induktionsbeweis:

1. Linke Ungleichung

$$\frac{1}{3}(k+1)^3 = \frac{1}{3}k^3 + k^2 + k + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}k^3 + (k^2 + 2k + 1) - k - \frac{2}{3}$$
$$= \frac{1}{3}k^3 + (k+1)^2 - \left(k + \frac{2}{3}\right) < 1^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2.$$

2. Rechte Ungleichung

$$\frac{1}{3}(k+2)^3 = \frac{1}{3}k^3 + 2k^2 + 4k + \frac{8}{3} = \frac{1}{3}k^3 + k^2 + k + \frac{1}{3} + \left(k^2 + 3k + \frac{7}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{3}(k+1)^3 + (k^2 + 2k + 1) + \left(k + \frac{4}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{3}(k+1)^3 + (k+1)^2 + \left(k + \frac{4}{3}\right) > 1^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2.$$

41. Man beweise

$$\frac{1}{p+1}n^{p+1} < 1^p + 2^p + \cdots + n^p < \frac{1}{p+1}(n+1)^{p+1}$$

für $n \geqq 1$ und $n \in \mathbf{N}$.

42. Man beweise: Für beliebige rationale Zahlen $a \neq 0$, $b \neq 0$ und beliebige ganze Zahlen n, m gelten folgende Potenzgesetze:

a) $a^{-m} = (a^{-1})^m = (a^m)^{-1}$, b) $(ab)^m = a^m b^m$,

c) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$, d) $a^m a^n = a^{m+n}$,

e) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, f) $(a^m)^n = a^{mn}$.

43. Man beweise: Für beliebige Zahlen $m, n, p, q \in \mathbf{Z}$ mit $m - p \neq 0$ gilt: $m - p \mid mq + np$ dann und nur dann, wenn $m - p \mid mn + pq$ ist.

44. Man zeige, daß die Zahlen 25, -20, 16, 46, -21, 18, 37, -17 ein vollständiges Repräsentantensystem modulo 8 bilden.

45. Man zeige, daß die Zahlen 19, 23, 25, -19 ein primes Restsystem modulo 12 bilden.

46. Man gebe ein vollständiges Repräsentantensystem für die Restklassen und die primen Restklassen bezüglich folgender Moduln an:

a) $m = 9$, b) $m = 8$, c) $m = 13$,
d) $m = 12$, e) $m = 7$, f) $m = 10$.

47. Auf wieviel verschiedene Weisen läßt sich die Nullrestklasse $[0]_{16}$ als Produkt zweier von $[0]_{16}$ verschiedener Restklassen schreiben? Man gebe alle diese Produktdarstellungen an.

48. Man beweise durch vollständige Induktion

$$\sum_{i=1}^{n} [a_i]_m \, [b_i]_m = \left[\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right]_m .$$

49. Man beweise

$$[a]_m - [b]_m = [a - b]_m .$$

50. Man zeige, wenn $p > 3$ und p und $2p + 1$ Primzahlen sind, dann ist $4p + 1$ keine Primzahl.

Lösung: Nach Voraussetzung gilt $p \sqcap 3 = 1$ und $(2p + 1) \sqcap 3 = 1$. Daraus folgt $p^2 \equiv 1 \bmod 3$ und $(2p + 1)^2 \equiv 1 \bmod 3$. Multiplikation der ersten Kongruenz mit 4 ergibt unter Beachtung von

$$4p^2 + 4p + 1 \equiv 1 \bmod 3$$

die Kongruenz

$$4p + 1 \equiv -3 \equiv 0 \bmod 3 .$$

Das ist gleichbedeutend mit $3 \mid 4p + 1$, und daraus folgt, daß $4p + 1$ keine Primzahl ist.

51. Man zeige, daß $8p^2 + 1$ (p ist Primzahl) nur dann eine Primzahl ist, wenn $p = 3$ ist.

52. Es seien m, n natürliche Zahlen. Man zeige, daß die Kongruenz

$$a^{6m} + a^{6n} \equiv 0 \bmod 7$$

nur gilt, wenn a ein Vielfaches von 7 ist.

Lösung:

1. $a \equiv 0 \bmod 7$.

Daraus folgt $a^{6m} \equiv 0 \bmod 7$ und $a^{6n} \equiv 0 \bmod 7$. Addition der beiden Kongruenzen liefert

$$a^{6m} + a^{6n} \equiv 0 \bmod 7.$$

2. $a \not\equiv 0 \bmod 7$.

Daraus folgt $a \sqcap 7 = 1$. Nach dem Satz von FERMAT gilt dann

$$6^6 \equiv 1 \bmod 7.$$

Daraus folgt $a^{6m} \equiv 1 \bmod 7$ und $a^{6n} \equiv 1 \bmod 7$. Addition der beiden Kongruenzen liefert

$$a^{6m} + a^{6n} \equiv 2 \bmod 7.$$

53. Man zeige, daß für eine beliebige ganze Zahl x die Kongruenz $x^7 \equiv x \bmod 42$ gilt.

Anleitung: Man zerlege 42 in ein Produkt und untersuche die Kongruenzen bezüglich dieser Faktoren.

54. Man bestimme die letzten zwei Ziffern der Zahl 2^{100}.

55. Man bestimme die Reste bei folgenden Divisionen in $\mathbf{Z}$:

a) 383^{175} durch 45, b) 109^{345} durch 14,

c) 439^{291} durch 60, d) 293^{275} durch 48,

e) 66^{17} durch 7, f) 117^{53} durch 11.

56. Welchen Rest läßt eine natürliche Zahl a bei der Division durch 73, wenn die Zahlen $a^{100} - 2$ und $a^{101} - 69$ durch 73 teilbar sind?

57. Ist $z = (11^3 + 7^5)^4 - 427^{19}(47^5 - 132^3)^7$ durch 17 teilbar?

58. $\dfrac{11a + 2b}{19}$ sei eine ganze Zahl. Man zeige, daß dann auch $\dfrac{18a + 5b}{19}$ eine ganze Zahl ist.

59. Man zeige: Gelten die beiden Kongruenzen

$$ac \equiv bd \bmod m, \quad a \equiv b \bmod m$$

und $a \sqcap m = 1$, dann kann man gliedweise die erste Kongruenz durch die zweite dividieren und erhält

$$c \equiv d \bmod m.$$

60. Man beweise, daß $n^2 - 1 \equiv 0 \bmod 8$ gilt, wenn n eine ungerade Zahl ist.

Anleitung: Man bestimme ein vollständiges Restsystem modulo 8 und wende anschließend Fallunterscheidung an.

61. Es sei p eine Primzahl. Man zeige, daß aus $a \equiv b \bmod p^n$ die Gültigkeit der Kongruenz $a^p \equiv b^p \bmod p^{n+1}$ folgt.

62. Man leite eine Regel für die Teilbarkeit a) durch 3, b) durch 9 her.

Lösung zu a): Angenommen, es ist $3 \mid a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$. Dann gilt

$$a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 \equiv 0 \bmod 3.$$

Das ist gleichwertig mit

$$a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0 \equiv 0 \bmod 3.$$

Das bedeutet, daß eine Zahl durch 3 teilbar ist, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

63. Man leite eine Regel für die Teilbarkeit a) durch 4, b) durch 8, c) durch 11, d) durch 7 her.

64. Man beweise folgende Aussagen:

a) Jede Lösung x der linearen Kongruenz $ax \equiv b \bmod m$ ist auch Lösung der durch $d = a \sqcap m$ „gekürzten" linearen Kongruenz $a'x \equiv b' \bmod m'$ und umgekehrt, wobei also $a = da'$, $m = dm'$, $b = db'$ und $a' \sqcap m' = 1$ gilt.

b) In $\mathbf{Z}$ ist die Gesamtheit aller Lösungen der linearen Kongruenz

$$a'x \equiv b' \bmod m' \quad \text{mit} \quad a' \sqcap m' = 1$$

genau die Menge aller modulo m' zu x kongruenten Elemente von $\mathbf{Z}$. Man erhält also aus einer bereits bekannten Lösung x_0 die allgemeine Lösung als Restklasse $[x_0]_{m'}$. Nach a) ist dies auch die allgemeine Lösung jeder linearen Kongruenz $ax \equiv b \bmod m$ mit $a \sqcap m = d$ und $d \mid b$, die durch „Kürzen" in die obige Gleichung übergeführt werden kann.

c) Jeder linearen Kongruenz entspricht eine Gleichung im Restklassenring $\mathbf{Z}/R_m$. Diese Gleichung ist eindeutig lösbar, wenn $a \sqcap m = 1$ ist.
Entsprechend kann man eine beliebige Kongruenz

$$ax \equiv b \bmod m \quad \text{mit} \quad a \sqcap m = d \quad \text{und} \quad d \mid b$$

als eine Gleichung im Restklassenring $\mathbf{Z}/R_m$ betrachten:

$$[a]_m \, [x]_m = [b]_m .$$

Die allgemeine Lösung dieser Kongruenz ist aber nach b) nur als Restklasse $[x_0]_{m'}$ mit $m = dm'$ in $\mathbf{Z}/R_{m'}$ gegeben. Es gilt aber, daß jede Restklasse $[x_0]_{m'}$ in Restklassen $[x_0 + r_0 m']_m$ zerfällt, wobei r_0 ein vollständiges Repräsentantensystem modulo d durchläuft.

65. Man bestimme alle Lösungen folgender Kongruenzen durch Rechnung in den entsprechenden Restklassenringen:

a) $7x \equiv 16 \bmod 3$, b) $13x \equiv 5 \bmod 17$,
c) $2x \equiv 7 \bmod 15$, d) $5x \equiv 2 \bmod 8$,
e) $7x \equiv 2 \bmod 13$, f) $13x \equiv 5 \bmod 47$,
g) $3x \equiv 23 \bmod 37$, h) $3x \equiv 1 \bmod 5$,
i) $3x \equiv 1 \bmod 13$, j) $2x \equiv 7 \bmod 15$,

k) $12x \equiv 1 \bmod 7$, l) $8x \equiv 1 \bmod 5$,
m) $6x \equiv 3 \bmod 7$, n) $6x + 5 \equiv 6 \bmod 7$,
o) $3x + 4 \equiv 2 \bmod 5$, p) $15x + 4 \equiv 7 \bmod 11$.

Lösungsbeispiel: Der Kongruenz

$$8x \equiv 2 \bmod 11$$

entspricht im entsprechenden Restklassenring die Gleichung $[8]_{11}\,[x]_{11} = [2]_{11}$. Multiplikation mit $[7]_{11}$ ergibt $[56]_{11}\,[x]_{11} = [14]_{11}$. Daraus folgt

$$[1]_{11}\,[x]_{11} = [3]_{11} \quad \text{bzw.} \quad [x]_{11} = [3]_{11}.$$

Das bedeutet, daß jede Zahl $x = 3 + 11r$ mit $r \in \mathbf{Z}$ Lösung der obigen Kongruenz ist.

66. Man löse folgende Kongruenzen analog zu Aufgabe 65:

a) $12x \equiv 9 \bmod 15$, b) $12x \equiv 9 \bmod 18$,
c) $20x \equiv 10 \bmod 25$, d) $10x \equiv 25 \bmod 35$,
e) $8x \equiv 3 \bmod 14$, f) $39x \equiv 84 \bmod 93$,
g) $90x + 18 \equiv 0 \bmod 138$, h) $375x \equiv 195 \bmod 501$,
i) $14x \equiv 22 \bmod 36$, j) $78x \equiv 42 \bmod 51$,
k) $114x \equiv 42 \bmod 87$, l) $6x \equiv 5 \bmod 9$.

Lösungsbeispiel: Gegeben sei die Kongruenz

$$10x \equiv 5 \bmod 15.$$

Da $10 \sqcap 15 = 5$ und $5 \mid 5$ gilt, ist die Kongruenz lösbar. Ihr entspricht folgende durch „Kürzen" entstandene Kongruenz $2x \equiv 1 \bmod 3$. Dieser entspricht wiederum die Gleichung $[2]_3\,[x]_3 = [1]_3$. Multiplikation mit $[2]_3$ ergibt $[4]_3\,[x]_3 = [2]_3$, und daraus folgt

$$[1]_3\,[x]_3 = [2]_3.$$

Dies ist die allgemeine Lösung, dargestellt im Restklassenring $\mathbf{Z}/R_3$. In $\mathbf{Z}/R_{15}$ erhält man daraus folgende Lösung:

$$[x_1]_{15} = [2]_{15},$$
$$[x_2]_{15} = [2 + 3]_{15} = [5]_{15},$$
$$[x_3]_{15} = [2 + 6]_{15} = [8]_{15},$$
$$[x_4]_{15} = [2 + 9]_{15} = [11]_{15},$$
$$[x_5]_{15} = [2 + 12]_{15} = [14]_{15}.$$

67. Man bestimme die Lösungen der folgenden linearen Kongruenzen mit Hilfe der Eulerschen Funktion:

a) $3x \equiv 1 \bmod 5$, b) $5x \equiv 6 \bmod 7$,
c) $5x \equiv 7 \bmod 10$, d) $3x \equiv 8 \bmod 13$,
e) $25x \equiv 15 \bmod 17$, f) $29x \equiv 3 \bmod 12$,
g) $5x \equiv 26 \bmod 12$, h) $4x \equiv 7 \bmod 8$.

Lösungsbeispiel: Die Kongruenz

$$9x \equiv 6 \bmod 15$$

ist äquivalent zu der Kongruenz $3x \equiv 2 \bmod 5$. Es ist $\varphi(5) = 4$, und daraus folgt

$$3^4 \equiv 1 \bmod 5, \quad 3^4 \cdot 2 \equiv 2 \bmod 5 \quad \text{und} \quad 3(3^3 \cdot 2) \equiv 2 \bmod 5.$$

Daraus ergibt sich als allgemeine Lösung

$$x = 3^3 \cdot 2 + 5r = 54 + 5r \quad \text{mit} \quad r \in \mathbf{Z}.$$

68. Man löse folgende lineare Kongruenzen mit Hilfe von Kettenbrüchen:

a) $7x \equiv 4 \bmod 19$, b) $13x \equiv 1 \bmod 27$,
c) $37x \equiv 25 \bmod 117$, d) $113x \equiv 89 \bmod 311$,
e) $221x \equiv 111 \bmod 360$, f) $23x \equiv 667 \bmod 613$,
g) $143x \equiv 41 \bmod 221$, h) $91x \equiv 143 \bmod 222$,
i) $271x \equiv 25 \bmod 119$, j) $13x \equiv 178 \bmod 153$.

Lösungsbeispiel (vgl. MfL Bd. 2, S. 85): Gegeben sei die Kongruenz

$$9x \equiv 4 \bmod 17.$$

Die Entwicklung von $\frac{9}{17}$ als Kettenbruch ergibt

$$\frac{9}{17} = 0 + \cfrac{1}{\frac{17}{9}} = 0 + \cfrac{1}{1 + \frac{8}{9}} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{9}{8}}} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{8}}},$$

also in abgekürzter Schreibweise $\frac{9}{17} = [0; 1, 1, 8]$. Daraus ergeben sich die Näherungsbrüche

$$s_0 = 0, \quad s_1 = \frac{1}{1}, \quad s_2 = \frac{1}{2}, \quad s_3 = \frac{9}{17}.$$

Als eine spezielle Lösung folgt damit $x_0 = (-1)^{3-1} \cdot 2 \cdot 4 = 8$. Die allgemeine Lösung laute dann

$$x = 8 + 17r \quad \text{mit} \quad r \in \mathbf{Z}.$$

69. Man löse folgendes System von Kongruenzen:

$$3y_1 + 4y_2 \equiv 0 \bmod 5,$$
$$4y_1 + y_2 \equiv 3 \bmod 5.$$

70. Man finde Zahlen $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 \in \mathbf{Z}$, für welche das System der Kongruenzen

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \equiv b_1 \bmod 7,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \equiv b_2 \bmod 7$$

mit $x_1, x_2 \in \mathbf{Z}$, $0 \leqq x_1 \leqq 7$, $0 \leqq x_2 \leqq 7$ a) keine Lösung, b) genau eine Lösung, c) mehr als eine Lösung hat.

71. Man löse folgende diophantische Gleichungen:

a) $3x + 4y = 13$, b) $8x - 13y = 63$,
c) $7x - 19y = 23$, d) $39x - 22y = 10$,
e) $17x - 25y = 117$, f) $43x + 37y = 21$,

g) $53x + 47y = 11$, h) $45x - 37y = 25$,
i) $81x - 48y = 33$, j) $26x + 34y = 13$,
k) $122x + 129y = 2$, l) $258x - 172y = 56$.

72. Man ermittle alle positiven ganzzahligen Lösungen des Gleichungssystems

$$7x + 11y + 13z = 3000,$$
$$3x + 7y + 17z = 3000.$$

Der Bereich der reellen Zahlen

Kontrollfragen

1. Aus welchen Gründen ist es notwendig, den Zahlenbereich der rationalen Zahlen zu erweitern?
2. Wie lautet das allgemeine Prinzip zur Konstruktion einer stetigen Erweiterung von $\mathbf{Q}$ und welcher Weg wird in MfL Bd. 2 eingeschlagen?
3. Wie lautet die Definition für einen Dezimalbruch? Man vergleiche die Mengen $\mathbf{R}_+^{(e)}$, $\mathbf{R}_+^{(p)}$, $\mathbf{R}_+$ und $\mathbf{Q}_+$.
4. Wie ist die Ordnung in $\mathbf{R}_+$ definiert? Man erläutere Eigenschaften dieser Relation (Eigenschaften der Ordnung „$<$", Dichtheit von $\mathbf{Q}_+$ in $\mathbf{R}_+$, Archimedizität und Stetigkeit von $\mathbf{R}_+$).
5. Wie sind die Addition und die Multiplikation in $\mathbf{R}_+$ definiert?
6. Wie erhält man, ausgehend von $\mathbf{R}_+$, den Bereich der reellen Zahlen? (Man beschreibe das Vorgehen in großen Zügen und wiederhole dazu die Konstruktion von $\mathbf{Q}$ aus $\mathbf{Q}_+$.)
7. Welche Grundeigenschaften (Strukturgesetze) kennzeichnen $\mathbf{R}$ als einen stetigen Körper?
8. Welche weiteren Eigenschaften des Rechnens mit reellen Zahlen sind wichtig?
9. Was versteht man unter den Begriffen Dedekindscher Schnitt, Intervallschachtelung und Fundamentalfolge in einem beliebigen geordneten Körper?
10. Man veranschauliche sich die logischen Abhängigkeiten folgender Aussagen über geordnete Körper K:
    (1) K ist archimedisch geordnet.
    (2) K ist stetig.
    (3) K ist vollständig.
    (4) In K besitzt jede Intervallschachtelung ein Limeselement.
11. Auf welche verschiedenen Weisen kann man einen stetigen Körper charakterisieren? Wie viele stetige Körper gibt es?

12. Wie läßt sich die Konstruktion des stetigen Körpers R unter Verwendung von Dedekindschen Schnitten und Fundamentalfolgen skizzieren? Warum sind durch diese Konstruktionen im Prinzip alle anderen angegebenen Möglichkeiten mit erfaßt?

Aufgaben

Bemerkung: Bei den folgenden Aufgaben stelle man sich auf den Standpunkt, man habe den Bereich der reellen Zahlen nach irgendeinem der zueinander äquivalenten Verfahren bereits konstruiert. Da man (bis auf Isomorphie) einen einzigen den Körper der rationalen Zahlen $\mathbf{Q}$ umfassenden stetigen Körper $\mathbf{R}$ erhält, werden nur die charakteristischen Eigenschaften eines stetigen Körpers vorausgesetzt. In Aufgabe 10 wird der Zusammenhang mit den in MfL Bd. 2 verwendeten Dezimalbrüchen hergestellt.

1. Man beweise:

a) Für reelle Zahlen a und b sowie eine natürliche Zahl $n \geqq 1$ gilt: Aus $0 < a < b$ folgt $a^n < b^n$.

b) Für positive reelle Zahlen a und b und eine natürliche Zahl $n \geqq 1$ ist die Ungleichung $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leqq \frac{a^n + b^n}{2}$ erfüllt. Wann gilt das Gleichheitszeichen?

c) Das Produkt der positiven reellen Zahlen a_i $(1 \leqq i \leqq n)$ sei gleich 1. Dann gilt $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \geqq n$. Das Gleichheitszeichen trifft genau dann zu, wenn $a_i = 1$ $(1 \leqq i \leqq n)$ ist.

d) Für beliebige positive reelle Zahlen a_i $(1 \leqq i \leqq n)$ ist $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1} \geqq n$. Wann gilt das Gleichheitszeichen?

e) Für positive reelle Zahlen a_i $(1 \leqq i \leqq n)$ gilt $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geqq n^2$.

f) * Bezeichnet man die Summe der positiven reellen Zahlen a_i $(1 \leqq i \leqq n)$ mit s, dann gilt für $n \geqq 2$ die Ungleichung $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s - a_i} \geqq \frac{n}{n-1}$.

Hinweis: Die Aufgaben a), b), c) und e) kann man durch vollständige Induktion beweisen.

2. In eine Tabelle mit m Zeilen und n Spalten seien reelle Zahlen eingetragen worden. Man darf bei allen Zahlen ein und derselben Zeile oder ein und derselben Spalte gleichzeitig das Vorzeichen ändern. Man zeige, daß man durch mehrmalige Anwendung dieser Operationen erreichen kann, daß die Summe der Zahlen in jeder Reihe (Zeile oder Spalte) der Tabelle positiv oder 0 ist.

Lösung: Ist die Summe der Zahlen einer Reihe negativ, so wird durch das Anwenden der genannten Operation auf diese Reihe die Summe S aller Zahlen der Tabelle vergrößert. Da sich keine Zahl der Tabelle dem Betrag nach bei den Operationen ändert, gibt es nur endlich viele Möglichkeiten für S. Beim Auftreten der maximalen Summe $S_{\max}$ hat die Tabelle die geforderte Eigenschaft.

3. a) * Es seien $2n$ voneinander verschiedene positive reelle Zahlen gegeben. Wie muß man diese Zahlen numerieren, damit die Summe $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \cdots + |a_{2n} - a_1|$ möglichst groß wird?

   b) Die reellen Zahlen a_i $(1 \leqq i \leqq n)$ mögen die Bedingungen $a_0 = a_n = 0$ und $a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1} \geqq 0$ für $1 \leqq i \leqq n-1$ erfüllen. Man weise nach, daß diese Zahlen nicht positiv sind.

4. Gegeben seien positive reelle Zahlen a_i $(1 \leqq i \leqq m)$ und b_j $(1 \leqq j \leqq n)$, die der Gleichung $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ genügen. Man weise nach, daß man in eine Tabelle mit m Zeilen und n Spalten höchstens $m + n - 1$ positive reelle Zahlen so eintragen kann (an den übrigen Stellen soll 0 stehen), daß die Zeilensummen jeweils gleich $a_1, a_2, \ldots, a_m$ und die Spaltensummen jeweils gleich $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sind.

5. a) In eine Tabelle mit n Zeilen und n Spalten werden reelle Zahlen so eingetragen, daß die Summe der Zahlen in einem „Kreuz" $\sum_{i=1}^{n} a_{il} + \sum_{j=1}^{n} a_{kj} - a_{kl} \geqq a$ $(1 \leqq k \leqq n,\ 1 \leqq l \leqq n)$ ist. Welches ist die kleinstmögliche Summe aller Zahlen in der Tabelle?

   b) * In eine Tabelle mit n Zeilen und n Spalten werden natürliche Zahlen so eingetragen, daß im Fall $a_{kl} = 0$ die Summe der Zahlen im zugehörigen „Kreuz" $\sum_{i=1}^{n} a_{il} + \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \geqq n$ ist. Man zeige, daß dann die Summe aller Zahlen in der Tabelle nicht kleiner als $\frac{1}{2} n^2$ ist.

6. Man beweise die folgenden Aussagen:

   a) Für beliebige reelle Zahlen a_i, b_i $(1 \leqq i \leqq n)$ gilt
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$
   (Lagrangesche Identität).

   b) $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$ gilt genau dann, wenn $a_i = 0$ $(1 \leqq i \leqq n)$ oder $b_i = 0$ $(1 \leqq i \leqq n)$ ist oder ein $k \neq 0$ existiert, so daß $a_i = kb_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ ist.

   c) Für beliebige reelle Zahlen a_i, b_i $(1 \leqq i \leqq n)$ ist die Ungleichung $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$ erfüllt (Cauchy-Bunjakovskijsche Ungleichung).

   Bemerkung: Die Lagrangesche Identität kann durch vollständige Induktion bewiesen werden.

7. (Aufgaben zur Anwendung des binomischen Satzes). Man zeige, daß für beliebige natürliche Zahlen $n > 1$ die folgenden Aussagen gelten (man überlege sich, wann $n = 1$ zulässig ist):

   a) $\bigwedge_{a,b \in \mathbf{R}} b^n - a^n = (b - a) \sum_{k=1}^{n} b^{n-k} a^{k-1}$.

b) $\bigwedge_{a,b\in\mathbf{R}_+} na^{n-1}(b-a) \leqq b^n - a^n \leqq nb^{n-1}(b-a)$.

c) $\bigwedge_{a,\varepsilon\in\mathbf{R}_+^*} \bigvee_{c\in\mathbf{R}} (0 < c < a \wedge (a+c)^n - a^n < \varepsilon \wedge a^n - (a-c)^n < \varepsilon)$.

Hinweis: Man setze $K > \max\left\{\binom{n}{k} : 1 \leqq k \leqq n\right\}$ und wähle dann

$$c < \min\left\{1, a, \frac{\varepsilon}{K(a^{n-1} + \cdots + a + 1)}\right\}.$$

d) $\bigwedge_{a,b\in\mathbf{R}_+} \bigvee_{r\in\mathbf{Q}_+^*} (a < b \Rightarrow a < r^n < b)$.

Hinweis: Ist $k = \max\{i : i \in \mathbf{N} \wedge i^n \leqq a < (i+1)^n\}$, dann gibt es zu jedem $m \in \mathbf{N}^*$ eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl j, für die $0 \leqq j < m$ und $s^n = \left(k + \frac{j}{m}\right)^n \leqq a < \left(k + \frac{j+1}{m}\right)^n = r^n$ gilt. Auf r und s wende man b) an.

8. Man beweise (O 4) $\Leftrightarrow$ (O 4′).

(O 4) Jede nichtleere nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Supremum.

(O 4′) Jede nichtleere nach unten beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Infimum.

(Es sollen dabei nur Eigenschaften benutzt werden, die $\mathbf{R}$ als einen geordneten Körper kennzeichnen.)

9. Es sei A eine nichtleere nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen. Man zeige:

a) Für die Menge $M = \{r : r \in \mathbf{Q} \wedge \bigvee_{a\in A} r < a\}$ gilt $\sup M = \sup A$.

b) Zu jeder natürlichen Zahl $n \geqq 1$ gibt es rationale Zahlen r_n und s_n, für die $s_n - r_n < \frac{1}{n}$ und $r_n \leqq \sup A < s_n$ gilt.

Hinweis: Die Menge $M = \left\{k : k \in \mathbf{Z} \wedge \bigvee_{a\in A} \frac{k}{n} < a\right\}$ ist nach oben beschränkt. Man setze $k_0 = \max M$ und $r_n = \frac{k_0}{n}$ sowie $s_n = \frac{k_0+1}{n} = r_n + \frac{1}{n}$.

c) Man bestimme rationale Zahlen r_n und s_n für

$$A = \{a : a \geqq 0 \wedge a^2 < 2\} \quad \text{und} \quad 1 \leqq n \leqq 4.$$

10. (Dezimaldarstellung reeller Zahlen). Ein echter Dezimalbruch ist eine Folge $(a_\nu)_{\nu\in\mathbf{N}}$ natürlicher Zahlen mit $a_0 = 0$ und $0 \leqq a_\nu \leqq 9$ für alle $\nu \geqq 1$. Man schreibt abkürzend $0{,}a_1a_2a_3\ldots$ Jedem echten Dezimalbruch werden durch

$$r_0 = 0, \quad r_{\nu+1} = r_\nu + \frac{a_{\nu+1}}{10^{\nu+1}} \qquad (\nu \in \mathbf{N}^*),$$

$$s_\nu = r_\nu + \frac{1}{10^\nu} \qquad (\nu \in \mathbf{N})$$

zwei Folgen $(r_\nu)_{\nu\in\mathbf{N}}$ und $(s_\nu)_{\nu\in\mathbf{N}}$, die Folgen der endlichen Näherungsdezimalbrüche, zugeordnet. Man zeige:

a) Für jede natürliche Zahl n gilt $10^n r_n \in \mathbf{N}$, $10^n s_n \in \mathbf{N}$ (d. h., die endlichen Näherungsdezimalbrüche sind gebrochene Zahlen) und $s_{n+1} - r_{n+1} = \frac{1}{10}(s_n - r_n)$.

b) Für beliebige natürliche Zahlen m und n gilt $r_m < s_n$, und falls $m \leqq n$ ist, gilt $r_m \leqq r_n$ und $s_m \geqq s_n$.

c) Zu jedem echten Dezimalbruch $(a_\nu)_{\nu\in\mathbf{N}}$ gibt es genau eine reelle Zahl a, so daß für alle $\nu \in \mathbf{N}$ die Ungleichungen $r_\nu \leqq a \leqq s_\nu$ gelten.

Hinweis: Man weise nach, daß $\{r_\nu : \nu \in \mathbf{N}\}$ nach oben beschränkt ist; für $a = \sup\{r_\nu : \nu \in \mathbf{N}\}$ gilt $r_\nu \leqq a \leqq s_\nu$ $(\nu \in \mathbf{N})$, und falls $r_\nu \leqq b \leqq s_\nu$ $(\nu \in \mathbf{N})$ ist, muß $b = a$ sein.

d) Ein echter Dezimalbruch hat genau dann keine Neunerperiode (d. h. $\bigwedge_{\nu\in\mathbf{N}} \bigvee_{\mu\in\mathbf{N}} a_{\nu+\mu} \neq 9$), wenn $r_\nu \leqq a < s_\nu$ für alle $\nu \in \mathbf{N}$ ist.

e) Zu jeder reellen Zahl a mit $0 \leqq a < 1$ gibt es genau einen echten Dezimalbruch ohne Neunerperiode, so daß $r_\nu \leqq a < s_\nu$ für alle $\nu \in \mathbf{N}$ gilt.

Hinweis: Man zeige: Wenn ein echter Dezimalbruch mit den geforderten Eigenschaften existiert, muß $a_0 = r_0 = 0$ und $a_\nu = \max\left\{k : k \in \mathbf{N} \wedge r_{\nu-1} + \frac{k}{10^\nu} \leqq a\right\}$ für $\nu \geqq 1$ sein. Daraus folgen die Eindeutigkeit sowie Bedingungen für die induktive Definition der Folgen $(r_\nu)_{\nu\in\mathbf{N}}$ und $(s_\nu)_{\nu\in\mathbf{N}}$. Es gilt $0 \leqq a_\nu \leqq 9$, und es tritt keine Neunerperiode auf.

f) Es gibt eine 1-1-Abbildung der Menge aller reellen Zahlen auf die Menge der Dezimalbrüche ohne Neunerperiode.

Hinweis: Zu $b \geqq 1$ findet man eine ganze Zahl k, so daß $0{,}1 \leqq a < 1$ für $a = 10^k b$ gilt. Dann kann man e) anwenden. Ist $b < 0$, so betrachte man zunächst $-b$.

11. (g-adische Darstellung reeller Zahlen). Es sei $g \in \mathbf{N}, g > 1$, fest vorgegeben. Außerdem sei $(a_\nu)_{\nu\in\mathbf{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $a_0 = 0$ und $0 \leqq a_\nu < g$ für $\nu \geqq 0$. Schließlich seien nicht von einer gewissen Stelle an alle a_ν gleich $g - 1$.

Man setze $r_0 = 0$ und $r_{\nu+1} = r_\nu + \frac{a_{\nu+1}}{g^{\nu+1}}$ für $\nu \geqq 0$. Es ist nachzuweisen, daß folgende Eigenschaften gelten:

a) Die Folge $(r_\nu)_{\nu\in\mathbf{N}}$ ist nach oben beschränkt. Bezeichnung: $a = \sup\{r_\nu : \nu \in \mathbf{N}\}$.

b) Für jede natürliche Zahl n gilt $0 \leqq a - r_n < \frac{1}{g^n}$.

c) Für jede natürliche Zahl n gilt $a_{n+1} = [g^{n+1}a] - g[g^n a]$.

Beweis: Aus $0 \leqq a - r_n < \frac{1}{g^n}$ folgt $g^n r_n \leqq g^n a < g^n r_n + 1$, also $g^n r_n = [g^n a]$. Aus $r_{n+1} - r_n = \frac{a_{n+1}}{g^{n+1}}$ erhält man

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= g^{n+1} r_{n+1} - g^{n+1} r_n = g^{n+1} r_{n+1} - g(g^n r_n) \\ &= [g^{n+1}a] - g[g^n a] \quad \text{für jedes } n \geqq 0. \end{aligned}$$

d) Ist a eine reelle Zahl mit der Eigenschaft $0 \leqq a < 1$ und setzt man $a_{n+1} = [g^{n+1}a] - g[g^n a]$ für jede natürliche Zahl $n \geqq 0$, dann gilt $\sup \{r_\nu : \nu \in \mathbf{N}\} = a$.

e) Zu jeder reellen Zahl a mit $0 \leqq a < 1$ gibt es genau eine Folge $(a_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}}$ mit den eingangs dieser Aufgabe genannten Eigenschaften und $a = \sup \{r_\nu : \nu \in \mathbf{N}\}$.

f) Falls es natürliche Zahlen l und k ($k \geqq 1$) gibt, so daß $a_\nu = a_{\nu+k}$ für alle $\nu > l$ gilt, stellt $(a_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}}$ eine gebrochene Zahl dar. (Man schreibt dann gewöhnlich $0{,}a_1a_2 \ldots a_l\overline{a_{l+1} \ldots a_{l+k}}$.)

Bemerkung: Die Überlegungen zeigen unter anderem, daß es eine 1-1-Abbildung der reellen Zahlen $0 \leqq a < 1$ auf die Menge der g-adischen Brüche $0{,}a_1a_2a_3 \ldots$ gibt, bei denen nicht von einer gewissen Stelle an alle a_ν gleich $g - 1$ sind.

12. (Existenz und Eindeutigkeit der n-ten Wurzel). Jede Gleichung $x^n = a$ mit $a \in \mathbf{R}_+^*$, $n \in \mathbf{N}$ und $n > 1$ hat genau eine nichtnegative Lösung $x_0 \in \mathbf{R}$ (für $a = 0$ oder $n = 1$ erhält man $x_0 = a$). Dazu zeige man:

a) Die Menge $A = \{x : x \in \mathbf{R}_+ \wedge x^n < a\}$ ist nach oben beschränkt, außerdem gilt $A \neq \emptyset$. Man setze $x_0 = \sup A$. Die reelle Zahl x_0 ist positiv.

b) Es gilt $x_0^n = a$.

Hinweis: Falls $x_0^n < a$ ist, gibt es nach Aufgabe 7c) eine reelle Zahl c mit $0 < c < a$, so daß $(x_0 + c)^n - x_0^n < \varepsilon = a - x_0^n$ ist. Man erhält $(x_0 + c)^n < \varepsilon + x_0^n = a$, was der Definition von x_0 widerspricht. Analog betrachte man $x_0^n > a$ (vgl. MfL Bd. 2, 5.4.).

c) Eine positive reelle Zahl x_0' mit $x_0 \neq x_0'$ ist nicht Lösung der Gleichung $x^n = a$.

13. (Wurzelgesetze). Für positive reelle Zahlen a und b sowie natürliche Zahlen m und n ($m, n \geqq 2$) zeige man, daß folgende Gleichungen gelten:

1. $\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}$, 2. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$,

3. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, 4. $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$,

5. $\sqrt[nm]{a^m} = \sqrt[n]{a}$, 6. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$.

Beispiel: $\sqrt[n]{ab}$ ist die reelle Zahl $x > 0$, für die $x^n = ab$ ist. Es gilt aber $\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \sqrt[n]{a}^n \cdot \sqrt[n]{b}^n = a \cdot b$, wobei ein Potenzgesetz für natürliche Exponenten sowie die Definition für die n-te Wurzel benutzt wurden.

14. Man zeige:

a) $\bigwedge\limits_{n \in \mathbf{N}^*} \bigwedge\limits_{a,b \in \mathbf{R}} \left(0 < a < b \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}\right)$,

b) $\bigwedge\limits_{a,b,c \in \mathbf{R}_+^*} \sqrt{ac} + \sqrt{bc} - \sqrt{ab} \leqq \dfrac{a + b + c}{2}$,

c) $\bigwedge\limits_{n \in \mathbf{N}^*} \sqrt{n + 1} - \sqrt{n} < \sqrt{n} - \sqrt{n - 1}$,

d) $\bigwedge_{n\in\mathbf{N}^*} \bigvee_{m\in\mathbf{N}^*} \left(\sqrt{2}-1\right)^n = \sqrt{m+1}-\sqrt{m}$,

e) * $\bigwedge_{n\in\mathbf{N}^*} \bigwedge_{a\in\mathbf{R}_+^*} (n+1)\left(\sqrt[n+1]{a}-1\right) \leqq n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$,

f) $\bigwedge_{a,b\in\mathbf{R}_+^*} \left(a^2 \geqq b \Rightarrow \sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)$,

g) $\bigwedge_{n\in\mathbf{N}^*} \bigwedge_{a\in\mathbf{R}_+^*} \left(\max\left\{a, \frac{1}{a}\right\} = c \Rightarrow \left|\sqrt[n]{a}-1\right| \leqq \frac{c^2}{n}\,|a-1|\right)$.

Lösung zu d): Anwendung des binomischen Satzes ergibt

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^n = a\sqrt{2}-b \quad (a, b \in \mathbf{N}) \quad \text{für } n \text{ ungerade}$$

bzw.

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^n = c-d\sqrt{2} \quad (c, d \in \mathbf{N}) \quad \text{für } n \text{ gerade.}$$

Es sei n gerade und $n = 2k$. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion über $k \geqq 1$. Für $k = 1$ erhalten wir $\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = 3-2\sqrt{2} = \sqrt{9}-\sqrt{8}$. Es gelte nun für $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2k} = c-d\sqrt{2} = \sqrt{c^2}-\sqrt{2d^2}$ die Bedingung $c^2-2d^2 = 1$ (Induktionsvoraussetzung). Daraus folgt

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^{2k+2} = (3c+4d)-(3d+2c)\sqrt{2} = \sqrt{(3c+4d)^2}-\sqrt{2(3d+2c)^2}$$

sowie

$$(3c+4d)^2-2(3d+2c)^2 = 1.$$

Ähnlich verläuft der Beweis für $n = 2k+1$.

15. Man ermittle alle reellen Zahlen x, die folgende Beziehungen erfüllen:

a) $\sqrt{p+x}+\sqrt{p-x} = x, \quad p \in \mathbf{R}_+^*$,

b) $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$,

c) $\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\frac{1}{\sqrt{1-x}} \geqq 1$,

d) $\frac{x}{p}-\frac{2p}{x} < 2, \quad p \in \mathbf{R}_+^*$,

e) $\sqrt{a+x}-\sqrt{\frac{a^2}{a+x}} = \sqrt{2a+x}, \quad a \in \mathbf{R}$.

Lösung zu a): Falls eine Lösung x_0 existiert, muß $0 \leqq x_0 \leqq p$ sein. Durch zweimaliges Quadrieren und Ordnen erhält man $x_0^4+x_0^2(4-4p) = 0$. Wegen $p > 0$ kommt $x_0 = 0$ als Lösung nicht in Frage; aus $x_0^2 = 4(p-1)$ erkennt man, daß sogar $p > 1$ sein muß. Daher kann für $p > 1$ höchstens $x_0 = 2\sqrt{p-1}$ eine Lösung sein.
Setzt man $x_0 = 2\sqrt{p-1}$ in die Gleichung ein, so entsteht für $1 < p < 2$ ein Widerspruch. Für $p \geqq 2$ ist die Gleichung erfüllt, in diesem Fall gibt es daher genau eine Lösung.

16. Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gegebene reelle Zahlen. Jede reelle Zahl, die zwischen der kleinsten und der größten der reellen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ liegt, werde ein Mittel dieser Zahlen genannt.

Sind alle Zahlen a_i $(1 \leqq i \leqq n)$ positiv, dann definiert man:

$$a := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \qquad \text{(arithmetisches Mittel)},$$

$$g := \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \qquad \text{(geometrisches Mittel)},$$

$$h := \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \qquad \text{(harmonisches Mittel)},$$

$$q := \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}{n} \qquad \text{(quadratisches Mittel)}.$$

Man zeige:

a) Die reellen Zahlen a, g, h und q sind Mittel der positiven reellen Zahlen a_i $(1 \leqq i \leqq n)$.

b) Es gilt $h \leqq g \leqq a \leqq q$. Wann trifft jeweils das Gleichheitszeichen zu?

17. Man zeige durch Anwendung der Beziehungen zwischen den Mitteln, daß folgende Aussagen gelten:

a) $\bigwedge\limits_{a,b \in \mathbf{R}_+^*} \left(a \neq b \Rightarrow \sqrt[n+1]{ab^n} < \dfrac{a + nb}{n + 1}\right)$,

b) $\bigwedge\limits_{n \in \mathbf{N}^*} n! \leqq \left(\dfrac{n + 1}{2}\right)^n$,

c) $\bigwedge\limits_{a \in \mathbf{R}_+^*} \bigwedge\limits_{n \in \mathbf{N}^*} (1 + a)^n > 1 + na$ (Bernoullische Ungleichung),

d) $\bigwedge\limits_{a_i \in \mathbf{R}_+^*} \bigwedge\limits_{n,p \in \mathbf{N}^*} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = p \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt[p]{a_i + 1} \leqq n + 1\right)$,

e) $\bigwedge\limits_{n \in \mathbf{N}^*} \sqrt[4]{n^2 - 1}\left(\sqrt{n + 1} - \sqrt{n - 1}\right) \leqq 1$,

f) $\bigwedge\limits_{a,b \in \mathbf{R}_+^*} \bigwedge\limits_{n \in \mathbf{N}^*} \dfrac{2^{n+1}\, ab}{\left(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}\right)^n} \leqq a + b$.

Lösung zu e): Aus der Annahme der Gültigkeit dieser Ungleichung folgt durch Multiplikation mit $\sqrt{n + 1} + \sqrt{n - 1}$ und weitere Umformungen

$$\sqrt[4]{n^2 - 1}\,((n + 1) - (n - 1)) \leqq \sqrt{n + 1} + \sqrt{n - 1},$$

$$\sqrt{\sqrt{(n + 1)(n - 1)}} \cdot 2 \leqq \sqrt{n + 1} + \sqrt{n - 1},$$

$$\sqrt{\sqrt{n + 1} \cdot \sqrt{n - 1}} \leqq \frac{\sqrt{n + 1} + \sqrt{n - 1}}{2}.$$

Aus der gültigen Beziehung $g \leqq a$ erhält man durch Umkehrung der Umformungen den geforderten Beweis.

18. a) Man beweise, daß es kein Tripel (x, y, z) positiver reeller Zahlen x, y, z gibt, für das die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 2xyz.$$

b) Es seien x_i $(1 \leqq i \leqq 6)$ nichtnegative reelle Zahlen, und a sei eine positive reelle Zahl. Man untersuche, ob das folgende Gleichungssystem Lösungen hat:

(1) $x_1x_4x_5 = a^2$,

(2) $x_1 + x_2 + x_4 + x_6 = 3a$,

(3) $x_3 + x_5 = 2x_6$,

(4) $x_1x_2x_4 = a^3$.

c) Man gebe alle reellen Lösungen des folgenden Gleichungssystems an:

(1) $x^2 + y^2 = 8$,

(2) $x^2y^2 - z^2 = 16$,

(3) $x^2 - 2y = z$.

Hinweis: Auf Gleichung (2) kann man beispielsweise den Vergleich von geometrischem und quadratischem Mittel anwenden.

19. * Man zeige, daß das Produkt $a_1^{m_1}a_2^{m_2} \cdots a_n^{m_n}$ $(a_i \in \mathbf{R}_+^*,\ m_i \in \mathbf{N}^*,\ 1 \leqq i \leqq n)$ bei konstanter Summe $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ seinen größten und die Summe $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ bei konstantem Produkt $a_1^{m_1}a_2^{m_2} \cdots a_n^{m_n}$ ihren kleinsten Wert genau dann annimmt, wenn $\dfrac{a_1}{m_1} = \dfrac{a_2}{m_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{m_n}$ ist.

Beispiele: 1. Für welches x mit $-1 < x < 7$ hat das Produkt $(1 + x)^5 (7 - x)^3$ seinen größten Wert?

2. Eine gegebene reelle Zahl $a > 0$ ist so in drei positive Summanden x, y und z zu zerlegen, daß der Ausdruck $x^m y^n z^p$ $(m, n, p \in \mathbf{N}^*$, gegeben) möglichst groß wird.

3. Man bestimme die kleinste positive reelle Zahl, die der Ausdruck $\dfrac{a^4 + 12}{a}$ $(a \in \mathbf{R}_+^*)$ annehmen kann.

20. (Irrationale Zahlen). Man zeige:

a) Wenn a eine irrationale Zahl und r $(r \neq 0)$ eine rationale Zahl ist, dann sind die Zahlen $a + r$, $a - r$, $r - a$, ra, $\dfrac{a}{r}$, $\dfrac{r}{a}$ und $\sqrt{a}$ irrational.

b) Summen und Produkte irrationaler Zahlen können rational sein (d. h., die Menge irrationaler Zahlen ist bezüglich der Addition und Multiplikation reeller Zahlen nicht abgeschlossen).

c) Wenn a und b irrationale Zahlen sind, $a + b$ aber rational ist, dann sind beispielsweise $a - b$ und $a + 2b$ irrationale Zahlen.

d) Die Zahlen $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{15}$ und $\sqrt[3]{2}$ sind irrationale Zahlen.

Beispiel: $\sqrt{2}$ ist die eindeutig bestimmte nichtnegative Lösung der Gleichung $x^2 = 2$. Es sei $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl, also $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbf{Z}, q > 0, p \sqcap q = 1)$. Ist p eine gerade

Zahl ($p = 2m$, $m \in \mathbf{Z}$), so muß q ungerade ($q = 2n + 1$, $n \in \mathbf{Z}$) sein. Dann gilt $p^2 = 4m^2 \neq 4(2n^2 + 2n) + 2 = 2q^2$. Ist p eine ungerade Zahl ($p = 2m + 1$, $m \in \mathbf{Z}$), dann gilt $p^2 = 2(2m^2 + 2m) + 1 \neq 2q^2$. In beiden Fällen ist also $\frac{p^2}{q^2} \neq 2$.

e) Falls für eine natürliche Zahl $n \geqq 1$ die Zerlegung $n = ab$ mit positiven rationalen Zahlen a und b gilt und $\sqrt{n}$ eine irrationale Zahl ist, dann ist auch $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ eine irrationale Zahl. Beispiele: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\sqrt{5} + \sqrt{3}$.

f) Die Zahl $2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$ ist irrational.

Hinweis: Man wende Aufgabe 14f) an.

Bemerkung: Vielfach wird die Irrationalität vorgegebener reeller Zahlen mit Mitteln der Algebra oder der Analysis nachgewiesen.

Beispiel 1: Die reelle Zahl $x_0 = \lg 6$ ist die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $10^x = 6$. Aus der Annahme, daß x_0 eine rationale Zahl, also $x_0 = \frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbf{Z}$, $q > 0$) ist, folgt nach Potenzieren und Primzahlzerlegung $2^p 5^p = 10^p = 6^q = 2^q 3^q$. Nach MfL Bd. 2, 5.6., Satz 3, ist das ein Widerspruch.

Beispiel 2: Im Fall der reellen Zahl π zeige man zunächst, daß die k-ten Ableitungen ($k \in \mathbf{N}^*$) der Funktion $f\colon x \mapsto f(x) = \frac{1}{n!} x^n (1 - x)^n$ an den Stellen 0 und 1 ganzzahlig sind. Mittels partieller Integration beweise man dann die Identität

$$\pi \int_0^1 f(x) \sin \pi x \, dx = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{3i} \frac{f^{(2i)}(0) + f^{(2i)}(1)}{\pi^{2i}}.$$

Aus der Annahme $\pi^2 = \frac{p}{q}$ ergibt sich schließlich ein Widerspruch.

Beispiel 3: Der Limes der Folge $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, die durch $a_1 = \frac{1}{2}$ und $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2^{n^2}}$ für $n \geqq 1$ definiert wird, ist eine irrationale Zahl. Aus der Annahme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}} = \frac{p}{q}$ folgt

$$p \cdot 2^{n^2} - q \cdot \sum_{k=1}^{n} 2^{n^2 - k^2} = q \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(n+l)^2 - n^2}} \leqq q \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^{l(2n+1)}} = \frac{q}{2^{2n+1} - 1}.$$

Für hinreichend großes n ist die rechte Seite eine positive reelle Zahl kleiner als 1, die linke Seite dagegen eine ganze Zahl. (Man vergleiche mit dem Beweis der Irrationalität der Eulerschen Zahl e; MfL Bd. 4, 2.2.8.)

Die Aufgaben 21 bis 25 enthalten eine elementare Theorie der rationalen Näherungen für eine irrationale Zahl.

21. Zu jeder irrationalen Zahl a gibt es eine eindeutig bestimmte ganze Zahl g mit der Eigenschaft $|a - g| < \frac{1}{2}$.

22. Zu jeder irrationalen Zahl a und jeder natürlichen Zahl $q \geqq 1$ gibt es eine rationale Zahl $r = \frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbf{Z}$, $q > 0$), für die die Abschätzung $\left|a - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q}$

gilt. (Man zeige, daß man $p \sqcap q = 1$ im allgemeinen nicht verlangen kann, und bestimme für $a = \sqrt{2}$ und $1 \leqq q \leqq 10$ rationale Näherungen mit der angegebenen Eigenschaft.)

23. Zu jeder irrationalen Zahl a und jeder natürlichen Zahl $k \geqq 1$ gibt es eine rationale Zahl $\frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbf{Z}$, $1 \leqq q \leqq k$), die die Ungleichung $\left|a - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qk}$ erfüllt. (Man bestimme für $a = \sqrt{2}$ solche Näherungen mit $k = 2, 4, 6, 8, 10$.)

Hinweis: Man teile das Intervall $[\![0, 1]\!]$ in k Intervalle der Länge $\frac{1}{k}$, außerdem zerlege man die Zahlen $0a, 1a, \ldots, ka$ in der Form $la = [la] + r_l$ $(0 \leqq l \leqq k)$. Zwei Reste, etwa r_s und r_t $(s < t)$, liegen in einem der erhaltenen Intervalle der Länge $\frac{1}{k}$. Man setze $q = t - s$.

24. Zu jeder irrationalen Zahl a gibt es unendlich viele rationale Zahlen $\frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbf{Z}$, $q > 0$, $p \sqcap q = 1$), die die Bedingung $\left|a - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$ erfüllen. (Man suche drei solche Näherungen für π.)
Man zeige zusätzlich:

a) Unter den genannten rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ gibt es zwei, für die $q = 1$ ist.

b) Bis auf eine einzige erfüllen alle diese Zahlen auch die Bedingung $\left|a - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q}$.

c) Für rationale Zahlen $a = \frac{r}{s}$ $(r \sqcap s = 1)$ gilt der Satz nicht.

25. Im Anschluß an Aufgabe 24 könnte man im Sinne einer Verbesserung der Näherungen für die irrationale Zahl a die Ungleichung $\left|a - \frac{p}{q}\right| < \frac{c}{q^2}$ mit $c < 1$ betrachten. Es gibt jedoch z. B. für $a = \sqrt{2}$ und $c = \frac{1}{5}$ keine rationale Zahl $\frac{p}{q}$, die den Bedingungen $p, q \in \mathbf{Z}$, $p \sqcap q = 1$ und $\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{5q^2}$ genügt.

Beweis: Man nehme an, die rationale Zahl $\frac{p}{q}$ sei eine solche Zahl, dann erhält man

$$\frac{p}{q} < \sqrt{2} + \frac{1}{5q^2} < 2 \quad \text{und} \quad \frac{p}{q} > \sqrt{2} + \frac{1}{5q^2} > 1.$$

Aus $0 < \frac{p}{q} - \frac{1}{5q^2} < \sqrt{2} < \frac{p}{q} + \frac{1}{5q^2}$ erhält man durch Quadrieren und Multiplizieren mit q^2 sowie unter Berücksichtigung von $\frac{p}{q} < 2$ schließlich

$$p^2 - 1 < 2q^2 < p^2 + 1\,.$$

Da $2q^2$ aber eine ganze Zahl ist, muß $2q^2 = p^2$ sein. Daraus folgt $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.
Man untersuche $\left|\sqrt{3} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{4q^2}$ und $\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^3}$.

Algebraische und transzendente Zahlen (Aufgabe 26 bis 31):

Man nennt eine Gleichung $g_n x^n + g_{n-1}x^{n-1} + \cdots + g_1 x + g_0 = 0$ mit ganzzahligen Koeffizienten $g_0, g_1, \ldots, g_n$ $(g_n \neq 0)$ eine *algebraische Gleichung n-ter Ordnung.*

Eine reelle Zahl a heißt *algebraische Zahl der Ordnung n* oder vom Grade n, wenn a Lösung einer algebraischen Gleichung n-ter Ordnung, aber nicht Lösung einer algebraischen Gleichung kleinerer als n-ter Ordnung ist. Eine reelle Zahl, die keiner algebraischen Gleichung genügt, wird eine *transzendente Zahl* genannt.

26. a) Jede rationale Zahl ist eine algebraische Zahl der Ordnung 1 (daher sind transzendente Zahlen stets irrational).

b) Man weise nach, daß die irrationale Zahl $\sqrt[3]{2}$ eine algebraische Zahl der Ordnung 3 ist.

Lösung zu b): Wir führen den Beweis indirekt, indem wir die Annahme, $x = \sqrt[3]{2}$ ist Lösung einer Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbf{Z}, a > 0)$, zum Widerspruch führen. Zunächst folgt $b^2 \geqq 4ac$ aus der Annahme, denn diese Bedingung ist notwendig und hinreichend für die Existenz einer reellen Lösung der quadratischen Gleichung. Wegen $x^3 = 2$ gilt weiterhin $2a + bx^2 + cx = 0$. Aus den Gleichungen

$$abx^2 + b^2x + bc = 0, \quad abx^2 + acx + 2a^2 = 0$$

folgt

$$(b^2 - ac)\,x = 2a^2 - bc.$$

Da x irrational ist, muß $b^2 - ac = 2a^2 - bc = 0$ und daher $ac = b^2 \geqq 4ac$ gelten. Es folgt $c = b = 0$ und daher $x^2 = 0$ (Widerspruch).

27. Man beweise die folgenden Sätze:

a) Eine reelle Zahl a, die Lösung einer Gleichung $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ mit rationalen Koeffizienten a_i $(0 \leqq i \leqq n)$ ist, ist auch Lösung einer algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten.

b) Gilt für die ganzen Zahlen u, v, w mit $u \sqcap v = 1$ und eine natürliche Zahl $n \geqq 1$ die Beziehung $u \mid v^n w$, dann ist $u \mid w$.

Hinweis: Man kann die Primzahlpotenzdarstellung von u, v und w benutzen. Der Satz ist eine Verallgemeinerung von MfL Bd. 1, 3.7.(30).

c) Falls die rationale Zahl $\frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbf{Z}, q \geqq 1, p \sqcap q = 1)$ Lösung einer Gleichung $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ $(a_i \in \mathbf{Z},\ 0 \leqq i \leqq n)$ ist, gilt $p \mid a_0$ und $q \mid a_n$.

d) Falls die Gleichung $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ $(a_i \in \mathbf{Z},\ 0 \leqq i \leqq n - 1)$ eine rationale Lösung hat, ist diese Lösung sogar eine ganze Zahl und ein Teiler von a_0.

e) Falls die reelle Zahl a Lösung einer algebraischen Gleichung $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ $(a_i \in \mathbf{Z}, 0 \leqq i \leqq n)$ ist, gibt es ganze Zahlen $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$, so daß

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - a)\,(b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0)$$

gilt. (Man überlege sich, daß der Beweis zu MfL Bd. 2, 7.4., Satz 4, auf den vorliegenden Fall übertragbar ist.)

f) Die algebraische Zahl a der Ordnung $n > 1$ genüge der algebraischen Gleichung $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ $(a_i \in \mathbf{Z},\ 0 \leqq i \leqq n,\ a_n \neq 0)$. Diese Gleichung hat außerdem keine rationale Lösung.

Hinweis: Man wende e) an.

g) Falls t eine transzendente und r eine rationale Zahl ist, ist $t + r$ eine transzendente Zahl.

Hinweis: Aus der Annahme, daß $t + r$ eine algebraische Zahl ist, folgt die Existenz einer algebraischen Gleichung, die $t + r$ als Lösung besitzt. Setzt man in diese Gleichung $t + r$ ein und ordnet nach Potenzen von t, so erhält man den gewünschten Widerspruch.

28. a) Man zeige, daß $\sqrt[n]{m}$ für $n, m \in \mathbf{N}^*$ entweder eine irrationale oder eine ganze Zahl ist.

b) Man zeige mit Hilfe der Methoden von Aufgabe 27, daß $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ $\dfrac{4\sqrt{13} - 3}{6}$, $\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$ irrationale Zahlen sind.

Beispiel: Aus $x - \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) = 0$ folgt $x - \sqrt{2} = -\sqrt{3}$ und nach zweimaligem Quadrieren und Ordnen $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. Eine rationale Lösung der letzten Gleichung ist ganzzahlig und ein Teiler von 1, also eine der Zahlen ± 1. Durch Einsetzen überzeugt man sich aber, daß weder $+1$ noch -1 Lösung ist. (Es reicht nachzuweisen, daß $\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \pm 1$ ist.)

29. Man beweise folgenden Satz von LIOUVILLE: Zu jeder algebraischen Zahl a der Ordnung $n > 1$ gibt es eine positive reelle Zahl λ, so daß für alle rationalen Zahlen $\dfrac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbf{Z},\ q > 0)$ die Ungleichung $\left|a - \dfrac{p}{q}\right| \geqq \dfrac{\lambda}{q^n}$ gilt.

Anleitung: Falls die Zahl a der algebraischen Gleichung $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ $(a_i \in \mathbf{Z},\ 0 \leqq i \leqq n,\ a_n \neq 0)$ genügt, gilt nach Aufgabe 27e) $f(x) = (x - a)\, f_1(x)$. Für eine rationale Zahl $\dfrac{p}{q}$ mit $a - 1 < \dfrac{p}{q} < a + 1$ und $\beta = \sup\{|f_1(x)| : a - 1 < x < a + 1\}$ gilt

$$\left|a - \frac{p}{q}\right| \cdot \beta \geqq \left|a - \frac{p}{q}\right| \cdot \left|f_1\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geqq \frac{1}{q^n}.$$

Liegt $\dfrac{p}{q}$ nicht zwischen $a - 1$ und $a + 1$, so gilt $\left|a - \dfrac{p}{q}\right| \geqq 1 \geqq \dfrac{1}{q^n}$. Man setze dann $\lambda = \min\left\{1, \dfrac{1}{\beta}\right\}$.

30. (Konstruktion einer transzendenten Zahl). Es sei $\dfrac{p_1}{q_1}$ eine gegebene rationale Zahl mit $p_1 \sqcap q_1 = 1$. Dann setze man $a_1 = \dfrac{p_1}{q_1} - \dfrac{1}{q_1}$ und $b_1 = \dfrac{p_1}{q_1} + \dfrac{1}{q_1}$. Jetzt wähle man ein $\dfrac{p_2}{q_2}$ $(p_2 \sqcap q_2 = 1,\ q_1 < q_2)$ mit $a_1 < \dfrac{p_2}{q_2} < b_1$ und setze wieder $a_2 = \dfrac{p_2}{q_2} - \dfrac{1}{q_2^2}$ sowie $b_2 = \dfrac{p_2}{q_2} + \dfrac{1}{q_2^2}$. Sind a_{n-1} und b_{n-1} bereits konstruiert,

so wähle man ein $\frac{p_n}{q_n}$ $(p_n \sqcap q_n = 1,\ q_{n-1} < q_n)$ mit $a_{n-1} < \frac{p_n}{q_n} < b_{n-1}$ und setze $a_n = \frac{p_n}{q_n} - \frac{1}{q_n^n}$ und $b_n = \frac{p_n}{q_n} + \frac{1}{q_n^n}$. Man zeige, daß die durch Fortsetzung dieses Prozesses entstehenden Folgen $(a_\nu)_{\nu\in\mathbf{N}^*}$ und $(b_\nu)_{\nu\in\mathbf{N}^*}$ eine Intervallschachtelung bilden, deren Limeselement eine transzendente Zahl a ist. (Zu vorgegebenen Zahlen $\lambda > 0$ und $n \in \mathbf{N}^*$ wähle man eine natürliche Zahl $k > n$ so groß, daß $\frac{1}{q^k} < \lambda$ ist. Dann gilt $\left|a - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{\lambda}{q_k^n}$, vgl. Aufgabe 29.)

31. Die durch den Dezimalbruch $l = 0{,}11000100\ldots$, der genau an den Stellen $k!$ $(k \geqq 1)$ nach dem Komma eine 1 und sonst Nullen enthält, dargestellte reelle Zahl ist transzendent (Liouvillesche Zahl).

Anleitung: Falls l eine algebraische Zahl der Ordnung n ist ($n > 1$, da l irrational), gibt es ganze Zahlen $a_0, \ldots, a_n$ $(a_n \neq 0)$, so daß $a_n l^n + \cdots + a_1 l + a_0 = 0$ ist. Man setze $\alpha = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^{2!}} + \cdots + \frac{1}{10^{k!}}$ (über k wird später verfügt), $\beta = a_n\alpha^n + \cdots + a_1\alpha + a_0$ und betrachte $A = |\beta| \cdot 10^{nk!}$. Die Zahl A ist ganz. Andererseits schließe man aus der Zerlegung

$$\begin{aligned}\beta = \beta - 0 &= a_n(\alpha^n - l^n) + \cdots + a_1(\alpha - l)\\ &= (\alpha - l)\,(b_{n-1}l^{n-1} + \cdots + b_1 l + b_0)\end{aligned}$$

auf $A > 0$. Aus $0 < \alpha < l < \alpha + \frac{2}{10^{(k+1)!}} < 1$ erhält man

$$|\beta| \leqq (l^n - \alpha^n)\,|a_n| + \cdots + (l - \alpha)\,|a_1| \leqq (l - \alpha)\,c < \frac{2c}{10^{(k+1)!}},$$

wenn man $n\,|a_n| + \cdots + |a_1| = c$ setzt. Wählt man nun ein $k \in \mathbf{N}$ so, daß $10^{(k+1-n)!} > 2c$ ist, dann folgt $A < 1$.

Bemerkung: Man kann zum Beweis der Transzendenz von l auch den Satz von Liouville (Aufgabe 29) anwenden.

Eine Menge M heißt *abzählbar*, wenn M und die Menge $\mathbf{N}$ der natürlichen Zahlen gleichmächtig sind (MfL Bd. 1, 2.4.(21)). Gleichwertig damit ist, daß sich die Elemente von M als Folge $(m_\nu)_{\nu\in\mathbf{N}}$ schreiben lassen. Weiß man von einer Menge, daß sie endlich oder abzählbar ist, so spricht man von einer *höchstens abzählbaren Menge*. Eine unendliche Menge, die nicht abzählbar ist, wird *überabzählbar* genannt.

32. Man gebe jeweils eine Vorschrift an, nach der die nachstehenden Mengen als Folge $(m_\nu)_{\nu\in\mathbf{N}}$ geschrieben werden können: a) Menge der Primzahlen, b) Menge der geraden natürlichen Zahlen, c) Menge der geraden ganzen Zahlen, d) Menge der ganzen Zahlen, e) Menge der Fibonaccischen Zahlen.

33. Man beweise folgende Aussagen:

a) Jede Teilmenge der Menge der natürlichen Zahlen, allgemeiner jeder abzählbaren Menge, ist höchstens abzählbar.

b) Die Menge $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, allgemeiner jede Menge $M \times M$ mit abzählbarer Menge M, ist abzählbar.

Hinweis: Man betrachte beispielsweise die Abbildungen

$$f_1\colon \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N} \quad \text{mit} \quad f_1(m, n) = \frac{(m + n)^2 + 3m + n}{2}$$

(Cantor-Numerierung, vgl. S. 16, Aufgabe 7) oder

$$f_2\colon \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N} \quad \text{mit} \quad f_2(m, n) = \max\,\{m^2, n^2\} + \max\,\{m, n\} + n - m.$$

Folgerung: Die Mengen der gebrochenen Zahlen, der rationalen Zahlen, der algebraischen Gleichungen erster Ordnung $ax + b = 0$ $(a, b \in \mathbf{Z}, a > 0)$, der reellen Zahlen der Form $a + b\sqrt{3}$ $(a, b \in \mathbf{Q})$, der abgeschlossenen Intervalle $[\![a, b]\!]$ $(a, b \in \mathbf{Q})$ sind abzählbar.

c) Die Menge M^n, wobei M selbst eine abzählbare Menge ist, ist abzählbar (vgl. MfL Bd. 1, 2.2.).

d) Die Vereinigung höchstens abzählbar vieler Mengen, von denen jede höchstens abzählbar ist, ist ebenfalls höchstens abzählbar.

Hinweis: Man orientiere sich an folgendem Schema (Diagonalverfahren von CAUCHY):

$$\begin{array}{lllll}
M_0 & m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \;\cdots \\
M_1 & m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \;\cdots \\
M_2 & m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \;\cdots \\
M_3 & m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \;\cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

e) Die Menge aller algebraischen Gleichungen

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \quad (a_i \in \mathbf{Z},\ 1 \leqq i \leqq n,\ a_n > 0)$$

ist abzählbar.

Bemerkung: Man erhält die Menge der algebraischen Gleichungen unmittelbar als Folge, indem man $h = n + a_n + |a_{n-1}| + \cdots + |a_0|$ alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen durchlaufen läßt und für jedes h die zugehörigen Gleichungen in beliebiger (oder noch besonders festgesetzter) Reihenfolge notiert, also etwa folgendermaßen:

$h = 1$:

$h = 2$: $x = 0$;

$h = 3$: $x^2 = 0$, $2x = 0$, $x \pm 1 = 0$;

$h = 4$: $x^3 = 0$, $2x^2 = 0$, $x^2 \pm x = 0$, $x^2 \pm 1 = 0$, $3x = 0$, $2x \pm 1 = 0$, $x \pm 2 = 0$.

f) Die Menge der reellen algebraischen Zahlen ist abzählbar.

34. Man beweise folgende Aussagen:

a) Die Menge der reellen Zahlen x mit $0 < x < 1$ ist überabzählbar.

Beweis (Diagonalverfahren von CANTOR): Jede reelle Zahl x mit $0 < x < 1$ läßt sich auf genau eine Art als unendlicher Dezimalbruch ohne Neunerperiode schreiben. Wäre diese Menge abzählbar, so könnte man sie als Folge

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}a_{11}a_{12}a_{13}\cdots \\
a_2 &= 0{,}a_{21}a_{22}a_{23}\cdots \\
a_3 &= 0{,}a_{31}a_{32}a_{33}\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

schreiben. Für einen unendlichen Dezimalbruch $d = 0, d_1d_2 \ldots$, der mit dem Dezimalbruch $0{,}a_{11}a_{22}a_{33} \ldots$ in keiner Stelle hinter dem Komma übereinstimmt und bei dem hinter dem Komma die Ziffern 0 und 9 nicht vorkommen, gilt $0 < d < 1$. Er müßte dann mit einem der Brüche der Folge $(a_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}^*}$ in allen Ziffern übereinstimmen. Das ist aber ein Widerspruch, da d für jedes ν von dem ν-ten Dezimalbruch in der ν-ten Ziffer abweicht.

b) Die Menge der reellen Zahlen x mit $a < x < b$ $(a, b \in \mathbf{R})$, die Menge aller reellen Zahlen und die Menge der reellen Zahlen x mit $0 < x < 1$ sind gleichmächtig.

c) Ist die Menge M nicht abzählbar und N eine beliebige Menge, dann ist die Menge $M \cup N$ nicht abzählbar.

d) Ist die Menge M nicht abzählbar und N eine abzählbare Menge, dann ist die Menge $M \setminus N$ eine nicht abzählbare Menge.

e) Die Menge der irrationalen sowie die Menge der reellen transzendenten Zahlen sind nicht abzählbar.

35. (Anwendung des Archimedischen Axioms).

a) Es sei K ein geordneter Körper, der den Körper der rationalen Zahlen $\mathbf{Q}$ umfaßt. K ist genau dann archimedisch geordnet, wenn jedes Element von K Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen ist.

b) Es sei K ein geordneter Körper, der $\mathbf{Q}$ umfaßt. Wenn jede konvergente Fundamentalfolge mit Elementen aus $\mathbf{Q}$ auch in K konvergiert, ist K archimedisch geordnet.

c) Der Körper der reellen Zahlen ist der größte archimedisch geordnete Körper (d. h., der Bereich der reellen Zahlen kann durch Hinzufügung neuer Elemente nicht so erweitert werden, daß auch für die Elemente des erweiterten Systems alle Grundgesetze der Arithmetik gültig bleiben).

Lösung zu a): Es sei K archimedisch geordnet, a ein beliebiges Element aus K. Nach MfL Bd. 2, 6.3.1.(2), existiert zu jedem $n \in \mathbf{N}^*$ eine rationale Zahl r_n mit $a - \frac{1}{n} < r_n < a + \frac{1}{n}$. Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = a$. Es sei K nicht archimedisch geordnet und a' eine obere Schranke von $\mathbf{N}$. Dann gilt für $a = a' + 1$ und jede rationale Zahl r die Beziehung $|a - r| = a - r \geqq a - n_r > a - a' = 1$ (hierbei bezeichne n_r eine natürliche Zahl $\geqq r$). Es existiert also keine gegen a konvergente rationale Folge.

36. (Reell-quadratische Zahlenkörper). Der geordnete Körper K umfasse den Körper der rationalen Zahlen $\mathbf{Q}$, d sei eine quadratfreie natürliche Zahl $\geqq 2$, und $\sqrt{d}$ gehöre zu K. Man setze $L = \{r + s\sqrt{d} : r, s \in \mathbf{Q}\}$ (die Forderung, daß die Primzahlzerlegung von d kein Quadrat irgendeiner Primzahl enthalte, ist also keine Einschränkung der Allgemeinheit). Man beweise folgende Sätze:

a) L ist bezüglich der Einschränkung der Operationen von K ein geordneter Körper zwischen $\mathbf{Q}$ und K (offenbar ist $L \neq \mathbf{Q}$).

Bemerkung: Man kann ohne Bezugnahme auf K einen derartigen Körper L auch unmittelbar konstruieren, indem man zunächst $L' = \{(a, b) : a, b \in \mathbf{Q}\}$ setzt und durch folgende Festsetzungen zwei Operationen erklärt:

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$
$$(a_1, b_1) \odot (a_2, b_2) := (a_1a_2 + b_1b_2d, a_1b_2 + a_2b_1).$$

Dann ist $(L'; \oplus, \odot)$ ein zu L isomorpher Körper. Man bezeichnet derartige Körper im allgemeinen mit $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$.

b) Zu jedem $\alpha = r + s\sqrt{d} \in \mathbf{Q}(\sqrt{d})$, $\alpha \neq 0$, gibt es eine eindeutig bestimmte algebraische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbf{Z}, a > 0, a \sqcap b = a \sqcap c = 1)$, für die α und $\bar{\alpha} = r - s\sqrt{d}$ Lösungen sind. Man nennt $\bar{\alpha}$ die zu $\alpha = r + s\sqrt{d}$ konjugierte Zahl.

c) Die *Diskriminante* $D(\alpha) = b^2 - 4ac$ (siehe b)) jeder irrationalen Zahl α von $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ läßt sich in der Form m^2d $(m \in \mathbf{N}^*)$ darstellen (insbesondere ist also $D(\alpha) > 0$).

d) Zu jeder gegebenen Zahl $D \in \mathbf{N}^*$ gibt es nur endlich viele reduzierte Zahlen in $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$, deren Diskriminante gleich D ist. (Eine Zahl α heißt reduziert, wenn $\alpha > 1$ und $-1 < \bar{\alpha} < 0$ ist.)

e) $D(\alpha) > 0 \wedge g \in \mathbf{Z} \wedge \beta = \alpha + g \Rightarrow D(\alpha) = D(\beta)$,

$$D(\alpha) > 0 \wedge \beta = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbf{Z}, ad - bc = \pm 1) \Rightarrow D(\alpha) = D(\beta).$$

37. (Dedekindsche Schnitte). Es sei $(M; <)$ eine mit einer irreflexiven totalen Ordnung versehene geordnete Menge. Man definiert in $(M; <)$ Dedekindsche Schnitte und deren Schnittelemente wie in MfL Bd. 2, 6.3.2.(11), (13).
Ein Dedekindscher Schnitt (A, B) in $(M; <)$ heißt ein Schnitt

erster Art, wenn in $(M; <)$ A ein Maximum, B aber kein Minimum,
zweiter Art, wenn in $(M; <)$ A kein Maximum, B aber ein Minimum,
dritter Art, wenn in $(M; <)$ A kein Maximum und B kein Minimum und
vierter Art, wenn in $(M; <)$ A ein Maximum und B ein Minimum

haben. Man nennt $(M; <)$ dicht, wenn die Eigenschaft von MfL Bd. 2, 4.3, Satz 2, erfüllt ist. Eine dichte Menge wird stetig genannt, wenn jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von M in $(M; <)$ ein Supremum hat.

a) Man diskutiere das Vorkommen von Schnitten erster bis vierter Art in den Zahlenbereichen $\mathbf{N}$, $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$.

b) Eine Menge $A \subseteq M$ ist genau dann Unterklasse eines Dedekindschen Schnittes in $(M; <)$, wenn (1) $A \subset M$, (2) $A \neq \emptyset$ und (3) $\bigwedge_{a' \in M} (a \in A \wedge a' \leqq a \Rightarrow a' \in A)$ ist. Dann hat man $B = M \setminus A$ zu setzen.

c) Man zeige, daß für zwei Schnitte (A_1, B_1) und (A_2, B_2) folgende drei Eigenschaften gleichwertig sind: $A_1 \subset A_2$, $A_2 \cap B_1 \neq \emptyset$ und $B_1 \supset B_2$.

d) $(M; <)$ ist genau dann eine dichte Menge, wenn es in $(M; <)$ keine Schnitte vierter Art gibt.

e) Eine geordnete Menge $(M; <)$ ist genau dann stetig, wenn jeder Dedekindsche Schnitt (A, B) in $(M; <)$ ein Schnitt erster oder zweiter Art ist.

38. (Stetige Hülle einer geordneten Menge). Zu jeder dichten Menge $(M; <)$, die weder ein Minimum noch ein Maximum besitzt, gibt es eine minimale stetige Obermenge.

Anleitung: Es sei S' die Menge aller Schnitte zweiter oder dritter Art in $(M; <)$. Dann setze man

$$(A_1, B_1) < (A_2, B_2) :\Leftrightarrow A_1 \subset A_2.$$

Auf diese Weise wird in S' eine irreflexive Ordnungsrelation definiert. Die geordnete Teilmenge aller Schnitte zweiter Art ist zu $(M; <)$ isomorph. Durch Identifizierung dieser beiden Mengen entsteht dann eine geordnete Obermenge $(S; <)$ von $(M; <)$. Man zeige, daß jeder Schnitt zweiter oder dritter Art genau ein Schnittelement in $(S; <)$ hat und jedes Element von $(S; <)$ Schnittelement genau eines Schnittes (A, B) zweiter oder dritter Art von $(M; <)$ ist. Die geordnete Menge $(S; <)$ hat weder ein Maximum noch ein Minimum, $(M; <)$ liegt dicht in $(S; <)$ (vgl. MfL Bd. 2, 6.2.1., Satz 1), woraus gefolgert werden kann, daß $(S; <)$ minimale stetige Obermenge von $(M; <)$ ist. Abschließend weise man nach, daß je zwei minimale stetige Obermengen von $(M; <)$ zueinander isomorph sind. Die damit wesentlich eindeutige stetige Obermenge von $(M; <)$ wird die stetige Hülle von $(M; <)$ genannt.

Bemerkung: Man kann im Fall der Zahlenbereiche $\mathbf{Q}$ bzw. $\mathbf{Q}_+$ in den zugehörigen stetigen Hüllen in eindeutiger Weise eine Addition und eine Multiplikation definieren, so daß man dadurch stetige Oberkörper von $\mathbf{Q}$ bzw. $\mathbf{Q}_+$ erhält (vgl. MfL Bd. 2, 6.3.3., I.).

Der Bereich der komplexen Zahlen

Kontrollfragen

1. Welches sind die Gründe für die Erweiterung des Bereiches der reellen Zahlen? Welche algebraischen Forderungen stellt man an den Erweiterungsbereich und welche Forderungen lassen sich nicht realisieren? Wie lautet das Ergebnis des Erweiterungsprozesses?
2. Welche verschiedenen Möglichkeiten zur Darstellung komplexer Zahlen gibt es? Wie lassen sich die komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene veranschaulichen?
3. Wie sind die algebraischen Operationen in $\mathbf{C}$ definiert? Wie spiegeln sich Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division komplexer Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene wider?
4. Wie ist der absolute Betrag einer komplexen Zahl z definiert und welche Eigenschaften besitzt er? Was versteht man unter der zu z konjugiert komplexen Zahl und durch welche Eigenschaften zeichnet sie sich aus?
5. Welche Eigenschaften hat die Gleichung $x^n = a$ $(a \in \mathbf{C})$? Wie sind die n-ten Einheitswurzeln definiert und welche besonderen Eigenschaften lassen sich über sie formulieren?
6. Welche Eigenschaften besitzen algebraische Gleichungen mit komplexen Koeffizienten?
7. Man diskutiere die algebraischen Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades (Lösungen sowie deren Anzahl in Abhängigkeit von den Koeffizienten der Gleichungen).

Aufgaben

1. Man stelle folgende komplexen Zahlen in der Form $x + yi$ $(x, y \in \mathbf{R})$ dar:

   a) i^m $(m \in \mathbf{Z})$, b) $(1 + 2i)^6$, c) $(1 + 2i)^5 - (1 - 2i)^5$,

   d) $\dfrac{r + si}{r - si}$ $(r, s \neq 0)$, e) $\dfrac{(1 + 2i)^2 - (1 - i)^3}{(3 + 2i)^3 - (2 + i)^2}$,

   f) $\dfrac{(1 + i)^9}{(1 - i)^7}$, g) $\dfrac{(1 + i)^n}{(1 - i)^{n-2}}$ $(n \in \mathbf{N}, n \geqq 2)$,

   h) $\underset{\bullet}{\sqrt{2i}}$, i) $\underset{\bullet}{\sqrt{-8i}}$, j) $\underset{\bullet}{\sqrt{3 - 4i}}$,

   k) $\underset{\bullet}{\sqrt{\pm 8 \pm 6i}}$ (4 Aufgaben), l) $\underset{\bullet}{\sqrt{1 - i\sqrt{3}}}$,

   m) $\underset{\bullet}{\sqrt{4 + i}} + \underset{\bullet}{\sqrt{4 - i}}$, n) $\underset{\bullet}{\sqrt[4]{-1}}$.

   Lösung zu j): Aus $\underset{\bullet}{\sqrt{3 - 4i}} = x + yi$ folgt $3 - 4i = (x^2 - y^2) + 2xyi$, also $x^2 - y^2 = 3$ und $2xy = -4$. Durch Quadrieren und Addieren erhält man

   $$(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 = 25$$

   und daraus $x^2 + y^2 = 5$. Zusammen mit $x^2 - y^2 = 3$ ergibt sich $x^2 = 4$ und $y^2 = 1$. Wegen $2xy = -4$ müssen x und y unterschiedliches Vorzeichen haben, so daß man schließlich $\underset{\bullet}{\sqrt{3 - 4i}} = \pm(2 - i)$ erhält.

2. Man gebe eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß das Produkt zweier komplexer Zahlen die Form yi hat.

3. Man ermittle alle komplexen Zahlen, die zu ihrem Quadrat (bzw. zu ihrer dritten Potenz) konjugiert sind.

4. Man beweise: Ist $a + bi = (r + si)^n$ $(n \in \mathbf{N}^*)$, so gilt $a^2 + b^2 = (r^2 + s^2)^n$.

5. Es sei $\underset{\bullet}{\sqrt{a + bi}} = \pm(r + si)$. Man bestimme $\underset{\bullet}{\sqrt{-a - bi}}$.

6. Man stelle folgende Terme in der Form $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ dar:

   a) $1, -1, i, -i$, b) $\pm 1 \pm i$ (4 Aufgaben), ,

   c) $\pm 1 \pm \sqrt{3}i$, d) $2 + \sqrt{3} + i$, e) $(1 + i)^{25}$,

   f) $\dfrac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi}$, g) $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$, h) $\left(1 - \dfrac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{24}$,

   i) $\underset{\bullet}{\sqrt[3]{i}}$, j) $\underset{\bullet}{\sqrt[3]{2 - 2i}}$.

7. a) Unter welchen Bedingungen ist der Betrag der Summe zweier komplexer Zahlen gleich der Differenz (bzw. der Summe) der Beträge der Summanden?

b) Man beweise:

$$\bigwedge_{z_1, z_2 \in \mathbf{C}} |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2),$$

$$\bigwedge_{z_1, z_2 \in \mathbf{C}} \left(w = \sqrt{z_1 z_2} \Rightarrow |z_1| + |z_2| = \left| \frac{z_1 + z_2}{2} - w \right| + \left| \frac{z_1 + z_2}{2} + w \right| \right),$$

$$\bigwedge_{z \in \mathbf{C}} \left(|z| < \frac{1}{2} \Rightarrow |(1 + i)\, z^3 + iz| < \frac{3}{4} \right),$$

$$\bigwedge_{z \in \mathbf{C}} \left(|z| = 1 \wedge z \neq -1 \Rightarrow \bigvee_{r \in \mathbf{R}} z = \frac{1 + ri}{1 - ri} \right).$$

8. Man zeige, daß aus $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \varphi$ die Gleichung $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\varphi$ folgt $(n \in \mathbf{N}^*)$.

Hinweis: Man wende die Moivresche Formel an.

9. Man löse die folgenden Gleichungen:

a) $(1 + 2i)\, x + (3 - 5i)\, y = 1 - 3i \quad (x, y \in \mathbf{R})$,

b) $|z| - z = 1 + 2i$, c) $|z| + z = 2 + i$,

10. Man leite eine Formel zur Lösung der biquadratischen Gleichung $z^4 + pz^2 + q = 0$ mit reellen Koeffizienten p und q unter der Bedingung $\frac{p^2}{4} - q < 0$ her.

11. Man wende die Cardanosche Formel an:

a) $z^3 - 6z + 9 = 0$, b) $z^3 + 12z + 63 = 0$,

c) $z^3 + 9z^2 + 18z + 28 = 0$, d) $z^3 + 6z^2 + 30z + 25 = 0$,

e) $z^3 + 6z + 2 = 0$, f) $z^3 - 6iz + 4(1 - i) = 0$,

g) $z^3 - 3abz + a^3 + b^3 = 0$.

12. Mit Hilfe der Cardanoschen Formel zeige man, daß für die Lösungen z_1, z_2 und z_3 der Gleichung $z^3 + pz + q = 0$ die Beziehung $(z_1 - z_2)^2 (z_1 - z_3)^2 (z_2 - z_3)^2 = -4p^3 - 27q^2$ erfüllt ist.

Anleitung: Man verwende MfL Bd. 2, 7.5.(4), (5).

13. Man leite eine Formel zur Lösung der Gleichung $z^5 - 5az^3 + 5a^2z - 2b = 0$ $(a, b \in \mathbf{R})$ her.

Anleitung: Man mache den Ansatz $z = u + v$.

14. Es sei $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$. Man berechne:

a) $1 + \varepsilon + \varepsilon^2$, b) ε^n, c) $(1 + \varepsilon)^n \quad (n \in \mathbf{N})$,

d) $(a\varepsilon^2 + b\varepsilon)(b\varepsilon^2 + a\varepsilon)$, e) $\varepsilon^n + \bar{\varepsilon}^n$.

(Bei c) und e) gebe man das Ergebnis in trigonometrischer Darstellung an.)

15. Man bestimme die n-ten Einheitswurzeln für $n = 5, 6, 8$ und 12 in der Form $x + iy$ $(x, y \in \mathbf{R})$, in diesen Fällen alle primitiven n-ten Einheitswurzeln (ε heißt eine primitive n-te Einheitswurzel, wenn ε erzeugendes Element der zyklischen Gruppe aller n-ten Einheitswurzeln ist, wenn also die Menge $\{\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^n = 1\}$ alle n-ten Einheitswurzeln enthält) und zeige, daß es für beliebige natürliche Zahlen n genau $\varphi(n)$ (vgl. MfL Bd. 1, 3.7.(76)) primitive n-te Einheitswurzeln gibt.

16. Es sei ε eine primitive n-te Einheitswurzel. Man berechne

a) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k$, b) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{mk}$ $(m \in \mathbf{N})$,

c) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (k + 1)\, \varepsilon^k$, d) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (k + 1)^2\, \varepsilon^k$.

Anleitung: Bei a), c) und d) multipliziere man zunächst mit $1 - \varepsilon$, bei b) unterscheide man die Fälle $n \mid m$ und $n \nmid m$.

17. Man löse die Gleichungen

a) $(z + 1)^n - (z - 1)^n = 0$ $(n \in \mathbf{N}^*)$,

b) $(z + i)^n - (z - i)^n = 0$ $(n \in \mathbf{N}^*)$,

c) $\bar{z} = z^{n-1}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$.

18. Man zeige, daß die Gleichung $\left(\dfrac{1 + iz}{1 - iz}\right)^n = a$ für $a \in \mathbf{C}$ und $|a| = 1$ genau n verschiedene reelle Lösungen hat.

19. Man berechne die folgenden Summen von Binomialkoeffizienten (vgl. MfL Bd. 1, 3.5.(23)—(25)):

a) $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} \pm \cdots$, b) $\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} \pm \cdots$,

c) $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \cdots$, d) $\binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \cdots$,

e) $\binom{n}{1} - \frac{1}{3}\binom{n}{3} + \frac{1}{9}\binom{n}{5} - \frac{1}{27}\binom{n}{7} \pm \cdots$.

Hinweis: Bei a) berechne man $(1 + i)^n$ sowohl nach dem binomischen Satz als auch nach der Moivreschen Formel, bei e) gehe man von $\left(1 + i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^n$ aus.

II. Algebra

Der n-dimensionale Zahlenraum, der Begriff des Vektorraumes

Kontrollfragen

1. Was versteht man unter dem $\mathbf{R}^n$? Wie ist im $\mathbf{R}^n$ die koordinatenweise Addition und Multiplikation mit einem Skalar erklärt?
2. Wie lauten die Grundeigenschaften der koordinatenweisen Addition und Multiplikation mit einem Skalar im $\mathbf{R}^n$?
   Man verwende für die Antwort eine Beschreibung unter Benutzung mathematischer Symbolik sowie auch eine Beschreibung in Worten.
3. Was meint man mit der Aussage: Der $\mathbf{R}^n$ bildet bezüglich der koordinatenweisen Addition eine abelsche Gruppe?
4. Was meint man mit der Aussage: Der $\mathbf{R}^n$ bildet bezüglich der koordinatenweisen Addition und Multiplikation mit reellen Skalaren einen reellen Vektorraum?
5. Wie unterscheiden sich die Definitionen reeller und komplexer Vektorräume?
6. Man nenne Beispiele aus der Physik oder aus anderen Wissensbereichen, wo zur Beschreibung von Sachverhalten Punkte des $\mathbf{R}^n$ benutzt werden. (Maßsysteme sollen dabei nicht weiter erörtert werden) (Druck-Temperatur, Ort-Impuls, Anteile verschiedener Salze in einer Lösung, Verbrauchsgrößen verschiedener Materialien in einem Betrieb usw.)
7. Man erläutere die Bezeichnung: Addition nach dem Kräfteparallelogramm.

Aufgaben

1. Für beliebige zwei Punkte $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$ gebe man für die nachfolgend aufgeführten Punktmengen eine geometrische Deutung bezüglich der euklidischen Veranschaulichung:

$$M_1 = \{\alpha \cdot \boldsymbol{x} + \beta \cdot \boldsymbol{y} \colon \alpha \geqq 0,\ \beta \geqq 0,\ \alpha + \beta = 1\},$$
$$M_2 = \{\alpha \cdot \boldsymbol{x} + \beta \cdot \boldsymbol{y} \colon \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \alpha + \beta = 1\},$$
$$M_3 = \left\{\frac{1}{2}\,(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\right\}.$$

   Hinweis: Es treten auf: ein spezieller Punkt (welcher?) auf der Verbindungsstrecke von $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$, eine spezielle Strecke (welche?) und eine spezielle Gerade (welche?).

2. Die Addition in $\mathbf{R}$ und Multiplikation in $\mathbf{R}$ sind besondere Abbildungen $+\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ und $\cdot\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Man begründe: Beide Abbildungen sind surjektiv, aber

keine ist injektiv. Weiterhin verschaffe man sich eine Einsicht in die Urbildmengen

$$+^{-1}(r) = \{(x, y) : x + y = r\}, \quad \cdot^{-1}(r) = \{(u, v) : u \cdot v = r\}.$$

(Skizze!)
Sind die Urbildmengen $+^{-1}(r)$ und $\cdot^{-1}(r)$, $r \in \mathbf{R}$ (die sogenannten Punktefasern) symmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten? Die Kommutativität der Addition $+$ und der Multiplikation $\cdot$ drücke man durch eine geometrische Eigenschaft der Punktefasern $+^{-1}(r)$, $\cdot^{-1}(r)$ aus.

3. Man begründe die Aussage: Ein reeller (oder komplexer) Vektorraum, der wenigstens zwei verschiedene Punkte (Vektoren) enthält, besitzt auch stets unendlich viele Punkte.

Hinweis: Man betrachte die skalaren Vielfachen.

4. Für eine beliebige nichtleere Menge X bezeichne $\mathbf{R}^X$ die Menge aller reellen Funktionen auf X. (Welche Gründe gibt es für die Wahl dieser Bezeichnungsweise? Allgemein bezeichnet man für nichtleere Mengen A, B mit B^A die Menge $\{f : f : A \to B\}$, für endliche Mengen A, B ist nämlich Anzahl $(B^A) =$ (Anzahl $B)^{\text{Anzahl}(A)}$.) Mit der punktweisen Addition von Funktionen und punktweisen Multiplikation einer Funktion mit einem reellen Skalar wird $\mathbf{R}^X$ zu einem reellen Vektorraum. Entsprechend wird $\mathbf{C}^X$ zu einem komplexen Vektorraum. Der Vektorraum $\mathbf{R}^n$ ist hierzu der Spezialfall $\mathbf{R}^{\{1,2,\ldots,n\}}$. Man benutze für die Elemente von $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ die Veranschaulichung durch Funktionsgraphen. Damit mache man sich noch einmal die „faserweise Veranschaulichung" des $\mathbf{R}^n$ klar.

5. Es sei n eine fixierte natürliche Zahl. Sämtliche reelle Polynome vom Grade $\leqq n$ bilden bezüglich der punktweisen Operationen einen reellen Vektorraum. (Entsprechendes gilt im komplexen Fall.)

6. Es bezeichne $C([\![a, b]\!], \mathbf{R})$ das System aller stetigen reellen Funktionen auf dem abgeschlossenen Intervall $[\![a, b]\!] \subset \mathbf{R}$. Bezüglich der punktweisen Operation bildet $C([\![a, b]\!], \mathbf{R})$ einen reellen Vektorraum. Für den Fall $a = b$ kann man diesen Vektorraum und den $\mathbf{R}^1$ als gleich ansehen. (Genauer: Beide Vektorräume sind isomorph zueinander.)

7. $D([\![a, b]\!], \mathbf{R})$ (entsprechend $D(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, $D(]\!]a, b[\![, \mathbf{R})$) — die Menge aller auf $[\![a, b]\!]$ definierten differenzierbaren reellen Funktionen — bildet bezüglich der punktweisen Operationen einen reellen Vektorraum. Welcher Zusammenhang besteht zwischen $D([\![a, b]\!], \mathbf{R})$ und $C([\![a, b]\!], \mathbf{R})$?

8. $I([\![a, b]\!], \mathbf{R})$ (entsprechend $I(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, $I(]\!]a, b[\![, \mathbf{R})$) — die Menge aller auf $[\![a, b]\!]$ definierten Riemann-integrierbaren (bzw. uneigentlich Riemann-integrierbaren) reellen Funktionen — bildet bezüglich der punktweisen Operationen einen reellen Vektorraum. Welcher Zusammenhang besteht zwischen $C([\![a, b]\!], \mathbf{R})$ und $I([\![a, b]\!], \mathbf{R})$?

9. Es bezeichne L die Menge aller auf $\mathbf{R}_+ \setminus \{0\} = \{x: x \in \mathbf{R}, x > 0\}$ definierten Logarithmenfunktionen inklusive der Nullfunktion, d. h. $f \in L \Leftrightarrow f(x) = 0$ für alle $x > 0$ oder aber

$$f(x) = {}^a\log x \text{ für alle } x > 0 \text{ mit einer Basis } a > 0,\ a \neq 1.$$

L bildet bezüglich der punktweisen Funktionenaddition und Multiplikation mit einem reellen Skalar einen reellen Vektorraum.

Hinweis: Man zeige, daß 1. $\alpha \cdot f$ für $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$, wieder eine Logarithmenfunktion ist, sofern f eine war.
2. $f + g$ wieder eine Logarithmenfunktion ist, sofern f und g welche waren.
Hierzu verwende man die Umrechnungsformel von einer Logarithmenbasis in eine andere:

$${}^a\log x = {}^a\log b \cdot {}^b\log x, \quad a, b > 0, \quad b \neq 1.$$

10. Es sei E das System aller Exponentialfunktionen auf $\mathbf{R}$, d. h. $E = \{f: f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, und es gibt ein $a > 0$ mit $f(x) = a^x\}$. In E betrachte man die punktweise Funktionenmultiplikation: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. Man zeige, daß E bezüglich dieser Operation eine abelsche Gruppe ist. (Welche Potenzgesetze werden dabei benötigt?)
Kann man auch noch für E eine geeignete Multiplikation mit reellen Skalaren definieren, so daß damit E bezüglich der soeben betrachteten Gruppenoperation ein reeller Vektorraum wird? Die übliche Multiplikation mit Skalaren, d. h. $(\alpha, f) \mapsto \alpha \cdot f$ bei $\alpha \in \mathbf{R}$, $f \in E$, führt nicht zum Ziel, da nicht stets wieder ein Element von E herauskommt. Definiert man jedoch eine Multiplikation mit Skalaren in der nachfolgend aufgeführten Weise, so erhält man einen reellen Vektorraum: $(\alpha, f) \mapsto f^\alpha$, d. h., als skalares Vielfaches (Skalar α) von $f(x) = a^x$ nimmt man die Funktion $g(x) = (a^x)^\alpha$. Dieser soeben ermittelte Vektorraum kann auch wegen der Strukturgleichheit der Gruppe E mit der multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen (Isomorphie von E mit $(\mathbf{R}_+ \setminus \{0\}, \cdot)$) so umgedeutet werden, daß die Vektoren des zu betrachtenden Vektorraumes die strikt positiven reellen Zahlen sind, die Vektoraddition deren Multiplikation bedeutet und schließlich die Multiplikation eines Vektors x mit einem reellen Skalar α das Potenzieren x^α bedeutet.

11. Es sei V ein komplexer oder reeller Vektorraum. Aus den Grundregeln der Vektoraddition in V und der Multiplikation von Vektoren mit Skalaren zeige man die Gültigkeit folgender Gleichungen:

$$(\alpha - \beta)\,\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} - \beta\boldsymbol{x}, \quad \alpha, \beta \text{ Skalare, } \boldsymbol{x} \text{ Vektor,}$$
$$\alpha(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{y}, \quad \alpha \text{ Skalar, } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \text{ Vektoren.}$$

Linearformen auf dem n-dimensionalen reellen Zahlenraum (bzw. auf allgemeinen Vektorräumen)

Kontrollfragen

1. Welche reellen Funktionen $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ bezeichnet man als Linearformen auf dem $\mathbf{R}^n$?
   Unterscheidet sich der Begriff des linearen Funktionals auf dem $\mathbf{R}^n$ von dem Begriff der reellen Linearformen auf dem $\mathbf{R}^n$?
2. Was versteht man unter den Komponenten einer reellen Linearform in n Variablen? Ist eine reelle Linearform in n Variablen eindeutig durch ihre Koeffizienten bestimmt oder gibt es verschiedene Linearformen, die das gleiche Koeffiziententupel haben?
3. Was versteht man unter der Additivität und der Homogenität einer Linearform auf dem $\mathbf{R}^n$?
4. Wie sehen die Funktionsgraphen von reellen Linearformen auf dem $\mathbf{R}^1$ und dem $\mathbf{R}^2$ bei Benutzung der euklidischen Veranschaulichung aus?
5. Das System $\mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$ aller reellen Linearformen auf dem $\mathbf{R}^n$ ist eine Teilmenge des Systems aller möglichen reellen Funktionen $\mathscr{F}(\mathbf{R}^n)$ auf dem $\mathbf{R}^n$. Handelt es sich um eine echte Teilmenge? Ist die punktweise Summe von reellen Linearformen auf dem $\mathbf{R}^n$ wieder eine reelle Linearform auf dem $\mathbf{R}^n$? Gilt etwas Entsprechendes auch für das skalare Vielfache einer Linearform?
   $f, g \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n) \Rightarrow f + g \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$?
   $f \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n),\ \alpha \in \mathbf{R} \Rightarrow \alpha \cdot f \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$?
6. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der punktweisen Addition und der Multiplikation mit Skalaren in $\mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$ und den entsprechenden Operationen der zugehörigen Koeffiziententupel?
7. Unter einer Linearform bzw. einem linearen Funktional f auf einem beliebigen Vektorraum V versteht man eine Abbildung in den Skalarenkörper $\mathbf{R}$ bzw. $\mathbf{C}$, so daß f bezüglich der Vektoraddition additiv ist und bezüglich der Multiplikation mit Skalaren homogen.
   Ist das System $\mathscr{L}(V)$ (genauer $\mathscr{L}(V, \mathbf{R})$ bzw. $\mathscr{L}(V, \mathbf{C})$) aller reellen (bzw. komplexen) Linearformen auf einem reellen (bzw. komplexen) Vektorraum V bezüglich der punktweisen Funktionsoperationen ein Vektorraum? Kann man in dieser allgemeinen Situation auch immer von einem Koeffiziententupel eines linearen Funktionals f sprechen?
8. Was versteht man unter dem Kern $\ker f$ einer Linearform $f \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$? Kann man auch für den allgemeinen Fall $f \in \mathscr{L}(V)$ bei gegebenem Vektorraum V in gleicher Weise den Kern von f $\ker f \subset V$ definieren?
9. Was haben Linearformen $f_1, \ldots, f_m \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$ mit linearen Gleichungssystemen zu tun?

10. Kann man den Inhalt des Satzes über die lineare Struktur des Kerns $\ker f$, $f \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$, auch so auffassen, daß man sagt: $\ker f$ ist mit den Operationen des $\mathbf{R}^n$ wieder ein Vektorraum? Gilt etwas Entsprechendes auch im Fall $f \in \mathscr{L}(V)$ bei beliebigen Vektorräumen V?
11. Wie müßte man in voller Analogie zum $\mathbf{R}^n$ den Begriff eines linearen Teilraumes eines allgemeinen Vektorraumes V definieren? Sind dann für diesen Fall auch der Durchschnittssatz für lineare Teilräume und der Begriff von der linearen Hülle einer Teilmenge eines Vektorraumes gültig?
12. Was bedeuten die Begriffe „Linearkombination" bzw. „linear kombinierbar" im $\mathbf{R}^n$? Lassen sich diese Begriffe auch auf den allgemeinen Fall eines beliebigen Vektorraumes V übertragen?

Aufgaben

1. Die Menge $\mathscr{P}$ aller reellen Polynome werde mit der punktweisen Addition und Multiplikation mit reellen Skalaren ausgestattet. Es entsteht damit ein reeller Vektorraum. Welche der beiden folgenden reellen Abbildungen $f: \mathscr{P} \to \mathbf{R}$ und $g: \mathscr{P} \to \mathbf{R}$ ist ein lineares Funktional auf $\mathscr{P}$:

$$f(P) = \sum_{i=0}^{n} a_i, \text{ sofern } P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i,$$

$$g(P) = P(x_0),\ x_0 \text{ beliebige fixierte reelle Zahl?}$$

Lösung: a) f ist additiv und homogen, was man direkt bestätigt. Man kann aber auch beachten, daß es sich bei f um einen Spezialfall des anderen Teiles b) der Aufgabe handelt, indem man nämlich für x_0 den Punkt 1 nimmt.

b) Die Funktion g ist für beliebiges $x_0 \in \mathbf{R}$ ein lineares Funktional, da ja in $\mathscr{P}$ die Operationen punktweise gemeint sind. Es seien $P, Q \in \mathscr{P}$. Dann gilt

$$(P + Q)(x) := P(x) + Q(x), \quad x \in \mathbf{R},$$
$$(\alpha P)(x) := \alpha P(x), \quad x \in \mathbf{R}, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Also

$$g(P + Q) = (P + Q)(x_0) = P(x_0) + Q(x_0) = g(P) + g(Q),$$
$$g(\alpha P) = (\alpha P)(x_0) = \alpha P(x_0) = \alpha g(P).$$

2. Die Menge $M := \{(x, y): x, y \in \mathbf{R}, x^2 + (y-1)^2 = 1, \ y \neq 2\}$ (die Kreislinie eines Kreises vom Radius 1 mit den Mittelpunkt (0, 1), aus der der Nordpol herausgestochen ist) soll mit einer gewissen „Addition" und einer „Multiplikation mit reellen Skalaren" derart ausgestattet werden, daß man damit eine gewisse Veranschaulichung für den Raum der Linearformen auf dem $\mathbf{R}^1$ erhält. Wie hat das zu geschehen?

3. Man betrachte eine nichtausgeartete Linearform f auf dem $\mathbf{R}^2$, ihr Koeffiziententupel sei (a_1, a_2). Man versuche, eine geometrische Lagebeziehung zwischen dem Kern der Linearform (als Gerade in der euklidischen Veranschaulichung aufgefaßt) und der Ursprungsgeraden durch (a_1, a_2) herauszufinden.

Lösung: Es gilt $\ker f = \{(\xi_1, \xi_2) : a_1 \cdot \xi_1 + a_2 \cdot \xi_2 = 0\}$. Also liegen die Punkte $(-a_2, a_1)$ und $(a_2, -a_1)$ in $\ker f$. Daraus entnimmt man zunächst: Wenn (a_1, a_2) auf der x-Achse gelegen ist, so ist $\ker f$ die y-Achse und umgekehrt. Diese beiden Geraden stehen also senkrecht aufeinander. Testet man auch noch den Fall, daß (a_1, a_2) auf der Winkelhalbierenden des ersten und dritten bzw. zweiten und vierten Quadranten liegt, so erhält man wiederum, daß die Ursprungsgerade durch (a_1, a_2) und $\ker f$ senkrecht aufeinander stehen. Auch im allgemeinen Fall bestätigt sich diese Relation. Das lineare Funktional f mit dem KoeffizIententupel $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ sowie das lineare Funktional $\alpha \cdot f$, $\alpha \neq 0$, liefern stets denselben Kern. Folglich kann man voraussetzen, daß (a_1, a_2) auf dem Einheitskreis um den Ursprung liegt, d. h., es gilt $a_1^2 + a_2^2 = 1$, andernfalls betrachte man anstelle von (a_1, a_2) den Punkt $\frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \cdot (a_1, a_2)$. Dann gibt es genau einen Winkel $0 \leqq \varphi < 2\pi$ mit $(a_1, a_2) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$. Der Punkt $(-a_2, a_1)$ liegt ebenfalls auf dem Einheitskreis. Es gibt daher genau einen Winkel $0 \leqq \psi < 2\pi$ mit $(\cos \psi, \sin \psi) = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$. Also ist $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$.

4. Auf dem $\mathbf{R}^n$ heißen die n Abbildungen $\pi_i \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ mit $\pi_i(x) = x_i$, sofern $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ist, die kanonischen bzw. natürlichen i-ten Koordinatenprojektionen. Man zeige, daß π_i eine Linearform auf dem $\mathbf{R}^n$ ist und sich jedes Element $f \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$ aus den $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ linear kombinieren läßt.

5. Bezeichnet c die Menge aller konvergenten reellen Zahlenfolgen, dann ist c bezüglich der gliedweisen Folgenaddition und der gliedweisen Multiplikation mit einem reellen Skalar ein reeller Vektorraum.
   Es sei $x \in c$, d. h., $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $x_n \in \mathbf{R}$, $\lim x_n$ existiert. Man betrachte die Zuordnung $x \mapsto \lim x_n$ und beweise, daß damit durch $\lim \colon c \to \mathbf{R}$ ein lineares Funktional auf c gegeben ist.

Lösung: Die Vektorraumstruktur von c und die Funktionaleigenschaft von lim bedeuten gerade gewisse Grundgesetze über konvergente Folgen. Mit zwei konvergenten Folgen x und y sind nämlich auch die Folgen $x + y$ und $\alpha \cdot x$, $\alpha \in \mathbf{R}$, konvergent, und es gilt

$$\lim (x + y) = \lim x + \lim y, \quad \lim \alpha \cdot x = \alpha \cdot \lim x.$$

Hinsichtlich der Multiplikation mit einem reellen Skalar handelt es sich nur um einen Spezialfall des allgemeineren Folgengesetzes: Mit zwei konvergenten Folgen x, y ist auch deren gliedweises Produkt $x \cdot y = (x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine konvergente Folge, und es besteht die Limesbeziehung

$$\lim x \cdot y = \lim x \cdot \lim y.$$

6. Auf dem Vektorraum $\mathscr{C}([\![a, b]\!])$ der stetigen reellen Funktionen über dem Intervall $[\![a, b]\!]$ betrachte man folgende Zuordnung:

$$\mathscr{C}([\![a, b]\!]) \ni f \mapsto \frac{f(a) + f(b)}{2},$$ d. h., jeder Funktion $f \in \mathscr{C}([\![a, b]\!])$ wird die Ordinate des Mittelpunktes der Sekante durch den Anfangspunkt und Endpunkt des Funktionsgraphen zugeordnet.

   1. Es handelt sich um ein lineares Funktional auf $\mathscr{C}([\![a, b]\!])$.
   2. Dieses Funktional stelle man als Summe zweier anderer Funktionale dar.
   3. Der Kern des Funktionals besteht aus allen Funktionen $f \in \mathscr{C}([\![a, b]\!])$ mit $f(a) = -f(b)$.

7. Die Vereinigung zweier linearer Teilräume des $\mathbf{R}^n$ ist nicht notwendig wieder ein linearer Teilraum des $\mathbf{R}^n$ (Beispiele!). Welche gegenseitige Lagebeziehung müssen

zwei lineare Teilräume eines allgemeinen Vektorraumes V erfüllen, damit ihre Vereinigung ein linearer Teilraum wird?

Hinweis: 1. Im $\mathbf{R}^2$ betrachte man beispielsweise $L_1 := \{(x, 0): x \in \mathbf{R}\}$ und $L_2 := \{(0, y): y \in \mathbf{R}\}$. Dann ist $L_1 \cup L_2$ kein linearer Teilraum.
2. Einer muß im anderen enthalten sein.

8. Läßt sich das Element (1, 1, 1) des $\mathbf{R}^3$ aus den Elementen (1, −1, 0), (2, 3, 1) linear kombinieren?

Hinweis: Es ist nach $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ gefragt mit $(1, 1, 1) = \alpha(1, -1, 0) + \beta(2, 3, 1)$, d. h., es müßte $1 = \alpha + 2\beta$, $1 = -\alpha + 3\beta$, $1 = \beta$ gelten. Das kann nicht sein!

9 Im $\mathbf{R}^n$ seien die Elemente $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ gegeben. Welches rechnerische Anliegen hat man bei der Frage zu bewältigen, ob $\boldsymbol{x}_0$ zu dem von den Elementen $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ aufgespannten linearen Teilraum $L(\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k\})$ gehört?

Hinweis: Es ist nach reellen Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ gefragt, für welche

$$\boldsymbol{x}_0 = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{x}_k$$

gilt. Es ist also ein lineares Gleichungssystem in den Unbekannten α_i zu lösen.

10. Kann der lineare Teilraum $L(\{\boldsymbol{x}\})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3$, der also von einem einzigen Element $\boldsymbol{x}$ des $\mathbf{R}^3$ aufgespannt wird, Kern einer Linearform sein?

Lineare Unabhängigkeit

Kontrollfragen

1. Was heißt lineare Abhängigkeit eines Elementes $\boldsymbol{x}$ des $\mathbf{R}^n$ von einer Teilmenge U des $\mathbf{R}^n$? Was hat dies mit dem Begriff „lineare Kombination" zu tun?
2. Ist eine entsprechende Übertragung der Begriffe „linear abhängig" bzw. „linear unabhängig" auf beliebige Vektorräume möglich?
3. Was versteht man unter einer Basis des $\mathbf{R}^n$? Welche Kennzeichnung der Basen gibt es mittels der linearen Unabhängigkeit?
4. Was versteht man unter der natürlichen Basis des $\mathbf{R}^n$?
5. Haben die Basen des $\mathbf{R}^n$ stets die gleiche Anzahl von Basiselementen?
6. Kann man jede linear unabhängige Teilmenge des $\mathbf{R}^n$ zu einer Basis des $\mathbf{R}^n$ ergänzen?
7. Wie müßte man in entsprechender Analogie zum $\mathbf{R}^n$ verfahren, wenn man die Dimension eines allgemeinen Vektorraumes definieren will und dabei zunächst die Einteilung der Vektorräume wie folgt vornimmt:

   1. Ein Vektorraum V heißt endlichdimensional genau dann, wenn er eine endliche Teilmenge besitzt, die den ganzen Vektorraum aufspannt.

2. Ein Vektorraum V heißt unendlichdimensional genau dann, wenn er keine endliche Teilmenge besitzt, die ihn aufspannt.

8. Welche Teilräume des $\mathbf{R}^n$ kommen für die Kerne von nichtausgearteten linearen Funktionalen in Frage?
9. Was versteht man unter der Koordinatendarstellung eines Vektors des $\mathbf{R}^n$ in bezug auf eine Basis?
10. Welches Koordinatentupel ergibt sich für einen Vektor des $\mathbf{R}^n$ in bezug auf die natürliche Basis?
11. Welche Operationen müssen mit den Koordinatentupeln von Vektoren des $\mathbf{R}^n$ bezüglich einer Basis vollzogen werden, um das Koordinatentupel des Summenvektors und das eines skalaren Vielfachen zu bekommen?
12. Wie müßte man die Isomorphie von zwei allgemeinen Vektorräumen definieren?
13. Ist die Dimension eines Vektorraumes eine Invariante bezüglich Isomorphie, d. h., gilt $\dim V_1 = \dim V_2$, wenn V_1 und V_2 isomorphe Vektorräume sind?

Aufgaben

1. Im Vektorraum der reellen Polynome weise man die Menge der Elementarpolynome $P_n(x) := x^n$, n ganze Zahl $\geqq 0$, als linear unabhängig nach.

   Hinweis: Ein vom Nullpolynom verschiedenes Polynom hat nur endlich viele Nullstellen. Der Vektorraum der reellen Polynome ist also unendlichdimensional, denn er hat eine unendliche linear unabhängige Teilmenge.

2. Der Vektorraum $\mathscr{C}([\![a, b]\!])$, $a < b$, aller reellen stetigen Funktionen ist unendlichdimensional.

3. Zwei Elemente $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ des $\mathbf{R}^2$ sind genau dann linear abhängig, wenn $x_1y_2 = x_2y_1$ gilt.

4. Folgt im $\mathbf{R}^3$ für die drei Elemente $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$, $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, z_3)$ stets aus dem Bestehen der Beziehung $x_1y_2z_3 = x_2y_3z_1 = x_3y_1z_2$ die lineare Abhängigkeit von $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$?

   Hinweis: Nein! Man gebe ein Beispiel an.

5. Man weise die Elemente $\boldsymbol{x} = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{y} = (4, 5, 6)$ des $\mathbf{R}^3$ als linear unabhängig nach und ergänze sie durch ein weiteres Element zu einer Basis des $\mathbf{R}^3$.

   Lösung: Eine lineare Kombination $\alpha \cdot \boldsymbol{x} + \beta \cdot \boldsymbol{y} = 0$ liefert

$$\alpha + 4\beta = 0,$$
$$2\alpha + 5\beta = 0,$$
$$3\alpha + 6\beta = 0.$$

Also folgt aus der ersten und zweiten Zeile $8\beta = 5\beta$, d. h. $\beta = 0$, und damit $\alpha = 0$. Das Element $\boldsymbol{z} = (1, 0, 0)$ kann als Ergänzungselement dienen. Die Menge $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$ ist nämlich linear unabhängig und bildet demzufolge eine Basis, weil in $\mathbf{R}^3$ jede linear unabhängige Menge mit drei Elementen eine maximale linear unabhängige Teilmenge ist. Die lineare

Unabhängigkeit erschließt man aus dem Bestehen der Beziehung

$$\begin{aligned} \alpha + 4\beta + \gamma &= 0, \\ 2\alpha + 5\beta \quad &= 0, \\ 3\alpha + 6\beta \quad &= 0. \end{aligned}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen erhält man durch Subtraktion $\alpha + \beta = 0$, also $2\alpha + 2\beta = 0$, und damit $3\beta = 0$, d. h. $\beta = 0$, $\alpha = 0$, $\gamma = 0$. Nimmt man aber etwa anstelle von $\boldsymbol{z}$ den Vektor $\boldsymbol{w} = (7, 8, 9)$ zu $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ hinzu, so hat man ein linear abhängiges System $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}$; denn es läßt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha + 4\beta + 7\gamma &= 0, \\ 2\alpha + 5\beta + 8\gamma &= 0, \\ 3\alpha + 6\beta + 9\gamma &= 0 \end{aligned}$$

durch $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, -2, 1)$ nichttrivial lösen, worauf man durch Subtraktion der dritten und zweiten und darauffolgend mit der ersten Gleichung des Systems geführt wird.

6. Es seien L_1 und L_2 zwei lineare Teilräume eines endlichdimensionalen Vektorraumes V. Welche Beziehung läßt sich zwischen den Werten $\dim \big(L(L_1 \cup L_2)\big)$, $\dim L_1$, $\dim L_2$ und $\dim (L_1 \cap L_2)$ ableiten?

   Hinweis: Es gilt $\dim (L(L_1 \cup L_2)) + \dim (L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2$.

7. Man ermittle alle Punkte des $\mathbf{R}^2$, deren Koordinatenvektoren (ξ, η) bezüglich der Basis $\mathfrak{B}$: $(1, 0), (1, 1)$ der „Kreisgleichung" $\xi^2 + \eta^2 = 1$ genügen.

   Hinweis: Die gesuchte Menge besteht aus allen Punkten (x, y) mit $(x - y)^2 + y^2 = 1$.

8. Die Elemente $\boldsymbol{x} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, $\boldsymbol{y} = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$ des $\mathbf{R}^2$ weise man für jedes $\varphi \in \mathbf{R}$ als linear unabhängig nach. Man bestimme zu den Elementen $(1, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, 1)$ jeweils die Koordinatenvektoren in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}$: $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$.

9. Im Vektorraum $\mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$ der reellen Linearformen auf dem $\mathbf{R}^n$ bilden die kanonischen Koordinatenprojektionen $\pi_i: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ mit $\pi_i\big((x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)\big) = x_i$ eine Basis $\mathfrak{B}: \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$.

10. Der auf S. 97, Aufgabe 10, betrachtete reelle Vektorraum E der Exponentialfunktionen und der in der Aufgabe 9 betrachtete reelle Vektorraum L der Logarithmenfunktionen sind beide eindimensional (und damit isomorph zum $\mathbf{R}^1$).

    Hinweis: Man braucht nur zu zeigen, daß E und L jeweils von jedem von Null verschiedenen Element erzeugt werden.

11. In jedem unendlichdimensionalen Vektorraum V gibt es eine aufsteigende Folge $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n \subset \cdots$ von linearen Teilräumen mit $\dim V_n = n$.

12. Es seien L_1 und L_2 zwei lineare Teilräume des gegebenen Vektorraumes V. Ihre Vereinigungsmenge möge den ganzen Vektorraum V aufspannen: $V = L(L_1 \cup L_2)$. Dann gilt:

    $L_1 \cap L_2 = \{0\} \Leftrightarrow$ Jedes Element $\boldsymbol{x} \in V$ hat genau eine Summendarstellung $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ mit $\boldsymbol{x}_1 \in L_1$ und $\boldsymbol{x}_2 \in L_2$.

13. Es sei X eine nichtlineare Teilmenge und $V = X^{\mathbf{R}}$ der Vektorraum aller reellen Funktionen auf X, wobei die punktweise Funktionenaddition als Vektoraddition und die punktweise Multiplikation mit Skalaren fungiert. Dann ist in V die folgende „Vektormenge" (= Funktionenmenge) linear unabhängig:

$$M := \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in V, x \in X \text{ mit } \boldsymbol{x}(y) := 1 \text{ für } y = x \text{ und } \boldsymbol{x}(y) = 0 \text{ für } y \neq x\}.$$

Diese Menge M ist genau dann eine Basis von V, wenn X endlich ist.
Wie sieht der von M aufgespannte lineare Teilraum $L(M)$ in V aus?

14. Es sei $\mathfrak{B}: \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ eine Basis im $\mathbf{R}^n$. Gibt es dann stets ein lineares Funktional $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, das für die Vektoren $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ vorgeschriebene Werte $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ annimmt?

15. Es seien $\mathfrak{B}_1: \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ und $\mathfrak{B}_2: \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ zwei Basen des $\mathbf{R}^n$. Diese Basen sind genau dann voneinander verschieden, d. h., es gibt wenigstens ein $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $\boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{y}_i$, wenn es einen Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ gibt, dessen Koordinatenvektor bezüglich $\mathfrak{B}_1$ von dem Koordinatenvektor bezüglich $\mathfrak{B}_2$ verschieden ist.

16. Es seien $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ endlich viele verschiedene Vektoren eines reellen Vektorraumes V. Bei linearer Abhängigkeit dieser Vektoren läßt sich mindestens einer durch die übrigen linear kombinieren. Man gebe ein Beispiel dafür, daß sich dann aber kein weiterer Vektor aus $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ durch die übrigen kombinieren läßt. Zum anderen gebe man ein Beispiel, daß sich jeder Vektor aus $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ durch die übrigen linear kombinieren läßt.

17. Es sei V ein Vektorraum. Zwei nichtleere Teilmengen M_1, M_2 von V kann man linear unabhängig nennen, wenn sich der Nullvektor nur trivial mittels von Null verschiedener Vektoren aus M_1 und M_2 linear kombinieren läßt. Entsprechendes überträgt sich auf endlich viele nichtleere Teilmengen $M_1, M_2, \ldots, M_k$ von V. Also bedeutet die lineare Unabhängigkeit von $M_1, M_2, \ldots, M_k$, daß aus dem Bestehen der Beziehung $\boldsymbol{0} = \alpha_1 \cdot \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_k \cdot \boldsymbol{x}_k$ für beliebige $\boldsymbol{x}_i \in M_i$, $\boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{0}$, stets $\alpha_i = 0$ für alle $i = 1, 2, \ldots, k$ folgt. Lineare Abhängigkeit der Vektoren $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$, $\boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{0}$, bedeutet in diesem Sinne die lineare Abhängigkeit der Mengen $M_1 = \{\boldsymbol{x}_1\}, M_2 = \{\boldsymbol{x}_2\}, \ldots, M_k = \{\boldsymbol{x}_k\}$.
Man zeige: Für die nichttrivialen linearen Teilräume $L_1, L_2, \ldots, L_k$ des Vektorraumes V gilt: $L_1, L_2, \ldots, L_k$ sind genau dann linear unabhängig, wenn jeder Vektor $\boldsymbol{x}$ aus $L(L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_k)$ genau eine Darstellung $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_k$ mit $\boldsymbol{x}_i \in L_i$ für alle $i = 1, 2, \ldots, k$ besitzt.

18. Im Vektorraum $\mathcal{P}$ aller reellen Polynome bilden die Elementarpolynome $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots$ eine Basis. Man zeige, daß für beliebiges $a \in \mathbf{R}$ die Polynome $1, (x-a), (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n, \ldots$ ebenfalls eine Basis in $\mathcal{P}$ bilden.
Wie berechnen sich die Koordinaten von einem Polynom $P(x)$ bezüglich der neuen Basis?

Lösung: Es sei $0 = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot (x-a) + \cdots + \alpha_n \cdot (x-a)^n$ für alle $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$. Wenn $\alpha_n \neq 0$ ist, steht rechts ein Polynom vom Grade n. Solch ein Polynom hat aber höchstens n Nullstellen. Links steht aber das Nullpolynom, das überall den Wert 0 annimmt. Folglich verbleibt nur die Möglichkeit $\alpha_n = 0$, was schließlich für alle $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ den Wert 0 ergibt.

Damit sind die Polynome $1, (x-a), (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n, \ldots$ als linear unabhängig in $\mathcal{P}$ nachgewiesen. Es muß noch $L(\{1, (x-a), (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n, \ldots\}) = \mathcal{P}$ bestätigt werden. Dazu wiederum reicht wegen der Basiseigenschaft der Polynome $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ der Nachweis

$$x^n \in L(\{1, (x-a), \ldots, (x-a)^n, \ldots\})$$

aus. Das kann durch vollständige Induktion nach n geschehen. Es ist $x \in L(\{1, (x-a), \ldots, (x-a)^n, \ldots\})$, denn man hat die Darstellung $x = (x-a) + a \cdot 1$. Wenn für x^n eine Darstellung der Gestalt

$$x^n = \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot (x-a) + \cdots + \alpha_n \cdot (x-a)^n$$

existiert, muß eine entsprechende Darstellung für x^{n+1} ermittelt werden. Es ist $x^{n+1} = x^n(x-a) + a \cdot x^n$. Also hat man

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= \alpha_0 \cdot (x-a) + \alpha_1 \cdot (x-a)^2 + \cdots + \alpha_n \cdot (x-a)^{n+1} \\ &\quad + a \cdot \alpha_0 \cdot 1 + a \cdot \alpha_1 \cdot (x-a) + \cdots + a \cdot \alpha_n \cdot (x-a)^n \\ &= a \cdot \alpha_0 \cdot 1 + (\alpha_0 + a \cdot \alpha_1)(x-a) + (\alpha_1 + a \cdot \alpha_2)(x-a)^2 + \cdots \\ &\quad + (\alpha_{n-1} + a \cdot \alpha_n)(x-a)^n + \alpha_n \cdot (x-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

Die Basisdarstellung eines Polynoms $P(x)$ hinsichtlich der Basis $1, (x-a), (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n, \ldots$ bedeutet das Auffinden der Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ in

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot (x-a) + \alpha_2 \cdot (x-a)^2 + \cdots + \alpha_n \cdot (x-a)^n.$$

Unter Heranziehung der Differentialrechnung findet man $\alpha_0 = P(a)$, $\alpha_1 = P'(a)$, $\alpha_2 = \frac{1}{2} P''(a), \ldots, \alpha_n = \frac{1}{n!} P^{(n)}(a)$, wobei P' die erste Ableitung, P'' die zweite Ableitung und entsprechend $P^{(n)}$ die n-te Ableitung von P bezeichnet.

19. Im Vektorraum $\mathcal{P}$ aller reellen Polynome bilden die Elementarpolynome $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ eine Basis. Man bestimme für das Polynom $P(x) \cdot Q(x)$ die Koordinatendarstellung bezüglich der angegebenen Basis, wenn $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ der Koordinatenvektor von $P(x)$ und $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m)$ der Koordinatenvektor von $Q(x)$ ist.

Lösungsmannigfaltigkeiten linearer Gleichungssysteme

Kontrollfragen

1. Was versteht man unter einem (reellen) linearen Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten?
2. Ist der Kern einer reellen Linearform als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems aus einer Gleichung aufzufassen?
3. Was bedeuten bei einem linearen Gleichungssystem die folgenden Zusätze: homogen, inhomogen, lösbar, unlösbar, bestimmt und unbestimmt?
4. Was versteht man unter dem zu einem inhomogenen linearen Gleichungssystem gehörigen homogenen linearen Gleichungssystem?
5. Was bedeutet die Äquivalenz von zwei linearen Gleichungssystemen?

6. Können äquivalente lineare Gleichungssysteme aus einer unterschiedlichen Anzahl von Gleichungen bestehen?
7. Wie drückt sich die Äquivalenz von zwei gegebenen homogenen linearen Gleichungssystemen in dem Raum der linearen Funktionale aus?
8. Was hat die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems mit dem Begriff des linearen Teilraums im $\mathbf{R}^n$ zu tun?
9. Kann jeder lineare Teilraum des $\mathbf{R}^n$ Lösungsmenge eines geeigneten linearen Gleichungssystems mit n Unbekannten sein?
10. Was versteht man unter dem Rang eines linearen Gleichungssystems? Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Rang eines homogenen linearen Gleichungssystems und der Dimension des Lösungsraumes?
11. Für Teilmengen des $\mathbf{R}^n$ ist die Komplexsumme bzw. Komplexdifferenz definiert. Was hat diese Begriffsbildung mit dem Begriff der linearen Mannigfaltigkeit im $\mathbf{R}^n$ zu tun?
12. Lassen sich die in der vorstehenden Frage genannten Begriffe ganz analog auch für beliebige Vektorräume definieren?
13. Wie sehen die linearen Mannigfaltigkeiten des $\mathbf{R}^2$ und des $\mathbf{R}^3$ in bezug auf die euklidische Veranschaulichung aus?
14. Wie ist die Dimension einer linearen Mannigfaltigkeit definiert? Was versteht man unter einer Hyperebene des $\mathbf{R}^n$?
15. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Hyperebenen des $\mathbf{R}^n$ und den Linearformen auf dem $\mathbf{R}^n$?
16. Wie verhalten sich lineare Mannigfaltigkeiten des $\mathbf{R}^n$ (bzw. allgemeiner Vektorräume) gegenüber der Durchschnittsbildung?
17. Welche Beziehung besteht zwischen linearen Mannigfaltigkeiten des $\mathbf{R}^n$ und den Lösungsmannigfaltigkeiten von linearen Gleichungssystemen in n Unbekannten?
18. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Durchschnitten von endlich vielen Hyperebenen und den Lösungsmannigfaltigkeiten von linearen Gleichungssystemen?
19. Was versteht man unter den elementaren Umformungen eines Gleichungssystems und was will man mit solchen Umformungen erreichen?
20. Welche Entscheidung kann man mittels des Gaußschen Algorithmus über ein lineares Gleichungssystem treffen?
21. Kann der Gaußsche Algorithmus auch zur Entscheidung der linearen Abhängigkeit bzw. linearen Unabhängigkeit eines vorgelegten endlichen Vektorsystems benutzt werden?

Aufgaben

1. Im $\mathbf{R}^2$ bestimmt jede Gleichung $f(\mathfrak{x}) = \alpha$ mit nichtausgeartetem $f \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ und $\alpha \in \mathbf{R}$ eine Gerade. (Bei Zugrundelegung der euklidischen Veranschaulichung des $\mathbf{R}^2$ macht die Lösungsgesamtheit der genannten Gleichung eine Gerade aus.) Man

ermittle Bedingungen dafür, daß die Gerade parallel zur x-Achse verläuft (ausgedrückt durch das Koeffiziententupel von f und den Wert α).

Lösung: Die x-Achse ergibt sich dann als Kern der gesuchten Linearform f, d. h. $\ker f = \{(\xi, 0) : a_1 \cdot \xi + a_2 \cdot \eta = 0\}$, also muß $a_1 = 0$ und $a_2 \neq 0$ sein. Wir wählen $a_2 = 1$. Dann wird die gewünschte Gerade durch die Gleichung $\eta = \alpha$ geliefert ($a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $\alpha \in \mathbf{R}$).

2. Wann und nur wann haben zwei Geraden im $\mathbf{R}^2$, die durch die Gleichungen $f(\boldsymbol{x}) = \alpha$ und $g(\boldsymbol{x}) = \beta$ mit $f, g \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, beschrieben werden, genau einen Schnittpunkt?

Hinweis: Die Linearformen f und g mögen die Koeffiziententupel (a_1, a_2) bzw. (b_1, b_2) haben. Die Frage ist gleichbedeutend mit der eindeutigen Lösbarkeit des Gleichungssystems

$$a_1 \cdot \xi + a_2 \cdot \eta = \alpha,$$
$$b_1 \cdot \xi + b_2 \cdot \eta = \beta.$$

Die Lösungsmannigfaltigkeit muß also nulldimensional sein. Demzufolge muß also der Rang des homogenen Gleichungssystems 2 sein. Als notwendige und hinreichende Bedingung ergibt sich deshalb die lineare Unabhängigkeit von (a_1, a_2), (b_1, b_2).

3. Man bestimme alle Elemente $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ des $\mathbf{R}^3$, die auf der Hyperebene liegen, welche die Elemente $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ enthält. Man gebe eine Hyperebenengleichung für die gewünschte Hyperebene an.

Hinweis: Die Hyperebenengleichung lautet $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

4. Das folgende Gleichungssystem ist in Abhängigkeit von λ zu lösen:

$$\begin{aligned} \lambda x + y + z &= 1, \\ -x + \lambda y + z &= \lambda, \\ -x - y + \lambda z &= -\lambda. \end{aligned}$$

Lösung: Der Gaußsche Algorithmus komme auf das umgeordnete System

$$\begin{aligned} x + y - \lambda z &= \lambda, \\ -x + \lambda y + z &= \lambda, \\ \lambda x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

zur Anwendung.

Die Umformung auf Trapezform sieht dann wie folgt aus:

	x	y	z	
(1)	1	1	$-\lambda$	λ
(2)	-1	λ	1	λ
(3)	λ	1	1	1

	x	y	z	
(1)	1	1	$-\lambda$	λ
(2) + (1)		$\lambda + 1$	$-\lambda + 1$	2λ
(3) $- \lambda$(1)		$1 - \lambda$	$1 + \lambda^2$	$1 - \lambda^2$

Eine weitere Umstellung ist zunächst zweckmäßig, um stets einen von Null verschiedenen Koeffizienten an der ersten Stelle der zweiten Gleichung zu erhalten:

	x	z	y	
(1)	1	$-\lambda$	1	λ
(2)		$1+\lambda^2$	$1-\lambda$	$1-\lambda^2$
(3)		$1-\lambda$	$1+\lambda$	2λ

	x	z	y	
(1)	1	$-\lambda$	1	λ
(2)		$1+\lambda^2$	$1-\lambda$	$1-\lambda^2$
$(3) - \dfrac{1-\lambda}{1+\lambda^2}(2)$			$1+\lambda-\dfrac{(1-\lambda)^2}{1+\lambda^2}$	$2\lambda-\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda^2}(1-\lambda^2)$

Oder noch weiter vereinfacht

	x	z	y	
(1)	1	$-\lambda$	1	λ
(2)		$1+\lambda^2$	$1-\lambda$	$1-\lambda^2$
(3)			$\dfrac{\lambda^3+3\lambda}{1+\lambda^2}$	$\dfrac{\lambda^3+\lambda^2+3\lambda-1}{1+\lambda^2}$

Daraus entnimmt man, daß das Gleichungssystem für $\lambda = 0$ nicht lösbar ist. Für $\lambda \neq 0$ ist das Gleichungssystem stets lösbar, und es ergibt sich

$$y = \frac{\lambda^3+\lambda^2+3\lambda-1}{\lambda^3+3\lambda}, \quad z = \frac{-\lambda^5+\lambda^4-2\lambda^3+2\lambda^2-\lambda+1}{\lambda(\lambda^2+3)(1+\lambda^2)},$$

$$x = \frac{-\lambda^5+\lambda^4-2\lambda^3+2\lambda^2-\lambda+1}{(\lambda^2+3)(1+\lambda^2)} - \frac{\lambda^3+\lambda^2+3\lambda-1}{\lambda(\lambda^2+3)} + \lambda.$$

5. Man bestimme eine Basis des Lösungsraumes des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0,\\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0,\\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0,\\ x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Hinweis: Eine Basis des Lösungsraumes ist etwa gegeben durch die beiden Vektoren $(1, 1, 1, -1)$ und $(0, 1, 1, 0)$.

6. Sind die Elemente $\mathfrak{x} = (1, -2, 1)$, $\mathfrak{y} = (3, -1, 2)$, $\mathfrak{z} = (2, 1, 2)$ des $\mathbf{R}^3$ linear unabhängig?

Hinweis: Der Rang ist 3, d. h., das gegebene Vektorsystem ist linear unabhängig.

7. Man ermittle drei Hyperebenengleichungen im $\mathbf{R}^3$, so daß der Durchschnitt der Hyperebenen gerade nur aus dem Element (1, 1, 1) besteht.

Lösung:

1. *Geometrische Argumentation:* Man lege die euklidische Veranschaulichung des $\mathbf{R}^3$ zugrunde. Jeder Punkt $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3$ ist dann der Durchschnitt der drei Ebenen, die zu den Koordinatenebenen parallel sind. Die x_1,x_2-Ebene ist Kern des linearen Funktionals f_1 mit dem Koeffiziententupel (0, 0, 1). Also ist die durch den Punkt (1, 1, 1) verlaufende parallele Ebene beschrieben durch die Gleichung $x_3 = 1$.
Die x_2,x_3-Ebene ist Kern des linearen Funktionals f_2 mit dem Koeffiziententupel (1, 0, 0). Also ist die durch den Punkt (1, 1, 1) verlaufende parallele Ebene beschrieben durch die Gleichung $x_1 = 1$. Die x_1,x_3-Ebene ist Kern des linearen Funktionals f_3 mit dem Koeffiziententupel (0, 1, 0). Also ist die durch den Punkt (1, 1, 1) verlaufende parallele Ebene beschrieben durch die Gleichung $x_2 = 1$.

2. *Arithmetische Argumentation:* Es ist ein inhomogenes lineares Gleichungssystem in drei Unbestimmten mit drei Gleichungen gesucht, so daß die Lösungsmannigfaltigkeit genau aus dem Punkt (1, 1, 1) besteht. Die drei Gleichungen eines solchen Systems sind dann die gesuchten drei Hyperebenengleichungen.
Es handelt sich um ein bestimmtes lineares Gleichungssystem, es muß also den Rang 3 haben. Man kann daher von drei beliebigen linear unabhängigen Elementen $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ des $\mathbf{R}^3$ ausgehen, z. B. waren die drei Elemente der vorhergehenden Aufgabe linear unabhängig: $\boldsymbol{x} = (1, -2, 1)$, $\boldsymbol{y} = (3, -1, 2)$, $\boldsymbol{z} = (2, 1, 2)$. Diese Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ nehme man als die Koordinatenvektoren der gewünschten linearen Funktionale f_1, f_2, f_3. Es sind jetzt noch Werte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{R}$ zu ermitteln, so daß (1, 1, 1) einzige Lösung ist von

$$f_1(x) = \alpha_1, \quad f_2(x) = \alpha_2, \quad f_3(x) = \alpha_3.$$

Es müssen lediglich die Werte $f_1(1, 1, 1)$, $f_2(1, 1, 1)$, $f_3(1, 1, 1)$ berechnet werden, was nacheinander

$$\begin{aligned} f_1(1, 1, 1) &= 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0, \\ f_2(1, 1, 1) &= 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 4, \\ f_3(1, 1, 1) &= 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5 \end{aligned}$$

ergibt. Damit haben wir den Punkt (1, 1, 1) als einzige Lösung des bestimmten inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Geht man anstelle der obigen $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ von den drei Basisvektoren der kanonischen Basis $\mathfrak{B}$: (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) aus, so erhält man gerade die in der geometrischen Argumentation angefallenen Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 1, \\ x_2 \qquad &= 1, \\ x_3 &= 1. \end{aligned}$$

8. Welche Figur entsteht im $\mathbf{R}^3$ (bei euklidischer Veranschaulichung), wenn man die Komplexsumme der folgenden Mengen A, B betrachtet:

1. $A = \{(x_1, x_2)\colon x_1^2 + x_2^2 \leqq 1\}, B = A$,
2. $A = \{(x_1, x_2)\colon |x_1| \leqq 1, |x_2| \leqq 1\}, B = A$,
3. $A = \{(x_1, x_2)\colon x_1^2 + x_2^2 = 1\}, B = A$,
4. $A = \{\alpha\boldsymbol{x} + (1 - \alpha) \cdot \boldsymbol{y}\colon \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^2$ fixiert, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\quad B = \{(x_1, x_2)\colon x_1^2 + x_2^2 \leqq 1\}$?

Hinweis:

1. Es handelt sich bei A um die Kreisscheibe mit dem Radius 1 und dem Ursprungspunkt als Mittelpunkt. Es ist $A + A = \{(z_1, z_2): z_1^2 + z_2^2 \leqq 4\}$.

2. Es handelt sich bei A um ein achsenparalleles Quadrat der Seitenlänge 2 mit dem Ursprungspunkt als Mittelpunkt. Es entsteht für $A + A$ ein achsenparalleles Quadrat der Seitenlänge 4 mit dem Ursprungspunkt als Mittelpunkt:

$$A + A = \{(z_1, z_2): |z_1| \leqq 2, \ |z_2| \leqq 2\}.$$

3. Es handelt sich bei A um die Kreislinie vom Radius 1 mit dem Ursprungspunkt als Mittelpunkt. Die Gleichung $A + A = \bigcup_{x \in A} x + A$ führt zu der Feststellung, daß $A + A$ die gleiche Menge ergibt wie in 1., d. h., es entsteht eine ganze Kreisscheibe vom Radius 2 mit dem Ursprung als Mittelpunkt.

4. Es handelt sich bei A im Fall $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ nur um den Punkt $\boldsymbol{x}$ und im Fall $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ um die durch $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ verlaufende Gerade. Es ist $A + B$ also im ersten Fall die Kreisscheibe vom Radius 1 um den Punkt $\boldsymbol{x}$, und im zweiten Fall ist $A + B$ die Vereinigung aller Kreisscheiben vom Radius 1 um die Punkte der Geraden A. Im zweiten Fall entsteht demnach ein Parallelstreifen um die Gerade A der Breite 2.

9. Für einen vom Nullraum verschiedenen reellen Vektorraum V untersuche man in der um die leere Menge $\emptyset$ reduzierten Potenzmenge $P(V) \setminus \{\emptyset\}$ die Operation der Komplexaddition $+$ auf Gültigkeit der Grundeigenschaften der Vektoroperationen.

Lösung: Die reduzierte Potenzmenge werde mit P_0 bezeichnet. Es ist dann $+: P_0 \times P_0 \to P_0$, und außerdem ist eine Multiplikation mit reellen Skalaren in P_0 erklärt vermöge

$$(\alpha, A) \mapsto \alpha A = \{\alpha x : x \in A\} \quad \text{für} \quad \alpha \in \mathbf{R}, A \in P_0.$$

Für diese Operationen gilt:

1. $A + B = B + A$, die Kommutativität. Denn es ist $x + y = y + x$ für alle $x, y \in V$.

2. $(A + B) + C = A + (B + C)$, die Assoziativität. Denn es gilt dies für die Vektoren.

3. Es gibt ein Element $0 \in P_0$ mit $0 + A = A$ für alle P_0, nämlich $0 = \{o\}$ erfüllt dies. Es gibt auch kein weiteres Element $\tilde{0} \in P_0$ mit $\tilde{0} + A = A$ für alle $A \in P_0$, denn für $A = \{x\}$ erschließt man, daß $\tilde{0}$ notwendig einpunktig sein muß. Es verbleibt dann auch nur noch $\tilde{0} = \{o\}$.

4. Aber nicht zu jedem $A \in P_0$ gibt es ein $\tilde{A} \in P_0$ mit $A + \tilde{A} = 0$. Denn für alle $B \in P_0$ ist $V + B = V$.

Für die Multiplikation mit einem Skalar gilt aber wieder:

5. $1 \cdot A = A$ für alle $A \in P_0$.

6. $(\alpha \cdot \beta) A = \alpha(\beta A)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $A \in P_0$.

7. Hingegen ergibt sich für $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ und $A \in P_0$ im allgemeinen nur $(\alpha + \beta) A \subset \alpha A + \beta A$. Bei $A = \{\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{x}\}$ mit $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ und $\alpha = \beta = 1$ hat man $(\alpha + \beta) A = \{2\boldsymbol{x}, -2\boldsymbol{x}\}$, während $\alpha A + \beta A$ aus den 3 Vektoren $2\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{0}$ und $-2\boldsymbol{x}$ besteht.

8. Für $\alpha \in \mathbf{R}$ und $A, B \in P_0$ ist aber wieder stets $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

10. Im $\mathbf{R}^2$ bzw. $\mathbf{R}^3$ findet man bei Zugrundelegung der euklidischen Veranschaulichung, daß die Gerade durch die Punkte $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, beschrieben wird durch $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \{\alpha \boldsymbol{x} + (1 - \alpha) \boldsymbol{y} : \alpha \in \mathbf{R}\}$. Man definiert daher für einen allgemeinen reellen Vektorraum V als Gerade $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ durch die beiden Punkte $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, ebenfalls die Menge aller Elemente $\alpha \boldsymbol{x} + (1 - \alpha) \boldsymbol{y}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, aus V.

Man zeige über die Verbindungsgeraden:

1. Für $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ gilt stets $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

2. Für $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ gilt stets $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} + L(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$, insbesondere ist also der von einem Vektor $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ aufgespannte lineare Teilraum gleich der Verbindungsgeraden $f(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x})$.

3. Für $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ und $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}$ gilt stets:

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \cap g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \neq \emptyset \Rightarrow g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \cap g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \text{ ist einpunktig oder}$$
$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}).$$

Über lineare Teilräume bzw, lineare Mannigfaltigkeiten von V beweise man folgende Kennzeichnungen mittels der Verbindungsgeraden:

1. Es sei M eine nichtleere Teilmenge von V. M ist genau dann ein linearer Teilraum von V, wenn a) $\boldsymbol{0} \in M$ und b) M mit je zwei verschiedenen Punkten $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ auch stets die Verbindungsgerade $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ enthält, d. h.

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \Rightarrow g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \subset M.$$

2. Es sei M eine nichtleere Teilmenge von V. M ist genau dann eine lineare Mannigfaltigkeit von V, wenn M mit je zwei verschiedenen Punkten $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ auch stets die Verbindungsgerade $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ enthält, d. h.

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M, \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \Rightarrow g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \subset M.$$

Lineare Abbildungen des n-dimensionalen reellen Zahlenraumes. Matrizen (Lineare Abbildungen von allgemeinen Vektorräumen)

Kontrollfragen

1. Durch welche beiden charakteristischen Eigenschaften ist eine lineare Abbildung A von $\mathbf{R}^n$ in den $\mathbf{R}^m$ bestimmt?
2. Wie hat man in Analogie zu dem $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^m$ eine lineare Abbildung $A\colon V \to W$ eines allgemeinen reellen Vektorraumes V in einen reellen Vektorraum W zu definieren?
3. Ist ein lineares Funktional $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ eine lineare Abbildung?
4. Es seien $f_1, f_2, \ldots, f_m$ lineare Funktionale auf dem reellen Vektorraum V. Ist dann die Abbildung $A\colon V \to \mathbf{R}^m$ mit $A(\boldsymbol{x}) = \big(f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \ldots, f_m(\boldsymbol{x})\big)$ eine lineare Abbildung?
5. Es sei V ein reeller Vektorraum und $\lambda \in \mathbf{R}$. Die Abbildung $A\colon V \to V$ mit $A(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}$ für alle $\boldsymbol{x} \in V$, λ fixiert, heißt die Homothetie von V mit dem Koeffizienten λ. Ist eine Homothetie eine lineare Abbildung?
6. Sind die aus der Geometrie her bekannten Abbildungen, die Parallelprojektion im $\mathbf{R}^2$ längs einer Ursprungsgeraden auf eine Ursprungsgerade und die axiale Streckung im $\mathbf{R}^2$ in bezug auf eine Ursprungsgerade längs einer anderen Ursprungsgeraden, lineare Abbildungen im $\mathbf{R}^2$?

7. Was versteht man unter einer reellen Matrix vom Typ $n \times m$?
8. Man erkläre für eine reelle Matrix die kennzeichnenden Größen der Matrix wie: Typ (Zeilen und Spalten) und allgemeines Matrixelement.
9. Ist eine gegebene reelle Matrix eine Abbildung einer gewissen endlichen Menge in $\mathbf{R}$?
10. Was versteht man unter der Gleichheit von zwei Matrizen?
11. Welche Bedeutung kommt den reellen Matrizen für die Beschreibung von linearen Abbildungen vom $\mathbf{R}^n$ in den $\mathbf{R}^m$ zu?
12. Es sei $A: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ eine lineare Abbildung, und $\mathfrak{B}: \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$, $\mathfrak{C}: \boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n$ seien Basen im $\mathbf{R}^n$ bzw. $\mathbf{R}^m$. Wie berechnet sich bei Kenntnis der assoziierten Matrix $\boldsymbol{A}$ von A bezüglich $(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ der Koordinatenvektor von $A(\boldsymbol{x})$ bezüglich $\mathfrak{C}$ aus dem Koordinatenvektor von $\boldsymbol{x}$ bezüglich $\mathfrak{B}$?
13. Im $\mathbf{R}^n$ sei ein Basispaar $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$ fixiert. Welche lineare Abbildung $A: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ hat bezüglich des Basispaares $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$ die Einheitsmatrix als assoziierte Matrix?
14. Was versteht man unter dem Kronecker-Symbol?
15. Für lineare Abbildungen vom $\mathbf{R}^n$ in den $\mathbf{R}^m$ kann man die punktweise Addition und Multiplikation mit reellen Skalaren erklären. Wird die Menge $\mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ aller linearen Abbildungen vom $\mathbf{R}^n$ in den $\mathbf{R}^m$ bezüglich dieser Operationen ein reeller Vektorraum?
16. Man übertrage sinngemäß die punktweise Addition und Multiplikation mit reellen Skalaren auf das System $\mathscr{L}(V, W)$ aller linearen Abbildungen eines reellen Vektorraumes V in einen reellen Vektorraum W. Bildet $\mathscr{L}(V, W)$ bezüglich dieser Operationen einen reellen Vektorraum?
17. Was versteht man unter dem Matrizenkalkül? Warum ist die Entwicklung eines Matrizenkalküls nützlich?
18. Wann kann man zwei lineare Abbildungen $A: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $B: \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^l$ zusammensetzen zu einer Abbildung $B \circ A: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^l$?
19. Ist für beliebige Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ ein Matrizenprodukt $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ erklärt? Was hat die Verkettung von Matrizen für das Matrizenprodukt zu bedeuten?
20. Wie lautet die Merkregel für die Matrizenmultiplikation (Zeilen-Spaltenprodukte)?
21. Bildet das System $\mathscr{M}(m \times n)$ aller reellen Matrizen vom Typ $m \times n$ bezüglich der Matrizenaddition und Multiplikation mit reellen Skalaren einen reellen Vektorraum? Welche Dimension hat dieser Vektorraum?
22. Welche Grundeigenschaften hat die Matrizenmultiplikation?
23. Was versteht man unter einem Zeilenvektor bzw. Spaltenvektor?
24. Wie sind Kern und Bildraum einer linearen Abbildung definiert?
25. Handelt es sich bei dem Kern und Bildraum einer linearen Abbildung immer um Vektorräume?
26. Was versteht man unter dem Rang einer linearen Abbildung $A: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$? Welche Beziehung besteht zwischen der Dimension des Kernes von A und dem Rang der linearen Abbildung?

27. Wie hängen die beiden Begriffe Zeilenrang einer Matrix und Spaltenrang einer Matrix mit dem Rangbegriff einer linearen Abbildung zusammen?
28. Wie kann man die Eineindeutigkeit einer linearen Abbildung $A: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ durch den Abbildungsrang kennzeichnen?
29. Was meint man mit der Feststellung, daß die linearen Abbildungen des $\mathbf{R}^n$ in sich bezüglich der Addition und Hintereinanderschaltung eine Algebra bilden?
30. Was versteht man unter einer invertierbaren linearen Abbildung $A: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$?
31. Wie ist die Invertierbarkeit einer linearen Abbildung $A: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ durch Zusammensetzungseigenschaften gekennzeichnet?
32. Was versteht man unter einer invertierbaren Matrix?
Welches Berechnungsverfahren für die Invertierbarkeit von Matrizen bzw. zur Ermittlung der Inversen steht zur Verfügung?
33. Wann und nur wann ist eine quadratische zweizeilige Matrix invertierbar?
34. Welcher Zusammenhang besteht zwischen Basiswechsel im $\mathbf{R}^n$ und linearen Abbildungen?
35. Wie verändern sich die assoziierten Matrizen von linearen Abbildungen, wenn man einen Basiswechsel vornimmt?

Aufgaben

1. Man beschreibe die Lösbarkeit eines inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots& \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

durch eine Eigenschaft der dem Gleichungssystem zugeordneten linearen Abbildung.

Lösung: Mit dem Gleichungssystem ist die folgende lineare Abbildung $A: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ verbunden: A hat bezüglich der natürlichen Basen im $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^m$ die assoziierte Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Es sind alle $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ gesucht mit $A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_m)$. Die Lösbarkeit des Gleichungssystems ist gleichbedeutend mit $\boldsymbol{b} \in \operatorname{im} A$.

2. In der Einheitsmatrix $\boldsymbol{I}$ der Ordnung m vertausche man die i-te Zeile mit der j-ten Zeile. Die entstehende Matrix $\boldsymbol{T}$ der Ordnung m ist invertierbar. Welcher Spaltenvektor entsteht aus dem Spaltenvektor $\boldsymbol{b}$ mit den m Komponenten $b_1, b_2, \ldots, b_m$ durch Multiplikation mit $\boldsymbol{T}$? (Man vergleiche also $\boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{Tb}$.)

Hinweis: Aus dem Vektor $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ entsteht durch Multiplikation mit $\boldsymbol{T}$ der Vektor

$$\boldsymbol{Tb} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{-te Koordinate} \\ \\ j\text{-te Koordinate.} \\ \\ \\ \end{array}$$

Für die Matrix $\boldsymbol{T}$ ist die Gleichung $\boldsymbol{T}^2 = \boldsymbol{I}$ erfüllt. Demnach gilt $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^{-1}$.

3. Die beim Gaußschen Algorithmus vorkommenden elementaren Zeilenumformungen eines gegebenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1' + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

(in Matrixform $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$), die bekanntlich in der Vertauschung zweier beliebiger Zeilen, der Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar oder auch in der Addition einer Zeile zu einer anderen bestehen, beschreibe man jeweils durch Multiplikation mit einer Matrix $\boldsymbol{T}$ als Übergang zu dem Gleichungssystem $\boldsymbol{TAx} = \boldsymbol{Tb}$.

4. Gibt es quadratische Matrizen $\boldsymbol{A}$ der Ordnung n ($n \geqq 2$) mit den Eigenschaften $\boldsymbol{A}^2 (= \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{I}$ und $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{I}$? Man interpretiere diese Aufgabenstellung für lineare Abbildungen.

Lösung: Es sind also lineare Abbildungen des $\mathbf{R}^n$ in sich gesucht, deren Hintereinanderschaltung mit sich selber die Identität ergibt. Solche Abbildungen nennt man involutorisch. Offenbar sind die Spiegelungen an Ursprungsgeraden bzw. am Ursprung (= Drehung um den Ursprung mit einem Drehwinkel π) involutorisch. Wir geben die entsprechenden Matrizen im $\mathbf{R}^2$ für die Spiegelungen an den „Koordinatenachsen" sowie die zentrale Spiegelung an:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Für eine beliebige quadratische Matrix $\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$ gelte stets für die fixierte Matrix $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}.$$

Man leite daraus $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ her. Es ist also in $\mathscr{M}(2 \times 2)$ zu beweisen, daß genau die skalaren Vielfachen der Einheitsmatrix mit allen Elementen aus $\mathscr{M}(2 \times 2)$ kommutierbar sind.

6. Im $\mathbf{R}^n$ betrachte man die Projektion P_i: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ auf die i-te Achse, d. h. $P_i(\boldsymbol{x}) = (0, 0, \ldots, x_i, 0, 0, \ldots)$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n$. Man gebe bezüglich der natürlichen Basis die assoziierte Matrix $\boldsymbol{P}_i$ an.

7. Durch folgende Festsetzung werde „Positivität" von quadratischen Matrizen der Ordnung $n \geqq 2$ erklärt: Gegeben sei $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$.
   $\boldsymbol{A}$ heißt „positiv" ($\boldsymbol{A} \geqq \boldsymbol{O} :\Leftrightarrow a_{ij} \geqq 0$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$.
   Damit ist dann in $\mathcal{M}(n \times n)$ ein Vergleich von Matrizen erklärt:
   $$\boldsymbol{A} \geqq \boldsymbol{B} :\Leftrightarrow \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} \geqq \boldsymbol{O}.$$
   Welche der folgenden für die reellen Zahlen und ihre natürliche Ordnung „$\geqq$" bekannten Grundregeln gelten dann in $\mathcal{M}(n \times n)$ hinsichtlich „$\geqq$"?
   a) (Reflexivität) $\boldsymbol{A} \geqq \boldsymbol{A}$ für alle $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}(n \times n)$?
   b) (Antisymmetrie) $\boldsymbol{A} \geqq \boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{B} \geqq \boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ für alle $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{M}(n \times n)$?
   c) (Transitivität) $\boldsymbol{A} \geqq \boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{B} \geqq \boldsymbol{C} \Rightarrow \boldsymbol{A} \geqq \boldsymbol{C}$ für alle $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \mathcal{M}(n \times n)$?
   d) (Monotonie der Addition) $\boldsymbol{A} \geqq \boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A} + \boldsymbol{C} \geqq \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$ für alle $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \mathcal{M}(n \times n)$;
   e) (Monotonie der Multiplikation) $\boldsymbol{A} \geqq \boldsymbol{O}, \boldsymbol{B} \geqq \boldsymbol{O} \Rightarrow \boldsymbol{AB} \geqq \boldsymbol{O}$ für alle $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{M}(n \times n)$?
   f) (Positivität der Quadrate) $\boldsymbol{A}^2 \geqq \boldsymbol{O}$ für alle $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}(n \times n)$?

   Lösung: Es gilt $\boldsymbol{A} \geqq \boldsymbol{B}$ genau dann, wenn $a_{ij} \geqq b_{ij}$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$ ist. Der „Größenvergleich" von Matrizen erfolgt also gemäß dieser Erklärung elementeweise, damit sind die Eigenschaften a), b), c), d) erfüllt. Es verbleibt noch die Überprüfung der Monotonie der Multiplikation und die Positivität der Quadrate. Bei $a_{ij} \geqq 0$ und $b_{jk} \geqq 0$ ist aber auch stets $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \geqq 0$, d. h., es gelten auch die Eigenschaften e) und f).

8. Für die quadratischen Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{T}$ zeige man:
   a) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T} \Rightarrow \boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}^n\boldsymbol{T}$.
   b) $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} \Rightarrow (\boldsymbol{AB})^n = (\boldsymbol{BA})^n$.
   c) $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} \Rightarrow (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \boldsymbol{A}^{n-k}\boldsymbol{B}^k$, wobei unter $\boldsymbol{A}^0, \boldsymbol{B}^0$ die Einheitsmatrix verstanden werden soll.

   Hinweis: Man wende vollständige Induktion nach n an.

9. Von den beiden folgenden Matrizen entscheide man die Invertierbarkeit und berechne gegebenenfalls die Inverse:
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{3} & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Die erste Matrix ist invertierbar, die Inverse lautet

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sie ist also lediglich ein skalares Vielfaches der Ausgangsmatrix.
Die Inverse der Ausgangsmatrix ist gleich

$$\frac{1}{108}\cdot\begin{pmatrix} 13 & 34 & 3 \\ -\frac{86}{3} & \frac{124}{3} & 10 \\ \frac{35}{3} & -\frac{58}{3} & 11 \end{pmatrix}$$

10. Von der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

berechne man A^2 und A^3 und ermittle sodann induktiv einen Ausdruck für A^n.

Hinweis:

$$A^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\cdot\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\cdot\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

11. Wie groß ist der Rang der in Aufgabe 10 angegebenen Matrix A (in Abhängigkeit von λ)? Man gebe den Kern und den Bildraum der durch A bezüglich des natürlichen Koordinatensystems im $\mathbf{R}^3$ beschriebenen linearen Abbildung an.

12. Welche Bedingungen sind an die natürlichen Zahlen n und m zu stellen, damit folgendes gilt?

a) Zu gegebenem linearen Teilraum L des $\mathbf{R}^n$ läßt sich eine lineare Abbildung $A: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ finden mit $\ker A = L$.

b) Zu gegebenem linearen Teilraum L des $\mathbf{R}^m$ läßt sich eine lineare Abbildung $A: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ finden mit $\operatorname{im} A = L$.

13. Für zwei vorgeschriebene lineare Abbildungen $A: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ und $B: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ gelte $\ker A = \ker B$. Folgt daraus im allgemeinen die lineare Abhängigkeit der beiden Elemente A, B des $\mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$?

Hinweis: Im Fall $m = 1$ ist $\ker A = \ker B$ gleichwertig mit der linearen Abhängigkeit von A, B. Im Fall $m \neq 1$ braucht das nicht mehr zu gelten.

14. Man löse folgende Matrizengleichungen:

a) $$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix},$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

15. Es sei A eine lineare Abbildung des $\mathbf{R}^n$ in den $\mathbf{R}^m$ und O die Nullabbildung des $\mathbf{R}^n$ in den $\mathbf{R}^k$ (d. h. im $O = \{0\}$). Die Lösungsgesamtheit $\{X : X \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^k), X \circ A = O\}$ ist als linearer Teilraum von $\mathscr{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^k)$ nachzuweisen. Man bestimme außerdem für den Fall $n = m = k = 2$ die Dimension dieses linearen Teilraumes in Abhängigkeit vom Rang der Abbildung A.

16. Im $\mathbf{R}^2$ betrachte man die Basen $\mathfrak{B}$: $(1, 0), (0, 1)$; $\mathfrak{C}$: $(1, 1), (0, 1)$; $\mathfrak{D}$: $(-1, 0), (-1, -1)$ und ermittle die Matrizen T, S für den Basiswechsel $\mathfrak{B} \mapsto \mathfrak{C}, \mathfrak{C} \mapsto \mathfrak{D}$. Man überzeuge sich davon, daß die Matrix für den Basiswechsel $\mathfrak{B} \mapsto \mathfrak{D}$ von der Produktmatrix ST verschieden ist.
Warum ist folgende Argumentation nicht stichhaltig?
Dem Basiswechsel $\mathfrak{B} \mapsto \mathfrak{C}$ entspricht eine lineare Abbildung $A_1 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, die $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{C}$ überführt. Dem Basiswechsel $\mathfrak{C} \mapsto \mathfrak{D}$ entspricht eine lineare Abbildung $A_2 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, die $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{D}$ überführt. Die beschreibende Matrix von A_1 ist T, die beschreibende Matrix von A_2 ist S. Sodann muß nach dem Satz über das Produkt von linearen Abbildungen und seine Beschreibung durch Matrizen für die dem Basiswechsel $\mathfrak{B} \mapsto \mathfrak{D}$ entsprechende lineare Abbildung $A_2 \circ A_1$ auch ST die beschreibende Matrix sein.

Das Skalarprodukt auf dem n-dimensionalen reellen Zahlenraum

Kontrollfragen

1. Wie ist das Skalarprodukt auf dem $\mathbf{R}^n$ als Abbildung von $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}$ definiert?
2. Welche Eigenschaften des Skalarproduktes auf dem $\mathbf{R}^n$ meint man mit den Begriffen: Linearität in jedem seiner Argumente, Symmetrie, positive Definitheit?
3. Was ist eine Bilinearform auf dem $\mathbf{R}^n$?
4. Ist das Skalarprodukt auf dem $\mathbf{R}^n$ unter allen symmetrischen Bilinearformen eindeutig gekennzeichnet?
5. Bei welchen elementaren geometrischen Fragestellungen tritt das Skalarprodukt in Erscheinung?

6. Was versteht man unter der aus dem Skalarprodukt abgeleiteten Norm im $\mathbf{R}^n$?
7. Welche geometrische Meßgröße wird durch den Normwert für einen Vektor erfaßt?
8. Was versteht man unter der Dreiecksungleichung für die Norm? Wodurch rechtfertigt sich diese Bezeichnungsweise?
9. Wie kann eine Normierung im $\mathbf{R}^n$ durch eine positiv-definite, symmetrische Bilinearform erfolgen?
10. Was bedeutet die Orthogonalität im $\mathbf{R}^n$ bezüglich einer positiv-definiten, symmetrischen Bilinearform?
11. Welche Zusammenhänge bestehen zwischen den Begriffen lineare Unabhängigkeit und Orthonormalsystem?
12. Kann man jedes linear unabhängige System in ein dazu äquivalentes Orthonormalsystem umwandeln?
13. Wann sind Orthonormalsysteme Basen?
14. Verändert sich der Wert des Skalarproduktes zweier Vektoren im $\mathbf{R}^n$ bei Übergang zu einer anderen Orthonormalbasis?
15. Was versteht man unter einer orthogonalen linearen Abbildung im $\mathbf{R}^n$?
16. Was versteht man unter einer orthogonalen Matrix, und wie hängen solche Matrizen mit den orthogonalen linearen Abbildungen zusammen?
17. Sind orthogonale Matrizen invertierbar, und wie berechnet sich einfach die Inverse?
18. Welche besonderen Eigenschaften haben die den orthogonalen linearen Abbildungen assoziierten Matrizen?
19. Welche algebraische Struktur bilden die orthogonalen Matrizen bezüglich der Multiplikation?
20. Welche orthogonalen linearen Abbildungen im $\mathbf{R}^2$ gibt es?

Aufgaben

1. Es sei $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ eine Matrix vom Typ $m \times n$.
Unter der transponierten Matrix A^{T} von A verstehe man die Matrix vom Typ $n \times m$ mit $A^{\mathsf{T}} = (b_{ji})_{\substack{j=1,\dots,n\\ i=1,\dots,m}}$, wobei stets $b_{ji} = a_{ij}$ ist. Dann gilt hinsichtlich der Produktbildung $(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}$.

Lösung: Es sei $A \in \mathcal{M}(m \times n)$, $B \in \mathcal{M}(k \times l)$. Wenn AB bildbar ist, müssen A, B verkettet sein, d. h., es ist $n = k$. Es sei

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}, \qquad B = (b_{j\nu})_{\substack{j=1,\dots,n\\ \nu=1,\dots,l}}.$$

Dann ist

$$AB = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{j\nu}\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ \nu=1,\dots,l}}, \quad (AB)^{\mathsf{T}} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{j\nu}\right)_{\substack{\nu=1,\dots,l\\ i=1,\dots,m}}.$$

Weiterhin ist $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} \in \mathscr{M}(n \times m)$, $\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}} \in \mathscr{M}(l \times n)$ und

$$\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} = \left(\sum_{j=1}^{n} b_{j\nu}a_{ij}\right)_{\substack{\nu=1,\ldots,l\\ i=1,\ldots,m}}, \qquad \text{d. h.} \qquad (\boldsymbol{AB})^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}.$$

2. Was bedeutet für $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$ das Matrizenprodukt $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}$?

   Hinweis: $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}$ bedeutet den Wert des Skalarproduktes für $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$.

3. a) Es sei $\boldsymbol{B}$ eine beliebige quadratische Matrix der Ordnung n. Man zeige, daß die folgende Abbildung B: $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ mit dem Verlauf $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}$ eine Bilinearform auf dem $\mathbf{R}^n$ ist.

   b) Bezüglich einer geeignet gewählten Basis im $\mathbf{R}^n$ kann man eine vorgegebene Bilinearform des $\mathbf{R}^n$ auch immer in dem Sinne des Teiles a) beschreiben. Man gebe eine genaue Formulierung für diese Aussage und bestätige sie.

   c) Ist die Bilinearform B: $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ mit dem Verlauf $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}$ für $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^2$ positiv-definit und symmetrisch?

   d) Was bedeutet die Symmetrie einer Bilnearform B: $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ mit dem Verlauf $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}$ hinsichtlich der Matrix $\boldsymbol{B}$?

4. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den beiden Operationen $\cdot^{-1}: GL(n) \to GL(n)$, $\cdot^{\mathsf{T}}: GL(n) \to GL(n)$ — der Inversenbildung und dem Transponieren — in der generellen linearen Gruppe?
   Es ist $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}$ invertierbar, und es gilt $(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathsf{T}}$.

5. Für die Basis $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 2)$, $\boldsymbol{a}_2 = \left(-1, 3, -\frac{1}{2}\right)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-4, -1, 0)$ des $\mathbf{R}^3$ bringe man das Gram-Schmidtsche Orthonormierungsverfahren hinsichtlich des gewöhnlichen Skalarproduktes zur Anwendung. Welche Basis erhält man?

   Lösung:

   1. $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 2)$, $\|\boldsymbol{a}_1\| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$, $\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2)$.

   2. $\boldsymbol{b}_2' = \boldsymbol{a}_2 - \langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1\rangle \cdot \boldsymbol{b}_1$, $\langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1 + 3 - 1) = \frac{1}{\sqrt{6}}$,

   $\boldsymbol{b}_2' = \left(-1, 3, -\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{6}(1, 1, 2) = \frac{1}{6}(-7, 17, -5)$, $\|\boldsymbol{b}_2'\| = \frac{1}{6}\sqrt{49 + 289 + 25}$,

   $\boldsymbol{b}_2 := \frac{\boldsymbol{b}_2'}{\|\boldsymbol{b}_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{363}}(-7, 17, -5)$,

   $\boldsymbol{b}_3' = \boldsymbol{a}_3 - \langle \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1\rangle \cdot \boldsymbol{b}_1 - \langle \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2\rangle \cdot \boldsymbol{b}_2$,

   $$\boldsymbol{b}_3' = (-4, -1, 0) - \frac{1}{\sqrt{6}}(-4 - 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2) - \frac{1}{\sqrt{363}}(28 - 17) \cdot \frac{1}{\sqrt{363}}(-7, 17 - 5)$$

   $$= (-4, -1, 0) + \frac{5}{6}(1, 1, 2) - \frac{11}{363}(-7, 17, -5) = \frac{1}{726}(-2145, -495, 1320).$$

6. Man gebe eine geometrische Interpretation der Bedingung $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ (etwa im $\mathbf{R}^3$).

7. Die Matrix $S := \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$ ist orthogonal. Die durch S hinsichtlich der natürlichen Basis im $\mathbf{R}^2$ beschriebene Abbildung S erweise man als Spiegelung an der Ursprungsgeraden mit einem Neigungswinkel $\frac{\vartheta}{2}$, indem man die natürliche Basis in eine geeignete Lage dreht, die Spiegelung dann hinsichtlich der neuen Basis auf einfachste Weise durch eine Matrix beschreibt und außerdem die Übergangsmatrix von der ersten zur zweiten Basis benutzt.
8. Im $\mathbf{R}^3$ ermittle man die assoziierte Matrix (bezüglich der natürlichen Basis) der linearen Abbildung $D: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, die den Einheitswürfel zuerst um die y-Achse um $\frac{\pi}{2}$ nach „links“ kantet und darauf den entstandenen Würfel um die x-Achse um $\frac{\vartheta}{2}$ nach „vorne“ kantet (Zeichnung!).

Determinanten

Kontrollfragen

1. Was versteht man unter einer Permutation der Ordnung n?
2. Durch welche Diagrammformen kann man Permutationen veranschaulichen?
3. Was versteht man unter dem Produkt von Permutationen?
4. Welche algebraische Struktur meint man mit dem Begriff „symmetrische Gruppe vom Grade n“ bzw. „volle Permutationsgruppe“?
5. Aus wieviel Elementen besteht die symmetrische Gruppe vom Grade n?
6. Was versteht man unter einer Inversion in einer Permutation, und wie hängt dieser Begriff mit dem Signum einer Permutation zusammen?
7. Wieviel gerade und wieviel ungerade Permutationen in der vollen Permutationsgruppe gibt es?
8. Durch welchen Summenausdruck ist nach LEIBNIZ die Determinante $\det A$ einer quadratischen Matrix A definiert?
9. Welche Grundeigenschaften hat die Determinante $\det: \mathscr{M}(n \times n) \to \mathbf{R}$?
10. Was hat die Determinante mit dem Begriff der Multilinearform auf dem $\mathbf{R}^n$ zu tun?
11. Kann man die Invertierbarkeit einer quadratischen Matrix A mittels der Determinante kennzeichnen?
12. Was besagt der Produktsatz für die Determinanten?
13. Wie verhält sich die Determinante gegenüber dem Transponieren einer Matrix?
14. Was leistet der Gaußsche Algorithmus zur Berechnung der Determinante einer Matrix?
15. Wie lautet die Cramersche Regel zur Lösung eines linearen Gleichungssystems mit quadratischer Koeffizientenmatrix?

16. Wie kann man den Matrizenrang einer Matrix von nicht notwendig quadratischer Form mittels Unterdeterminanten kennzeichnen?
17. Welche Operationen im $\mathbf{R}^3$ meint man mit dem Vektorprodukt?
18. Hat die Merkregel zur Bildung des äußeren Produkts im $\mathbf{R}^3$ eine Beziehung zum Determinantenentwicklungssatz?
19. Welches sind die algebraischen Grundeigenschaften des Vektorprodukts?
20. Ist das Vektorprodukt im $\mathbf{R}^3$ kommutativ und assoziativ?
21. Welche Grundeigenschaft für das Vektorprodukt rechtfertigt die Bezeichnung „Produkt"?
22. Was versteht man unter den metrischen Grundeigenschaften des Vektorprodukts?
23. Welche Zahlenwerte meint man mit der Gramschen Determinante für zwei Vektoren?
24. Gibt es eine Kennzeichnung der linearen Abhängigkeit zweier Vektoren des $\mathbf{R}^3$ durch das Vektorprodukt?
25. Für welche durch die Vektoren $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ des $\mathbf{R}^3$ gebildete geometrische Figur mißt der Normwert des Vektorprodukts den Flächeninhalt?
26. Aus drei Vektoren des $\mathbf{R}^3$ kann man ein Spat bzw. Parallelepiped aufbauen. Wie erhält man den Rauminhalt des Spates?

Aufgaben

1. Von den sämtlichen Permutationen vom Grade 4 bestimme man das Signum. Wie verhält sich das Signum gegenüber der Produktbildung von Permutationen?

   Lösung: Es gibt $4! = 24$ Permutationen vom Grade 4.
   Für beliebige Permutationen $\pi, \nu \in S_n$ gilt $\operatorname{sgn}(\pi \circ \nu) = \operatorname{sgn} \pi \cdot \operatorname{sgn} \nu$. (Das Signum $\operatorname{sgn}: S_n \to \{+1, -1\}$ ist ein Gruppenhomomorphismus der Gruppe S_n auf die multiplikative Gruppe $\{+1, -1\}$.)

2. Unter einer Transposition versteht man eine Permutation, die alle bis auf zwei Elemente festhält. (Es werden nur zwei Elemente miteinander vertauscht!) Man zeige, daß jede Transposition eine ungerade Permutation ist.

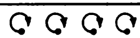
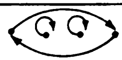
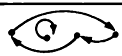
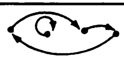
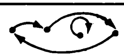
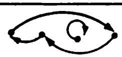
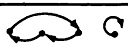
3. Es sei π eine gegebene Permutation vom Grade $n \geqq 2$. In der Menge $\{1, \ldots, n\}$ werden zwei Elemente i, j fixiert. Die Abbildung $\nu: \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ mit

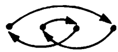
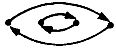
   $$\nu(k) := \pi(k) \text{ für } k \notin \{i, j\} \quad \text{und} \quad \nu(i) := \pi(j), \nu(j) := \pi(i),$$

   ist dann wieder eine Permutation vom Grade n. ν entsteht, indem man zuerst π ausführt und dann noch die Elemente $\pi(i)$ und $\pi(j)$ vertauscht. Es gilt dann $\operatorname{sgn} \nu = - \operatorname{sgn} \pi$. Man stelle eine Beziehung zur Aufgabe 2 her.

4. Von den folgenden Matrizen berechne man die Determinanten:

   $$\text{a) } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

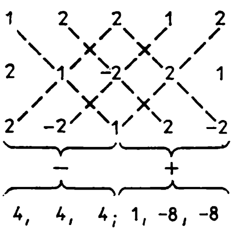
	Permutation	Zyklendiagramm	Inversionen	sgn	
1	1 2 3 4 1 2 3 4		—	+1	4 Fixpunkte
2	1 2 3 4 1 2 4 3		(4, 3)	−1	2 Fixpunkte
3	1 2 3 4 1 4 3 2		(4, 3), (4, 2), (3, 2)	−1	
4	1 2 3 4 1 3 2 4		(3, 2)	−1	
5	1 2 3 4 4 2 3 1		(4, 2), (4, 3), (4, 1), (2, 1), (3, 1)	−1	
6	1 2 3 4 3 2 1 4		(3, 2), (3, 1), (2, 1)	−1	
7	1 2 3 4 2 1 3 4		(2, 1)	−1	
8	1 2 3 4 1 3 4 2		(3, 2), (4, 2)	+1	1 Fixpunkt
9	1 2 3 4 1 4 2 3		(4, 2), (4, 3)	+1	
10	1 2 3 4 4 2 1 3		(4, 2), (4, 1), (4, 3), (2, 1)	+1	
11	1 2 3 4 3 2 4 1		(3, 2), (3, 1), (2, 1), (4, 1)	+1	
12	1 2 3 4 2 4 3 1		(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1)	+1	
13	1 2 3 4 4 1 3 2		(4, 1), (4, 3), (4, 2), (3, 2)	+1	
14	1 2 3 4 2 3 1 4		(2, 1), (3, 1)	+1	
15	1 2 3 4 3 1 2 4		(3, 1), (3, 2)	+1	

	Permutation	Zyklendiagramm	Inversionen	sgn
16	1 2 3 4 2 3 4 1		(4, 1)	−1
17	1 2 3 4 3 1 4 2		(3, 1), (3, 2), (4, 2)	−1
18	1 2 3 4 4 1 2 3		(4, 1), (4, 2), (4, 3)	−1
19	1 2 3 4 2 4 1 3		(2, 1), (4, 1), (4, 3)	−1
20	1 2 3 4 3 4 2 1		(3, 2), (3, 1), (4, 2), (4, 1), (2, 1)	−1
21	1 2 3 4 4 3 1 2		(4, 3), (4, 1), (4, 2), (3, 1), (3, 2)	−1
22	1 2 3 4 2 1 4 3		(2, 1). (4, 3)	+1
23	1 2 3 4 3 4 1 2		(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)	+1
24	1 2 3 4 4 3 2 1		(4, 3), (4, 2), (4, 1), (3, 2), (3, 1), (2, 1)	+1

keine Fixpunkte

Lösung:

a) Nach der Sarrusschen Regel ergibt sich



Also ist $\det \boldsymbol{A} = -27$.

b) $\boldsymbol{B}$ ist eine Dreiecksmatrix, unter der Hauptdiagonalen stehen lauter Nullen, also ist $\det \boldsymbol{B} = \lambda^3$.

5. Von den quadratischen Matrizen der Ordnung $n = 2, 3, 4, 5$, die in sukzessiver Aufeinanderfolge die ersten n^2 natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots, n^2$ als Elemente enthalten, berechne man die Determinanten.

Lösung:

a) $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$,

b) $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 7 \cdot 5 \cdot 3 - 8 \cdot 6 \cdot 1 - 9 \cdot 4 \cdot 2 = 0.$

c) Zur Berechnung der weiteren Determinanten wendet man den Gaußschen Algorithmus an, man bringt die Matrix auf Dreiecksform.
Aus der ersten Umformung entnimmt man aber schon, daß die drei entstehenden neuen Zeilen linear abhängig sind, also ist die Determinante gleich 0.

6. Von den orthogonalen quadratischen Matrizen berechnet sich die Determinante entweder zu $+1$ oder -1.

7. Im Zusammenhang mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz bestätige man, daß sich die Inverse einer regulären quadratischen Matrix $\boldsymbol{A}$ wie folgt berechnet:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \left((-1)^{i+j} \det \boldsymbol{A}_{ji}\right)_{\substack{i=1,2,\ldots,n \\ j=1,2,\ldots,n}}.$$

8. Für die sogenannte Vandermondesche Determinante

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

bestätige man

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i>j} (x_i - x_j).$$

Lösung: Man wende vollständige Induktion nach n an. Für $\Delta(x_1, x_2)$ ergibt sich der Wert $x_2 - x_1$. Für $n > 2$ führt man zunächst eine Zeilenumformung durch:

1	1	$\cdots$	1
x_1	x_2	$\cdots$	x_n
x_1^2	x_2^2	$\cdots$	x_n^2
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_1^{n-1}	x_2^{n-1}	$\cdots$	x_n^{n-1}

$\longmapsto$

1	1	1	$\cdots$	1
0	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_1$	$\cdots$	$x_n - x_1$
0	$x_2^2 - x_2 \cdot x_1$	$x_3^2 - x_3 \cdot x_1$	$\cdots$	$x_n^2 - x_n \cdot x_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
0	$x_2^{n-1} - x_2^{n-2} \cdot x_1$	$x_3^{n-1} - x_3^{n-2} \cdot x_1$	$\cdots$	$x_n^{n-1} - x_n^{n-2} \cdot x_1$

Eine Entwicklung nach der ersten Spalte ergibt

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \ldots & x_n - x_1 \\ (x_2 - x_1)\, x_2 & (x_3 - x_1)\, x_3 & \ldots & (x_n - x_1)\, x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (x_2 - x_1)\, x_2^{n-2} & (x_3 - x_1)\, x_3^{n-2} & \ldots & (x_n - x_1)\, x_n^{n-2} \end{pmatrix}.$$

Nun ziehe man aus den Spalten jeweils den Faktor $x_i - x_1$ heraus: Das ergibt

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 \\ x_2 & \ldots & x_{n-1} & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_2^{n-2} & \ldots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1)\, \Delta(x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

9. Man bestimme eine Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ mit den Werten

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = b, \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} = c, \quad \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = d.$$

10. Von der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

berechne man mittels der Unterdeterminanten den Rang.

Hinweis: $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = 6 - 10 = -4$. Damit ist rang $A \geqq 2$. Die Unterdeterminanten dritter Ordnung sind sämtlich gleich 0, denn die sukzessive Zeilensubstraktion ergibt die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

11. Bildet das System aller quadratischen Matrizen der Ordnung n mit verschwindender Determinante einen linearen Teilraum von $\mathscr{M}(n \times n)$?

12. Für den $\mathbf{R}^2$ zeige man, daß die Hintereinanderausführung von zwei Drehungen wieder eine Drehung liefert und die Hintereinanderausführung von zwei Spiegelungen eine Drehung liefert.

Lösung: Bezüglich der natürlichen Basis $\mathfrak{B}$: (1, 0), (0, 1) werden die Drehungen um den Ursprungspunkt mit einem Drehwinkel ϑ durch die Matrizen

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad 0 \leqq \vartheta < 2\pi,$$

beschrieben. Die Spiegelungen werden beschrieben durch Matrizen

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Man hat für die Zusammensetzung $D_1 \circ D_2$ von zwei Drehungen D_1, D_2 mit den Matrizen $\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2$ eine Abbildung mit der Matrix

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \cos\vartheta_1 & \sin\vartheta_1 \\ -\sin\vartheta_1 & \cos\vartheta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\vartheta_2 & \sin\vartheta_2 \\ -\sin\vartheta_2 & \cos\vartheta_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\vartheta_1 \cdot \cos\vartheta_2 & -\sin\vartheta_1 \cdot \sin\vartheta_2 & \cos\vartheta_1 \cdot \sin\vartheta_2 + \sin\vartheta_1 \cdot \cos\vartheta_2 \\ -\sin\vartheta_1 \cdot \cos\vartheta_2 & -\cos\vartheta_1 \cdot \sin\vartheta_2 & -\sin\vartheta_1 \cdot \sin\vartheta_2 + \cos\vartheta_1 \cdot \cos\vartheta_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) & \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ -\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) & \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Das ist die Matrix einer Drehung mit dem Drehwinkel $\vartheta_1 + \vartheta_2 \bmod 2\pi$. Man hat für die Zusammensetzung $S_1 \circ S_2$ von zwei Spiegelungen S_1, S_2 mit den Matrizen $\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2$ eine Abbildung mit der Matrix

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \cos\vartheta_1 & \sin\vartheta_1 \\ \sin\vartheta_1 & -\cos\vartheta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\vartheta_2 & \sin\vartheta_2 \\ \sin\vartheta_2 & -\cos\vartheta_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\vartheta_1 \cdot \cos\vartheta_2 + \sin\vartheta_1 \cdot \sin\vartheta_2 & \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 - \sin\vartheta_1 \cdot \cos\vartheta_2 \\ \sin\vartheta_1 \cdot \cos\vartheta_2 - \cos\vartheta_1 \cdot \sin\vartheta_2 & \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 + \cos\vartheta_1 \cdot \cos\vartheta_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) & \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \\ -\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) & \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Das ist die Matrix einer Drehung.

Algebraische Strukturen

Kontrollfragen

1. Es bezeichne $\mathfrak{A}$ ein Axiomensystem.
   a) Was versteht man unter einem Modell von $\mathfrak{A}$?
   b) Wann heißt $\mathfrak{A}$ kategorisch (oder monomorph)?
   c) Was bedeutet die relative Widerspruchsfreiheit von $\mathfrak{A}$ (bezüglich $\mathbf{Q}$)?
   d) Wann ist ein Axiom aus $\mathfrak{A}$ unabhängig von den übrigen Axiomen des Systems $\mathfrak{A}$?

2. Was versteht man unter a) einer zweistelligen (allgemein: n-stelligen ($n \in \mathbf{N}^*$)) Operation in einer Menge M, b) einer algebraischen Struktur?
3. Welchen Axiomen muß eine algebraische Struktur genügen, um a) Gruppoid, b) Halbgruppe, c) Gruppe, d) (assoziativer) Ring, e) Schiefkörper, f) Körper, g) Verband zu sein?
4. Für jeden in Frage 3 genannten Strukturtyp sind mindestens zwei Beispiele (Modelle) anzugeben.
5. Wann nennt man in einem Gruppoid $(M, \circ)$ ein Element
a) neutrales Element, b) zu einem gegebenen Element $x \in M$ invers?
Welche Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit solcher Elemente gelten in c) Gruppoiden, d) Halbgruppen, e) Gruppen?
6. Was ist nachzuweisen, wenn gezeigt werden soll, daß
a) die Menge M aller n-reihigen quadratischen Matrizen mit Elementen aus $\mathbf{Z}$ und der Matrizenmultiplikation als Operation,
b) die Menge S aller Abbildungen einer Menge $M \neq \emptyset$ in sich mit der Hintereinanderausführung $\circ$ als Operation eine Halbgruppe bildet? Wo werden in den Lehrbüchern MfL entsprechende Nachweise geführt?
7. a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Verbänden $(M, \wedge, \vee)$ und denjenigen geordneten Mengen $(M, \leqq)$, in welchen zu allen Elementen $a, b \in M$ auch $\inf(a, b)$ und $\sup(a, b)$ existieren?
b) Zur Illustration betrachte man den Verband $(\mathbf{N}^*, \sqcap, \sqcup)$. Welche zweistellige Relation erscheint in diesem Fall als Ordnungsrelation?

Aufgaben

1. Man zeige, daß die im Lehrbuch angegebenen Axiome, welche ein Gruppoid $(M, \circ)$ erfüllen muß, um eine Gruppe zu sein, voneinander unabhängig sind. Dazu gebe man in einer dreielementigen Menge $M = \{a, b, c\}$ solche zweistelligen Operationen $\circ$ an, daß $(M, \circ)$ jeweils genau einem dieser Axiome nicht genügt. Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es, in $M = \{a, b, c\}$ eine zweistellige Operation $\circ$ so zu erklären, daß $(M, \circ)$ eine Gruppe ist?

Anmerkung: Zwei Gruppen $(M, \circ)$ und $(\overline{M}, \odot)$ gelten dabei nicht als verschieden, wenn es eine solche 1-1-Abbildung φ von M auf $\overline{M}$ gibt, daß $\varphi(x \circ y) = \varphi(x) \odot \varphi(y)$ für alle $x, y \in M$ gilt. (In diesem Fall heißen die Gruppen $(M, \circ)$ und $(\overline{M}, \odot)$ isomorph).

Lösung: Ein Gruppoid $(M, \circ)$ ist genau dann eine Gruppe, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(1) $\bigwedge\limits_{a,b,c \in M} (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$,

(2) $\bigwedge\limits_{a,b \in M} \bigvee\limits_{x \in M} a \circ x = b$,

(3) $\bigwedge\limits_{a,b \in M} \bigvee\limits_{y \in M} y \circ a = b$.

Durch die nachstehenden Multiplikationstabellen (vgl. MfL Bd. 3, 12.3.) werden drei zweistellige Operationen in der Menge $M = \{a, b, c\}$ festgelegt:

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	a	b	c

$*$	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

$\odot$	a	b	c
a	b	a	c
b	c	b	a
c	a	c	b

In $(M, \circ)$ gilt (1) (Jedes Produkt ist gleich seinem rechten Faktor!) und (2) (In jeder Zeile der Multiplikationstabelle kommt jedes Element von M einmal vor!), aber nicht (3), denn nicht in jeder Spalte der Multiplikationstabelle kommt jedes Element von M vor.
Analog erkennt man, daß in $(M, *)$ (1) und (3) gelten, (2) aber nicht erfüllt wird. In $(M, \odot)$ gilt (2) und (3), wegen $c = a \odot c = (a \odot b) \odot c \neq a \odot (b \odot c) = a \odot a = b$ aber nicht (1).
In einer Gruppe $(M, \circ)$ gibt es ein neutrales Element. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei dies a. Wegen (2) und (3) muß jedes Element aus M in jeder Zeile und in jeder Spalte der Multiplikationstabelle von $(M, \circ)$ einmal vorkommen. Daher ist $(\{a, b, c\}, \circ)$ genau dann eine Gruppe mit dem neutralen Element a, wenn die Multiplikationstabelle

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

lautet. Gibt man eine Multiplikationstabelle an, in der ein anderes Element als neutrales Element fungiert, so erhält man eine zu $(M, \circ)$ isomorphe Gruppe. Es gibt also (nach Festlegung des neutralen Elements) nur eine Möglichkeit, in $M = \{a, b, c\}$ eine zweistellige Operation $\circ$ so zu erklären, daß $(M, \circ)$ eine Gruppe ist.

2. Es sei M eine nichtleere Menge und $\circ$ eine zweistellige Operation in M. $(M, \circ)$ heißt genau dann *Quasigruppe*, wenn zu je zwei Elementen $a, b \in M$
(1) genau ein $x \in M$ existiert, so daß $a \circ x = b$ und
(2) genau ein $y \in M$ existiert, so daß $y \circ a = b$ ist.
a) Ist dieses Axiomensystem kategorisch?
b) Ist es relativ widerspruchsfrei (bezüglich $\mathbb{Q}$)?
c) Sind die beiden Axiome unabhängig voneinander?

Hinweis: Es sind geeignete Modelle zu suchen.

3. In einer vierelementigen Menge M gebe man eine solche zweistellige Operation $\circ$ (z. B. in Gestalt einer Multiplikationstabelle) an, daß $(M, \circ)$ eine Quasigruppe (vgl. Aufgabe 2), aber keine Gruppe ist.

4. Eine Halbgruppe $(M, \circ)$ mit einem neutralen Element wird *Monoid* genannt. Wieviel verschiedene Monoide mit drei Elementen gibt es? Man beschreibe sie durch Angabe von Multiplikationstabellen.

Anmerkung: Verschiedenheit ist wie bei den Gruppen in Aufgabe 1 zu verstehen.

Hinweis: Es empfiehlt sich, die Fallunterscheidung, daß in $(M, \circ)$ zu a) drei, b) genau zwei, c) genau einem Element inverse Elemente existieren.

5. Eine Quasigruppe (vgl. Aufgabe 2), die ein neutrales Element e besitzt, wird *Loop* genannt. Man gebe in einer Menge M aus fünf Elementen eine solche zweistellige Operation $\circ$ an, mit der $(M, \circ)$ eine Loop, aber keine Gruppe ist.

6. Man zeige, daß Quasigruppen aus zwei Elementen und Loops aus drei Elementen (vgl. die Aufgaben 2 und 5) Gruppen sind.

7. Die Menge aller zweireihigen qudratischen Matrizen mit Elementen aus $\mathbb{N}$ bildet bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Halbgruppe. Man zeige, daß es darin Matrizen A und B gibt, für die $A \cdot X = B$ unendlich viele Lösungen, $Y \cdot A = B$ dagegen keine Lösung besitzt.

8. Es sei $(M, \circ)$ eine Halbgruppe mit dem neutralen Element e. Man beweise: Gibt es zu $u \in M$ Elemente $x, y \in M$, für die $x \cdot u = u \cdot y = e$ gilt, so ist $x = y$.

9. In der Menge M aller linearen Polynome $f(x) = ax + b$ mit Koeffizienten a $(\neq 0)$ und b aus $\mathbb{Q}$ wird durch $f(x) \circ g(x) := f(g(x))$ eine zweistellige Operation $\circ$ erklärt. Man beweise, daß $(M, \circ)$ eine nichtkommutative Gruppe ist, gebe ihr neutrales Element an und bestimme das zu $f(x)$ inverse Element.

Lösung: Mit zwei Elementen $f(x) = ax + b$ und $g(x) = cx + d$ $(ac \neq 0)$ von M ist auch $f(x) \circ g(x) = f(g(x)) = a(cx + d) + b = acx + (ad + b)$ ein Element von M, denn es ist $ac \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und $ad + b \in \mathbb{Q}$. Also ist $\circ$ eine Operation in M.
Bezeichnet $h(x) = sx + t$ $(s \neq 0)$ ein weiteres Element von M, so ist

$$(f(x) \circ g(x)) \circ h(x) = ac(sx + t) + (ad + b) = acsx + (act + ad + b)$$

und

$$f(x) \circ (g(x) \circ h(x)) = a(csx + ct + d) + b = acsx + (act + ad + b).$$

In $(M, \circ)$ gilt also das Assoziativgesetz.
Die Gleichung $f(x) \circ \xi(x) = g(x)$ wird zu gegebenen Elementen $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ und $g(x) = cx + d$ $(c \neq 0)$ aus M gelöst durch $\xi(x) = \frac{c}{a} x + \frac{d - b}{a} \in M$, die Gleichung $\eta(x) \circ f(x) = g(x)$ durch $\eta(x) = \frac{c}{a} x + \frac{ad - cb}{a} \in M$. Es liegt also eine Gruppe vor.
Diese ist nicht kommutativ, denn es ist $(x + 1) \circ (2x + 1) = 2x + 2$ und $(2x + 1) \circ (x + 1) = 2x + 3$. Das neutrale Element ist das Polynom $e(x) = x$, und zu $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ ist $\bar{f}(x) = \frac{1}{a} x - \frac{b}{a}$ invers.

10. Es sei $(M, \circ)$ ein Monoid (vgl. Aufgabe 4), U eine nichtleere Teilmenge von M. Man zeige, daß die Teilmenge $C := \{c : c \in M \wedge \bigwedge_{m \in M} c \circ m = m \circ c\}$ mit der (auf C eingeschränkten) Operation $\circ$ ein Monoid $(C, \circ)$ bildet.

11. In einer dreielementigen Menge $M = \{a, b, c\}$ gebe man solche zweistelligen Operationen $+, \cdot$ (z. B. durch Tabellen) an, daß $(M, +, \cdot)$ ein Ring ist. Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es?

Anmerkung: Verschiedenheit ist wie bei den Gruppen in Aufgabe 1 zu verstehen.

12. Gilt in dem Ring $(M, +, \cdot)$ neben den Ringaxiomen auch noch $\bigvee_{e \in M} \bigwedge_{a \in M} a \cdot e = e \cdot a = a$, so heißt $(M, +, \cdot)$ Ring mit Einselement e. Im Axiomensystem für einen

solchen Ring ist die Kommutativität der Addition eine Folgerung aus den übrigen Axiomen (sogar auch schon ohne das Axiom der Assoziativität der Multiplikation).

Hinweis: MfL Bd. 3, 11.3.(14)—(16) beachten!

13. In jedem Verband $(M, \wedge, \vee)$ wird durch die Festlegung $a \leqq b :\Leftrightarrow a \wedge b = a$ $(a, b \in M)$ eine Ordnungsrelation $\leqq$ definiert. Man beweise, daß für diese $\sup(a, b) = a \vee b$ gilt.

14. In einer Menge M sei eine Ordnungsrelation $\leqq$ erklärt, für die zu allen $a, b \in M$ auch $\inf(a, b)$ und $\sup(a, b)$ in M existieren. Man beweise: $\inf(\inf(a, b), c) = \inf(a, \inf(b, c))$ und $\sup(\sup(a, b), c) = \sup(a, \sup(b, c))$.

15. Wieviel Ordnungsrelationen kann man in der Menge $M = \{a, b, c\}$ so erklären, daß zu je zwei Elementen aus M das Infimum und das Supremum existieren? In einem Fall gebe man die durch eine solche Ordnungsrelation festgelegten Operationen $\wedge$ und $\vee$, mit denen $(M, \wedge, \vee)$ ein Verband ist (vgl. MfL Bd. 3, 11.3.(27)), in Tabellenform an.

16. Es seien $z = x + iy$ und $w = u + iv$ $(x, y, u, v \in \mathbf{R})$ komplexe Zahlen. Durch $z \lessdot w :\Leftrightarrow x \leqq u \wedge y \leqq v$ wird eine zweistellige Relation $\lessdot$ in $\mathbf{C}$ beschrieben. Man zeige:
a) $\lessdot$ ist eine Ordnungsrelation in $\mathbf{C}$,
b) zu allen Zahlen $z, w \in \mathbf{C}$ existieren in $(\mathbf{C}, \lessdot)$ $\inf(z, w)$ und $\sup(z, w)$.
c) Man gebe die durch $\lessdot$ festgelegten Operationen $\wedge$ und $\vee$ an, mit denen $(\mathbf{C}, \wedge, \vee)$ ein Verband ist und $z \lessdot w \Leftrightarrow z \wedge w = z$ gilt. Wie können diese Operationen in der Gaußschen Zahlenebene veranschaulicht werden?

Gruppen

Kontrollfragen

1. Was hat man nachzuweisen, wenn man von einer vorgelegten Struktur zeigen will, daß sie eine Gruppe ist?
2. Welche Folgerungen für die Rechnung ergeben sich aus der Gültigkeit des Assoziativgesetzes in einer Gruppe G?
3. Was ist die Ordnung einer Gruppe?
4. Es sei G eine Gruppe. Was versteht man unter
a) einem Komplex K von G, b) einer Untergruppe U von G, c) dem Erzeugnis $\langle K \rangle$ eines Komplexes K von G, d) einem Erzeugendensystem von G, e) dem Zentrum $Z(G)$ von G, f) einer zyklischen Gruppe G?
5. Wie ist die Ordnung eines Gruppenelements definiert?
6. a) Was versteht man unter einem Isomorphismus von einer Gruppe G auf eine Gruppe $\bar{G}$?

b) Welche Eigenschaften hat ein solcher Isomorphismus?

c) Welche Isomorphismen werden Automorphismen, welche innere Automorphismen von G genannt?

7. a) Wann heißt eine Gruppe zyklisch?

   b) Es sind alle abstrakten zyklischen Gruppen anzugeben und durch je ein Beispiel zu realisieren.

   c) Welche Untergruppen besitzt eine zyklische Gruppe?

8. Was bedeuten die Begriffe: a) Homomorphismus von einer Gruppe G in eine Gruppe H, b) Faktorgruppe, c) natürlicher Homomorphismus?
9. Welche Aussagen enthält der Homomorphiesatz für Gruppen?
10. a) Wie sind die Kommutatorgruppen einer Gruppe G definiert?
    b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Auflösbarkeit und den Kommutatorgruppen von G?
11. Was versteht man unter einer charakteristischen Untergruppe einer Gruppe?
12. Durch welche Definitionen kann das direkte Produkt zweier Gruppen erklärt werden?
13. Wann nennt man Permutationsgruppen a) ähnlich, b) transitiv, c) regulär?
14. Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Grad und der Ordnung einer transitiven Permutationsgruppe?
15. Was versteht man unter einer Darstellung einer Gruppe?

Aufgaben

1. Man zeige, daß die Menge $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ mit der durch

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

$\big((x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R},\ (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}\big)$ erklärten Operation eine abelsche Gruppe ist.

In dieser bilden die Elemente der Form $(a, a + b, b)$ $(a \in \mathbf{R},\ b \in \mathbf{R})$ eine Untergruppe, welche die aus den Elementen $(3c, 4c, c)$ $(c \in \mathbf{R})$ bestehende Untergruppe echt enthält.

Lösung: Die oben erklärte Addition von Tripeln reeller Zahlen ist eine zweistellige Operation in $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, denn sie bildet jedes geordnete Paar von Tripeln auf ein eindeutig bestimmtes Tripel reeller Zahlen ab.

Für die Tripeladdition gilt das Assoziativgesetz, weil die bei der Tripeladdition in den einzelnen Komponenten auszuführende Addition reeller Zahlen assoziativ ist. $(\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}, +)$ enthält $(0, 0, 0)$ als (einziges) neutrales Element und zu jedem Element (x_1, x_2, x_3) das inverse Element $(-x_1, -x_2, -x_3)$. Die Tripeladdition ist kommutativ, weil für die Addition der reellen Zahlen in den Komponenten das Kommutativgesetz gilt. Daher ist $(\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}, +)$ eine abelsche Gruppe.

Weil

$$\begin{aligned}(a, a+b, b) + (-\bar{a}, -(\bar{a}+\bar{b}), -\bar{b}) &= (a-\bar{a}, (a+b)-(\bar{a}+\bar{b}), b-\bar{b})\\ &= (a-\bar{a}, (a-\bar{a})+(b-\bar{b}), b-\bar{b})\end{aligned}$$

gilt, ist der aus allen Elementen der Form $(a, a+b, b)$ $(a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R})$ bestehende Komplex U eine Untergruppe von $(\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}, +)$. Da $(1, 2, 0)$ nicht in U liegt, ist U eine echte Untergruppe von $(\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}, +)$.
Aus

$$\begin{aligned}(3c, 4c, c) + (-3\bar{c}, -4\bar{c}, -\bar{c}) &= (3c-3\bar{c}, 4c-4\bar{c}, c-\bar{c})\\ &= (3(c-\bar{c}), 4(c-\bar{c}), c-\bar{c})\end{aligned}$$

ergibt sich, daß der aus allen Elementen der Form $(3c, 4c, c)$ $(c \in \mathbf{R})$ bestehende Komplex V eine Untergruppe von $(\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}, +)$ ist. Da offenbar $U \supseteqq V$ und $(1, 2, 1) \in U$, aber $(1, 2, 1) \notin V$ gilt, ist sogar $U \supset V$.

2. Es bezeichne V eine additiv geschriebene abelsche Gruppe und R einen Ring mit Einselement 1. Ferner sei eine Abbildung von $R \times V$ in V gegeben, durch die jedem Paar $(\alpha, v) \in R \times V$ ein Element $\alpha v \in V$ zugeordnet wird. Gelten für beliebige Elemente x, y aus V und α, β aus R die Axiome

   (1) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$, (2) $(\alpha+\beta)\,x = \alpha x + \beta x$,

   (3) $(\alpha\beta)\,x = \alpha(\beta x)$, (4) $1x = x$,

   so nennt man V einen *R-Modul.* (Ist R sogar ein Körper, so wird V auch als Vektorraum über R bezeichnet. Speziell ergibt sich mit $R = \mathbf{R}$ ein reeller Vektorraum.)
   Es sei R ein Teilring von $\mathbf{R}$ mit Einselement (z. B. $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$). Man zeige, daß die drei in der vorigen Aufgabe genannten abelschen Gruppen mit der Festsetzung

   $$\alpha(x_1, x_2, x_3) := (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$$

   für beliebige Elemente $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ und $\alpha \in R$ R-Moduln sind.

3. Es seien A, B Teilmengen einer gegebenen Menge M. Man zeige, daß die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ mit der durch

   $$A \circ B := \big(M \setminus (A \cup B)\big) \cup (A \cap B)$$

   erklärten Operation eine Gruppe bildet.

4. a) Aus welchen Matrizen besteht die von

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

   erzeugte Gruppe G, in welcher die Matrizenmultiplikation die Operation ist?

   b) Durch welche definierenden Relationen kann die Rechnung in dieser Gruppe vollständig beschrieben werden?

   c) Welche Ordnung hat diese Gruppe?

Lösung: Durch Berechnung der Matrizenprodukte bestätigt man die Gültigkeit der Relationen $A^4 = I$, $B^2 = A^2$, $BA = A^3B$. Aus ihnen ergibt sich, daß die acht Matrizen A^iB^k $(i = 0, 1, 2, 3;\ k = 0, 1)$ bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bilden (Quaternionengruppe).

5. a) Die Menge aller Drehungen, welche einen gegebenen Würfel mit sich zur Deckung bringen, bilden bezüglich der Nacheinanderausführung eine Gruppe G.

   b) Welche Ordnung hat G?

   c) Jede Drehung $d \in G$ permutiert die vier Diagonalen des Würfels untereinander und wird umgekehrt durch diese Permutation $\pi(d)$ der vier Würfeldiagonalen eindeutig bestimmt.

   d) Welche Permutationen $\pi(d)$ der Gruppe S_4 aller Permutationen der Würfeldiagonalen treten bei dieser Beschreibung der Elemente $d \in G$ auf? Welche Untergruppe von S_4 ist also zu G isomorph?

6. Welche Ordnung hat die (multiplikative) Gruppe der primen Restklassen modulo 9? Man zeige, daß sie zyklisch ist und gebe sämtliche erzeugenden Elemente dieser Gruppe an. Ist auch die (multiplikative) Gruppe der primen Restklassen modulo 8 zyklisch?

7. Es ist zu zeigen, daß die Matrizen der Form

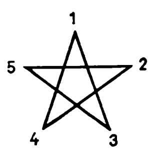
$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad (\varphi \in \mathbf{R})$$

   bezüglich der Matrizenmultiplikation eine abelsche Gruppe G bilden.
   In einer euklidischen Ebene mit einem kartesischen Koordinatensystem wird durch die Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

   jedem Punkt P mit den Koordinaten (x, y) ein Punkt Q mit den Koordinaten (u, v) als Bildpunkt zugeordnet. Welche Bewegung der Ebene wird dadurch beschrieben?
   Gibt es in G eigentliche Untergruppen von endlicher und solche von unendlicher Ordnung?

8. Welche Ordnung hat die Gruppe B_{2P} eines Pentagramms? Durch welche Permutationen der fünf Ecken der Figur können die Elemente von B_{2P} angegeben werden?



Man bestimme sämtliche Untergruppen von B_{2p} und beschreibe die Gruppe durch Angabe erzeugender Elemente und definierender Relationen.

9. Als Streifen sei dasjenige Stück einer Ebene bezeichnet, welches zwischen zwei parallelen Geraden dieser Ebene liegt. Die in der Mitte zwischen ihnen verlaufende Parallele heißt Längsachse des Streifens. Die Strecken zwischen den Randgeraden, die auf der Längsachse senkrecht stehen, werden Querachsen genannt. Es ist zu zeigen, daß die folgenden 1-1-Abbildungen eines Streifens auf sich bezüglich der Nacheinanderausführung eine Gruppe bilden:
   1. die Translationen in Richtung der Längsachse,
   2. die Spiegelung und die Gleitspiegelungen an der Längsachse,
   3. die Spiegelungen an Querachsen,
   4. die Drehungen um Punkte der Längsachse um 180°.

   Ist diese Gruppe abelsch?

10. Es sei G eine Gruppe mit dem neutralen Element e. Es ist zu zeigen, daß für vertauschbare Elemente a, b aus G gilt:

    (*) $a^m = b^n = e \Rightarrow (ab)^{m \sqcup n} = e \quad (m, n \in \mathbf{N})$.

    Man gebe ein Beispiel an, für das (*) im Fall $ab \neq ba$ nicht gilt.

    Lösung: Wegen $ab = ba$ gilt $(ab)^{m\sqcup n} = a^{m\sqcup n} b^{m\sqcup n}$. Ist $a^m = b^n = e$, so gilt auch $(ab)^{m\sqcup n} = e$.
    Für die Elemente r und $s = pr$ der symmetrischen Gruppe S_3 gilt (vgl. MfL Bd. 3, 12.2.) $r^2 = (pr)^2 = e$. Es ist aber $(r(pr))^2 = (p^2rr)^2 = (p^2)^2 = p \neq e$.

11. Für beliebige Elemente a, b einer Gruppe G gilt $|a| = |a^{-1}|$ und $|ab| = |ba|$.

12. Man gebe Beispiele für unendliche Gruppen an, in denen
    a) jedes Element endliche Ordnung hat,
    b) jedes Element $\neq e$ unendliche Ordnung hat,
    c) Elemente $\neq e$ von endlicher Ordnung und Elemente unendlicher Ordnung enthalten sind.

13. Ist a das einzige Element der Ordnung 2 in einer Gruppe G, so liegt a im Zentrum von G.

14. Gilt für jedes Element g der Gruppe G die Gleichung $g^2 = e$, so ist G abelsch.

15. In der durch Aufgabe 4 beschriebenen Gruppe G werden folgende Komplexe betrachtet: $K = \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{AB}\}$ und $L = \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\}$. Aus welchen Matrizen besteht a) das Komplexprodukt KL, b) der zu K inverse Komplex K^{-1}? Ist K in G ein normaler Komplex?

16. Man bestimme sämtliche Untergruppen der in Aufgabe 4 angegebenen Gruppe G und zeichne den Untergruppengraphen von G. Welche Elemente bilden das Zentrum von G? Es ist eine Nebenklassenzerlegung von G nach dem Zentrum anzugeben. Gibt es eine Untergruppe U von G, für die sich die Zerlegung von G in Rechtsnebenklassen nach U von der Zerlegung in Linksnebenklassen unterscheidet?

17. Sind A und B endliche Untergruppen der Gruppe G, so enthält der Komplex AB genau $\frac{|A| \cdot |B|}{|A \cap B|}$ verschiedene Elemente.

Lösung: Für Elemente a_1, a_2 aus A und b_1, b_2 aus B ist

$$a_1b_1 = a_2b_2 \Leftrightarrow a_2^{-1}a_1 = b_2b_1^{-1} \Leftrightarrow a_2^{-1}a_1b_1 = b_2.$$

Sind also b_1 und b_2 aus verschiedenen Rechtsnebenklassen von B nach $A \cap B$, so ist $a_1b_1 \neq a_2b_2$. Sind aber b_1 und b_2 aus derselben Rechtsnebenklasse von B nach $A \cap B$, so ist $Ab_1 = Ab_2$. Daher ist die Anzahl der verschiedenen Elemente in AB gleich der Anzahl der verschiedenen Elemente in A, multipliziert mit der Anzahl der verschiedenen Rechtsnebenklassen von B nach $A \cap B$, d. h. gleich $|A| \cdot \frac{|B|}{|A \cap B|} = \frac{|A| \cdot |B|}{|A \cap B|}$.

18. Sind p und q Primzahlen und ist $p < q$, so kann eine Gruppe G der Ordnung pq keine zwei verschiedenen Untergruppen der Ordnung q enthalten.

Hinweis: Aussage von Aufgabe 17 verwenden!

19. Der Index $[G : Z(G)]$ des Zentrums einer Gruppe G ist niemals eine Primzahl.

20. Es sei $\mathfrak{U}$ die Menge aller Untergruppen einer gegebenen Gruppe G. Durch $U \wedge V := U \cap V$ und $U \vee V := \langle U \cup V \rangle$ für beliebige U, V aus $\mathfrak{U}$ werden in $\mathfrak{U}$ binäre Operationen definiert. Man zeige, daß $(\mathfrak{U}, \wedge, \vee)$ ein Verband ist.
Für die zyklische Gruppe der Ordnung 4 und die Kleinsche Vierergruppe beschreibe man diese Untergruppenverbände durch Angabe a) der Operationen in Tabellenform, b) der Untergruppendiagramme.

21. Die komplexen Zahlen $1, i, -1, -i$ bilden bezüglich der Multiplikation eine Gruppe. Man zeige, daß sie zur additiven Gruppe der Restklassen modulo 4 isomorph ist. Ist sie auch zur Gruppe der primen Restklassen modulo 8 isomorph?

22. Von den Matrizen $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B^* = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $(i^2 = -1)$ wird (bezüglich der Matrizenmultiplikation als Operation) eine endliche Gruppe erzeugt. Sie ist zu der in Aufgabe 4 angegebenen Matrizengruppe isomorph.

Lösung: Durch Matrizenmultiplikation weist man die Gültigkeit der Relationen $A^{*4} = I$, $B^{*2} = A^{*2}$, $B^*A^* = A^{*3}B^*$ nach. Aus ihnen folgt, daß die acht Matrizen $A^{*i}B^{*k}$ $(i = 0, 1, 2, 3;\ k = 0, 1)$ eine Gruppe bilden. Da für die Matrizen A und B aus Aufgabe 4 entsprechende Relationen gelten, ist die Abbildung $f: A^{*i}B^{*k} \to A^iB^k$ $(i = 0, 1, 2, 3;\ k = 0, 1)$ ein Isomorphismus.

23. Man bestimme alle abstrakten Gruppen der Ordnungen 4 und 6.

24. In der symmetrischen Gruppe S_3 erzeugen verschiedene Elemente auch verschiedene innere Automorphismen, und jeder Automorphismus der Gruppe S_3 ist ein innerer Automorphismus.

Lösung: Für beliebige Elemente x, y aus S_3 gilt:

$$\bigwedge_{g \in S_3} x^{-1}gx = y^{-1}gy \Leftrightarrow \bigwedge_{g \in S_3} (xy^{-1})^{-1}\, g(xy^{-1}) = g \Leftrightarrow (xy^{-1}) \in Z(S_3).$$

Weil aber das Zentrum $Z(S_3)$ nur aus dem neutralen Element e besteht (vgl. Aufgabe 19), erzeugen verschiedene Elemente x, y verschiedene innere Automorphismen von S_3.
Die Gruppe S_3 kann durch ein Element p der Ordnung 3 und ein Element r der Ordnung 2 erzeugt werden (vgl. MfL Bd. 3, 12.2.). Bei jedem Automorphismus von S_3 wird p auf eines der zwei Elemente der Ordnung 3 und r auf eines der drei Elemente der Ordnung 2 von S_3 abgebildet. Daher kann es höchstens sechs Automorphismen von S_3 geben. Die sechs inneren Automorphismen müssen also schon alle Automorphismen von S_3 sein.

25. Man bestimme die Automorphismengruppe $A(V)$ der Kleinschen Vierergruppe $V = \langle a, b\rangle$ mit den definierenden Relationen $a^2 = b^2 = e$ und $ab = ba$.

26. Man zeige, daß die durch ein festes $n \in \mathbf{N}^*$ bestimmte Abbildung $\nu: q \mapsto nq$ ($q \in \mathbf{Q}$) ein Automorphismus der additiven Gruppe $(\mathbf{Q}, +)$ der rationalen Zahlen ist.

27. Man beweise, daß die additive Gruppe $(\mathbf{Q}, +)$ der rationalen Zahlen keine echte Untergruppe von endlichem Index enthält.

28. Es bezeichne B_{2Q} die Gruppe aller Bewegungen, die ein Quadrat auf sich abbilden (vgl. MfL Bd. 3, 12.1.2.12. und 12.2.). Man zeige, daß B_{2Q} ihrer Automorphismengruppe isomorph ist.

29. Man zeige, daß die inneren Automorphismen einer Gruppe G eine Untergruppe $I(G)$ der Automorphismengruppe von G bilden und daß $I(G) \cong G/Z(G)$ ist. ($Z(G)$ bezeichnet das Zentrum von G.)

30. Man bestimme die Gruppe der inneren Automorphismen der Quaternionengruppe (vgl. MfL Bd. 3, 12.3.).

31. Man zeige, daß $K := \left\{(a, b) \colon a \in G \wedge b \in G \wedge \bigvee_{g \in G} g^{-1}ag = b\right\}$ eine Äquivalenzrelation in der Menge der Elemente einer Gruppe G ist. Die zugehörigen Äquivalenzklassen werden Klassen konjugierter Elemente genannt.

32. Man gebe die Zerlegung der Quaternionengruppe (vgl. MfL Bd. 3, 12.3.) in Klassen konjugierter Elemente an.

33. Ist U eine von G verschiedene Untergruppe der endlichen Gruppe G, so enthält $\bigcup_{g \in G} g^{-1}Ug$ nicht alle Elemente von G.

34. Eine endliche Gruppe mit genau zwei Klassen konjugierter Elemente hat die Ordnung 2.

Hinweis: Zu $a \in G$ sind genau $k = [G : N_G(a)]$ Elemente aus G konjugiert.

35. Es bezeichne U eine Untergruppe, M und N seien Normalteiler der Gruppe G. Es ist zu beweisen:

a) UN ist Untergruppe von G,

b) MN und $M \cap N$ sind Normalteiler von G.

An einem Beispiel zeige man, daß das Produkt zweier Untergruppen von G keine Untergruppe zu sein braucht.

36. Es sei G eine Gruppe der Ordnung pq ($p < q$ Primzahlen). Man zeige, daß in G eine Untergruppe der Ordnung q sogar Normalteiler ist.

Hinweis: Aussage von Aufgabe 18 beachten!

37. a) Es sind sämtliche Untergruppen der (abstrakten) zyklischen Gruppe der Ordnung 12 anzugeben und für jede Untergruppe alle möglichen erzeugenden Elemente zu bestimmen.

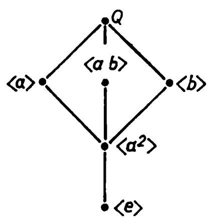
b) Man illustriere die Ergebnisse an der additiven Gruppe der Restklassen modulo 12.

38. Zu jeder natürlichen Zahl $t \leqq 6$ gebe man a) in der zyklischen Gruppe der Ordnung 6, b) in der symmetrischen Gruppe S_3 sämtliche Elemente x an, für die $x^t = e$ gilt.

39. a) Auf welche (abstrakten) Gruppen kann die Quaternionengruppe Q (vgl. MfL Bd. 3, 12.3.) homomorph abgebildet werden?

b) Für welche Zahlen $m \in \{5, 6, 8\}$ ist die Gruppe der primen Restklassen mod m homomorphes Bild von Q? In den möglichen Fällen ist je eine Abbildung anzugeben.

Lösung: a) Für die Quaternionengruppe $Q_2 = \langle a, b\rangle$ gelten die definierenden Relationen $a^4 = e$, $b^2 = a^2$, $ba = a^3b$. Die Untergruppen von Q sind aus dem angegebenen Untergruppengraphen ablesbar. Sie sind sämtlich Normalteiler von Q. Die Faktorgruppen sind den möglichen homomorphen Bildern isomorph. $Q/\langle e\rangle$ ist zur Quaternionengruppe isomorph, $Q/\langle a^2\rangle$ hat die Ordnung 4. Die vom neutralen Element $\langle a^2\rangle$ verschiedenen Elemente $\langle a^2\rangle\, a$, $\langle a^2\rangle\, b$, $\langle a^2\rangle\, ab$ haben sämtlich die Ordnung 2. Daher ist $Q/\langle a^2\rangle$ isomorp zur Kleinschen Vierergruppe $V = \langle \alpha, \beta\rangle$ mit den definierenden Relationen $\alpha^2 = \beta^2 = e$ und $\alpha\beta = \beta\alpha$ (vgl. Aufgabe 23). $Q/\langle a\rangle$, $Q\langle b\rangle$, $Q/\langle ab\rangle$ haben die Ordnung 2 und sind daher zur zyklischen Gruppe Z_2 von der Ordnung 2 isomorph. Q/Q ist die Gruppe der Ordnung 1.



b) Die Gruppe der primen Restklassen modulo 5 ist zyklisch von der Ordnung 4. Sie tritt nicht als homomorphes Bild von Q auf. Die Gruppe der primen Restklassen modulo 6 besteht nur aus den Elementen [1] und [5]. Sie ist zyklisch von der Ordnung 2. Die Abbildung f: $a^k \mapsto [1]$, $a^kb \mapsto [5]$ ($k \in \{0, 1, 2, 3\}$) ist ein Homomorphismus von Q auf die Gruppe der primen Restklassen modulo 6.
Die von [1] verschiedenen Elemente [3], [5], [7] der Gruppe der primen Restklassen modulo 8 haben die Ordnung 2. Daher ist diese Gruppe zur Kleinschen Vierergruppe isomorph. Ein Homomorphismus von Q auf diese Gruppe ist die Abbildung

$$f\colon a^{2k} \mapsto [1], \quad a^{2k+1} \mapsto [3], \quad a^{2k}b \mapsto [5], \quad a^{2k+1}b \mapsto [7] \quad (k \in \{0, 1\}).$$

40. Man gebe eine homomorphe Abbildung der Gruppe B_{2Q} (vgl. MfL Bd. 3, 12.1.2.12.) auf die multiplikative Gruppe der Zahlen 1 und -1 an.

41. Man bestimme sämtliche Untergruppen der Gruppe der primen Restklassen modulo 15 und veranschauliche ihre gegenseitige Lage durch einen Untergruppengraphen.

42. Welche abstrakten Gruppen treten als homomorphe Bilder der Gruppe der primen Restklassen mod 15 auf?

43. Es sind alle homomorphen Abbildungen der Gruppe der primen Restklassen modulo 15 auf die Gruppe der vierten Einheitswurzeln $(\{i, -1, -i, 1\}, \cdot)$ anzugeben.

44. Man gebe eine homomorphe Abbildung der Gruppe $(\mathbf{Z}, +)$ auf die Gruppe $(\{i, -1, -i, 1\}, \cdot)$ der vierten Einheitswurzeln an und bestimme den zugehörigen Kern.

45. Welche Ordnung hat die Gruppe B_{2S} aller Bewegungen einer euklidischen Ebene, die ein regelmäßiges Sechseck dieser Ebene auf sich abbilden? Welche natürlichen Zahlen treten als Ordnungen von Elementen dieser Gruppe auf?
Man beschreibe die Elemente der Gruppe durch Angabe der Permutationen, denen die Eckpunkte bei den einzelnen Abbildungen unterworfen werden. Man gebe mindestens drei verschiedene nichttriviale Untergruppen dieser Gruppe an.

46. Man gebe sämtliche Normalteiler der Gruppe B_{2S} (vgl. Aufgabe 45) an und bestimme (bis auf Isomorphie) alle homomorphen Bilder dieser Gruppe.

47. a) Es sind Beispiele für charakteristische Untergruppen anzugeben.
b) Man beweise: Ist N ein Normalteiler der Gruppe G und C charakteristische Untergruppe von N, so ist C Normalteiler von G.

48. Eine endliche Folge $G = G_0 \supseteqq G_1 \supseteqq G_2 \supseteqq \cdots \supseteqq G_l = \langle e \rangle$ ineinander liegender Untergruppen G_i $(i = 0, 1, \ldots, l)$ der Gruppe G, die mit G beginnt und mit $\langle e \rangle$ endet, heißt *Subnormalreihe* von G, wenn jede Untergruppe G_i Normalteiler von G_{i-1} $(i = 1, 2, \ldots, l)$ ist. Die G_{i-1}/G_i heißen Faktorgruppen der Subnormalreihe. Man beweise, daß G genau dann auflösbar ist, wenn G eine Subnormalreihe mit abelschen Faktorgruppen besitzt.

Lösung: 1. Es sei G auflösbar. Dann gibt es eine natürliche Zahl n, für die $G^{(n)} = \langle e \rangle$ ist. In der Reihe der Kommutatorgruppen $G = G^{(0)} \supset G' \supset G'' \supset \cdots \supset G^{(n-1)} \supset G^{(n)} = \langle e \rangle$ von G ist jedes Glied $G^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ charakteristische Untergruppe von $G^{(i-1)}$ (vgl. MfL Bd. 3, 12.6.). Erst recht ist dann $G^{(i)}$ Normalteiler von $G^{(i-1)}$. Also ist

$$G \supset G' \supset G'' \supset \cdots \supset G^{(n-1)} \supset G^{(n)} = \langle e \rangle$$

eine Subnormalreihe von G, deren sämtliche Faktorgruppen $G^{(i-1)}/G^{(i)}$ abelsch sind (vgl. MfL Bd. 3, 12.6., Satz 1).

2. Es sei $G = G_0 \supseteqq G_1 \supseteqq G_2 \supseteqq \cdots \supseteqq G_l = \langle e \rangle$ eine Subnormalreihe von G mit abelschen Faktorgruppen G_{i-1}/G_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$. Für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$ gilt daher $G_i \supseteqq G'_{i-1}$ (vgl. MfL Bd. 3, 12.6., Satz 1). Insbesondere ist $G_1 \supseteqq G'_0 \supseteqq G'$. Mittels vollständiger Induktion nach i erhält man daraus $G_i \supseteqq G'_{i-1} \supseteqq G^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$. Aus der Voraussetzung $G_l = \langle e \rangle$ ergibt sich daher $G^{(l)} = \langle e \rangle$. Also ist G auflösbar.

49. Man beweise, daß es in einer Gruppe G der Ordnung pq ($p < q$ Primzahlen) eine Untergruppe der Ordnung q gibt. Sie ist charakteristische Untergruppe von G.

Hinweis: Ist G nicht abelsch, so betrachte man die Elementezahlen in den Klassen konjugierter Elemente.

50. Man bestimme die Kommutatorgruppe der Quaternionengruppe Q (vgl. MfL Bd. 3, 12.3.).

51. Man schreibe die Quaternionengruppe Q (vgl. MfL Bd. 3, 12.3.) als Produkt von zwei eigentlichen Untergruppen. Läßt sich Q auch als direktes Produkt solcher Untergruppen darstellen?

52. Es seien A und B gegebene Gruppen mit den neutralen Elementen e_A bzw. e_B. Man zeige, daß die Menge $G := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$ bezüglich der für Elemente (a, b), $(\bar{a}, \bar{b})$ aus G durch $(a, b)(\bar{a}, \bar{b}) := (a\bar{a}, b\bar{b})$ festgelegten Operation eine Gruppe und die Teilmengen $\bar{A} := \{(a, e_B) : a \in A\}$ und $\bar{B} := \{(e_A, b) : b \in B\}$ zu A bzw. B isomorphe Untergruppen bilden, für die $G = \bar{A} \times \bar{B}$ gilt.

53. Man führe die in der vorigen Aufgabe angegebene Konstruktion aus, indem man für A die Gruppe der primen Restklassen modulo 10 und für B die Gruppe der dritten Einheitswurzeln $\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)$ verwendet.

a) Welche Gestalt haben die Elemente von G?

b) Für welche abstrakte Gruppe ist G ein Modell?

54. Das Produkt der Permutationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 8 & 12 & 3 & 10 & 9 & 1 & 11 & 7 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 10 & 3 & 5 & 8 & 4 & 7 & 1 & 11 & 2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

ist als Produkt ziffernfremder Zyklen und als Produkt von Transpositionen darzustellen.

55. Man bestimme die reguläre Darstellung a) der Kleinschen Vierergruppe, b) der symmetrischen Gruppe S_3.

Lösung: a) Die Kleinsche Vierergruppe V wird von zwei Elementen a, b erzeugt, die den definierenden Relationen $a^2 = b^2 = e$ und $ab = ba$ genügen. Bei der regulären Darstellung werden die vier Elemente von V auf die folgenden Permutationen abgebildet:

$$e \mapsto p_e = \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ ee & ae & be & abe \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ e & a & b & ab \end{pmatrix},$$

$$a \mapsto p_a = \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ ea & aa & ba & aba \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ a & e & ab & b \end{pmatrix},$$

$$b \mapsto p_b = \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ eb & ab & bb & abb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ b & ab & e & a \end{pmatrix},$$

$$ab \mapsto p_{ab} = \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ eab & aab & bab & abab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ ab & b & a & e \end{pmatrix}.$$

Anmerkung: Man kann die Permutationen auch durch „Permutationsmatrizen" (das sind quadratische Matrizen, deren Reihenzahl gleich dem Grad der Permutationen ist und die in jeder Zeile und jeder Spalte genau eine Eins und sonst Null enthalten) beschreiben und erhält dann die reguläre Darstellung in Matrizenform.
Bezeichnet $\boldsymbol{g}$ die Spalte der Elemente der Gruppe G in irgendeiner festen Reihenfolge, z. B. für die Vierergruppe V:

$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} e \\ a \\ b \\ ab \end{pmatrix},$$

so werde für ein beliebiges Element x aus G mit $\boldsymbol{g}x$ diejenige Spalte bezeichnet, welche aus $\boldsymbol{g}$ entsteht, wenn darin jedes Element mit x multipliziert wird. Beispielsweise ist für die Vierergruppe

$$\boldsymbol{g}a = \begin{pmatrix} ea \\ aa \\ ba \\ aba \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ e \\ ab \\ b \end{pmatrix}.$$

Geht man also von einer festen Reihenfolge der Elemente von G aus und schreibt die Elemente in dieser Reihenfolge als Spalte $\boldsymbol{g}$, so kann man die Permutation p_x aus der regulären Darstellung auch durch die Spalte $\boldsymbol{g}x$ beschreiben. Die Spalte $\boldsymbol{g}x$ kann mittels einer eindeutig bestimmten Permutationsmatrix $\boldsymbol{X}$ geschrieben werden als $\boldsymbol{g}x = \boldsymbol{X}\boldsymbol{g}$. Beispielsweise ist für die Vierergruppe

$$\boldsymbol{g}a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{g}.$$

Man rechnet sofort nach, daß die Menge dieser Matrizen $\boldsymbol{X}$ bezüglich der Matrizenmultiplikation eine zur Gruppe G (und dann auch zur Gruppe der Permutationen aus der regulären Darstellung von G) isomorphe Gruppe bildet. Die isomorphe Abbildung wird durch $x \mapsto \boldsymbol{X}$ beschrieben.
Diese Matrizengruppe wird ebenfalls als reguläre Darstellung der Gruppe G bezeichnet. Sie lautet für die Kleinsche Vierergruppe:

$$e \mapsto \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a \mapsto \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b \mapsto \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad ab \mapsto \boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teil b) der Aufgabe kann analog bearbeitet werden.

56. Man gebe transitive Permutationsgruppen der Grade 4 und 6 an, die von Elementen a, b, c erzeugt werden, welche den Relationen

$$a^2 = b^2 = c^3 = e, \quad ab = ba, \quad ca = bc, \quad cb = abc$$

genügen.

Ringe, Integritätsbereiche, Körper

Kontrollfragen

1. Welche Axiome müssen von einer nichtleeren Menge M und zwei darin erklärten binären Operationen $+$ und $\cdot$ erfüllt werden, damit die Struktur $(M, +, \cdot)$ a) ein Ring, b) ein Integritätsbereich, c) ein Körper ist?
2. Was versteht man unter einem Nullteiler eines Ringes R? Wie wirkt sich die Existenz von Nullteilern auf die Arithmetik im Ring R aus? Man nenne Beispiele für Ringe mit Nullteilern und überprüfe daran die Aussagen.
3. Es sei I ein Integritätsbereich mit Einselement e. Was versteht man unter einer Einheit von I?
4. Es ist der Isomorphiebegriff bei Gruppen und bei Ringen zu vergleichen. Wie wäre dieser Begriff allgemein für algebraische Strukturen zu erklären?
5. Was versteht man unter einem Ideal eines Ringes?
6. Welche Aussagen sind im Homomorphiesatz für Ringe enthalten?
7. Es sind sämtliche homomorphen Bilder des Ringes $\mathbf{Z}$ der ganzen rationalen Zahlen (bis auf Isomorphie) anzugeben.
8. Was versteht man unter einem Hauptideal? Welche Ringe werden Hauptidealringe genannt? Was ist ein Primideal eines kommutativen Ringes R?
9. Was versteht man unter einem unzerlegbaren Element, was unter einem Primelement eines Integritätsbereiches I mit Einselement? Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Begriffen unzerlegbares Element und Primelement in I? Welcher Zusammenhang besteht, wenn I sogar Hauptidealring ist?
10. Welcher Zusammenhang besteht in einem Hauptidealring I zwischen Primidealen und Primelementen?
11. Welche Aussagen enthält a) der Satz vom größten gemeinsamen Teiler, b) der Satz von der eindeutigen Primelementzerlegung? In welchen Ringen gelten beide Sätze sicher?

Aufgaben

1. Man prüfe nach, daß die Menge der Restklassen modulo 10 bezüglich der Restklassenaddition und Restklassenmultiplikation einen kommutativen Ring bildet.

2. Es sei L ein Integritätsbereich mit Einselement $\bar{1}$ und I ein vom Nullring verschiedener Teilintegritätsbereich von L mit dem Einselement 1. Man zeige, daß dann $\bar{1} = 1$ ist.

3. Man bestimme das Zentrum des Ringes aller zweireihigen quadratischen Matrizen aus rationalen Zahlen.

4. Man zeige, daß die Menge $\{a_0 + a_1 \sqrt{2} : a_0 \in \mathbf{Z} \wedge a_1 \in \mathbf{Z}\}$ bezüglich der Addition und Multiplikation der reellen Zahlen einen Integritätsbereich I bildet, und bestimme dessen Einheiten.

   Hinweis: $a_0 + a_1 \sqrt{2}$ ist genau dann Einheit von I, wenn $a_0^2 - 2a_1^2 = \pm 1$ ist.

5. Man bestimme sämtliche Einheiten des Ringes $\mathbf{Z}\left[\sqrt{-3}\right]$ (vgl. MfL Bd. 3, 13.5.1.). In diesem Ring ist 2 ein Teiler des Produktes $\left(1 + \sqrt{-3}\right)\left(1 - \sqrt{-3}\right) = 4$. Man zeige, daß aber weder $1 + \sqrt{-3}$ noch $1 - \sqrt{-3}$ in $\mathbf{Z}\left[\sqrt{-3}\right]$ durch 2 teilbar ist.

   Lösung: $\mathbf{Z}\left[\sqrt{-3}\right]$ ist ein Teilintegritätsbereich des Körpers der komplexen Zahlen mit dem Einselement $1 + 0\sqrt{-3} = 1$. Jede von Null verschiedene Zahl $z = a + b\sqrt{-3}$ aus $\mathbf{Z}\left[\sqrt{-3}\right]$ hat mindestens den Betrag 1, weil $|z|^2 = a^2 + 3b^2 \geqq 1$ ist. Daher können nur solche Zahlen $a + b\sqrt{-3}$ $(a, b \in \mathbf{Z})$ Einheiten von $\mathbf{Z}\left[\sqrt{-3}\right]$ sein, deren Betrag 1 ist. Das sind nur die Zahlen 1 und -1. Sie sind auch tatsächlich Einheiten von $\mathbf{Z}\left[\sqrt{-3}\right]$.
   Wäre 2 in $\mathbf{Z}\left[\sqrt{-3}\right]$ Teiler von $1 + \sqrt{-3}$, so müßte es ganze Zahlen a und b geben, für die $2\left(a + b\sqrt{-3}\right) = 1 + \sqrt{-3}$, also $2a = 2b = 1$ ist.

6. Es sind sämtliche Einheiten des aus den Zahlen $a + b\sqrt{5}\,i$ $(a, b \in \mathbf{Z})$ bestehenden Teilrings des Körpers der komplexen Zahlen zu bestimmen.

7. Man zeige, daß die Matrizen der Form
$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad (a, b, c \in \mathbf{Z})$$
   bezüglich der Matrizenaddition und Multiplikation einen kommutativen Ring R bilden. Welche Matrizen sind Nullteiler dieses Ringes? Zu welchen Matrizen A liegt auch A^{-1} in R?

8. In einem Integritätsbereich I kann jede Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ $(a, b, c \in I;\ a \neq 0)$ höchstens zwei Lösungen haben.

9. Man bestimme sämtliche Lösungen der Gleichung $x^2 = -1$ im Schiefkörper der Quaternionen (vgl. MfL Bd. 3, 13.2.).

10. Unter Verwendung der Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ in der Menge der rationalen Zahlen $\mathbf{Q}$ werden in dem kartesischen Produkt
$$M = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} := \{(a, b) : a \in \mathbf{Q} \wedge b \in \mathbf{Q}\}$$

durch

$$(a, b) \dotplus (\bar{a}, \bar{b}) := (a + \bar{a}, b + \bar{b}),$$
$$(a, b) \circ (\bar{a}, \bar{b}) := (a\bar{a}, a\bar{b} + \bar{a}b),$$
$$(a, b) \otimes (\bar{a}, \bar{b}) := (a\bar{a} + \bar{a}b + b\bar{b}, a\bar{b} + b\bar{b})$$

$\big((a, b), (\bar{a}, \bar{b}) \in M\big)$ zweistellige Operationen $\dotplus$, $\circ$, $\otimes$ erklärt. Man beweise, daß $(M, \dotplus, \circ)$ ein kommutativer Ring ist, der einen zum Körper der rationalen Zahlen isomorphen Teilkörper enthält, und bestimme die Nullteiler dieses Ringes. $(1, 0)$ ist Einselement von $(M, \dotplus, \circ)$. Zu welchen Elementen von M gibt es (bezüglich der Multiplikation $\circ$) inverse Elemente im Ring? Schließlich zeige man, daß $(M, \dotplus, \otimes)$ kein Ring ist.

Lösung: Man erkennt sofort, daß $(M, \dotplus)$ eine abelsche Gruppe und $\circ$ eine kommutative Operation in M ist. Die Gültigkeit des Assoziativgesetzes für $\circ$ und des Distributivgesetzes für $\dotplus$ und $\circ$ kann durch Rechnung nachgewiesen werden.
Die Abbildung $f: a \mapsto (a, 0)$ $(a \in \mathbb{Q})$ ist ein Isomorphismus von $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ in $(M, \dotplus, \circ)$, denn es gilt für beliebige Elemente a, b aus $\mathbb{Q}$

$$f(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) \dotplus (b, 0) = f(a) \dotplus f(b),$$
$$f(a \cdot b) = (a \cdot b, 0) = (a, 0) \circ (b, 0) = f(a) \circ f(b).$$

Daher bilden die Elemente der Form $(a, 0)$ aus M einen zum Körper der rationalen Zahlen isomorphen Teilkörper von $(M, \dotplus, \circ)$. Das Element $(a, b) \in M$ ist genau dann Nullteiler von $(M, \dotplus, \circ)$, wenn $a = 0$ und $b \neq 0$ ist. Zu $(a, b) \in M$ existiert genau dann ein inverses Element in $(M, \dotplus, \circ)$, wenn $a \neq 0$ ist. In diesem Fall ist nämlich $(a, b) \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a^2}\right) = (1, 0)$.
In $(M, \dotplus, \otimes)$ gilt das Assoziativgesetz für die Operation $\otimes$ nicht:

$$(1, 1) \otimes [(2, 1) \otimes (1, 1)] = (11, 6), \quad [(1, 1) \otimes (2, 1)] \otimes (1, 1) = (9, 7).$$

11. Mit α, β, ζ seien die folgenden reellen bzw. komplexen Zahlen bezeichnet:

$$\zeta = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}, \quad \alpha = \sqrt[3]{2}, \quad \beta = \alpha\zeta.$$

a) Es ist nachzuweisen, daß die Mengen

$$R_1 = \{z_0 + z_1\zeta + z_2\zeta^2 : z_0 \in \mathbf{Z} \wedge z_1 \in \mathbf{Z} \wedge z_2 \in \mathbf{Z}\},$$
$$R_2 = \{a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 : a_0 \in \mathbf{Z} \wedge a_1 \in \mathbf{Z} \wedge a_2 \in \mathbf{Z}\},$$
$$R_3 = \{b_0 + b_1\beta + b_2\beta^2 : b_0 \in \mathbf{Z} \wedge b_1 \in \mathbf{Z} \wedge b_2 \in \mathbf{Z}\}$$

bezüglich der Addition und Multiplikation der reellen bzw. komplexen Zahlen Integritätsbereiche bilden.

b) Welche dieser drei Ringe sind zueinander isomorph? Man gebe Isomorphismen zwischen ihnen an.

c) Welche Automorphismen besitzt der Ring R_1?

12. Man beweise, daß der identische Automorphismus, der jedes Element eines Ringes auf sich abbildet, für sämtliche Restklassenringe modulo m $(m \in \mathbf{N}^*)$ und den Ring der ganzen Zahlen $\mathbf{Z}$ der einzige Automorphismus ist.

13. Es sei $\alpha = \sqrt[3]{2}$. Die Menge $R = \{a + b\alpha + c\alpha^2 : a \in \mathbf{Z} \wedge b \in \mathbf{Z} \wedge c \in \mathbf{Z}\}$ bildet bezüglich der Addition und Multiplikation der reellen Zahlen einen Integritätsbereich (vgl. Aufgabe 11). $[x]$ bezeichne diejenige Restklasse modulo 2, in der $x \in \mathbf{Z}$ liegt. Man zeige, daß

$$f : a + b\alpha + c\alpha^2 \mapsto \begin{pmatrix} [a] & [b] & [c] \\ [0] & [a] & [b] \\ [0] & [0] & [a] \end{pmatrix} \quad (a + b\alpha + c\alpha^2 \in R)$$

ein Homomorphismus von R auf einen Matrizenring $\bar{R}$ ist. (Als Operationen in $\bar{R}$ benutzt man die übliche Addition und Multiplikation der Matrizen, beachtet aber bei der Rechnung, daß die Matrixelemente Restklassen modulo 2 sind.) Man gebe den Kern von f, die Restklassen nach dem Kern und zu jeder Restklasse diejenige Matrix an, auf welche die Elemente der Restklasse bei dem Homomorphismus f abgebildet werden. Ist der Kern von f ein Hauptideal von R? Ist der Kern von f ein Primideal von R?

14. Im Ring $\mathbf{Z}$ der ganzen rationalen Zahlen bestimme man das mengenmäßig kleinste Ideal $\mathfrak{n}$, welches die Zahlen 546, 498 und 210 enthält, und gebe die Elemente des Restklassenringes $\mathbf{Z}/\mathfrak{n}$ an.

Lösung: Sämtliche Ideale von $\mathbf{Z}$ sind Hauptideale (vgl. MfL Bd. 3, 13.4.4.). Daher ist $\mathfrak{n} = (546 \sqcap 498 \sqcap 210) = (6)$. Die Elemente von $\mathbf{Z}/\mathfrak{n}$ sind die Restklassen (6), $(6) + 1$, $(6) + 2$, $(6) + 3$, $(6) + 4$, $(6) + 5$, und $\mathbf{Z}/\mathfrak{n}$ ist isomorph zum Ring der Restklassen modulo 6.

15. Man zeige, daß die Menge $\{x + y\sqrt{-2} : x \in \mathbf{Z} \wedge y \in \mathbf{Z}\}$ mit der Addition und Multiplikation der komplexen Zahlen einen euklidischen Ring $\mathbf{Z}[\sqrt{-2}]$ bildet. Welche Zahlen sind Einheiten dieses Ringes? Ist auch $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$ ein euklidischer Ring?

Lösung: Bezüglich der Addition bildet die angegebene Menge offensichtlich eine abelsche Gruppe. Wegen

$$\left(x + y\sqrt{-2}\right)\left(v + w\sqrt{-2}\right) + (xv - 2yw) + (yv + xw)\sqrt{-2} \quad (x, y, v, w \in \mathbf{Z})$$

ist auch das Produkt zweier Elemente der Menge wieder in der Menge enthalten. Deshalb bildet sie einen Teilintegritätsbereich des Körpers der komplexen Zahlen.
$1 + 0\sqrt{-2} = 1$ ist Einselement dieses Integritätsbereiches $\mathbf{Z}[\sqrt{-2}]$. Wie in Aufgabe 5 zeigt man, daß 1 und -1 die einzigen Einheiten von $\mathbf{Z}[\sqrt{-2}]$ sind.
Für beliebige Zahlen $b = x + y\sqrt{-2}$ und $a = v + w\sqrt{-2} \neq 0$ aus $\mathbf{Z}[\sqrt{-2}]$ ist

$$\frac{b}{a} = \frac{xv + 2yw}{v^2 + 2w^2} + \frac{yv - xw}{v^2 + 2w^2}\sqrt{-2},$$

und es gibt Zahlen $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$, für die

$$\left|\frac{xv + 2yw}{v^2 + 2w^2} - k_1\right| \leqq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \left|\frac{yv - xw}{v^2 + 2w^2} - k_2\right| \leqq \frac{1}{2}$$

gilt. Die Zahlen $q = k_1 + k_2\sqrt{-2}$ und $r = b - aq = a\left(\frac{b}{a} - q\right)$ liegen in $\mathbf{Z}[\sqrt{-2}]$.

Die Abbildung h: $x + y\sqrt{-2} \mapsto h(x + y\sqrt{-2}) := x^2 + 2y^2$ von $\mathbf{Z}[\sqrt{-2}]$ in $\mathbf{N}$ bildet jede Zahl aus $\mathbf{Z}[\sqrt{-2}]$ auf das Quadrat ihres Betrages ab. Genau dann ist $h(x + y\sqrt{-2}) = 0$, wenn $x + y\sqrt{-2} = 0$ ist. Es gilt die Ungleichung

$$h(r) = h\left(a\left(\frac{b}{a} - q\right)\right) = h(a)\left|\frac{b}{a} - q\right|^2 \leqq h(a)\left(\frac{1}{4} + 2\,\frac{1}{4}\right) < h(a).$$

Daher ist $\mathbf{Z}[\sqrt{-2}]$ ein euklidischer Ring.
Der Beweis läßt sich nicht auf den Ring $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$ übertragen, da die letzte Ungleichung in diesem Fall nicht mehr gilt. Tatsächlich ist $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$ kein euklidischer Ring, denn das in $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$ unzerlegbare Element 2 ist nach Aufgabe 5 kein Primelement. (Vgl. MfL Bd. 3, 13.5., Sätze 6 und 3.)

16. Es sind die größten gemeinsamen Teiler von 924, 780 und 315 in $\mathbf{Z}$ anzugeben und als Vielfachsumme dieser drei Zahlen darzustellen.

Lösung: Berechnung mit dem euklidischen Algorithmus:

$$\begin{aligned}
924 &= 1 \cdot 780 + 144,\\
780 &= 5 \cdot 144 + 60,\\
144 &= 2 \cdot 60 + 24,\\
60 &= 2 \cdot 24 + 12,\\
24 &= 2 \cdot 12.
\end{aligned}$$

Also ist $924 \sqcap 780 = 12$.

$$\begin{aligned}
315 &= 26 \cdot 12 + 3,\\
12 &= 4 \cdot 3.
\end{aligned}$$

Also ist $315 \sqcap 12 = 3$.
Daraus folgt $924 \sqcap 780 \sqcap 315 = 3$. Weil 1 und -1 die Einheiten des Ringes $\mathbf{Z}$ sind, ist auch -3 größter gemeinsamer Teiler der drei gegebenen Zahlen.
Vielfachsummendarstellung des größten gemeinsamen Teilers 3:

$$\begin{aligned}
3 &= 315 - 26(60 - 2 \cdot 24) = 315 - 26 \cdot 60 + 52 \cdot 24\\
&= 315 - 26 \cdot 60 + 52(144 - 2 \cdot 60) = 315 + 52 \cdot 144 - 130 \cdot 60\\
&= 315 + 52 \cdot 144 - 130(780 - 5 \cdot 144)\\
&= 315 - 130 \cdot 780 + 702 \cdot 144\\
&= 315 - 130 \cdot 780 + 702(924 - 1 \cdot 780)\\
&= 702 \cdot 924 - 832 \cdot 780 + 1 \cdot 315.
\end{aligned}$$

17. Man stelle die größten gemeinsamen Teiler der Zahlen 20 706, 51 170 und 66 045 in $\mathbf{Z}$ als Vielfachsummen dar.

18. Im Ring der Gaußschen ganzen komplexen Zahlen bestimme man die größten gemeinsamen Teiler der Elemente $2 + 4i$ und $5 + 5i$ und stelle sie als Vielfachsummen dar.

19 Man gebe die Primelementzerlegungen von $2 + 4i$ und $5 + 5i$ im Ring der Gaußschen ganzen komplexen Zahlen an.

20. Man zeige, daß die Menge aller rationalen Zahlen der Form $r = \dfrac{z}{2^n}$ $(z \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N})$

bezüglich der Addition und Multiplikation der rationalen Zahlen einen Integritätsbereich I bildet.

a) Was bedeutet Teilbarkeit in I?

b) Welche Zahlen sind Einheiten von I?

c) Es sind Primelemente von I anzugeben, die keine Primzahlen sind.

d) Gibt es eine Primzahl, die in I nicht Primelement ist?

21. Man bestimme den Quotientenkörper des Ringes der Gaußschen ganzen komplexen Zahlen.

22. Wieviel Körper aus genau zwei, drei und vier Elementen gibt es (bis auf Isomorphie)? Man stelle in jedem Fall die Additions- und Multiplikationstabellen auf.

Polynome

Kontrollfragen

1. Es sei I ein Integritätsbereich mit Einselement. Was versteht man unter einem bezüglich I transzendenten Element?
2. Wie kann die Adjunktion einer Unbestimmten x zu einem Integritätsbereich I mit Einselement konstruktiv ausgeführt werden?
3. Welche Elemente des Polynomringes $I[x]$ über einem Integritätsbereich I mit Einselement sind Einheiten von $I[x]$?
4. Es bezeichne I einen Integritätsbereich mit Einselement und L einen I umfassenden Integritätsbereich. Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Ring der ganzen rationalen Funktionen mit Koeffizienten aus I über dem Definitionsbereich L und dem Polynomring $I[x]$?
5. Welche Eigenschaften besitzt der Polynomring $R[x]$, wenn R a) ein Integritätsbereich mit Einselement, b) ein Integritätsbereich mit Einselement und eindeutiger Primelementzerlegung, c) ein Körper ist?
6. Es sei I ein Integritätsbereich mit Einselement. Wann nennt man ein Polynom aus $I[x]$ irreduzibel?
7. Es seien $I \subseteq L$ Integritätsbereiche mit Einselement. Wann heißt ein Element $\alpha \in L$ k-fache Nullstelle ($k \in \mathbf{N}^*$) eines Polynoms $f(x) \in I[x]$?
8. Wie kann man zu einem gegebenen Polynom $f(x) \in \mathbf{Q}[x]$ ein Polynom $g(x) \in \mathbf{Q}[x]$ berechnen, das dieselben Nullstellen besitzt wie $f(x)$, jede aber nur mit der Vielfachheit 1?
9. Was leistet die Lagrangesche Interpolationsformel? Wie lautet sie?
10. Welche Einzelschritte werden bei der Konstruktion einer einfachen transzendenten Erweiterung eines Körpers K ausgeführt? Wieviel solche Erweiterungen von K gibt es (bis auf Isomorphie)?

11. Wie erfolgt die Konstruktion einer einfachen algebraischen Erweiterung $K(\vartheta)$ eines gegebenen Körpers K? Kann man zu jedem Körper K eine einfache algebraische Erweiterung $K(\vartheta)$ konstruieren, die K echt umfaßt?
12. Was versteht man unter einer (bezüglich $\mathbf{Q}$) algebraischen Zahl, was unter einer transzendenten Zahl?
13. Man gebe die Definition und Beispiele für den Begriff „symmetrisches Polynom" an.
14. Was versteht man unter einem Zerfällungskörper eines Polynoms?
15. Welche Aussage wird als Fundamentalsatz der Algebra bezeichnet? Wie kann diese Aussage unter Verwendung des Begriffs „Zerfällungskörper" formuliert werden?
16. Wann heißt eine Gleichung der Form $a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ ($a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbf{N}^*$) auflösbar durch Radikale? Was besagt der Satz von Abel über die Auflösbarkeit solcher Gleichungen durch Radikale?

Aufgaben

1. Es bezeichne $\mathbf{Z}/(3)$ den Körper der Restklassen modulo 3.

   a) Wieviel verschiedene Funktionen über dem Definitionsbereich $\mathbf{Z}/(3)$ gibt es, deren Funktionswerte in $\mathbf{Z}/(3)$ liegen? Man zeige, daß sie alle ganze rationale Funktionen mit Koeffizienten aus $\mathbf{Z}/(3)$ sind.

   b) Wieviel verschiedene Polynome gibt es in $\mathbf{Z}/(3)\,[x]$, deren Grad höchstens 3 ist? (Das Nullpolynom sei Element dieser Menge von Polynomen.)

   c) Man bestimme den Kern des in MfL Bd. 3, 14.1., angegebenen Homomorphismus F von $\mathbf{Z}/(3)\,[x]$ auf den Ring der ganzen rationalen Funktionen mit Koeffizienten aus $\mathbf{Z}/(3)$ über dem Definitionsbereich $\mathbf{Z}/(3)$.

2. Man bestimme einen größten gemeinsamen Teiler der Polynome $x^5 - 2x^4 - x + 2$ und $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6$ und stelle ihn in $\mathbf{Q}[x]$ als Vielfachsumme dar.

3. Man bestimme in $\mathbf{Z}/(3)\,[x]$ einen größten gemeinsamen Teiler der Polynome

   $a(x) = [1]\,x^5 + [1]\,x^2 + [2]$ und $b(x) = [2]\,x^6 + [2]\,x^5 + [1]\,x + [1]$.

4. Es sei L ein den Körper K umfassender Körper. An Beispielen zeige man, daß ein in $K[x]$ irreduzibles Polynom zerlegbar sein kann, wenn es als Element von $L[x]$ aufgefaßt wird.

5. Welche Aussage macht der Satz von Gauss (vgl. MfL Bd. 3, 14.2.2.) für Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbf{Z}$? Insbesondere beweise man: Hat das Polynom

   $$f(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1x + a_0 \quad (m \in \mathbf{N}^*;\, a_{m-1}, \ldots, a_0 \in \mathbf{Z})$$

   eine Nullstelle $\alpha \in \mathbf{Q}$, so liegt α bereits in $\mathbf{Z}$.

6. Es sei I ein Integritätsbereich mit Einselement und habe die Charakteristik 0. Ferner bezeichne L einen Integritätsbereich, der Erweiterungsring von I ist. $\alpha \in L$ sei eine Nullstelle des vom Nullpolynom verschiedenen Polynoms $f(x)$ aus $I[x]$. Man beweise: Ist α eine $(k-1)$-fache Nullstelle von $f'(x)$, so ist α eine k-fache Nullstelle von $f(x)$ ($k \in \mathbf{N}^*$).

7. Es sei p eine Primzahl. Man gebe in $\mathbf{Z}/(p)\,[x]$ vom Nullpolynom verschiedene Polynome an, die an sämtlichen Stellen $\alpha \in \mathbf{Z}/(p)$ den Wert $[0]$ besitzen.

8. Man bestimme in $\mathbf{Z}[x]$ ein Polynom $g(x)$, das dieselben Nullstellen besitzt wie $f(x) = x^6 + x^4 - 8x^2 - 12$, jede aber nur mit der Vielfachheit 1. $f(x)$ ist jeweils als Produkt von Primpolynomen aus $\mathbf{Q}[x]$, $\mathbf{R}[x]$, $\mathbf{C}[x]$ darzustellen.

Lösung: (Vgl. MfL Bd. 3, 14.3.2. und 14.2.2., Satz 3.) $f'(x) = 6x^5 + 4x^3 - 16x$. Berechnung von $f(x) \sqcap f'(x)$ nach dem Euklidischen Algorithmus:

$$\begin{aligned}
x^6 + x^4 - 8x^2 - 12 &= (6x^5 + 4x^3 - 16x)\,\frac{1}{6}\,x + \frac{1}{3}\,(x^4 - 16x^2 - 36),\\
6x^5 + 4x^3 - 16x &= \frac{1}{3}\,(x^4 - 16x^2 - 36)\,18x + 100(x^3 + 2x),\\
x^4 - 16x^2 - 36 &= (x^3 + 2x)\,x - 18(x^2 + 2),\\
x^3 + 2x &= (x^2 + 2)\,x.
\end{aligned}$$

Also ist $f(x) \sqcap f'(x) = x^2 + 2$. Daher besitzt $f(x)$ sicher die Nullstellen $i\sqrt{2}$ und $-i\sqrt{2}$ in $\mathbf{C}$. Das Polynom

$$g(x) = \frac{f(x)}{f(x) \sqcap f'(x)} = \frac{x^6 + x^4 - 8x^2 - 12}{x^2 + 2} = x^4 - x^2 - 6$$

hat dieselben Nullstellen wie $f(x)$, jede aber nur mit der Vielfachheit 1. Insbesondere sind $i\sqrt{2}$ und $-i\sqrt{2}$ Nullstellen von $g(x)$. Daher ist $g(x)$ teilbar durch $x^2 + 2$, d.h., es gilt $g(x) = (x^2 - 3)\,(x^2 + 2)$. Dann ist $f(x) = (x^2 - 3)\,(x^2 + 2)\,(x^2 + 2)$. Die Faktoren sind Primpolynome von $\mathbf{Q}[x]$. In $\mathbf{R}[x]$ lautet die Darstellung von $f(x)$ als Produkt von Primpolynomen

$$f(x) = \left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)(x^2 + 2)^2.$$

In $\mathbf{C}[x]$ ist $f(x)$ dann folgendermaßen als Produkt von Primpolynomen darstellbar:

$$f(x) = \left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - i\sqrt{2}\right)^2\left(x + i\sqrt{2}\right)^2.$$

9. Hat das Polynom $f(x) = x^6 - 3x^4 + 4$ mehrfache Nullstellen? Gegebenenfalls bestimme man ein Polynom, das genau dieselben Nullstellen wie $f(x)$ besitzt, aber jede mit der Vielfachheit 1.

10. Ein Polynom mit Koeffizienten aus einem Ring mit Nullteilern kann mehr Nullstellen besitzen, als sein Grad beträgt. Als Beispiel gebe man etwa ein quadratisches Polynom mit Koeffizienten aus $\mathbf{Z}/(6)$ an, das wenigstens drei Nullstellen in diesem Ring besitzt.

11. Für jede Nullstelle von $f(x) = [1]\,x^7 + [1]\,x^6 + [2]\,x + [2]$ aus $\mathbf{Z}/(3)\,[x]$ bestimme man die Vielfachheit. Anschließend berechne man $g(x) = \dfrac{f(x)}{f(x) \sqcap f'(x)}$

und vergleiche das Ergebnis mit der in MfL Bd. 3, 14.3.2., für Polynome mit Koeffizienten aus einem Körper der Charakteristik 0 angegebenen Aussage.

12. Man stelle das Polynom $6x^5 - 12x^4 - 6x + 12$ als ein Produkt von Primelementen aus $\mathbf{Z}[x]$ dar.

13. Man zerlege die Polynome $f(x) = x^6 - 3x^4 + 4$ und $g(x) = x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 8x^2 + x - 4$ in Produkte von Primpolynomen aus $\mathbf{Q}[x]$ und gebe sämtliche Nullstellen beider Polynome an.

14. Welches Polynom $f(x) \in \mathbf{Q}[x]$ erfüllt die Bedingungen $f(-3) = -63$, $f(-1) = -1$, $f(1) = 13$, $f(3) = 75$ und Grad $f(x) \leqq 3$?

Lösung: Nach der Lagrangeschen Interpolationsformel erhält man

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(-3+1)(-3-1)(-3-3)}(-63) + \frac{(x+3)(x-1)(x-3)}{(-1+3)(-1-1)(-1-3)}(-1)$$
$$+ \frac{(x+3)(x+1)(x-3)}{(1+3)(1+1)(1-3)}13 + \frac{(x+3)(x+1)(x-1)}{(3+3)(3+1)(3-1)}75$$
$$= 2x^3 + 5x + 6.$$

15. Man bestimme in $\mathbf{Q}[x]$ dasjenige Polynom $f(x)$ mit Grad $f(x) \leqq 4$, für welches $f(-2) = 16$, $f(-1) = 2$, $f(0) = 0$, $f(1) = 4$, $f(2) = 32$ gilt.

16. Man bestimme in $\mathbf{R}[x]$ diejenigen Polynome $f_1(x)$ vom Grade 1 und $f_2(x)$ vom Grade 2, für die $f_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$, $f_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = f_1\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$ und $f_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = f_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ ist. Wie groß sind $f_1\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ und $f_2\left(\frac{2\pi}{5}\right)$? Man vergleiche diese durch lineare bzw. quadratische Interpolation gewonnenen Zahlen mit dem Wert für $\sin\frac{2\pi}{5}$ aus dem in der Schule verwendeten Tafelwerk.

17. Mit Hilfe des Verfahrens von Kronecker beweise man, daß das Polynom $f(x) = x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 10x + 5$ in $\mathbf{Z}[x]$ irreduzibel ist.

Lösung: Es ist $f(-2) = 1$, $f(-1) = 1$, $f(0) = 5$. Wenn $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ das Produkt zweier Polynome $g(x)$ und $h(x)$ aus $\mathbf{Z}[x]$ ist, kann o.B.d.A. Grad $g(x) \leqq 2$ und $g(0) \geqq 0$ angenommen werden. Weil $g(\alpha) \mid f(\alpha)$ für jedes $\alpha \in \mathbf{Z}$ ist, gibt es nur acht Möglichkeiten für das Zahlentripel

(*) $g(-2) = a,\quad g(-1) = b,\quad g(0) = c.$

Da es genau ein Polynom $g(x)$ aus $\mathbf{Q}[x]$ gibt, für das (*) gilt und Grad $g(x) \leqq 2$ ist, nämlich

$$g(x) = \frac{(x+1)x}{(-2+1)(-2)}a + \frac{(x+2)x}{(-1+2)(-1)}b + \frac{(x+2)(x+1)}{2\cdot 1}c$$
$$= \left(\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2}\right)x^2 + \left(\frac{a}{2} - 2b + \frac{3c}{2}\right)x + c,$$

kommt für $g(x)$ nur eines der folgenden acht Polynome in Betracht:

	a	b	c	$g(x)$
(1)	1	1	1	1
(2)	1	1	5	$2x^2 + 6x + 5$
(3)	1	-1	1	$2x^2 + 4x + 1$
(4)	1	-1	5	$4x^2 + 10x + 5$
(5)	-1	1	1	$-x^2 - x + 1$
(6)	-1	1	5	$x^2 + 5x + 5$
(7)	-1	-1	1	$x^2 + 3x + 1$
(8)	-1	-1	5	$3x^2 + 9x + 5$

Man rechnet sofort nach, daß keines dieser von 1 verschiedenen Polynome in $\mathbb{Q}[x]$ (und erst recht nicht in $\mathbb{Z}[x]$) Teiler von $f(x)$ sein kann. Beispielsweise ist

$$x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 10x + 5 = (2x^2 + 6x + 5)\left(\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{5}{4}\right).$$

Daher muß $f(x)$ in $\mathbb{Z}[x]$ irreduzibel sein.

18. Mit Hilfe des Verfahrens von Kronecker beweise man, daß die Polynome $f_1(x) = x^2 - 2x + 2$ und $f_2(x) = x^5 - x^2 + 1$ in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel sind.

19. Die Elemente des Restklassenkörpers $K = \mathbb{Z}/(2)$ seien mit $[0]$ und $[1]$ bezeichnet. Das Polynom $p(x) = [1]\,x^2 + [1]\,x + [1]$ ist in $K[x]$ irreduzibel. Man konstruiere $K[x]/\bigl(p(x)\bigr)$ und stelle für diese algebraische Erweiterung von K die Additions- und Multiplikationstabellen auf (vgl. S. 146, Aufgabe 22).

20. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Koeffizienten und den Nullstellen eines Polynoms $f(x)$? Die Aussage ist am Beispiel der Polynome $f(x) = x^4 - 1$ und $g(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$ aus $\mathbb{Z}[x]$ zu überprüfen.

III. Analysis

Einige grundlegende Begriffsbildungen der Analysis

Kontrollfragen

1. Wie lassen sich die reellen Zahlen als stetiger archimedisch geordneter Körper charakterisieren?
2. Wie lassen sich die Mengen $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ und $\mathbf{Q}$ als Teilmengen der Menge der reellen Zahlen charakterisieren?
3. Es sind die wichtigsten Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen anzugeben.
4. Welche Arten von Intervallen gibt es?
5. Wie sind die Begriffe obere (untere) Schranke, nach oben (unten) beschränkt, Maximum (Minimum), Supremum (Infimum) definiert? Man gebe Beispiele an.
6. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Begriffen obere (untere) Schranke, Maximum (Minimum) und Supremum (Infimum)?
7. Man klassifiziere die nach oben (unten) beschränkten Mengen rationaler bzw. reeller Zahlen bezüglich ihrer oberen (unteren) Schranken.
8. Was versteht man unter dem „größten Ganzen" einer reellen Zahl?
9. Wie ist der absolute Betrag einer reellen Zahl definiert? Welche Rechenregeln für absolute Beträge gibt es?
10. Wie kann man die komplexen Zahlen als einen Körper charakterisieren? Welche Beziehung besteht zwischen dem Bereich der reellen Zahlen und dem Bereich der komplexen Zahlen? Kann man im Körper $\mathbf{C}$ der komplexen Zahlen eine Ordnungsrelation erklären, so daß $\mathbf{C}$ damit ein geordneter Körper wird?
11. Was versteht man unter der Basisdarstellung einer komplexen Zahl? Es sind die Regeln für das Rechnen mit komplexen Zahlen unter Verwendung der Basisdarstellung anzugeben.
12. Wie ist der absolute Betrag einer komplexen Zahl definiert? Wie lauten die wichtigsten Regeln für das Rechnen mit Beträgen?
13. Was versteht man unter der zur komplexen Zahl z konjugiert komplexen Zahl $\bar{z}$? Wie lauten die Rechenregeln für den Übergang zur konjugiert komplexen Zahl?
14. Lassen sich die im Bereich der reellen Zahlen eingeführten Begriffe obere (untere) Schranke, Maximum (Minimum), Supremum (Infimum) auf den Bereich der komplexen Zahlen übertragen?
15. Wie kann man die komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene veranschaulichen? Wie kann man den Betrag einer komplexen Zahl geometrisch deuten?
16. Was versteht man unter einer Funktion von n Variablen ($n \in \mathbf{N}$, $n \geqq 1$)? Wie

sind die Begriffe Definitionsbereich und Wertebereich einer Funktion, Umkehrkorrespondenz, Umkehrfunktion, Einschränkung und Fortsetzung einer Funktion definiert?

17. Wie ist eine Folge in einer Menge M definiert? Was versteht man unter einer reellen (komplexen) Zahlenfolge?
18. Wie sind die folgenden Eigenschaften reeller Funktionen erklärt: nach unten (oben) beschränkt, beschränkt, periodisch, gerade, ungerade, monoton wachsend (fallend), streng monoton wachsend (fallend)? Welche dieser Eigenschaften bleiben für reell- (komplex-)wertige Funktionen sinnvoll?
19. Wie lauten die Definitionen folgender Verknüpfungen von reellwertigen bzw. komplexwertigen Funktionen: Zusammensetzung, Vielfaches, Summe, Differenz, Produkt und Quotient?
20. Man nenne Kriterien für das Vorliegen einer umkehrbar eindeutigen Funktion.
21. Was läßt sich über die Umkehrfunktion einer streng monoton wachsenden (fallenden) reellen Funktion bezüglich der Monotonie aussagen?
22. Was versteht man unter einer reellen (komplexen) ganzrationalen bzw. rationalen Funktion?
23. Man gebe je ein Beispiel einer Funktion an, die algebraisch bzw. nicht algebraisch ist.
24. Wie lautet die Definition des Begriffes der Potenz a^x für $x \in \mathbf{N}$, $x \in \dot{\mathbf{Z}}$, $x \in \mathbf{Q}_+$, $x \in \mathbf{Q}$? Welche Basen sind jeweils zulässig?
    Man gehe auf die Existenz der n-ten Wurzel aus einer nichtnegativen reellen Zahl ein.
25. Welche Eigenschaften hat die Funktion $f\colon r \mapsto a^r$ ($r \in \mathbf{Q}$, $a > 0$)?
26. Unter welchen Voraussetzungen kann eine streng monotone Funktion, deren Definitionsbereich nur aus einer Teilmenge der Punkte eines Intervalls besteht, auf genau eine Weise zu einer auf dem ganzen Intervall definierten streng monotonen Funktion fortgesetzt werden?
27. Wie ist die Exponentialfunktion zur Basis a definiert? Welches sind die wichtigsten Eigenschaften dieser Funktion (Definitionsbereich, Wertebereich, Monotonieeigenschaften, Funktionalgleichung)?
28. Wie ist die Logarithmusfunktion zur Basis a definiert? Welche Eigenschaften besitzt die Logarithmusfunktion?
29. Man gebe die Funktionalgleichung der Logarithmusfunktion und deren Bedeutung an. Es sind weitere Logarithmen- und Potenzgesetze zu formulieren.
30. Was versteht man unter dem p-dimensionalen euklidischen Raum $\mathbf{R}_p$?
31. Was versteht man unter einem metrischen Raum?
32. Welche Begriffe können in metrischen Räumen mit Hilfe des Abstandsbegriffes definiert werden?
33. Welche Eigenschaften besitzt die Norm eines Elementes x aus $\mathbf{R}_p$?

34. Wie lautet die Schwarzsche Ungleichung? Wie lautet die Dreiecksungleichung?
35. Wie können die Koordinaten eines Punktes $x \in \mathbf{R}_p$ mit Hilfe der Norm und die Norm mit Hilfe der Koordinaten abgeschätzt werden?
36. Wie sind die Begriffe Verbindungsstrecke zweier Punkte, konvexe Punktmenge, sternförmige Punktmenge definiert?
37. Mit welcher Metrik wird die Menge der reellen Zahlen bzw. der euklidische Raum $\mathbf{R}_p$ ein metrischer Raum?
38. Wie sind die Begriffe ε-Umgebung, punktierte ε-Umgebung, Durchmesser einer Menge, beschränkte Menge im euklidischen Raum $\mathbf{R}_p$ definiert?
39. Wie sind die Begriffe innerer Punkt, äußerer Punkt, Begrenzungspunkt, Häufungspunkt, isolierter Punkt einer Menge im euklidischen Raum $\mathbf{R}_p$ definiert? Man erläutere diese Begriffe durch Beispiele.
    Was versteht man unter int M, ext M?
40. Was versteht man unter einer offenen bzw. abgeschlossenen Menge im Raum $\mathbf{R}_p$? Man gebe je ein Beispiel für eine offene Menge, für eine abgeschlossene Menge und eine Menge, die weder abgeschlossen noch offen ist.
41. Was versteht man unter einem Gebiet im euklidischen Raum $\mathbf{R}_p$?

Aufgaben

1. Man beweise die Ungleichung $\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{n+\nu}\right)^2 < \frac{1}{2}$.

   Beweis: Nach der Schwarzschen Ungleichung gilt
   $$\left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{n+\nu}\right)^2 \leqq n \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(n+\nu)^2}.$$
   Weiterhin gelten die Beziehungen
   $$\begin{aligned} n \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(n+\nu)^2} &< n \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(n+\nu-1)(n+\nu)} = n \sum_{\nu=1}^{n} \left[\frac{1}{n+\nu-1} - \frac{1}{n+\nu}\right] \\ &= n \left[\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{n+\nu-1} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{n+\nu}\right] \\ &= n \left[\frac{1}{n} + \sum_{\nu=2}^{n} \frac{1}{n+\nu-1} - \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{n+\nu} - \frac{1}{2n}\right] \\ &= n \left[\frac{1}{n} + \sum_{\nu=2}^{n} \frac{1}{n+\nu-1} - \sum_{\nu=2}^{n} \frac{1}{n+\nu-1} - \frac{1}{2n}\right] = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. Man ermittle alle reellen Zahlen x, für die

   a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} > \dfrac{2}{x+\frac{1}{2}}$, b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2}{x+\frac{1}{2}}$, c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} < \dfrac{2}{x+\frac{1}{2}}$

   gilt.

Lösung: Die Lösung der Aufgabe ist der Untersuchung äquivalent, wann der Ausdruck

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+1)}$$

positiv, gleich Null bzw. negativ ist. Der Ausdruck ist nur für $x \neq 0, x \neq -\frac{1}{2}$ und $x \neq -1$ definiert und wird für keinen Wert von x gleich Null, also gilt b) für keinen Wert von x. Der Ausdruck ist genau dann positiv bzw. negativ, wenn der Nenner positiv bzw. negativ ist. Es gilt $2x\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+1) > 0$ genau dann, wenn 1. $x > 0$ oder 2. $x > -1$ und $x < -\frac{1}{2}$ ist, d. h., a) gilt für alle x mit

$$-1 < x < -\frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad 0 < x < +\infty.$$

Es gilt $2x\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+1) < 0$ genau dann, wenn 1. $x < -1$ oder 2. $x < 0$ und $x > -\frac{1}{2}$ ist, d. h., c) ist für alle x aus den Intervallen $-\infty < x < -1$ oder $-\frac{1}{2} < x < 0$ erfüllt.

3. Für welche reellen Zahlen besteht die Ungleichung $|x-2| < |x-3|$?

Hinweis: Man quadriere die Ungleichung oder wende Fallunterscheidung an.

4. Aus $b = \dfrac{a}{1+|a|}$ folgt $|b| < 1$ und $a = \dfrac{b}{1-|b|}$ (Beweis durch Fallunterscheidung).

5. Man beweise folgende Ungleichungen:

a) $\prod\limits_{\nu=1}^{n}(1-a_\nu) > 1 - \sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu \quad (n \geqq 2, 0 < a_\nu < 1$ für $\nu = 1, 2, \ldots, n)$,

b) $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \dfrac{1}{\nu(\nu+1)} < 1$, c) $2^n > n$, d) $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \dfrac{1}{\nu^2} < 2$.

Hinweise: Man beweise a) durch vollständige Induktion. Bei b) beachte man, daß $\dfrac{1}{\nu(\nu+1)} = \dfrac{1}{\nu} - \dfrac{1}{\nu+1}$ gilt. Die Aufgabe c) kann mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes bzw. durch vollständige Induktion bewiesen werden. Die Aufgabe d) kann durch eine Abschätzung unter Zuhilfenahme von b) bewiesen werden.

6. Für alle reellen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gilt $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right| \leqq \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|$.

7. Man beweise, daß für positive reelle Zahlen a und b stets $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geqq 2$ ist.

8. Man beweise die verallgemeinerte Bernoullische Ungleichung: Es seien a_0, $a_1, \ldots, a_n$ reelle Zahlen mit $a_i > -1$ für $i = 0, 1, \ldots, n$. Ferner gelte $a_j \cdot a_k > 0$ für $j, k = 0, \ldots, n$. Dann gilt $\prod\limits_{i=0}^{n}(1+a_i) \geqq 1 + \sum\limits_{i=0}^{n} a_i$.

9. Für welche reellen Zahlen a, b ist $\dfrac{a^3+b^3}{2} \geqq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$?

10. Man ermittle alle ganzzahligen Paare (x, y), für die $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{2}$ und $x > 2$, $y > 2$ gilt.

11. Für alle reellen Zahlen a, b und t mit $a < b$, $0 < t < 1$ gilt $a < ta + (1 - t)\, b < b$.

12. Man ermittle alle reellen Zahlen, für die

a) $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} > 1$, b) $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} = 1$, c) $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} < 1$

gilt.

13. Man zeige, daß die Menge $M = \{x : x \in \mathbf{Q}_+ \wedge x^2 > 2\}$ kein Minimum besitzt.

Beweis: Wir werden zeigen, daß es zu jedem $r \in M$ ein $r' \in M$ gibt, so daß $r' < r$ ist. Es sei $r \in M$ beliebig, d. h. $r \in \mathbf{Q}_+$ und $r^2 > 2$. Wir zeigen nun, daß für natürliche Zahlen n mit $n > \frac{2r}{r^2 - 2}$ stets $\left(r - \frac{1}{n}\right)^2 > 2$ gilt. Nach dem Archimedischen Axiom gibt es mindestens eine derartige natürliche Zahl. Es sei also $n > \frac{2r}{r^2 - 2}$. Dann folgt $r^2 - 2\frac{r}{n} > 2$. Wegen $r^2 - 2\frac{r}{n} + \frac{1}{n^2} > r^2 - 2\frac{r}{n}$ ist $\left(r - \frac{1}{n}\right)^2 = r^2 - 2\frac{r}{n} + \frac{1}{n^2} > 2$; $r - \frac{1}{n}$ ist ein Element von M, da $r - \frac{1}{n} > 0$ ist $\left(n \text{ ist mindestens } 1, \text{ weil } \frac{2r}{r^2 - 2} > 0\right)$. Andererseits ist $r - \frac{1}{n} < r$. Setzen wir $r' = r - \frac{1}{n}$, so sind die Bedingungen erfüllt.

14. Es seien M und N nichtleere nach oben beschränkte Mengen reeller Zahlen. Dann gilt $\sup (M \cup N) = \max \{\sup M, \sup N\}$.

15. Es sei $\inf M = h$ und h_1 sei untere Schranke von M. Dann gilt $h_1 \leqq h$.

16. Jede nichtleere nach unten beschränkte Menge M besitzt eine größte untere Schranke.

Hinweis; Die Menge $M^* := \{x : -x \in M\}$ liegt auf der Zahlengeraden spiegelbildlich zu M bezüglich 0. Auf diese Menge wende man das Grundgesetz der Stetigkeit an.

17. Es seien M und N nichtleere nach unten beschränkte Mengen reeller Zahlen. Dann ist die Menge $M \cup N$ nach unten beschränkt, und es gilt $\inf (M \cup N) = \min \{\inf M, \inf N\}$.

18. Es sei M eine beschränkte Zahlenmenge und $N := \{-x : x \in M\}$. Dann gilt $\sup N = -\inf M$ und $\inf N = -\sup M$.

19. Man beweise, daß für alle reellen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und für alle reellen Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_n$

$$\max \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n\}$$
$$\leqq \max \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} + \max \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$$

gilt.

20. Man zeige, däß die Menge $M = \{x : x \in \mathbb{Q}_+ \wedge x^2 < 2\}$ kein Maximum besitzt.

21. Man beweise:

a) $\sup\,]a, b[= b$, $\inf\,]a, b[= a$.

b) Für $M = \left\{x : x = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \wedge n \in \mathbb{N}^*\right\}$ gilt $\sup M = \max M = \frac{1}{2}$, $\inf M = 0$.

c) Für $M = \left\{x : x = \frac{1}{n} \wedge n \in \mathbb{N}^*\right\}$ gilt $\inf M = 0$.

22. Es ist $|x - a| \leqq \varepsilon$ genau dann, wenn $a - \varepsilon \leqq x \leqq a + \varepsilon$ ist.

Beweis: Es sei $|x - a| \leqq \varepsilon$. Wegen $\pm(x - a) \leqq |x - a|$ ist $\pm(x - a) \leqq \varepsilon$. Aus $-(x - a) \leqq \varepsilon$ folgt $a - \varepsilon \leqq x$. Aus $x - a \leqq \varepsilon$ folgt $x \leqq a + \varepsilon$, d. h., es ist $a - \varepsilon \leqq x \leqq a + \varepsilon$. Umgekehrt sei $a - \varepsilon \leqq x \leqq a + \varepsilon$. Dann ist $a - x \leqq \varepsilon$ und $x - a \leqq \varepsilon$. Aus $\pm(x - a) \leqq \varepsilon$ folgt aber $|x - a| \leqq \varepsilon$.

23. Man veranschauliche die Relation

$$R = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R} \wedge |x| + |y| \leqq 1\} \text{ in der } x,y\text{-Ebene.}$$

Lösung:

1. $x \geqq 0$ und $y \geqq 0$. Dann folgt $x + y \leqq 1$.
2. $x \geqq 0$ und $y \leqq 0$. Dann folgt $x - y \leqq 1$.
3. $x \leqq 0$ und $y \leqq 0$. Dann folgt $-x - y \leqq 1$.
4. $x \leqq 0$ und $y \geqq 0$. Dann folgt $-x + y \leqq 1$.

Offenbar ergibt sich als geometrische Veranschaulichung das Innere und der Rand des Quadrates mit den Eckpunkten $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ und $(0, -1)$.

24. Für alle komplexen Zahlen z gilt

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|) \leqq |z| \leqq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|.$$

Lösung: Es sei $z = x + iy$, also $\mathrm{Re}\, z = x$ und $\mathrm{Im}\, z = y$. Stets gilt $(|x| - |y|)^2 \geqq 0$. Daraus folgt $2|x|\,|y| \leqq x^2 + y^2$ und

$$(|x| + |y|)^2 = x^2 + 2|x|\,|y| + y^2 \leqq 2(x^2 + y^2).$$

Durch Wurzelziehen ergibt sich $|x| + |y| = |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| \leqq \sqrt{2}\,|z|$, also

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|) \leqq |z|.$$

Damit ist die erste der beiden Behauptungen bewiesen. Die zweite Behauptung wird folgendermaßen bewiesen: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $2|x|\,|y| \geqq 0$. Durch Addition von x^2 und y^2 ergibt sich $x^2 + 2|x|\,|y| + y^2 \geqq x^2 + y^2$, also $(|x| + |y|)^2 \geqq x^2 + y^2$. Schließlich erhalten wir

$$|x| + |y| = |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| \geqq |z|.$$

25. Man beweise folgende Rechenregeln für komplexe Zahlen:

a) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,

c) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0)$, d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0)$,

e) $|z_1 \pm z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$, f) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

26. Wo liegen die Zahlen z in der Gaußschen Zahlenebene, für die

a) $|z + 3| \leqq 2$, b) $\left|\frac{z - z_1}{z - z_2}\right| = 1$, c) $\operatorname{Re} z \geqq \frac{1}{2}$, d) $\operatorname{Re}(z^2) = a$ (reell)

gilt.

27. Es seien z_0, z_1, z_2 Punkte in der Gaußschen Zahlenebene, für die $z_0 + z_1 + z_2 = 0$ und $|z_0| = |z_1| = |z_2| = 1$ gilt. Man zeige, daß z_0, z_1, z_2 die Ecken eines dem Einheitskreis einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks bilden.

28. Es sei z eine von 0 verschiedene komplexe Zahl. Welche komplexe Zahl entspricht dem Spiegelbild von z a) am Nullpunkt, b) an der Achse des Reellen, c) an der Achse des Imaginären, d) an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten, c) an der Winkelhalbierenden des zweiten Quadranten?

29. Wo liegen alle Zahlen z in der Gaußschen Zahlenebene, für die $|z - 2| > |2z - 1|$ gilt?

Lösung: Wir werden zeigen, daß

$$\{z : z \in \mathbf{C} \wedge |z - 2| > |2z - 1|\} = \{z : z \in \mathbf{C} \wedge |z| < 1\}$$

ist, d. h., die Punkte z bilden das Innere des Einheitskreises. Die auf der linken Seite der obigen Gleichung stehende Menge ist nicht leer, da z. B. $z = \frac{1}{2}$ aus dieser Menge ist. Für $z \in \mathbf{C}$ gilt $|z - 2| > |2z - 1|$ genau dann, wenn $|z - 2|^2 > |2z - 1|^2$ bzw.

$$(z - 2)\,(\overline{z - 2}) > (2z - 1)\,(\overline{2z - 1})$$

ist. Durch elementare Umformungen der beiden Seiten der Ungleichung kommen wir zu der äquivalenten Ungleichung $z \cdot \bar{z} - 2(z + \bar{z}) + 4 > 4z \cdot \bar{z} - 2(z + \bar{z}) + 1$ bzw. zu $z \cdot \bar{z} < 1$ oder $|z| < 1$. Damit ist die Gleichheit der beiden Mengen bewiesen.

30. Man ermittle alle komplexen Zahlen z mit $z^3 = i$.

Lösung: Es sei $z = a + ib \quad (a, b \in \mathbf{R})$ und

$$z^3 = (a + bi)^3 = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - ib^3 = i.$$

Hieraus folgt $a(a^2 - 3b^2) = 0, \quad b(3a^2 - b^2) = 1$.

Fall 1: Es ist $a = 0$. Dann ist $-b^3 = 1$, und dies tritt nur für $b = -1$ ein. $z_1 = -i$ ist ein Zahl mit $z_1^3 = i$.

Fall 2: Es ist $a \neq 0$. Dann ist $a^2 - 3b^2 = 0$, und aus der zweiten Gleichung folgt $8b^3 = 1$, $b = \frac{1}{2}$. Für a ergibt sich $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ oder $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Somit ist $z_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$, $z_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$, und es gilt $z_2^3 = z_3^3 = i$.

31.* Wann liegen drei Punkte $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ auf einer Geraden?

Hinweis: Man betrachte den Quotienten $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$.

32. Ist $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ eine Gleichung mit reellen Koeffizienten a_i, so ist mit jeder komplexen Zahl $z = a + bi$ auch die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z} = a - bi$ Lösung dieser Gleichung.

Hinweis: Durch die Zuordnung $z \to \bar{z}$ entsteht ein Automorphismus des Körpers der komplexen Zahlen.

33. Sind a, b, c komplexe Zahlen mit $a \neq 0$, so besitzt die Gleichung $az^2 + bz + c = 0$ im Bereich der komplexen Zahlen im Fall $b^2 = 4ac$ genau eine und im Fall $b^2 \neq 4ac$ genau zwei verschiedene Lösungen.

Hinweis: Man gehe zu der äquivalenten Gleichung $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ über und schließe durch Fallunterscheidung weiter.

34. Im Körper $\mathbf{C}$ der komplexen Zahlen kann man keine Ordnungsrelation erklären, so daß $\mathbf{C}$ damit ein geordneter Körper wird.

Hinweis: Man führe den Beweis indirekt.

35. Man bestimme den (größtmöglichen) Definitionsbereich $D(f)$ und den Wertebereich $W(f)$ der reellen Funktion $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Lösung: Die Bestimmung des Definitionsbereiches von f ist gleichbedeutend mit der Frage nach der Menge der reellen Zahlen x, für die $1 - x^2 > 0$ ist. Offensichtlich ist $D(f) =]\!]-1, +1[\![$.
Zur Bestimmung des Wertebereiches $W(f)$ ist zu untersuchen, für welche Werte $a \in \mathbf{R}$ die Gleichung $a = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ eine Lösung besitzt. Wenn es eine Zahl x_a gibt mit $a = \dfrac{x_a}{\sqrt{1 - x^2}}$, dann folgt $a^2 = \dfrac{x_a^2}{1 - x_a^2}$. Aus der letzten Gleichung ergeben sich folgende Werte für x_a:

$$x_a = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} \quad \text{und} \quad x_a = \frac{-a}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Durch Einsetzen der für x_a erhaltenen Werte in die Ausgangsgleichung erkennt man, daß nur $x_a = \dfrac{a}{\sqrt{1 + a^2}}$ Lösung ist. Wegen $-1 < x_a < 1$ gilt $x_a \in D(f)$ für alle reellen Zahlen a, und es ist $f(x_a) = a$. Damit ergibt sich $W(f) = N$.

36. Man untersuche, ob die Funktion $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ in $]\!]-1, +1[\![$ monoton ist.

Lösung: Für alle $0 \leq x < 1$ ist $f(x) \geq 0$, und für alle $-1 < x \leq 0$ ist $f(x) \leq 0$. Daher erhält man aus $x_1 < x_2$ mit $x_1 < 0$ und $x_2 > 0$

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Ist nun $0 \leq x_1 < x_2 < 1$, so folgt

$$0 \leq x_1^2 < x_2^2 < 1, \quad -1 \leq x_1^2 - 1 < x_2^2 - 1 < 0, \quad 1 \geq 1 - x_1^2 > 1 - x_2^2 > 0,$$

$$1 \geq \sqrt{1 - x_1^2} > \sqrt{1 - x_2^2} > 0, \quad 0 < \frac{1}{\sqrt{1 - x_1^2}} < \frac{1}{\sqrt{1 - x_2^2}}, \quad 0 < \frac{x_1}{\sqrt{1 - x_1^2}} < \frac{x_2}{\sqrt{1 - x_2^2}},$$

d. h. $f(x_1) < f(x_2)$. Schließlich gelte $-1 < x_1 < x_2 \leqq 0$. Dann ist $0 \leqq -x_2 < -x_1 < 1$, und aus dem Bewiesenen folgt $0 < \frac{-x_2}{\sqrt{1-x_2^2}} < \frac{-x_1}{\sqrt{1-x_1^2}}$, d. h., es ist

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2}} < \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2^2}}.$$

Die betrachtete Funktion f ist in $]\!]-1, +1[\![$ streng monoton wachsend.

37. Für positive reelle Zahlen a, b, c mit $a, b \neq 1$ gilt die Identität $\log_a b \log_b c = \log_a c$.

Beweis: Es sei $x = \log_b c$ und $y = \log_a c$. Dann ist $c = b^x = a^y$. Wir logarithmieren beide Seiten der Gleichung $b^x = a^y$ zur Basis a und erhalten $x \log_a b = y$. Somit gilt $\log_a b \log_b c = \log_a c$.

38. Gegeben sei folgende Funktion aus $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$:

$$f(x) = \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2-2x+2}}.$$

a) Man bestimme den Definitionsbereich $D(f)$.

b) Man zeige, daß f in $[\![1, \rightarrow[\![$ streng monoton wachsend ist.

c) Man zeige, daß $W(f) = [\![0, 1[\![$ ist.

d) Man beweise, daß der Graph axialsymmetrisch ist.

Lösung:

a) Für alle reellen x gilt $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0$. Also gilt $D(f) = \mathbf{R}$.

b) Es sei $1 \leqq x_1 < x_2$. Es folgt

$$0 \leqq x_1 - 1 < x_2 - 1, \quad (x_1-1)^2 < (x_2-1)^2,$$
$$(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 (x_1-1)^2 < (x_2-1)^2 + (x_2-1)^2 (x_1-1)^2,$$
$$(x_1-1)^2 [1 + (x_2-1)^2] < (x_2-1)^2 [1 + (x_1-1)^2],$$
$$\frac{(x_1-1)^2}{1+(x_1-1)^2} < \frac{(x_2-1)^2}{1+(x_2-1)^2}, \quad \frac{|x_1-1|}{\sqrt{(x_1-1)^2+1}} < \frac{|x_2-1|}{\sqrt{(x_2-1)^2+1}},$$

also $f(x_1) < f(x_2)$.

c) Es ist $f(1) = 0$. Für alle $x \neq 1$ gilt

$$\frac{|x-1|}{\sqrt{(x-1)^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{(x-1)^2}}}.$$

Mithin gilt $W(f) \subseteqq [\![0, 1[\![$. Ist $y \in]\!]0, 1[\![$ beliebig, so gilt für $x > 1$ die Beziehung $y = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{(x-1)^2}}}$ genau dann, wenn $x = 1 + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ ist. Daher gilt $W(f) = [\![0, 1[\![$.

d) Für alle reellen a gilt

$$f(1+a) = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{|-a|}{\sqrt{a^2+1}} = f(1-a).$$

Die Gerade $x = 1$ ist also die Symmetrieachse des Graphen der Funktion f.

39. Man bestimme den größtmöglichen Definitionsbereich und den Wertebereich der reellen Funktion $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ $(r > 0)$.

40. Man ermittle den größtmöglichen Definitionsbereich folgender reeller Funktionen:

a) $f_1(x) = \sqrt{1 - |x|}$, b) $f_2(x) = x\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$ $(a > 0)$,

c) $f_3(x) = \sqrt{2x^2 + 4x + 6}$, d) $f_4(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$.

41. Man zeige, daß die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{3}(4x - x^2)$ auf $]\!\!]\leftarrow, 2]\!\!]$ streng monoton wachsend und auf $[\![2, \rightarrow[\![$ streng monoton fallend ist.

42. Man beweise:

a) Es sei $c \in \mathbf{R}$, f eine Funktion aus $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ und f auf $D(f)$ monoton wachsend. Die Funktion cf ist dann für $c > 0$ monoton wachsend und für $c < 0$ monoton fallend.

b) Es seien f, g zwei Funktionen aus $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, $D(f) = D(g) = A$. Dann ist die Funktion $f + g$ auf A monoton wachsend (fallend), wenn f und g auf A monoton wachsend (fallend) sind.

c) Es seien f, g zwei Funktionen aus $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, $D(f) = D(g) = A$. Wenn $f(x) > 0$ und $g(x) > 0$ für alle x aus A und f und g auf A monoton wachsend (fallend) sind, ist auch $f \cdot g$ auf A monoton wachsend (fallend).
Wenn $f(x) < 0$ und $g(x) < 0$ für alle $x \in A$ und f und g auf A monoton wachsend (fallend) sind, ist $f \cdot g$ auf A monoton fallend (wachsend).

43. Es sei f eine Funktion aus $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$. f sei auf $D(f)$ monoton, $[\![a, b]\!] \subset D(f)$. Man zeige, daß f auf $[\![a, b]\!]$ ein Maximum und ein Minimum besitzt und gebe diese Werte an.

44. Man bestimme von der Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \in \mathbf{R}^*)$ a) den Definitionsbereich $D(f)$, b) den Wertebereich $W(f)$ und c) die Monotonieintervalle.

Hinweis: $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$. Man untersuche, wie der Graph von f aus der Normalparabel (Graph der Funktion $g(x) = x^2$) entsteht.

45. Man untersuche, ob die folgenden Funktionen von $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ gerade oder ungerade sind:

a) $f_1(x) = x^3 \operatorname{sgn} x$, b) $f_2(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{|x| + 2}$, c) $f_3(x) = \dfrac{x^5 + 3x^3 - 6x}{1 + x^4}$.

Man stelle f_2 als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion dar.

46. Man untersuche die folgenden Funktionen aus $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ auf Beschränktheit:

a) $f_1(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ $(x \in \mathbf{R})$, b) $f_2(x) = -\dfrac{1}{|x|}$ $(x \in \mathbf{R}^*)$,

c) $f_3(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ $(x > -1)$, d) $f_4(x) = x\,|x|$ $(x \in \mathbf{R})$.

47. Man beweise folgende Aussagen:

a) Das Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ist eine ungerade Funktion.

b) Das Produkt zweier gerader (ungerader) Funktionen ist eine gerade Funktion.

c) Eine ungerade Funktion, die an der Stelle $x = 0$ definiert ist, besitzt dort den Funktionswert Null.

48. Es seien f, g monotone Funktionen. Es gelte $W(f) \subseteq D(g)$. Dann ist die Funktion $g \cdot f$ monoton. Es ist

a) $g \cdot f$ monoton wachsend, wenn f und g monoton wachsend bzw. monoton fallend sind,

b) $g \cdot f$ monoton fallend, wenn eine der beiden Funktionen monoton wachsend und die andere Funktion monoton fallend ist.

49. Man zeige, daß die Funktion $f(x) = x - [x]$ $(x \in \mathbf{R})$ periodisch mit der Periode $p = 1$ ist.

50. Ist f eine periodische Funktion mit der Periode p, so ist auch $n \cdot p$ für jedes $n \in \mathbf{N}^*$ Periode.

51. Es sei f eine Funktion aus $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ und $D(f) = \mathbf{R}$. Weiterhin erfülle f für alle $x \in \mathbf{R}$ die Bedingungen $f(a + x) = f(a - x)$ und $f(b + x) = f(b - x)$, $0 < a < b$. Man zeige, daß f eine periodische Funktion mit der Periode $p = 2(b - a)$ ist.

52. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 1$ $\left(x \in [\![2, \rightarrow[\![\right)$. Man beweise die Existenz der Umkehrfunktion und gebe diese an.

53. Für welche reellen Zahlen x sind die folgenden Gleichungen erfüllt:

a) $\sqrt{x + 2 + \sqrt{2x - 4}} = 4$ $\quad \left(x \in [\![2, \rightarrow[\![\right)$,

b) $\sqrt{x + 3} + \sqrt{2x - 3} = 6$ $\quad \left(x \in [\![\frac{2}{3}, \rightarrow[\![\right)$,

c) $\lg (2x + 3) - \lg (3x - 2) = 2$ $\quad \left(x \in]\!]\frac{2}{3}, \rightarrow[\![\right)$,

d) $\log_4 \{2 \log_3 [1 + \log_2 (1 + 3 \log_2 x)]\} = \frac{1}{2}$,

e) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$, f) $9^{x-1} + 3^{x+2} - 324 = 0$,

g) $(a^{3x-5})^{8x-2} (a^{5x+3})^{2x-1} = (a^{6x-5})^{3x+2} (a^{4x-7})^{4x-3}$, a positive reelle Zahl, $a \neq 1$.

54. Es sei a eine von Null verschiedene reelle Zahl und f eine Funktion aus $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

a) Ist die Funktion f an der Stelle x definiert, so ist sie auch an den Stellen $x + a$ und $x - a$ definiert.

b) Für alle x, für die die Funktion f definiert ist, gilt $f(x + a) = \dfrac{1 + f(x)}{1 - f(x)}$.

Es ist zu beweisen, daß die Funktion f periodisch ist, d. h., daß es eine von Null verschiedene Zahl λ gibt, so daß $f(x) = f(x + k\lambda)$ für alle x des Definitionsbereiches und für alle ganzen Zahlen k gilt.

Hinweis: Zunächst zeige man durch vollständige Induktion, daß wegen a) mit x auch stets $x + ka$ mit allen ganzzahligen k zum Definitionsbereich gehört. Wegen b) ergibt sich $f(x + 2a) = -\frac{1}{f(x)}$, woraus sich $f(x + 4a) = f(x)$ ergibt.

55. Es seien f, g für alle positiven reellen Zahlen x erklärte Funktionen. Für alle $x \in \mathbf{R}_+^*$ gelte $f(x + 1) = (x + 1) \cdot f(x), f(x) \neq 0$. Man beweise: Die Funktion $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$ erfüllt genau dann für alle positiven reellen Zahlen x die Gleichung $\varphi(x + 1) = (x + 1)\, \varphi(x)$, wenn $g(x) = g(x + 1)$ für alle $x \in \mathbf{R}_+^*$ ist.

56. Es sei $a, b, c \in \mathbf{R}$ und $|a| \neq |b|$. Man ermittle alle Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x definiert sind und der Gleichung

$$a \cdot f(x - 1) + b \cdot f(1 - x) = cx$$

genügen. Ferner diskutiere man den Fall $|a| = |b|$.

Hinweis: Man setze in die gegebene Gleichung für x zunächst $1 + x$ und danach $1 - x$. Aus dem sich ergebenden Gleichungssystem erhält man im Fall $|a| \neq |b|$ für alle reellen x die Funktion $f(x) = \frac{c}{a - b}\, x + \frac{c}{a + b}$. Dann untersuche man die Fälle $|a| = |b|$ und $c \neq 0, a = b \neq 0$ und $c = 0, a = -b \neq 0$ und $c = 0, a = b = c = 0$.

57. Es sei ϱ eine Metrik auf einer Menge M. Man zeige, daß $q(x, y) = \frac{\varrho(x, y)}{1 + \varrho(x, y)}$ ebenfalls eine Metrik auf der Menge M ist.

Lösung:

a) Wegen $\varrho(x, y) \geqq 0$ folgt $1 + \varrho(x, y) > 0$. Also ist $q(x, y) \geqq 0$ für alle $x, y \in M$.

b) 1. Es sei $q(x, y) = 0$. Dann gilt $\varrho(x, y) = 0$. Daraus folgt $x = y$.

2. Es sei $x = y$. Dann folgt wegen $\varrho(x, y) = 0$ sofort $q(x, y) = 0$.

c) Aus $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ folgt sofort

$$q(x, y) = \frac{\varrho(x, y)}{1 + \varrho(x, y)} = \frac{\varrho(y, x)}{1 + \varrho(y, x)} = q(y, x).$$

d) Wir betrachten die Funktion $f(\lambda) = \frac{\lambda}{1 + \lambda}$ für $\lambda \geqq 0$. Diese Funktion ist monoton wachsend. Für alle Elemente x, y, z der Menge M gilt $\varrho(x, y) \leqq \varrho(x, z) + q(z, y)$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} q(x, y) &= \frac{\varrho(x, y)}{1 + \varrho(x, y)} \leqq \frac{\varrho(x, z) + \varrho(z, y)}{1 + \varrho(x, z) + \varrho(z, y)} \\ &= \frac{\varrho(x, z)}{1 + \varrho(x, z) + \varrho(z, y)} + \frac{\varrho(z, y)}{1 + \varrho(x, z) + \varrho(z, y)} \\ &\leqq \frac{\varrho(x, z)}{1 + \varrho(x, z)} + \frac{\varrho(z, y)}{1 + \varrho(z, y)} = q(x, z) + \varrho(z, y). \end{aligned}$$

58. Es sei x_0 ein beliebiger Punkt des $\mathbf{R}_2$ und r eine positive reelle Zahl. Man zeige, daß jeder Punkt x_1 mit $\varrho(x_0, x_1) = r$ Häufungspunkt der Menge $U_r(x_0)$ ist.

Lösung: Es sei $x_0 = (a, b) \in \mathbf{R}_2$ beliebig und $x_1 = (c, d) \in \mathbf{R}_2$ ein Punkt mit $\varrho(x_0, x_1) = \|x_0 - x_1\| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} = r$. Wir haben nun zu zeigen, daß jede Umgebung

$$U_\varepsilon(x_1) = \left\{(x, y) : \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2} < \varepsilon\right\}$$

mindestens einen Punkt $x_2 = (e, f)$ enthält, für den $x_2 \in U_r(x_0)$ und $x_2 \neq x_1$ gilt. Hierzu wählen wir eine natürliche Zahl k mit $k > \frac{\varepsilon}{r}$ und setzen $x_2 := x_1 + \frac{\varepsilon}{2kr}(x_0 - x_1)$. Dann ist $x_1 \neq x_2$ und $\|x_2 - x_1\| = \frac{\varepsilon}{2kr}\|x_0 - x_1\| = \frac{\varepsilon}{2k} < \varepsilon$, also $x_2 \in U_\varepsilon(x_0)$. Wegen

$$x_2 - x_0 = x_1 - x_0 + \frac{\varepsilon}{2kr}(x_0 - x_1) = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2kr}\right)(x_1 - x_0) \quad \text{und} \quad 1 > \frac{\varepsilon}{2kr} > 0$$

gilt

$$\|x_2 - x_0\| = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2kr}\right)\|x_0 - x_1\| < r,$$

d. h., es ist $x_2 \in U_r(x_0)$.

59.* Es sei ϱ eine Metrik auf der Menge X, M eine Teilmenge von X. Man zeige für die Funktion $\varrho(x, M) := \inf\limits_{z \in M} \varrho(x, z)$ (Abstand eines Punktes x von der Menge M) die folgende Beziehung:

$$|\varrho(x, M) - \varrho(y, M)| \leqq \varrho(x, y) \quad \text{für} \quad x, y \in X.$$

60.* Es sei $X = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Für beliebige $x = (x_1, x_2)$ aus X und $y = (y_1, y_2)$ aus X setzen wir

$$\varrho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \quad \varrho_2(x, y) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$$

$$\varrho_3(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\},$$

$$\varrho_4(x, y) = \frac{|x_1 - y_1|}{1 + |x_1 - y_1|} + \frac{|x_2 - y_2|}{1 + |x_2 - y_2|}.$$

Man untersuche, welche dieser Funktionen von $X \times X$ in $\mathbf{R}$ die Menge X zu einem metrischen Raum macht.
Wo liegen alle Punkte $x = (x_1, x_2)$, die vom Koordinatenursprung $O = (0, 0)$ den Abstand $\varrho_i(x, 0) = 1$ $(i = 1, 3)$ haben?

61. Es sei (X, ϱ) ein metrischer Raum. Man zeige:

a) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist eine offene Menge.

b) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist eine abgeschlossene Menge.

62. Es sei (X, ϱ) ein metrischer Raum. Unter der Kugel $K_r(x_0)$ mit dem Mittelpunkt x_0 und dem Radius r verstehen wir die Menge aller Punkte x mit $x \in X$, deren Abstand vom Punkt x_0 nicht größer als r ist. Man zeige, daß jede Kugel $K_r(x_0)$ eine abgeschlossene Menge ist.

Hinweis: Man zeige, daß jeder nicht zu $K_r(x_0)$ gehörende Punkt kein Häufungspunkt von $K_r(x_0)$ ist.

63. Man zeige, daß jede Umgebung und jede Kugel im $\mathbf{R}_p$ konvexe Mengen sind.

64. Für alle x, y mit $x, y \in \mathbf{R}_p$ gilt die Parallelogrammgleichung

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Man gebe eine geometrische Deutung dieser Gleichung im $\mathbf{R}_2$.

Der Grenzwertbegriff

Kontrollfragen

1. Welche Möglichkeiten bestehen, reelle bzw. komplexe Zahlenfolgen graphisch darzustellen? Man gebe Beispiele an.
2. Welche Begriffe, die von Funktionen her bekannt sind, lassen sich auf reelle bzw. komplexe Folgen übertragen? (Beschränktheit, Monotonie)
3. Auf welche verschiedenen Weisen kann man den Begriff Nullfolge definieren? Man gebe mehrere Beispiele an.
4. Welche Rechenregeln und Kriterien für Nullfolgen gibt es? Man wende diese auf selbstgewählte Beispiele an.
5. Der Begriff der Konvergenz ist auf den Begriff der Nullfolge zurückzuführen. Dabei sind auch die Begriffe Grenzwert und Divergenz zu erläutern.
6. Welche Rechenregeln für konvergente Zahlenfolgen gibt es? Wie kann man beweisen, daß die Summenfolge und die Produktfolge zweier konvergenter Folgen konvergent sind? Man gebe Beispiele an, in denen man die Berechnung von Grenzwerten mit Hilfe der Grenzwertsätze auf bekannte Grenzwerte zurückführt.
7. Man gebe mehrere Beispiele für konvergente, divergente und bestimmt divergente Folgen an.
8. Wie kann man die Definition der reellen Nullfolge und Sätze über reelle Nullfolgen auf den euklidischen Raum $\mathbf{R}_p$ und auf komplexe Zahlenfolgen übertragen? Man gebe Beispiele für Nullfolgen komplexer Zahlen und Nullfolgen im Raum $\mathbf{R}_p$ an.
9. Wie kann man die Begriffe der Konvergenz und des Grenzwertes auf komplexe Folgen bzw. auf Folgen im euklidischen Raum $\mathbf{R}_p$ übertragen? Wie ist der Konvergenzbegriff in beliebigen metrischen Räumen definiert? Welche der für konvergente reelle Nullfolgen gültigen Sätze bleiben bestehen?
10. Wie lautet ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Konvergenz von Folgen im Raum $\mathbf{R}_p$? Was läßt sich über den Grenzwert aussagen?
11. Wie lautet ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Konvergenz monotoner Zahlenfolgen?
12. Welche Aussagen können über die Konvergenz bzw. Divergenz monotoner Zahlenfolgen gemacht werden? Was versteht man unter einer Intervallschachtelung? Es ist eine Intervallschachtelung für die Zahl e anzugeben.

13. Wie lautet der Satz über Intervallschachtelungen? Worin besteht die Bedeutung dieses Satzes?
14. Wie kann man die Funktionen $y = \ln x$ und $y = e^x$ durch monotone Zahlenfolgen darstellen?
15. Wie ist der Begriff des Häufungswertes einer reellen Zahlenfolge definiert? Warum kann der Häufungswert einer Zahlenfolge als Verallgemeinerung des Grenzwertbegriffes angesehen werden?
16. Welche Zusammenhänge bestehen zwischen den Begriffen Grenzwert, Häufungswert und größter Häufungswert? Man gebe Beispiele an.
17. Wie läßt sich der Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS aus dem folgenden Satz ableiten:
    Jede reelle Zahlenfolge besitzt eine monotone Teilfolge?
18. Zum Beweis welcher Sätze aus der Analysis wird der Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS benötigt?
19. Was versteht man unter einer Fundamentalfolge, und wie lautet das Konvergenzkriterium von CAUCHY? Worin ist die Bedeutung dieses Kriteriums bei Konvergenzuntersuchungen zu sehen?
    Wie läßt sich der Begriff der Fundamentalfolge auf allgemeine metrische Räume übertragen?
20. Wann heißt ein metrischer Raum vollständig?
21.* Man untersuche metrische Räume auf Vollständigkeit.
22.* Wie lautet die als Satz von CANTOR bezeichnete Verallgemeinerung des Satzes über Intervallschachtelungen? Was besagt der Satz von HEINE-BOREL?
23. Wie ist eine Reihe definiert? In diesem Zusammenhang sind die Begriffe Glied einer Reihe, Partialsumme einer Reihe, Rest einer Reihe und Ausschnitt einer Reihe zu erläutern.
24. Wann heißt eine Reihe konvergent, divergent bzw. bestimmt divergent? Man gebe Beispiele an.
25. Man erläutere anhand von Beispielen das Konvergenz- und das Summenproblem bei Reihen.
26. Welche Konvergenzsätze für Reihen gibt es?
27. Man gebe ein (nur) notwendiges und ein notwendiges und hinreichendes Konvergenzkriterium für Reihen mit beliebigen (mit nichtnegativen) Gliedern an.
28. Man untersuche das Konvergenzverhalten der geometrischen Reihe.
29. Man erläutere am Beispiel des Satzes $\sum (a_n \pm b_n) = \sum a_n \pm \sum b_n$ das Beweisprinzip für Konvergenzsätze über Reihen.
30. Welchem Kriterium für Zahlenfolgen entspricht das notwendige und hinreichende Kriterium für Reihen mit nichtnegativen reellen Gliedern?
31. Wie lautet das Leibnizsche Konvergenzkriterium für alternierende Reihen?
32. Was beinhaltet das Prinzip der Fehlerabschätzung bei alternierenden Reihen?

33. Was versteht man unter einer absolut konvergenten Reihe? Welcher Zusammenhang besteht zwischen absoluter Konvergenz und Konvergenz einer Reihe?

34. Welches sind die wichtigsten Kriterien für die absolute Konvergenz?

35. Es ist zu beweisen, daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ für alle $x \in \mathbf{R}$ absolut konvergiert.

36. Was versteht man unter den Begriffen bedingt konvergente bzw. unbedingt konvergente Reihe? Worin besteht die Bedeutung des kleinen Umordnungssatzes?

37. Man gebe ein Beispiel für eine bedingt konvergente Reihe an.

38. Kann man zu jeder bedingt konvergenten Reihe und zu jeder reellen Zahl eine Umordnung dieser Reihe angeben, so daß deren Summe gleich dieser reellen Zahl ist?

39. Welche Einteilungsprinzipien für unendliche Reihen gibt es?

40. Was besagt der große Umordnungssatz? In diesem Zusammenhang sind die Begriffe Doppelfolge, Doppelreihe, lineare Anordnung für die Glieder einer Doppelfolge zu erläutern. Was versteht man unter der Cauchyschen Produktreihe zweier Reihen?

41. Welche verschiedenen Darstellungen der Zahl e gibt es?

42. Man gebe zwei äquivalente Definitionen für die Stetigkeit einer reellen (bzw. komplexen) Funktion an der Stelle a an. Wie kann man den Begriff der Stetigkeit geometrisch deuten? Wann heißt eine reelle (bzw. komplexe) Funktion in der Menge M stetig? Wann heißt eine reelle (bzw. komplexe) Funktion stetig?

43. Wie läßt sich folgende Aussage formulieren: Die Funktion f ist an der Stelle a nicht stetig? Man gebe Beispiele für Funktionen, die an der Stelle a stetig bzw. nicht stetig sind. Welche Fälle können dabei auftreten?

44. Wie läßt sich der Begriff der Stetigkeit einer reellen (bzw. komplexen) Funktion an der Stelle a auf Funktionen aus einem metrischen Raum X in einen metrischen Raum Y übertragen?

45. Auf welche Klasse von Folgen kann man sich beim Nachweis der Stetigkeit reeller Funktionen beschränken?

46. Was läßt sich über die Umkehrfunktion einer auf einem Intervall definierten und streng monotonen Funktion aussagen?

47. Man gebe zwei äquivalente Definitionen für den Grenzwert einer Funktion an der Stelle a. Welche Zusammenhänge bestehen zwischen den Begriffen Grenzwert und Stetigkeit? Wie kann man den Grenzwertbegriff auf Funktionen aus einem metrischen Raum X in einen metrischen Raum Y verallgemeinern?

48. Welche Grenzwertsätze und Sätze über Verknüpfungen stetiger Funktionen gibt es?

49. Wie ist das Verhalten einer reellen ganzrationalen Funktion für $x \to \pm\infty$ charakterisiert?

50. Wie kann man das Verhalten der Funktion $f(x) = \frac{1}{x^4}$ für $x \to 0$ charakterisieren?

51. Wie sind die Begriffe linksseitige (rechtsseitige) Stetigkeit und linksseitiger (rechtsseitiger) Grenzwert definiert?
52. Man gebe Beispiele für stetige reelle Funktionen an.
53. Man gebe ein Beispiel für eine Funktion an, die in einem Punkt a einen einseitigen Grenzwert, aber keinen Grenzwert besitzt.
54. Man nenne Sätze über Funktionen, die auf abgeschlossenen Mengen stetig sind.
55. Wie lautet ein auf dem Satz von BOLZANO beruhendes einfaches Verfahren zur Berechnung von Nullstellen einer Funktion?
56. Wie kann man begründen, daß der Zwischenwertsatz eine Verallgemeinerung des Satzes von BOLZANO darstellt?
57. Wann heißt eine Teilmenge eines metrischen Raumes kompakt? Man gebe ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür an, daß eine Teilmenge des euklidischen Raumes $\mathbf{R}_p$ kompakt ist.
58. Wann heißt eine reelle Funktion gleichmäßig stetig? Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Stetigkeit und der gleichmäßigen Stetigkeit?
59. Es ist zu beweisen, daß die Funktion $f(x) = ax + b$ auf ihrem gesamten Definitionsbereich gleichmäßig stetig ist ($a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$).
60. Wie läßt sich der Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit auf Funktionen aus $\mathbf{R}_p$ in $\mathbf{R}_q$ übertragen?
61. Man formuliere die Aussage: Die reelle Funktion f ist nicht gleichmäßig stetig.
62. Welche Sätze über Nullstellen ganzrationaler Funktionen gibt es? Man gehe dabei besonders auf den Fundamentalsatz der klassischen Algebra ein.
63. Wie lautet der Satz über die Zerlegung einer ganzrationalen Funktion in Linearfaktoren bzw. in Linearfaktoren und quadratische Faktoren ohne reelle Nullstellen?
64. Wie lautet der Fixpunktsatz von BANACH? Wie sind die Begriffe „Fixpunkt einer Funktion" und „kontrahierende Funktion" definiert? Wie läßt sich der Banachsche Fixpunktsatz auf vollständige metrische Räume verallgemeinern?
65. Man gebe Beziehungen an, die eine Fehlerabschätzung nach Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes ermöglichen.
66. Wie kann man die trigonometrischen Funktionen definieren? Man gehe dabei auf die jeweiligen Definitionsbereiche, Wertebereiche und Graphen ein.
67. Welche Stetigkeits- bzw. Monotonieeigenschaften besitzen die trigonometrischen Funktionen?
68. Wie lauten die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen? Man leite aus ihnen Formeln für $\cos x \pm \cos y$ und $\sin x \pm \sin y$ her.
69. Welche Grenzwertformel ist für die Differentiation der trigonometrischen Funktionen von grundlegender Bedeutung?
70. Wie sind die zyklometrischen Funktionen definiert und welche wichtigen Eigenschaften besitzen diese Funktionen (Definitions- und Wertebereiche, Stetigkeitseigenschaften, Graphen)?

71. Was versteht man unter der trigonometrischen Darstellung einer komplexen Zahl? Wie lautet die komplexe Zahl $z = -\sqrt{3} - i$ in der trigonometrischen Form?

72. Man gebe eine Regel für die Multiplikation bzw. für die Division von komplexen Zahlen mit Hilfe der trigonometrischen Darstellung komplexer Zahlen an.

73. Wie lautet die Eulersche Relation? Nach welchem Prinzip kann man aus ihr die Formeln von MOIVRE ableiten?

74. Man gebe alle Nullstellen der ganzrationalen Funktion $f(z) = z^n - 1$ in der trigonometrischen Form an? Wo liegen diese Nullstellen in der komplexen Zahlenebene?

75. Wie sind die hyperbolischen Funktionen definiert und welche wichtigen Eigenschaften besitzen diese (Definitions- und Wertebereiche, Reihendarstellungen, Stetigkeitseigenschaften, Graphen, Additionstheoreme, Monotonieintervalle)? Welche Analogien ergeben sich zwischen den trigonometrischen und den hyperbolischen Funktionen?

76. Man gebe durch Auflösung der Gleichung $x = \sinh y$ eine Darstellung der Funktion $y = \operatorname{arsinh} x$ an.

77. Wie kann man die komplexen Funktionen $\cos z$, $\sin z$, $\cosh z$ und $\sinh z$ durch Reihen definieren?

78. Wie ist die punktweise und die gleichmäßige Konvergenz für Folgen reeller oder komplexer Funktionen definiert? Welcher Zusammenhang besteht zwischen beiden Begriffen?

79. Man erläutere geometrisch die Annäherung der Folgenglieder einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger reeller Funktionen an die Grenzfunktion.

80. Wie lautet das Kriterium von WEIERSTRASS für die Untersuchung von Reihen auf gleichmäßige Konvergenz? Man wende es auf Reihen der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

an.

81. Man erläutere die Aufgabenstellung der Interpolation von Funktionen durch ganzrationale Funktionen. Was kann man über die Existenz und Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms aussagen?

82. Was versteht man unter linearer Interpolation?

83. Wie kann man die Einzigkeit des Interpolationspolynoms mit Hilfe des Fundamentalsatzes der Algebra beweisen, wenn man annimmt, es gäbe zwei Interpolationspolynome P_1 und P_2, und deren Differenz betrachtet?

84. Was versteht man unter einem trigonometrischen Polynom. Welche Eigenschaften haben die trigonometrischen Polynome?

85. Wie lauten die beiden Sätze von WEIERSTRASS über die gleichmäßige Approximation von stetigen Funktionen?

Aufgaben

1. Man untersuche die Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ auf Monotonie und Beschränktheit.

Lösung: Für alle $n \geqq 1$ gilt

$$\begin{aligned}a_{n+1} - a_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n+k} \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0.\end{aligned}$$

Mithin ist die Folge (a_n) streng monoton wachsend. Ferner gilt $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} < \frac{n}{n+1} < 1$ für alle $n \geqq 1$. Die Folge (a_n) ist also nach oben beschränkt. $a_1 = \frac{1}{2}$ ist eine untere Schranke. Stets gilt $a_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$, die Folge ist also beschränkt.

2. Man zeige, daß die Zahl 3 eine obere Schranke der Folge (a_n) mit $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ist.

Beweis: Nach dem binomischen Lehrsatz gilt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k.$$

Andererseits gilt

$$\binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{k!}\, 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leqq \frac{1}{k!} \leqq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Nun folgt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \sum_{k=2} \binom{}{k} \frac{1}{n^k} \leqq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} < 1 + 2 = 3.$$

Damit haben wir $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ für alle $n \geqq 1$.

3. Man zeige, daß die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{3n-2}{n^2+3}$ eine Nullfolge ist.

Beweis: Für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geqq 1$ folgt aus

$$\varepsilon \leqq \left|\frac{3n-2}{n^2+3}\right| = \frac{3n-2}{n^2+3} < \frac{3n}{n^2} = \frac{3}{n}$$

stets $n < \frac{3}{\varepsilon}$. Setzen wir also $N(\varepsilon) = \frac{3}{\varepsilon}$, so folgt aus $n \geqq N(\varepsilon)$ stets $|a_n| < \varepsilon$.

4. Man beweise, daß die Zahlenfolge $\left(\frac{n^4}{2^n}\right)$ eine Nullfolge ist.

Beweis: Für alle natürlichen Zahlen n mit $n > 4$ gilt

$$\left|\frac{n^4}{2^n}\right| = \frac{n^4}{(1+1)^n} < \frac{n^4}{\binom{n}{5}} = \frac{5!\,n^4}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}.$$

Wir benutzen nun die für alle natürlichen Zahlen p, q und $q > p$ gültige Ungleichung $q - p \geqq \frac{q}{p+1}$ und erhalten

$$\frac{5!\,n^4}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \leqq \frac{5!\,n^4}{n\,\frac{n}{2}\,\frac{n}{3}\,\frac{n}{4}\,\frac{n}{5}} = \frac{(5!)^2}{n}.$$

Nach dem Vergleichskriterium ist die Folge $\frac{n^4}{2^n}$ eine Nullfolge.

5. Es sei (a_n) eine Folge positiver reeller Zahlen, für die $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$ gelte. Man zeige, daß die Folge (a_n) eine Nullfolge ist.

Beweis: Wir setzen $c_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$ für alle n. Nach Voraussetzung gilt dann $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = q$. Wir wählen eine Zahl p mit $q < p < 1$. Es sei $\varepsilon = p - q$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = q$ gibt es eine natürliche Zahl N mit $|c_n - q| < \varepsilon$ für $n \geqq N$. Also gilt $c_n \leqq p$ für alle $n \geqq N$, d. h. $a_{n+1} \leqq p \cdot a_n < a_n$ für $n \geqq N$. Aus der letzten Ungleichung läßt sich ableiten, daß $a_{N+i} \leqq p^i a_N$ für $i = 0, 1, 2, \ldots$ gilt. Ist $n \geqq N$, dann gibt es eine natürliche Zahl i mit $N + i = n$. Für alle $n \geqq N$ gilt

$$a_n = a_{N+(n-N)} = a_{N+i} \leqq p^i a_N = p^n \frac{a_N}{p^N}.$$

Damit haben wir $0 < a_n \leqq p^n \frac{a_N}{p^N}$ für $n \geqq N$. Nach dem Vergleichskriterium gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

6. Man zeige, daß die Zahlenfolge (a_n) mit den induktiv definierten Folgengliedern

$$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) \quad \text{für} \quad n \geqq 2$$

eine Fundamentalfolge ist.

Beweis: Die Untersuchung der Differenzen zweier aufeinanderfolgender Glieder führt zu der Vermutung

$$\text{(1)} \quad d_n := a_{n+1} - a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{für} \quad n \geqq 1,$$

die durch vollständige Induktion bewiesen wird.

1. Die Gleichung (1) gilt für $n = 1$.
2. Induktionsannahme: (1) gelte für $n = k$.

Induktionsbehauptung: (1) gilt für $n = k + 1$.

Beweis:

$$d_{k+1} = a_{k+2} - a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_{k+1} + a_k) - a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k - a_{k+1}) = -\frac{1}{2} d_k = (-1)^k \frac{1}{2^k}.$$

Damit ist die Vermutung bewiesen.

Es seien m und n zwei natürliche Zahlen mit $m > n$. Dann gilt

$$a_m - a_n = (a_{n+1} - a_n) + (a_{n+2} - a_{n+1}) + \cdots + (a_m - a_{m-1}),$$

$$|a_m - a_n| \leqq |a_{n+1} - a_n| + |a_{n+2} - a_{n+1}| + \cdots + |a_m - a_{m-1}|$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^{m-2}} = \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right)$$

$$\leqq \frac{1}{2^{n-2}}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}\right) < \frac{1}{2^{n-2}} \quad \text{für} \quad m > n.$$

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es eine reelle Zahl $N(\varepsilon)$, so daß $\frac{1}{2^{n-2}} < \varepsilon$ ist für $n \geqq N(\varepsilon)$. Mithin ist $|a_m - a_n| < \varepsilon$ für $m > n \geqq N(\varepsilon)$. Damit ist gezeigt, daß (a_n) eine Fundamentalfolge ist.

7. Man stelle fest, welche der Zahlenfolgen (a_n) monoton wachsend bzw. monoton fallend sind:

a) $a_n = \frac{2n}{n^2 + 1}$, b) $a_n = \frac{n-1}{n}$, c) $a_n = \frac{2n-1}{n}$,

d) $a_n = \frac{2n}{n+2}$, e) $a_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + n + 1}$, f) $a_n = \sqrt[n]{a}$ $(a > 1)$,

g) $a_n = \frac{n^2}{2^n}$, h) $a_n = \frac{2n+1}{3n^2 + 2}$.

8. Es sei (a_n) eine streng monoton wachsende Zahlenfolge. Dann gilt $a_n < a_m$ für alle natürlichen Zahlen n und m mit $n < m$.

Hinweis: Den Beweis führe man durch vollständige Induktion nach m.

9. Man untersuche die Zahlenfolgen (a_n) mit a) $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, b) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ auf Monotonie und Beschränktheit.

10. Man prüfe, ob folgende Zahlenfolgen (a_n) Nullfolgen sind:

a) $a_n = \frac{n}{(n+1)^2}$, b) $a_n = \frac{1}{n!}$, c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$,

d) $a_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$, e) $a_n = \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}$, f) $a_n = \frac{n!}{n^n}$,

g) $a_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$, h) $a_n = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{3}\right)^n$, i) $a_n = \left(\frac{1 + i\sqrt{n}}{n}\right)^n$,

j) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, k) $a_n = \frac{n}{3^n}$.

11. Man beweise: Ist (a_n) eine Nullfolge und a eine reelle Zahl mit $|a| \leqq a_n$ für alle n, so folgt $a = 0$.

Hinweis: Man führe den Beweis indirekt.

12. Es sei (a_n) eine Nullfolge, und a, b seien reelle Zahlen mit $a < b + a_n$ für alle n. Man zeige, daß dann $a \leqq b$ gilt.

    Hinweis: Man führe den Beweis indirekt.

13. Ist (a_n) eine Nullfolge, so ist $\left((-1)^n a_n\right)$ ebenfalls eine Nullfolge.

14. Man ermittle den Grenzwert der Folge (a_n) mit $a_n = \dfrac{\log_a n}{n}$ $(a > 1)$.

15. Es sei (a_n) eine Nullfolge. Man zeige, daß dann auch die Folge (b_n) mit $b_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n}$ eine Nullfolge ist.

16. Man gebe jeweils ein allgemeines Glied a_n so an, daß die folgenden Zahlen die ersten Glieder der Zahlenfolge (a_n) sind:

    a) $0, \frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \frac{4}{25}$, b) $1, 1, \frac{5}{7}, \frac{7}{13}, \frac{9}{21}$, c) $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$.

17. Man untersuche folgende Zahlenfolgen (a_n) auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert:

    a) $a_n = \dfrac{n^2 + 3n - 2}{3n^2 + 5}$, b) $a_n = \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4 + n^2 + 1}$,

    c) $a_n = \dfrac{3n^2 + \sqrt{n^3 + 2}}{n^2 - n + 1}$, d) $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$,

    e) $a_n = \sqrt{4n^2 + 5n + 2} - 2n$, f) $a_n = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} i}{n^2}$, g) $a_n = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} i}{n+2} - \dfrac{n}{2}$,

    h) $a_n = \sqrt[3]{n^4} - \sqrt[3]{(n^2 - 1)^2}$, i) $a_n = \prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right)$, j) $a_n = \sum\limits_{i=0}^{n} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^i$,

    k) $a_n = \dfrac{3^{2n+1} - 7}{9^n + 4}$, l) $a_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

18. Man berechne den Grenzwert der Folge mit dem allgemeinen Glied
    $a_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n}$.

    Hinweis: Man zeige zunächst, daß $7 < \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n} < 7\sqrt[n]{3}$ für alle $n \geqq 1$ gilt. Dann wende man das Vergleichskriterium an.

19. Man zeige, daß die Zahlenfolge (a_n) mit den induktiv definierten Folgengliedern

    $$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \quad (n \geqq 3)$$

    den Grenzwert $\dfrac{2}{3}$ besitzt.

Hinweis: Man beweise zunächst $a_n - \frac{2}{3} = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \cdot \frac{2}{3}$ für $n \geqq 1$ durch vollständige Induktion.

20. Man untersuche das Konvergenzverhalten folgender Zahlenfolgen:

a) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, b) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$.

Hinweis: Bei a) zeige man, daß die Folge monoton wächst und nach oben beschränkt ist. Bei b) beachte man, daß die Folge (a_n) mit $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$ bestimmt divergent ist.

21. Man gebe solche Zahlenfolgen (a_n) und (b_n) an, daß gilt:

a) $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$, $a_n + b_n \to \infty$, b) $a_n \to \infty$, $b_n \to -\infty$, $a_n + b_n \to -\infty$,

c) $a_n \to \infty$, $b_n \to -\infty$, $a_n + b_n \to c$ (beliebig reell),

d) $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$, $a_n + b_n$ unbestimmt divergent,

e) $a_n \to 0$, $b_n \to \infty$, $a_n \cdot b_n \to \infty$, f) $a_n \to 0$, $b_n \to \infty$, $a_n \cdot b_n \to -\infty$,

g) $a_n \to 0$, $b_n \to \infty$, $a_n \cdot b_n \to c$ (beliebig reell),

h) $a_n \to 0$, $b_n \to \infty$, $a_n \cdot b_n$ unbestimmt divergent.

22. Es seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Die Folgen (c_n) und (d_n) seien definiert durch $c_n := \max\{a_n, b_n\}$ und $d_n := \min\{a_n, b_n\}$. Man zeige, daß die Folgen (c_n) und (d_n) konvergent sind und daß $\lim_{n\to\infty} c_n = \max\{a, b\}$ und $\lim_{n\to\infty} d_n = \min\{a, b\}$ gilt.

Hinweis: Man benutze die Beziehungen

$$\max\{a, b\} = \frac{1}{2}[a + b + |a - b|] \quad \text{und} \quad \min\{a, b\} = \frac{1}{2}[a + b - |a - b|].$$

23. Man berechne die Grenzwerte der Folgen (a_n):

a) $a_n = n^p \cdot q^n$ $(p \in \mathbf{N}^*, 0 \leqq q < 1)$,

b) $a_n = \frac{q^n}{n!}$ (q nicht negativ), c) $a_n = \sqrt[k]{n}\, q^n$ $(0 < q < 1)$.

Hinweis: Man benutze das Ergebnis der Aufgabe 5, S. 170.

24. Es seien m positive Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ gegeben. Man zeige, daß

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = A := \max\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$$

ist.

Hinweis: Man beweise die Ungleichung $A \leqq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \leqq A \sqrt[n]{m}$.

25.* Die Fibonaccische Zahlenfolge (a_n) ist rekursiv gegeben durch $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ und $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ $(n \geqq 1)$. Man zeige, daß sich das allgemeine Glied in der

Form

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right\} \quad (n \geqq 1)$$

darstellen läßt.

Hinweis: Man versuche, ohne die Anfangsbedingungen $a_1 = 0$ und $a_2 = 1$ zu beachten, eine geometrische Folge $a_n = a \cdot q^{n-1}$ zu finden, die der Rekursionsgleichung $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ genügt. Man erhält zwei Folgen aq^n und $a'q'^n$, die der Gleichung genügen; ebenfalls genügt die Summe dieser beiden Folgen dieser Gleichung. Die Konstanten a und a' wähle man so, daß die Anfangsbedingungen $a_1 = 0$ und $a_2 = 1$ erfüllt sind.

26. Man weise nach, daß (a_n/b_n) eine Intervallschachtelung ist, wenn a_n, b_n wie folgt lauten:

a) $a_n = \dfrac{n-1}{n}$, $b_n = \dfrac{n+1}{n}$, b) $a_n = \dfrac{3n^2-4}{n^2+1}$, $b_n = \dfrac{3n^2+2}{n^2}$,

c) $a_n = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n-1} i^2}{n^3}$, $b_n = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} i^2}{n^3}$.

d) Es seien a_1, b_1 reelle Zahlen mit $0 < a_1 < b_1$ und

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n},\ b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad (n \geqq 1).$$

27. Es seien a_0, b_0 reelle Zahlen mit $0 < a_0 < b_0$ und

$$a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n},\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad (n \geqq 0).$$

Man beweise, daß (a_n/b_n) eine Intervallschachtelung ist und daß der durch sie bestimmte Grenzwert gleich $\sqrt{a_0b_0}$ ist.

Hinweis: Man beachte die Beziehungen zwischen arithmetischem, harmonischem und geometrischem Mittel.

28. Die Folge (a_n) sei gegeben durch $a_1 = \sqrt{2}$ und $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ $(n \geqq 2)$. Man untersuche das Konvergenzverhalten und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Hinweis: Man zeige zunächst, daß die Folge (a_n) monoton wachsend ist. Sodann zeige man, daß die Zahl 2 eine obere Schranke ist. Nachdem man so bewiesen hat, daß der Grenzwert existiert, bestimme man ihn aus der Gleichung $a_n^2 = 2 + a_{n-1}$.

Bemerkung: Die Aufgabenstellung läßt sich folgendermaßen verallgemeinern: $a_1 = \sqrt{c}$ $(c > 0)$, $a_n = \sqrt{c + a_{n-1}}$ $(n \geqq 2)$. Als Grenzwert erhält man $\dfrac{\sqrt{4c+1}+1}{2}$.

29. Es sei a_0 eine reelle Zahl mit $0 < a_0 < 1$. Die Folge (a_n) sei induktiv definiert durch $a_n = a_{n-1}(2 - a_{n-1})$ $(n \geqq 1)$. Man untersuche das Konvergenzverhalten dieser Folge und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Hinweis: Man wende das Hauptkriterium über monotone Funktionen an.

30. Gegeben seien die Zahlenfolgen (a_n) mit den Gliedern:

$$\text{a) } a_n = \begin{cases} 1 & \text{für gerade } n, \\ \dfrac{1}{n+1} & \text{für ungerade } n, \end{cases} \qquad \text{b) } a_n = n,$$

$$\text{c) } a_n = 2 + n^{(-1)^n}, \quad \text{d) } a_n = -n, \quad \text{e) } a_n = \frac{1}{n^2},$$

$$\text{f) } a_n = \begin{cases} 2^k & \text{für } n = 2k, \\ 3^k & \text{für } n = 2k+1 \end{cases} \quad (k \in \mathbf{N}),$$

$$\text{g) } a_n = (-1)^n \left(1 - a^{\frac{1}{n}}\right) \quad (a \in \mathbf{R}, a > 0),$$

$$\text{h) } a_n = n - 3\left[\frac{n-1}{3}\right] + \frac{1}{2 + \left[\frac{n-1}{3}\right]} \quad (n \geqq 1).$$

Man bestimme jeweils den Limes inferior und den Limes superior.

31. Man beweise, daß die Folge (a_n) mit $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{2n}$ eine Fundamentalfolge ist.

Hinweis: Zunächst zeige man, daß $|a_{n+1} - a_n| \leqq \dfrac{1}{n}$ ist. Sodann weise man nach, daß alle auf a_{n+1} folgenden Glieder zwischen a_n und a_{n+1} liegen. Dann gilt für beliebige n_1 $n_2 > \dfrac{1}{\varepsilon}$

$$|a_{n_1} - a_{n_2}| \leqq |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon.$$

32. Man weise nach, daß die Folge (a_n) mit $a_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ das Cauchysche Konvergenzkriterium nicht erfüllt.

Hinweis: Man wähle ε mit $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$. Dann gibt es zu jedem n_0 zwei Zahlen $n_1, n_2 > n_0$, für die $|a_{n_1} - a_{n_2}| > \varepsilon$ ist.

33. Man zeige, daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ konvergent ist, indem man die Summe dieser Reihe berechnet.

Beweis: Wir berechnen

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)(i+2)} = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2}\right) = 1 - \frac{1}{n+2}.$$

Nun gilt $\lim_{n\to\infty} S_n = 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.

34. Mit dem Konvergenzkriterium von Cauchy ist die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ nachzuweisen.

Beweis: Für alle $n, k \geqq 1$ gilt

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+k)^2}$$
$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+k-1)(n+k)}.$$

Die Summanden der letzten Summe können jeweils in Differenzen zerlegt werden, so daß

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$
$$+ \cdots + \left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right)$$
$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} < \frac{1}{n}$$

folgt.
Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wählen wir $N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$, so gilt für alle natürlichen Zahlen n, k mit $k \geqq 1$ und $n > N(\varepsilon)$ stets $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon$. Die vorgelegte Reihe ist also konvergent.

35. Man untersuche die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}\right)$ auf Konvergenz.

Lösung: Es gilt bekanntlich $\ln(1+x) < x \quad (x \neq 0, -1 < x < \infty)$. Mit Hilfe dieser Ungleichung erhält man

$$\ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Andererseits ist

$$\ln\frac{n+1}{n} = -\ln\frac{n}{n+1} = -\ln\frac{n+1-1}{n+1} = -\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) > \frac{1}{n+1}.$$

Demzufolge gilt

$$0 < \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}.$$

Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist als konvergent bekannt. Nach dem ersten Majorantenkriterium ist die vorgelegte Reihe konvergent.

36. Man zeige, daß die Gaußsche hypergeometrische Reihe

$$F(a, b, c, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)\, b(b+1)\cdots(b+n-1)}{n!\, c(c+1)\cdots(c+n-1)} x^n$$

für $|x| < 1$ absolut konvergiert, sobald $a, b, c \neq 0$ und keine negativen ganzen Zahlen sind.

Beweis: Man verwendet das Quotientenkriterium und erhält

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left|\frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)}\right| |x| = \left|\frac{\left(\frac{a}{n} + 1\right)\left(\frac{b}{n} + 1\right)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{c}{n} + 1\right)}\right| |x|, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x|.$$

Also ist die hypergeometrische Reihe für $|x| < 1$ absolut konvergent und für $|x| > 1$ divergent. Für $|x| = 1$ sind gesonderte Betrachtungen notwendig.

37. Für welche reellen Zahlen x mit $x \neq -1$ ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$ konvergent?

Lösung: Man wendet das Quotientenkriterium an und erhält

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|}{|1+x^{n+1}|}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \begin{cases} |x| & \text{für} \quad -1 < x < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{für} \quad x = 1, \\ 0 & \text{für} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Damit konvergiert die gegebene Reihe absolut für alle Werte $x \neq -1$.

38. Man untersuche die Konvergenz der alternierenden Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2 - 1}\right].$$

Lösung: Man beweist leicht die Ungleichung $\frac{2}{n+1} < \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2-1} < \frac{2}{n}$ für $n \geqq 1$. Die Absolutbeträge der Glieder der Reihe bilden also eine monotone Nullfolge. Nach dem Leibnizschen Kriterium ist die gegebene Reihe konvergent.

39. Man zeige, daß die Cauchysche Produktreihe der beiden Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ und $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m+1}$ konvergent ist.

Beweis: Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ ist nach dem Leibnizschen Kriterium konvergent. Sie ist aber bekanntlich nicht absolut konvergent. Wir bilden die Cauchysche Produktreihe

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j+1} \frac{(-1)^{k-j}}{k-j+1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^k}{(j+1)(k-j+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+2} \sum_{j=0}^{k} \left[\frac{1}{j+1} + \frac{1}{k-j+1}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+2} 2 \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j+1}. \end{aligned}$$

Die Cauchysche Produktreihe ist alternierend. Wir wollen das Leibnizsche Kriterium anwenden: Wir setzen $c_k = \frac{(-1)^k 2}{k+2} \sum\limits_{j=0}^{k} \frac{1}{j+1}$. Nun ist zu zeigen, daß $\lim\limits_{k\to\infty} |c_k| = 0$ gilt. Ferner gilt $|c_k| \leqq |c_{k-1}|$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$, denn sicher ist die Ungleichung

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} \leqq \frac{1}{(k+1)(k+2)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j+1}$$

für $k = 1, 2, 3, \ldots$ richtig.

Es gelten nun folgende Beziehungen:

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} \leqq \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j+1},$$

$$\frac{1}{k+2}\left(\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j+1} + \frac{1}{k+1}\right) \leqq \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j+1},$$

$$\frac{2}{k+2}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j+1} \leqq \frac{2}{k+1}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j+1},$$

$$|c_k| \leqq |c_{k-1}|.$$

Man sieht, daß die absolute Konvergenz der Reihen für die Konvergenz der Cauchyschen Produktreihe zwar hinreichend, aber nicht notwendig ist.

40. Es sei (v_n) eine konvergente Zahlenfolge mit $\lim_{n\to\infty} v_n = g$, und es sei $a_n = v_n - v_{n+1}$. Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = v_0 - g$.

41. Man berechne die Summen der folgenden Reihen:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)(3n+4)}$, e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$.

Hinweis: Bei d) und e) zerlege man das allgemeine Glied der Reihe in Partialbrüche.

42. Man untersuche die Reihen

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{n}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ $(0 < a \leqq 1)$

auf Konvergenz.

43. Man untersuche das Konvergenzverhalten folgender Reihen mit Hilfe des Kriteriums von Cauchy:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ $(|q| < 1)$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

Hinweise:

a) $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| \leqq |q|^{n+1}\frac{1-|q|^k}{1-|q|} < |q|^{n+1}\frac{1}{1-|q|}$,

b) $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| \leqq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$.

44. Man untersuche die Konvergenz folgender Reihen mit Hilfe des Kriteriums für Reihen mit nichtnegativen Gliedern:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$, e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

45. Man untersuche die Konvergenz folgender Reihen mit Hilfe des Leibnizschen Konvergenzkriteriums:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \sqrt[n]{a}\right)$ $(a > 0)$.

46. Man prüfe, ob das Leibnizsche Konvergenzkriterium für die Reihe

$$\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^3} - \frac{1}{9^3} + \cdots$$

erfüllt ist.

47. Wieviel Glieder der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ genügen, um die Summe auf vier Dezimalen genau zu erhalten?

48. Man untersuche das Konvergenzverhalten folgender Reihen mit Hilfe von Vergleichskriterien:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right)$,

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$, e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3(1+n)}}$, f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+2}}$,

g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{7}{n^2+6n+1}$, h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

49. Man untersuche das Konvergenzverhalten folgender Reihen mit dem Quotientenkriterium oder dem Wurzelkriterium:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$, c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2}{(n+1)\,3^n}$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{a}{n}\right)^n$ $(a > 0)$, e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} 2^n$ ($\alpha \neq 0$, keine natürliche Zahl),

f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n(n+1)(n+2)(n+3)}$ $(a > 1)$, g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ $(a > 1)$,

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^\alpha \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $(\alpha \in \mathbf{R})$, i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{n+\alpha}{n} \left(\frac{1}{6}\right)^n$ $(\alpha > 0)$,

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_1 = 1$, $a_{2k} = k^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{2k}$, $a_{2k+1} = \sqrt{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$,

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^k b^n$ $(k \in \mathbf{N}, 0 < b < 1)$.

50. Für welche Werte von x sind die folgenden Reihen konvergent:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!x^n$, b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{x^{2n+1}}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(2n-1)!}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n$,

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n n!}{n^n}$, f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ $(|x| \neq 1)$, g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$?

51. Man untersuche die Konvergenz bzw. die Divergenz folgender Reihen, indem man die Partialsummenfolgen auf Konvergenz bzw. Divergenz untersucht:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)\cdots(\alpha+n+p)}$ (α beliebige reelle, von -1, -2, $-3, \ldots$ verschiedene Zahl, $p \geqq 1$),

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n}}$ $(|x| \neq 1)$.

52. Man bilde von den folgenden absolut konvergenten Reihen jeweils die Cauchysche Produktreihe und gebe deren Grenzwert an:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ $(|q| < 1)$, b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ $(|q| < 1)$.

53. $C(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $S(x) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$

a) Man beweise mit Hilfe des Quotientenkriteriums, daß beide Reihen für alle Werte von x absolut konvergieren.

b) Durch Multiplikation dieser beiden Reihen leite man die folgenden Beziehungen her:

$$C(x+y) = C(x)\,C(y) - S(x)\,S(y), \quad S(x+y) = S(x)\,C(y) + C(x)\,S(y).$$

54. Man beweise mit Hilfe der Umgebungsdefinition die Stetigkeit der Funktion $f(x) = \sqrt[n]{x}$ $(n \geqq 1)$.

Beweis: Zunächst weisen wir die Gültigkeit folgender Aussage nach: Für alle reellen Zahlen a, b mit $a > 0$, $b > 0$ und $a \neq b$ gilt $|a-b| \leqq \frac{|a^n - b^n|}{b^{n-1}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Bekanntlich gilt für alle reellen Zahlen a, b

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Da wir $a \neq b$ vorausgesetzt hatten, können wir

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} = \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1}$$

schreiben. Weiterhin gilt wegen $a > 0$ und $b > 0$

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} = \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1} \geqq b^{n-1} > 0.$$

Also gilt $\left|\frac{a^n - b^n}{a-b}\right| \geqq b^{n-1}$. Aus der letzten Ungleichung folgt die Behauptung.

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben und a eine beliebige, aber feste positive reelle Zahl. Für alle x aus dem Intervall $[\![0, \to[\![$ gilt dann

$$\left|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}\right| \leqq \frac{|x-a|}{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-1}}. \tag{$*$}$$

Diese letzte Ungleichung gilt auch für $x = 0$ bzw. $x = a$. Wir wählen nun δ mit $0 < \delta < \varepsilon\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-1}$ und zeigen: Für alle $x \in [\![0, \to[\![$ mit $|x - a| < \delta$ gilt $\left|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}\right| < \varepsilon$. Es sei $x \in [\![0, \to[\![$ und $|x - a| < \delta < \varepsilon\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-1}$. Dann ist $\dfrac{|x-a|}{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-1}} < \varepsilon$, und wegen ($*$) gilt $\left|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}\right| < \varepsilon$. Damit ist die Stetigkeit der Funktion $f(x) = \sqrt[n]{x}$ an allen Stellen a mit $a > 0$ nachgewiesen. Von der Stetigkeit im Nullpunkt überzeuge sich der Leser selbst.

55. Man zeige, daß die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x}$ an jeder Stelle des Intervalls $]\!]0, \to[\![$ stetig ist.

Beweis: Zum Nachweis der Stetigkeit verwenden wir die Umgebungsdefinition. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben und a eine beliebige, aber feste positive reelle Zahl. Wir betrachten die Größen $f(a) + \varepsilon$ und $f(a) - \varepsilon$. Es sei $\varepsilon < f(a)$. Wir bestimmen Zahlen x_1, x_2 mit $f(x_1) = f(a) + \varepsilon$, $f(x_2) = f(a) - \varepsilon$.
Es ergeben sich $x_1 = \dfrac{a}{1 + a\varepsilon}$ und $x_2 = \dfrac{a}{1 - a\varepsilon}$. Für δ nehmen wir die kleinere der beiden Zahlen $x_2 - a$ und $a - x_1$, d. h., wir setzen $\delta = \dfrac{a^2\varepsilon}{1 + a\varepsilon}$. Auch für den Fall, daß $f(a) \leqq \varepsilon$ gilt, wird für δ die Zahl $\dfrac{a^2\varepsilon}{1 + a\varepsilon}$ verwendet. Wir zeigen nun: Für alle $x \in]\!]0, \to[\![$ und $|x - a| < \dfrac{a^2\varepsilon}{1 + a\varepsilon}$ folgt $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a}\right| < \varepsilon$. Es gilt

$$0 < a - \frac{a^2\varepsilon}{1 + a\varepsilon} < x < a + \frac{a^2\varepsilon}{1 + a\varepsilon}.$$

Es folgen die Ungleichungen

$$\frac{1}{a+\delta} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a-\delta}, \quad \frac{1}{a+\delta} - \frac{1}{a} < \frac{1}{x} - \frac{1}{a} < \frac{1}{a-\delta} - \frac{1}{a},$$

$$\frac{-a^2\varepsilon}{a^2 + 2a^3\varepsilon} < \frac{1}{x} - \frac{1}{a} < \varepsilon, \quad -\varepsilon < \frac{-\varepsilon}{1 + 2a\varepsilon} < \frac{1}{x} - \frac{1}{a} < \varepsilon, \quad \text{also} \quad \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon.$$

Man kann die Stetigkeit der Funktion im gesamten Definitionsbereich zeigen. Dann nimmt man für δ den Wert $\dfrac{a^2\varepsilon}{1 + |a|\,\varepsilon}$.

56. Man zeige, daß für jede reelle Zahl a

$$\lim_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x - a} = m a^{m-1} \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

ist.

Beweis: a ist Häufungspunkt des Definitionsbereiches der Funktion

$$f(x) = \frac{x^m - a^m}{x - a} \quad (x \in \mathbf{R} \setminus \{a\}).$$

Aus $x_n \in D(f)$ $(n \in \mathbb{N})$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^m - a^m}{x_n - a} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} x_n^{m-k} \cdot a^{k-1} = ma^{m-1}.$$

57. Man bestimme den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$.

Lösung: Der Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$ ist $D(f) = [\![-1, 0[\![\cup]\!]0, \to[\![$. Die Stelle $x = 0$ ist Häufungspunkt des Definitionsbereiches. Um den Grenzwert zu berechnen, können wir verschiedene Wege einschlagen:

a) Wir führen eine neue Veränderliche u ein: $u^3 = 1 + x$. Dann erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} = \lim_{u\to 1} \frac{u-1}{u^3-1} = \lim_{u\to 1} \frac{u-1}{(u-1)(u^2+u+1)} = \frac{1}{3}.$$

b) Wir erweitern den Bruch mit $\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1\right)} = \frac{1}{3}.$$

58. Man bestimme den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right)$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x} &= \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) - \left(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} \\
&= \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}\right)} \\
&= \frac{-2}{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}\right)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-2\left(\sqrt{x}\right)^3}{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1\right)\left(1 + \sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)} = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

59. Man zeige mit Hilfe der Definition, daß die Funktion $f(x) = x^3$ auf dem Intervall $[\![a, b]\!]$ mit $0 \leq a < b$ gleichmäßig stetig ist.

Beweis: Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta = \frac{\varepsilon}{2b}$. Dann gilt für alle $x, x' \in [\![a, b]\!]$ mit $|x - x'| < \frac{\varepsilon}{2b}$

$$|f(x) - f(x')| = |x^2 - x'^2| = |x + x'|\,|x - x'| < |x + x'|\,\frac{\varepsilon}{2b} < \varepsilon.$$

60. **Man ermittle näherungsweise eine Nullstelle der Funktion**

$$g(x) = x^3 - 99x + 1$$

mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes.

Lösung: Wir suchen eine Lösung der kubischen Gleichung $x^3 - 99x + 1 = 0$. Wir setzen $f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{100}$. Die Funktion f hat folgende Eigenschaften: (1) f ist eine stetige Funktion, (2) f bildet das Intervall $[\![0, 1]\!]$ in sich ab und (3) f ist kontrahierend.

Beweis zu (2): Aus $0 \leqq x \leqq 1$ folgt $0 \leqq x^3 \leqq 1$ und schließlich $1 \leqq x^3 + x + 1 \leqq 3$. Also gilt $\frac{1}{100} \leqq f(x) \leqq \frac{3}{100}$ für alle $x \in [\![0, 1]\!]$.

Beweis zu (3): Wegen

$$\begin{aligned}
|f(x_1) - f(x_2)| &= \frac{1}{100}\,|x_1^3 - x_2^3 + x_1 - x_2| \\
&= \frac{1}{100}\,|(x_1 - x_2)\,(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + (x_1 - x_2)| \\
&= \frac{1}{100}\,|x_1 - x_2|\,|x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1| \\
&\leqq \frac{1}{100}\,|x_1 - x_2|\,(|x_1^2| + |x_1 \cdot x_2| + |x_2^2| + 1) \\
&\leqq \frac{4}{100}\,|x_1 - x_2| \quad (x_1, x_2 \in [\![0, 1]\!])
\end{aligned}$$

ist f kontrahierend mit dem Kontraktionsfaktor $q = 0{,}04$. Die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind erfüllt, und f besitzt demzufolge genau einen Fixpunkt $a \in [\![0, 1]\!]$. Dieser Fixpunkt ist Lösung der kubischen Gleichung, denn aus $f(a) = a$ folgt $g(a) = 0$.
Mit dem Startwert $a_0 = 0$ erhalten wir $a_1 = f(a_0) = 0{,}01$, $a_2 = f(a_1) = 0{,}01010001$.
Die Fehlerabschätzung ergibt $|a - a_2| \leqq \frac{1}{24}\,0{,}00010001 < 0{,}000005$.

61. **Man untersuche die Funktionen**

a) $f(x) = |x - 1| \quad (x \in \mathbf{R})$, b) $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{für } x \leqq 1, \\ 1 - x & \text{für } x \geqq 1 \end{cases} \quad (x \in \mathbf{R})$,

c) $h(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \leqq x < 1, \\ 3 - x & \text{für } 1 \leqq x \leqq 2 \end{cases} \quad (x \in [\![0, 2]\!])$,

d) $i(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x < -1, \\ x + 2 & \text{für } x \geqq -1 \end{cases} \quad (x \in \mathbf{R})$

in ihren Definitionsbereichen auf Stetigkeit.

Hinweis: Man wende die Folgendefinition an.

62. Man ermittle diejenigen Werte von x, für die die Funktion

a) $f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}]$ eine Unstetigkeitsstelle besitzt ($x \geqq 0$).

b) Besitzt die Funktion $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ ($x \in \mathbf{R}$) Unstetigkeitsstellen?

63. Man untersuche, ob die Funktion f mit $f(x) = [x]$ ($x \in \mathbf{R}$) in allen Punkten stetig ist.

Hinweis: Man mache eine Fallunterscheidung, indem man zunächst die Untersuchung für ein $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ und dann für ein $x \in \mathbf{Z}$ durchführt.

64. Man weise nach, daß die Funktion $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$ an den Stellen $+1$ und -1 unstetig ist ($x \in \mathbf{R}$).

65. Man untersuche, in welchen Punkten ihres Definitionsbereiches die reellen Funktionen

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + 3x} - \sqrt{1 + 7x}}{x - 2\sqrt{x} + 1}$, b) $g(x) = \dfrac{2x^2 + 3\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x - 1}}{x - 3\sqrt{x} + 6}$

stetig sind.

66. Gegeben seien die Funktionen

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}, \\ 2(1 - x) & \text{für } \dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1 \end{cases} \quad (x \in [\![0,1]\!]),$$

$$h(x) = g(x - [x]),$$

$$f(x) = \begin{cases} h\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Man zeige, daß die Funktion f an der Stelle $x = 0$ eine Unstetigkeit besitzt.

67. Man bestimme folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}$, b) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x - 5}{x^2 - 25}$,

c) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 12x + 35}{x^2 + 2x - 35}$, d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4 + 3x^2}{x^5 + x^3 + 2x^2}$,

e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x - 1)^2}$, f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$ (m und n ganz),

g) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x^n - 1)(x^{n-1} - 1) \cdots (x^{n-k+1} - 1)}{(x - 1)(x^2 - 1) \cdots (x^k - 1)}$ ($k, n \in \mathbf{N}, 0 < k \leqq n$),

h) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{3}{1 - x^3}\right)$.

Hinweis: Man kürze Zähler und Nenner durch $x - a$, falls Zähler und Nenner an der Stelle a verschwinden.

68. Man bestimme folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ $(n \geqq 1)$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$, d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$.

69. Man bestimme folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x - 1}{x-e}$, c) $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{\lg x - 1}{x-10}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$, e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$.

Hinweis: Man beachte, daß $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$ und $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$ $(a > 0)$ gilt.

70. Man bestimme folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+3x^2-7}{x^3+x-1}$, b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$,

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x(x+a)}-x\right)$, d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$,

e) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

71. Bekanntlich gibt es zu jeder ganzrationalen Funktion f und zu jedem $x_0 \in D(f)$ eine eindeutig bestimmte positive natürliche Zahl p und eine eindeutig bestimmte ganzrationale Funktion g mit

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)^p\, g(x) \quad \text{und} \quad g(x_0) \neq 0.$$

Man gebe diese Darstellung für die Funktion $f(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 14$ $(x \in \mathbf{R})$ für $x_0 = 3$ an.

72. Die Funktion $f(x) = x^5 - x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 16x - 16$ hat bei $x = 2i$ eine doppelte Nullstelle. Man gebe die restlichen Nullstellen dieser Funktion an.

73. Man bestimme die ganzrationale Funktion niedrigsten Grades, die bei $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$ einfache Nullstellen, bei $x_3 = 2$ eine doppelte Nullstelle hat und deren Graph durch den Punkt (3, 20) geht.

74. Man zerlege die ganzrationale Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 21x - 26$ $(x \in \mathbf{R})$ in Linearfaktoren und quadratische Faktoren ohne reelle Nullstellen.

75. Man ermittle näherungsweise eine Nullstelle der Funktion $f(x) = e^{-x} - x + 2$

a) mit dem Halbierungsverfahren (vgl. MfL Bd. 4, Beweis von 2.4.2., Satz 2),

b) mit dem Banachschen Fixpunktsatz.

76. a) Man zeige, daß durch $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ eine stetige und kontrahierende Funktion gegeben ist, die das Intervall $[\![1, 2]\!]$ in sich abbildet und $\sqrt{2}$ gemäß der Vorschrift $a_{n+1} = f(a_n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ iterativ berechnet werden kann.

b) Indem man $a_0 = 1{,}4$ setzt, berechne man einige Näherungswerte und führe anschließend eine Fehlerabschätzung durch.

77. Man zeige, daß $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdots\cos\frac{\varphi}{2^n} = \frac{\sin\varphi}{\varphi}$ ist. φ ist dabei eine beliebige von Null verschiedene reelle Zahl.

Lösung: Aus dem Additionstheorem für die Sinusfunktion erhält man die Beziehung $\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}$, die für alle reellen Zahlen φ gültig ist. Mittels vollständiger Induktion beweist man nun für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 1$ die Gültigkeit der Gleichung $\sin\varphi = 2^n\cdot\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdots\cos\frac{\varphi}{2^n}\cdot\sin\frac{\varphi}{2^n}$. Der interessierende Ausdruck kann somit in der Form

$$\frac{\sin\varphi}{2^n\cdot\sin\varphi/2^n} = \frac{\sin\varphi}{\varphi}\cdot\frac{\varphi/2^n}{\sin\varphi/2^n}$$

geschrieben werden. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\varphi}{2^n} = 0$ und $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\varphi/2^n}{\sin\varphi/2^n} = 1$. Daher gilt die Behauptung.

78. Man berechne $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$.

Lösung: Man nutzt die Beziehung $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (vgl. MfL Bd. 4) aus und erhält

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\,\frac{1}{\cos x} = 1.$$

Sodann setzt man für x den Wert $\pi + u$ ein und läßt u gegen Null streben. Dann erhält man

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{u\to 0}\frac{\sin(3\pi + 3u)}{\tan(5\pi + 5u)} = \lim_{u\to 0}\frac{-\sin 3u}{\tan 5u} = -\lim_{u\to 0}\frac{\frac{\sin 3u}{3u}}{\frac{\tan 5u}{5u}}\cdot\frac{3}{5} = -\frac{3}{5}.$$

79. Man berechne $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\tan x}{\cos 2x}$.

Lösung: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1.$

Diese Beziehung ausnutzend, erhalten wir

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\tan x}{\cos 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln[1 + (\tan x - 1)]}{(1 - \tan^2 x)}(1 + \tan^2 x)$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln[1 + (\tan x - 1)]}{(\tan x - 1)(\tan x + 1)}(\tan^2 x + 1) = -1.$$

80. Man ermittle alle Paare (x, y) von reellen Zahlen x und y, für die die Gleichung $\sin(x + y) = \sin x + \sin y$ erfüllt ist.

Lösung: Wegen der für alle reellen α und β gültigen Beziehungen

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad \sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

ist $\sin(x + y) = \sin x + \sin y$ äquivalent mit

$$(1) \quad 2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x+y}{2} - \cos\frac{x-y}{2}\right) = 0.$$

Da für alle reellen α und β

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

gilt, ist (1) äquivalent mit

$$-4\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2} = 0.$$

Die letzte Gleichung gilt genau dann, wenn wenigstens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$$\sin\frac{x+y}{2} = 0, \quad \text{d. h. } x + y = 2k\pi$$

oder

$$\sin\frac{x}{2} = 0, \quad \text{d. h. } x = 2k\pi$$

oder

$$\sin\frac{y}{2} = 0, \quad \text{d. h. } y = 2k\pi \quad \text{mit } k \in \mathbf{Z}.$$

81. Man zeige, daß $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = 0$ ist.

Beweis: Die Funktion $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ ist für alle $x > 0$ erklärt. Da stets $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \leqq \dfrac{1}{x}$ oder $-\dfrac{1}{x} \leqq \dfrac{\sin x}{x} \leqq \dfrac{1}{x}$ ist, liegt der Graph dieser Funktion zwischen den beiden Hyperbeln, die durch die Gleichungen $y = -\dfrac{1}{x}$ und $y = \dfrac{1}{x}$ dargestellt werden. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ wählen wir $k > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| < \varepsilon$ für alle $x \geqq k$.

82. Man beweise, daß $\dfrac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx$ ist $(x = 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z})$.

Beweis: Es ist

$$\sin\frac{2n+1}{2}x = \sin\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{2k+1}{2}x - \sin\frac{2k-1}{2}x\right).$$

Auf die rechte Seite der Gleichung wenden wir das für alle reellen α und β gültige Additionstheorem $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ an. Wir erhalten dann

$$\sin\frac{2n+1}{2}x = \sin\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos kx = 2\sin\frac{x}{2}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kx\right].$$

Aus der letzten Gleichung folgt die Behauptung.

83. Man berechne gegebenenfalls die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0} x\cot x$,

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$, e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3}$,

f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{x}$.

84. Man prüfe, ob die Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \arctan\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

an der Stelle 0 stetig sind.

85. Man berechne die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\tan x}{1-\cot x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{\ln\cos x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x - b^x}{x}$, e) $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\frac{2a+x}{a+x}$.

86. Unter Benutzung der Beziehung $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ beweise man $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{(2k-1)a}{n^2} = a$.

87. Man stelle die folgenden Funktionen graphisch dar:

a) $f(x) = \sin\frac{x}{a}$ für $a = \frac{1}{2}, 1, 2$,

b) $g(x) = A\cdot\sin x$ für $A = \frac{1}{2}, 1, 2$,

c) $h(x) = 2\cdot\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$, d) $k(x) = \frac{3}{2}\sin\left(-2x - \frac{\pi}{2}\right)$,

e) $l(x) = \sin\frac{1}{x}$, f) $m(x) = x\cdot\sin\frac{1}{x}$.

88. Man ermittle alle reellen Zahlen x mit $0 < x < \pi$, für die $\dfrac{\tan 2x}{\tan x} - \dfrac{2 \cot 2x}{\cot x} \leqq 1$ gilt.

Hinweis: Man zeige, daß für $x \neq k \cdot \dfrac{\pi}{4}$ $(k = 1, 2, 3)$ die gegebene Ungleichung äquivalent ist mit der Ungleichung

$$\frac{2 + \tan^2 x - \tan^4 x}{1 - \tan^2 x} \leqq 2.$$

89. Man ermittle für die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$ $(a \neq 0, b \neq 0)$ den größtmöglichen Definitionsbereich und untersuche, ob dort Unstetigkeiten vorhanden sind.

90. Man beweise die Gleichungen

a) $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ für $x > 0$, b) $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$ für $x < 0$.
Dabei ist für $\arctan x$ und $\arctan \dfrac{1}{x}$ stets der Hauptwert zu wählen.

91. Man beweise die Gleichung $\arctan x + \arctan y = \arctan \dfrac{x + y}{1 - xy}$ für $xy < 1$.

92. Man beweise die folgenden Gleichungen:

a) $\cosh (x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$,

b) $\sinh (x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$,

c) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,

d) $\cosh x + \cosh y = 2 \cosh \dfrac{x + y}{2} \cosh \dfrac{x - y}{2}$,

e) $\cosh x - \cosh y = 2 \sinh \dfrac{x + y}{2} \sinh \dfrac{x - y}{2}$,

f) $\sinh x + \sinh y = 2 \sinh \dfrac{x + y}{2} \cosh \dfrac{x - y}{2}$,

g) $\sinh x - \sinh y = 2 \cosh \dfrac{x + y}{2} \sinh \dfrac{x - y}{2}$.

93. Man beweise die Gleichung $\sinh 3x = 3 \sinh x + 4 \sinh^3 x$.

94. Man gebe alle Nullstellen der ganzrationalen Funktion $f(z)$ in der trigonometrischen Form an:

a) $f(z) = z^2 - (1 + i)$, b) $f(z) = z^4 + 1$.

95. Man gebe die trigonometrische Darstellung für die komplexen Zahlen
$z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_3 = -1 + \sqrt{3}\, i$, $z_4 = 1$ an.

96. Man ermittle den Betrag und das Argument von $\dfrac{1 + 3i}{2 + i}$.

97. **Man löse die quadratische Gleichung $z^2 + (5 - 2i)\,z + (5 - 5i) = 0$.**

98. **Man untersuche die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2k}}{1 + x^{2k}} - \frac{x^{2(k-1)}}{1 + x^{2(k-1)}}\right)$ auf punktweise Konvergenz.**

Lösung: Es ist $s_n(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$, und somit gilt

$$\lim_{n \to \infty} s_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für} \quad |x| > 1, \\ 0 & \text{für} \quad x = 1, \\ -\frac{1}{2} & \text{für} \quad |x| < 1. \end{cases}$$

Die Reihe ist für alle x mit $x \in \mathbf{R}$ konvergent.

99. **Man leite die Lagrangesche Interpolationsformel her (vgl. MfL Bd. 4, 2.7.2.).**

Lösung: Zunächst werden die $n + 1$ Polynome n-ten Grades $l_k(x)$ mit

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad k = i, \\ 0 & \text{für} \quad k \neq i \end{cases} \qquad (k, i = 0, 1, \ldots, n)$$

bestimmt. Da $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ Nullstellen des Polynoms $l_k(x)$ sind, muß dieses die Form

$$l_k(x) = c(x - x_0)\,(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})\,(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)$$

haben. c wird aus der Bedingung $l_k(x_k) = 1$ bestimmt. Man erhält dann für $l_k(x)$ den folgenden Ausdruck:

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0)\,(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})\,(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0)\,(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})\,(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_{k+1})}.$$

Das gesuchte Interpolationspolynom $P(x)$ schreibt sich nun in der Form $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f(x_k)\,l_k(x)$. In der Summe $P(x_i) = \sum\limits_{k=0}^{n} f(x_k)\,l_k(x_i)$ werden alle Summanden Null, in denen $k \neq i$ ist. Wegen $l_i(x_i) = 1$ gilt $P(x_i) = f(x_i)$. Die Polynome $l_k(x)$ heißen Lagrangesche Koeffizienten.

100. **Es ist das Lagrangesche Interpolationspolynom vierten Grades für die folgenden gegebenen Werte aufzustellen:**

$$x_0 = 1, f(x_0) = 17; \quad x_1 = 2, f(x_1) = 27{,}5; \quad x_2 = 3, f(x_2) = 76;$$
$$x_3 = 4, f(x_3) = 210{,}5; \quad x_4 = 7, f(x_4) = 1970.$$

Lösung: Wir setzen die gegebenen Werte in die Lagrangesche Interpolationsformel ein und erhalten

$$\begin{aligned} P(x) = {} & 17\,\frac{(x-2)\,(x-3)\,(x-4)\,(x-7)}{(1-2)\,(1-3)\,(1-4)\,(1-7)} + 27{,}5\,\frac{(x-1)\,(x-3)\,(x-4)\,(x-7)}{(2-1)\,(2-3)\,(2-4)\,(2-7)} \\ & + 76\,\frac{(x-1)\,(x-2)\,(x-4)\,(x-7)}{(3-1)\,(3-2)\,(3-4)\,(3-7)} + 210{,}5\,\frac{(x-1)\,(x-2)\,(x-3)\,(x-7)}{(4-1)\,(4-2)\,(4-3)\,(4-7)} \\ & + 1970\,\frac{(x-1)\,(x-2)\,(x-3)\,(x-4)}{(7-1)\,(7-2)\,(7-3)\,(7-4)} \\ = {} & x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8{,}5x + 20{,}5. \end{aligned}$$

101. Man berechne gegebenenfalls die Grenzfunktionen der Folgen (f_n) mit

$$f_n(x) = x^n \quad (x \in \mathbf{R}, |x| \leqq 1),$$

$$f_n(x) = \frac{nx}{nx^2 + 1} \quad (x \in \mathbf{R}), \quad f_n(x) = \frac{nx}{n^2x^2 + 1} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Man untersuche die Grenzfunktionen auf Stetigkeit und überprüfe im Fall der Stetigkeit, ob gleichmäßige Konvergenz vorliegt.

102.* Man zeige, daß die Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,x^2}{(1+x^2)^n}$ gleichmäßig in $\mathbf{R}$ konvergieren. Darüber hinaus zeige man, daß die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ zwar konvergiert, aber nicht gleichmäßig.

Hinweis: Man benutze das Konvergenzkriterium von Leibniz fur alternierende Reihen und schätze den Absolutbetrag des Reihenrestes ab (vgl. MfL Bd. 4, 2.2.3.).

103.* Man beweise, daß durch eine lineare Transformation der Veränderlichen x die Form der Lagrangeschen Koeffizienten nicht geändert wird.

Hinweis: Man substituiere $x = at + b$, $x_k = at_k + b$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

104. Man leite die Lagrangesche Interpolationsformel für äquidistante (gleichabständige) Stützstellen her.

Hinweis: Man setze $x_k = x_0 + t_k h$ $(k = 0, 1, \ldots, n;\ t_k = k$ für $k = 0, 1, \ldots, n;\ h \neq 0)$.

105. Man bestimme durch kubische Interpolation einen Näherungswert für $e^{0,15} = 1{,}16183$ aus den vier Werten

$$x_0 = 0,\ f(x_0) = 1; \quad x_1 = 0{,}1,\ f(x_1) = 1{,}10517;$$

$$x_2 = 0{,}2,\ f(x_2) = 1{,}22140; \quad x_3 = 0{,}3,\ f(x_3) = 1{,}34986.$$

Man vergleiche den Näherungswert mit dem exakten Wert.

106. Aus dem Ansatz

$$\begin{aligned} P(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ + c_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

ist das Interpolationspolynom $P(x)$ zu bestimmen.

107. Man interpoliere die Funktion $f(x) = 2^x$ durch eine Funktion $r(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{cx + d}$, wobei man Gleichheit von $f(x)$ und $r(x)$ für $x = 0, 1, 2, 3$ verlangt.

Bemerkung: Nach den Polynomen sind die rationalen Funktionen für numerische Rechnungen am geeignetsten. Man ist daher auch an Interpolation durch rationale Funktionen interessiert.

Differentialrechnung

Kontrollfragen

1. Man erläutere den Begriff des Differentialquotienten geometrisch und gebe eine exakte Definition an.
2. Wie lautet die Weierstraßsche Zerlegungsformel und wie kann sie geometrisch interpretiert werden? Welche Differentiationsregeln können mit Hilfe der Weierstraßschen Zerlegungsformel bewiesen werden?
3. Was versteht man unter der Tangente des Graphen einer an der Stelle a differenzierbaren reellen Funktion im Punkt $P(a, f(a))$?
4. Man leite eine Gleichung der Normalen der Funktion $f(x) = \sin x$ in dem zu $x = \frac{\pi}{6}$ gehörenden Kurvenpunkt her.
5. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Stetigkeit und der Differenzierbarkeit einer Funktion? Beweis!
6. Man gebe ein Beispiel für eine Funktion an, die stetig, aber nicht an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches differenzierbar ist.
7. Man beweise die Regel für die Differentiation des Produktes zweier differenzierbarer Funktionen.
8. Man bilde die Ableitung der Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$ mit Hilfe der Regel für die Differentiation der Umkehrfunktion.
9. Man gebe ein Beispiel für eine zusammengesetzte Funktion an und differenziere diese Funktion.
10. Was versteht man unter dem Begriff logarithmische Ableitung? In welchen Fällen wird diese zweckmäßig angewendet?
11. Wie lautet der Satz von ROLLE? Man skizziere den Beweisgedanken.
12. Man gebe den Mittelwertsatz der Differentialrechnung in zwei verschiedenen Formen an. Wie kann man diesen Satz geometrisch interpretieren?
13. Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Satz von ROLLE und dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung?
14. Man gebe Lehrsätze an, die Rückschlüsse aus den Eigenschaften der Ableitung $f'(x)$ auf Eigenschaften von $f(x)$ ermöglichen.
15. Wie sind die Begriffe Kurve, Kurvenstück, geschlossene Kurve definiert? Man gebe Beispiele an.
16. Was versteht man unter einer glatten Kurve?
17. Was versteht man unter einer partiellen Ableitung einer Funktion von zwei (bzw. p) Variablen?
18. Wann heißt eine Funktion $z = f(x, y)$ im Punkt $(a, b) \in D(f)$ differenzierbar?
19. Ist die Existenz der partiellen Ableitungen einer Funktion $z = f(x, y)$ für die Differenzierbarkeit hinreichend?

20. Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ an den Graphen der Funktion $f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ $(x_0^2 + y_0^2 < r^2)$?

21. Wie kann $\dfrac{df(x(t), y(t))}{dt}$ berechnet werden (verallgemeinerte Kettenregel)? Man gebe ein Beispiel an.

22. Wie sind die Begriffe Gradient und Richtungsableitung einer Funktion $w = f(x, y, z)$ definiert?

23. Wann heißt eine Punktmenge des Raumes $\mathbf{R}_3$ ein Flächenstück? Man erläutere in diesem Zusammenhang die Begriffe glattes Flächenstück und Tangentialebene der Fläche.

24. Wie ist die n-te Ableitung einer reellen Funktion einer Variablen definiert?

25. Wie lautet die Leibnizsche Produktformel für die n-te Ableitung eines Produkts zweier reeller Funktionen?

26. Was besagt der Satz von H. A. SCHWARZ?

27.* Wie lautet die Zielstellung der Taylorentwicklung einer Funktion? Wie lautet die Taylorsche Formel mit dem Restglied von LAGRANGE?

28. Inwiefern kann der Mittelwertsatz der Differentialrechnung als besonderer Fall des Taylorschen Satzes angesehen werden? Warum mußte trotzdem ein gesonderter Beweis des Mittelwertsatzes gegeben werden?

29. Was versteht man unter der MacLaurinschen Form des Taylorschen Satzes? Wie lautet das Restglied von LAGRANGE für die MacLaurinsche Form?

30. Wie lautet die Taylorentwicklung der Funktion $f(x) = \sqrt{1 - x}$ mit dem Restglied zweiter Ordnung?

31. Welche Besonderheit weist der Taylorsche Satz bei Anwendung auf ganze rationale Funktionen auf?

32. Unter welchen Voraussetzungen kann man von der Taylorschen Formel zur Taylorschen Reihe übergehen? Man gebe ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für diesen Sachverhalt an.

33. Wie kann man die Potenzreihenentwicklung der Tangensfunktion erhalten?

34. Wie lautet die Taylorsche Formel für eine Funktion von zwei Veränderlichen mit dem Restglied zweiter Ordnung?

35. Man gebe Definitionen für die verschiedenen Formen von Extremwerten an. Wann liegt ein Wendepunkt bzw. Stufenpunkt vor?

36. Man gebe (notwendige bzw. hinreichende) Bedingungen für das Auftreten von Extremwerten bzw. Wendepunkten an.

37. Wie kann man das lokale Verhalten einer m-mal stetig differenzierbaren Funktion mit $f^{(m)}(a) \neq 0$ für wenigstens ein $m \geqq 2$ mit Hilfe der Taylorentwicklung charakterisieren?

38. Man stelle die bei einer Kurvendiskussion wesentlichen Einzeluntersuchungen zusammen.

39. Man gebe (notwendige bzw. hinreichende) Bedingungen für das Auftreten von Extremwerten bei einer differenzierbaren Funktion von zwei Variablen an.

40. Was versteht man unter unbestimmten Ausdrücken der Form $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$? Man erläutere an Beispielen die verschiedenen Formen der Regel von BERNOULLI und DE L'HOSPITAL. Wie führt man unbestimmte Ausdrücke der Form $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 usw. auf die Grundform der Regel von BERNOULLI und DE L'HOSPITAL zurück?

41. Unter welchen hinreichenden Voraussetzungen über die Funktionen f und g gilt die Regel $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$?

42. Was versteht man unter der Potenzreihendarstellung einer Funktion f an der Stelle a?

43. Wie sind die Begriffe Konvergenzbereich und Divergenzbereich einer Potenzreihe mit dem Mittelpunkt a definiert?

44. Welche Fälle sind für den Konvergenzbereich einer Potenzreihe mit dem Mittelpunkt a möglich? Man gehe dabei auf den Begriff Konvergenzradius ein.

45. Man gebe eine Methode zur Bestimmung des Konvergenzradius einer Potenzreihe mit dem Mittelpunkt a an.

46. Welche Beziehung besteht zwischen dem Konvergenzbereich und dem Konvergenzkreis einer Potenzreihe mit dem Mittelpunkt a? Welche Fälle sind bei reellen Potenzreihen für den Konvergenzbereich möglich, wenn der Konvergenzradius von Null verschieden ist?

47. Wann heißt eine Funktion im Punkt a ihres Definitionsbereiches analytisch? Inwiefern ist jedes Polynom in jedem Punkt analytisch?

48. Wie wird eine durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion im Innern des Konvergenzkreises differenziert?

49. Man gebe ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür an, daß eine Funktion im Punkt a ihres Definitionsbereiches analytisch ist.

50. Welche Aussagen gelten für die Verknüpfungen analytischer Funktionen?

51. Man gebe eine hinreichende Bedingung dafür an, daß eine in einem abgeschlossenen Intervall differenzierbare Funktion genau einen Fixpunkt in diesem Intervall besitzt.

52. Wie lautet das Verfahren von NEWTON zur Nullstellenermittlung einer Funktion? Man gebe eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Folge der Näherungswerte gegen die Nullstelle der Funktion an.

53. Man zeige durch Betrachtung der Funktion $f(x) = x^2 - c$ $(c > 0)$, daß durch $x_0 = c$, $x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n + \frac{c}{x_n}$ eine Näherungsfolge für $\sqrt{c}$ gegeben ist.

54. Man gebe ein Kriterium dafür an, daß sich die Folge der Newton-Näherungen von oben bzw. von unten einer Lösung x_0 von $f(x) = 0$ nähert.

55. Wie lautet das sogenannte modifizierte Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung? Welche Vor- und Nachteile besitzt dieses Verfahren gegenüber dem eigentlichen Newton-Verfahren?
56. Wie lautet der Satz über implizit definierte Funktionen? Man erläutere diesen Satz an einem Beispiel.
57. Man gebe eine zum modifizierten Newton-Verfahren analoge Methode an, mit deren Hilfe Funktionswerte der „aufgelösten" Gleichung $y = f(x)$ der Gleichung $F(x, y) = 0$ mit jeder gewünschten Genauigkeit berechnet werden können.
58. Was versteht man unter einer Niveau- oder Höhenlinie der Funktion $z = f(x, y)$? Man gebe einige Beispiele an.

Aufgaben

1. Man bestimme die erste Ableitung der Funktion $f(x) = \sqrt[n]{x}$ an der Stelle $x = a$ ($a \in \mathbf{R}, a > 0$).

Lösung: $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \dfrac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a}$.

Wegen $x - a = \left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}\right) \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-k} \left(\sqrt[n]{a}\right)^{k-1}$ (vgl. MfL Bd. 4, 1.1.1.(7)) gilt

$$\frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a} = \frac{x - a}{(x - a) \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-k} \left(\sqrt[n]{a}\right)^{k-1}} = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-k} \left(\sqrt[n]{a}\right)^{k-1}}.$$

Aus der letzten Beziehung folgt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n \sqrt[n]{a^{n-1}}} = f'(a).$$

2. Man untersuche die folgenden Funktionen auf Differenzierbarkeit:

a) $f(z) = z^3 \quad (z \in \mathbf{C})$, b) $f(z) = \operatorname{Re} z \quad (z \in \mathbf{C})$.

Lösung: a) Für alle $z \in \mathbf{C}$ und $h \neq 0$ gilt

$$\frac{f(z + h) - f(z)}{h} = \frac{(z + h)^3 - z^3}{h} = 3z^2 + 3zh + h^2,$$

und somit ist $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(z + h) - f(z)}{h} = 3z^2$. Die Funktion $f(z) = z^3$ ist stetig differenzierbar.

b) Für alle $z \in \mathbf{C}$ und $h \neq 0$ gilt

$$\frac{f(z + h) - f(z)}{h} = \frac{\operatorname{Re}(z + h) - \operatorname{Re} z}{h} = \frac{\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} h - \operatorname{Re} z}{h} = \frac{\operatorname{Re} h}{h}.$$

Die Funktion $g(h) = \dfrac{\operatorname{Re} h}{h}$ $(h \in \mathbf{C} \setminus \{0\})$ besitzt an der Stelle $h = 0$ keinen Grenzwert, denn für die Nullfolge (h_n) mit $h_n = \dfrac{i}{n}$ bzw. $h_n = \dfrac{1}{n}$ ist $\lim\limits_{n \to \infty} g(h_n) = 0$ bzw. $\lim\limits_{n \to \infty} g(h_n) = 1$. Die Funktion $f(z) = \operatorname{Re} z$ ist somit an keiner Stelle z differenzierbar.

3. Nach der Zahlentafel ist $\ln 720 = 6{,}5793$. Man ermittle mit Hilfe des Mittelwertsatzes einen Näherungswert für $\ln 721$.

Lösung: Mit $a = 720$ und $h = 1$ gilt

$$f(a+h) = \ln 721 = \ln 720 + 1 \cdot \frac{1}{720+\vartheta} \quad (0 < \vartheta < 1).$$

Für $\vartheta = 0$ bzw. $\vartheta = 1$ ist $\frac{1}{720+\vartheta} = \frac{1}{720} = 0{,}0013\bar{8}$ bzw. $\frac{1}{720+\vartheta} = \frac{1}{721} = 0{,}001386$. Da ϑ zwischen 0 und 1 liegt, die Werte $\frac{1}{720}$ und $\frac{1}{721}$ jedoch erst in der sechsten Dezimale voneinander abweichen, ist wegen der Monotonie von $\frac{1}{720+\vartheta}$ die genaue Kenntnis von ϑ gar nicht erforderlich. Man erhält $\ln 721 \approx 6{,}5793 + 0{,}0013 = 6{,}5806$.

4. Man ermittle die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 3\sqrt{x} \quad (x \in \mathbf{R}, x > 0)$,

b) $f(x) = \dfrac{\sin\alpha}{3} x^6 \quad (x \in \mathbf{R})$,

c) $f(x) = \dfrac{x^n}{n} + \dfrac{x^{n-1}}{\sqrt{n-1}} + \dfrac{x^{n-2}}{\sqrt[3]{n-2}} \quad (x \in \mathbf{R}, n > 2)$,

d) $f(x) = x^3 \sin x \quad (x \in \mathbf{R})$.

5. Man beweise, daß die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \geqq 0)$ an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar ist.

6. Folgende Funktionen sind auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit zu untersuchen:

a) $f(x) = |x-2| \quad (x \in \mathbf{R})$, b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{für } x \leqq -2, \\ 0 & \text{für } x > -2. \end{cases}$

7. Gegeben seien die Funktionen

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \dfrac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \dfrac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Man untersuche die Funktionen auf Stetigkeit und gebe $D(f_1')$ und $D(f_2')$ an.

8. Die an den Graphen der Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ im Punkt $P(x_0, y_0)$ gelegte Tangente bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Man zeige, daß der Flächeninhalt des Dreiecks unabhängig von der Wahl des Punktes P ist.

9. Vom Punkt $P(x_0, y_0)$ des Graphen der Funktion $f(x) = e^x$ wird das Lot auf die Abszissenachse gefällt; der Fußpunkt sei L. Die Tangente an den Graphen von f im Punkt P schneide die Abszissenachse in T. Man zeige, daß $\overline{TL} = 1$ für jeden Punkt P gilt.

10. Man beweise, daß bei der Kettenlinie $f(x) = a \cosh \dfrac{x}{a}$ die Ordinate das geometrische Mittel der Normalen und der Größe a ist.

11. Gegeben seien die Funktionen

a) $f(x) = e^x$, b) $f(x) = \ln x, x > 0$, c) $f(x) = \sin x$, d) $f(x) = \cos x$.

Man gebe die Gleichungen der Normalen für diejenigen Punkte der Graphen der Funktionen an, in denen die Tangente den Anstieg 1 besitzt.

12. Man gebe die Ableitung der folgenden Funktionen an:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 3}$, b) $f(x) = \dfrac{x - 7}{(x - 1)(x + 3)}$

c) $f(x) = \left[\dfrac{x^2 + 7x}{(x - 4)^4}\right]^9$, d) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$,

e) $f(x) = 3 \sin x \cdot \cos^2 x$, f) $f(x) = 3 \cos^3 x$,

g) $f(x) = \dfrac{\sin (x + 1)^2}{x + 1}$, h) $f(x) = \dfrac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin^2 x}$,

i) $f(x) = \ln (\sin^2 x + 1)$.

13. Man gebe die Ableitungen der folgenden Funktionen an:

a) $f(x) = e^{\sqrt{2x^2+3x+4}}$, b) $f(x) = a^{\tan x} + \tan a^x$,

c) $f(x) = a^{\frac{1}{\sin x}}$, d) $f(x) = \sinh 2x - 2 \cosh x$,

e) $f(x) = (\tanh x - 1)^4$, f) $f(x) = \arcsin \dfrac{2 \cos x + 1}{\cos x + 2}$,

g) $f(x) = a^{\arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}$, h) $f(x) = x^{\sin x}$ $(x > 0)$,

i) $f(x) = (\ln x)^{\sin x}$ $(x > 1)$, j) $f(x) = (x \cos x)^{x+\cos x}$ $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$,

k) $f(x) = x \operatorname{arsinh} x - \sqrt{x^2 + 1}$, l) $f(x) = x \operatorname{arcoth} x + \dfrac{1}{2} \ln (x^2 - 1)$,

m) $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$.

14. Aus der Beziehung $1 + \sum\limits_{k=1}^{n} x^k = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ $(x \neq 1)$ leite man eine Formel für die Summe $1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} (k + 1)\, x^k$ her.

15. Aus der Gleichung $\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx = \dfrac{\sin\left(n + \dfrac{1}{2}\right)x}{2 \sin \dfrac{x}{2}}$ leite man eine Formel für $\sum\limits_{k=1}^{n} k \sin kx$ her.

16. Man bestimme für die folgenden Funktionen f aus $\mathbf{R}$ den (größtmöglichen) Definitionsbereich $D(f)$ und ermittle die Ableitungen der Funktionen. Man gebe jeweils $D(f')$ an.

a) $f(x) = 2x\sqrt{1 - x^2}$, b) $f(x) = \ln(\ln x)$,

c) $f(x) = \sqrt{1 - \cos x}$, d) $f(x) = \ln \dfrac{x^2 - x - 6}{x^3}$,

e) $f(x) = \sin[(3x^2 - 2x + 7)]^4$.

17. Man zeige, daß die Nullstellen der Ableitung des Polynoms fünften Grades $P(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ reell sind, und stelle fest, zwischen welchen Grenzen sie liegen.

18. Man untersuche die Funktion $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$ auf Monotonie.

19. Man zeige, daß die Funktion $f(x) = x^n e^{-x}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ für alle x mit $0 < x < n$ monoton wächst und für alle x mit $x > n$ monoton fällt.

20. Man beweise die Ungleichung $\dfrac{x}{1 + x} < \ln(1 + x) < x$ für $x > 0$.

Hinweis: Man wende den Mittelwertsatz an.

21. Man ermittle ϑ aus $f(x + h) = f(x) + hf'(x + \vartheta h)$ für die Funktionen

a) $f(x) = e^x$, b) $f(x) = \ln x$.

22. Man bestimme mit Hilfe des Mittelwertsatzes zwei Zahlen a, b mit $a < \sqrt{80} < b$, indem man $\vartheta = 0$ und $\vartheta = 1$ setzt und geeignet abschätzt.

23. Man zeige, daß durch $\mathfrak{r}(t) = \left(r\dfrac{2t}{1 + t^2}, r\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)$, $-\infty < t < +\infty$, eine Parameterdarstellung des Kreises um den Koordinatenursprung mit dem Radius r gegeben ist.

Hinweis: Man eliminiere den Parameter t.

24. Durch $\mathfrak{r}(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$, ist die Parameterdarstellung einer sogenannten Astroide gegeben.

a) Man skizziere den Kurvenverlauf der Astroide.

b) Man eliminiere den Parameter t.

25. Man gebe die Tangentengleichung der durch die folgenden Parameterdarstellungen gegebenen Kurven an:

a) $\mathfrak{r}(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$,

b) $\mathfrak{r}(t) = (t - \cos t, t - \sin t)$, $-\infty < t < +\infty$.

26. Man berechne die Tangenteneinheitsvektoren der Kurve

$$\mathfrak{r}(t) = \left(\sin^3\frac{t}{3}\cos t, \sin^3\frac{t}{3}\sin t\right), \quad 0 \leqq t \leqq 3\pi,$$

in den Punkten mit den Parameterwerten $t, t + \pi, t + 2\pi$ $\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$ und zeige, daß die Tangenten in den zugehörigen Kurvenpunkten ein gleichseitiges Dreieck bilden.

27. Man untersuche die Funktion

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot y}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

im Punkt $P(0, 0)$ auf Stetigkeit.

Lösung: Es sei a eine fest gewählte reelle Zahl. Es wird die Folge $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{a}{n}\right)$ betrachtet. Offenbar gilt $\lim\limits_{n\to\infty} ((x_n, y_n)) = 0$ für jedes fest gewählte a. Wegen $f(x_n, y_n) = \frac{a}{1 + a^2}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f((x_n, y_n)) = \frac{a}{1 + a^2}$.
Für alle $a \neq 0$ ergibt sich demnach ein vom Funktionswert verschiedener Grenzwert. f ist im Punkt $P(0, 0)$ nicht stetig.

28. Es sei

$$f(x, y) = \begin{cases} x \cdot y \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Man zeige, daß die Funktion f stetig differenzierbar ist.

Lösung: Für alle $(x, y) \neq (0, 0)$ gilt

$$f_x(x, y) = y \frac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{und} \quad f_y = x \frac{x^4 - y^4 - 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Die Funktionen f_x und f_y sind für $(x, y) \neq (0, 0)$ stetig. Ferner ist

$$f_x(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0, \quad f_y(0, 0) = 0.$$

Es muß nun gezeigt werden, daß die Funktionen f_x und f_y auch an der Stelle $(0, 0)$ stetig sind. Setzen wir $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$, so gilt

$$f_x(x, y) = r \cdot \sin\varphi\,(\cos^4\varphi - \sin^4\varphi + 4\cos^2\varphi \cdot \sin^2\varphi).$$

Da aus $(x, y) \to (0, 0)$ stets $r \to 0$ folgt, haben wir

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x, y) = 0 = f_x(0, 0).$$

Analog zeigt man, daß $f_y(x, y)$ an der Stelle $(0, 0)$ stetig ist. f ist also stetig differenzierbar.
Eine im Bereich $B \subseteqq \mathbf{R}_p$ definierte reellwertige Funktion f wird homogen vom Grad n genannt, wenn sich bei der Multiplikation der einzelnen Argumente mit dem Faktor t die Funktion mit dem Faktor t^n multipliziert, d. h., wenn die Gleichung

$$f(tx_1, \ldots, tx_p) = t^n f(x_1, \ldots, x_p)$$

identisch erfüllt ist. Der Einfachheit halber nehmen wir an, $x_1, \ldots, x_p$ und t seien positiv. Der Bereich B möge mit jedem Punkt $(x_1, \ldots, x_p)$ auch alle Punkte der Form $(tx_1, \ldots, tx_p)$ für alle t mit $0 < a \leqq t \leqq b$ enthalten.

29. Die Funktion $u = f(x, y, z)$ sei homogen vom Grad n (n eine beliebige reelle Zahl). f habe im offenen Bereich $B \subseteqq \mathbf{R}_3$ stetige partielle Ableitungen f_x, f_y, f_z. Man zeige, daß die Beziehung $xf_x + yf_y + zf_z = nf(x, y, z)$ gilt (Eulersche Formel).

Beweis: Es sei $(x_0, y_0, z_0) \in B \subseteqq \mathbf{R}_3$ beliebig. Dann gilt für jedes $t > 0$

$$f(tx_0, ty_0, tz_0) = t^n f(x_0, y_0, z_0).$$

Durch Differentiation erhalten wir

$$f_x(tx_0, ty_0, tz_0)\, x_0 + f_y(tx_0, ty_0, tz_0)\, y_0 + f_z(tx_0, ty_0, tz_0)\, z_0 = nt^{n-1} f(x_0, y_0, z_0).$$

Für $t = 1$ folgt

$$f_x(x_0, y_0, z_0)\, x_0 + f_y(x_0, y_0, z_0)\, y_0 + f_z(x_0, y_0, z_0)\, z_0 = nf(x_0, y_0, z_0).$$

Also gilt für jeden Punkt (x, y, z)

$$xf_x(x, y, z) + yf_y(x, y, z) + zf_z(x, y, z) = nf(x, y, z).$$

30. Gegeben sei eine Funktion $f(x)$, und $P_n(x)$ sei ein Interpolationspolynom n-ten Grades mit $f(x_i) = P_n(x_i)$ für $i = 0, 1, \ldots, n$; $x_i \neq x_k$ für $i \neq k$. $R_{n+1}(x) := f(x) - P_n(x)$ wird *Restglied der Interpolation* genannt. Für eine auf einem Intervall I $(n + 1)$-mal stetig differenzierbare Funktion führe man eine Abschätzung des Restgliedes durch.

Lösung: Es sei $x \neq x_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ ein fest gewählter Punkt aus I. Wir betrachten die Funktion $F(t)$, die definiert ist durch

$$F(t) = R_{n+1}(t) - k(t - x_0)(t - x_1) \cdots (t - x_n)$$

mit

$$k = \frac{R_{n+1}(x)}{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)}.$$

Dann gilt $F(x_i) = 0$ für $i = 0, 1, \ldots, n$ und $F(x) = 0$. Die Funktion besitzt also mindestens $n + 2$ verschiedene Nullstellen in I. Nach mehrfacher Anwendung des Satzes von Rolle ergibt sich dann, daß die $(n + 1)$-te Ableitung der Funktion $F(t)$ mindestens eine Nullstelle ζ besitzt, wobei ζ in dem kleinsten Intervall liegt, das die Punkte $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$ enthält. Also ist $F^{(n+1)}(\zeta) = f^{(n+1)}(\zeta) - k(n + 1)! = 0$, d. h. nach Definition von k

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n + 1)!}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

31. Die Funktionen f und g mögen an der Stelle a Ableitungen bis zur n-ten Ordnung besitzen. Dann existiert auch die n-te Ableitung des Produkts beider Funktionen, und es gilt

$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(a)\, g^{(k)}(a).$$

Die letzte Beziehung heißt *Leibnizsche Produktregel*.

Beweis: Die Beziehung gilt für $n = 1$. Unter der Annahme, daß die Beziehung für ein beliebiges $n \geqq 1$ gilt, zeigen wir, daß

$$(f \cdot g)^{(n+1)}(a) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(a)\, g^{(k)}(a)$$

gilt. Aus der Induktionsannahme folgt

$$[(f \cdot g)^{(n)}(a)]' = \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(a)\, g^{(k)}(a)\right]'.$$

Aus der letzten Beziehung erhalten wir

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)^{(n+1)}(a) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [f^{(n+1-k)}(a)\, g^{(k)}(a) + f^{(n-k)}(a)\, g^{(k+1)}(a)] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)}(a)\, g^{(k)}(a) + f^{(n+1)}(a)\, g(a) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(a)\, g^{(k+1)}(a) + f(a)\, g^{(n+1)}(a) \\
&= f^{(n+1)}(a)\, g(a) + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] f^{(n+1-k)}(a)\, g^{(k)}(a) + f(a)\, g^{(n+1)}(a) \\
&= f^{(n+1)}(a)\, g(a) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(a)\, g^{(k)}(a) + f(a)\, g^{(n+1)}(a) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(a)\, g^{(k)}(a).
\end{aligned}$$

32. **Die Funktion $y = f(x)$ sei im Intervall I differenzierbar, die Ableitung $f'(x)$ sei in I beschränkt. Dann ist die Funktion $y = f(x)$ in I gleichmäßig stetig.**

Beweis: Es gibt eine reelle Zahl $K > 0$ mit $|f'(x)| \leqq K$ für alle $x \in I$. Zu jedem positiven ε ist dann auch $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ positiv. Für alle $x', x'' \in I$ mit $|x' - x''| < \delta$ ergibt sich nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung zunächst $f(x') - f(x'') = f'(\vartheta)\,(x' - x'')$. Schließlich folgt

$$|f(x') - f(x'')| = |f'(\vartheta)|\, |x' - x''| < K\delta = \varepsilon.$$

33. **Man gebe die Taylorentwicklung der Funktion $f(x) = a^x$ $(a > 0)$ an der Stelle 0 an.**

Lösung: Aus $f(x) = a^x$ folgt $f^{(n)}(x) = (\ln a)^n a^x$. Es gilt somit

$$a^x = 1 + \ln a x + \frac{(\ln a)^2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n + \frac{(\ln a)^{n+1} a^{\vartheta x}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Es wird nun gezeigt, daß für alle $x \in \mathbf{R}$

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(0, x) = \lim_{n\to\infty} a^{\vartheta x} \frac{(x \cdot \ln a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

gilt. Für alle $x \in \mathbf{R}$ gibt es ein K mit $0 < a^{\vartheta x} \leqq K$ für $0 < \vartheta < 1$. Die Folge $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ ist für alle $x \in \mathbf{R}$ eine Nullfolge. Die gesuchte Taylorentwicklung lautet

$$a^x = \sum_{n=0}^{\infty} (\ln a)^n \frac{x^n}{n!}.$$

34. **Man entwickle die Funktion $f(x, y) = \cos x \cos y$ in der Umgebung des Nullpunktes mit einem Restglied dritter Ordnung.**

Lösung: Die Funktion f ist in $\mathbf{R}_2$ beliebig oft differenzierbar. Für alle $(x, y) \in \mathbf{R}_2$ gilt

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \cos x \cos y, & f(0, 0) &= 1, \\
f_x(x, y) &= -\sin x \cdot \cos y, & f_x(0, 0) &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f_y(x, y) = -\cos x \sin y, && f_y(0, 0) = 0,\\
&f_{xx}(x, y) = -\cos x \cos y, && f_{xx}(0, 0) = -1,\\
&f_{xy}(x, y) = \sin x \sin y, && f_{xy}(0, 0) = 0,\\
&f_{yy}(x, y) = -\cos x \cos y, && f_{yy}(0, 0) = -1,\\
&f_{xxx}(x, y) = \sin x \cos y, && f_{xxy}(x, y) = \cos x \sin y,\\
&f_{xyy}(x, y) = \sin x \cos y, && f_{yyy}(x, y) = \cos x \sin y.
\end{aligned}$$

Es gibt ein ϑ mit $0 < \vartheta < 1$, so daß

$$\begin{aligned}
f(x, y) = f(0, 0) + xf_x(0, 0) + yf_y(0, 0) &+ \frac{1}{2}\,[x^2 f_{xx}(0, 0) + 2xy f_{xy}(0, 0) + y^2 f_{yy}(0, 0)]\\
&+ \frac{1}{6}\,[x^3 f_{xxx}(\vartheta x, \vartheta y) + 3x^2 y f_{xxy}(\vartheta x, \vartheta y) + 3xy^2 f_{xyy}(\vartheta x, \vartheta y) + y^3 f_{yyy}(\vartheta x, \vartheta y)]
\end{aligned}$$

gilt. Die gesuchte Taylorentwicklung in der Umgebung des Nullpunktes lautet

$$\begin{aligned}
\cos x \cos y = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{2}\,y^2\\
&+ \frac{1}{6}\,[x^3 \sin(\vartheta x) \cos(\vartheta y) + 3x^2 y \cos(\vartheta x) \sin(\vartheta y)\\
&+ 3xy^2 \sin(\vartheta x) \cos(\vartheta y) + y^3 \cos(\vartheta x) \sin(\vartheta y)].
\end{aligned}$$

35. Gegeben seien n Punkte (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Man bestimme einen Punkt (x, y), für den die Funktion $f(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} [(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2]$ ein lokales Minimum besitzt.

Lösung:

$$f_x = \sum_{i=1}^{n} 2(x - x_i), \quad f_y = \sum_{i=1}^{n} 2(y - y_i),$$

$$f_{xx} = 2n, \quad f_{yy} = 2n, \quad f_{xy} = 0.$$

Für $x = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$ gilt $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$. Ferner gilt $f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2 = 4n^2 > 0$, so daß f im Punkt $(x, y) = \left(\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \dfrac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}\right)$ einen eigentlichen lokalen Extremwert besitzt. Da $f_{xx} > 0$ ist, liegt ein eigentliches lokales Minimum vor.

36. Man zeige unabhängig von den Ergebnissen des Lehrwerks MfL Bd. 5, 3.3.3.(26), daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1 + x)^\alpha \text{ für } |x| < 1 \ (\alpha \in \mathbf{R} \text{ beliebig})$$

gilt.

Beweis: Zunächst ist klar, daß die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ für alle x mit $|x| < 1$ absolut konvergent ist. Wir setzen $T(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$. Für alle x mit $|x| < 1$ gilt

$$T'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1) \binom{\alpha}{n + 1} x^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha - 1}{n} x^n.$$

Durch Multiplikation mit $1 + x$ folgt

$$\begin{aligned}(1+x)\,T'(x) &= \alpha\left[\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n}x^{n+1}\right] = \alpha\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n-1}x^n\right]\\ &= \alpha\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1}\right\}x^n\right] = \alpha\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n\right] = \alpha\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = \alpha T(x).\end{aligned}$$

Für alle x mit $-1 < x < 1$ gilt also $(1 + x)\,T'(x) = \alpha T(x)$. Es sei $f(x) := \dfrac{T(x)}{(1+x)^\alpha}$ $(|x| < 1)$. Dann gilt

$$f'(x) = \frac{T'(x)\,(1+x)^\alpha - \alpha T(x)\,(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} = \frac{T'(x)\,(1+x)^\alpha - T'(x)\,(1+x)^\alpha}{(1+x)^{2\alpha}} = 0.$$

Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt, daß $f(x) = a$ für $x \in\,]-1, +1[$ ist. Aus $T(x) = a(1 + x)^\alpha$ und $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ folgt, indem man $x = 0$ setzt, $a = 1$. Damit ist gezeigt worden, daß $T(x) = (1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ für $|x| < 1$ ist.

37. Man bestimme den (größtmöglichen) Definitionsbereich und den Wertevorrat der folgenden Funktionen:

a) $z = f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, b) $z = f(x, y) = x^2 + 2y^2$,

c) $z = f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$.

38. Man untersuche die Funktion

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0),\\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0)\end{cases}$$

im Punkt $P(0, 0)$ auf Stetigkeit.

39. Man berechne die partiellen Ableitungen f_x, f_y der Funktionen:

a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, b) $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2y^2 + 3y^3$,

c) $f(x, y) = x^y$, d) $f(x, y) = \arctan \dfrac{x}{y}$,

e) $f(x, y) = e^{xy}$, f) $f(x, y) = e^{\cos(x+y)} + e^{\sin(x\cdot y)}$,

g) $f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, h) $f(x, y) = \cos(x + y)\cos(x - y)$.

40. Man berechne die partiellen Ableitungen f_x, f_y, f_z der Funktionen:

a) $f(x, y, z) = x^5 + 6x^3y - 2x^2yz + 3yz^3$,

b) $f(x, y, z) = e^x \ln y + z^2 \cos y$, c) $f(x, y, z) = (x \cdot y)^z$,

d) $f(x, y, z) = \ln(x + y + z)$.

41. Man bestimme das totale Differential folgender Funktionen:

a) $z = f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$, b) $z = f(x, y) = \ln \tan \frac{x}{y}$,

c) $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$, d) $u = f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

42. Man bilde $\frac{df\big(x(t), y(t)\big)}{dt}$ mit Hilfe der verallgemeinerten Kettenregel:

a) $f(x, y) = \sin(x \cdot y)$, $\mathfrak{r}(t) = (t, t^2)$,

b) $f(x, y) = x \sin(x \cdot y)$, $\mathfrak{r}(t) = \big(t^2, \ln(t^2 + 1)\big)$.

43. Man überprüfe an folgenden Beispielen die Gültigkeit der Eulerschen Beziehung durch unmittelbare Berechnung der partiellen Ableitungen:

a) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, b) $f(x, y, z) = \frac{x}{y} e^{\frac{x}{z}}$,

c) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ln \frac{x}{y}$.

44. Man berechne den Gradienten der Funktionen

a) $f(x, y, z) = 4x + \frac{9y}{z}$, b) $f(x, y, z) = xy + yz + zx + 10$,

c) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, d) $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

45. Man bestimmme für die Funktion $f(x, y, z) = \frac{z}{c} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ im Punkt (a, b, c) die Ableitung in Richtung des Ortsvektors dieses Punktes.

46. Wie groß ist die Richtungsableitung der Funktion $z = f(x, y) = e^x \sin y$ im Punkt (x_0, y_0) in beiden Richtungen der Geraden $y - y_0 = (x_0 - x) \tan y_0$?

47. Man bestimme für die Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ in den Punkten $(1, 1)$ und $(-1, 1)$ die Ableitung in Richtung der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten.

48. Man berechne eine Gleichung der Tangentialebene für a) die Halbkugel $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, b) das Rotationsparaboloid $z = x^2 + y^2$, c) die Sattelfläche $z = x \cdot y$ in dem zu (x_0, y_0) gehörenden Flächenpunkt.

49. Man berechne div $\mathfrak{v}$ und rot $\mathfrak{v}$ für

a) $\mathfrak{v} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$,

b) $\mathfrak{v} = \big(0, x, z \sin(x^2 + y^2)\big)$, c) $\mathfrak{v} = (x, y, z)$.

50. Man bestimme durch vollständige Induktion die n-te Ableitung der Funktionen

a) $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, c) $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$,

d) $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$, e) $f(x) = \sin^2 x$.

51. Ist M eine obere Schranke für $f^{(n+1)}(x)$ im Intervall I, so gilt für das Restglied der Interpolation

$$|R_{n+1}(x)| \leqq \frac{M}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \quad \text{für alle} \quad x \in I.$$

Wie groß ist der größtmögliche Fehler bei linearer Interpolation?

52. Es sei eine fünfstellige Tafel für den dekadischen Logarithmus $f(x) = \log_{10} x = \lg x$ für $x \in [\![1, 10]\!]$ mit einem Abstand der Stützstellen von $h = 10^{-3}$ gegeben. Ist bei linearer Interpolation der Interpolationsfehler kleiner als $5 \cdot 10^{-5}$?

53. Man bestimme mit Hilfe der Leibnizschen Formel folgende Ableitungen:

a) $(x^2 \cdot \cos ax)^{(50)}$, b) $(x^2 \cdot e^{2x})^{(50)}$, c) $(e^x \sin x)^{(n)}$.

54. In den folgenden Aufgaben sind die angegebenen partiellen Ableitungen zu bestimmen:

a) f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}; $f(x, y) = \dfrac{1}{2} \ln (x^2 + y^2)$,

b) f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}; $f(x, y) = \arctan \dfrac{x+y}{1-xy}$,

c) f_{xxy} für $f(x, y) = \ln (x+y)$, d) f_{xyz} für $f(x, y, z) = e^{xyz}$.

55. Man beweise folgende Identitäten:

a) $f_x + f_y + f_z = \dfrac{3}{x+y+z}$; $f(x, y, z) = \ln (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$,

b) $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$; $f(x, y, z) = \dfrac{4\pi a^3}{3\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

56. Man bestimme die ganze rationale Funktion sechsten Grades aus den Angaben

$$f(0) = f'(0) = 2,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -4,\ f^{(4)}(0) = 6,\ f^{(5)}(0) = f^{(6)}(0) = 1.$$

57. Man entwickle das Polynom

$$P_1(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2 \ \text{bzw.}\ P_2(x) = x^5 + 2x^4 - x^2 + x + 1$$

nach Potenzen von $x - 2$ bzw. $x + 1$.

58. Folgende Funktionen sind an den Stellen $a = 0$ und $a = 1$ bis zur dritten Potenz zu entwickeln. Eine Restgliedform ist jeweils anzugeben.

a) $f(x) = e^{1-x}$, b) $f(x) = \ln (2+x)$, c) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

59. a) Man zeige, daß $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(0, x)$ für $\sinh x$ und $\cosh x$ gilt, und gebe die Reihenentwicklungen an der Stelle $a = 0$ für beide Funktionen an.

b) Man benutze die Entwicklungen von e^x und e^{-x} für die Reihenentwicklungen der hyperbolischen Funktionen.

60. Man entwickle $f(x) = \log_a(1 + x)$ nach Potenzen von x unter Benutzung der Umrechnungsbeziehung von Logarithmen.

61. Mit Hilfe der binomischen Reihe beweise man die Entwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \cdots; \quad |x| < 1.$$

62. Man zeige, daß für $|x| < 1$ die folgenden Entwicklungen gelten:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,x^k, \qquad \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)(k+2)}{2}\,x^k.$$

63. Man entwickle die folgenden Funktionen nach Potenzen von x:

a) $\sqrt{1+x}$, b) $\ln\dfrac{a+x}{a-x}$, c) $\ln(a+x)$.

64. Man entwickle die Funktionen $f_1(x) = \sin x \cos x$ und $f_2(x) = \sin^2 x$ in MacLaurinsche Reihen.

65. a) Man entwickle die Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2 + \sin x \cos y$ an der Stelle $(x, y) = \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ mit einem Restglied zweiter Ordnung.

b) Man bestimme nach dieser Entwicklung den Wert $f\left(\dfrac{\pi}{2} + h, \dfrac{\pi}{3} + k\right)$ für $h = 0{,}01$ und $k = 0{,}02$ unter Vernachlässigung der Glieder von höherer als erster Ordnung.

66. Die Funktion $f(x, y) = \sin(x - y)$ ist mit Hilfe der MacLaurinschen Formel nach Potenzen von x und y zu entwickeln.

67. Man bestimme die Extrema der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{16} - \dfrac{3x^2}{4} + \dfrac{9}{4}x + 1$, b) $f(x) = (x - a)^6$,

c) $f(x) = \cos x + \dfrac{x^2}{2}$, d) $f(x) = \cos x + \cosh x$, e) $f(x) = \sqrt{x(x^2 - 9)}$.

68. Man diskutiere den Verlauf der Graphen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$, b) $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$, c) $f(x) = \dfrac{x}{e^{2x^2}}$, d) $f(x) = x - \sin x$.

69. Unter welchem Winkel α muß ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 geworfen werden (ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes), damit die horizontale Wurfweite ein Maximum wird?

70. Einem gegebenen Zylinder mit dem Radius a sei ein Zylinder so einbeschrieben, daß seine Achse die Achse des gegebenen Zylinders unter einem rechten Winkel schneidet. Wann hat ein solcher Zylinder den größten Inhalt und wie groß ist dieser?

71. Man bestimme bei den folgenden Funktionen die Punkte, in denen die notwendigen Bedingungen für das Vorliegen eines lokalen Extremwertes erfüllt sind, und untersuche, ob in ihnen die hinreichenden Bedingungen erfüllt sind:

a) $f(x, y) = \dfrac{x^3}{3} + y^2x - 5x + \dfrac{y^3}{3} - 5y,$

b) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 7,$

c) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy,$ d) $f(x, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{xy}$ $(x, y > 0).$

72.* Eine positive Zahl w ist so in drei Summanden zu zerlegen, daß das Produkt xyz ein Maximum wird.

73. Man bestimme die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{5}{x^2+x-6}\right),$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x} - \cot x\right),$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x+\sin x},$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\cot x - \dfrac{1}{x}\right),$

e) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\ln x}{x},$

g) $\lim\limits_{x\uparrow 0}\sqrt{\dfrac{1+x^2}{x^2}}\arctan x,$ h) $\lim\limits_{x\downarrow 0}(\cot x)^{\sin x},$

i) $\lim\limits_{x\uparrow 1} x^{\tan\frac{\pi x}{2}},$ j) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right),$ k) $\lim\limits_{x\downarrow 0}(2^x - 1)^{\sin x}.$

74. Man bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{2^n},$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^n},$ c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2 2^n}{n!}x^n,$ d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{n^2+1}x^n,$

e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a^{n^2}}{n!}x^n$ $(a > 0),$ f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}x^n,$

g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{(2n)!}x^n,$ h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^2\,10^n}x^n.$

75. Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, wenn

$$\text{a) } a_n = \begin{cases} 2^k & \text{für } n = 2k, \\ 3^k & \text{für } n = 2k+1 \end{cases} \quad (k \in \mathbf{N}), \quad \text{b) } a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{k} & \text{für } n = 2k, \\ k \ln k & \text{für } n = 2k+1 \end{cases} \quad (k \in \mathbf{N})$$

ist.

76. Für $|x| < 1$ gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$. Man zeige a) durch sukzessive Multiplikation und b) durch mehrmaliges gliedweises Differenzieren, daß

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n$$

gilt.

77. Es sei f eine für $|x| < r$ analytische Funktion und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ die Potenzreihenentwicklung von f im Punkt 0. Ist f eine gerade Funktion, dann gilt $a_{2k+1} = 0$ ($k \in \mathbf{N}$), und ist f eine ungerade Funktion, dann gilt $a_{2k} = 0$ ($k \in \mathbf{N}$).

78. Man berechne

$$\text{a) } \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)^2 \quad (x \in \mathbf{R}), \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\beta}{n} x^n \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{R}, |x| < 1).$$

79. Die Gleichung $x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0$ besitzt eine Wurzel zwischen -11 und -10 und eine weitere zwischen 9 und 10. Man bestimme beide Wurzeln mit einer Genauigkeit von 0,01.

80. Man bestimme die zwischen 2 und 3 liegende Wurzel der Gleichung $\lg x^x - 1 = 0$ nach dem Newton-Verfahren. Als Startwert nehme man $a_0 = 2$ und berechne die Näherungswerte a_1 und a_2. Man führe eine Fehlerabschätzung durch.

81.* a) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Man bestimme y' für $x = y$.

b) $x^y = y^x$. Man bestimme y' für $x \neq y$.

c) $x \sin y - \cos y + \cos 2y = 0$. Man bestimme y'.

82. Man zeichne die Niveaulinien der folgenden Funktionen:

a) $F(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ für $c = 0$, $c = 1$ und $c = 2$,

b) $F(x, y) = x^2 + 2y^2$ für $c = 0$ und $c = 4$.

83.* Man zeichne die Niveaulinien der Funktion $F(x, y) = \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4}$ für $c = 1$ und $c = 2$ und zeige, daß der Gradient in den zu $x = 5$ und $x = 8$ gehörenden Punkten auf den Niveaulinien senkrecht steht.

84. Man bestimme die Punktmenge, in der die komplexe Funktion $f(x) = e^{\frac{-1}{|x|}}$ analytisch ist.

Lösung: Wir werden zeigen, daß f in keinem Punkt differenzierbar, also erst recht nicht analytisch ist. Es sei x_0 eine beliebige von Null verschiedene komplexe Zahl. Wir untersuchen den Differenzenquotienten

$$\frac{e^{-\frac{1}{|x_0|}} - e^{-\frac{1}{|x|}}}{x_0 - x}$$

für $x \to x_0$. Ist $|x| = |x_0|$, dann strebt der Differenzenquotient für $x \to x_0$ gegen 0. Ist $x = re^{i\varphi}$, $x_0 = r_0 e^{i\varphi}$ und $r \neq r_0$, dann strebt für $r \to r_0$ der Differenzenquotient

$$\frac{e^{-\frac{1}{r_0}} - e^{-\frac{1}{r}}}{(r_0 - r)\,e^{i\varphi}} = \frac{e^{-\frac{1}{r_0}} - e^{-\frac{1}{r}}}{-\frac{1}{r_0} - \left(-\frac{1}{r}\right)} \cdot \frac{1}{r_0 r} \cdot e^{i\varphi}$$

gegen $\frac{1}{r_0^2}\, e^{-\frac{1}{r_0}} \cdot e^{-i\varphi} \neq 0$. Die Funktion f ist also in keinem Punkt differenzierbar.

Integralrechnung

Kontrollfragen

1.* Wann heißt eine beschränkte Teilmenge des Raumes $\mathbf{R}_p$ quadrierbar? Es sind die Schritte und Begriffsbildungen, die zur Definition des Riemannschen oder Peano-Jordanschen Inhalts einer beschränkten Teilmenge des Raumes $\mathbf{R}_p$ führen, zu erläutern.

2.* Wie lautet ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Quadrierbarkeit einer Punktmenge?

3.* Man gebe Eigenschaften quadrierbarer Punktmengen an.

4.* Welche Formeln zur Berechnung der Inhalte eines Rechteckbereiches und eines Zylinderbereiches gibt es?

5.* Wie berechnet sich der Inhalt einer Punktmenge M^*, die aus einer quadrierbaren Menge M durch eine lineare Abbildung hervorgeht? Wie lautet die Formel zur Berechnung des Inhalts der Punktmenge M^* für den Fall, daß M^* aus M durch eine Kongruenztransformation bzw. durch eine zentrische Streckung hervorgeht?

6. Es sind die Schritte und Begriffsbildungen, die zur Definition des Riemannschen Integrals führen, zu erläutern (Zerlegung, Durchmesser einer Zerlegung, ausgezeichnete Zerlegungsfolge, Untersumme, Obersumme, Zwischensumme, unteres Integral, oberes Integral, Riemannsches Integral).

7. Man gebe ein Beispiel für den Fall $\underline{I}(f; a, b) < \bar{I}(f; a, b)$ an.

8. Wie lautet das Riemannsche Integrabilitätskriterium?

9. Wie können Integrale mit Hilfe von ausgezeichneten Folgen von Zwischensummen berechnet werden? Man gebe ein Beispiel an.

10. Welche Klassen integrierbarer Funktionen gibt es?
11. Es sind Eigenschaften Riemannscher Integrale anzugeben: Homogenität und Additivität bezüglich des Integranden, Additivität bezüglich des Integrationsintervalls.
12. Man gebe Abschätzungen und Ungleichungen für Riemannsche Integrale an.
13. Wie kann man mit Hilfe von Riemannschen Integralen Flächeninhalte berechnen?
14. Wie lautet der Mittelwertsatz der Integralrechnung und wie kann er geometrisch interpretiert werden? Wie lautet seine Verallgemeinerung?
15. Wie lautet die Definition des Riemannschen Integrals mit Hilfe von Zwischensummen?
16. Unter welchen Voraussetzungen ist es möglich, den Begriff der Integrierbarkeit auf Funktionen zu erweitern, die auf halboffenen bzw. offenen Intervallen erklärt sind? In diesem Zusammenhang ist der Begriff des uneigentlichen Integrals zu erläutern.
17. Wie sind die Begriffe Stammfunktion und bestimmtes Integral als Funktion der oberen Grenze definiert?
18. Wie lautet der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und seine Umkehrung (Beweis!)? Welche Bedeutung haben diese Sätze (Lösbarkeit des Umkehrproblems der Differentialrechnung für die Klasse der auf abgeschlossenen Intervallen stetigen Funktionen, numerische Berechnung von bestimmten Integralen)?
19. Wie ist der Begriff des unbestimmten Integrals definiert? Man gebe einige Grundintegrale an.
20. Was versteht man unter einer in einem offenen Intervall elementar integrierbaren Funktion? Man gebe Beispiele für Funktionen an, die in keinem offenen Intervall elementar integrierbar sind.
21. Wie lautet die Regel für die partielle Integration (Beweis!)? Man gebe einige Beispiele an. Wie lautet die Regel der partiellen Integration für bestimmte Integrale?
22. Wie lauten die Regeln für die Integration durch Substitution für unbestimmte und bestimmte Integrale und wie lassen sie sich beweisen? Man gebe einige Beispiele an.
23. Wie wird eine rationale Funktion integriert? Es sind die einzelnen Rechenschritte anzugeben.
24. Wie lautet eine hinreichende Bedingung dafür, daß man bei einer Folge von auf dem abgeschlossenen Intervall $[\![a, b]\!]$ stetigen Funktionen die Reihenfolge von Grenzwertbildung und Integration vertauschen darf? Man gebe ein Beispiel an.
25. Wie lautet eine hinreichende Bedingung dafür, daß man eine Folge von auf dem Intervall $[\![a, b]\!]$ stetig differenzierbaren Funktionen „gliedweise differenzieren" darf?
26. Welche Anwendungen der Integralrechnung gibt es? In diesem Zusammenhang sind die Begriffe Rektifizierbarkeit, Bogenlänge, Krümmung, Rotationskörper,

Oberfläche des Mantels eines Rotationskörpers und Rauminhalt eines Rotationskörpers zu erläutern. Man gebe die entsprechenden Berechnungsformeln an.

27.* Wie lautet das Prinzip von CAVALIERI?

28.* Wie kann die Berechnung von mehrdimensionalen Integralen auf die sukzessive Berechnung von eindimensionalen Integralen zurückgeführt werden? Wann darf die Reihenfolge der Integration vertauscht werden? In diesem Zusammenhang ist der Begriff des Normalbereiches zu erläutern.

29.* Wie lauten die Transformationsformeln für mehrfache Integrale?

Aufgaben

1. Man berechne das Integral $\int\limits_1^a x^\alpha\,dx$ $(a \geqq 1,\ \alpha \in \mathbf{R})$.

Lösung: Für $a = 1$ gilt $\int\limits_1^a x^\alpha\,dx = 0$. Wir setzen $a \neq 1$ voraus und verwenden geometrische Zerlegungsfolgen $x_j^{(n)} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^j$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$. Wegen $\sqrt[n]{a} > 1$ ist $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{k-1} < \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$ bzw. $x_{k-1}^{(n)} < x_k^{(n)}$ für $k = 1, 2, \ldots, n$. Da $d(\mathfrak{z}^{(n)}) = a\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}\right)$ ist, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} d(\mathfrak{z}^{(n)}) = 0$. Die Folge von Zerlegungen $\mathfrak{z}^{(n)}$ ist also eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge. Nun berechnen wir die Zwischensumme $S(f, \mathfrak{z}^{(n)}, \zeta^{(n)})$, wobei als Zwischenwerte die Endpunkte der Teilintervalle gewählt werden:

$$S(f, \mathfrak{z}^{(n)}, \zeta^{(n)}) = \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)\,(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} (q^j)^\alpha\, q^j \left(1 - \frac{1}{q}\right) = \frac{q-1}{q} \sum_{j=1}^{n} q^{j(\alpha+1)}$$

mit $q = \sqrt[n]{a}$. Die hierin auftretende endliche geometrische Reihe $\sum\limits_{j=1}^{n} (q^{\alpha+1})^j$ mit dem Quotienten $q^{\alpha+1}$ veranlaßt uns zu folgender Fallunterscheidung:

1. $\alpha \neq -1$. Wegen $a \neq 1$ ist $q \neq 1$ und $q^{\alpha+1} \neq 1$. Für die Reihe ergibt sich dann der Wert

$$\sum_{j=1}^{n} (q^{\alpha+1})^j = q^{\alpha+1}\,\frac{(q^{\alpha+1})^n - 1}{q^{\alpha+1} - 1} = q^{\alpha+1}\,\frac{a^{\alpha+1} - 1}{q^{\alpha+1} - 1}.$$

Für die Zwischensumme ergibt sich

$$S(f, \mathfrak{z}^{(n)}, \zeta^{(n)}) = q^\alpha (a^{\alpha+1} - 1)\,\frac{q-1}{q^{\alpha+1} - 1}.$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} q^\alpha = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q-1}{q^{\alpha+1} - 1} = \dfrac{1}{\alpha + 1}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} S(f, \mathfrak{z}^{(n)}, \zeta^{(n)}) = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{\alpha + 1} = \int\limits_1^a x^\alpha\,dx.$$

2. $\alpha = -1$. In diesem Fall ist $q^{\alpha+1} = 1$. Für die Reihe ergibt sich nun $\sum\limits_{j=1}^{n} (q^{\alpha+1})^j = n$. Also ist $S(f, \mathfrak{z}^{(n)}, \zeta^{(n)}) = \dfrac{1}{q}\,(q - 1)\,n = \dfrac{1}{q}\,\dfrac{q-1}{\frac{1}{n}}$. Schließlich erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} S(f, \mathfrak{z}^{(n)}, \zeta^{(n)}) = \ln a = \int\limits_1^a \frac{dx}{x}.$$

2. Man berechne das Integral der Funktion $f(x) = x^2$ über ein Intervall $[\![a, b]\!]$.

Lösung: Wir verwenden äquidistante Zerlegungsfolgen

$$x_j^{(n)} = a + j\,\frac{b-a}{n} \quad (j = 0, 1, \dots, n).$$

Da $d(\mathfrak{z}^{(n)}) = \dfrac{b-a}{n}$ ist, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} d(\mathfrak{z}^{(n)}) = 0$. Somit liegt eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge vor. Für die Zwischensumme erhalten wir, wenn wir jeweils den rechten Endpunkt als Zwischenpunkt wählen:

$$\begin{aligned}
S(f, \mathfrak{z}^{(n)}, \zeta^{(n)}) &= \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\,\frac{b-a}{n} = \sum_{j=1}^{n}\left(a + j\,\frac{b-a}{n}\right)^2 \frac{b-a}{n}\\
&= \frac{b-a}{n}\left(na^2 + \frac{2a(b-a)}{n}\sum_{j=1}^{n} j + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{j=1}^{n} j^2\right)\\
&= (b-a)\left(a^2 + \frac{2a(b-a)}{n^2}\,\frac{n}{2}\,(n+1) + \frac{(b-a)^2}{n^3}\,\frac{n}{3}\,(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)\\
&= (b-a)\left(a^2 + a(b-a)\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3}(b-a)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right).
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\int_a^b x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} S(f, \mathfrak{z}^{(n)}, \zeta^{(n)}) = (b-a)\,\frac{a^2+ab+b^2}{3} = \frac{b^3-a^3}{3}.$$

Abschließend wollen wir das Integral der Funktion $f(x) = x^2$ über ein Intervall $[\![a, b]\!]$ $(0 < a < b)$ berechnen, indem wir geometrische Zerlegungsfolgen verwenden. Die Zerlegung sei gegeben durch die $n+1$ Punkte $x_j^{(n)} = a\left(\sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}\right)^j$ $(j = 0, 1, \dots, n)$. Der Leser überzeuge sich selbst davon, daß die Beziehungen $x_{k-1}^{(n)} < x_k^{(n)}$ für $k = 1, 2, \dots, n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} d(\mathfrak{z}^{(n)}) = 0$ gelten.

Für die Zwischensumme erhalten wir, wenn wir jeweils den rechten Endpunkt als Zwischenpunkt wählen und $\sqrt[n]{\dfrac{b}{a}} = c$ setzen:

$$\begin{aligned}
S(f, \mathfrak{z}^{(n)}, \zeta^{(n)}) &= \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\,(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} (ac^j)^2\,a(c^j - c^{j-1})\\
&= a^3\left(1-\frac{1}{c}\right)\sum_{j=1}^{n} c^{3j} = a^3\left(1-\frac{1}{c}\right)c^3\,\frac{(c^3)^n - 1}{c^3-1}\\
&= a^3(c-1)\,c^2\,\frac{(c^n)^3-1}{c^3-1} = a^3\left[\left(\frac{b}{a}\right)^3 - 1\right]\frac{c^2(c-1)}{c^3-1},
\end{aligned}$$

also

$$\int_a^b x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} S(f, \mathfrak{z}^{(n)}, \zeta^{(n)}) = \frac{1}{3}\,a^3\left[\left(\frac{b}{a}\right)^3 - 1\right] = \frac{b^3-a^3}{3}.$$

3. Man beweise, daß eine Funktion, die aus einer über das Intervall $[\![a, b]\!]$ integrierbaren Funktion f durch Abänderung der Funktionswerte an andlich vielen Stellen entsteht, über dieses Intervall integrierbar ist.

Beweis: Die Funktion g_c ist die Differenz der monotonen Funktionen

$$g_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < c, \\ 1 & \text{für} \quad x \geqq c \end{cases} \quad \text{und} \quad g_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leqq c, \\ 1 & \text{für} \quad x > c \end{cases}$$

und damit integrierbar. Jede Funktion, die aus f durch Abänderung an endlich vielen Stellen entsteht, kann in der Form $g(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} t_j g_{c_j}(x)$ dargestellt werden, und mit f ist auch g integrierbar.

4. Das Integral $\int\limits_1^\infty x^\alpha\, dx$ existiert für alle $\alpha < -1$, aber nicht für $\alpha \geqq -1$.

Beweis: Für jedes $b > 1$ und $\alpha \neq -1$ ist $\int\limits_1^b x^\alpha\, dx = \dfrac{b^{\alpha+1} - 1}{\alpha + 1}$. Ferner gilt für $b > 1$ stets $\int\limits_1^b \dfrac{dx}{x} = \ln b$. Für $\alpha < -1$ ist nun

$$\lim_{b \to \infty} \int_1^b x^\alpha\, dx = \lim_{b \to \infty} \frac{b^{\alpha+1} - 1}{\alpha + 1} = -\frac{1}{\alpha + 1},$$

also $\int\limits_1^\infty x^\alpha\, dx = -\dfrac{1}{\alpha + 1}$. Für $\alpha > -1$ ist aber $\lim\limits_{b\to\infty} b^{\alpha+1} = \infty$, ebenso ist $\lim\limits_{b\to\infty} \ln b = \infty$. Für $\alpha \geqq -1$ existiert das Integral also nicht.

5. Man berechne das Integral der Funktion $f(x) = x^3$ über das Intervall $[\![0, 1]\!]$.

Hinweis: Es gilt $\sum\limits_{j=0}^{n} j^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

6. Man berechne mit Hilfe der Identität

$$2 \sin \frac{\alpha}{2n} \sum_{j=1}^{n} \sin \frac{\alpha j}{n} = \cos \frac{\alpha}{2n} - \cos \frac{\alpha(2n+1)}{2n}$$

das Integral der Funktion $y = \sin x$ über das Intervall $[\![0, \frac{\pi}{2}]\!]$.

7. Man berechne mit Hilfe der Identität

$$2 \sin \frac{h}{2} \sum_{j=1}^{n} \cos(a + jh) = \sin\left(a + \left(n + \frac{1}{2}\right) h\right) - \sin\left(a + \frac{1}{2} h\right)$$

das Integral der Funktion $f(x) = \cos x$ über ein Intervall $[\![a, b]\!]$.

8. Man berechne das Integral der Funktion $f(x) = e^x$ über ein Intervall $[\![0, a]\!]$.

Hinweis: Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a/n}{a/(e^n - 1)} = 1$.

9. Mit Hilfe der Beziehung

$$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + 1\right)$$

beweise man

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2x\cos\varphi + x^2)\,d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| < 1, \\ \pi \ln(x^2) & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$$

(Poissonsches Integral).

Hinweis: Berücksichtigt man die Werte der zweiten Einheitswurzeln, so hat die Zerlegung von $x^{2n} - 1$ in Linearfaktoren die Gestalt

$$x^{2n} - 1 = \prod_{k=1}^{n-1} \left(x - \cos\frac{k\pi}{n} - i\sin\frac{k\pi}{n}\right),$$

wobei i die imaginäre Einheit ist. Trennt man die Faktoren $x + 1$ und $x - 1$ ab (sie entsprechen den Werten $k = -n$ bzw. $k = 0$) und faßt die konjugiert komplexen Faktoren zusammen, so ist

$$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1)\prod_{k=1}^{n-1} \left(x - \cos\frac{k\pi}{n} - i\sin\frac{k\pi}{n}\right)\left(x - \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$= (x^2 - 1)\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + x^2\right).$$

Wegen $(1 - |x|)^2 \leqq 1 - 2x\cos\varphi + x^2$ erkennen wir, wenn wir $|x| \neq 1$ voraussetzen, daß der Integrand stetig ist. Zur Berechnung des Integrals verwendet man die äquidistante Zerlegungsfolge $x_k^{(n)} = k\,\frac{\pi}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

10.* Man beweise: Ist eine über das Intervall $[\![a, b]\!]$ integrierbare Funktion $f(x)$ positiv und gilt $a < b$, so ist $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

Hinweis: Man führe den Beweis indirekt.

11. Ist die stetige Funktion f auf dem Intervall $[\![a, b]\!]$ nicht negativ und gilt $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, so ist $f(x) = 0$ für alle $x \in [\![a, b]\!]$.

Hinweis: Man führe den Beweis indirekt.

12. Es sei f eine über das Intervall $[\![a, b]\!]$ integrierbare Funktion. Es gelte $|f(x)| \leqq C$ für alle $x \in [\![a, b]\!]$. Man beweise, daß $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq C\,|b - a|$ gilt.

13. Man zeige, daß $\left|\int_a^b (px + q)\,dx\right| = \max\{|pa + q|, |pb + q|\}\,|b - a|$ gilt.

14. Man gebe eine untere und eine obere Schranke des Integrals $I = \int_0^{\pi/3} \sqrt{\cos x}\,dx$ an.

15. Man beweise, daß $\int_0^1 \sin^2 x\,dx \leqq \frac{1}{3}$ ist.

16. Man beweise, daß $\int_0^1 \cos^2 x\,dx \geqq \frac{2}{3}$ ist.

17. Gegeben seien die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = 2 - x^2$. Man berechne den Inhalt der Punktmenge

$$I_f^g = \{(x, y): -1 \leqq x \leqq 1 \wedge f(x) \leqq y \leqq g(x)\}.$$

18. Man beweise die folgenden Ungleichungen:

a) $0 < \int\limits_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1 + x^6}}\, dx < \frac{1}{20}$, b) $0 < \int\limits_0^{200} \frac{e^{-5x}}{20 + x}\, dx < \frac{1}{100}$.

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es für eine auf dem Intervall $[\![a, b]\!]$ stetige Funktion f ein $\zeta \in [\![a, b]\!]$ mit $\int\limits_a^b f(x)\, dx = f(\zeta)\,(b - a)$. $f(\zeta)$ heißt ***Mittelwert*** der Funktion f im abgeschlossenen Intervall $[\![a, b]\!]$.

19. Man bestimme den Mittelwert der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^2$ im Intervall $[\![a, b]\!]$, b) $f(x) = \frac{1}{x}$ im Intervall $[\![1, 3]\!]$,

c) $f(x) = \sin x$ im Intervall $[\![0, \pi]\!]$.

20. Man berechne die folgenden Integrale:

a) $-\int\limits_\pi^{2\pi} \cos x\, dx$, b) $\int\limits_0^2 (x^5 - 3x^2 + x - 7)\, dx$,

c) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1 + \sin^2 x}{\sin^2 x}\, dx$, d) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$, e) $\int r \cos t\, dt$,

f) $\int \frac{dx}{2x}$, g) $\int x \sqrt{x}\, dx$,

h) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$, i) $\int \frac{x^2 - 3x + 4}{x}\, dx$, j) $\int \frac{x^2 - x + 1}{x - 2}\, dx$.

k) $\int \frac{x^4}{x - 1}\, dx$, l) $\int e^{-x}\, dx$.

21. Man berechne folgende Integrale durch partielle Integration:

a) $\int x^2 \ln x\, dx$, b) $\int x \cosh x\, dx$, c) $\int\limits_0^{\pi/2} x \sin x\, dx$,

d) $\int (x^2 + x) \ln (x + 1)\, dx$, e) $\int x^2 \sin x\, dx$, f) $\int x \ln (x^2 - 1)\, dx$,

g) $\int \ln x\, dx$, h) $\int x \ln^2 x\, dx$, i) $\int x \arctan x\, dx$,

j) $\int\limits_1^2 x^{-2} \ln x\, dx$, k) $\int (x^2 - 1) \cos x\, dx$, l) $\int\limits_0^{2\pi} x^3 \cos x\, dx$,

m) $\int \sin^2 x\, dx$.

22. Man beweise, daß die Integrale

a) $\int x^n e^x \, dx$, b) $\int x^n \cos x \, dx$, c) $\int x^n \sin x \, dx$

für natürliche Zahlen n elementar integrierbar sind und für negative ganzzahlige n auf die (nicht elementar auswertbaren) Integrale

a) $\int \frac{e^x}{x} dx$, b) $\int \frac{\cos x}{x} dx$, c) $\int \frac{\sin x}{x} dx$

zurückgeführt werden können.

23. Man berechne das Integral $I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$ (n eine natürliche Zahl).

Lösung: Partielle Integration ergibt

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \, d(-\cos x) = -\sin^{n-1} x \cos x|_0^{\pi/2} + (n-1) \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx.$$

Der erste Summand verschwindet beim Einsetzen von $\frac{\pi}{2}$ und 0. Ersetzen wir im zweiten Summanden $\cos^2 x$ durch $1 - \sin^2 x$, so erhalten wir

$$I_n = (n-1) \int\limits_0^{\pi/2} (\sin^{n-2} x - \sin^n x) \, dx = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n.$$

Aus der letzten Beziehung folgt

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Mit Hilfe dieser Rekursionsformel kann das Integral I_n durch I_0 oder I_1 ausgedrückt werden.
Für $n = 2m$ gilt nämlich

$$I_{2m} = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m} x \, dx = \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 3 \cdot 1}{2m(2m-2)\cdots 4 \cdot 2} \frac{\pi}{2};$$

für $n = 2m + 1$ gilt

$$I_{2m+1} = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x \, dx = \frac{2m(2m-2)\cdots 4 \cdot 2}{(2m+1)(2m-1)\cdots 3 \cdot 1}.$$

Zur kürzeren Schreibweise führen wir das Symbol $n!!$ ein. Es bezeichnet das Produkt der geraden natürlichen Zahlen $\leqq n$, falls n gerade ist, oder das Produkt der ungeraden natürlichen Zahlen $\leqq n$, falls n ungerade ist. Wir erhalten dann

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2} & \text{für } n \text{ gerade,} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

24. Man entwickle eine Rekursionsformel für folgende Integrale:

a) $\int \sin^n x \, dx$, b) $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

25. Man beweise die Formeln

a) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x \cos (n+2)\, x\, dx = 0$, b) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x \sin (x+2)\, x\, dx = \frac{1}{n+1}$,

c) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x \cos (n+2)\, x\, dx = -\frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n+1}$.

26. Man berechne mit Hilfe bestimmter Integrale die Grenzwerte der folgenden Summen:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{2n-1} \frac{j}{n^2}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n-1} \frac{n}{n^2+j^2}$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \sum\limits_{j=1}^{n-1} \sin \frac{j\pi a}{n}$.

27. Man berechne die folgenden Integrale:

a) $\int \frac{3\,dx}{\cos^2 (4x-2)}$, b) $\int \sin (ax+b)\, dx \quad (a \neq 0)$,

c) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} \quad (a \neq 0)$, d) $\int \sin mx \sin nx\, dx \quad (m, n \in \mathbf{N}^*, m \neq n)$,

e) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos \frac{x}{3}\, dx$, f) $\int \frac{6x+4}{3x^2+4x+7}\, dx$,

g) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{a+b\cos x}\, dx \quad (a \neq 0, b \neq 0)$, h) $\int \frac{x^2 - \frac{1}{9}}{15x^3 - 5x + 7}\, dx$,

i) $\int\limits_0^{1} \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx$, j) $\int \frac{\sin (\ln x)}{x}\, dx$, k) $\int \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^2}\, dx$,

l) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$, m) $\int \frac{\operatorname{artanh} 3x}{1-9x^2}\, dx$.

28. Man berechne folgende Integrale:

a) $\int \frac{x-a}{x+a}\, dx$, b) $\int \frac{2a}{a^2-x^2}\, dx$, c) $\int \frac{3x}{(2+3x^2)^3}\, dx$,

d) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$, e) $\int \frac{e^x}{e^x - e^{-x}}\, dx$ f) $\int \sqrt{e^x+1}\, dx$,

g) $\int \sqrt{e^x-1}\, dx$, h) $\int \frac{dx}{1-\cos x}$, i) $\int \frac{\cos x}{1+2\sin x}\, dx$,

j) $\int \cos^3 x \sin x\, dx$, k) $\int \frac{dx}{\cosh x}$, l) $\int \cosh^2 x \sinh^3 x\, dx$.

29. Man berechne folgende Integrale:

a) $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx \quad (a > 0)$, b) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, c) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx$,

d) $\int \frac{dx}{\sin x}$, e) $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$.

30. Man berechne die folgenden Integrale:

a) $\int\limits_0^{\pi/2} (\cos x) \ln (1 + \sin x)\, dx$, b) $\int\limits_0^{\pi} (2x + 2 \cos x)\, e^{x^2 + 2\sin x}\, dx$,

c) $\int\limits_{-1}^{1} x^4 (1 + x^5)^5\, dx$, d) $\int\limits_0^2 e^{\sqrt{x}}\, dx$,

e) $\int\limits_0^1 \frac{2x}{1 + x^4}\, dx$, f) $\int\limits_1^2 \sin \sqrt[4]{x - 1}\, dx$.

31. Man bestimme den Mittelwert der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \tan x$ im Intervall $[\![0, \frac{\pi}{3}]\!]$, b) $f(x) = \ln x$ im Intervall $[\![1, e]\!]$,

c) $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ im Intervall $[\![-1, +1]\!]$.

Vgl. die Vorbemerkungen zur Aufgabe 19.

32. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \ln x$. Man bestimme eine Zahl ζ mit $1 < \zeta < e$, für die $\int\limits_1^e f(x)\, dx = f(\zeta)\, (e - 1)$ gilt.

33. Man berechne folgende Integrale:

a) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}$, b) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{1 + x^2}$, c) $\int\limits_0^\infty x e^{-x^2}\, dx$, d) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$.

34. Die Funktion f sei durch

$$f(x) = \begin{cases} 5 \sin x + 3x & \text{für } x \leqq 1, \\ \frac{1}{x} + 3x^2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

gegeben. Man berechne das Integral $\int\limits_{-2}^{5} f(x)\, dx$.

35. Man berechne den Inhalt der Fläche F, die durch die Graphen der Funktionen $f(x) = x^2 \ln x$, $g(x) = -(\ln x)^2$ $(1 \leqq x \leqq e)$ und die Gerade $x = e$ begrenzt wird.

36. Man zeige, daß die Graphen der Funktionen

$$f(x) = 2 + x^2 + \sqrt{1 - x^2} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1),$$
$$g(x) = 2 + x^2 - \sqrt{1 - x^2} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

den Rand einer Fläche F bilden, und bestimme den Inhalt von F.

37. Die Fläche, die von der y-Achse, der x-Achse und vom Graphen der Funktion $f(x) = \cos x \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ begrenzt wird, soll durch eine Parallele zur y-Achse halbiert werden. In welchem Abstand von der y-Achse ist die Parallele zu ziehen?

38. Man berechne die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int \frac{3x - 5}{x^2 + 2x - 8}\, dx$, b) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 31x + 94}{x^3 + 4x^2 - 19x + 14}\, dx$,

c) $\displaystyle\int \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 - 2x}\, dx$, d) $\displaystyle\int \frac{2x^4 + 6x^3 - 7x + 2}{x^3 + 3x^2 - x - 3}\, dx$,

e) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 15x + 8}{x^3 - 3x^2 - 9x - 5}\, dx$, f) $\displaystyle\int \frac{2x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 3x}{x^3 + 6x^2 + 9x}\, dx$,

g) $\displaystyle\int \frac{6x^3 + 13x^2 + 101x - 7}{(x^2 + 1)(x^2 + 4x + 20)}\, dx$, h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}\, dx$,

i) $\displaystyle\int \frac{15x^3 - 41x^2 + 65x - 149}{(x^2 - 4x + 5)(x^2 + 4)^2}\, dx$, j) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 + 9)^2}$.

39. Man berechne die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1 - \cos x}\, dx$, b) $\displaystyle\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}$.

40. Man gebe eine Potenzreihenentwicklung folgender Funktionen an:

a) $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\, dt \quad (x > 0)$, b) $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$.

41. Man gebe die Potenzreihenentwicklung folgender Funktionen mit Hilfe des Verfahrens der gliedweisen Integration an:

a) $f(x) = \arcsin x$, b) $g(x) = \ln \dfrac{1}{1 - x}$, c) $h(x) = \ln \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$.

42. Man berechne die Bogenlänge der durch die folgenden Gleichungen gegebenen Kurven zwischen den Punkten mit den Abszissen $x = a$ und $x = b$:

a) $y = \sqrt{x^3}$ (*Neilsche Parabel*); $a = 0, b = 4$,

b) $y = \ln x;\quad a = \sqrt{3}, b = \sqrt{8}$,

c) $y = 1 - \ln\cos x;\quad a = 0, b = \dfrac{\pi}{4}$.

43. Man berechne die Bogenlänge folgender ebener Kurven bzw. Raumkurven:

a) $x = a\cos^5 t, y = a\sin^5 t$ im Intervall $0 < x < a$,

b) $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$ im Intervall $0 < t < t_0$,

c) $x = e^t\cos t, y = e^t\sin t, z = e^t$ im Intervall $-\infty < t < 0$.

44.* Man bestimme die größte Krümmung für die Kurve $\mathfrak{r}(t) = (a\cos t, b\sin t)$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$.

45.* Bei Rotation einer durch die Gleichung $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ $(0 < a < b)$ bestimmten Kreisfläche um die x-Achse wird ein sogenannter Torus erzeugt. Man berechne die Oberfläche $O(M)$ und das Volumen $\mu(M)$ des Torus.

46.* Man berechne $\int\limits_B f(x, y)\, d(x, y)$ für

a) $f(x, y) = xy^2$ und B die Fläche zwischen den Graphen der Funktionen $y = x^2$ und $y = 2x$,

b) $f(x, y) = x^2$ und B die obere Hälfte des Einheitskreises,

c) $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y^2}$ und B die Fläche, die von den Geraden $x = 2$, $y = x$ und der Hyperbel $xy = 1$ begrenzt wird.

47.* Man berechne $\int\limits_B xy\, d(x, y)$, wenn B durch folgende Ungleichungen charakterisiert wird:

a) $0 \leqq x \leqq a, 0 \leqq y \leqq b\left(1 - \dfrac{x}{a}\right)$, b) $0 \leqq x \leqq a, 0 \leqq y \leqq b$,

c) $0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq b \cdot \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$.

48.* Man bestimme das Volumen desjenigen Körpers, den der Zylinder $x^2 + y^2 = rx$ aus der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ herausschneidet (*Vivianischer Körper*).

Hinweis: Man führe Polarkoordinaten ein und wende die Transformationsformel für mehrfache Integrale an.

Einiges über Differentialgleichungen

Kontrollfragen

1. Was versteht man unter einer gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung? Wie sind die Begriffe Lösung, Lösungsmannigfaltigkeit und Lösungskurve definiert?

2. Wie ist der Begriff des Richtungselementes für eine explizite gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung definiert? Was versteht man unter einer Isokline einer expliziten gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung? Man gebe ein Beispiel an.
3. Wie lautet die zum Anfangswertproblem $y' = F(x, y)$ und $y(a) = b$ äquivalente Integralgleichung?
4. Wie lautet der Existenz- und Einzigkeitssatz für explizite gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung? Es ist ein Verfahren zur Konstruktion der Lösung des Anfangswertproblems $y' = F(x, y)$, $y(a) = b$ anzugeben.
5. Die Methode der Trennung der Variablen zur Lösung der Anfangswertprobleme $y' = g(x)\,h(y)$, $y(a) = b$ und $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$, $y(a) = b$ ist an je einem Beispiel zu erläutern.
6. Wie lauten die Schritte, die zur Lösung des Anfangswertproblems $y' + g(x)\,y = h(x)$, $y(a) = b$ führen?
7. Welche Rechenschritte führen zur Lösung des Anfangswertproblems $y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$, $y(a) = b_0$, $y'(a) = b_1$; $y''(a) = b_2$? Dabei sind die folgenden Fälle zu unterscheiden: das charakteristische Polynom hat nur reelle, einfache Nullstellen; es hat nur reelle, aber mehrfache Nullstellen; es besitzt auch komplexe Nullstellen.

Aufgaben

1. Man löse das Anfangswertproblem

$$y'' + xy = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$$

durch Potenzreihenansatz.

Lösung: Wir machen den Ansatz $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, aus dem sofort $c_0 = 2$ und $c_1 = 3$ folgt. Wir setzen die Potenzreihe in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\,c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} = 0.$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$c_2 = 0, \quad c_3 = -\frac{c_0}{2\cdot 3} = -\frac{1}{3}, \quad c_4 = -\frac{c_1}{3\cdot 4} = -\frac{1}{4}, \quad c_5 = -\frac{c_2}{4\cdot 5} = 0.$$

$$c_6 = -\frac{c_3}{5\cdot 6} = \frac{c_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} = \frac{1}{3\cdot 5\cdot 6}, \quad c_7 = -\frac{c_4}{6\cdot 7} = \frac{c_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} = \frac{1}{4\cdot 6\cdot 7}.$$

Allgemein ergibt sich

$$c_{3k-1} = 0, \quad c_{3k} = (-1)^k \frac{1}{3\cdot 5\cdot 6 \cdots (3k-1)\,3k}, \quad c_{3k+1} = (-1)^k \frac{1}{4\cdot 6\cdot 7 \cdots 3k(3k+1)}.$$

2. Man löse die folgenden Anfangswertprobleme:

   a) $y^2 + x^2 y' = 0,\ y(1) = 0,$ b) $xy' = y \ln y,\ y(1) = 2,$

   c) $y' \sin x = y \ln y,\ y(0) = 1,$ d) $yy' = x,\ y(1) = 1,$

   e) $yy' + x + 2y = 0,\ y(1) = -1.$

3. Man löse die folgenden Anfangswertprobleme:

   a) $y' + \dfrac{y}{1+x} + x^2 = 0,\ y(0) = 1,$ b) $y' + \dfrac{y}{x} + e^x = 0,\ y(1) = 0.$

4. Man löse die folgenden Anfangswertprobleme:

   a) $y''' + 8y'' + 17y' + 10y = 0,\ y(1) = 6,\ y'(1) = 0,\ y''(1) = 0,$

   b) $y^{(4)} - 3y''' - 2y'' + 2y' + 12y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -1,$
   $y'''(0) = 0,$

   c) $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2,\ y''(0) = 4.$

Lösungen (Auswahl)

I. Allgemeine Grundlagen

Grundbegriffe der Abbildungstheorie

3. b) $B_F(0) = \{0\}$, $B_F(1) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ usw. $B_F(15) = \emptyset$;
   c) $U_F(i) = B_F(i)$ für alle $i \in \mathbf{N}$;
   d) $D(F) = W(F) = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$; f) $F^{-1} = F$;
   g) $F^2 = \{(0, 0)\} \cup \{(x, y) : 1 \leqq x, y \leqq 10\}$.

6. a) $-2, -1, 0, 1, 1, 2, 3, 3$.

12. a) $f^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $f^{4n} = e$, $f^{4n+1} = f$, $f^{4n+2} = f^2$, $f^{4n+3} = f^3$.

13. a) $(1\ 4\ 2\ 5)\ (6\ 3)\ (8\ 10\ 9)$; b) $(1\ 2\ 10\ 5\ 6)\ (3\ 9\ 4\ 7\ 8)$.

14. a) 8 (gerade), 13 (ungerade).

19. a) $xRy \Leftrightarrow x + y = 0$; b) $xRy \Leftrightarrow [x] = [y]$; c) $xRy \Leftrightarrow |x - y| \in \mathbf{Z}$.

26. a) $\tau(R) = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (4, 2), (4, 3)\}$;
    b) $\omega(R) = M \times M$

Das System der natürlichen Zahlen

6. a) $x + y = x \cdot y \Leftrightarrow x = y = 0 \vee x = y = 2$;
   b) $x + y = x^y \Leftrightarrow (x = 1 \wedge y = 0) \vee x = y = 2$;
   c) $x \cdot y = x^y \Leftrightarrow (x = 0 \wedge y \geqq 1) \vee (x = 1 \wedge y = 1) \vee x = y = 2$;
   d) $x^y = y^x \Leftrightarrow x = y \vee (x = 2 \wedge y = 4) \vee (x = 4 \wedge y = 2)$.

8. a) $n! \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu}{\nu!}$; b) $(n-k)! \sum_{\nu=0}^{n-k} \frac{(-1)^\nu}{\nu!}$; c) $\frac{n!}{k!} \sum_{\nu=0}^{n-k} \frac{(-1)^\nu}{\nu!}$.

14. a) $2^{n \cdot m}$; b) $(2^n - 1)^m$; c) $(n + 1)^m$; d) n^m;
    e) $\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (n - \nu)^m$, falls $m \geqq n$ (sonst 0);
    f) $\sum_{\nu=0}^{\min(m,n)} \binom{m}{\nu} \binom{n}{\nu} \nu!$; g) $\binom{n}{m} \cdot n!$; h) $n!$, falls $m = n$ (sonst 0).

15. d) $\frac{n!}{(n-k)!} S(m, k)$ für $1 \leqq k \leqq n \leqq m$.

16. a) 324632; b) 425; c) 142506; d) 2048.

17. a) $\frac{24!}{(4!)^6} \cdot \frac{36!}{(3!)^{12}} \cdot 3! \approx 5{,}246 \cdot 10^{47}$;

b) $\frac{24! \cdot 36!}{(4!)^6 \cdot (3!)^{12} \cdot 6! \cdot 12!} \approx 4{,}137 \cdot 10^{34}$.

18. a) 903000; b) 3003; c) 6720; d) 75600; e) 31 bzw. 101; f) 877.

19. a) $\binom{n-1}{k-1}$; b) 833.

20. a) $\frac{1}{2} n(n+1) + 1$.

21. a) $k + \frac{k}{2}$, falls k gerade, und $k + \frac{k-1}{2}$, falls k ungerade ist.

24. a) Mindestens eine der Zahlen m, n muß ungerade sein;

b) $(m+1)(n+1)$; c) $\frac{1}{2}(m+1)(m+1) - 1$.

25. a) $\binom{m+n}{n}$; b) $\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2}$;

c) und d) $2\sum_{k=1}^{n-1} \left(\binom{2k-2}{k-1} - \binom{2k-2}{k-2}\right)\left(\binom{2(n-k)-2}{n-k-1} - \binom{2(n-k)-2}{n-k-2}\right)$.

26. $\binom{2n}{n}^2$.

27. 377.

31. a) $d = 7, \alpha = 19, \beta = -177$; b) $d = 13, \alpha = -19. \beta = 74$;
c) $d = 43, \alpha = -263882, \beta = 1978217$;
d) $d = 11, \alpha = 32, \beta = 0, \gamma = -65$;
e) $d = 2, \alpha = 0, \beta = 124982, \gamma = 437, \delta = -227240$.

32. a) 254464; b) 45903; c) 3025275; d) 562395834.

36. a) $3584 = 2^9 \cdot 7$, $497 = 7 \cdot 71$;
b) $4823 = 7 \cdot 13 \cdot 53$; $975 = 3 \cdot 5^2 \cdot 13$; usw.

45. $x = t^n$, $y = t^m$ mit $t \in \mathbb{N}$.

47. Nein!

48. 5.

50. a) $n = 1$ bzw. $n = 3$; b) n ist die Primzahl, bzw. n ist Potenz von 2.

53. a) Ist $m + n$ ungerade, so kann der (m, n)-Springer jedes Feld erreichen, ist $m + n$ gerade, so erreicht er genau die Felder, die bei üblicher Färbung des Brettes dieselbe Farbe wie das Ausgangsfeld haben.

b) Für gerades n; in diesem Fall kann jedes Nachbarfeld in $n + 1$ Zügen erreicht werden.

55. $q(0, 5) = 0$, $r(0, 5) = 0$,
$q(1, 5) = q(0, 5) + \gamma(r(0, 5) + 1, 5) = 0 + \gamma(1, 5) = 0$,
$r(1, 5) = (r(0, 5) + 1) \cdot \varkappa(r(0, 5) + 1, 5) = 1 \cdot \varkappa(1, 5) = 1$ usw.

56. a) $\alpha(n, m) = \begin{cases} 1, \text{ falls } m \mid n \text{ gilt,} \\ 0 \text{ sonst;} \end{cases}$

b) $\nu(n, m) = |\{i: 1 \leqq i \leqq m \wedge i \mid n\}|$;

c) $\tau(n) = |\{i: 1 \leqq i \leqq n \wedge i \mid n\}|$;

d) $\pi(n) = \begin{cases} 1, \text{ falls } n \text{ Primzahl ist,} \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$

57. a) $4149 = [1000000110010]_2 = [12200200]_3 = [100653]_8 = [2499]_{12} = [199]_{60}$; usw.

c) $[4231]_5 = 566$; usw.

58. c) $[101101011101]_2 = [5535]_8$; $[716327]_8 = [111001110011010111]_2$.

59. a) $[120121]_3 + [22122]_3 = [220020]_3 \quad (321 + 233 = 654)$;

b) $[345]_5 \cdot [2114]_5 = [1342312]_5 \quad (98 \cdot 284 = 27832)$;

c) $[101101]_2 : [101]_2 = [1001]_2 \quad (45:5 = 9)$.

63. a) 6; b) 7; c) 79; d) 00.

Der Bereich der gebrochenen Zahlen

15. a) $\frac{44}{49}$; b) $\frac{1}{6}$; c) $\frac{2}{5}$; d) $\frac{m-1}{m(m-1)+1}$;

e) $\frac{9n+1}{2(9n+1)+1}$; f) $\frac{22n+5}{33n+7}$; g) $\frac{2n^3+3n^2-2}{4n^4+6n^3+n^2-3n-1}$.

16. a) 3; b) 2.

17. a) 9409; b) 1.

18. $\frac{n-m}{n}$.

33. $k = 4, 7, 28$.

34. a) (2, 4, 4), (4, 2, 4), (4, 4, 2), (2, 3, 6), (2, 6, 3), (3, 2, 6), (3, 6, 2), (6, 2, 3), (6, 3, 2), (3, 3, 3).

35. a) alle n; b) alle n mit $10 \mid n$; c) alle n; d) alle n; e) n ungerade.

51. a) $l_0 = 9$; b) 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97.

53. $6 \mid g$.

54. $\frac{11}{50}$.

55. c) $\frac{p_5}{q_5} = \frac{185}{136}$.

56. a) $\frac{73}{43}$.

57. a) 187:36; b) 161:31.

58. $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = [1, 1, \ldots, 1]$; Näherungsbrüche: $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \ldots$

Der Bereich der rationalen Zahlen

47. $[2]_{16} \cdot [8]_{16}$ und $[4]_{16} \cdot [4]_{16}$.

54. 76.

55. a) 32; b) 1; c) 19; d) 29; e) 5; f) 3.

56. 71.

57. Nein.

65. a) $x = 1 + 3r,\ r \in \mathbf{Z}$;
b) $x = 3 + 17r,\ r \in \mathbf{Z}$;
c) $x = 11 + 15r,\ r \in \mathbf{Z}$;
d) $x = 2 + 8r,\ r \in \mathbf{Z}$;
e) $x = 4 + 13r,\ r \in \mathbf{Z}$;
f) $x = 4 + 47r,\ r \in \mathbf{Z}$;
g) $x = 20 + 37r,\ r \in \mathbf{Z}$;
h) $x = 2 + 5r,\ r \in \mathbf{Z}$;
i) $x = 9 + 13r,\ r \in \mathbf{Z}$;
j) $x = 11 + 15r,\ r \in \mathbf{Z}$;
k) $x = 3 + 7r,\ r \in \mathbf{Z}$;
l) $x = 2 + 5r,\ r \in \mathbf{Z}$;
m) $x = 4 + 7r,\ r \in \mathbf{Z}$;
n) $x = 6 + 7r,\ r \in \mathbf{Z}$;
o) $x = 1 + 5r,\ r \in \mathbf{Z}$;
p) $x = 9 + 11r,\ r \in \mathbf{Z}$.

66. a) $x_1 = 2 + 15r,\ r \in \mathbf{Z}$, $x_2 = 7 + 15r,\ r \in \mathbf{Z}$, $x_3 = 12 + 15r,\ r \in \mathbf{Z}$;
b) nicht lösbar;
c) $x_1 = 3 + 25r,\ r \in \mathbf{Z}$, $x_2 = 8 + 25r,\ r \in \mathbf{Z}$, $x_3 = 13 + 25r,\ r \in \mathbf{Z}$, $x_4 = 18 + 25r,\ r \in \mathbf{Z}$, $x_5 = 23 + 25r,\ r \in \mathbf{Z}$;
d) $x_1 = 6 + 35r,\ r \in \mathbf{Z}$, $x_2 = 13 + 35r,\ r \in \mathbf{Z}$, $x_3 = 20 + 35r,\ r \in \mathbf{Z}$, $x_4 = 27 + 35r,\ r \in \mathbf{Z}$, $x_5 = 34 + 35r,\ r \in \mathbf{Z}$;
e) nicht lösbar;
f) $x_1 = 26 + 93r,\ r \in \mathbf{Z}$, $x_2 = 57 + 93r,\ r \in \mathbf{Z}$, $x_3 = 88 + 93r,\ r \in \mathbf{Z}$;
g) $x_1 = 9 + 138r,\ r \in \mathbf{Z}$, $x_2 = 32 + 138r,\ r \in \mathbf{Z}$, $x_3 = 55 + 138r,\ r \in \mathbf{Z}$, $x_4 = 78 + 138r,\ r \in \mathbf{Z}$, $x_5 = 111 + 138r,\ r \in \mathbf{Z}$, $x_6 = 124 + 138r,\ r \in \mathbf{Z}$;
h) $x_1 = 74 + 501r,\ r \in \mathbf{Z}$, $x_2 = 241 + 501r,\ r \in \mathbf{Z}$, $x_3 = 408 + 501r,\ r \in \mathbf{Z}$;
i) $x_1 = 17 + 36r,\ r \in \mathbf{Z}$, $x_2 = 35 + 36r,\ r \in \mathbf{Z}$;
j) $x_1 = 11 + 51r,\ r \in \mathbf{Z}$, $x_2 = 28 + 51r,\ r \in \mathbf{Z}$, $x_3 = 45 + 51r,\ r \in \mathbf{Z}$;
k) $x_1 = 8 + 87r,\ r \in \mathbf{Z}$, $x_2 = 37 + 87r,\ r \in \mathbf{Z}$, $x_3 = 66 + 87r,\ r \in \mathbf{Z}$;
l) nicht lösbar.

67. a) $x = 2 + 5r,\ r \in \mathbf{Z}$;
b) $x = 4 + 5r,\ r \in \mathbf{Z}$;
c) nicht lösbar;
d) $x = 7 + 13r,\ r \in \mathbf{Z}$;
e) $x = 4 + 17r,\ r \in \mathbf{Z}$;
f) $x = 3 + 12r,\ r \in \mathbf{Z}$;
g) $x = 10 + 12r,\ r \in \mathbf{Z}$;
h) nicht lösbar.

68. a) $x = 6 + 18r,\ r \in \mathbf{Z}$;
b) $x = 25 + 27r,\ r \in \mathbf{Z}$;
c) $x = 7 + 117r,\ r \in \mathbf{Z}$;
d) $x = 265 + 311r,\ r \in \mathbf{Z}$;
e) $x = 51 + 360r,\ r \in \mathbf{Z}$;
f) $x = 29 + 613r,\ r \in \mathbf{Z}$;
g) nicht lösbar;
h) $x = 65 + 222r,\ r \in \mathbf{Z}$;
i) $x = 26 + 119r,\ r \in \mathbf{Z}$;
j) $x = 49 + 153r,\ r \in \mathbf{Z}$.

69. $y_1 = 4 + 5r$; $y_2 = 2 + 5r$, $r \in \mathbf{Z}$.

71. a) $x = -13 + 4r$, $r \in \mathbf{Z}$, $y = 13 - 3r$;
b) $x = 3 - 13r$, $r \in \mathbf{Z}$, $y = -3 - 8r$;
c) $x = 6 - 19r$, $r \in \mathbf{Z}$, $y = 1 + 8r$;
d) $x = 20 - 22r$, $r \in \mathbf{Z}$, $y = 35 - 39r$;
e) $x = 1 - 25r$, $r \in \mathbf{Z}$, $y = -4 - 17r$;
f) $x = -15 + 37r$, $r \in \mathbf{Z}$, $y = 18 - 43r$;
g) $x = -6 + 47r$, $r \in \mathbf{Z}$, $y = 7 - 53r$;
h) $x = 17 - 3r$, $r \in \mathbf{Z}$, $y = 20 - 45r$;
i) $x = 1 - 16r$, $r \in \mathbf{Z}$, $y = 1 - 24r$;
j) nicht lösbar;
k) $x = 55 + 129r$, $r \in \mathbf{Z}$, $y = -52 - 122r$;
l) nicht lösbar.

72. $$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 + 6d \\ 150 - 5d \\ 120 + d \end{pmatrix} \middle| \, 6 \leqq d \leqq 29,\ d \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Der Bereich der reellen Zahlen

15. b) $x = \frac{25}{16}$; c) $-1 < x \leqq -\sqrt{\sqrt{12} - 3}$;
d) $0 < x < p\left(1 + \sqrt{3}\right)$, $x < p\left(1 - \sqrt{3}\right)$;
e) $a > 0$: keine Lösung, $a = 0 : x > 0$, $a < 0 : x = -2a$.

18. c) $(2, 2, 0)$, $(-2, 2, 0)$.

Der Bereich der komplexen Zahlen

1. b) $117 + 44i$; c) $-76i$; d) $\frac{r^2 - s^2}{r^2 + s^2} + \frac{2rs}{r^2 + s^2}\, i$;
e) $\frac{22}{159} - \frac{5}{318} i$; f) 2; g) $2i^{n-1}$; h) $\pm(1 + i)$;
i) $\pm(2 - 2i)$; l) $\pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\, i\right)$; n) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{2}$ (4 Werte).

5. $\pm(-s + ri)$

6. d) $r = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, $\varphi = 15°$; e) $2^{12}\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$; f) $\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi$.

9. b) $z = \frac{3}{2} - 2i$.

14. a) 0; c) $\cos\frac{n\pi}{3} + i \sin\frac{n\pi}{3}$; d) $a^2 + b^2 - ab$; e) $2\cos\frac{2\pi}{3} n$.

16. a) 0; c) $\frac{n}{\varepsilon - 1}$.

17. a) $z = \dfrac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1}$, wobei ε die n-ten Einheitswurzeln durchläuft; b) $z = i\,\dfrac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1}$; c) $z = \varepsilon$.

19. a) $\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\dfrac{\pi}{4} n\right)$.

II. Algebra

Algebraische Strukturen

2. a) Nein; b) ja; c) ja.

3.

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	d	a	b
c	b	c	d	a
d	d	a	b	c

4. Bis auf Isomorphie gibt es in den Fällen a) und b) je ein und im Fall c) fünf Monoide.

7. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

11. Es gibt (nach Festlegung des Nullelements) für $+$ nur eine Möglichkeit (vgl. Aufgabe 1), für $\cdot$ zwei Möglichkeiten:

$+$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$\cdot$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	a
c	a	a	a

bzw.

$\cdot$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

(Zeroring bzw. Restklassenring modulo 3).

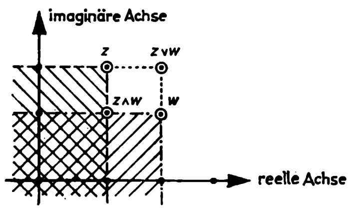
15. $a \leqq b \leqq c$.

$\wedge$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	b
c	a	b	c

$\vee$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	c	c

Vertauschung der Elemente liefert isomorphe Verbände.

16. $\inf(z, w) = \min\{x, u\} + i \min\{y, v\}, \quad \sup(z, w) = \max\{x, u\} + i \max\{y, v\}.$



Gruppen

5. b) $|G| = 24$; d) $G \cong S_4$.

6. Gruppenordnung: $\varphi(9) = \varphi(3^2) = 3 \cdot (3 - 1) = 6$; erzeugende Elemente: [2] und [5].

7. Die für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bzw. für $\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ erhaltenen Matrizen erzeugen eine endliche bzw. unendliche Untergruppe von G.

9. Die Gruppe ist nicht abelsch.

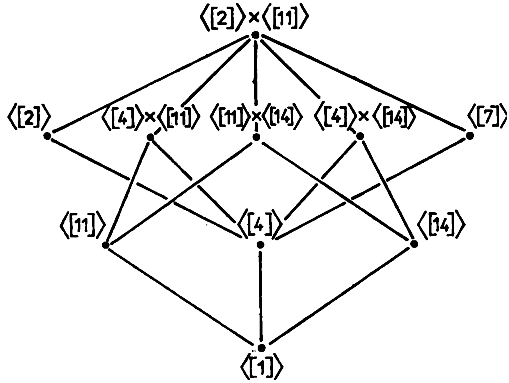
23. Ordnung 4: zyklische Gruppe und Kleinsche Vierergruppe,
Ordnung 6: zyklische Gruppe und symmetrische Gruppe S_3.

25. $A(V) \cong S_3$.

30. Die Gruppe der inneren Automorphismen der Quaternionengruppe ist zur Kleinschen Vierergruppe isomorph.

32. $\{\{e\}, \{a^2\}, \{a, a^3\}, \{b, a^2b\}, \{ab, a^3b\}\}$.

41.



42. $Z_4 \times Z_2, Z_4, Z_2 \times Z_2, Z_2, \langle e \rangle$ (wobei Z_m die zyklische Gruppe der Ordnung m bezeichnet).

45. $|B_{2S}| = 12$, auftretende Elementordnungen: 1, 2, 3, 6.

50. $Q' = \langle a^2 \rangle$.

51. $Q = \langle a \rangle \langle b \rangle$. Q läßt sich nicht als direktes Produkt eigentlicher Untergruppen darstellen, da der Durchschnitt je zweier eigentlicher Untergruppen von Q immer $\langle a^2 \rangle$ ist.

53. a) $([3]^x, \varepsilon^y)$ mit $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$, $x \in \{0, 1, 2, 3\}$, $y \in \{0, 1, 2\}$;

b) zyklische Gruppe der Ordnung 12.

54. $(2, 9, 10, 4)(5, 11)(7, 12, 8) = (4, 2)(4, 9)(4, 10)(5, 11)(7, 12)(7, 8)$.

56. Die erzeugenden Elemente können durch folgende Permutationen dargestellt werden:

$$a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad b \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad c \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

oder

$$a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad b \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$c \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ringe, Integritätsbereiche, Körper

4. Alle Zahlen der Form $(-1)^m \left(1 + \sqrt{2}\right)^n$ $(m \in \{0, 1\}, n \in \mathbf{Z})$ sind Einheiten von I.

6. 1 und -1.

9. Sämtliche Quaternionen der Form $0 + a_2 i + a_3 j + a_4 k$, für die $a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1$ ist.

11. b) $R_2 \cong R_3$, R_1 ist nicht zu R_2 und R_3 isomorph.

13. $\mathfrak{n} := \operatorname{Kern} f = \{2a + 2b\alpha + 2c\alpha^2 : a \in \mathbf{Z} \wedge b \in \mathbf{Z} \wedge c \in \mathbf{Z}\}$. R wird durch $\mathfrak{n}$ in acht Restklassen modulo $\mathfrak{n}$ zerlegt: $R = \bigcup_{r,s,t \in \{0,1\}} (\mathfrak{n} + (r + s\alpha + t\alpha^2))$. Bei f werden alle Elemente der Restklasse $\mathfrak{n} + (r + s\alpha + t\alpha^2)$ $(r, s, t \in \{0, 1\})$ auf die Matrix

$$\begin{pmatrix} [r] & [s] & [t] \\ [0] & [r] & [s] \\ [0] & [0] & [r] \end{pmatrix}$$

abgebildet. $\mathfrak{n} = (2)$ ist Hauptideal. $\mathfrak{n}$ ist kein Primideal, denn $(\mathfrak{n} + \alpha^2) \in R/\mathfrak{n}$ ist wegen $(\mathfrak{n} + \alpha^2)^2 = \mathfrak{n}$ Nullteiler von $R/\mathfrak{n}$.

17. $66045 \sqcap 51170 \sqcap 20706 = 119, \quad 119 = 1 \cdot 66045 - 4709 \cdot 51170 + 11634 \cdot 20706$.

18. $3 + i = 1 \cdot (5 + 5i) - 1 \cdot (2 + 4i)$. Weil $1, i, -1, -i$ die Einheiten des Ringes sind, erkennt man sofort die übrigen größten gemeinsamen Teiler und deren Vielfachsummendarstellungen.

19. $5 + 5i = (1 + i)(2 - i)(2 + i)$, $2 + 4i = (1 + i)^2 (2 - i)$.
(Die Faktoren sind bis auf die Einheiten $1, i, -1, -i$ eindeutig bestimmt.)

21. Teilkörper von $\mathbf{C}$ aus allen Zahlen der Form $q + ri$ $(q, r \in \mathbf{Q})$.

22. Je einen (bis auf Isomorphie).

Polynome

1. a) 27, darstellbar in der Form $f : x \mapsto f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ $(x, a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{Z}/(3))$;
b) 81; c) das Hauptideal $([1] x^3 + [2] x)$ von $\mathbf{Z}/(3)[x]$.

2. $x^3 - 2x^2 + x - 2 = \dfrac{1}{8}(x^5 - 2x^4 - x + 2) - \dfrac{1}{8}(x + 3)(x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6)$.

3. $[1]\,x + [1]$.

7. $g(x) = [k]\,x^p + [p-k]\,x \quad (k \in \{1, 2, \ldots, p-1\})$.

9. $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ sind zweifache Nullstellen von $f(x)$. Das Polynom $x^4 - x^2 - 2$ hat dieselben Nullstellen wie $f(x)$, jede aber nur mit der Vielfachheit 1.

11. $f(x)$ hat die Nullstellen [1] und [2] mit den Vielfachheiten 3 bzw. 4, $g(x) = [1]\,x + 1$ hat nur noch die Nullstelle [2].

12. $6x^5 - 12x^4 - 6x + 12 = 2 \cdot 3(x+1)(x-1)(x-2)(x^2+1)$.

13. $f(x) = (x^2+1)(x^2-2)^2, \quad g(x) = (x^2+1)^2(x-4)$.

15. $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2$.

16. $f_1\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 0{,}9196, \quad f_2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 0{,}9491, \quad \sin\frac{2\pi}{5} = 0{,}9511$.

19. Die Elemente von $K(\vartheta)$ sind

$0 := [0]\,\vartheta + [0] = [0], \quad e := [0]\,\vartheta + [1] = [1], \quad a := [1]\,\vartheta + [0], \quad b := [1]\,\vartheta + [1]$.

Operationstabellen:

+	0	e	a	b
0	0	e	a	b
e	e	0	b	a
a	a	b	0	e
b	b	a	e	0

·	0	e	a	b
0	0	0	0	0
e	0	e	a	b
a	0	a	b	e
b	0	b	e	a

III. Analysis

Einige grundlegende Begriffsbildungen der Analysis

3. $-\infty < x < \frac{5}{2}$.

9. Die Ungleichung gilt genau dann, wenn $a + b \geqq 0$ oder wenn $a = b$ ist.

10. (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3).

26. a) Kreisperipherie und Kreisinneres um $(-3, 0)$ mit dem Radius 2;
    b) Mittelsenkrechte auf der Strecke mit den Endpunkten z_1, z_2;
    c) Halbebene einschließlich der Randgeraden $x = \frac{1}{2}$;
    d) Hyperbel für $a \neq 0$ bzw. Geradenpaar für $a = 0$.

28. a) $-z$; b) $\bar{z}$; c) $-\bar{z}$; d) $i\bar{z}$; e) $-i\bar{z}$.

31. Dann und nur dann, wenn der Quotient $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ reell ist.

39. $D(f) = [\![-r, +r]\!]$, $W(f) = [\![0, r]\!]$.

40. a) $D(f_1) = [\![-1, +1]\!]$; b) $D(f_2) = [\![-a, a[\![$;
c) $D(f_3) = \mathbb{R}$; d) $D(f_4) =]\!]\rightarrow, -2]\!] \cup [\![3, \rightarrow[\![$.

45. a) f_1 ist gerade; b) f_2 ist weder gerade noch ungerade; c) f_3 ist ungerade.

46. a) f_1 ist beschränkt, eine Schranke ist 4;
b) f_2 ist nach oben, aber nicht nach unten beschränkt (0 ist eine obere Schranke);
c) f_3 ist nach unten, aber nicht nach oben beschränkt (0 ist eine untere Schranke);
d) f_4 ist nicht beschränkt.

53. a) $x = 10$; b) $x = 6$; c) $x = \frac{203}{298}$; d) $x = 2$; e) $x = 16$; f) $x = 3$; g) $x = -2$.

Der Grenzwertbegriff

14. 0.

17. Alle Folgen sind konvergent. Die Grenzwerte sind:
a) $\frac{1}{3}$; b) 0; c) 3; d) 0; e) $\frac{5}{4}$; f) $\frac{1}{2}$; g) $-\frac{1}{2}$; h) 0; i) $\frac{1}{2}$; j) $\frac{2}{3}$; k) 3;
l) $\frac{1}{2}$.

23. Sämtliche Folgen sind Nullfolgen.

29. Der Grenzwert ist 1.

30.

	$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$	$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$		$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$	$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$
a)	1	0	e)	0	0
b)	∞	∞	f)	∞	∞
c)	∞	2	g)	0	0
d)	$-\infty$	$-\infty$	h)	3	1

41. a) $S = \frac{1}{2}$; b) $S = 1$; c) $S = 1$; d) $S = \frac{1}{24}$; e) $S = \frac{1}{4}$.

42. Sämtliche Reihen sind divergent.

44. a) Bestimmt divergent; b) $S_n < 2$, konvergent; c) $S_n < 3$, konvergent;
d) $S_n < 2$, konvergent; e) bestimmt divergent, $S_n > \sqrt{n}$.

45. Sämtliche Reihen sind konvergent.

47. $4 \cdot 10^6 + 2$ Glieder.

48. a), d) divergent; b), c), e), f), g), h) konvergent.

62. a) Für $x = n^2$ $(n \in \mathbb{N}^*)$; b) f ist überall stetig.

65. f und g stetig.

67. a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{10}$; c) $-\frac{1}{6}$; d) $\frac{3}{2}$; e) 6; f) $\frac{m}{n}$; g) $\binom{n}{k}$; h) -1.

68. a) $\frac{1}{n}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{15}{2}$; d) 3.

69. a) 1; b) $\frac{1}{e}$; c) $\frac{1}{10}\frac{1}{\ln 10} = \frac{M}{10}$; d) $\ln\frac{a}{b}$; e) $a - b$.

70. a) 2; b) ± 1; c) $\dfrac{a}{2}$; d) 0; e) $\dfrac{1}{2}$.

71. $f(x) = 5 + (x - 3)^2 (x^2 + 1)$.

72. $-2i$ (doppelte Nullstelle) und 1.

73. $f(x) = 2(x - 1)(x + 2)(x - 2)^2$.

74. $f(x) = (x - 2)[(x - 2)^2 + 9]$.

75. $x_0 = 2$, $x_6 = 2{,}120028$, $|x - x_6| < 5 \cdot 10^{-7}$.

83. a) $\dfrac{1}{2}$; b) 4; c) 1; d) $\dfrac{n^2 - m^2}{2}$; e) $\dfrac{1}{2}$; f) $2\cos a$.

85. a) $\ln a$; b) 1; c) 4; d) $\ln a - \ln b$; e) a.

94. a) $z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$, $z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{9}{8}\pi + i\sin\dfrac{9}{8}\pi\right)$;

b) $z_0 = 1\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, $z_1 = 1\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi + i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$,

$z_2 = 1\left(\cos\dfrac{5}{4}\pi + i\sin\dfrac{5}{4}\pi\right)$, $z_3 = 1\left(\cos\dfrac{7}{4}\pi + i\sin\dfrac{7}{4}\pi\right)$

96. $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

97. $z_1 = -2 + i$, $z_2 = -3 + i$.

107. $a = 3$, $b = 6$, $c = -1$, $d = 6$.

Differentialrechnung

11. Die Gleichungen der Normalen lauten:

a) $y = -x + 1$; b) $y = -x + 1$; c) $y = -x + 2k\pi$ (k ganz); d) $y = -x + (4k - 1)\dfrac{\pi}{2}$ (k ganz).

12. a) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 6x - 1}{(x + 3)^2}$; b) $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 14x + 11}{(x - 1)^2 (x + 3)^2}$;

c) $f'(x) = -9\left[\dfrac{x^2 + 7x}{(x - 4)^4}\right]^8 \dfrac{2x^2 + 29x + 28}{(x - 4)^5}$;

d) $f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$, e) $f'(x) = 3(\cos^3 x - 2\sin^2 x \cos x)$;

f) $f'(x) = -9\cos^2 x \sin x$; g) $f'(x) = 2\cos(x + 1)^2 - \dfrac{\sin(x + 1)^2}{(x + 1)^2}$;

h) $f'(x) = -\dfrac{4\sin x\cos x}{(1 + \sin^2 x)^3}$; i) $f'(x) = \dfrac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x + 1}$.

13. a) $f'(x) = \dfrac{4x + 3}{2\sqrt{2x^2 + 3x + 4}}\, e^{\sqrt{2x^2 + 3x + 4}}$;

b) $f'(x) = \ln(a)\left[\frac{a^{\tan x}}{\cos^2 x} + \frac{a^x}{\cos^2 a^x}\right]$;

c) $f'(x) = -\frac{\ln a \cos x}{\sin^2 x}\, a^{\frac{1}{\sin x}}$;

d) $f'(x) = 2(\cosh 2x - \sinh x)$;

e) $f'(x) = \frac{4(\tanh x - 1)^2}{\cosh^2 x}$; f) $f'(x) = -\frac{\sqrt{3}}{\cos x + 2}\operatorname{sgn}(\sin x)$;

g) $f'(x) = -\frac{2\ln a}{1+x^2}\, a^{\arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)} \operatorname{sgn} x$;

h) $f'(x) = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$;

i) $f'(x) = (\ln x)^{\sin x}\left[\cos x \ln(\ln x) + \frac{\sin x}{x \cdot \ln x}\right]$;

j) $f'(x) = (x \cos x)^{x+\cos x}\left[(1 - \sin x)\ln(x\cos x) + \frac{x + \cos x}{x \cos x}(\cos x - x \sin x)\right]$;

k) $f'(x) = \operatorname{arsinh} x$; l) $f'(x) = \operatorname{arcoth} x$; m) $f'(x) = -\frac{1}{\cos x}$.

17. $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2 < x_3 < 3 < x_4 < 4$.

22. $8{,}9375 < \sqrt{80} < 8{,}9445$.

42. a) $t^2 \cos t^3 + 2t^2 \cos t^3$;

b) $[\sin(t^2 \ln(t^2+1)) + t^2 \ln(t^2+1)\cos(t^2\ln(t^2+1))]\,2t + t^4 \cos(t^2\ln(t^2+1))\frac{2t}{t^2+1}$.

45. $-\frac{3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

46. Beide Richtungsableitungen haben den Wert Null.

50. a) $2n!(1-x)^{-n-1}$; b) $(-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}\left(\ln x - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n}\right)$;

c) $n!\binom{\alpha}{n}(1+x)^{\alpha-n}$; d) $(n-1)!\,[(1-x)^{-n} + (-1)^{n-1}(1+x)^{-n}]$;

e) $2^{n-1}\sin\left(2x + \frac{n+3}{2}\pi\right)$.

51. $\frac{(x_1 - x_0)^2}{8} M$.

52. $|R_2(x)| < 6 \cdot 10^{-8}$ für alle $x \in [\![1, 10]\!]$.

53. a) $a^{48}[(2450 - a^2x^2)\cos ax - 100ax \sin ax]$; b) $2^{49}e^{2x}(2x^2 + 100x + 1225)$.

56. $f(x) = 2 + 2x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6$.

60. $\log_a(1+x) = \frac{1}{\ln a}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$, $\quad -1 < x \leqq 1$.

64. $f_1(x) = x - \frac{2^2}{3!}x^3 + \frac{2^4}{5!}x^5 - \frac{2^6}{7!}x^7 + - \cdots \ (x \in \mathbf{R})$,

$f_2(x) = x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \frac{2^7}{8!}x^8 + - \cdots \ (x \in \mathbf{R})$.

66. $\sin(x-y) = \frac{x-y}{1!} - \frac{(x-y)^3}{3!} + \frac{(x-y)^5}{5!} - \frac{(x-y)^7}{7!} + - \cdots$.

69. $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

70. $h = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

72. $x = y = z = \frac{w}{3}$.

73. a) $\frac{1}{5}$; b) 0; c) $\frac{1}{2}$; d) $-\frac{1}{3}$; e) $\frac{1}{e}$; f) 0; g) -1;

h) 1; i) $-\frac{2}{\pi}$; j) $\frac{1}{2}$; k) 1.

74. a) 2; b) ∞; c) ∞; d) $\frac{1}{3}$; e) $R = \infty$ für $0 < a \leqq 1$, $R = 0$ für $a > 1$; f) $\frac{1}{e}$;

g) ∞; h) 0.

75. a) $R = \frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $R = 0$.

79. $x_1 = -10{,}26$, $x_2 = 9{,}88$.

80. $a_1 = 2{,}541$, $a_2 = 2{,}506$, $|a - a_2| \leqq 0{,}009$ (a exakter Wert).

Integralrechnung

19. a) $\frac{a^2 + ab + b^2}{3}$; b) $\frac{\ln 3}{2}$; c) $\frac{2}{\pi}$.

21. a) $\frac{x^3}{3}\ln|x| - \frac{x^3}{9} + C$; b) $x\sinh x - \cosh x + C$,

c) 1; d) $\frac{2x^3 + 3x^2}{6}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\left[\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right] + C$;

e) $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$;

f) $\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x^2-1) - \frac{x^2-1}{2} + C$;

g) $x(\ln x - 1) + C$; h) $\frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}\right) + C$;

i) $\frac{x^2+1}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + C$; j) $\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$;

k) $(x^2 - 3)\sin x + 2x\cos x + C$; l) $12\pi^2$;

m) $\frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + C$.

26. a) $\ln 2$; b) 2; c) $\frac{\pi}{4}$; d) $\frac{1 - \cos a\pi}{n}$.

27. a) $\frac{3}{4}\tan(4x-2)+C$; b) $-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$; c) $\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$;

d) $\frac{1}{2(m-n)}\sin(m-n)x-\frac{1}{2(m+n)}\sin(m+n)x+C$; e) $\frac{3}{2}$;

f) $\ln|3x^2+4x+7|+C$; g) $\frac{1}{b}\ln\left|\frac{a+b}{a}\right|$; h) $\frac{1}{45}\ln|15x^3-5x+7|+C$;

i) $\frac{\pi^2}{32}$; j) $-\cos(\ln x)+C$; k) $-\sin\frac{1}{x}+C$;

l) $\frac{2}{3}\left(\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x^3}\right)+C$; m) $\frac{1}{6}(\operatorname{artanh}3x)^2+C$.

30. a) $2\ln 2-1$; b) $e^{\pi^2}-1$; c) $\frac{32}{15}$; d) $2e^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-1\right)+2$;

e) $\frac{\pi}{4}$; f) $20\cos 1-12\sin 1$.

31. a) $\frac{3\ln 2}{\pi}$; b) $\frac{1}{e-1}$; c) $\frac{\pi}{4}$.

32. $e^{\frac{1}{e-1}}$.

33. a) 1; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{\pi-2}{8}$.

34. $5(\cos 2-\cos 1)+\ln 5+119+\frac{1}{2}$.

35. $\frac{2}{9}(e^3-4)+e$.

36. π.

37. $\frac{\pi}{6}$.

38. a) $\frac{1}{6}\ln|x-2|+\frac{17}{6}\ln|x+4|+C$;

b) $-8\ln|x-1|+4\ln|x-2|+5\ln|x+7|+C$;

c) $\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{5}{6}\ln|x-2|+C$;

d) $x^2+\frac{3}{8}\ln|x-1|-\frac{5}{4}\ln|x+1|+\frac{23}{8}\ln|x+3|+C$;

e) $-\frac{1}{x+1}-2\ln|x+1|+3\ln|x-5|+C$; f) $x^2-7x+22\ln|x+3|+C$;

g) $\frac{5}{2}\ln|x^2+1|+\frac{1}{2}\ln|x^2+4x+20|-\frac{9}{4}\arctan\frac{x+2}{4}+C$; h) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$;

i) $\ln|x^2-4x+5|-\ln|x^2+4|-\frac{33}{16}\arctan\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\frac{x+4}{x^2+4}+C$

j) $\frac{x}{18(x^2+9)}+\frac{1}{54}\arctan\frac{x}{3}$.

42. a) $\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$; b) $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; c) $\ln\tan\frac{3\pi}{8}$.

43. a) $\frac{3}{2}a^2$; b) $t_0\sqrt{a^2+b^2}$; c) $\sqrt{3}$.

44. $\frac{a}{b^2}$ $(a > b)$ in den Endpunkten der Hauptachse.

45. $O(M) = 4ab\pi^2$, $\mu(M) = 2a^2b\pi^2$.

46. a) $\frac{32}{5}$; b) $\frac{\pi}{8}$; c) $\frac{9}{4}$.

47. a) $\frac{1}{24}a^2b^2$; b) $\frac{1}{4}a^2b^2$; c) $\frac{1}{8}a^2b^2$.

48. $\frac{2}{3}\pi r^3 - \frac{8}{9}r^3$.

Einiges über Differentialgleichungen

2. a) $y = 0$; b) $y = e^{x\ln 2}$; c) $y = 1$; d) $y = x$; e) $y = -x$.

3. a) $y = \dfrac{1-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}}{1+x}$; b) $y = e^x\left(\frac{1}{x}-1\right)$.

4. a) $y = 15e^{-(x-1)} - 10e^{-2(x-1)} + e^{-5(x-1)}$;

b) $y = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{4}{17}e^{3x} + e^{-x}\left(\frac{25}{34}\cos x + \frac{15}{34}\sin x\right)$; c) $y = e^{-2x}$.