

Studienbücherei



Autorenkollektiv  
unter Leitung von J. Böhm  
Aufgabensammlung II



VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

---

# Mathematik für Lehrer

## Band 15

---

**Herausgegeben von:**

**W. Engel, S. Brehmer, M. Schneider, H. Wussing**

**Unter Mitarbeit von:**

**G. Asser, J. Böhm, J. Flachsmeyer, G. Geise, T. Glocke,**

**K. Härtig, G. Kasdorf, O. Krötenheerdt, H. Lugowski,**

**P. H. Müller, G. Porath**

---

# Studienbücherei

---

## Aufgabensammlung

II. Aufgaben zu den Bänden 6 bis 12  
der Studienbücherei — Mathematik  
für Lehrer

Autorenkollektiv  
unter Leitung von  
J. Böhm

Mit 112 Abbildungen  
und zahlreichen Tabellen



VEB Deutscher Verlag  
der Wissenschaften  
Berlin 1982

**Leiter des Autorenkollektivs: Prof. Dr. Johannes Böhm, Jena**

**Mitarbeiter des Kollektivs sind: Prof. Dr. Johannes Böhm, Jena; Dr. Walter Börner, Jena; Dr. Arnold Führich, Potsdam; Dr. Eike Hertel, Jena; Prof. Hans Kaiser, Berlin; Prof. Dr. Otto Krötenheerd, Halle; Dr. Dr. Gert Maibaum, Dresden; Prof. Dr. Werner Mögling, Erfurt; Dr. Peter Schreiber, Stralsund; Dr. Eberhard Schröder, Dresden; Dr. Ludwig Stammer, Halle**

**Verlagslektor: Erika Arndt**

**Verlagshersteller: Lothar Pohl**

**Umschlaggestaltung: Rudolf Wendt**

**© 1982 VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, DDR-1080 Berlin,  
Postfach 1216**

**Lizenz-Nr.: 206 · 435/152/82**

**Printed in the German Democratic Republic**

**Gesamtherstellung: VEB Druckhaus „Maxim Gorki“, 7400 Altenburg  
LSV 1004**

**Bestellnummer: 570 964 6**

**DDR 16,20 M**

## Vorwort

Mit dieser Aufgabensammlung soll den Diplomlehrerstudenten der Fachrichtung Mathematik eine Möglichkeit in die Hand gegeben werden, die Stoffgebiete des Lehrwerks Mathematik für Lehrer, die in den Bänden 6 bis 12 dargelegt wurden, zu überdenken und einzuüben. An der Bereitstellung des Kontrollfragen- und Aufgabenmaterials sind im wesentlichen die gleichen Autoren beteiligt, die die oben genannten Bände erarbeitet haben. Auf diese Bände wird darum ein enger Bezug genommen.

Bei der Lösung einer Aufgabe ist hinsichtlich der Wahl der Methode zu beachten, unter welchem Abschnitt die betreffende Aufgabe aufgenommen worden ist. Demzufolge können auch Aufgaben in ein wenig abgewandelter Form mehrmals erscheinen, um verschiedene Aspekte eines theoretischen Sachverhalts an Hand der betreffenden Aufgaben zu erkennen und die entsprechenden Methoden zu praktizieren.

Zwischen den verschiedenen Kapiteln treten einige Unterschiede auf. Jedem einzelnen Autor ist genügend Spielraum gelassen worden, seine eigenen Vorstellungen und seinen eigenen Stil zu entfalten. Aber die Unterschiede zwischen den einzelnen Kapiteln sind auch von der Sache her, d. h. von der betreffenden Thematik her, begründet. Zum Beispiel werden in einigen Kapiteln häufiger einfache Rechenaufgaben erscheinen, während in anderen Kapiteln der Schwerpunkt auf theoretischen Untersuchungen liegt. Insbesondere möge sich der Leser nicht entmutigen lassen, wenn gleich am Anfang einige vergleichsweise komplizierte theoretische Aufgaben vorgelegt werden. Er wird daran wie auch an allen anderen Aufgaben seine Fähigkeiten messen können, inwieweit er die betreffenden Abschnitte des Lehrwerks verstanden hat und in der Lage ist, das aufgenommene theoretische Wissen in Anwendungen umzusetzen. In diesem Sinne soll der vorgelegte Aufgabenband sowohl zu einer Überprüfung als auch zu einer Förderung der mathematischen Fähigkeiten und Fertigkeiten auf den in Rede stehenden mathematischen Disziplinen des Grundkurses wie des Fachstudiums beitragen.

Aufgaben, die nach Meinung der Autoren von erhöhtem Schwierigkeitsgrad sind, wurden durch einen Stern (\*) gekennzeichnet. Einige Aufgaben sind bereits im Aufgabenteil mit ausführlichen Lösungen versehen, um daran beispielhaft zu zeigen, auf welche Weise und in welcher Form solche und ähnliche Aufgaben gelöst werden könnten. Die Ergebnisse der übrigen Aufgaben, die nicht allzuviel über den Lösungsweg aussagen, sind am Schluß dieser Aufgabensammlung zusammengestellt worden. Man lasse sich aber nicht dazu verleiten, vor der eigenen Bearbeitung einer Aufgabe im Lösungsteil nachzulesen, sondern versuche mit Ausdauer, zunächst selbständig die

Lösung zu finden, und benutze die angegebenen Lösungen nach Möglichkeit nur zur Kontrolle der eigenen Ergebnisse. So werden sich auch die gewünschten mathematischen Fähigkeiten und Fertigkeiten einstellen. Darüber hinaus ist gelegentlich versucht worden, durch einige Hinweise im Aufgabenteil dem Leser eine gewisse Hilfe für die Lösung zu geben. Selbstverständlich muß erst ein Grundwissen durch Vorlesung und Literaturstudium der Bände der Lehrbuchreihe Mathematik für Lehrer erarbeitet werden, um das nötige Verständnis für die vorkommenden Begriffe, Beziehungen und Sätze zu erlangen.

Verschiedene Aufgaben des ersten Kapitels haben sich bereits im Manuskriptdruck bewährt, wie überhaupt schon viele Aufgaben dieser Aufgabensammlung im Lehr- und Übungsbetrieb mit Studenten von Universitäten und Hochschulen von den Autoren erfolgreich und mit Vorteil für die weitere Arbeit erprobt wurden.

Die den Aufgaben der Darstellenden Geometrie zugeordneten Zeichnungen sollen dem Bearbeiter das Verständnis der Aufgabenstellungen erleichtern. Erfahrungsgemäß fällt es dem Studierenden am Anfang nicht leicht, die durch Worte beschriebenen Aufgaben in eine adäquate Zeichnung umzusetzen. Um das Lösen von Aufgaben nicht von vornherein an begrifflichen Mißverständnissen scheitern zu lassen, erscheint eine anschauliche Interpretation des Textes für das Kapitel Darstellende Geometrie als wichtiges didaktisches Hilfsmittel. Ferner sind in den Aufgaben oftmals bestimmte Lagen und Größenbeziehungen erwünscht, die sich nur schwer und umständlich mit Worten fassen lassen. Auch hier ist es günstig, wenn sich der Bearbeiter der Aufgabe zunächst an die bildlichen Vorgaben hält. Sie erleichtern es auch dem Geübteren, eigene Varianten von Aufgabenstellungen zu erarbeiten. Generell ist für die Bearbeitung von Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie zu empfehlen, die Zeichnungen möglichst groß und übersichtlich auf einem A4-Blatt oder wenigstens A5-Blatt anzulegen. Auch das Mittel der Zeichenkontrolle, das der Rechenkontrolle in der Numerik entspricht, sollte bei längeren Konstruktionen möglichst oft eingesetzt werden.

In den Kapiteln Numerik und Rechentechnik sowie Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische Statistik wurde in ganz besonderer Weise auf Probleme aus der Praxis eingegangen. Hier wurden aber immer Sachverhalte ausgewählt, deren mathematische Modellierung mit den in der Schule vermittelten naturwissenschaftlichen Kenntnissen möglich sein sollte. Es wurde versucht, verschiedene Anwendungsaufgaben nach systematischen Gesichtspunkten zu klassifizieren. Solche Betrachtungsweisen helfen möglicherweise, schneller eine Lösungskonzeption zu finden und dabei immer wiederkehrende mathematische Grundprobleme zu erkennen. Die meisten der numerischen Übungen lassen sich mit einem Taschenrechner bearbeiten. Außerdem kommt man bei den Aufgaben aus der Mathematischen Statistik mit dem Tabellenanhang in Band 11 des Lehrwerks Mathematik für Lehrer (Tafeln zu einigen wichtigen Verteilungen) ohne weiteres aus.

In einer Aufgabensammlung kommen auch Aufgaben vor, die bereits in anderer Literatur zu finden sind. Bei solchen Aufgaben läßt sich oft gar nicht feststellen, wer der ursprüngliche Autor ist. Dennoch waren die Autoren bemüht, sich im Rahmen der Thematik möglichst viele Aufgaben selbst auszudenken. Bei der Erarbeitung des Übungsmaterials zur Numerik und Rechentechnik wurden einige Probleme zur

Lösung von Gleichungen und zur Interpolation dem Buch von F. B. HILDEBRANDT, Introduction to Numerical Analysis, McGraw-Hill Book Comp., New York—Toronto—London 1956, entnommen; ferner ergaben sich konzeptionelle Anregungen für Kapitel VI aus L. COLLATZ/J. ALBRECHT, Aufgaben aus der Angewandten Mathematik I, II, Akademie-Verlag, Berlin 1972 bzw. 1973.

Den Mitarbeitern des VEB Druckhauses „Maxim Gorki“ gilt unser Dank für die sehr sorgfältige Ausführung des Druckes. Auch Fräulein E. ARNDT vom VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften sind wir für Hinweise und für das Eingehen auf unsere Wünsche ebenfalls sehr zu Dank verpflichtet. Ich persönlich möchte mich bei allen Mitautoren dieses Aufgabenbandes für die angenehme Zusammenarbeit am gemeinsamen Unternehmen herzlich bedanken.

Nun frisch ans Werk und viel Erfolg! Meinungen und Hinweise zum vorgelegten Aufgabenband werden jederzeit gern zur Kenntnis genommen und berücksichtigt.

Jena, Februar 1982

JOHANNES BÖHM

# Inhalt

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| <b>IV.</b> | <b>Geometrie</b> . . . . .   | <b>11</b> |
|            | Inzidenz, Parallelität und Verschiebungen in der Ebene . . . . .                               | 11        |
|            | Anordnung in der Ebene . . . . .   | 12        |
|            | Bewegungen und Kongruenz in der euklidischen Ebene . . . . .                                   | 14        |
|            | Inzidenz, Parallelität, Anordnung, Bewegungen und Senkrechtsein im euklidischen Raum . . . . . | 17        |
|            | Strecken- und Winkelmessung . . . . .  | 18        |
|            | Elementarer Inhalt in der Ebene . . . . .  | 21        |
|            | Elementarer Inhalt im Raum . . . . .   | 24        |
|            | Allgemeiner Inhalt. . . . .  | 26        |
|            | Die Methode der analytischen Geometrie . . . . .   | 27        |
|            | Vektoren, ihre Addition und Vervielfachung . . . . .   | 28        |
|            | Analytische Darstellung von Länge, Winkelgröße, Flächeninhalt, Volumen . . . . .               | 28        |
|            | Lineare Parameterdarstellungen. . . . .  | 31        |
|            | Lineare Gleichungen . . . . .  | 35        |
|            | Konvexe Polygone . . . . .   | 37        |
|            | Analytische Darstellung von Bewegungen und Koordinatentransformationen . . . . .               | 39        |
|            | Kurven zweiter Ordnung . . . . .   | 42        |
|            | Abbildungen als Ordnungsprinzip in der Geometrie . . . . .                                     | 45        |
|            | Einführung in eine Theorie der geometrischen Konstruktionen . . . . .                          | 61        |
|            | Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal . . . . .                                    | 65        |
|            | Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal in algebraischer Behandlung . . . . .        | 70        |
|            | Die Unlösbarkeit einiger Konstruktionsaufgaben . . . . .                                       | 73        |
|            | Konstruktionen mit anderen Hilfsmitteln. . . . .   | 76        |
| <b>V.</b>  | <b>Darstellende Geometrie</b> . . . . .  | <b>77</b> |
|            | Grundkonstruktionen. . . . .   | 77        |
|            | Kreis und Kugel . . . . .  | 84        |
|            | Kegelschnitte . . . . .  | 86        |
|            | Durchdringungen von gekrümmten Flächen . . . . .   | 90        |
| <b>VI.</b> | <b>Numerische Mathematik und Rechentechnik</b> . . . . .                                       | <b>95</b> |
|            | Arbeitsstufen der Problemanalyse. . . . .  | 95        |
|            | Datenverarbeitung in Digitalrechnern . . . . .   | 105       |
|            | Einführung in die Programmiersprache ALGOL 60 . . . . .  | 114       |



---

|  |            |
|--|------------|
| Ausgewählte Gegenstände der Numerischen Mathematik . . . . .                 | 125        |
| Approximationstheorie . . . . .  | 144        |
| Lösung von Gleichungen . . . . .   | 157        |
| Lineare Optimierung . . . . .  | 168        |
| <b>VII. Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik . . . . .</b> | <b>181</b> |
| Zufällige Ereignisse . . . . .   | 181        |
| Wahrscheinlichkeit . . . . .   | 182        |
| Bedingte Wahrscheinlichkeit . . . . .  | 186        |
| Diskrete Zufallsgrößen . . . . .   | 190        |
| Stetige Zufallsgrößen . . . . .  | 194        |
| Zufällige Vektoren . . . . .   | 196        |
| Grenzwertsätze . . . . .   | 200        |
| Beschreibende Statistik . . . . .  | 203        |
| Grundbegriffe der mathematischen Statistik . . . . .                         | 205        |
| Einführung in die Schätztheorie . . . . .                                    | 206        |
| Einführung in die Testtheorie . . . . .                                      | 210        |
| <b>VIII. Grundlagen der Mathematik . . . . .</b>                             | <b>214</b> |
| Zeichenreihen . . . . .  | 214        |
| Aussagenlogik . . . . .  | 215        |
| Strukturen und formalisierte Sprachen . . . . .                              | 216        |
| Semantische Grundbegriffe der Metamathematik . . . . .                       | 218        |
| Eine Formalisierung der Mengenlehre . . . . .                                | 220        |
| Syntaktische Grundbegriffe der Metamathematik . . . . .                      | 221        |
| Algorithmen . . . . .  | 222        |
| Entscheidbarkeit und Aufzählbarkeit von Sprachen und Theorien . . . . .      | 224        |
| <b>Lösungen (Auswahl) . . . . .</b>  | <b>225</b> |

## IV. Geometrie

### Inzidenz, Parallelität und Verschiebungen in der Ebene

#### Kontrollfragen

1. Welche Axiome stellt man im Hinblick auf mengentheoretische Beziehungen zwischen Punkten und Geraden der Ebene?
2. Welche von den Axiomen der Inzidenz, Parallelität, Verschiebungen braucht man, um zu beweisen, daß für beliebige Geraden  $g, h$  der Ebene der Durchschnitt  $g \cap h$  entweder genau ein Punkt oder leer oder  $g$  ist, und wie lautet der Beweis?
3. Wie definiert man die Parallelität von Geraden und den Begriff „Richtung“?
4. Wie definiert man die Begriffe „Verschiebung“ und „verschiebungsgleich“?
5. Warum ist die Relation „verschiebungsgleich“ in der Menge aller Punktmenge eine Äquivalenzrelation?

#### Aufgaben

1. Aus den Axiomen (1) bis (3) (siehe MfL Bd. 6) ist herzuleiten: Sind  $g$  und  $h$  zwei Geraden, so gibt es mindestens eine Gerade, die weder zu  $g$  noch zu  $h$  parallel ist.
2. Gegeben seien die Vierermenge  $V = \{1, 2, 3, 4\}$  und das System von Teilmengen  $\mathfrak{C} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$ . Man weise nach, daß die Axiome (1) bis (4) (siehe MfL Bd. 6) erfüllt sind, wenn man  $V$  als Ebene interpretiert, also die Elemente von  $V$  als Punkte ansieht und die Elemente von  $\mathfrak{C}$  als Geraden interpretiert. Man bestimme die Richtungen dieser „Ebene“.
3. Man beweise, daß aus der folgenden Aussage das Parallelenaxiom hergeleitet werden kann (Axiome (1) bis (3) und Definition der Parallelität vorausgesetzt; siehe MfL Bd. 6)  
Es gibt eine Zerlegung der Menge aller Geraden in Klassen, so daß folgendes gilt: Zwei verschiedene Geraden liegen genau dann in derselben Klasse, wenn sie keine gemeinsamen Punkte haben, und für jede Klasse ist die Menge derjenigen Punkte, die in Geraden dieser Klasse enthalten sind, die Menge aller Punkte.
4. Man definiere für vier Punkte einen Parallelogrammbegriff so, daß dabei nur die Begriffe Punkt, Gerade, Enthaltensein, Parallelität verwendet werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus drei gegebenen nicht kollinearen Punkten durch Hinzunahme eines weiteren Punktes ein Parallelogramm in dem soeben definierten Sinne zu machen?

5. Es seien  $(h, k)$  und  $(l, m)$  geordnete Paare von Geraden. Kann man die Aussage „ $h$  ist zu  $l$  parallel, und  $k$  ist zu  $m$  parallel“ ohne Einschränkung als notwendige und hinreichende Bedingung für die Verschiebungsgleichheit der Paare  $(h, k)$  und  $(l, m)$  anerkennen? Wenn nein: Gibt es eine zusätzliche Voraussetzung, unter der die genannte Bedingung notwendig und hinreichend wird, und wie lautet sie gegebenenfalls?
- 6.\* Unter Verwendung der Axiome (1) bis (4) (siehe MfL Bd. 6) und der Eigenschaften von Verschiebungen ist ohne Verwendung von Axiom (5) zu beweisen, daß es zu vorgegebenen Punkten  $A$  und  $B$  höchstens eine Verschiebung gibt, bei der  $A$  auf  $B$  abgebildet wird.
7. Unter Verwendung von Verschiebungen beweise man: Sind  $a, b$  und  $c$  drei paarweise verschiedene Geraden gleicher Richtung,  $A_1, B_1$  Punkte von  $a, B_1, B_2$  Punkte von  $b, C_1, C_2$  Punkte von  $c$ , so folgt aus  $g(A_1B_1) \parallel g(A_2B_2)$  und  $g(B_1C_1) \parallel g(B_2C_2)$  die Beziehung  $g(A_1C_1) \parallel g(A_2C_2)$  („Kleiner“ Satz von DESARGUES).
8. Unter Verwendung von Verschiebungen beweise man: Sind  $A_1, A_2, A_3$  Punkte einer Geraden  $a, B_1, B_2, B_3$  Punkte einer zur Geraden  $a$  parallelen Geraden  $b$  ( $b \neq a$ ), so folgt aus  $g(A_1B_1) \parallel g(B_2A_3)$  und  $g(B_1A_2) \parallel g(A_3B_3)$  die Beziehung  $g(A_2B_2) \parallel g(B_3A_1)$  („Kleiner“ Satz von PAPPUS-PASCAL).
9. Man bestimme diejenigen Permutationen der Menge  $V = \{1, 2, 3, 4\}$ , die für die in Aufgabe 2 angegebene „Ebene“ Verschiebungen sind.
10. Gegeben seien zwei voneinander verschiedene Richtungen  $\mathfrak{R}_1$  und  $\mathfrak{R}_2$ . Man beweise: Zu jeder Verschiebung  $\tau$  gibt es genau ein geordnetes Paar  $(\tau_1, \tau_2)$  von Verschiebungen, so daß  $\tau_1$  die Verschiebungsrichtung  $\mathfrak{R}_1$ ,  $\tau_2$  die Verschiebungsrichtung  $\mathfrak{R}_2$  hat und daß  $\tau = \tau_2 \circ \tau_1$  gilt. Im Anschluß hieran ist zu zeigen, daß die Abbildung, die eine beliebige Verschiebung auf die eben erklärte zu  $\tau$  gehörige Verschiebung  $\tau_1$  abbildet, ein Homomorphismus von der Gruppe aller Verschiebungen auf die Gruppe der Verschiebungen mit der Verschiebungsrichtung  $\mathfrak{R}_1$  ist. Welche Gruppe bildet den Kern dieses Homomorphismus?
11. Man beweise, daß zwei beliebige Geraden stets gleichmächtig sind.

## Anordnung in der Ebene

### Kontrollfragen

1. Welche Axiome stellt man im Hinblick auf die Anordnung der Punkte einer jeden Geraden?
2. Was versteht man unter einer orientierten Geraden?
3. Aus welchen Axiomen und wie kann man beweisen, daß jede Gerade unendlich viele Punkte enthält?

4. Was versteht man unter der Zwischenrelation für Punkte?
5. Was versteht man unter einer Strecke und unter einem Strahl?
6. Durch welches Axiom wird die Anordnung von Punkten verschiedener Geraden in Beziehung gebracht?
7. Wie verhalten sich die Anordnungsbeziehungen von Punkten bei Anwendung von Verschiebungen?
8. Was versteht man unter einer Halbebene, was unter einer Fahne?
9. In der Definition des Begriffes Fahne kommt der Begriff offene Halbebene vor. Könnte man das Wort „offen“ aus der Definition weglassen, ohne daß der Inhalt der Definition geändert wird?
10. Was versteht man unter einer Orientierungsklasse? Wie viele Orientierungs-klassen gibt es?

### Aufgaben

1. Es sei  $AX^+$  ein Strahl und  $PQ$  eine Strecke auf  $g(AX)$ . Was für eine Punktmenge kann  $AX^+ \cap PQ$  sein?
2. Es seien  $s$  und  $t$  Strahlen mit gemeinsamer Trägergerade. Man beweise:  $s \cap t$  ist entweder ein Strahl oder eine Strecke oder ein Punkt oder leer.
3. In der Menge aller Strahlen einer fest vorgegebenen Trägergeraden sei folgende Relation  $R$  definiert:

$$hRk : \Leftrightarrow h \subseteq k \vee k \subseteq h.$$

Man zeige, daß  $R$  Äquivalenzrelation ist, und bestimme die Anzahl der Klassen. Welcher Zusammenhang besteht mit dem Begriff Richtungssinn?

Hinweis: Man verwende den Satz über die Invarianz der Ordnungsrelation auf Fixgeraden von Verschiebungen.

4. Unter Verwendung des Satzes über die Zerlegung in Halbebenen beweise man: Sind  $A, B, C$  drei nicht kollineare Punkte und ist  $g$  eine Gerade, die weder  $A, B$  noch  $C$ , aber einen Punkt der Strecke  $AB$  enthält, so hat  $g$  auch entweder mit  $BC$  oder mit  $AC$  einen gemeinsamen Punkt („Axiom von PASCAL“).
5. Gegeben seien  $n$  Geraden  $g_1, \dots, g_n$ , von denen je zwei genau einen, je drei aber keinen gemeinsamen Punkt haben mögen. Ferner sei in der Menge der zu keiner der Geraden  $g_1, \dots, g_n$  gehörenden Punkte eine Relation  $\varrho$  definiert:

$$XY : \Leftrightarrow \bigwedge_{i \in \{1, \dots, n\}} (XY \cap g_i = \emptyset) \vee X = Y.$$

Man beweise, daß  $\varrho$  eine Äquivalenzrelation ist. Für  $n = 1$  und  $2$  sind die Anzahlen der Äquivalenzklassen zu bestimmen. Welche anschauliche Bedeutung haben die Äquivalenzklassen?

6. Sind die Fahnen  $AB^+C^+$  und  $CB^+A^+$  gleichorientiert?
7. Es seien  $A, B, C$  drei nicht kollineare Punkte. Man beweise, daß die Tripel  $(A, B, C)$ ,  $(B, C, A)$  und  $(C, A, B)$  denselben Umlaufsinn haben und daß dieser von demjenigen des Tripels  $(A, C, B)$  verschieden ist.

## Bewegungen und Kongruenz in der euklidischen Ebene

### Kontrollfragen

1. Welche Aussagen enthält das Bewegungsaxiom?
2. Was versteht man unter einer Geradenspiegelung?
3. Was versteht man unter einer Punktspiegelung?
4. Wie kann man nachweisen, daß die Verschiebungen spezielle Bewegungen sind?
5. Wann ist eine Bewegung gleich- bzw. ungleichsinnig?
6. Was versteht man unter einer Drehung?
7. Man nenne einige Untergruppen der Gruppe der Bewegungen.
8. Was versteht man unter kongruenten Figuren?
9. Was versteht man unter einer Länge und unter Addition von Längen?
10. Was versteht man unter einem Elementarwinkel, einem orientierten Elementarwinkel, einem Winkel und einem orientierten Winkel?
11. Wie werden Größen orientierter Elementarwinkel addiert, und welche Eigenschaften hat diese Addition?
12. Wie werden Winkelgrößen addiert, und welche Eigenschaften hat diese Addition?
13. Wie viele Größen a) rechter orientierter Elementarwinkel, b) rechter Winkel, c) gestreckter orientierter Elementarwinkel, d) gestreckter Winkel gibt es?
14. Wie kann man den Begriff des Dreiecks definieren?
15. Wie lauten die Kongruenzsätze für Dreiecke, und wie kann man sie beweisen?

### Aufgaben

1. Man beweise, daß eine Bewegung, die drei nicht kollineare Fixpunkte hat, die identische Abbildung ist.
2. Man beweise: Ist  $P$  ein Punkt einer Geraden  $g$ , so ist  $\sigma_P \circ \sigma_g$  die Geradenspiegelung am Lot durch  $P$  zu  $g$ .
3. Es ist zu beweisen: Ist  $P$  ein Punkt,  $g$  eine Gerade, so gilt  $\sigma_P \circ \sigma_g = \sigma_g \circ \sigma_P$  genau dann, wenn  $P$  zu  $g$  gehört.
4. Man beweise, daß das Produkt  $\sigma_C \circ \sigma_B \circ \sigma_A$  dreier Punktspiegelungen eine Punktspiegelung  $\sigma_D$  ist. Welche Lage hat der Punkt  $D$  zu den Punkten  $A, B, C$ ?

5. Es seien  $g, h, k$  drei Geraden mit  $g \perp h$  und  $h \parallel k$ . Welche Aussage über  $g$  und  $k$  folgt hieraus? Man beweise diese Aussage.
6. Es ist nachzuweisen, daß die Menge aller Verschiebungen und Punktspiegelungen bezüglich der Hintereinanderausführung eine Untergruppe der Gruppe aller (gleichsinnigen) Bewegungen bildet.
7. Man beweise: Ist  $\varphi$  eine beliebige Bewegung,  $\sigma_P$  die Punktspiegelung am Punkt  $P$ , so ist  $\varphi \circ \sigma_P \circ \varphi^{-1}$  die Punktspiegelung am Punkt  $\varphi(P)$ .
8. Sind  $\delta_1, \delta_2$  zwei Drehungen mit verschiedenen Zentren, so gilt  $\delta_1 \circ \delta_2 = \delta_2 \circ \delta_1$  genau dann, wenn  $\delta_1$  oder  $\delta_2$  die identische Abbildung ist. Man beweise diesen Satz.
9. Man weise nach, daß die Bildmenge eines Richtungssinnes (also einer Menge verschiebungsgleicher Strahlen) bei einer beliebigen Bewegung wieder ein Richtungssinn ist.

Hinweis: Man verwende den Hilfssatz, wonach für jede Bewegung  $\varphi$  gilt: Ist  $\tau$  eine Verschiebung, so ist auch  $\varphi \circ \tau \circ \varphi^{-1}$  eine Verschiebung.

10. Es sei  $A$  ein fester Punkt. Für eine beliebige gleichsinnige Bewegung  $\varphi$  sei  $\tau_\varphi$  diejenige Verschiebung, die  $\varphi(A)$  auf  $A$  abbildet. Man weise nach, daß durch die Abbildung  $\Phi: \varphi \rightarrow \tau_\varphi \circ \varphi$  ein Homomorphismus von der Gruppe aller gleichsinnigen Bewegungen auf die Gruppe der Drehungen mit dem Zentrum  $A$  gegeben ist. Welche Gruppe ist der Kern dieses Homomorphismus? Man mache sich klar, daß  $\Phi(\varphi)$  den „Drehungsanteil“ von  $\varphi$  mißt.

Hinweis: Man verwende den Begriff Richtungssinn und das Ergebnis von Aufgabe 9.

11. Man beweise, daß in der Halbgruppe der Längen eine Kürzungsregel gilt, d. h., daß für beliebige Längen  $s_1, s_2, s$  aus  $s_1 + s = s_2 + s$  die Gleichung  $s_1 = s_2$  folgt.
12. Man zeige, daß für beliebige Längen  $s_1, s_2, s$  aus  $s_1 + s < s_2 + s$  die Beziehung  $s_1 < s_2$  folgt.
13. Es seien  $X_1, X_2, X_3, X_4$  vier Punkte einer orientierten Geraden, für die  $X_1 < X_2 < X_3 < X_4$  gilt. Welche Beziehungen der Form  $|X_i X_j| < |X_k X_l|$  ( $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$ ) können hieraus hergeleitet werden?
14. Es seien  $X, Y, Z$  drei paarweise verschiedene kollineare Punkte. Man gebe eine notwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen der Gleichung  $|XY| + |YZ| = |XZ|$  an.
15. Es seien  $A, B, C$  drei Punkte. Welche geometrische Deutung kann man der Gleichung  $\sigma_A(B) = C$  geben?
16. Ohne Benutzung von Dreieckskongruenzsätzen ist mit Hilfe einer geeigneten Punktspiegelung zu beweisen: Sind  $A, B, C, D$  vier nicht kollineare Punkte und ist  $g(AB) \parallel g(CD)$  sowie  $g(AC) \parallel g(BD)$ , so ist  $g(AD) \cap g(CB)$  Mittelpunkt von  $AD$  und von  $BC$  („Parallelogrammdiagonalen halbieren sich“).

17. Unter Verwendung von Punktspiegelungen ist nachzuweisen: Ist  $M_1$  Mittelpunkt von  $AB$  und  $M_2$  Mittelpunkt von  $AC$  ( $C \neq B$ ), so ist  $g(M_1M_2) \parallel g(BC)$ .

Hinweis: Man wende  $\sigma_{M_2} \circ \sigma_{M_1}$  auf  $B$  und auf  $M_1$  an.

18. Man zeige: Sind  $A, B, C$  drei nicht kollineare Punkte, ist  $M_1$  der Mittelpunkt von  $BC$ ,  $M_2$  der Mittelpunkt von  $CA$ ,  $M_3$  der Mittelpunkt von  $AB$ , so ist  $g(M_1M_2) \cap g(CM_3)$  Mittelpunkt von  $M_1M_2$  und von  $CM_3$ .

Hinweis: Man verwende die Ergebnisse von Aufgabe 16 und 17.

19. Folgender Satz ist zu beweisen: Sind  $A, B, C, D$  vier zu je dreien nicht kollineare Punkte,  $M_1, M_2, M_3, M_4$  die Mittelpunkte der Strecken  $AB, BC, CD, DA$ , so ist  $g(M_1M_2) \parallel g(M_3M_4)$  und  $g(M_2M_3) \parallel g(M_1M_4)$ . („Die Seitenmitten eines beliebigen Vierecks bilden ein Parallelogramm.“)

20. Es ist zu zeigen: Ist  $g$  eine Gerade,  $l$  eine Länge und  $h$  eine der beiden von  $g$  erzeugten offenen Halbebenen, so ist die Menge  $a = \{X: X \in h \wedge g(XF) \perp g \wedge F \in g \wedge |XF| = l\}$  eine Gerade, und zwar eine Parallele zu  $g$ .

21. Auf Grund der Definition der Addition von Größen orientierter Elementarwinkel berechne man  $m(\sphericalangle(AP^+, AP^-)) + m(\sphericalangle(AP^-, AP^+))$  ( $A, P$  seien zwei verschiedene Punkte).

22. Es sei  $r$  eine der beiden Größen rechter orientierter Elementarwinkel,  $s_1, s_2$  seien die beiden Lösungen der Gleichung  $2x = r$ . Man bestimme die Elemente der kleinsten Menge von Größen orientierter Elementarwinkel, die  $s_1$  enthält und bezüglich der Addition eine Gruppe bildet. Ferner sind für die Elemente  $x_i$  dieser Gruppe alle Summen  $x_i + x_j$  zu berechnen (Gruppentafel).

23. Eine Gerade  $g$  möge mit den Schenkeln eines nicht gestreckten Winkels  $W$  je genau einen Punkt gemeinsam haben (nicht den Scheitel). Es ist eine Aussage über den Durchschnitt von  $g$  mit dem Inneren von  $W$  herzuleiten, die notwendig und hinreichend dafür ist, daß  $W$  ein Winkel erster Art (also nicht überstumpf) ist.

24. Es ist zu zeigen, daß es genau zwei Winkelgrößen gibt, so daß jeder Repräsentant jeder der beiden Größen ein Winkel erster Art ist und sein Elementarwinkel  $\sphericalangle(h, k)$  die Eigenschaft hat, daß  $\sphericalangle(h, \sigma_k(h))$  ein rechter Elementarwinkel ist, wobei  $\sigma_k$  die Geradenspiegelung an der Trägergeraden von  $k$  bedeute.

25. Es sei  $w_1$  die Größe der rechten Winkel,  $w_2$  die Größe der gestreckten Winkel,  $w_3$  die Größe der Winkel zweiter Art, deren Schenkel senkrechte Trägergeraden haben,  $w_4$  und  $w_5$  die beiden in Aufgabe 24 genannten Winkelgrößen. Man prüfe, für welche  $i, k$  die Summe  $w_i + w_k$  ( $i, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ) existiert, und bestimme im Fall der Existenz die Summe (Größen erforderlichenfalls durch geometrische Eigenschaften der Repräsentanten beschreiben).

26. Für beliebige Winkelgrößen  $w, w_1, w_2$  beweise man:

- Aus  $w_1 + w = w_2 + w$  folgt  $w_1 = w_2$ ,
- aus  $w_1 + w < w_2 + w$  folgt  $w_1 < w_2$ .

27. Es sei  $W'$  ein Nebenwinkel zum Winkel  $W$ ,  $s$  die Winkelhalbierende von  $W$ ,  $s'$  die Winkelhalbierende von  $W'$ . Man zeige, daß  $s$  und  $s'$  die Schenkel eines rechten Winkels sind.
28. Es ist zu beweisen: Liegen die Punkte  $Q_1$  und  $Q_2$  auf derselben Seite der Geraden  $g(P_1P_2)$  und gilt die Kongruenz  $\sphericalangle(P_1Q_1^+, P_1P_2^+) \cong \sphericalangle(P_2Q_2^+, P_2P_1^-)$ , so gilt  $g(P_1Q_1) \parallel g(P_2Q_2)$ .
29. Es seien  $A_iB_iC_i$  ( $i = 1, 2$ ) zwei Dreiecke,  $F_i$  die Fußpunkte der Lote von  $C_i$  auf  $g(A_iB_i)$  („Höhenfußpunkte“). Man zeige: Ist  $\sphericalangle A_1B_1C_1 \cong \sphericalangle A_2B_2C_2$  und  $A_1B_1 \cong A_2B_2$  und  $C_1F_1 \cong C_2F_2$ , so sind die beiden Dreiecke kongruent.
- Hinweis: Man verwende das Ergebnis von Aufgabe 20.
30. Man beweise: Ist für das Dreieck  $ABC$  der Punkt  $M$  der Mittelpunkt von  $AB$ , so ist  $|AM| = |CM|$  genau dann, wenn  $\sphericalangle(ACB; M^+)$  ein rechter Winkel ist („Satz des THALES“ und Umkehrung).
31. Es sei  $g$  eine Gerade,  $O$  ein Punkt  $\notin g$ ,  $F$  der Fußpunkt des Lotes von  $O$  auf  $g$ . Man zeige:
- Für alle Punkte  $X \in g$  mit  $X \neq F$  gilt  $|OF| < |OX|$ .
  - Sind  $X, Y$  Punkte von  $g$ , so gilt  $|FX| < |FY|$  genau dann, wenn  $|OX| < |OY|$  gilt.

## Inzidenz, Parallelität, Anordnung, Bewegungen und Senkrechtsein im euklidischen Raum

### Kontrollfragen

- Welche Axiome stellt man im Hinblick auf mengentheoretische Beziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen des Raumes?
- Wie definiert man die Parallelität a) zweier Geraden, b) zweier Ebenen, c) einer Gerade und einer Ebene?
- Durch welche Axiome kann die Anordnungslehre des Raumes begründet werden?
- Was versteht man unter einem Halbraum und unter einer Orientierungsfigur?
- Worin unterscheidet sich das Bewegungssaxiom für den Raum von dem für die Ebene?
- Wie definiert man das Senkrechtsein a) zweier Ebenen, b) einer Gerade und einer Ebene, c) zweier Geraden?



### Aufgaben

1. Es ist nachzuweisen, daß die Parallelität von Geraden im Raum eine Äquivalenzrelation ist.
2. Aus welchen Axiomen und wie kann hergeleitet werden, daß es zu zwei verschiedenen parallelen Geraden nicht mehr als eine Ebene gibt, die beide Geraden enthält?
3. Man zeige: Ist  $g$  eine Gerade,  $\varepsilon$  eine Ebene, so gilt  $g \parallel \varepsilon$  genau dann,
  - a) wenn es eine Gerade  $g'$  mit  $g' \subset \varepsilon$  und  $g' \parallel g$  gibt;
  - b) wenn es eine Ebene  $\varepsilon'$  mit  $g \subset \varepsilon'$  und  $\varepsilon' \parallel \varepsilon$  gibt.
4. Man beweise: Ist  $\varepsilon$  eine Ebene,  $P$  ein Punkt, so gibt es genau eine Ebene  $\varepsilon'$  mit  $P \in \varepsilon'$  und  $\varepsilon' \parallel \varepsilon$ .
5. Es ist zu zeigen, daß die Parallelität von Ebenen im Raum eine Äquivalenzrelation ist.
6. Man bestimme den Durchschnitt einer Orientierungsfigur mit einer Ebene.
7. Man beweise: Eine Gerade  $g$  ist genau dann zu einer Ebene  $\varepsilon$  senkrecht, wenn alle Ebenen, die  $g$  enthalten, zu  $\varepsilon$  senkrecht sind.

### Strecken- und Winkelmessung

#### Kontrollfragen

1. Was besagt das Archimedische Axiom? Welche Bedeutung hat es für das Messen in der euklidischen Geometrie?
2. Wie kann in der euklidischen Ebene die Messung von Strecken erklärt werden? Was versteht man unter einem Längenfunktional?
3. Wie kann in der euklidischen Ebene die Messung von (orientierten) Elementarwinkeln bzw. (orientierten) Winkeln erklärt werden?
4. Wie unterscheidet sich die Messung orientierter Elementarwinkel von der Messung der übrigen drei Winkelarten hinsichtlich des Bildbereiches? Welche ausgezeichnete Struktureigenschaft besitzt die Menge der Größen orientierter Elementarwinkel?
5. Was besagt das Vollständigkeitsaxiom? Welche Bedeutung hat es für den axiomatischen Aufbau der (ebenen) euklidischen Geometrie?

## Aufgaben

1. Ist die Abbildung  $l_0$ , die jeder Strecke  $AB$  die reelle Zahl  $l_0(AB) = 0$  zuordnet, ein Längenfunktional im Sinne des Begriffs „Streckenmessung“?
2. Man beweise mit Hilfe der Eigenschaften Bewegungsinvarianz, Additivität und Normiertheit für das Längenfunktional  $l$  die Aussage

$$AB < DE \Rightarrow l(AB) < l(DE)$$

für Strecken  $AB$  und  $DE$ .

Lösung:  $AB < DE$  bedeutet nach Definition  $|AB| < |DE|$ , und das heißt, es gibt eine Länge  $|RS|$  mit  $|AB| + |RS| = |DE|$  und  $R \neq S$ . Diese Addition von Längen ist repräsentantenunabhängig; es werde aus der Klasse  $|AB|$  die Strecke  $AB$  gewählt, aus  $|RS|$  die Strecke  $BC$  mit  $Zw(ABC)$ , die nach dem Streckenabtragungssatz eindeutig bestimmt ist. Dann gilt nach der Definition der Addition von Längen

$$AC \in |DE| \quad \text{bzw.} \quad AC \cong DE.$$

Aus der Additivität von  $l$  folgt  $l(AB) + l(BC) = l(AC)$ , aus der Bewegungsinvarianz von  $l$  folgt  $l(AC) = l(DE)$  und  $l(BC) = l(RS)$ , insgesamt also

$$l(AB) + l(RS) = l(DE).$$

Wegen der Normiertheit von  $l$  und  $R \neq S$  ist aber  $l(RS) > 0$  und somit  $l(AB) < l(DE)$ , w. z. b. w.

3. Man beweise, daß die Halbgruppe  $(\mathfrak{S}/\cong, +)$  der Streckenlängen isomorph ist zur additiven Halbgruppe  $(\mathbf{R}_+, +)$  der nichtnegativen reellen Zahlen.

Hinweis: Man benutze das Längenfunktional  $l$ , von dem zunächst zu zeigen ist, daß es eine bijektive Abbildung von  $\mathfrak{S}$  auf  $\mathbf{R}_+$  ist.

4. Die Geraden  $g(B_1B_2)$  und  $g(C_1C_2)$  schneiden sich in  $A$ , und es gelte  $Zw(B_1AB_2)$  und  $Zw(C_1AC_2)$ . Man zeige, daß aus

$$\frac{|AC_1|}{|AC_2|} = \frac{|AB_1|}{|AB_2|}$$

die Parallelität der Geraden  $g(B_1C_1)$  und  $g(B_2C_2)$  folgt.

5. Wie sind die folgenden Eigenschaften der Streckenmessung für die Messung von Elementarwinkeln und Winkeln abzuändern?
  1. Zur Normierung des Längenfunktionals wird eine beliebige Strecke  $AB$  ( $A \neq B$ ) als Einheitsstrecke herangezogen.
  2. Es gibt Strecken beliebig großer Maßzahl  $a > 0$ .
  3. Die Addition von Längen ist unbeschränkt ausführbar.
6. Es sei  $(g, <)$  eine orientierte Gerade mit  $O \in g$ ,  $E \in g$  und  $O < E$ . Man zeige, daß es genau eine bijektive ordnungstreue Abbildung  $\varkappa$  von  $g$  auf  $\mathbf{R}$  gibt, so daß für beliebige Punkte  $X, Y$  von  $g$  die Maßzahl der Länge von  $XY$  gleich  $|\varkappa(Y) - \varkappa(X)|$  ist, wenn  $\varkappa(O) = 0$  und  $\varkappa(E) = 1$  gefordert wird (vgl. Satz von der Zahlengeraden in MfL Bd. 6).

7. Es sei  $r$  eine positive reelle Zahl,  $g$  eine Gerade,  $O$  ein nicht zu  $g$  gehörender Punkt,  $F$  der Fußpunkt des Lotes von  $O$  auf  $g$ . Auf  $g$  liege ein Punkt  $A (\neq F)$  mit  $l(OA) < r$ . Man zeige:

a) Die beiden Mengen

$$\mathfrak{R}_1 := \{X: X \in g \wedge l(OX) < r\} \cup FA^- \quad \text{und} \quad \mathfrak{R}_2 := g \setminus \mathfrak{R}_1$$

erfüllen die Voraussetzungen des Stetigkeitssatzes, d. h., zwischen keinem Punktepaar ein und derselben Menge liegt ein Punkt der anderen Menge, und es ist  $\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2 = g$ .

b) Für den auf Grund des Stetigkeitssatzes zu den beiden Klassen  $\mathfrak{R}_1$  und  $\mathfrak{R}_2$  aus a) existierenden Punkt  $Z$  mit  $Zw(A, ZA_2)$  für alle  $A_i (\neq Z)$  von  $\mathfrak{R}_i (i = 1, 2)$  gilt  $l(OZ) = r$ .

Hinweis: Man führe den Beweis indirekt, indem man durch Abtragen einer Strecke der Maßzahl  $|l(OZ) - r|$  von  $Z$  aus auf  $g$  einen Widerspruch zum Stetigkeitssatz herbeiführt.

Lösung: a) Wegen  $F \in \mathfrak{R}_1$  ist  $\mathfrak{R}_1$  nicht leer. Wählt man  $B \in FA^+$  so, daß  $l(FB) = r$  ist, so folgt aus der Rechtwinkligkeit des Dreiecks  $OFB$  und dem Satz über gegenüberliegende Winkel und Seiten  $l(OB) > r$ , also  $B \in \mathfrak{R}_2$ , so daß auch  $\mathfrak{R}_2$  nicht leer ist.

Sind  $P, Q$  Punkte von  $\mathfrak{R}_2$ , so gilt  $P \in FA^+$ ,  $Q \in FA^+$  und o. B. d. A.  $|FP| \leq |FQ|$ . Ist  $X$  ein Punkt mit  $Zw(PXQ)$ , so folgt  $X \in FA^+$  und  $|FP| < |FX| < |FQ|$ , also  $|OP| < |OX|$ , folglich wegen  $l(OP) \geq r$  auch  $l(OX) > l(OP) \geq r$ , so daß  $X$  nicht zu  $\mathfrak{R}_1$  gehören kann. Sind  $R, S$  Punkte von  $\mathfrak{R}_1$  und ist  $Y$  ein Punkt mit  $Zw(RYS)$ , so kann, falls  $Y \in FA^-$  ist,  $Y$  nicht zu  $\mathfrak{R}_2$  gehören. Für  $Y \in FA^+$  muß auch  $R$  oder  $S$  zu  $FA^+$  gehören, und aus der Zwischenrelation folgt dann  $|FY| < |FR|$  oder  $|FY| < |FS|$ , beispielsweise  $|FY| < |FR|$ . Daraus folgt  $|OY| < |OR|$ , also  $l(OY) < l(OR) < r$ , so daß  $Y$  auch in diesem Fall nicht zu  $\mathfrak{R}_2$  gehören kann.

b) Es ist  $Z \in FA^+$  und  $Z \neq F$ . Denn für  $Z \in FA^-$  hätte man mit dem in a) genannten Punkt  $B$  die Zwischenrelation  $Zw(ZAB)$ , also nicht  $Zw(AZB)$ , obwohl  $A \in \mathfrak{R}_1$  und  $B \in \mathfrak{R}_2$  ist. Wäre  $l(OZ) < r$ , so gälte für den Punkt  $T \in ZF^-$  mit  $l(TZ) = r - l(OZ)$  auf Grund der Dreiecksungleichung die Beziehung  $l(OT) < l(OZ) + l(TZ) = r$ , es gälte  $T \in \mathfrak{R}_2$ , und wählt man  $U$  auf  $TZ^-$  so, daß  $l(TU) = r$  ist, so wird  $l(OU) > r$ , also  $U \in \mathfrak{R}_1$ ; man hätte dann  $U \in \mathfrak{R}_1$ ,  $T \in \mathfrak{R}_2$  und nicht  $Zw(TZU)$  im Widerspruch zum Stetigkeitssatz. Wäre  $l(OZ) > r$ , so könnte man analog mit Hilfe eines Punktes  $S$  mit  $S \in ZF^+$  und  $l(SZ) = l(OZ) - r$ , also  $l(OS) > r$ , einen Widerspruch zum Stetigkeitssatz herleiten. Also gilt  $l(OZ) = r$ .

8. Es ist der folgende „Kreisschnittsatz“ herzuleiten: Ist  $k$  eine Kreislinie mit der Radiusmaßzahl  $r$  und dem Mittelpunkt  $O$  (also  $k = \{X: l(OX) = r\}$ ) und  $g$  eine Gerade, die einen Punkt  $A$  mit  $l(OA) < r$  enthält, so besteht der Durchschnitt von Kreislinie  $k$  und Gerade  $g$  aus genau zwei Punkten.
- 9.\* Es seien  $A, B$  zwei voneinander verschiedene Punkte. Man zeige, daß die Kreislinie  $k_A$  durch  $B$  mit dem Mittelpunkt  $A$  die Kreislinie  $k_B$  durch  $A$  mit dem Mittelpunkt  $B$  in genau zwei auf verschiedenen Seiten von  $g(AB)$  liegenden Punkten schneidet.

## Elementarer Inhalt in der Ebene

### Kontrollfragen

1. Wie sind die Begriffe „konvexes Polygon“, „eigentliches“ und „uneigentliches Polygon“ definiert?
2. Was versteht man unter der elementargeometrischen Addition bzw. Zerlegung von Polygonen?
3. Wie ist die Zerlegungsgleichheit von Polygonen definiert? Welche Eigenschaften besitzt diese Relation?
4. Wie kann der Begriff „Flächeninhalt“ für Polygone abstrakt (ohne Beanspruchung des Zahlbegriffs) eingeführt werden? Was versteht man andererseits unter *Inhaltsmessung* von Polygonen?

### Aufgaben

1. Es sei  $A$  ein konvexes Polygon. Man beweise die „Konvexitätseigenschaft“, daß mit je zwei Punkten  $P, Q \in A$  auch  $PQ \subseteq A$  gilt.
2. Bildet die Menge  $\mathfrak{P}_2$  aller eigentlichen Polygone bezüglich der Operation a) Durchschnitt, b) Vereinigung, c) elementargeometrische Addition eine Halbgruppe?
3. Warum ist die Struktur  $(\mathfrak{P}_2/\cong, \oplus)$  keine Halbgruppe, wenn  $\mathfrak{P}_2/\cong$  das System der Klassen kongruenter Polygone ist und die Operation  $\oplus$  durch Rückgang auf Repräsentanten mittels der elementargeometrischen Addition von Polygonen erklärt wird?

Lösung: Sind  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  Klassen jeweils untereinander kongruenter Polygone, so müßte in der Definition

$$\bar{A} \oplus \bar{B} = \bar{C} : \Leftrightarrow A \in \bar{A} \wedge B \in \bar{B} \wedge C \in \bar{C} \wedge C = A + B$$

zusätzlich verlangt werden, daß  $A \cap B$  uneigentlich ist, damit die Verknüpfung  $\oplus$  ausführbar ist. Die so erklärte Verknüpfung muß repräsentantenunabhängig sein, damit sie eine (eindeutige) Operation wird. Werden also beliebige andere Repräsentanten  $A' \in \bar{A}$  und  $B' \in \bar{B}$  gewählt mit  $A' \cap B'$  uneigentlich, so müßte  $C = A + B \cong A' + B' = C'$  gelten, was im allgemeinen nicht der Fall ist. Sind beispielsweise  $A$  und  $B$  kongruente gleichschenklige und rechtwinklige Dreiecke mit gemeinsamer Hypotenuse  $A \cap B$ , so ist  $C = A + B$  ein Quadrat; sind  $A'$  und  $B'$  zu  $A$  kongruente Dreiecke, die eine Kathete  $A' \cap B'$  gemeinsam haben, so ist  $C' = A' + B'$  ein Parallelogramm, das nicht zu dem Quadrat  $C$  kongruent ist.

4. Man beweise folgenden Additionssatz:  
Für Polygone  $A_1, A_2, B_1, B_2$  mit  $A_1 \cap A_2$  und  $B_1 \cap B_2$  uneigentlich gilt

$$A_1 \stackrel{z}{=} B_1 \wedge A_2 \stackrel{z}{=} B_2 \Rightarrow A_1 + A_2 \stackrel{z}{=} B_1 + B_2.$$

5. Man zeige, daß die Menge  $\mathfrak{P}_2/\cong$  der Klassen untereinander zerlegungsgleicher eigentlicher Polygone bezüglich einer im Sinne von Aufgabe 3 erklärten Operation  $\oplus$  eine kommutative Halbgruppe bildet.

Hinweis: Es ist der Additionssatz (Aufgabe 4) zu verwenden.

6. In  $\mathfrak{P}_2/\cong$  werde durch

$$x \leq y \Leftrightarrow A \in x \wedge B \in y \wedge F(A) \leq F(B)$$

eine Relation  $\leq$  erklärt. Man zeige, daß dadurch die Halbgruppe  $(\mathfrak{P}_2/\cong, +)$  angeordnet wird.

7. Man beweise, daß die beiden Diagonalen im Rechteck dieselbe Länge haben.
8. Ein Parallelogramm, dessen Seiten alle dieselbe Länge haben, heißt Rhombus. Man zeige, daß ein Parallelogramm genau dann ein Rhombus ist, wenn seine Diagonalen zueinander senkrecht sind.
9. Man zeige, daß ein Parallelogramm  $P = ABCD$  stets einem Rechteck  $R$  zerlegungsgleich ist, das mit  $P$  die Seite  $AB$  gemeinsam hat.
10. Ein Trapez ist ein Viereck mit wenigstens einem Paar paralleler Seiten, der Abstand der entsprechenden parallelen Geraden heißt (zugehörige) Höhe im Trapez. Analog werden die Abstände der jeweils parallelen Geraden, auf denen die Seiten eines Parallelogramms liegen, als (zugehörige) Höhen im Parallelogramm bezeichnet.  
Man zeige, daß ein Trapez mit der Höhe  $h$  stets mit einem Parallelogramm der Höhe  $\frac{1}{2}h$  zerlegungsgleich ist.
11. Man zeige, daß ein Dreieck stets mit einem Rechteck zerlegungsgleich ist.
12. Ist die Abbildung  $u$ , die jedem Polygon  $P$  die Umfangsmaßzahl  $u(P)$  zuordnet, ein elementares Inhaltstunktional im Sinne des Begriffs „Inhaltsmessung“?
13. Man leite aus dem „Kathetensatz“ folgenden „Höhensatz“ her: Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Länge der zur Hypotenuse gehörenden Höhe gleich dem Produkt der Längen der beiden Hypotenusenabschnitte.
14. In einem konvexen  $n$ -Eck  $P$  ( $n > 2$ ) seien  $AB$  und  $BC$  zwei beliebige Seiten, die den Eckpunkt  $B$  gemeinsam haben. Dann heißt  $\sphericalangle(ABC; X^+)$  Innenwinkel von  $P$ , wenn  $X$  ein innerer Punkt von  $P$  ist. Man beweise:
- $P$  liegt ganz in der abgeschlossenen Halbebene  $ABC^+$ .
  - Die Menge  $P'$  aller inneren Punkte von  $P$  liegt im Inneren des Winkels  $\sphericalangle(ABC; X^+)$ , der Innenwinkel ist also durch einen Punkt  $X \in P'$  eindeutig bestimmt.
15. Man beweise, daß die Summe der Maßzahlen aller Innenwinkelgrößen im konvexen  $n$ -Eck gleich  $(n - 2) \cdot 180^\circ$  ist.

16. Es sei  $P = A_1 A_2 \dots A_n$  ein beliebiges konvexes  $n$ -Eck mit den Seitenlängenmaßzahlen  $a_i = l(A_i A_{i+1})$  ( $i = 1, \dots, n; A_{n+1} = A_1; n \geq 3$ ). Es sei  $M$  ein Punkt aus  $P$ , für den  $l(MF_i) = 2$  gilt, wenn  $F_i$  Lotfußpunkt von  $M$  auf  $g(A_i A_{i+1})$  ist ( $i = 1, \dots, n$ ). Man zeige, daß dann  $F(P) = \sum_{i=1}^n a_i$  gilt.
17. Im regulären  $n$ -Eck sind die Seiten und Innenwinkel jeweils paarweise kongruent. Unter Ausnutzung trigonometrischer Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck leite man eine Formel zur Berechnung der Inhaltsmaßzahl (konvexer) regulärer  $n$ -Ecke her in Abhängigkeit von  $n$  und der Seitenlängenmaßzahl  $a$ .
18. a) Man beweise, daß die Relationen „umfangsgleich“ ( $P \approx Q : \Leftrightarrow u(P) = u(Q)$ ) und „inhaltsgleich“ ( $P \sim Q : \Leftrightarrow F(P) = F(Q)$ ) Äquivalenzrelationen über der Menge  $\mathfrak{P}_2$  aller eigentlichen Polygone sind.  
b) Welche der beiden folgenden Aussagen ist wahr?  
1. Sind zwei Polygone umfangsgleich, so sind sie auch inhaltsgleich.  
2. Sind zwei Polygone inhaltsgleich, so sind sie auch umfangsgleich.
19. Es sei  $P = ABCD$  ein Parallelogramm, dessen zur Seite  $AB$  gehörende Höhe die Maßzahl  $h$  hat. Man zeige, daß für die Inhaltsmaßzahl von  $P$  die Beziehung  $F(P) = l(AB) \cdot h$  gilt.
20. Es seien  $a$  und  $b$  die Maßzahlen der Längen der beiden parallelen Seiten eines Trapezes  $T$ , und  $h$  sei die zugehörige Höhenmaßzahl. Man beweise die Formel

$$F(T) = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

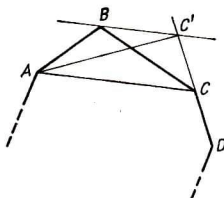


Abb. 4.1

21. Man beweise, daß ein konvexes  $n$ -Eck ( $n \geq 3$ ) stets mit einem Dreieck zerlegungsgleich ist.
1. Lösung: Der Beweis werde durch vollständige Induktion nach der Eckenzahl  $n$  geführt:
- a) Für  $n = 3$  ist nichts zu beweisen — jedes Dreieck ist zu sich selbst zerlegungsgleich.  
b) Die Aussage sei richtig für alle konvexen  $n$ -Ecke mit  $n = k \geq 3$ .  
c) Es sei  $P$  jetzt ein konvexes Polygon mit  $k + 1$  Ecken.  $A, B, C, D$  seien vier „aufeinanderfolgende“ Ecken von  $P$  (vgl. Abb. 4.1).  $C'$  sei der Schnittpunkt der Geraden  $g(CD)$

und der Parallelen zu  $g(AC)$  durch  $B$ . Dann haben die Dreiecke  $D = ABC$  und  $D' = AC'C$  die Seite  $AC$  gemeinsam und sind zerlegungsgleich:  $D \stackrel{z}{=} D'$ . Mit  $P = P^* + D, P' = P^* + D'$  folgt nach dem Additionssatz (Aufgabe 4)  $P \stackrel{z}{=} P'$ , wobei  $P'$  jetzt ein Polygon mit  $k$  Ecken ist (statt der beiden Ecken  $B$  und  $C$  tritt nur noch die Ecke  $C'$  auf). Nach der Induktionsannahme ist  $P'$  demnach mit einem Dreieck zerlegungsgleich, wegen der Transitivität von  $\stackrel{z}{=}$  muß also auch  $P$  mit einem Dreieck zerlegungsgleich sein.

2. Lösung: Ist  $P$  ein  $n$ -Eck mit der Inhaltsmaßzahl  $F(P) = a$  und  $D = ABC$  ein beliebiges Dreieck mit  $l(AB) = a$  und der Maßzahl 2 für die zur Seite  $AB$  gehörende Höhe, so gilt  $F(P) = F(D)$ . Folglich ist nach dem Satz von der Äquivalenz der Zerlegungs- und Inhaltsgleichheit von Polygonen  $P \stackrel{z}{=} D$ .

## Elementarer Inhalt im Raum

### Kontrollfragen

1. Wie sind die Begriffe „konvexes Polyeder“, „eigentliches“ und „uneigentliches Polyeder“ definiert?
2. Was versteht man unter der elementargeometrischen Addition bzw. Zerlegung von Polyedern?
3. Wie ist die Zerlegungsgleichheit von Polyedern definiert? Welche Eigenschaften besitzt diese Relation?
4. Was versteht man unter der Inhalts- bzw. Volumenmessung von Polyedern?
5. Welcher Unterschied besteht zwischen der Ebene und dem Raum hinsichtlich der Beziehung zwischen Zerlegungs- und Inhaltsgleichheit von Polygonen bzw. Polyedern?

### Aufgaben

1. Man zeige, daß die Vereinigung zweier Polyeder stets wieder ein Polyeder ist.
2. Man beweise, daß die Zerlegungsgleichheit von Polyedern eine Äquivalenzrelation in der Menge  $\mathfrak{P}_3$  aller eigentlichen Polyeder ist.
3. Für zwei eigentliche konvexe Polyeder  $A, B$  gelte  $A \subseteq B$ . Ist die elementargeometrische Summe  $A + B$  ausführbar?
4. Man zeige, daß jedes eigentliche Polyeder stets als elementargeometrische Summe von endlich vielen eigentlichen konvexen Polyedern dargestellt werden kann.

Lösung: Jedes eigentliche Polyeder  $P$  ist nach Definition die Vereinigung endlich vieler konvexer Polyeder  $A_i$ :

$$(a) \quad P = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n.$$

Sämtliche Ebenen, die jeweils eine Seitenfläche der  $A_i$  ganz enthalten, „zerlegen“ das Polyeder  $P$  in endlich viele konvexe Polyeder  $B_j$ , die paarweise keine inneren Punkte

gemeinsam haben. Hat nämlich etwa eine solche „Schnittebene“  $\varepsilon$ , die eine Seitenfläche von  $A_t$  enthält, einen inneren Punkt mit  $A_s$  ( $s \neq t$ ) gemeinsam, so ist  $\varepsilon \cap A_s$  ein in  $\varepsilon$  liegendes konvexes Polygon  $F$ , und  $A_s$  ist zerlegt in zwei konvexe Polyeder  $A_1^s$  und  $A_2^s$  mit der gemeinsamen Seitenfläche  $F$ :

$$A_s = A_1^s + A_2^s, \quad A_1^s \cap A_2^s = F.$$

Im Sinne einer vollständigen Induktion nach der Anzahl der Schnittebenen, die mit  $A_s$  innere Punkte gemeinsam haben, ergibt sich für  $A_s$  schließlich eine Darstellung  $A_s = B_1^s \cup B_2^s \cup \dots \cup B_r^s$ , mit  $B_i^s \cap B_j^s$  uneigentlich für  $i \neq j$  und  $B_i^s$  konvex ( $i = 1, \dots, r_s$ ). Setzt man diese Darstellung der  $A_i$  in (a) ein und faßt eventuell gleiche Polyeder in geeigneter Weise zusammen ( $B_i^s \cup B_j^s = C_r$  für  $B_i^s = B_j^s \subseteq A_s \cap A_t$ ), so ergibt sich aus (a) die Darstellung

$$P = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m$$

mit  $C_i \cap C_j$  uneigentlich für  $i \neq j$  und  $C_i$  konvex ( $i = 1, \dots, m$ ), und somit gilt

$$P = \sum_{i=1}^m C_i \quad (C_i \text{ konvex}).$$

5. In der Menge  $\mathfrak{P}_3/\cong$  aller Klassen untereinander zerlegungsgleicher eigentlicher Polyeder werde folgende Verknüpfung erklärt:

$$x \oplus y = z: \Leftrightarrow A \in x \wedge B \in y \wedge A \cap B = \emptyset \wedge A + B \in z.$$

Man zeige, daß die Struktur  $(\mathfrak{P}_3/\cong, \oplus)$  eine kommutative Halbgruppe ist.

6. Man beweise, daß die Volumengleichheit zweier Polyeder notwendige Bedingung für ihre Zerlegungsgleichheit ist.

7. In  $\mathfrak{P}_3/\cong$  werde durch

$$x < y: \Leftrightarrow A \in x \wedge B \in y \wedge V(A) < V(B)$$

eine Relation erklärt. Man zeige, daß die Relation  $<$  eine irreflexive Halbordnung in  $\mathfrak{P}_3/\cong$  ist.

8. Mit  $\bar{V}(x) := V(A)$  für  $A \in x$  ist eine Abbildung von  $\mathfrak{P}_3/\cong$  in  $\mathbf{R}$  erklärt. Man zeige, daß  $\bar{V}$  ein Homomorphismus von  $(\mathfrak{P}_3/\cong, \oplus)$  auf  $(\mathbf{R}_+, +)$  ist, wenn  $\oplus$  die in Aufgabe 5 definierte Operation ist.

9. Wie kann man den Begriff der Polyederfläche bzw. des Oberflächeninhaltes von konvexen Polyedern auf allgemeine (eigentliche) Polyeder ausdehnen?

Hinweis: Man benutze das Ergebnis der Aufgabe 4.

10. Man leite eine Formel zur Berechnung des Oberflächeninhaltes vom Würfel her.
11. Man überprüfe, ob die Abbildung  $O$ , die jedem Polyeder  $P$  die Maßzahl  $O(P)$  des Oberflächeninhaltes zuordnet, ein elementares Volumenfunktional im Sinne des Begriffs „Volumenmessung“ ist.
12. Man berechne die Maßzahlen für den Oberflächeninhalt und das Volumen eines regulären Tetraeders (Simplex, dessen Kanten alle die gleiche Länge haben).



## Allgemeiner Inhalt

### Kontrollfragen

1. Was versteht man unter einer quadrierbaren Punktmenge in der euklidischen Ebene bzw. im Raum?
2. Wie kann eine Inhaltsmessung quadrierbarer Punktfolgen eingeführt werden?
3. Was versteht man unter dem allgemeinen (Jordanschen) Inhaltsfunktional? Welche Eigenschaften besitzt dieses Funktional?
4. Man leite die Formel zur Berechnung der Inhaltsmaßzahlen von Kreis und Kugel her.

### Aufgaben

1. Ist ein eigentliches Polyeder im  $R^3$  stets eine quadrierbare Punktmenge?
2. Man zeige, daß ein uneigentliches Polyeder im  $R^3$  eine quadrierbare Punktmenge ist.

Lösung: Ein uneigentliches Polyeder  $P$  läßt sich darstellen durch  $P = A_1 \cup \dots \cup A_n$ , wobei die  $A_i$  in Ebenen  $\varepsilon_i$  liegen und dort eigentliche oder uneigentliche Polygone sind, jedenfalls existieren eigentliche Polygone  $B_i$  mit  $A_i \subseteq B_i$ . Nun werden Prismen  $Z_i$  mit den Grundflächen  $B_i$  und der Höhenmaßzahl  $h$  gebildet. Mit  $Q := Z_1 \cup \dots \cup Z_n$  gilt  $P \subseteq Q$ , wobei  $Q \in \mathfrak{F}_3$  ist. Nach dem Satz von der erweiterten Additivität des elementaren Inhalts ist

$$V(Q) \leq \sum_{i=1}^n V(Z_i) = h \cdot \sum_{i=1}^n F(B_i).$$

Ist eine reelle Zahl  $\varepsilon > 0$  vorgegeben, so wählt man  $h := \frac{\varepsilon}{2 \sum_{i=1}^n F(B_i)}$ , und es ergibt sich  $\emptyset \subseteq P \subseteq Q$  mit

$$V(Q) - V(\emptyset) \leq \sum_{i=1}^n V(Z_i) < \varepsilon.$$

Folglich ist  $P$  quadrierbar.

3. Für eine Punktmenge  $X \subseteq R^3$  gebe es zu jeder reellen Zahl  $\varepsilon > 0$  zwei quadrierbare Punktfolgen  $X_1, X_2$  mit  $X_1 \subseteq X \subseteq X_2$ , für deren Jordansche Inhaltsmaßzahlen  $J_3(X_i)$

$$J_3(X_2) - J_3(X_1) < \varepsilon$$

gilt. Man zeige, daß dann auch  $X$  eine quadrierbare Punktmenge ist.

4. Man zeige, daß es zu jeder nichtnegativen reellen Zahl  $a$  eine quadrierbare Punktmenge  $X$  mit  $J_k(X) = a$  gibt.
5. Ist das Jordansche Inhaltsfunktional  $J_k$  eine bijektive Abbildung von der Menge  $\mathfrak{Q}_k$  aller quadrierbaren Punktfolgen des  $R^k$  in  $\mathbf{R}_+$ ?
6. Ist das Jordansche Inhaltsfunktional  $J_k$  ein Homomorphismus von  $(\mathfrak{Q}_k, \cup)$  in  $(\mathbf{R}_+, +)$ ?

7. Ist das Jordansche Inhaltsfunktional  $J_k$  ein Homomorphismus von  $(\mathfrak{K}_k, \cap)$  in  $(\mathbb{R}_+, +)$ ?
- 8.\* Man beweise folgenden Satz vom Kegelvolumen: Ist die Grundfläche  $A$  eines Kegels  $M$  mit der Höhenmaßzahl  $h$  eine quadrierbare Punktmenge mit der Inhaltsmaßzahl  $J_2(A)$ , so ist auch  $M$  quadrierbar mit

$$J_3(M) = \frac{1}{3} J_2(A) \cdot h.$$

## Die Methode der analytischen Geometrie

### Kontrollfragen

- Wie kann man die Wörter „der Geraden“, „des (dreidimensionalen) Raumes“, „der Ebene“ so in die freigelassenen Stellen der folgenden drei Sätze eintragen, daß wahre Aussagen entstehen?  
 „In der analytischen Geometrie ... werden die Punkte auf Zahlentripel  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  abgebildet.“  
 „In der analytischen Geometrie ... werden die Punkte auf Zahlen  $x \in \mathbb{R}$  abgebildet.“  
 „In der analytischen Geometrie ... werden die Punkte auf Zahlenpaare  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  abgebildet.“
- Man charakterisiere den Begriff „ $\nu$ -te Koordinate eines Punktes  $P \in \mathbb{R}^n$  (bezüglich eines Koordinatensystems mit Anfangspunkt  $O$  und Achsen  $g_1, \dots, g_n$ )“, wobei man die Begriffe „Lot“ und „vorzeichenfähige Länge  $m(XY)$  einer Strecke  $XY$ “ verwende.

### Aufgaben

- Man führe den Beweis, daß die in MfL Bd. 7, 2.1.3., für  $n = 2$  und  $n = 3$  definierte Abbildung  $\kappa$  bijektiv ist, schrittweise für  $n = 2, 3$  mit Hilfe der dort gezeigten Bijektionen  $\mathbb{R}^n \rightarrow u \times g_n$  durch.

Hinweis: Man beweise und verwende Bijektionen  $u \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  und  $g_n \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Man beweise, daß im  $\mathbb{R}^3$  die Menge  $M := \{\kappa^{-1}(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0\}$  mit der Ebene  $\varepsilon(g_2g_3)$  übereinstimmt.

Lösung: Genau dann gilt  $P \in M$ , wenn  $O$  mit dem Fußpunkt  $T_1$  des Lotes von  $P$  auf  $g_1$  übereinstimmt. Dies ist äquivalent damit, daß  $P$  in der zu  $g_1$  senkrechten Ebene durch  $O$  liegt, d. h. in  $\varepsilon(g_2g_3)$ .

- Man beweise aus Aufgabe 2 und einer analogen Darstellung von  $\varepsilon(g_1g_3)$ , daß  $\varepsilon(g_1g_3) \cap \varepsilon(g_2g_3) = g_3$  gilt.

## Vektoren, ihre Addition und Vervielfachung

### Kontrollfragen

1. Man charakterisiere den Begriff „ $\nu$ -te Komponente eines Vektors  $v(AB)$  im  $R^n$ “ unter Verwendung der Begriffe „Lot“ und „ $m(XY)$ “.
2. Für  $\nu = 1, \dots, n$  sei  $a_\nu$  die  $\nu$ -te Komponente eines Vektors  $a$ , ebenso  $b_\nu$  die  $\nu$ -te Komponente eines Vektors  $b$ . Wie kann man  $b_\nu$  aus  $a_\nu$  errechnen, wenn
  - a) der Vektor  $b$  das Dreifache des Vektors  $a$ ,
  - b) der Vektor  $b$  entgegengesetzt gleich dem Zweifachen des Vektors  $a$ ,
  - c) der Vektor  $b$  durch Komposition der Verschiebung  $a$  mit derjenigen Verschiebung entstanden ist, die den Ursprung  $O$  in den Punkt mit einem gegebenen Koordinaten- $n$ -Tupel  $(c_1, \dots, c_n)$  überführt?

### Aufgaben

1. Man beweise für den in MfL Bd. 7, 2.2.3., eingeführten Begriff der „Streckung eines Punktepaars mit einer Zahl“: Gehen aus Paaren  $(A, B)$ ,  $(A', B')$  durch Streckung mit  $t \in \mathbf{R}$  die Paare  $(A, C)$  bzw.  $(A', C')$  hervor und gilt  $v(AB) = v(A'B')$ , so gilt auch  $v(AC) = v(A'C')$ .

Hinweis: Man beweise, daß erstens  $|AC| = |A'C'|$  gilt und daß zweitens  $AC^+$ ,  $A'C'^+$  gleichen Richtungssinn haben.

2. a) Man berechne die Eckpunkte des von den Vektoren  $a = \langle 2, 2, -1 \rangle$ ,  $b = \langle 1, 4, 1 \rangle$ ,  $c = \langle -1, 1, 3 \rangle$  aufgespannten Spats mit dem Anfangspunkt  $(3, -1, 4)$ .  
 b) Von welchen Vektoren wird dieses Spat aufgespannt, wenn man den Punkt  $(4, 2, 6)$  als Anfangspunkt auffaßt?
3. Es seien  $a_1, \dots, a_k$  die Ortsvektoren gegebener Punkte  $A_1, \dots, A_k$ ; es sei  $S$  der Punkt mit dem Ortsvektor  $\bar{s} := \frac{1}{k}(a_1 + \dots + a_k)$ . Man beweise, daß  $v(SA_1) + \dots + v(SA_k) = \mathbf{0}$ .

## Analytische Darstellung von Länge, Winkelgröße, Flächeninhalt, Volumen

### Kontrollfragen

1. Für drei nichtkollineare Punkte  $P, U, V \in R^n$  sei

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = a := v(PU), \quad \langle b_1, \dots, b_k \rangle = b := v(PV),$$

$$l := |UV|, \quad \varphi := |\sphericalangle UPV|, \quad \alpha := m(\sphericalangle UPV).$$

Welche der Größen  $l$ ,  $\sin \varphi$ ,  $\cos \varphi$ ,  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  stimmen mit welchen der Größen

$$\frac{ab}{|a| |b|}, \quad \frac{\det(a, b)}{|a| |b|}, \quad \sqrt{(b-a)^2}, \quad \frac{\sqrt{a^2 b^2 - (ab)^2}}{|a| |b|},$$

$$\frac{|a \times b|}{|a| |b|}, \quad |b-a|, \quad \sqrt{\sum_{\nu=1}^n (b_\nu - a_\nu)^2},$$

$$\frac{|a_1 b_2 - a_2 b_1|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}, \quad \frac{\sum_{\nu=1}^n a_\nu b_\nu}{\sqrt{\sum_{\nu=1}^n a_\nu^2} \cdot \sqrt{\sum_{\mu=1}^n b_\mu^2}}$$

überein? Bei welchen dieser Größen und Formeln ist nur  $n=2$ , bei welchen nur  $n=3$  sinnvoll?

2. Im  $R^n$  (mit  $O$  als Ursprung und  $e_1, \dots, e_n$  als Einheitsvektoren eines kartesischen Koordinatensystems) seien  $n$  Vektoren

$$a_\nu = v(OA_\nu) = \langle a_{\nu 1}, \dots, a_{\nu n} \rangle \neq 0 \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

gegeben. Welche der Größen

$$|a_i|, \quad a_i a_j, \quad |a_i \times a_j|, \quad \frac{a_{ij}}{|a_i|}, \quad |\det(a_1, \dots, a_n)|$$

stimmen mit welchen der Größen

$$\sum_{\mu=1}^n a_{i\mu} a_{j\mu}, \quad |OA_i|, \quad n! \cdot |OA_1 \dots A_n|, \quad \cos |\sphericalangle(a_i, e_j)|,$$

$$|a_i| |a_j| \sin |\sphericalangle(a_i, a_j)|, \quad |a_i| |a_j| \cos |\sphericalangle(a_i, a_j)|,$$

$$\sqrt{\sum_{\mu=1}^n a_{i\mu}^2}, \quad \sqrt{(a_{i2} a_{j3} - a_{i3} a_{j2})^2 + (a_{i3} a_{j1} - a_{i1} a_{j3})^2 + (a_{i1} a_{j2} - a_{i2} a_{j1})^2}$$

überein? Bei welchen dieser Größen und Formeln ist nur  $n=3$  sinnvoll?

### Aufgaben

- Es seien  $A, B, C$  die Punkte  $(-1, -3)$ ,  $(1, 1)$  bzw.  $(-3, 5)$ . Man berechne die Seitenlängen und die Größen orientierter Elementarwinkel zwischen den Seiten des Dreiecks  $ABC$  (Abb. 4.2).
- a) Man ermittle eine Formel, durch die aus gegebenen Vektoren  $a, b$  und einer gegebenen Zahl  $p > 0$  der Flächeninhalt  $|ABCD|$  eines Vierecks  $ABCD$  mit  $v(AB) = a$ ,  $v(AD) = b$ ,  $v(DC) = pa$  (Trapez) ausgedrückt wird.  
b) Man zeige, daß diese Formel auf das Viereck  $(-2, -2)$   $(4, 1)$   $(3, 4)$   $(-1, 2)$  anwendbar ist, und berechne seinen Flächeninhalt.

3. Für ein von den Vektoren  $\mathbf{a} = \langle 2, 2, -1 \rangle$ ,  $\mathbf{b} = \langle 1, 4, 1 \rangle$ ,  $\mathbf{c} = \langle -1, 1, 3 \rangle$  aufgespanntes Spat berechne man die Kantenlängen, die Flächeninhalte der Seitenflächen, das Volumen sowie die Größen der Elementarwinkel, die seine Seitenkanten miteinander und mit den positiven Halbachsen des Koordinatensystems bilden.
4. a) Man ermittle eine Formel, durch die aus gegebenen Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  des  $\mathbb{R}^3$  das Volumen  $V$  eines Prismas ausgedrückt wird, dessen Grundfläche ein Dreieck  $ABC$  mit  $\mathbf{v}(CA) = \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{v}(CB) = \mathbf{b}$  ist und in dessen Deckfläche ein Punkt  $Z$  mit  $\mathbf{v}(CZ) = \mathbf{c}$  liegt.  
 b) Man zeige, daß diese Formel auf das Polyeder  $(2, -2, 1)$   $(3, 1, -2)$   $(0, 4, -1)$   $\times$   $(1, -1, 7)$   $(2, 2, 4)$   $(-1, 5, 5)$  anwendbar ist, und berechne sein Volumen.

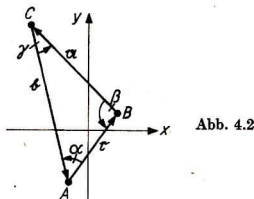


Abb. 4.2

5. Für ein beliebiges Dreieck  $ABC$  setze man  $\mathbf{a} := \mathbf{v}(BC)$ ,  $\mathbf{b} := \mathbf{v}(CA)$ ;  $a := |BC|$ ,  $b := |CA|$ ,  $c := |AB|$ ,  $s := \frac{1}{2}(a + b + c)$ . Vermittels  $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma$  und  $a^2 b^2 - (ab)^2 = 4 |ABC|^2$  beweise man

$$-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 = 16 |ABC|^2$$

und damit die *Heronische Formel*

$$|ABC| = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

6. Für  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  beweise man  $\cos^2 \angle(\mathbf{a}, \mathbf{e}_1) + \dots + \cos^2 \angle(\mathbf{a}, \mathbf{e}_n) = 1$ .
7. Für Vektoren  $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ,  $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ ,  $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$  im  $\mathbb{R}^3$  beweise man

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{c} - (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{c}_2 = (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{c} - (a_2 b_1 - a_1 b_2) \mathbf{c}_1$$

durch Berechnung der drei Komponenten von  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$  aus den  $a_i, b_i, c_i$ .

**Lösung:** Die erste Komponente von  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$  ergibt sich, indem man vom Produkt aus der zweiten Komponente des Vektors  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  und der dritten Komponente des Vektors  $\mathbf{c}$  das Produkt aus der dritten Komponente des Vektors  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  und der zweiten Komponente des Vektors  $\mathbf{c}$  subtrahiert. Man erhält  $(a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2 - (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_1 = (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{c}_2 - (a_2 b_1 - a_1 b_2) \mathbf{c}_1$ . Entsprechend bestätigt man die Behauptung für die zweite und dritte Komponente von  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ .

8. Man formuliere (mit Hilfe geometrischer Beziehungen) für die Lage von Punkten  $O, A, B, C \in \mathbb{R}^n$  eine Bedingung, die notwendig und hinreichend dafür ist, daß die Vektoren  $a := v(OA)$ ,  $b := v(OB)$ ,  $c := v(OC)$  die Gleichung  $(a\bar{b})c = a(\bar{b}c)$  erfüllen.
9. Man diskutiere ebenso im  $\mathbb{R}^3$  die Gleichung  $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ .

## Lineare Parameterdarstellungen

### Kontrollfragen

1. Es seien  $p, q = p + a, s = p + b$  die Ortsvektoren dreier nichtkollinearere Punkte  $P, Q, S$ ; es seien  $a_1, \dots, a_k$  linear unabhängige Vektoren. Welche der Mengen

$$\{\xi: (\forall u, v \in \mathbb{R}: \xi = p + ua + vb)\},$$

$$\{\xi: (\forall t \in \mathbb{R}: \xi = p + ta \wedge 0 \leq t \leq 1)\},$$

$$\{\xi: (\forall \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}: \xi = \lambda p + \mu q + \nu s \wedge \lambda + \mu + \nu = 1)\},$$

$$\{\xi: (\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}: \xi = \lambda p + \mu q \wedge \lambda + \mu = 1 \wedge \lambda \geq 0 \wedge \mu \geq 0)\},$$

$$\{\xi: (\forall u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}: \xi = p + u_1 a_1 + \dots + u_k a_k)\},$$

$$\{\xi: (\forall t \in \mathbb{R}: \xi = p + ta)\},$$

$$\{\xi: (\forall \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}: \xi = \lambda p + \mu q + \nu s \wedge \lambda + \mu + \nu = 1 \wedge \lambda \geq 0 \wedge \mu \geq 0 \wedge \nu \geq 0)\},$$

$$\{\xi: (\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}: \xi = \lambda p + \mu q \wedge \lambda + \mu = 1)\},$$

$$\{\xi: (\forall u, v \in \mathbb{R}: \xi = p + ua + vb \wedge u \geq 0)\},$$

$$\{\xi: (\forall t \in \mathbb{R}: \xi = p + ta \wedge t \geq 0)\}$$

ist die Menge der Ortsvektoren einer Punktmenge von welcher der folgenden Arten?

Eine Ebene, ein Strahl, eine  $k$ -dimensionale lineare Mannigfaltigkeit, eine Strecke, eine Dreiecksfläche, eine Gerade, eine Halbgerade.

2. Man charakterisiere die Kollinearität dreier Punkte  $P, Q, X$
- durch eine Eigenschaft der Vektoren  $a := v(PQ)$ ,  $b := v(PX)$ ,
  - durch eine Eigenschaft der Zahlen  $p_1, p_2, q_1, q_2, x_1, x_2$ , falls  $P, Q, X \in \mathbb{R}^2$  die Punkte  $(p_1, p_2)$ ,  $(q_1, q_2)$  bzw.  $(x_1, x_2)$  sind.
  - Entsprechend charakterisiere man die Komplanarität von vier Punkten  $P, Q, S, X$ .
3. Es seien  $A, B$  lineare Mannigfaltigkeiten mit Parameterdarstellungen  $\xi = p + u_1 a_1 + \dots + u_j a_j$  ( $u_1, \dots, u_j \in \mathbb{R}$ ) bzw.  $\xi = q + v_1 b_1 + \dots + v_p b_p$  ( $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}$ ).

Welche der folgenden Beschreibungen einer Menge  $M_0$  charakterisiert die lineare Hülle  $M_0 = H(AB)$ , welche den Durchschnitt  $M_0 = A \cap B$ ?

„ $M_0$  ist eine lineare Mannigfaltigkeit mit  $M_0 \subseteq A$ ,  $M_0 \subseteq B$ ; und wenn  $M$  eine lineare Mannigfaltigkeit mit  $M \subseteq A$ ,  $M \subseteq B$  ist, gilt  $M \subseteq M_0$ .“

„ $M_0$  ist eine lineare Mannigfaltigkeit mit  $M_0 \supseteq A$ ,  $M_0 \supseteq B$ ; und wenn  $M$  eine lineare Mannigfaltigkeit mit  $M \supseteq A$ ,  $M \supseteq B$  ist, gilt  $M \supseteq M_0$ .“

„ $M_0$  ergibt sich durch Einsetzen der Menge aller Lösungen  $(u_1, \dots, u_f, v_1, \dots, v_g)$  des Gleichungssystems

$$u_1 a_1 + \dots + u_f a_f - v_1 b_1 - \dots - v_g b_g = q - p$$

in die Darstellung  $\xi = p + u_1 a_1 + \dots + u_f a_f$ .“

„ $M_0$  hat  $\xi = p + w_0(q - p) + w_1 a_1 + \dots + w_f a_f + w_{f+1} b_1 + \dots + w_{f+g} b_g$  als Parameterdarstellung.“

4. Zwei lineare Mannigfaltigkeiten  $A, B$  seien durch Anheften jeweils eines Vektorraumes  $\mathfrak{F}$  bzw.  $\mathfrak{G}$  an einen Punkt  $P$  entstanden. Kann man eine Basis  $\mathfrak{U} = \{u_1, \dots, u_f\}$  von  $\mathfrak{F}$  und eine Basis  $\mathfrak{B} = \{v_1, \dots, v_g\}$  von  $\mathfrak{G}$  so finden, daß  $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{B}$  eine Basis von  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{U} \cup \mathfrak{B}$  eine Basis der linearen Hülle von  $\mathfrak{F}$  und  $\mathfrak{G}$  ist? Welche Anzahlformel läßt sich dann anwenden?

### Aufgaben

- 1.\* Man führe den in MfL Bd. 7, 2.4.5., an die Berechnungsmöglichkeit von  $A \cap B$  anknüpfend vorgeschlagenen Beweis des Dimensionssatzes aus:  $A$  und  $B$  seien lineare Mannigfaltigkeiten mit Parameterdarstellungen

$$\xi = p + u_1 a_1 + \dots + u_f a_f \quad (a_1, \dots, a_f \text{ linear unabhängig}), \quad (1)$$

$$\xi = q + v_1 b_1 + \dots + v_g b_g \quad (b_1, \dots, b_g \text{ linear unabhängig}). \quad (2)$$

$D := A \cap B$  entsteht durch Einsetzen der Lösungsmenge von

$$u_1 a_1 + \dots + u_f a_f - v_1 b_1 - \dots - v_g b_g = q - p \quad (3)$$

in (1) oder (2). Ist  $h$  die Dimension von  $H := H(AB)$ , so folgt aus MfL Bd. 7, 2.4.4., Satz 11, und aus der Voraussetzung  $D \neq \emptyset$ , d. h. der Lösbarkeit von (3), daß

$$h = \text{Rang}(q - p, a_1, \dots, a_f, b_1, \dots, b_g) = \text{Rang}(a_1, \dots, a_f, b_1, \dots, b_g)$$

gilt. Also entsteht die Lösungsmenge von (3), indem man zu einer speziellen Lösung alle Linearkombinationen von  $f + g - h$  linear unabhängigen Lösungen des zu (3) gehörigen homogenen Systems addiert. Man beweise:

(I) Durch Einsetzen dieser linear unabhängigen Lösungen in den Ausdruck  $u_1 a_1 + \dots + u_f a_f$  entstehen dieselben  $f + g - h$  Vektoren wie durch Einsetzen in  $v_1 b_1 + \dots + v_g b_g$ .

(II) Heftet man den durch diese  $f + g - h$  Vektoren erzeugten Vektorraum  $\mathfrak{D}$  an einen Punkt  $T \in D$  an, so entsteht  $D$ .

(III) Diese  $f + g - h$  Vektoren sind linear unabhängig.

2. Im  $R^2$  seien  $P, Q, Z$  die Punkte  $(0, 0)$ ,  $(q, 0)$  bzw.  $(q, 1)$  mit  $q \neq 0$ . Ferner sei  $X \neq Q$  ein auf  $g(PQ)$  sonst beliebig gegebener Punkt  $(x, 0)$ . Man berechne den Schnittpunkt  $(0, \varrho)$  der Geraden  $g(ZX)$  mit der  $y$ -Achse und bestätige für ihn  $\varrho = \text{TV}(P, Q; X)$  (Abb. 4.3).

Lösung:  $g(ZX)$  ist die Menge aller Punkte mit Ortsvektoren  $\xi = \lambda(q, 1) + \mu(x, 0)$  ( $\lambda + \mu = 1$ ). Den Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse liefert das Paar  $(\lambda_0, \mu_0)$  mit  $\lambda_0 + \mu_0 = 1$  und  $\lambda_0 q + \mu_0 x = 0$ . Man findet

$$\varrho = \lambda_0 = \frac{x}{x - q} = \frac{m(PX)}{m(QX)},$$

w. z. b. w.

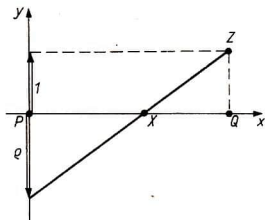


Abb. 4.3

3. Aus gegebenen Ortsvektoren  $p, q$  zweier Punkte  $P, Q$  sowie gegebenem  $\varrho := \text{TV}(P, Q; X)$  berechne man  $X$  und dann  $\text{TV}(P, X; Q)$ ,  $\text{TV}(Q, X; P)$  (Ausnahmefälle beachten!). Hieraus und aus der in MfL Bd. 7, 2.4.1., gezeigten Aussage  $\text{TV}(P, Q; X) < 0 \Leftrightarrow \text{Zw}(P, X, Q)$  beweise man  $\text{TV}(P, Q; X) > 1 \Leftrightarrow \text{Zw}(P, Q, X)$  und  $0 < \text{TV}(P, Q; X) < 1 \Leftrightarrow \text{Zw}(Q, P, X)$ .

Man leite diese Aussagen auch geometrisch aus Aufgabe 2 her.

4. Gegeben seien zwei Geraden  $g, h$  im  $R^3$ . Man ermittle die Menge  $M$  aller Punkte mit der Eigenschaft, Mittelpunkt (mindestens) einer Strecke  $AB$  mit  $A \in g$ ,  $B \in h$  zu sein. (Fallunterscheidung!)
5. Zu gegebenen Punkten  $M_1, \dots, M_n \in R^2$  sind Punkte  $A_1, \dots, A_n \in R^2$  so gesucht, daß  $M_1, \dots, M_{n-1}, M_n$  in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Strecken  $A_1 A_2, \dots, A_{n-1} A_n, A_n A_1$  sind.

(I) Man ermittle aus den Ortsvektoren  $m_i$  der gegebenen  $M_i$  rechnerisch (Fallunterscheidung!) alle  $n$ -Tupel  $(a_1, \dots, a_n)$  der Ortsvektoren von Punkten  $A_i$  mit der verlangten Eigenschaft.

(II) Nennt man ein  $(n+1)$ -Tupel  $(P_1, \dots, P_{n+1})$  von Punkten „zu  $P_1$  gehörig“, wenn  $M_1, \dots, M_n$  die Mittelpunkte von  $P_1 P_2, \dots, P_n P_{n+1}$  sind, so sind die Lösungen  $(A_1, \dots, A_n)$  dadurch charakterisiert, daß  $(A_1, \dots, A_n, A_1)$  „zu  $A_1$  gehörig“ ist. Man erweise unter diesem Aspekt die folgende konstruktive Gewinnung von  $A_1$  als gleichwertig mit der Lösung (I) für ungerades  $n$ : Zu einem beliebig ge-



wählten Punkt  $P_1$  werde das zugehörige  $(n+1)$ -Tupel  $(P_1, \dots, P_{n+1})$  gebildet, und dann werde  $A_1$  als der Mittelpunkt der Strecke  $P_1 P_{n+1}$  konstruiert.

Wie kann man für gerades  $n$  die Lösungsmenge mit gleichem Beginn eines konstruktiven Verfahrens (Bildung des zugehörigen  $(P_1, \dots, P_{n+1})$  zu beliebigem  $P_1$ ) erhalten?

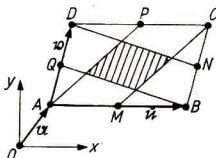


Abb. 4.4

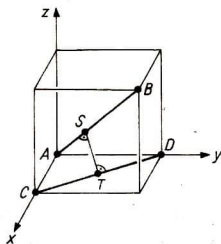


Abb. 4.5

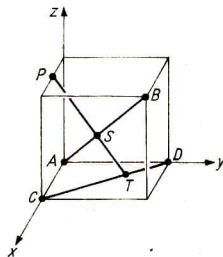


Abb. 4.6

6. Es sei  $ABCD$  ein Parallelogramm. Dieses sei nicht entartet, d. h.,  $A, B, D$  seien nicht kollinear. Ferner seien  $M, N, P, Q$  in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten  $AB, BC, CD, DA$ . Bringt man die Geraden  $g(AP), g(BQ), g(CM), g(DN)$  zum Schnitt, so entsteht ein neues Parallelogramm (Abb. 4.4; man beweise diese Aussage auch analytisch-geometrisch). Man ermittle (aus gegebenen  $\alpha := v(OA), u := v(AB), v := v(AD)$ ) die Ortsvektoren der Eckpunkte dieses Parallelogramms. Man drücke seinen Flächeninhalt durch den Flächeninhalt von  $ABCD$  aus.
7. Gegeben seien vier nicht komplanare Punkte  $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ . Man beweise, daß es genau ein Paar  $(S, T)$  von Punkten  $S \in g(AB), T \in g(CD)$  mit der Eigenschaft gibt, daß die Strecke  $ST$  sowohl auf  $g(AB)$  als auch auf  $g(CD)$  senkrecht steht (*gemeinsames Lot* zweier windschiefer Geraden; Abb. 4.5). Man ermittle  $S$  und  $T$ , wenn  $AB$  und  $CD$  die Körperdiagonale  $(0, 0, 0) (1, 1, 1)$  bzw. die Flächendiagonale  $(1, 0, 0) (0, 1, 0)$  des von  $i, j, k$  aufgespannten Würfels sind.

**Hinweis:** Man kann ein geeignetes Vektorprodukt verwenden.

- 8.\* Gegeben seien vier nicht komplanare Punkte  $A, B, C, D \in R^3$  sowie ein Punkt  $P \notin g(AB), \notin g(CD)$ . Man beweise, daß es genau eine Gerade  $g$  durch  $P$  gibt, die entweder sowohl mit  $g(AB)$  als auch mit  $g(CD)$  nichtleeren Durchschnitt hat oder zu genau einer der Geraden  $g(AB), g(CD)$  parallel ist und mit der anderen nichtleeren Durchschnitt hat (gemeinsame „Treffgerade“ zweier windschiefer Geraden durch einen vorgegebenen Punkt  $P$ , wobei Parallelität als Entartungsfall des „Treffens“ zugelassen ist). Man ermittle  $g$ , wenn  $AB, CD$  wie in der vorigen Aufgabe  $(0, 0, 0) (1, 1, 1)$  bzw.  $(1, 0, 0) (0, 1, 0)$  sind und wenn  $P$  der Punkt  $\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$  ist (Abb. 4.6).

## Lineare Gleichungen

### Kontrollfragen

1. Welche der folgenden Hyperebenengleichungen stellen Geraden im  $R^3$ , welche Ebenen im  $R^3$  dar? Welche sind in Hessescher Normalform?

$$\frac{3}{5}x_1 - \frac{4}{5}x_2 + 2 = 0, \quad \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = 0,$$

$$\langle 2, 1, -3 \rangle \langle x_1, x_2, x_3 \rangle + 3 = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{14}} \langle 2, 1, -3 \rangle \langle x, y, z \rangle - \langle 1, 0, 2 \rangle = 0.$$

2. Welche der Gleichungen

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{aligned} y - 2 &= (x + 1) \tan 120^\circ, \\ x \cos 30^\circ + y \sin 30^\circ - 2 &= 0 \end{aligned}$$

ist Gleichung von welcher der im folgenden charakterisierten Geraden  $g, h, k$ ?

$g$  ist die Gerade durch den Punkt  $(-1, 2)$  mit dem Anstiegswinkel  $120^\circ$ ;

$h$  ist die in  $D$  auf  $OD$  senkrechte Gerade, wobei der Vektor  $\mathfrak{b} := \mathfrak{v}(OD)$  die Länge 2 hat und  $m(\sphericalangle(i, \mathfrak{b})) = 30^\circ \bmod 360^\circ$  erfüllt;

$k$  ist die Gerade durch die Punkte  $(2, -1)$  und  $(1, 3)$ .

3. Es seien  $a_{i0}$  ( $i = 0, 1, 2$ ) drei Zahlen, ferner  $\mathfrak{R}_i = \langle a_{i1}, a_{i2} \rangle$  ( $i = 0, 1, 2$ ) drei vom Nullvektor verschiedene Vektoren des  $R^2$ . Welche der Aussagen (I)–(VI) ist zu welcher der Aussagen (A)–(G) äquivalent?

(I) Der Vektor  $\mathfrak{R}_0$  steht auf der Geraden  $g$  senkrecht.

(II) Die Geraden  $a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i0} = 0$  ( $i = 0, 1, 2$ ) sind konzentrisch.

(III) Die Geraden  $a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i0} = 0$  ( $i = 0, 1, 2$ ) sind konzentrisch oder paarweise parallel.

(IV) Die Geraden  $a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i0} = 0$  ( $i = 1, 2$ ) sind zueinander parallel.

(V) Die Gerade  $g$  hat den Vektor  $\mathfrak{R}_0$  als Stellungsvektor.

(VI) Der Schnittwinkel der Geraden  $a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i0} = 0$  ( $i = 1, 2$ ) hat die Größe  $\alpha$ .

(A) Es gilt  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$ .

(B) Es gilt  $\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$ .

(C) Es gilt  $\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$ ,

und mindestens eine nichtverschwindende Unterdeterminante maximaler Reihenzahl ist Unterdeterminante von  $\begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ .

(D) Es gilt  $\cos \alpha = \frac{|a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}|}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2} \cdot \sqrt{a_{21}^2 + a_{22}^2}}$ .

(E)  $g$  hat  $a_{01}x + a_{02}y + c = 0$  mit einer Zahl  $c$  als Gleichung.

(F) Es gilt  $\det(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2) = 0$ .

(G) Es gilt  $\cos \alpha = \frac{|\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2|}{|\mathfrak{R}_1| \cdot |\mathfrak{R}_2|}$ .

### Aufgaben

1. Man berechne ohne Ermittlung der Höhenfußpunkte die Höhenlängen in dem Dreieck  $(-1, -3)$   $(1, 1)$   $(-3, 5)$ .

Lösung: Der Abstand zwischen  $(-1, -3)$  und der Geraden  $\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{2}{\sqrt{2}} = 0$  durch  $(1, 1)$ ,  $(-3, 5)$  ist  $\left| -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} \right| = 3\sqrt{2}$ . Entsprechend findet man die anderen Höhenlängen  $\frac{12}{\sqrt{17}}$  und  $\frac{12}{\sqrt{5}}$ .

2. Für dasselbe Dreieck ermittle man Gleichungen der Mittelsenkrechten auf den Seiten sowie Gleichungen der winkelhalbierenden Geraden der Innen- und Außenwinkel.
3. Man weise die in Aufgabe 2 gefundenen Mittelsenkrechten als konzentrisch nach, ebenso die Innenwinkelhalbierenden, ferner je zwei Halbierende von Außenwinkeln und die Halbierende des dritten Innenwinkels.
4. Welche Beziehung zwischen den Zahlen  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $d_i$  ist notwendig und hinreichend dafür, daß die beiden Ebenen  $a_ix + b_iy + c_iz + d_i = 0$  ( $i = 1, 2$ ) aufeinander senkrecht stehen, d. h., einen Neigungswinkel der Größe  $90^\circ$  haben? Wie

lautet, wenn diese Bedingung erfüllt ist, eine Gleichung derjenigen Ebene durch  $O$ , die auf beiden genannten Ebenen senkrecht steht?

5. Man gewinne eine Gleichung der Ebene durch  $(-2, 2, 3)$ ,  $(0, 3, 0)$ ,  $(-3, 5, 5)$   
 a) nach MfL Bd. 7, 2.5.4., Satz 7, b) unter Verwendung eines Stellungsvektors, den man zuvor als Vektorprodukt zweier Verbindungsvektoren gegebener Punkte ermittle.
6. Man berechne für je zwei nichtparallele Seitenflächen eines Spats, das von  $\mathbf{a} = \langle 2, 2, -1 \rangle$ ,  $\mathbf{b} = \langle 1, 4, 1 \rangle$ ,  $\mathbf{c} = \langle -1, 1, 3 \rangle$  aufgespannt wird, die Größe ihres Neigungswinkels.

## Konvexe Polygone

### Kontrollfragen

1. Man füge in den folgenden Text auf drei verschiedene Weisen Stichworte ein, die unter den anschließend genannten Möglichkeiten (A)–(D) ausgewählt sind, so daß einmal ein Text über Vektorräume, ein zweites Mal über lineare Mannigfaltigkeiten, ein drittes Mal über konvexe Punktmenge entsteht.

„Eine Menge von ... (A) ...en ist genau dann ein(e) ... (B) ..., wenn zu je zwei Elementen dieser Menge auch deren ... (C) ... der Menge angehört. Daher ist der Durchschnitt jeder Familie von ... (B) ...en wieder ein(e) ... (B) .... Somit existiert zu jeder Menge  $M$  von ... (A) ...en genau ein(e) bezüglich  $\subseteq$  kleinste(r)  $M$  umfassende(r) ... (B) ...  $Q$ . Man bezeichnet  $Q$  als ... (D) ... von  $M$ .“

(A): Punkt (im  $R^n$ ); Vektor (in einem Vektorraum, etwa in der Menge aller Vektoren des  $R^n$ ).

(B): konvexe Punktmenge; lineare Mannigfaltigkeit; linearer Vektorraum (Unterraum).

(C): Menge aller Linearkombinationen; Verbindungsgerade; Verbindungsstrecke.

(D): konvexe Hülle; lineare Hülle (im Sinne einer linearen Mannigfaltigkeit); lineare Hülle (im Sinne eines Vektorraumes).

2. Es seien  $A, B, C$  drei nichtkollineare Punkte. Welche Lagemöglichkeiten gibt es für drei Punkte

$$U \in g(BC) \quad \text{mit} \quad U \neq B, \quad U \neq C,$$

$$V \in g(CA) \quad \text{mit} \quad V \neq C, \quad V \neq A,$$

$$W \in g(AB) \quad \text{mit} \quad W \neq A, \quad W \neq B,$$

wenn vorausgesetzt wird, daß  $\frac{|BU|}{|CU|} \cdot \frac{|CV|}{|AV|} \cdot \frac{|AW|}{|BW|} = 1$  gilt?

3. Es seien  $u, v, w$  die Ortsvektoren der Eckpunkte  $A, B, C$  eines Dreiecks;  $n_a, n_b, n_c$  seien zu  $g(BC)$ ,  $g(CA)$ ,  $g(AB)$  orthogonale Einheitsvektoren. Wie lautet in Tabelle 4.1 eine richtige Zuordnung jeweils zwischen Formel und bezeichnetem Objekt?

Tabelle 4.1

| Formel                              | Objekt                                     |
|-------------------------------------|--|
| $(w - v)(\xi - u) = 0$              | Ortsvektor $s$ des Schwerpunktes von $ABC$ |
| $ w - v $                           | Gleichung der Höhe auf $BC$                |
| $\frac{1}{3}(u + v + w)$            | Ortsvektor $q$ des Inkreismittelpunktes    |
| $ v - u $                           | Seitenlänge $c =  AB $                     |
| $ u - w $                           | Gleichung von $g(AB)$                      |
| $\frac{1}{a + b + c}(au + bv + cw)$ | Gleichung der Mittelsenkrechten von $BC$   |
| $n_c(\xi - u) = 0$                  | Seitenlänge $b =  CA $                     |
| $2g(w - v) = w^2 - v^2$             | Seitenlänge $a =  BC $                     |

### Aufgaben

- a) Man beweise folgenden Satz: Sind  $a, b, c$  die Ortsvektoren dreier nichtkollinearere Punkte  $A, B, C$ , existieren für einen Punkt  $X \neq A, B, C$  mit einem Ortsvektor  $\xi = \lambda a + \mu b + \nu c$  ( $\lambda + \mu + \nu = 1$ ) eindeutig die Punkte  $V := g(BX) \cap g(CA)$  und  $W := g(CX) \cap g(AB)$  und gilt  $g(AX) \parallel g(BC)$ , so folgt daraus die Beziehung  $TV(C, A; V) \cdot TV(A, B; W) = -1$  (vgl. MfL Bd. 7, 2.6.2., (5)).

b) Welche Aussage über  $TV(A, B; W)$  verbleibt, wenn (bei sonst gleichen Voraussetzungen) statt der eindeutigen Existenz von  $V := g(BX) \cap g(CA)$  die Parallelität  $g(BX) \parallel g(CA)$  vorausgesetzt wird?
- a) Man beweise mit Hilfe der Umkehrung des Satzes von CEVA, daß in jedem Dreieck die Seitenhalbierenden konzentrisch sind.

b) Einen entsprechenden Beweis führe man für die Höhen, wobei der (triviale) Fall des rechtwinkligen Dreiecks auszuschließen ist (weshalb?).

Hinweis: Man verwende (und beweise zuvor) a)  $|BM_a| = |CM_a|$ ,  $|CM_b| = |AM_b|$ ,  $|AM_c| = |BM_c|$  für die Seitenmitten  $M_a, M_b, M_c$ ; b)  $|AH_b| : |AH_c| = c : b$ ,  $|BH_c| : |BH_a| = a : c$ ,  $|CH_a| : |CH_b| = b : a$  für die Höhenfußpunkte  $H_a, H_b, H_c$ . Ferner diskutiere man die Anordnung von  $M_a, M_b$  und  $M_c$  (bzw. von  $H_a, H_b$  und  $H_c$ ) auf  $g(BC)$ , auf  $g(CA)$  bzw. auf  $g(AB)$  und damit den Übergang zu vorzeichenfähigen Streckenlängen. Außerdem schließe man die Parallelität von Seitenhalbierenden bzw. Höhen aus.

- Es sei  $ABC$  ein nicht gleichschenkliges Dreieck. Welche Punkttripel aus den Schnittpunkten  $W_a, W_b, W_c$  der Innenwinkelhalbierenden mit den Gegenseiten sowie den Schnittpunkten  $W'_a, W'_b, W'_c$  der Außenwinkelhalbierenden mit den Trägergeraden der Gegenseiten sind kollinear?

4. Man ermittle eine Gleichung der Eulerschen Geraden des Dreiecks  $(-1, -3) \times (1, 1) (-3, 5)$ .
5. Man beweise für die Ortsvektoren  $a, b, c, d$  nicht komplanarer Punkte  $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ : Ist  $\xi := v(OX) = \lambda a + \mu b + \nu c + \vartheta d$  ( $\lambda + \mu + \nu + \vartheta = 1$ ), so ist  $\lambda = m(XBCD) : m(ABCD)$ ,  $\mu = m(AXCD) : m(ABCD)$ ,  $\nu = m(ABXD) : m(ABCD)$ ,  $\vartheta = m(ABCX) : m(ABCD)$ .
- Hinweis: In  $\det(\xi - b, \xi - c, \xi - d)$  ersetze man den zweiten Vektor durch seine Differenz zum dritten, den dritten durch seine Differenz zum ersten, und dann addiere man zum ersten die durch Vervielfachung mit  $\nu$  bzw.  $\vartheta$  entstandenen Vektoren.
- 6.\* Unter denselben Voraussetzungen wie in Aufgabe 5 beweise man: Ist  $g(AX) \cap \varepsilon(BCD) = P$  und  $v(OP) = \varrho b + \sigma c + \tau d$  ( $\varrho + \sigma + \tau = 1$ ), so ist  $\varrho : \sigma : \tau = \mu : \nu : \vartheta$ . Aus dieser Relation, weiteren analog gebildeten Relationen sowie aus MfL Bd. 7, 2.6.2., (4), bestimme man die Teilverhältnisse, die auf den Strecken  $AB, AC, AD, BC, BD, CD$  durch den Schnitt mit den Ebenen  $\varepsilon(XCD), \varepsilon(XBD), \varepsilon(XBC), \varepsilon(XAD), \varepsilon(XAC)$  bzw.  $\varepsilon(XAB)$  entstehen.

## Analytische Darstellung von Bewegungen und Koordinatentransformationen

### Kontrollfragen

- Es seien, auf ein und dasselbe Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^n$  bezogen, jeweils  $x$  und  $x'$  die Koordinaten- $n$ -Tupel zweier Punkte (als Spaltenvektoren, d. h. Matrizen vom Typ  $(n, 1)$ , geschrieben). Mit einem Vektor, gegeben durch sein Komponenten- $n$ -Tupel  $v$  (ebenfalls als Spaltenvektor geschrieben), und einer orthogonalen Matrix  $M$  vom Typ  $(n, n)$  gelte jeweils zwischen  $x$  und  $x'$  die Gleichung  $x' = v + Mx$ . Was für eine Abbildung  $\varphi$  des  $\mathbb{R}^n$  in sich wird durch die Vorschrift  $x \mapsto x'$  gegeben? In welcher Weise bewirkt sie eine Abbildung der Menge aller Vektoren des  $\mathbb{R}^n$  in sich? Welche Eigenschaften hat diese Abbildung hinsichtlich der Addition, der Vervielfachung und der skalaren Multiplikation von Vektoren?
- Es seien  $x$  und  $x'$  die Koordinaten- $n$ -Tupel ein und desselben Punktes, bezogen auf zwei Koordinatensysteme  $\mathfrak{S} = (g_1, \dots, g_n), \mathfrak{S}' = (g'_1, \dots, g'_n)$  des  $\mathbb{R}^n$ . Dabei gelte wieder jeweils  $x' = v + Mx$  mit  $v$  und  $M$  wie in Frage 1. Was für eine Abbildung  $\psi$  des  $\mathbb{R}^n$  in sich bewirkt dann gerade, daß  $\mathfrak{S}$  bei  $\psi$  in  $\mathfrak{S}'$  übergeht? Wie hängt  $\psi$  mit der Abbildung  $\varphi$  aus Frage 1 zusammen?

### Aufgaben

- Man wende auf den Punkt  $(2, -3)$  des  $\mathbb{R}^2$  folgende Bewegungen an:
  - Die Verschiebung, die  $(1, -2)$  in  $(0, 3)$  überführt,
  - die Spiegelung an der  $y$ -Achse,

c) die Drehung um  $O$ , die  $(1, 0)$  in einen Punkt mit der Abszisse  $-\frac{1}{2}$  und mit positiver Ordinate überführt,

d) die Spiegelung an der Geraden  $x + 2y = 0$ ,

e) die Spiegelung an der Geraden  $x + 2y - 4 = 0$ .

Hinweis zu c): In den Abbildungsgleichungen MfL Bd. 7, 2.7.3., (3), ist  $\cos \omega = -\frac{1}{2}$ ,  $\sin \omega > 0$ . Wie lauten sie daher?

Hinweis zu d): 1. Lösungsweg: Das Lot von  $(2, -3)$  auf  $x + 2y = 0$  hat die Parameterdarstellung  $x = 2 + t$ ,  $y = -3 + 2t$ . Der Fußpunkt ergibt sich für denjenigen Parameterwert  $t_0$ , der die Bedingung  $(2 + t_0) + 2(-3 + 2t_0) = 0$  erfüllt. Hiernach ergibt sich der gesuchte Bildpunkt für den Parameterwert  $2t_0$ .

2. Lösungsweg: Die Drehung  $x' = \frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y)$ ,  $y' = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x + y)$  führt die Gerade  $x + 2y = 0$  in die Gerade  $x' = 0$  über. Man wende auf  $(2, -3)$  erst diese Drehung  $\delta$ , dann die Spiegelung an  $x' = 0$ , dann  $\delta^{-1}$  an.

2. Man beweise, daß im  $\mathbb{R}^3$  die Beziehung  $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3$  eine orientierungsabhängige „Eigenschaft dreier geometrischer Vektoren“ ist, d. h., daß sie bei einer Koordinatentransformation  $\mathbf{a}'_i = \mathbf{Q}\mathbf{a}_i$  mit orthogonaler Matrix  $\mathbf{Q}$  von positiver Determinante in  $\mathbf{a}'_1 \times \mathbf{a}'_2 = \mathbf{a}'_3$  übergeht.

3.\* Gegeben sei  $\tau := \frac{1}{2\sqrt{2}} \langle 1, -1, 2 \rangle$  und eine Größe  $\omega$  orientierter Elementar-

winkel mit  $p := \cos \frac{\omega}{2} := \frac{1}{2}$  (also welche Möglichkeiten für  $\omega$ ?). Man wähle geeignete Größen  $\alpha, \beta$  orientierter Elementarwinkel so, daß durch die Komposition  $\delta_{y,\beta} \circ \delta_{z,\alpha}$  der Abbildung  $\delta_{z,\alpha}$  (Drehung mit zugeordneter Größe  $\alpha$  orientierter Elementarwinkel und mit der  $z$ -Achse als Drehachse) und der anschließend ausgeführten Drehung  $\delta_{y,\beta}$  die  $x$ -Achse in die Gerade  $\xi = \tau x$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) übergeht. Dann ist

$$\delta_{y,\beta} \circ \delta_{z,\alpha} \circ \delta_{x,\omega} \circ \delta_{z,-\alpha} \circ \delta_{y,-\beta}$$

die Drehung mit  $\omega$  als zugeordneter Größe orientierter Elementarwinkel und mit der Geraden  $\xi = \tau x$  als Drehachse. Man berechne für die Gestalt

$$\mathbf{x}' = \mathbf{v} + \mathbf{M}\mathbf{x} \quad (1)$$

dieser Drehung den Spaltenvektor  $\mathbf{v}$  und die orthogonale Matrix  $\mathbf{M}$ .

4. a) Eine Quaternion  $\mathfrak{Q} = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$  wird definiert als Paar  $(a_0, \mathbf{a})$  aus einer Zahl  $a_0$  und einem Vektor  $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ . Summe und Produkt werden definiert durch

$$(a_0, \mathbf{a}) + (b_0, \mathbf{b}) := (a_0 + b_0, \mathbf{a} + \mathbf{b}),$$

$$(a_0, \mathbf{a})(b_0, \mathbf{b}) := (a_0b_0 - \mathbf{a}\mathbf{b}, a_0\mathbf{b} + b_0\mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Man beweise, daß alle Körperaxiome außer dem Kommutativgesetz der Multiplikation erfüllt sind.

b) Es sei  $\Omega = (p, \tau)$  eine gegebene Quaternion mit  $p^2 + \tau^2 = 1$ . Man beweise: Definiert man zu gegebenem Vektor  $\xi = v(OX)$  und beliebigem  $z \in \mathbf{R}$  die Quaternion

$$(z', \xi') := \Omega \cdot (z, \xi) \cdot \Omega^{-1}, \quad (2)$$

so ist  $v(OX') := \xi'$  von  $z$  unabhängig, und es gilt  $z' = z$ .

c) Von der somit durch (2) gegebenen Abbildung  $\xi \mapsto \xi'$  beweise man, daß sie Skalarprodukte erhält.

Hinweis: Für beliebige Vektoren  $\xi, \eta$  und ihre Bilder  $\xi', \eta'$  multipliziere man die Quaternionen  $(0, \xi') = \Omega \cdot (0, \xi) \cdot \Omega^{-1}$  und  $(0, \eta') = \Omega \cdot (0, \eta) \cdot \Omega^{-1}$  miteinander. Man erhält für das Produkt (die Gleichheit zwischen) zwei Darstellungen, auf die nochmals b) anwendbar ist.

d) Für die somit durch (2) gegebene Bewegung  $X \mapsto X'$  erweise man die Gerade<sup>1)</sup>  $\xi = \tau x$  als Fixpunktgerade; die Bewegung also als Drehung um diese Achse.

Hinweis: Für  $\xi := \tau x$  (und  $z := \tau p$ ) gewinne man  $\xi' = \xi$ .

e) Ist der Drehung  $X \mapsto X'$  die Größe  $\omega$  orientierter Elementarwinkel zugeordnet, so beweise man  $p = \cos \frac{\omega}{2}$ .

Hinweis: Für  $\xi$  mit  $\tau \xi = 0$  und  $\xi^2 = 1$  errechne man  $\xi \xi', \xi \times \xi'$  und daraus  $\cos m(\angle(\xi, \xi')) = 2p^2 - 1, \operatorname{sgn} \det(\xi, \xi', \tau) = \operatorname{sgn} p$ .

f) Man schreibe (2) mit  $p, \tau$  aus Aufgabe 3 in der Gestalt (1) und vergleiche die Ergebnisse.

5. Man ermittle alle Bewegungen des  $R^3$ , die das Prisma mit den Eckpunkten

$$(1, 0, -1), \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, -1\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -1\right),$$

$$(1, 0, 1), \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 1\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}, 1\right)$$

(vgl. Abb. 4.7) auf sich abbilden.

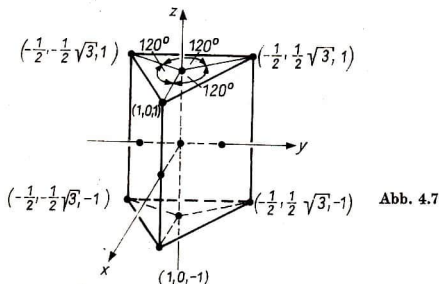


Abb. 4.7

<sup>1)</sup> Hier wird  $\tau \neq 0$ , also  $|p| \neq 1$  angenommen. Welche Bewegung gibt (2) für  $|p| = 1$ ?



## Kurven zweiter Ordnung

## Kontrollfragen

1. Es seien  $P \neq Q$  gegebene Punkte;  $m_1 \neq m_2$  gegebene Vektoren;  $r_1, r_2, s > 0$  gegebene Zahlen;  $l$  eine gegebene Gerade. Welches der folgenden Objekte  $c_1, \dots, c_{10}$  stimmt mit welchem der Objekte  $d_1, \dots, d_9$  überein?

$c_1$  ist die Menge aller Punkte  $X \in R^2$  mit  $|PX| = s$ .

$c_2$  ist die Menge aller Punkte  $X \in R^2$  mit  $|PX| + |QX| = 2s$ .

$c_3$  ist die Menge aller Punkte  $X \in R^2$  mit  $||PX| - |QX|| = 2s$ .

$c_4$  ist die Menge aller Punkte  $X \in R^2$  mit  $|PX| > s$ .

$c_5$  ist die Menge aller Punkte  $X \in R^2$  mit  $|PX| < s$ .

$c_6$  ist für zwei Kreise  $(x - m_i)^2 - r_i^2 = 0$  ( $i = 1, 2$ ) mit gemeinsamen Punkten  $S \neq T$  die Gerade  $g(ST)$ .

$c_7$  ist für einen Kreis  $k$  und jede Gerade  $g$  durch  $P$ , für die  $g \cap k = \{X_1, X_2\}$  existiert, die Zahl  $m(PX_1) \cdot m(PX_2)$ .

$c_8$  ist die Menge aller Punkte  $X \in R^2$ , deren Abstand zu  $P$  gleich ihrem Abstand zu  $l$  ist.

$c_9$  ist die Menge aller Punkte  $X \in R^2$ , deren Abstand zu  $P$  gleich ihrem mit  $s$  multiplizierten Abstand zu  $l$  ist.

$c_{10}$  ist die Menge aller Punkte  $X \in R^2$ , die bezüglich der beiden Kreise  $(x - m_i)^2 - r_i^2 = 0$  ( $i = 1, 2$ ) gleiche Potenz haben.

$d_1$  ist der Kegelschnitt mit  $P$  als Brennpunkt,  $l$  als Leitlinie und  $s$  als numerischer Exzentrizität.

$d_2$  ist die Kreislinie mit  $P$  als Mittelpunkt und  $s$  als Radius.

$d_3$  ist die offene Kreisfläche mit  $P$  als Mittelpunkt und  $s$  als Radius.

$d_4$  ist das Äußere des Kreises mit  $P$  als Mittelpunkt und  $s$  als Radius.

$d_5$  ist die Ellipse mit  $P$  und  $Q$  als Brennpunkten und  $2s$  als Hauptachsenlänge.

$d_6$  ist die Parabel mit  $P$  als Brennpunkt und  $l$  als Leitlinie.

$d_7$  ist die Hyperbel mit  $P$  und  $Q$  als Brennpunkten und  $2s$  als Hauptachsenlänge.

$d_8$  ist die Potenzlinie der beiden Kreise  $(x - m_i)^2 - r_i^2 = 0$  ( $i = 1, 2$ ).

$d_9$  ist die Potenz der Punkte  $P$  bezüglich des Kreises  $k$ .

2. Welche der folgenden Gleichungen beschreiben Kurven zweiter Ordnung? Welche beschreiben entartete Kurven zweiter Ordnung? Welche davon die Vereinigungsmenge zweier sich schneidender Geraden, welche die leere Menge?

$$x^2 + y^2 = a^2; \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad x = \frac{1}{y^2}; \quad x^2 + y^2 = -1;$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0; \quad y = -\frac{2}{x}.$$

## Aufgaben

- Man beweise, daß jede Kreisfläche eine konvexe Punktmenge ist.
- Man beweise: Sind  $k_1, k_2, k_3$  Kreise mit paarweise verschiedenen Mittelpunkten und ist jeweils  $g_{ij}$  die Potenzlinie von  $k_i$  und  $k_j$ , so sind die Geraden  $g_{23}, g_{31}, g_{12}$  konzentrisch oder zu je zweien parallel.
  - Man verwende diesen Satz, um eine Konstruktion der Potenzlinie zweier Kreise  $k_1, k_2$  mit  $k_1 \cap k_2 = \emptyset$  zu gewinnen.

Lösung: a) Ist  $f_i(x) := (x - m_i)^2 - r_i^2 = 0$  eine Gleichung von  $k_i$ , so ist

$$f_i(x) - f_j(x) = 0 \quad (1)$$

eine Gleichung von  $g_{ij}$ . Nach MfL Bd. 7, 2.5.2., Satz 4 und seinem Zusatz 1, folgt daraus die Behauptung; denn die dort betrachtete Determinante ist 0, weil die Summe der drei linken Seiten in (1) identisch verschwindet.

b) (Abb. 4.8) Man wähle einen Kreis  $k_3$ , der  $k_1$  und  $k_2$  in je zwei Punkten  $P_1, Q_1$  bzw.  $P_2, Q_2$  schneidet. Wählt man dabei den Mittelpunkt von  $k_3$  außerhalb der Verbindungsgeraden  $h$  der Mittelpunkte von  $k_1, k_2$ , so wird  $g(P_1Q_1) \nparallel g(P_2Q_2)$  (Beweis!). Dann ist das Lot von  $g(P_1Q_1) \cap g(P_2Q_2)$  auf  $h$  die gesuchte Potenzlinie.

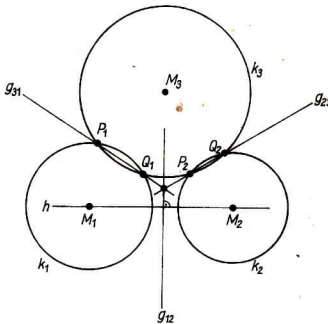


Abb. 4.8

- Was für eine Kurve wird in den Fällen  $a < -1$ ,  $a = -1$ ,  $-1 < a < 0$ ,  $a = 0$ ,  $0 < a < 1$ ,  $1 < a < 2$ ,  $a = 2$ ,  $a > 2$  durch die Gleichung

$$x^2 + 2axy + y^2 + (a^2 - 2a)x + (a^2 - 4)y = 0$$

charakterisiert?

- Man beweise: Die Strecke zwischen den Schnittpunkten einer Hyperbeltangente mit den Asymptoten wird vom Berührungspunkt halbiert.
- Man beweise: Haben eine Ellipse und eine Hyperbel dasselbe Paar von Brennpunkten, so schneiden sie einander in allen vier Schnittpunkten rechtwinklig (Abb. 4.9).

6. Nach MfL Bd. 7, 2.8.4., Satz 5, wird das Parallelbündel der Strahlen, die zu dem Vektor  $\langle -1, 0 \rangle$  gleichsinnig parallel auf die Parabel  $y^2 = 2px$  auftreffen, von dieser so reflektiert, daß sie nach der Reflexion durch den Brennpunkt  $F$  verlaufen. Reflektiert die Parabel auch andere Parallelbündel von Strahlen so, daß sie nach der Reflexion konzentrisch verlaufen?

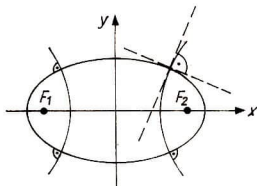


Abb. 4.9

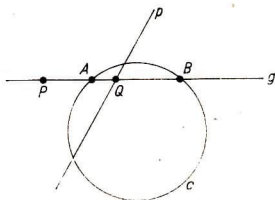


Abb. 4.10

7. Gegeben sei eine reguläre Kurve  $c$  zweiter Ordnung; sofern im folgenden konkrete Rechnungen auszuführen sind, wähle man  $c$  entweder als Parabel  $y^2 = 2px$  oder als Ellipse oder Hyperbel  $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

a) Man charakterisiere alle diejenigen Punkte  $(x_1, y_1)$  der Ebene, von denen aus zwei Tangenten an  $c$  existieren.

Hinweis: Man verwende bei der Ermittlung fraglicher Berührungspunkte die Polare von  $(x_1, y_1)$ .

b)\* Man beweise: Auf jeder Geraden, die — sofern  $c$  eine Hyperbel ist — keine Asymptote von  $c$  ist, gibt es Punkte, von denen aus zwei Tangenten an  $c$  existieren.

c) Gegeben sei eine Gerade  $g$ , die  $c$  nicht schneidet und, falls  $c$  eine Hyperbel ist, nicht durch den Mittelpunkt von  $c$  geht. Man nenne eine Konstruktionsmöglichkeit zur Ermittlung des Poles von  $g$ .

d) Gegeben sei ein Punkt  $P$ , von dem aus keine Tangenten an  $c$  existieren. Man nenne eine Konstruktionsmöglichkeit zur Ermittlung der Polaren von  $P$ , sofern diese existiert.

8. Man beweise: Schneidet eine Gerade  $g$  durch einen Punkt  $P$  eine Kurve zweiter Ordnung in  $A, B$  und die Polare  $p$  von  $P$  in  $Q$ , so sind  $(A, B)$  und  $(P, Q)$  harmonische Punktepaare (Abb. 4.10).

## Abbildungen als Ordnungsprinzip in der Geometrie

**Vorbemerkung:** Bei den Kontrollfragen und Aufgaben dieses Kapitels handelt es sich stets um Probleme der ebenen Geometrie, auch wenn diese Voraussetzung nicht bei jeder Aufgabe erneut genannt wird.

### Kontrollfragen

1. Welche speziellen Bewegungen gibt es? Wie kann man sie definieren? Welche Eigenschaften haben sie?
2. Welche Bewegungen kann man durch Zusammensetzung von Geradenspiegelungen erzeugen?
3. Durch welche Bewegungen kann a) ein gleichseitiges Dreieck, b) ein gleichschenkliges Dreieck, c) ein Quadrat, d) ein Rechteck, e) ein Rhombus, f) ein Parallelogramm, g) ein Drachenviereck, h) ein Kreis auf sich abgebildet werden?
4. Wie kann eine Zentralstreckung definiert werden? Welche weiteren Eigenschaften der Zentralstreckung können als Sätze ausgesprochen werden?
5. Wie lauten die vier Ähnlichkeitssätze für Dreiecke?
6. Wie kann eine gleichsinnige, wie eine ungleichsinnige Ähnlichkeitstransformation erzeugt werden?
7. Es sind Eigenschaften von Ähnlichkeitstransformationen anzugeben.
8. Wie kann eine Orthogonalstreckung definiert werden? Es sind Invarianten der Orthogonalstreckung anzugeben.
9. Wie lautet eine analytische Definition der affinen Abbildung?
10. Es sind invariante Eigenschaften der affinen Abbildung anzugeben.
11. Wie lautet der Hauptsatz der affinen Geometrie?
12. Die Menge der affinen Abbildungen ist bezüglich der Fixpunkte in Teilmengen zu zerlegen. Welche besonderen Eigenschaften besitzen die Elemente jeder Teilmenge?
13. Wie werden Fixpunkt Konstruktionen bei affinen Abbildungen durchgeführt?
14. Was versteht man unter dem Inhaltsmaßstab einer Affinität?
15. Zur Gruppe der affinen Transformationen sind Untergruppen und deren Invarianten anzugeben.
16. Bildet die Menge a) der axialen Affinitäten mit gemeinsamer Achse, b) der axialen Affinitäten ohne die Einschränkung von a), c) der Affinitäten mit genau einem gemeinsamen Fixpunkt, d) der Affinitäten mit je einem (nicht notwendig gemeinsamen) Fixpunkt, e) der fixpunktfreien Affinitäten mit der Hintereinanderausführung als Operation eine Gruppe?

17. Wie kann eine Zentralkollineation synthetisch definiert werden?
18. Wie werden die uneigentlichen Punkte und die uneigentliche Gerade der projektiven Ebene eingeführt?
19. Welcher Zusammenhang besteht bei einer Zentralkollineation zwischen Verschiebungsgerade, Fluchtgerade und uneigentlicher Gerade der projektiven Ebene?
20. Welche Invarianten der Zentralkollineation gibt es?
21. Wie wird eine Spiegelung an einem Kreis synthetisch definiert?
22. Worauf werden durch Spiegelung an einem Kreis Geraden und Kreise abgebildet? Welche Sonderfälle sind zu beachten?

### Aufgaben

1. Gegeben sind in einer Ebene a) zwei voneinander verschiedene gleichsinnig kongruente Dreiecke, b) zwei voneinander verschiedene ungleichsinnig kongruente Dreiecke. Durch welche Bewegungen können jeweils die Dreiecke aufeinander abgebildet werden? (Fallunterscheidungen sind zu beachten!)
2. Über den Seiten  $AB$  und  $BC$  eines gegebenen Dreiecks  $ABC$  werden nach außen die Quadrate  $AA'B'B$  und  $BB'C''C$  konstruiert. Es ist zu beweisen, daß die Verlängerung der Höhe  $h_b$  des Dreiecks  $ABC$  die Strecke  $B'B''$  halbiert (Abb. 4.11).

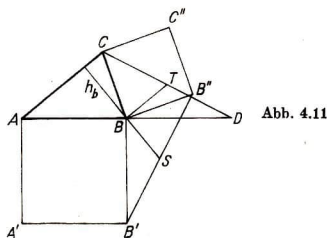


Abb. 4.11

**Lösung:** Das Dreieck  $BB'B''$  wird durch die Drehung  $\delta_{B,90^\circ}$  abgebildet. Dabei geht der Punkt  $B''$  in den Punkt  $C$  und der Punkt  $B'$  in den Punkt  $D \in AB^+$  über. Der Punkt  $S$ , der Schnittpunkt der Verlängerung der Höhe  $h_b$  mit  $B'B''$ , wird dabei auf den Punkt  $T \in CD$  abgebildet, so daß der Winkel  $\sphericalangle SBT$  ein rechter ist. Damit ist die Strecke  $AC$  zur Strecke  $BT$  parallel, und weil  $B$  Mittelpunkt von  $AD$  ist, muß (nach dem Strahlensatz)  $T$  Mittelpunkt von  $CD$  sein. Damit ist auch  $S$  als Originalpunkt zu  $T$  bezüglich der Drehung Mittelpunkt der Strecke  $B'B''$ .

3. Gegeben sind drei voneinander verschiedene parallele Geraden. Es ist ein gleichseitiges Dreieck so zu konstruieren, daß auf jeder der Geraden ein Eckpunkt des Dreiecks liegt.

**Hinweis:** Der Lösungsweg wird durch Abb. 4.12 gezeigt.

4. Gegeben sind eine Gerade  $g$  und zwei Punkte  $A$  und  $B$  auf derselben Seite von  $g$ . Es ist ein Punkt  $P$  auf  $g$  so zu konstruieren, daß der Winkel zwischen  $PA^+$  und einem von  $P$  ausgehenden Strahl auf  $g$  dem Winkel zwischen  $PB^+$  und dem anderen von  $P$  ausgehenden Strahl auf  $g$  kongruent ist.
5. Es sind  $n$  Punktspiegelungen mit verschiedenen Zentren ( $n \geq 2$ ) zusammenzusetzen. Welche Bewegungen entstehen?
6. Gegeben ist ein Parallelogramm  $A_1A_2A_3A_4$ . Jeder Eckpunkt  $A_i$  dieses Parallelogramms sei Zentrum einer Punktspiegelung  $\zeta_i$ . Es ist die Zusammensetzung  $\zeta_1 \circ \zeta_2 \circ \zeta_3 \circ \zeta_4$  zu bilden. Was für eine Bewegung entsteht?
7. Gegeben sind zwei Geradenspiegelungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ , deren Achsen zueinander orthogonal sind und sich im Punkt  $Z$  schneiden, die Punktspiegelung  $\zeta$  mit dem Zentrum  $Z$  und die identische Transformation  $\iota$ . Es ist zu zeigen, daß diese vier Transformationen mit der Hintereinanderausführung als Operation eine Gruppe bilden.

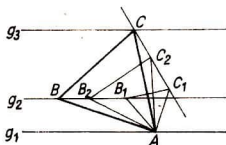


Abb. 4.12

8. Der Peripheriewinkelsatz (MfL Bd. 7, 2.8.1.) ist synthetisch zu beweisen.  
Hinweis: Der Beweis zum Satz von THALES (MfL Bd. 7, 3.2.) ist zu verallgemeinern.
9. Eine Zentralstreckung  $\zeta$  ist durch das Zentrum  $Z(-3, 5)$  und den Streckfaktor  $t = \frac{2}{3}$  vorgegeben.
  - a) Die Gleichungen dieser Zentralstreckung sind zu bestimmen.
  - b) Es ist durch  $\zeta$  die Gerade mit der Gleichung  $4x - 2y + 7 = 0$  abzubilden. Wie lautet eine Gleichung der Bildgeraden?
10. Gegeben ist ein spitzwinkliges Dreieck  $ABC$  und in seinem Inneren ein Punkt  $P$ . Auf der Seite  $BC$  dieses Dreiecks ist ein Punkt so zu konstruieren, daß er von  $P$  den gleichen Abstand wie von der Seite  $AB$  hat.  
Hinweis: Es ist eine Zentralstreckung mit etwa  $B$  als Zentrum zu verwenden.
11. Eine Parabel ist durch ihren Brennpunkt  $F$  und ihre Leitlinie  $l$  gegeben. Es sind die Schnittpunkte dieser Parabel mit einer beliebig vorgegebenen Sekante  $s$  zu konstruieren.

Lösung: Zunächst wird vorausgesetzt, daß  $s$  nicht parallel zu  $l$  verläuft. Dann sind auf  $s$  diejenigen Punkte zu bestimmen, deren Abstand von  $F$  gleich dem Abstand von  $l$  ist. Es sind demnach diejenigen Kreise zu konstruieren, deren Mittelpunkte auf  $s$  liegen, die  $l$

berühren und durch  $F$  verlaufen. Man konstruiert zunächst einen Kreis  $k$ , dessen Mittelpunkt  $M$  auf  $s$  liegt und der  $l$  berührt (Abb. 4.13).  $Z = s \cap l$  wird zum Zentrum von Zentralstreckungen gewählt.  $g(ZF)$  schneidet  $k$  in den Punkten  $S$  und  $T$ . Dann wird eine erste Zentralstreckung so durchgeführt, daß  $S$  auf  $F$  abgebildet wird. Das Bild  $M_1$  von  $M$ , das sich als Schnittpunkt der Parallelen zu  $SM$  durch  $F$  mit  $s$  ergibt, ist ein gesuchter Schnittpunkt der Parabel mit der Geraden  $s$ . Durch eine zweite Zentralstreckung, die  $T$  auf  $F$  abbildet, findet man analog den zweiten Schnittpunkt  $M_2$ . Verläuft  $s$  parallel zu  $l$ , so erhält man die Schnittpunkte mit Hilfe eines bekannten Verfahrens zur Konstruktion einzelner Punkte der Parabel:  $M_1$  und  $M_2$  sind die Schnittpunkte des Kreises um  $F$ , dessen Radius gleich dem Abstand der beiden parallelen Geraden  $s$  und  $l$  ist, mit der Geraden  $s$ .

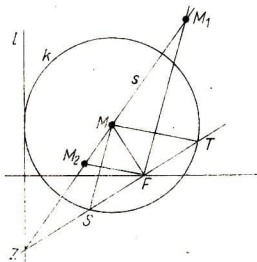


Abb. 4.13

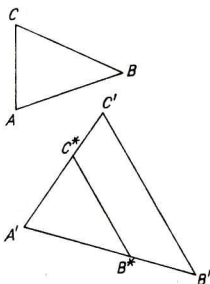


Abb. 4.14

12. Gegeben ist ein Dreieck  $ABC$ . Es sind ohne Benutzung der drei Eckpunkte die drei Seitenhalbierenden und die drei Höhen des Dreiecks zu konstruieren.

Hinweis: Mit Hilfe einer Zentralstreckung ist zunächst das durch die drei Seitenmittelpunkte gebildete Dreieck  $S_a S_b S_c$  zu konstruieren.

13. Die Sätze 7, 8 und 9 aus MfL Bd. 7, 3.3.2. (Ähnlichkeitssätze) sind zu beweisen.

Beweis von Satz 8 (Ähnlichkeitssatz sws): Nach Voraussetzung gilt für die Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  die Gleichung  $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}$ , und es ist  $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$  (Abb. 4.14).

Wenn gezeigt wird, daß  $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$  ist, dann sind die Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  nach dem Hauptähnlichkeitssatz ähnlich. Zum Beweis wird das Dreieck  $ABC$  durch eine Bewegung  $\varphi$  so abgebildet, daß  $\varphi(A) = A'$ ,  $\varphi(B) = B^* \in A'B'^+$  und  $\varphi(C) = C^* \in A'C'^+$  ist. Dann sind die Dreiecke  $ABC$  und  $A'B^*C^*$  nach dem Kongruenzsatz sws kongruent,

und es gilt daher  $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B^*C^*$  und  $\frac{|A'B^*|}{|A'B'|} = \frac{|A'C^*|}{|A'C'|}$ . Nach einer Umkehrung

des Strahlensatzes sind dann die Strecken  $B^*C^*$  und  $B'C'$  parallel, die Winkel  $\sphericalangle A'B^*C^*$  und  $\sphericalangle A'B'C'$  sind als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen einander kongruent, und damit ist gezeigt, daß  $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$  gilt.

Die Beweise der beiden anderen Sätze werden analog unter Verwendung von Bewegungen, Kongruenzsätzen und Strahlensatz geführt.

14. Der „Kathetensatz“ und der „Höhensatz“ sind mit Hilfe der Ähnlichkeitssätze zu beweisen.

15. Es ist mit Hilfe der Ähnlichkeitssätze zu beweisen: In jedem Dreieck ist der Abstand des Schwerpunktes von einer Seite des Dreiecks gleich dem dritten Teil der Länge der zu dieser Seite gehörenden Höhe.
16. Es ist der folgende Satz über die Winkelhalbierenden im Dreieck mit Hilfe des Strahlensatzes zu beweisen: Jede Winkelhalbierende teilt die gegenüberliegende Seite im Betragsverhältnis der beiden anliegenden Seiten (vgl. MfL Bd. 7, 2.6.3.).

Weiter ist zu zeigen: Die Halbierenden des Innen- und Außenwinkels in dem Eckpunkt  $C$  eines Dreiecks  $ABC$  mit  $|AC| \neq |BC|$  schneiden die durch die Dreiecksseite  $AB$  bestimmte Gerade in zwei Punkten, die mit den Punkten  $A$  und  $B$  vier harmonische Punkte bilden.

Hinweis: Abb. 4.15 gibt eine Anleitung zur Führung des Beweises.

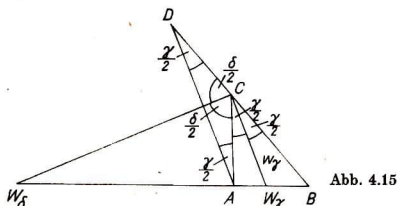


Abb. 4.15

17. Die folgenden Sätze sind mit Hilfe des Hauptähnlichkeitssatzes zu beweisen:
- a) Sind  $A_1B_1$  und  $A_2B_2$  zwei voneinander verschiedene Sehnen eines Kreises  $k$ , die sich in einem Punkt  $P$  schneiden (siehe Abb. 4.16), so gilt  $|PA_1| \cdot |PB_1| = |PA_2| \cdot |PB_2|$  (Sehnensatz).
- b) Ist  $k$  ein Kreis, der von einer Sekante in den Punkten  $A_1$  und  $B_1$  und von einer weiteren Sekante in den Punkten  $A_2$  und  $B_2$  geschnitten wird, und haben die beiden (voneinander verschiedenen) Sekanten den außerhalb  $k$  liegenden Punkt  $P$  als gemeinsamen Schnittpunkt, so gilt  $|PA_1| \cdot |PB_1| = |PA_2| \cdot |PB_2|$  (Sekantensatz).

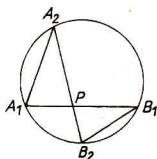


Abb. 4.16

- c) Ist  $k$  ein Kreis, der von einer Sekante in den Punkten  $A$  und  $B$  geschnitten und von einer Tangente im Punkt  $T$  berührt wird, und haben Sekante und Tangente den gemeinsamen Punkt  $P$ , so gilt  $|PA| \cdot |PB| = |PT|^2$  (Sekanten-Tangentensatz).



18. Es ist die folgende Umkehrung des Sehnensatzes zu beweisen: Sind  $A_1B_1$  und  $A_2B_2$  zwei Strecken, die nur den (von ihren Endpunkten verschiedenen) Punkt  $P$  gemeinsam haben, und gilt  $|PA_1| \cdot |PB_1| = |PA_2| \cdot |PB_2|$ , so liegen die vier Punkte  $A_1, B_1, A_2$  und  $B_2$  auf einem Kreis  $k$ . Analog dazu ist eine Umkehrung des Sekantensatzes zu formulieren und zu beweisen.
19. Mit Hilfe des Sekanten-Tangenten-Satzes ist auf einer Strecke  $AB$  ein innerer Punkt  $P$  so zu konstruieren, daß  $|AB| : |AP| = |AP| : |PB|$  gilt. (Dann heißt die Strecke  $AB$  durch  $P$  stetig geteilt oder nach dem Goldenen Schnitt geteilt.) (Vgl. MfL Bd. 7, 4.2.1.)

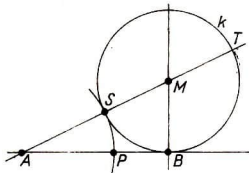


Abb. 4.17

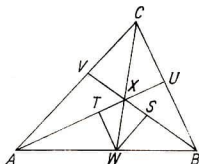


Abb. 4.18

Lösung: Auf der Senkrechten in  $B$  auf  $BA$  wird ein Punkt  $M$  so konstruiert, daß  $|MB| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{a}{2}$  ist (Abb. 4.17). Der Kreis  $k$  um  $M$  durch  $B$  berührt dann die Gerade  $g(AB)$  in  $B$ . Die Gerade  $g(AM)$  schneidet den Kreis  $k$  in den Punkten  $S$  und  $T$ , wobei  $S$  innerer Punkt der Strecke  $AM$  sei. Trägt man die Strecke  $AS$  von  $A$  aus auf  $AB^+$  ab, so erhält man den gesuchten Teilpunkt  $P$ . Der Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion erfolgt mit Hilfe des Sekanten-Tangenten-Satzes (vgl. Aufgabe 17). Setzt man  $|AS| = |AP| = b$ , so gilt  $(a+b)b = a^2$ . Hieraus erhält man über  $b^2 = a^2 - ab$  die Proportion  $a : b = b : (a - b)$  bzw.  $|AB| : |AP| = |AP| : |PB|$ .

20. Der Satz von Ceva ist unter Verwendung des Strahlensatzes zu beweisen (vgl. MfL Bd. 7, 2.6.2.).

Hinweis: Eine Anleitung zum Beweis ist aus Abb. 4.18 ersichtlich. Die Parallele durch  $W$  zu  $g(AC)$  schneidet  $g(BV)$  in  $S$ , die Parallele durch  $U$  zu  $g(BC)$  schneidet  $g(AU)$  in  $T$ . Damit ist die Voraussetzung zur mehrfachen Anwendung des Strahlensatzes vorhanden. Eine Diskussion über die möglichen Lagen von  $X$  und die dabei auftretenden Vorzeichen ist anzuschließen. Auch der Sonderfall  $g(AU) \parallel g(BV) \parallel g(CW)$  ist zu untersuchen.

21. Der Satz von MENELAOS ist unter Verwendung des Strahlensatzes zu beweisen (vgl. MfL Bd. 7, 2.6.2.).

Hinweis: Eine Anleitung zum Beweis gibt Abb. 4.19. Durch  $A, B, C$  werden parallele Geraden gezogen, die  $g(UV)$  in  $A', B', C'$  schneiden. Nach mehrfacher Anwendung des Strahlensatzes ist eine Vorzeichendiskussion entsprechend der möglichen Lagen von  $g(UV)$  zum Dreieck  $ABC$  anzuschließen.

22. Es ist zu zeigen, daß die durch die Gleichungen

$$x' = 5x - 2y + 6,$$

$$y' = 2x + 5y - 3$$

gegebene Abbildung eine gleichsinnige Ähnlichkeitstransformation ist. Der Fixpunkt der Transformation ist zu bestimmen. Außerdem ist die Gerade mit der Gleichung  $2x - 5y + 3 = 0$  abzubilden. Wie lautet eine Gleichung der Bildgeraden?

23. Es ist zu zeigen, daß die durch die Gleichungen

$$x' = 2x + 3y,$$

$$y' = 3x - 2y$$

gegebene Abbildung eine ungleichsinnige Ähnlichkeitstransformation ist. Es sind die Koordinaten des Fixpunktes und Gleichungen der Fixgeraden zu bestimmen. Anschließend ist dieselbe Aufgabe für die ungleichsinnige Ähnlichkeitstransformation mit den Gleichungen

$$x' = 2x + 3y - 5,$$

$$y' = 3x - 2y - 3$$

zu lösen.

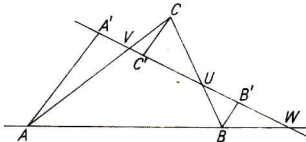


Abb. 4.19

- 24: Gegeben sind die Punkte  $A(1, 1)$  und  $B(3, 0)$  als Originalpunkte und die Punkte  $A'(4, 6)$  und  $B'(8, -1)$  als zugeordnete Bildpunkte. Es sind die Gleichungen der durch die beiden Punktepaare  $(A, A')$  und  $(B, B')$  gegebenen gleichsinnigen und ungleichsinnigen Ähnlichkeitstransformation zu bestimmen. Die Koordinaten der Fixpunkte beider Transformationen sind zu berechnen.

Weiterhin ist der Kreis mit der Gleichung  $x^2 + y^2 = 1$  durch die gleichsinnige Ähnlichkeitstransformation abzubilden. Wie lautet eine Gleichung des Bildkreises?

25. Es sind eine Zentralstreckung und eine Bewegung durch ihre Gleichungen so anzugeben, daß durch deren Zusammensetzung

- a) die gleichsinnige Ähnlichkeitstransformation mit den Gleichungen

$$x' = 3x + 4y - 4,$$

$$y' = -4x + 3y + 1,$$

- b) die ungleichsinnige Ähnlichkeitstransformation mit den Gleichungen

$$x' = 5x + 12y - 6,$$

$$y' = 12x - 5y + 3$$

entsteht.

26. Gegeben seien zwei geordnete Punktpaare  $(A_1, B_1)$  und  $(A_2, B_2)$ ,  $A_1 \neq A_2$ ,  $B_1 \neq B_2$ ,  $g(A_1A_2) \neq g(B_1B_2)$ , sowie auf der Geraden  $g(A_1A_2)$  ein beliebiger, von  $A_1$  und  $A_2$  verschiedener Punkt  $A_3$  und auf der Geraden  $g(B_1B_2)$  ein weiterer Punkt  $B_3$  so, daß  $TV(A_1, A_2; A_3) = TV(B_1, B_2; B_3)$  gilt.

Es ist zu beweisen: Teilt man jede der Strecken  $A_iB_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) in einem konstanten Verhältnis  $t$ , so sind die Teilpunkte  $C_i$  kollinear, und es gilt  $TV(A_1, A_2; A_3) = TV(C_1, C_2; C_3)$ .

Anschließend ist die folgende Umkehrung dieses Satzes zu beweisen: Teilt man die Strecken  $A_1B_1$  und  $A_2B_2$  in einem konstanten Teilverhältnis  $t$  und schneidet die Gerade durch die beiden Teilpunkte  $C_1$  und  $C_2$  die Gerade  $g(A_3B_3)$  in dem Punkt  $C_3$ , so gilt  $TV(A_3, B_3; C_3) = t$ .

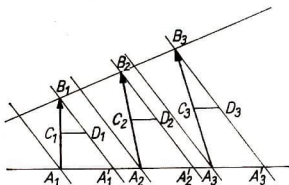


Abb. 4.20

**Lösung:** Durch die geordneten Punktpaare  $(A_1, B_1)$  und  $(A_2, B_2)$  wird eine gleichsinnige Ähnlichkeitstransformation aufgespannt, der wegen der vorausgesetzten Gleichheit der Teilverhältnisse auch  $(A_3, B_3)$  angehört (Abb. 4.20). Ist im Spezialfall  $g(A_1B_1)$  parallel zu  $g(A_2B_2)$  oder  $g(A_1A_2)$  parallel zu  $g(B_1B_2)$ , so beweise man den Satz und die Umkehrung mit Hilfe des Strahlensatzes. Im Allgemeinfeld wird nach MfL Bd. 7, 3.3.2., die Schar verschiebungsgleicher Streifen betrachtet, durch die die drei zugeordneten Punktpaare erzeugt werden. Die Begrenzungsgeraden durch die Punkte  $B_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) schneiden die Gerade  $g(A_1A_2)$  in den Punkten  $A'_i$  und die Parallelen zu  $g(A_1A_2)$  durch die Punkte  $C_i$  in den Punkten  $D_i$ . Dann ist  $t = TV(A_i, B_i; C_i) = TV(A'_i, B_i; D_i)$ . Wegen der Parallelität der Begrenzungsgeraden der Streifen sind die  $D_i$  als Teilpunkte der Strecken  $A'_iB_i$  kollinear. Da weiter wegen der Konstanz der Streifenbreite  $A_1A'_1 \cong A_2A'_2 \cong A_3A'_3$  gilt, ist nach dem Strahlensatz auch  $C_1D_1 \cong C_2D_2 \cong C_3D_3$ . Die  $C_i$  gehen daher aus den kollinearen  $D_i$  durch die Verschiebung  $v(D_1C_1)$  hervor, sie sind daher ebenfalls kollinear. Die Parallelen zu den Strecken  $A'_iB_i$  durch die Punkte  $C_i$  begrenzen mit den Parallelen durch die Punkte  $A_i$  Streifen von konstanter Breite, und nach MfL Bd. 7, 3.3.2., gilt dann  $TV(A_1, A_2; A_3) = TV(C_1, C_2; C_3)$ . Zum Beweis der Umkehrung wird auf  $A_3B_3$  ein Punkt  $C'_3$  so konstruiert, daß  $TV(A_3, B_3; C'_3) = t$  ist. Dann liegen die Punkte  $C_1, C_2$  und  $C'_3$  kollinear. Wegen der Eindeutigkeit des Schnittpunktes der Geraden  $g(C_1C_2)$  und  $g(A_3B_3)$  ist  $C_3 = C'_3$ , d. h., es ist tatsächlich  $TV(A_3, B_3; C_3) = t$ .

27. Gegeben sei eine gleichsinnige Ähnlichkeitstransformation durch die beiden (voneinander verschiedenen) Originalpunkte  $A$  und  $B$  sowie die zugeordneten Bildpunkte  $A'$  und  $B'$ . Außerdem werde die durch  $A$  und  $A'$  als Originalpunkte und  $B$  und  $B'$  als zugehörige Bildpunkte bestimmte gleichsinnige Ähnlichkeitstransformation betrachtet. Es ist zu beweisen, daß beide Transformationen denselben Fixpunkt besitzen. Gilt diese Aussage auch dann, wenn die beiden Ähnlichkeitstransformationen als ungleichsinnig vorausgesetzt werden?

28. Es ist zu zeigen, daß die Relation „ähnlich“ eine Äquivalenzrelation ist.
29. Das Dreieck  $ABC$  mit  $A(2, 1)$ ,  $B(5, -7)$ ,  $C(0, 0)$  ist durch Orthogonalspiegelung an der Geraden mit der Gleichung  $3x - 5y + 7 = 0$  abzubilden. Wie lauten die Koordinaten der Eckpunkte des Bilddreiecks?
30. Es sind die Gleichungen derjenigen Orthogonalspiegelung aufzustellen, deren Achse durch die Punkte  $P(1, 2)$  und  $Q(7, -2)$  verläuft. Durch diese Orthogonalspiegelung sind abzubilden:
- die Gerade mit der Gleichung  $x + y - 3 = 0$ ,
  - die Gerade mit der Gleichung  $x = 0$ ,
  - der Kreis mit der Gleichung  $x^2 + y^2 = 1$ .
- Gleichungen der Bilder sind aufzustellen.
31. Das Dreieck mit den Eckpunkten  $A(1, 1)$ ,  $B(-1, 2)$ ,  $C(2, 3)$  soll affin auf das Dreieck mit den Eckpunkten  $A'(2, 2)$ ,  $B'(-3, 0)$ ,  $C'(2, 13)$  abgebildet werden. Wie lauten die Transformationsgleichungen? Die Abbildung ist auf Fixpunkte zu untersuchen.
32. Ein beliebiges Dreieck  $ABC$  werde affin auf ein Dreieck  $A'B'C'$  ( $C \neq C'$ ) abgebildet. Sind die Bilder der Seitenhalbierenden wieder Seitenhalbierende, die Bilder der Höhen wieder Höhen?
33. Durch die affine Transformation mit den Gleichungen

$$x' = 2x + 3y - 1,$$

$$y' = 3x + 4y - 2$$

sind abzubilden:

- der Punkt  $P(-2, 4)$ ,
  - die Gerade mit der Gleichung  $4x - 5y - 20 = 0$ ,
  - die Gerade mit der Gleichung  $y = 0$ ,
  - der Kreis mit der Gleichung  $x^2 + y^2 = 1$ ,
  - die Hyperbel mit der Gleichung  $x^2 - y^2 = 1$ ,
  - die Parabel mit der Gleichung  $y = x^2$ .
34. Die durch die folgenden Gleichungen gegebenen affinen Transformationen sind auf Fixpunkte zu untersuchen, gegebenenfalls ist die Menge der Fixpunkte anzugeben:
- $x' = 3x + 2y - 2$ ,  
 $y' = 4x - 3y - 12$ ;
  - $x' = 5x - 3y + 4$ ,  
 $y' = 8x - 5y + 8$ ;
  - $x' = 3x - 2y + 7$ ,  
 $y' = 2x - y + 2$ .

35. Es ist zu zeigen, daß die durch die folgenden Gleichungen gegebene affine Transformation eine axiale Affinität ist:

$$x' = 13x - 6y + 9,$$

$$y' = 8x - 3y + 6.$$

Eine Gleichung der Achse, eine Gleichung der Schar der Fixgeraden sowie der Inhaltsmaßstab sind anzugeben.

36. Von einer axialen Affinität sind die Achse mit der Gleichung  $2x - y - 1 = 0$  sowie der Originalpunkt  $P(1, 4)$  und der zugeordnete Bildpunkt  $P'(3, 2)$  bekannt. Die Gleichungen dieser Affinität sind aufzustellen. Außerdem ist ihr Inhaltsmaßstab zu bestimmen. Um was für eine spezielle axiale Affinität handelt es sich?
37. Die Gerade mit der Gleichung  $y = 0$  sei Achse einer axialen Affinität mit dem Inhaltsmaßstab  $k = -\frac{1}{2}$ . Ein Originalpunkt  $P$  und sein Bildpunkt  $P' \neq P$  liegen auf der Geraden mit der Gleichung  $y = x$ . Die Gleichungen dieser Affinität sind aufzustellen.
38. Es sind notwendige und hinreichende Bedingungen dafür anzugeben, daß eine durch ihre Gleichungen gegebene affine Transformation eine Achse besitzt und außerdem gleichsinnig und äquiaffin ist.
39. Gegeben ist eine affine Transformation durch ihre Gleichungen:

$$x' = 2x + 5y - 4,$$

$$y' = cx + dy + 1.$$

Die Koeffizienten  $c$  und  $d$  sind so zu bestimmen, daß a) eine gleichsinnige Ähnlichkeitstransformation, b) eine ungleichsinnige Ähnlichkeitstransformation, c) eine axiale Affinität, d) eine fixpunktfreie Affinität, e) eine gleichsinnig äquiaffine Transformation entsteht.

40. Es ist zu zeigen, daß die durch die Gleichungen

$$x' = 4x + 3y,$$

$$y' = 2x - y$$

gegebene affine Transformation genau einen Fixpunkt besitzt. Die Transformation ist auf Fixgeraden zu untersuchen, ihre Gleichungen sind gegebenenfalls zu bestimmen.

Anschließend sind dieselben Untersuchungen für die Affinität mit den Gleichungen

$$x' = 4x + 3y - 9,$$

$$y' = 2x - y - 2$$

durchzuführen.

41. Es ist zu zeigen, daß die durch die Gleichungen

$$x' = 2x + y - 8,$$

$$y' = -3x - 2y + 14$$

gegebene Affinität fixpunktfrei ist und daß diese Affinität genau eine Fixgerade besitzt. Deren Gleichung ist anzugeben.

Lösung: Zunächst wird gezeigt, daß die gegebene Affinität fixpunktfrei ist. Dann wird als Gleichung der gesuchten Fixgeraden  $ax + by + c = 0$  angenommen. Für  $b = 0$  ergibt sich daraus die Gleichung  $x = k$  und hieraus nach der Abbildung  $2x' + y' - k + 2 = 0$ , so daß der Fall  $b = 0$  nicht auf die gesuchte Fixgerade führt.

Es wird daher  $b \neq 0$  vorausgesetzt und die Gleichung  $y = mx + n$  betrachtet. In ihr sind  $m$  und  $n$  so zu bestimmen, daß die gesuchte Fixgerade entsteht. Bildet man die Gerade mit der Gleichung  $y = mx + n$  ab, so erhält man als Gleichung für die Bildgerade

$$y' = -\frac{3 + 2m}{2 + m}x' + \frac{4 - 2m - n}{2 + m}.$$

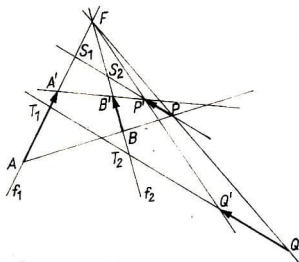


Abb. 4.21

Aus dem geforderten Zusammenfall von Original- und Bildgerade folgt, daß beide Gleichungen übereinstimmen müssen, und aus dem hieraus folgenden Koeffizientenvergleich erhält man das nachstehende Gleichungssystem:

$$-\frac{3 + 2m}{2 + m} = m, \quad \frac{4 - 2m - n}{2 + m} = n.$$

Als einzige Lösung ergibt sich  $m = -1$  und  $n = 3$ , so daß die gesuchte Fixgerade die Gleichung  $y = -x + 3$  besitzt.

42. Für Affinitäten mit genau einem Fixpunkt  $F$  und genau zwei (mit  $F$  inzidierenden) Fixgeraden  $f_1$  und  $f_2$  gilt folgender Satz: Schneidet die durch einen Originalpunkt  $P$  und den zugehörigen Bildpunkt  $P'$  bestimmte Gerade die Fixgerade  $f_i$  ( $i = 1, 2$ ) in einem Punkt  $S_i$ , so ist das durch die Punkte  $P, P'$  und  $S_i$  bestimmte Teilverhältnis für alle Paare von zugeordneten Original- und Bildpunkten der Affinität, die nicht auf  $f_i$  liegen, konstant. Dieser Satz ist zu beweisen.

Lösung: Auf der Fixgeraden  $f_1$  wird ein zugeordnetes Punktepaar  $(A, A')$  und auf der Fixgeraden  $f_2$  ein zugeordnetes Punktepaar  $(B, B')$  als gegeben vorausgesetzt. Durch diese beiden Punktepaare und den Schnittpunkt  $F$  der beiden Fixgeraden als Fixpunkt ist die Affinität eindeutig bestimmt (Abb. 4.21). Auf  $g(AB)$  wird ein von  $A$  und  $B$  verschiedener

Punkt  $P$  beliebig gewählt. Sein Bildpunkt  $P'$  wird konstruiert. Die Gerade  $g(PP')$  schneide  $f_1$  im Punkt  $S_1$ ,  $f_2$  im Punkt  $S_2$ . Dann ist zu zeigen, daß  $TV(P, P'; S_1)$  bzw.  $TV(P, P'; S_2)$  für alle zugeordneten Punktepaare der Affinität, die nicht auf  $f_1$  bzw.  $f_2$  liegen, konstant ist. Es soll hier die Konstanz von  $TV(P, P'; S_1)$  bewiesen werden. Zunächst wird gezeigt, daß  $TV(P, P'; S_1) = TV(B, B'; F)$  gilt. Dazu werden die geordneten Punktepaare  $(B, A')$  und  $(B', A')$  betrachtet, die Strecken  $BA$  und  $B'A'$  werden durch  $P$  bzw.  $P'$  im gleichen Verhältnis geteilt, und auf Grund des Satzes aus Aufgabe 26 gilt dann, daß  $TV(P, P'; S_1) = TV(B, B'; F)$  für alle geordneten Punktepaare  $(P, P')$  der Affinität mit  $P \in g(AB)$  und  $P' \in g(A'B')$  ist. Jetzt wird ein beliebiges Punktepaar  $(Q, Q')$  der gegebenen Affinität betrachtet, wobei  $Q$  weder auf  $g(AB)$  noch auf einer der beiden Fixgeraden liegen soll.  $g(QQ')$  schneide  $g(AB)$  in einem Punkt  $P$ , für den soeben gezeigt wurde, daß  $TV(P, P'; S_1) = TV(B, B'; F) = k_1$  gilt.  $T_1$  sei der Schnittpunkt von  $g(QQ')$  mit  $f_1$ . Wegen der Parallelität von  $QQ'$  und  $PP'$  gilt dann  $TV(Q, Q'; T_1) = TV(P, P'; S_1) = k_1$ . Der Beweis für die zweite Fixgerade erfolgt analog.

- 43.\* Gegeben ist eine affine Transformation durch drei geordnete Punktepaare  $(A, A')$ ,  $(B, B')$  und  $(F, F')$  so, daß  $A, A'$  und  $F$  kollinear sind. Damit ist durch  $g(AA')$  eine Fixgerade bestimmt.  $g(AA')$  sei nicht parallel zu  $g(BB')$  (Abb. 4.22). Es ist zu untersuchen, unter welcher Bedingung eine von  $g(AA')$  verschiedene zweite Fixgerade existiert. Gegebenenfalls ist diese Fixgerade zu konstruieren.

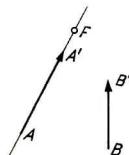


Abb. 4.22

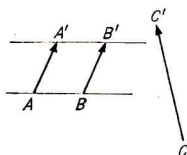


Abb. 4.23

Hinweis: Nach MfL Bd. 7, 3.4.7., muß eine zweite Fixgerade auch den Fixpunkt enthalten. Für die weiteren Überlegungen ist eine geeignete (noch zu beweisende) Umkehrung des Satzes der vorangehenden Aufgabe zu verwenden.

44. Eine affine Transformation sei durch drei geordnete Punktepaare  $(A, A')$ ,  $(A', A)$  und  $(B, B')$  gegeben, so daß sich die Punkte  $A$  und  $A'$  involutorisch entsprechen. Es sind Fixpunkte und Fixgeraden dieser Transformation konstruktiv zu bestimmen. Welcher Sonderfall ist zu berücksichtigen?
- 45.\* Gegeben ist eine fixpunktfreie Affinität durch die geordneten Punktepaare  $(A, A')$ ,  $(B, B')$  und  $(C, C')$ , wobei  $AA'$  verschiebungsgleich zu  $BB'$ , jedoch nicht verschiebungsgleich zu  $CC'$  sei (Abb. 4.23). Es ist zu beweisen:
- Jede zu  $g(AB)$  parallele Gerade  $h$  wird auf eine zu  $g(AB)$  parallele Gerade  $h'$  abgebildet.
  - Existiert eine Fixgerade  $f$ , so gilt stets  $f \parallel g(AB)$ . Was ist die Voraussetzung für ihre Existenz?
  - Es existiert höchstens eine Fixgerade  $f$ .
  - Die Fixgerade  $f$  ist gegebenenfalls zu konstruieren.

Hinweis: Zur Konstruktion ist der erzeugende Streifen (MfL Bd. 7, 3.3.2.) zu verwenden.

- 46.\* Für fixpunktfreie Affinitäten mit genau einer Fixgeraden  $f$  gilt folgender Satz: Schneidet die durch einen nicht auf  $f$  liegenden Originalpunkt  $P$  und den zugehörigen Bildpunkt  $P'$  bestimmte Gerade die Fixgerade in einem Punkt  $S$ , so ist das durch die Punkte  $P$ ,  $P'$  und  $S$  bestimmte Teilverhältnis für jedes Paar von zugeordneten Original- und Bildpunkten der Affinität, die nicht auf  $f$  liegen, und den Schnittpunkt ihrer Verbindungsgeraden mit  $f$  konstant (Abb. 4.24). Dieser Satz ist unter Verwendung der Aussagen von Aufgabe 45 zu beweisen.
47. Gibt es fixpunktfreie gleichsinnige bzw. ungleichsinnige äquiaffine Transformationen? Gegebenenfalls sind Beispiele durch ihre Gleichungen bzw. durch drei zugeordnete Punktepaare anzugeben.

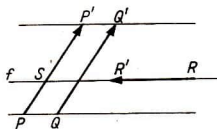


Abb. 4.24

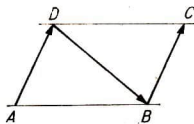


Abb. 4.25

48. Gegeben sei das Parallelogramm  $ABCD$  (Abb. 4.25). Die durch die geordneten Punktepaare  $(A, D)$ ,  $(D, B)$  und  $(B, C)$  aufgespannte Affinität ist auf Fixpunkte und Fixgeraden zu untersuchen. Zu einem beliebig gewählten Originalpunkt  $P$  ist der Bildpunkt  $P'$  zu konstruieren. Der Inhaltsmaßstab ist zu bestimmen.

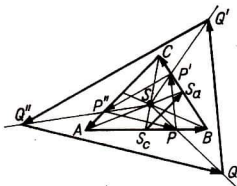


Abb. 4.26

49. Die drei nicht kollinearen Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  werden durch eine affine Transformation  $\varphi$  so abgebildet, daß  $\varphi(A) = B$ ,  $\varphi(B) = C$  und  $\varphi(C) = A$  gilt. Es ist also  $\varphi(\varphi(\varphi(A))) = A$  oder  $\varphi^3(A) = A$ . Es ist zu zeigen:
- Der Schwerpunkt des Dreiecks  $ABC$  ist einziger Fixpunkt dieser affinen Transformation.
  - Es handelt sich um eine zyklische Affinität dritter Ordnung, d. h., für jeden beliebigen Originalpunkt  $P$  gilt  $\varphi^3(P) = P$ .

Lösung: a) Zunächst wird der Mittelpunkt  $S_c$  der Seite  $AB$  des Dreiecks  $ABC$  abgebildet. Wegen der Invarianz des Teilverhältnisses ist sein Bild der Mittelpunkt  $S_c'$  der Seite  $BC$  (Abb. 4.26). Auf Grund der Parallelität von  $AC$  und  $S_cS_c'$  ist der Schwerpunkt  $S = CS_c \cap AS_c'$  Fixpunkt der Transformation. Einen weiteren Fixpunkt kann es nicht geben, da eine axiale Affinität nicht vorliegen kann.



b) Es wird zunächst  $P \in g(AB)$  abgebildet. Dann liegt  $\varphi(P) = P'$  auf  $g(BC)$ ,  $\varphi^2(P) = \varphi(P') = P''$  auf  $g(CA)$  und schließlich  $\varphi^3(P) = \varphi(P'') = P'''$  wieder auf  $g(AB)$ . Wegen der Invarianz der Teilverhältnisse gilt  $TV(A, B; P) = TV(B, C; P') = TV(C, A; P'') = TV(A, B; P''')$ , und hieraus folgt  $P''' = P$ , d. h., es gilt  $\varphi^3(P) = P$ . Jetzt wird ein beliebiger Punkt  $Q$  abgebildet, der nicht auf einer der durch die Seiten des Dreiecks  $ABC$  bestimmten Geraden liegt.  $g(SQ)$  schneide  $g(AB)$  in  $P$ . Wie soeben gezeigt, wird  $P$  über  $P'$  und  $P''$  wieder auf  $P$  abgebildet. Man erhält  $\varphi(Q) = Q'$  als Schnittpunkt von  $g(SP')$  mit der Parallelen durch  $Q$  zu  $P'P'$ ,  $\varphi^2(Q) = Q''$  als Schnittpunkt von  $g(SP'')$  mit der Parallelen durch  $Q'$  zu  $P'P''$  und  $Q'''$  als Schnittpunkt von  $g(SP''')$  mit der Parallelen durch  $Q''$  zu  $P''P$ . Wegen der Invarianz der Teilverhältnisse gilt  $TV(S, P; Q) = TV(S, P'; Q') = TV(S, P''; Q'') = TV(S, P'''; Q''')$ , und hieraus folgt wieder  $Q''' = Q$ , d. h., es gilt  $\varphi^3(Q) = Q$ .

50.\* Gegeben ist eine Affinität durch ihre Gleichungen

$$x' = ax + by + e,$$

$$y' = cx + dy + f.$$

Welchen notwendigen und zugleich hinreichenden Bedingungen müssen die Koeffizienten  $a, b, c, d$  genügen, damit die gegebene Affinität zyklisch von dritter Ordnung ist?

51. Es ist zu beweisen: Die Menge der äquiaffinen Transformationen mit der Hintereinanderausführung als Operation bildet eine Gruppe, die Menge der gleichsinnig äquiaffinen Transformationen bildet dazu eine Untergruppe.

52. Welche affinen Transformationen sind involutorisch?

Lösung: Eine affine Transformation  $\varphi$  ist genau dann involutorisch, wenn  $\varphi^2 = \iota$  gilt, d. h., wenn sie mit sich selbst zusammengesetzt die Identität ergibt.  $\varphi$  habe die Abbildungsgleichungen

$$x' = ax + by + e,$$

$$y' = cx + dy + f.$$

Die Koeffizienten  $a, b, c, d, e$  und  $f$  sind so zu bestimmen, daß  $\varphi$  eine involutorische Transformation wird. Bildet man  $\varphi^2$ , so erhält man

$$x'' = ax' + by' + e = a(ax + by + e) + b(cx + dy + f) + e,$$

$$y'' = cx' + dy' + f = c(ax + by + e) + d(cx + dy + f) + f.$$

Wegen  $\varphi^2 = \iota$  ist dann  $x'' = x$  und  $y'' = y$ . Ein sich anschließender Koeffizientenvergleich führt auf die folgenden sechs Gleichungen für die Größen  $a, b, c, d, e$  und  $f$ :

$$(1) \quad a^2 + bc = 1, \quad (3) \quad b(a + d) = 0, \quad (5) \quad ae + bf + e = 0,$$

$$(2) \quad bc + d^2 = 1, \quad (4) \quad c(a + d) = 0, \quad (6) \quad ce + df + f = 0.$$

Zur Lösung dieses Gleichungssystems hat man Fallunterscheidungen zu treffen.

1.  $a + d \neq 0$

Dann ist  $b = c = 0$  und  $a^2 = d^2 = 1$ . Man erhält zwei Unterfälle:

1.1.  $a = d = 1$

Aus den Gleichungen (5) und (6) folgt dann  $e = f = 0$ . Es liegt damit die Transformation mit den Gleichungen

$$x' = x,$$

$$y' = y$$

vor, d. h., es handelt sich um die Identität, die trivialerweise involutorisch ist.

$$1.2. a = d = -1$$

Die Gleichungen (5) und (6) sind für beliebiges  $e$  und  $f$  erfüllt.  $\varphi$  hat dann die Gleichungen

$$x' = -x + e,$$

$$y' = -y + f.$$

Es handelt sich um die Punktspiegelung.

$$2. a + d = 0, \text{ d. h. } d = -a$$

Die Gleichungen von  $\varphi$  lauten jetzt

$$x' = ax + by + e,$$

$$y' = cx - ay + f.$$

Für den Inhaltsmaßstab  $k$  erhält man unter Verwendung von Gleichung (1) die Beziehung  $k = -a^2 - bc = -1$ , d. h., es handelt sich um eine ungleichsinnige äquiaffine Transformation. Untersucht man sie auf Fixpunkte, so stellt man unter Verwendung der Gleichungen (1), (5) und (6) fest, daß eine axiale Affinität vorliegt,  $\varphi$  ist demnach Affin-spiegelung.

Damit ist gezeigt: Die involutorischen affinen Transformationen der Ebene sind die Punktspiegelungen und die Affin-spiegelungen.

53. Es ist zu zeigen, daß die durch die Gleichungen

$$x' = 2x + 6y - 4,$$

$$y' = 3x + 9y + 5$$

gegebene affine Abbildung singularär ist. Eine Gleichung der Senkgeraden ist aufzustellen, und es ist nachzuweisen, daß der Punkt  $P'(-2, 8)$  auf ihr liegt. Wie lautet eine Gleichung derjenigen Geraden, deren Punkte auf  $P'$  abgebildet werden?

54. Es ist zu beweisen, daß

$$DV(A, B; P, Q) = \frac{1}{DV(A, B; Q, P)}$$

ist. (Vgl. MfL Bd. 7, 2.6.2.)

55. Von einer Zentralkollineation sind das Zentrum  $Z$  sowie die Achse  $s$  bekannt. Zu einem beliebig gewählten Originalpunkt  $A \notin s$  wird der Bildpunkt  $A'$  so auf  $g(AZ)$  gewählt, daß die Punktepaare  $(A, A')$  und  $(Z, F)$ , wobei  $F$  der Schnittpunkt von  $g(AZ)$  mit  $s$  ist, harmonische Punktepaare sind. Es ist zu zeigen, daß diese Zentralkollineation involutorisch ist. (Eine involutorische Zentralkollineation heißt *kollineare Spiegelung*.)

Lösung: Nach Voraussetzung gilt  $DV(Z, F; A, A') = -1$ . Jetzt soll der Punkt  $A'$  abgebildet werden. Sein Bildpunkt  $A^*$  liegt auf der Geraden  $g(ZF)$ , auf der dann die vier Originalpunkte  $Z, F, A$  und  $A'$  und deren entsprechende Bildpunkte  $Z, F, A'$  und  $A^*$  liegen, und wegen der Invarianz des Doppelverhältnisses gilt

$$DV(Z, F; A, A') = DV(Z, F; A', A^*) = -1.$$

Nach Aufgabe 54 ist

$$DV(Z, F; A', A^*) = \frac{1}{DV(Z, F; A^*, A')} = -1,$$

also  $DV(Z, F; A, A') = DV(Z, F; A^*, A') = -1$ , woraus sich  $A^* = A$  ergibt. Damit entsprechen sich die Punkte  $A$  und  $A'$  involutorisch. Jetzt wird zu einem beliebig gewählten Originalpunkt  $B \notin g(ZF)$  nach bekannten Methoden der Bildpunkt  $B'$  konstruiert (Abb. 4.27). ( $g(AB) \cap s = F_1$ ,  $g(F_1A') \cap g(ZB) = B'$ ,  $g(ZB) \cap s = F_2$ .) Dann gilt mit  $F_1$  als Schnittpunkt der Geraden  $g(AB)$ ,  $g(F_1A')$  und  $g(A'B')$

$$DV(Z, F; A, A') = DV(Z, F_2; B, B').$$

Damit sind  $Z, F_2, B$  und  $B'$  vier harmonische Punkte, und  $B'$  wird durch die gegebene Zentralkollineation auf  $B$  abgebildet.

56. Es ist zu untersuchen, wieviel uneigentliche Punkte Ellipse, Hyperbel und Parabel besitzen. Zu diesem Zweck sind diese Kegelschnitte der Reihe nach mit der uneigentlichen Geraden zu schneiden.

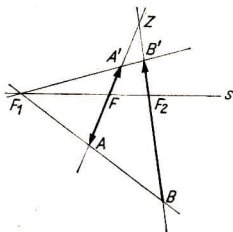


Abb. 4.27

57. Es ist zu zeigen: Bildet man einen Kreis durch eine Zentralkollineation ab, so erhält man eine Kurve zweiter Ordnung. Schneidet der Kreis die Verschwindungsgerade, so erhält man eine Hyperbel, berührt er sie, eine Parabel, meidet er sie, eine Ellipse.

Hinweis: Der Kreis mit der Gleichung  $x^2 + y^2 = \varrho^2 t^2$  wird durch die Zentralkollineation mit den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} rx' &= Ax, \\ ry' &= Ay, \\ rt' &= By + (A + B)t \end{aligned} \right\} r \neq 0,$$

abgebildet (vgl. die Gleichungen (8) in MfL Bd. 7, 3.5.1.). Man erhält eine Kurve zweiter Ordnung. Die Gleichung der Verschwindungsgeraden der Zentralkollineation lautet

$$y = -\frac{A+B}{B}t. \text{ Aus dem Vergleich von } \left| \frac{A+B}{B} \right| \text{ mit } \varrho \text{ folgt die Behauptung.}$$

58. Gegeben sind zwei Zentralkollineationen mit gemeinsamem Zentrum, aber verschiedenen Achsen. Es ist zu beweisen, daß die Hintereinanderausführung beider Transformationen wieder eine Zentralkollineation ergibt. Danach ist zu zeigen, daß die Menge aller Zentralkollineationen mit gemeinsamem Zentrum eine Gruppe bildet.
59. Es ist zu zeigen, daß bei jeder Kollineation jede Gerade wieder auf eine Gerade abgebildet wird.

60. Die Sätze 1, 2, 3, 4 und 6 aus MfL Bd. 7, 3.6., sind analytisch zu beweisen.
61. Am Kreis mit der Gleichung  $x^2 + y^2 = 1$  sind zu spiegeln:
- der Punkt  $P(3, -4)$ ,
  - die Gerade mit der Gleichung  $2x - 4y + 7 = 0$ ,
  - der Kreis mit der Gleichung  $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$ ,
  - die Hyperbel mit der Gleichung  $x^2 - y^2 = 1$ .
62. Die Menge aller konzentrischen Kreise mit einem beliebigen Mittelpunkt ist durch Inversion am Einheitskreis analytisch abzubilden. Sind die Bildkreise wieder konzentrisch?
63. Durch einen Punkt  $P$  außerhalb eines Kreises  $k$  sind Kreise zu konstruieren, die  $k$  orthogonal schneiden. Wo liegen ihre Mittelpunkte?
64. Es sind Kreise zu konstruieren, die einen gegebenen Kreis  $k$  berühren und durch zwei gegebene Punkte  $P$  und  $Q$  verlaufen. (Die möglichen Lagen von  $P$  und  $Q$  bezüglich  $k$  sind dabei zu beachten.)

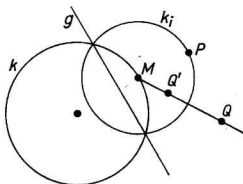


Abb. 4.28

**Lösung:** Es liegt ein Sonderfall des Berührungsproblems des APOLLONIUS vor, die Lösung erfolgt mit Hilfe der Inversion. Auf dem Kreis  $k$  wird ein Punkt  $M$  beliebig angenommen. Der Kreis  $k_i$  um  $M$  durch  $P$  dient als Inversionskreis (Abb. 4.28). Bei Inversion an  $k_i$  werden  $k$  auf eine Gerade  $g$ ,  $P$  auf sich und  $Q$  auf einen Punkt  $Q'$  abgebildet. Mit Hilfe einer Zentralstreckung werden diejenigen Kreise durch  $P$  und  $Q'$  konstruiert, die  $g$  berühren. Diese Kreise werden an  $k_i$  gespiegelt, ihre Bilder sind die gesuchten Kreise. Der Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion ergibt sich aus MfL Bd. 7, 3.6., Satz 7. Die Aufgabe besitzt nur dann Lösungen, wenn  $P$  und  $Q$  beide innerhalb oder beide außerhalb  $k$  liegen oder einer der beiden Punkte auf  $k$  liegt.

## Einführung in eine Theorie der geometrischen Konstruktionen

### Kontrollfragen

- In welcher Weise sind in der behandelten Theorie der geometrischen Konstruktionen die Verwendung des Lineals und die Verwendung des Zirkels erklärt?
- Was versteht man unter dem Begriff „Konstruktion mit Zirkel und Lineal“?

3. Was beinhaltet das Berührungsproblem des APOLLONIUS? Welche Sonderfälle ergeben sich, wenn für die gegebenen Kreise auch „entartete“ Kreise — d. h. Punkte oder Geraden — einbezogen werden?

### Aufgaben

1. Man gebe klassische Konstruktionsprobleme an, mit denen sich bereits Mathematiker im Altertum beschäftigt hatten und die Ende des 18. Jahrhunderts bzw. im 19. Jahrhundert dadurch entschieden wurden, daß die in den Problemen enthaltenen Aufgaben sich als lösbar bzw. als unlösbar herausstellten.
2. Unter der „Quadratur des Kreises“ versteht man die Aufgabe, zu einem gegebenen Kreis mit Zirkel und Lineal ein flächengleiches Quadrat zu konstruieren. Unter der „Rektifikation des Kreises“ versteht man die Aufgabe, zu einem gegebenen Kreis mit Zirkel und Lineal eine Strecke zu konstruieren, welche die gleiche Länge wie der Kreisumfang besitzt. Man zeige, daß mit der Unlösbarkeit der ersten Aufgabe auch die zweite Aufgabe unlösbar ist.
3. Durch welches Axiom aus dem Abschnitt über den axiomatischen Aufbau der Geometrie (vgl. MfL Bd. 6) werden die Existenz und die Eindeutigkeit der Geraden im Konstruktionsschritt  
 „Konstruktion der Geraden durch zwei gegebene, voneinander verschiedene Punkte“ (vgl. MfL Bd. 7, 4.1., Konstruktionsschritt a))  
 gesichert? Man begründe für den Konstruktionsschritt  
 „Konstruktion des Schnittpunktes zweier nichtparalleler Geraden, von denen eine durch zwei voneinander verschiedene Punkte gegeben ist“ (vgl. MfL Bd. 7, 4.1., Konstruktionsschritt b))  
 die Existenz und die Eindeutigkeit des Schnittpunktes in der euklidischen Ebene mit Hilfe der Axiome, Sätze und Begriffsbildungen aus MfL Bd. 6.
4. Kann aus einer Einheitsstrecke durch eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal eine Strecke der Maßzahl

$$a) x = 2 \sqrt{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}},$$

$$b) x = 4 \left( \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{1}{2i+1} \right) = 4 \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right),$$

$$c) x = 3 \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \right) = 3 \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right)$$

gefunden werden?

Hinweis: An dieser Stelle möge die Konstruktion von Strecken der Maßzahlen  $a + b$ ,  $a - b$ ,  $n \cdot a$ ,  $a/n$ ,  $a \cdot b$ ,  $a/b$ ,  $\sqrt{a}$  aus Strecken der Maßzahlen 1,  $a$ ,  $b$  mit Zirkel und Lineal bereits als bekannt vorausgesetzt werden.

5. Man löse die Konstruktionsaufgabe, den Mittelpunkt  $M$  der Strecke  $AB$  mit Zirkel und Lineal zu konstruieren (vgl. MfL Bd. 7, 4.1.).

Hinweis: Beim Lösen dieser Konstruktionsaufgabe, die bei schwierigeren Konstruktionsaufgaben häufig als Teilaufgabe auftritt, möge die Konstruktion entsprechend der Definition des Begriffes „Konstruktion mit Zirkel und Lineal“ vollständig in Konstruktions-schritten der Arten a) bis e) zerlegt werden. Nachdem dies einmal geschehen ist, kann dann bei komplizierteren Konstruktionsaufgaben eine derartige Teilkonstruktion kurz als „Konstruktion des Mittelpunktes  $M$  der Strecke  $AB$ “ benannt werden. Es können dann auch abgekürzte Konstruktionsverfahren zur Anwendung kommen. — Nachdem die Existenz und die Eindeutigkeit des Mittelpunktes einmal begründet wurde, wird bei späteren komplizierteren Aufgaben ohne besondere Erwähnung davon stets Gebrauch gemacht.

Lösung (als Beispiel für die folgenden sechs Aufgaben):

Existenz und Eindeutigkeit folgen aus dem „Satz vom Mittelpunkt“: Jede Strecke  $AB$  hat genau einen Mittelpunkt (vgl. MfL Bd. 6).

Es werden die folgenden Konstruktions-schritte durchgeführt:

Konstruktion des Kreises  $k_1$  um  $A$  durch  $B$  (Abb. 4.29);

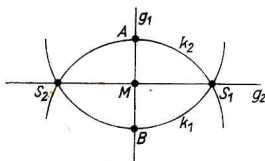


Abb. 4.29

Konstruktion der zwei Schnittpunkte des Kreises  $k_1$  mit dem Kreis  $k_2$  um  $B$  durch  $A$  (die zwei Schnittpunkte existieren, denn auf  $k_2$  liegt ein innerer und auch ein äußerer Punkt von  $k_1$ );

Bezeichnung der beiden Schnittpunkte in beliebiger Reihenfolge mit  $S_1$  und  $S_2$ ;

Konstruktion der Geraden  $g_1$  durch  $A$  und  $B$ ;

Konstruktion des Schnittpunktes  $M$  der Geraden  $g_1$  mit der Geraden  $g_2$  durch  $S_1$  und  $S_2$  (die Existenz des Schnittpunktes  $M$  folgt aus dem „Satz über die Zerlegung in Halbebenen“ (vgl. MfL Bd. 6) und aus der Tatsache, daß  $S_1$  und  $S_2$  auf verschiedenen Seiten der Geraden  $g_1$  liegen).

Behauptung:  $M$  ist der Mittelpunkt der Strecke  $AB$ , d. h., es ist  $MA \cong MB$ .

Beweis: Die Dreiecke  $S_1S_2A$  und  $S_1S_2B$  sind kongruent nach dem Kongruenzsatz „Seite—Seite—Seite“ wegen

$$S_1S_2 \cong S_1S_2, \quad S_1A \cong S_1B, \quad S_2A \cong S_2B.$$

Folglich ist auch

$$\sphericalangle S_2S_1A \cong \sphericalangle S_2S_1B.$$

Dann sind aber auch die Dreiecke  $MS_1A$  und  $MS_1B$  kongruent nach dem Kongruenzsatz „Seite—Winkel—Seite“ wegen

$$MS_1 \cong MS_1, \quad \sphericalangle MS_1A \cong \sphericalangle MS_1B, \quad S_1A \cong S_1B.$$

Folglich ist auch  $MA \cong MB$ .

(Zum Beweis der Behauptung hätten auch andere Sätze herangezogen werden können, z. B. der Satz, nach dem in jedem Parallelogramm der Schnittpunkt der beiden Diagonalen zugleich Mittelpunkt jeder der beiden Diagonalen ist. Zur Bezeichnung der Winkel bei Dreiecken vgl. man MfL Bd. 6.)

Mit der durchgeführten Konstruktionsaufgabe ist erneut auch ein Existenzbeweis für den Mittelpunkt der Strecke  $AB$  geführt.

6. Man löse die Konstruktionsaufgabe, die Winkelhalbierende des Winkels  $\sphericalangle(s, t; P^+)$  mit Zirkel und Lineal zu konstruieren.
7. Man löse die Konstruktionsaufgabe, mit Zirkel und Lineal in einem gegebenen Punkt  $P$  einer gegebenen Geraden  $g$  die Senkrechte zu errichten.
8. Man löse die Konstruktionsaufgabe, mit Zirkel und Lineal von einem gegebenen Punkt  $P$  auf eine nicht durch  $P$  gehende Gerade  $g$  das Lot zu fällen.
9. Man löse die Konstruktionsaufgabe, mit Zirkel und Lineal zu einer gegebenen Geraden  $g$  durch einen nicht auf  $g$  gelegenen Punkt  $P$  die Parallele zu konstruieren.
10. Man löse die Konstruktionsaufgabe, mit Zirkel und Lineal auf einem gegebenen Strahl  $AS^+$  vom Anfangspunkt  $A$  aus die Strecke, welche gleiche Länge wie eine gegebene Strecke  $PQ$  besitzt, abzutragen.

Hinweis (vgl. auch die Hinweise zu Aufgabe 4): Nachdem eine Konstruktion zur Lösung dieser Aufgabe einmal ausführlich in Konstruktionsschritten der Arten a) bis e) zerlegt wurde, ist dann auch die Rechtfertigung für das abgekürzte Konstruktionsverfahren gegeben, bei Vorgabe einer Strecke  $AB$  unmittelbar den Kreis mit dem Radius  $r = |AB|$  um einen gegebenen Punkt  $P$  zu konstruieren.

11. Man löse die Konstruktionsaufgabe, mit Zirkel und Lineal an einen gegebenen Strahl vom Anfangspunkt aus nach einer gegebenen Seite den Elementarwinkel, welcher gleiche Größe wie ein gegebener nichtgestreckter Elementarwinkel besitzt, anzutragen.
12. Bei geometrischen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal kann das „Zeichendreieck“ zur Vereinfachung gewisser Konstruktionsverfahren Verwendung finden. Mit dem (rechtwinkligen) Zeichendreieck in Verbindung mit einem Lineal ist es möglich, ohne Verwendung des Zirkels und ohne weitere Hilfslinien unmittelbar
  - a) das Lot von einem gegebenen Punkt  $P$  auf eine nicht durch  $P$  gehende Gerade  $g$  zu fällen,
  - b) die Senkrechte in einem gegebenen Punkt  $P$  einer gegebenen Geraden  $g$  zu errichten,
  - c) die Parallele zu einer gegebenen Geraden  $g$  durch einen nicht auf  $g$  gelegenen Punkt  $P$  anzugeben.

Wie viele Hilfslinien (Kreise oder Geraden) sind mindestens erforderlich, um die entsprechenden Konstruktionsaufgaben ohne Zeichendreieck bei alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal zu lösen? Die Verwendung „beliebiger“ Elemente (Punkte, Geraden, Kreise) sei zugelassen.

Lösung: In jedem der drei Fälle reichen zwei Hilfslinien aus (Abb. 4.30), um einen Punkt  $Q (\neq P)$  auf der gesuchten Geraden zu finden; die Gerade  $g(PQ)$  ist dann die gesuchte Gerade. Bei der Wahl des Punktes  $A$  sind gemäß Abb. 4.30 gewisse Bedingungen zu erfüllen (ansonsten ist  $A$  beliebig); man überlege sich diese Bedingungen. Nach Wahl des Punktes  $A$  ergibt sich der Punkt  $Q$  als eindeutig bestimmter Punkt unter Verwendung des Hilfspunktes  $B$  bzw. der Hilfspunkte  $B$  und  $C$ .

- a) 1. Hilfslinie: Kreis um  $A$  durch  $P$ , 2. Hilfslinie: Kreis um  $B (\neq A)$  durch  $P$ ;  
 b) 1. Hilfslinie: Kreis um  $A$  durch  $P$ , 2. Hilfslinie: Gerade durch  $A$  und  $B$ ;  
 c) 1. Hilfslinie: Kreis um  $A$  durch  $P$ , 2. Hilfslinie: Kreis um  $C$  mit  $r = |BP|$ .

Weniger als zwei Hilfslinien reichen nicht aus, denn für die gesuchte Gerade ist in jedem Fall außer  $P$  noch ein zweiter Punkt  $Q$  erforderlich; und zur Bestimmung eines solchen Punktes sind zwei sich schneidende Linien notwendig.

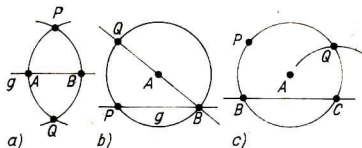


Abb. 4.30

13. Man konstruiere mit Zirkel und Lineal aus einer Einheitsstrecke und einem Elementarwinkel der Größe  $\alpha$  eine Strecke der Maßzahl  $l := \sin \alpha$ .
14. Man konstruiere mit Zirkel und Lineal aus einer Einheitsstrecke und einer Strecke der Maßzahl  $l := \sin \alpha$  ( $0 < l \leq 1$ ) einen Elementarwinkel der Größe  $\alpha$ .
15. Welche von den folgenden Konstruktionsaufgaben sind lösbar? Welche von den lösbaren Konstruktionsaufgaben sind mit Zirkel und Lineal lösbar?
- Zu einem Einheitskreis ein regelmäßiges Fünfeck zu konstruieren,
  - zu einem Einheitskreis ein regelmäßiges Siebeneck zu konstruieren,
  - zu einer Einheitsstrecke ein Dreieck  $ABC$  mit  $|AB| = 6$ ,  $|BC| = 3$ ,  $|AC| = 4$  zu konstruieren,
  - zu einer Einheitsstrecke und einem Elementarwinkel der Größe  $60^\circ$  ein Dreieck  $ABC$  mit  $|AB| = 5$ ,  $\sphericalangle BAC = 60^\circ$ ,  $|BC| = 4$  zu konstruieren?

## Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

### Kontrollfragen

- Was versteht man unter rationalen Konstruktionen? Was ist eine Quadratwurzelkonstruktion?
- Für welche Primzahlen  $p$  kann ein regelmäßiges  $p$ -Eck mit Zirkel und Lineal konstruiert werden?



## Aufgaben

1. Gegeben seien eine Einheitsstrecke  $OE$ , eine Strecke der Maßzahl  $a$  und eine Strecke der Maßzahl  $b$ . Auf dem Strahl  $OE^+$  werde vom Anfangspunkt  $O$  aus die Strecke der Maßzahl  $a$  abgetragen; der Anfangspunkt möge mit  $A_0 (= O)$  und der Endpunkt mit  $A_1$  bezeichnet werden. Danach werde auf dem Strahl  $A_1A_0^-$  vom Anfangspunkt  $A_1$  aus die Strecke der Maßzahl  $b$  abgetragen; der Anfangspunkt möge mit  $B_0 (= A_1)$  und der Endpunkt mit  $B_1$  bezeichnet werden. Man beweise, daß die Strecke  $A_0B_1$  die Maßzahl  $a + b$  besitzt (vgl. MfL Bd. 7, 4.2.1.).

Lösung: Der folgende Beweis beruht auf dem „Satz von der Existenz eines Längenfunktional“: Es gibt wenigstens eine Abbildung  $l$  der Menge  $\mathcal{S}$  aller Strecken in die Menge  $\mathbf{R}_+$  der nicht negativen reellen Zahlen mit den Eigenschaften:

- (1) Aus  $AB \cong CD$  folgt  $l(AB) = l(CD)$ .
- (2) Liegt  $B$  zwischen  $A$  und  $C$ , so gilt  $l(AC) = l(AB) + l(BC)$ .
- (3) Es gibt eine Strecke  $PQ$  ( $P \neq Q$ ) mit  $l(PQ) = 1$ .

Außerdem wird der „Satz von der Einzigkeit des Längenfunktional“ herangezogen: Zu jeder Strecke  $PQ$  mit  $P \neq Q$  gibt es höchstens ein Abbildung  $l$  der Menge aller Strecken in  $\mathbf{R}_+$  mit den Eigenschaften (1), (2), (3). (Vgl. MfL Bd. 6.)

Als Bild der Strecke  $AB$  bei der Abbildung  $l$  wird hier das Symbol  $|AB|$  verwendet. Als Strecke  $PQ$  mit  $l(PQ) = 1$  dient die Strecke  $OE$ .

Nach Konstruktion ist

$$|A_0A_1| = a \quad \text{und} \quad |A_1B_1| = b.$$

Und weil  $A_1$  zwischen  $A_0$  und  $B_1$  liegt, ist schließlich

$$|A_0B_1| = |A_0A_1| + |A_1B_1| = a + b.$$

2. Man löse die Konstruktionsaufgabe, zu einem Einheitskreis mit Zirkel und Lineal ein eingeschriebenes regelmäßiges Sechseck zu konstruieren; man gebe eine ausführliche Begründung für alle Teilschritte beim Lösen dieser Aufgabe (vgl. MfL Bd. 7, 4.2.5., Beispiel 1).

Ein regelmäßiges  $n$ -Eck sei definiert als  $n$ -Eck mit gleichlangen Seiten und gleichgroßen Innenwinkeln. Außerdem möge als bekannt vorausgesetzt werden, daß in jedem Kreis zu gleichlangen Kreisbögen gleichgroße Innenwinkel gehören und daß folglich bei Teilung einer Kreislinie in  $n$  gleiche Teile ein regelmäßiges  $n$ -Eck entsteht.

Hinweis: Beim Lösen\* dieser Konstruktionsaufgabe möge eine Zerteilung der Arbeit entsprechend der beiden Arbeitsteile beim Lösen von Bestimmungsgleichungen vorgenommen werden (vgl. MfL Bd. 7, 4.2.2.). Im Konstruktionsplan können dabei auch übersehbare, zweckmäßige Arbeitsschritte auftreten, bei denen die Konstruktionschritte der Arten a) bis e) nicht mehr unmittelbar in Erscheinung treten (vgl. MfL Bd. 7, 4.2.3.).

Lösung: I. Angenommen, die Aufgabe wäre gelöst, d. h., zu einem Einheitskreis wäre mit Zirkel und Lineal ein eingeschriebenes regelmäßiges Sechseck konstruiert. Dann kann aber auch angenommen werden, daß dem Kreis um  $O$  durch  $E$  ein regelmäßiges Sechseck eingeschrieben ist und daß eine Ecke des Sechsecks mit  $E$  zusammenfällt. Die sechs Ecken mögen, von  $E$  aus beginnend, in beliebiger Umlaufrichtung der Reihe nach mit  $E_1 (= E)$ ,  $E_2, \dots, E_6$  bezeichnet sein (Abb. 4.31). Da  $O$  als Mittelpunkt des Kreises von allen Ecken  $E_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) gleichen Abstand hat, ist das Dreieck  $E_1OE_2$  gleich-

schenklig, und es ist

$$|\sphericalangle E_1OE_2| = \frac{1}{6} \cdot 360 = 60^\circ.$$

Aus dem „Satz über die Innenwinkelsumme für Dreiecke“ und aus dem „Satz über gleichschenklige Dreiecke“ (vgl. MfL Bd. 6, 1.3.6.) folgt

$$|\sphericalangle OE_1E_2| = |\sphericalangle OE_2E_1| = 60^\circ.$$

Nach dem Satz über gleichschenklige Dreiecke folgt dann aber auch  $E_1O \cong E_2E_2$ , und damit ist das Dreieck  $E_1OE_2$  gleichseitig. Das Sechseck  $E_1E_2 \dots E_6$  ist somit nach dem folgenden Konstruktionsplan konstruierbar:

- Konstruktion des Kreises  $k$  um  $O$  durch  $E$ ;
- Konstruktion des Punktes  $E_2$ : 1. auf  $k$ , 2. auf dem Kreis um  $E$  mit  $r = |OE|$  (Entscheidung für einen der beiden Schnittpunkte);
- Umbenennung des Punktes  $E$  in  $E_1$ ;
- Konstruktion der Punkte  $E_{i+1}$  ( $i = 2, \dots, 5$ ): 1. auf  $k$ , 2. auf dem Kreis um  $E_i$  mit  $r = |OE|$  (Entscheidung für den von  $E_{i-1}$  verschiedenen Punkt).

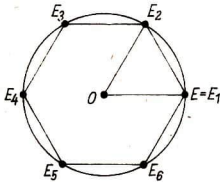


Abb. 4.31

II. Jedes Sechseck  $E_1E_2 \dots E_6$ , welches nach dem angegebenen Konstruktionsplan konstruiert werden kann, ist Lösung der Aufgabe. Denn es gilt für die fünf Seiten  $E_iE_{i+1}$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) die Beziehung

$$|OE| = |E_iE_{i+1}|,$$

und folglich haben wegen der Gleichseitigkeit der Dreiecke  $E_iOE_{i+1}$  die fünf Zentriwinkel  $\sphericalangle E_iOE_{i+1}$  die Größe

$$|\sphericalangle E_iOE_{i+1}| = 60^\circ \quad (i = 1, \dots, 5);$$

für den Zentriwinkel  $|\sphericalangle E_6OE_1|$  bleibt dann die Größe

$$|\sphericalangle E_6OE_1| = 360 - 5 \cdot 60 = 60^\circ,$$

und daraus folgt dann auch  $|E_6E_1| = |OE|$ . Damit sind alle Seiten des Sechsecks  $E_1E_2 \dots E_6$  gleichlang; und da alle Ecken auf einem Kreis liegen, sind alle Innenwinkel gleichgroß, und das Sechseck ist somit regelmäßig.

Beim Arbeitsschritt b) ist durch die beiden entstehenden Schnittpunkte die Weiterführung der Konstruktion auf zwei Wegen möglich; beide Wege führen jedoch zu kongruenten Sechsecken. Die vorliegende Konstruktionsaufgabe besitzt bis auf Kongruenz eine eindeutig bestimmte Lösung.

- Man löse die Konstruktionsaufgabe, zu einem Einheitskreis mit Zirkel und Lineal ein einbeschriebenes regelmäßiges Viereck zu konstruieren, und gebe eine ausführliche Begründung für alle Teilschritte beim Lösen dieser Aufgabe (vgl. MfL Bd. 7, 4.2.5., Beispiel 2).

4. Man bestimme von den natürlichen Zahlen  $n = 21, 22, \dots, 40$  alle diejenigen, für die die Konstruktion eines regelmäßigen  $n$ -Ecks mit Zirkel und Lineal aus einer vorgegebenen Einheitsstrecke möglich ist.

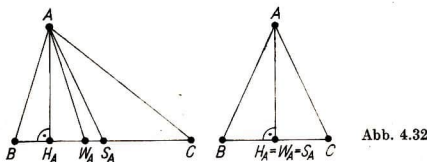
Hinweis: Zur Bestimmung der gesuchten Zahlen möge das von C. F. GAUSS gefundene Kriterium verwendet werden, wonach mit Zirkel und Lineal aus einer vorgegebenen Einheitsstrecke ein regelmäßiges  $n$ -Eck dann und nur dann konstruiert werden kann, wenn in der Primfaktorzerlegung von  $n$  alle von 2 verschiedenen Primfaktoren voneinander verschiedene Fermatsche Primzahlen sind (vgl. MfL Bd. 7, 4.2.5.).

5. Im Dreieck  $ABC$  seien der Schnittpunkt des Lotes von  $A$  auf  $g(BC)$  mit  $H_A$  (Höhenfußpunkt), der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Winkels  $\sphericalangle BAC$  mit der Seite  $BC$  mit  $W_A$  und der Mittelpunkt der Seite  $BC$  mit  $S_A$  bezeichnet. Man begründe, daß in jedem Dreieck  $ABC$

entweder  $|AH_A| < |AW_A| < |AS_A|$

oder  $|AH_A| = |AW_A| = |AS_A|$

gilt.



Lösung: Im Dreieck  $ABC$  ist entweder  $|AB| = |AC|$  oder  $|AB| \neq |AC|$ .  $H_A$  ist derjenige Punkt von  $g(BC)$ , der kleinsten Abstand von  $A$  hat (Abb. 4.32). Wenn  $|AB| = |AC|$  ist, dann ist  $H_A = W_A$ ; und weil  $W_A$  die Seite  $BC$  im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt, ist auch

$$H_A = W_A = S_A, \quad \text{d. h.} \quad |AH_A| = |AW_A| = |AS_A|.$$

Wenn  $|AB| \neq |AC|$  ist, dann ist  $H_A \neq W_A$  und folglich  $|AH_A| < |AW_A|$ .  $W_A$  liegt auf derjenigen Seite von der Mittelsenkrechten zu  $BC$ , auf der auch  $A$  und  $H_A$  liegen, weil  $W_A$  die Seite  $BC$  im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt; es ist also  $W_A \neq S_A$ . Da die Relation  $Zw(W_A H_A S_A)$  nicht gelten kann (man begründe diese Aussage), folgt schließlich  $Zw(H_A W_A S_A)$ , und daraus folgt  $|AH_A| < |AW_A| < |AS_A|$ .

6. \*Gegeben seien drei Kreise  $k_1, k_2, k_3$ , von denen je zwei außerhalb des dritten Kreises liegen. Es werde außerdem vorausgesetzt, daß jede Tangente an zwei dieser Kreise mit dem dritten Kreis keinen gemeinsamen Punkt besitzt. Man gebe einen Konstruktionsplan zur Konstruktion desjenigen Kreises  $k_4$  an, der jeden der drei gegebenen Kreise berührt und der nur den Kreis  $k_1$  im Inneren enthält.
7. \*Gegeben sei eine Gerade  $g$ . Außerdem seien auf einer Seite von  $g$  zwei Punkte  $P$  und  $Q$  und auf der anderen Seite von  $g$  eine Parallele  $g'$  zu  $g$  vorgegeben (Abb. 4.33). Man konstruiere mit Zirkel und Lineal alle diejenigen Punkte  $T$  auf  $g'$  mit

der Eigenschaft, daß auf dem Strahl  $TP^+$  die Strecke zwischen  $T$  und dem Schnittpunkt  $S_1$  dieses Strahls mit  $g$  dieselbe Länge besitzt wie auf dem Strahl  $TQ^+$  die Strecke zwischen  $T$  und dem Schnittpunkt  $S_2$  dieses Strahls mit  $g$ .

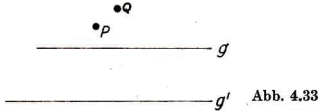


Abb. 4.33

8. Gegeben seien die Punkte  $M_1, M_2, \dots, M_n$  ( $n$  eine beliebige ungerade Zahl  $\geq 3$ ). Man konstruiere mit Zirkel und Lineal einen geschlossenen Streckenzug  $P_1P_2 \dots P_nP_1$  derart, daß  $M_i$  Mittelpunkt der Strecke  $P_iP_{i+1}$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) und  $M_n$  Mittelpunkt der Strecke  $P_nP_1$  ist.

Lösung (man vgl. auch die analytische Behandlung des vorliegenden geometrischen Sachverhalts für beliebiges  $n$ ): Für jedes ungeradzahlige  $n \geq 3$  besitzt die vorliegende Aufgabe eine eindeutig bestimmte Lösung (für geradzahliges  $n$  gibt es entweder keine oder unendlich viele Lösungen). Man beginnt mit einem beliebigen Punkt  $Q_1$  und konstruiert:

1. den zu  $Q_1$  spiegelbildlichen Punkt  $Q_2$  bezüglich  $M_1$ ;
2. den zu  $Q_2$  spiegelbildlichen Punkt  $Q_3$  bezüglich  $M_2$ ; ...;
- $n$ . den zu  $Q_n$  spiegelbildlichen Punkt  $Q_{n+1}$  bezüglich  $M_n$ .

Wenn  $Q_{n+1} = Q_1$  ist, dann sind  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  die gesuchten Eckpunkte. Wenn  $Q_{n+1} \neq Q_1$  ist (Abb. 4.34), dann wird zunächst der Mittelpunkt  $P_1$  der Strecke  $Q_1Q_{n+1}$  konstruiert.

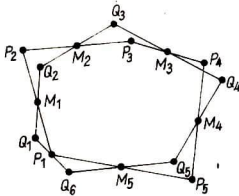


Abb. 4.34

Anschließend konstruiert man:

1. den zu  $P_1$  spiegelbildlichen Punkt  $P_2$  bezüglich  $M_1$ ;
2. den zu  $P_2$  spiegelbildlichen Punkt  $P_3$  bezüglich  $M_2$ ; ...;
- $n$ . den zu  $P_n$  spiegelbildlichen Punkt  $P_{n+1}$  bezüglich  $M_n$ .

**Behauptung:** Es ist  $P_{n+1} = P_1$ , und damit sind die Punkte  $P_1, P_2, \dots, P_n$  die gesuchten Eckpunkte.

**Beweis:** Die Strecken  $P_1Q_1, P_2Q_2, \dots, P_nQ_n, P_{n+1}Q_{n+1}$  sind gleichlang und liegen auf parallelen Geraden  $g(Q_iQ_{n+1})$ . Daraus folgt zunächst, daß die Strecken  $P_1Q_1$  und  $P_{n+1}Q_{n+1}$  auf der Geraden  $g(Q_1Q_{n+1})$  liegen. Da außerdem die Gleichungen

$$\begin{aligned} m(P_1Q_1) &= m(P_2Q_2) = \dots = m(P_nQ_n), \\ m(P_2Q_2) &= m(P_3Q_3) = \dots = m(P_{n+1}Q_{n+1}), \\ m(P_1Q_1) &= -m(P_2Q_2) \end{aligned}$$

gelten, ist schließlich  $P_1 = P_{n+1}$  (dabei ist wesentlich, daß  $n$  eine ungerade Zahl ist).

## Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal in algebraischer Behandlung

### Kontrollfragen

1. Wie können algebraisch die Strecken charakterisiert werden, die sich aus gegebenen Strecken mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen?
2. Was versteht man unter konstruierbaren Zahlen aus gegebenen Zahlen?

### Aufgaben

1. Im Dreieck  $ABC$  seien  $H_A$ ,  $W_A$  wie in einer vorangegangenen Aufgabe erklärt, und  $S_B$  sei Mittelpunkt der Strecke  $AC$ . Man begründe, daß für jedes Zahlentripel positiver reeller Zahlen  $h_a$ ,  $s_b$ ,  $w_a$ , für welche

$$\text{entweder } w_a > h_a \text{ und } s_b \geq \frac{1}{2} \cdot h_a$$

$$\text{oder } w_a = h_a \text{ und } s_b > \frac{1}{2} \cdot h_a$$

gilt, mindestens ein Dreieck mit

$$h_a = |AH_A|, \quad s_b = |BS_B|, \quad w_a = |AW_A|$$

existiert (vgl. MfL Bd. 7, 4.3.2.).

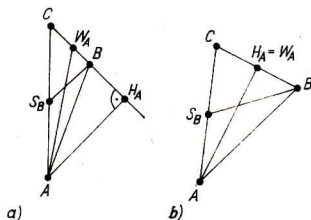


Abb. 4.35

Lösung: a) Es seien  $w_a$  und  $h_a$  mit  $w_a > h_a$  beliebig vorgegeben. Dann existieren unendlich viele Dreiecke  $ABC$  mit  $h_a = |AH_A|$  und  $w_a = |AW_A|$ ; diese Dreiecke sind nicht gleichschenkelig (Abb. 4.35). In der Menge aller dieser Dreiecke kann zu jeder reellen Zahl  $s_b \geq \frac{1}{2} h_a$  mindestens ein Dreieck gefunden werden, für welches  $s_b = |BS_B|$  ist.

b) Es sei  $w_a = h_a$ . Dann existieren unendlich viele gleichschenkelige Dreiecke  $ABC$  mit  $h_a = |AH_A| = w_a = |AW_A|$ . In der Menge aller dieser Dreiecke kann zu jeder reellen Zahl  $s_b > \frac{1}{2} h_a$  genau ein Dreieck gefunden werden, für welches  $s_b = |BS_B|$  ist.

2. Es seien  $h_a, s_b, w_a$  positive reelle Zahlen mit den Eigenschaften wie in Aufgabe 1; ferner sei

$$K := \sqrt{4s_b^2 - h_a^2} \quad \text{und} \quad L := \sqrt{w_a^2 - h_a^2}.$$

Man zeige, daß die quadratische Gleichung in  $x$

$$(4L)^2 x^2 + (3h_a^2 - 3L^2 + 2KL)x + (Kh_a^2 - 2Lh_a^2 - KL^2) = 0$$

nur reelle Lösungen besitzt (vgl. MfL Bd. 7, 4.3.2.).

3. Man beweise für den Aufgabentyp  $(a, s_a, w_a)$  mit algebraischen Hilfsmitteln die Lösbarkeit (mit Zirkel und Lineal). (Vgl. MfL Bd. 7, 4.4.6.)

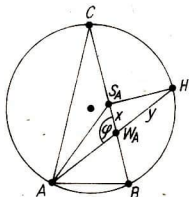


Abb. 4.36

Lösung: Es gilt (Abb. 4.36)

$$s_a^2 = x^2 + w_a^2 - 2xw_a \cos \varphi, \quad (1)$$

$$-\cos \varphi = x : y \quad (2)$$

und auf Grund der Ähnlichkeit der Dreiecke  $HW_A B$  und  $CW_A A$  auch

$$y : \left( \frac{a}{2} - x \right) = \left( \frac{a}{2} + x \right) : w_a,$$

d. h.

$$y = \frac{1}{w_a} \left( \frac{a^2}{4} - x^2 \right). \quad (3)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$y(s_a^2 - x^2 - w_a^2) = 2w_a x^2$$

und daraus mit (3) schließlich

$$\left( \frac{a^2}{4} - x^2 \right) (s_a^2 - x^2 - w_a^2) = 2w_a^2 x^2,$$

d. h.

$$x^4 + \left( -\frac{1}{4} a^2 - s_a^2 - w_a^2 \right) x^2 + \left( \frac{1}{4} a^2 s_a^2 - \frac{1}{4} a^2 w_a^2 \right) = 0.$$

Nach einigen Zwischenrechnungen ergibt sich

$$(x^2)_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \frac{a^2}{4} + s_a^2 + w_a^2 \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{a^2}{4} - s_a^2 - w_a^2 \right)^2 + 2a^2 w_a^2}.$$

Für  $x^2$  ergeben sich also stets zwei reelle Werte, von denen mindestens einer positiv ist. Somit gibt es mindestens eine positive reelle Zahl  $x$ , welche eine aus den Zahlen  $a, s_a, w_a$  konstruierbare Zahl ist. Daraus folgt für den gegebenen Aufgabentyp die Lösbarkeit mit Zirkel und Lineal.

(Ohne weitere Ausführungen sei an dieser Stelle erwähnt, daß bei Vorgabe eines Tripels  $a, s_a, w_a$  positiver reeller Zahlen die Existenz eines Dreiecks genau dann gewährleistet ist, wenn

$$\text{entweder } s_a = w_a$$

$$\text{oder } s_a > w_a \text{ und } a > 2\sqrt{s_a(s_a - w_a)}$$

gilt.)

4. Man beweise für den Aufgabentyp  $(h_a, h_b, w_\gamma)$  mit algebraischen Hilfsmitteln die Lösbarkeit (mit Zirkel und Lineal). (Vgl. MfL Bd. 7, 4.4.6.)

Hinweise: Es gelten die Beziehungen

$$\frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}w_\gamma a \sin \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}w_\gamma b \sin \frac{\gamma}{2},$$

$$b : a = h_a : h_b.$$

Daraus folgt

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{h_a h_b}{w_\gamma (h_a + h_b)}.$$

Wenn die positiven reellen Zahlen  $h_a, h_b, w_\gamma$  die Bedingung

$$w_\gamma > \frac{h_a h_b}{h_a + h_b}$$

erfüllen, dann besitzt die Konstruktionsaufgabe eine eindeutig bestimmte Lösung.

5. Man untersuche die Beweisschritte aus dem Beweis von Hilfssatz 1 (vgl. MfL Bd. 7, 4.3.3.) hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit auf Gleichungen vierten Grades

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

6. Man begründe, daß der Satz: „Wenn eine Gleichung  $n$ -ten Grades

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

mit rationalen Koeffizienten keine rationale Lösung besitzt, dann ist keine ihrer Lösungen aus rationalen Zahlen konstruierbar“ für  $n = 2$  und für  $n \geq 4$  falsch ist. Ist der genannte Satz im Fall  $n = 1$  richtig oder falsch? (Vgl. MfL Bd. 7, 4.3.3., Hilfssatz 1.)

7. Man beweise den Satz: „Wenn eine Gleichung  $n$ -ten Grades

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0 \quad (n \geq 1)$$

mit ganzzahligen Koeffizienten eine rationale Lösung  $x_1$  besitzt, dann ist  $x_1$  ganzzahlig und ein Teiler von  $a_0$  (vgl. MfL Bd. 7, 4.3.3., Hilfssatz 2).

Hinweis: Man betrachte den trivialen Fall  $n = 1$  gesondert.

## Die Unlösbarkeit einiger Konstruktionsaufgaben

### Kontrollfragen

1. Was versteht man unter dem Problem der „Verdoppelung des Würfels“ mit Zirkel und Lineal?
2. Was versteht man unter dem Problem der „Dreiteilung des Winkels“ mit Zirkel und Lineal?

### Aufgaben

1. Man zeige, daß es Vervielfachungsfaktoren  $n > 1$  gibt, so daß die entsprechende „Vervielfachung des Würfels“ mit Zirkel und Lineal möglich ist.

2. Man zeige, daß beim Problem der „Dreiteilung des Winkels“
  - a) die Beweisschritte im Beweis der Unlösbarkeit (vgl. MfL Bd. 7, 4.4.2.) versagen, wenn als spezieller Winkel ein Winkel der Größe  $\varphi := 90^\circ$  verwendet wird;

b) zu einem Winkel der Größe  $\varphi := 90^\circ$  ein Winkel der Größe  $\frac{1}{3}\varphi$  mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann.

Hinweis: Für  $\varphi := 90^\circ$  ist  $\frac{1}{3}\varphi = 30^\circ$ . Aus der Formel  $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$  folgt mit  $x := \sin 30^\circ$  wegen  $\sin 90^\circ = 1$  die Gleichung

$$4x^3 - 3x + 1 = 0.$$

Durch die Substitution  $y = 2x$  erhält man

$$y^3 - 3y + 2 = 0.$$

3. Man begründe, daß es nicht möglich ist, zu einem Winkel der Größe  $\varphi = 60^\circ$  mit Zirkel und Lineal einen Winkel der Größe  $\frac{1}{3}\varphi$  zu konstruieren, und zwar
  - a) unter Verwendung der Kenntnis, daß es nicht möglich ist, mit Zirkel und Lineal zu einem Winkel der Größe  $\varphi = 30^\circ$  einen Winkel der Größe  $\frac{1}{3}\varphi$  zu konstruieren,
  - b) ohne Verwendung dieser Kenntnis.
4. Gegeben sei ein gleichschenkeliges Dreieck  $ABC$  mit der Basis  $BC$ ; die Basis sei durch  $P_1$  und  $P_2$  in drei gleiche Teile geteilt, so daß  $|BP_1| = |P_1P_2| = |P_2C|$  gilt. Man berechne für die Fälle

a)  $|\sphericalangle BAC| = 90^\circ$ , b)  $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$ , c)  $|\sphericalangle BAC| = 30^\circ$

jeweils näherungsweise (auf Zehntelgrade gerundet) die Größen

$$|\sphericalangle BAP_1|, \quad |\sphericalangle P_1AP_2|, \quad |\sphericalangle P_2AC|$$

und gebe in jedem Falle näherungsweise die prozentuale Abweichung (auf eine Stelle nach dem Komma gerundet) von der Größe  $\frac{1}{3}|\sphericalangle BAC|$  an.



5. Jemand behauptet, mit der folgenden Konstruktion mit Zirkel und Lineal einen Winkel der Größe  $\alpha = \frac{1}{7} \cdot 180^\circ$  konstruiert und damit die Möglichkeit zur Konstruktion eines regelmäßigen Siebenecks geschaffen zu haben (Abb. 4.37):

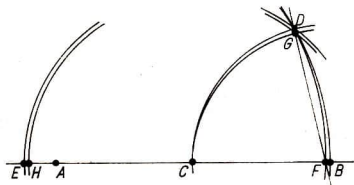


Abb. 4.37

Konstruktion einer beliebigen Strecke  $AB$  mit dem Mittelpunkt  $C$ ;

Konstruktion des Punktes  $D$

1. auf dem Kreis um  $B$  mit  $r = |BC|$ ,
2. auf dem Kreis um  $A$  mit  $r = |AB|$   
(Entscheidung für einen der beiden Schnittpunkte);

Konstruktion des Punktes  $E$

1. auf dem Strahl von  $C$  nach  $A$ ,
2. auf dem Kreis um  $C$  mit  $r = |CD|$ ;

Konstruktion des Punktes  $F$

1. auf dem Strahl von  $C$  nach  $B$ ,
2. auf dem Kreis um  $E$  mit  $r = |ED|$ ;

Konstruktion des Punktes  $G$

1. auf dem Strahl von  $F$  nach  $D$ ,
2. auf dem Kreis um  $F$  mit  $r = |FC|$ ;

Konstruktion des Punktes  $H$

1. auf dem Strahl von  $C$  nach  $A$ ,
2. auf dem Kreis um  $C$  mit  $r = |GC|$ .

Dann wird  $\alpha := |\sphericalangle CHG|$  festgesetzt, und es wird behauptet:

$$|\sphericalangle CGH| = \alpha, \quad |\sphericalangle CGF| = |\sphericalangle GCF| = 2\alpha,$$

$$|\sphericalangle HGF| = 3\alpha;$$

$$|\sphericalangle FHG| = \alpha, \quad |\sphericalangle FGH| = |\sphericalangle GFH| = 3\alpha.$$

Damit wäre  $\alpha = \frac{1}{7} \cdot 180^\circ$ .

Welche der behaupteten Aussagen ist falsch? Man gebe näherungsweise die prozentuale Abweichung der Größe  $\alpha := |\sphericalangle CHG|$  von der Größe  $\frac{1}{7} \cdot 180^\circ$  an.

6. Für den Aufgabentyp  $(a, b, w_a)$  kann mit dem speziellen Zahlentripel  $a := 1$ ,  $b := 1$ ,  $w_a := 1$  der Beweis der Unlösbarkeit (mit Zirkel und Lineal) geführt werden (vgl. Bd. 7, 4.4.4.). Man bestimme ein weiteres spezielles Zahlentripel  $a, b, w_a$  (mit der Bedingungen  $a \neq b$ ), mit dem der Beweis der Unlösbarkeit ebenfalls geführt werden kann.
7. Man bestimme zum Aufgabentyp  $(a, b, w_a)$  ein spezielles Zahlentripel  $a, b, w_a$ , so daß die dadurch entstehende spezielle Konstruktionsaufgabe mit Zirkel und Lineal gelöst werden kann (vgl. MfL Bd. 7, 4.4.4.).
8. Für den Aufgabentyp  $(w_a, w_\beta, w_\gamma)$  kann mit dem speziellen Zahlentripel  $w_a := \frac{1}{2}$ ,  $w_\beta := 2$ ,  $w_\gamma := 2$  der Beweis der Unlösbarkeit (mit Zirkel und Lineal) geführt werden (vgl. MfL Bd. 7, 4.4.5.). Man bestimme zu den speziellen Zahlen  $w_\beta := 2$ ,  $w_\gamma := 2$  eine spezielle Zahl  $w_a$  (mit der Bedingung  $w_a \neq 2$ ), so daß die dadurch entstehende spezielle Konstruktionsaufgabe mit Zirkel und Lineal gelöst werden kann.
9. Man beweise für den Aufgabentyp  $(a, \beta, w_a)$  die Unlösbarkeit (mit Zirkel und Lineal). (Vgl. MfL Bd. 7, 4.4.6.)

Lösung: Es sei  $D$  der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von  $\sphericalangle BAC$  mit der Strecke  $BC$ , und  $p$  sei die Maßzahl der Strecke  $BD$ . Dann gelten im Fall der Spezialisierung  $\beta := 90^\circ$  die Beziehungen

$$p = w_a \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (1)$$

$$w_a \sin \frac{\alpha}{2} = (a - p) \sin \gamma. \quad (2)$$

Aus (2) folgt  $w_a \sin \frac{\alpha}{2} = (a - p) \cos \alpha$  und daraus mit (1)

$$w_a \sin \frac{\alpha}{2} = \left( a - w_a \sin \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right).$$

Mit der zusätzlichen Spezialisierung  $a := 2$ ,  $w_a := 1$  (die Existenz eines Dreiecks mit  $|\sphericalangle ABC| = 90^\circ$ ,  $|BC| = 2$ ,  $|AW_A| = 1$  ist leicht zu begründen) erhält man für  $x := \sin \frac{\alpha}{2}$  die Gleichung

$$x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0.$$

Da kein Teiler von 1 Lösung dieser Gleichung ist, kann schließlich für den vorliegenden Aufgabentyp die Unlösbarkeit mit Zirkel und Lineal gefolgert werden.

10. Man beweise für den Aufgabentyp  $(h_a, h_b, w_a)$  die Unlösbarkeit (mit Zirkel und Lineal). (Vgl. MfL Bd. 7, 4.4.6.)

**Hinweis:** Es ist zweckmäßig, die Spezialisierungen  $h_a := 1$ ,  $h_b := 1$ ,  $w_a := 2$  und die Beziehungen

$$h_a = c \sin \alpha, \quad w_a \sin \frac{3}{2} \alpha = c \sin \alpha$$

zu verwenden.

## Konstruktionen mit anderen Hilfsmitteln

### Kontrollfragen

1. Was versteht man unter Mohr-Mascheroni-Konstruktionen?
2. Was versteht man unter einem Parallelineal, einem Winkellineal und einem Einschiebelineal?

### Aufgaben

1. Man erkläre die Begriffe „Konstruktion ersten Grades“, „Konstruktion zweiten Grades“, „Konstruktion dritten Grades“ und gebe zu jedem Begriff ein Beispiel an.
2. Man konstruiere zu drei nichtkollinearen Punkten  $A, B, C$  mit dem Zirkel allein a) den zu  $A$  spiegelbildlichen Punkt  $A'$  bezüglich der Geraden  $g(BC)$ , b) das Bild der Geraden  $g(BC)$  bei Inversion am Kreis  $k$  um  $A$  durch  $B$ .

**Lösung:** a) Konstruktion des zu  $A$  spiegelbildlichen Punktes  $A'$  bezüglich der Geraden  $g(BC)$ :

Konstruktion des Kreises um  $B$  durch  $A$ ;

Konstruktion des Kreises um  $C$  durch  $A$ ;

der von  $A$  verschiedene Schnittpunkt beider Kreise ist der gesuchte Punkt  $A'$ .

b) Konstruktion des Bildes der Geraden  $g(BC)$  bei Inversion am Kreis  $k$  um  $A$  durch  $B$ :

Konstruktion des zu  $A'$  inversen Punktes  $A''$  bezüglich des Kreises  $k$  (vgl. MfL Bd. 7, 4.5.2.);

Konstruktion des Kreises  $k_1$  um  $A''$  durch  $A$ ;

$k_1$  ist der gesuchte Kreis, und  $A''$  ist sein Mittelpunkt ( $k_1$  geht auch durch  $B$ ).

Zur Begründung denke man sich den Punkt  $D$  als Schnittpunkt der Geraden  $g(AA')$  mit  $g(BC)$  und den Punkt  $D'$  als den von  $A$  verschiedenen Schnittpunkt der Geraden  $g(AA')$  mit dem Kreis, in den  $g(BC)$  bei Inversion an  $k$  übergeht. Es gilt

$$|AA''| \cdot |AA'| = |AD| \cdot |AD'| = |AB|^2.$$

Und weil  $|AA'| = 2|AD|$  ist, folgt schließlich

$$|AA''| = \frac{1}{2} |AD'|,$$

d. h.,  $A''$  ist Mittelpunkt der Strecke  $AD'$ . Somit ist der Kreis  $k_1$  um  $A''$  durch  $A$  der gesuchte Kreis.

## V. Darstellende Geometrie

### Grundkonstruktionen

#### Kontrollfragen

1. Was versteht man unter dem ersten bzw. zweiten Tafelabstand eines durch seine Normalrisse vorgegebenen Punktes  $P$ ?
2. Was versteht man unter einer ersten bzw. zweiten Hauptlinie einer Ebene  $\varepsilon$ ?
3. Was versteht man unter einer erstprojizierenden (zweitprojizierenden) Ebene?
4. Was versteht man unter „Angittern“ eines Punktes  $P$ , der in einer vorgegebenen Ebene liegt?
5. Unter welcher Voraussetzung bildet sich ein rechter Winkel bei Normalprojektion auf eine Bildebene  $\pi$  als rechter Winkel ab?
6. Unter welcher Voraussetzung ist die Normalprojektion eines (nicht-überstumpfen) Winkels auf die Bildebene  $\pi$  größer bzw. kleiner als das Original?
7. Unter welchen Voraussetzungen geht die Halbierungslinie eines Winkels bei Normalprojektion in die Halbierungslinie des Bildwinkels über?
8. Unter welcher Voraussetzung ist die Normalprojektion eines Quadrates ein Rhombus?
9. Unter welchen Voraussetzungen erscheint die Normalprojektion eines gleichseitigen Dreiecks als gleichschenkliges Dreieck?
10. Welche Methoden stehen zur Verfügung, um den Abstand zweier Punkte  $P$  und  $Q$  zu bestimmen, die durch zugeordnete Normalrisse gegeben sind?
11. Welche geometrische Verwandtschaft besteht zwischen der Normalprojektion einer ebenen Figur und der Umklappung dieser ebenen Figur um ihre Spur in die Bildebene?
12. Welcher merkwürdige Punkt eines Dreiecks ist invariant gegenüber Parallelprojektion?
13. Welche geometrische Verwandtschaft besteht zwischen dem Grund- und dem Aufriß einer ebenen Figur? Welche Bedeutung hat für diese Verwandtschaft die Koinzidenzgerade? Wie kann man die Ordnungslinien in dieser geometrischen Verwandtschaft interpretieren?
14. Wie kann man an den zugeordneten Normalrissen zweier Geraden  $g$  und  $h$  ablesen, ob diese windschief sind oder sich im Raum schneiden?
15. Nach welcher konstruktiven Methode bestimmt man möglichst rationell die wahre Gestalt einer durch Grund- und Aufriß gegebenen ebenen Figur?

16. Bei der Normalprojektion eines Kreises allgemeiner Lage auf eine Ebene  $\pi$  entsteht als Bild eine Ellipse. Welcher Kreisdurchmesser geht in die Hauptachse und welcher in die Nebenachse der Ellipse über?
17. Jedes Parallelogramm, das in einer Bildebene  $\pi$  liegt, kann als Normalprojektion eines Quadrates angesehen werden. Mittels welcher Konstruktion kann man die Seitenlänge eines Quadrates ermitteln, von dem man nur eine Normalprojektion kennt?
18. Was versteht man unter dem Schichtenplan einer Fläche?
19. Was versteht man in der Eintafelprojektion unter einer Fallinie?
20. Wodurch zeichnet sich eine Schichtenlinie aus, die in der Höhe eines Sattelpunktes liegt?
21. Wodurch zeichnet sich eine Tallinie im Gelände aus und wie erkennt man sie am Schichtenplan?

### Aufgaben

1. Gegeben sind zwei sich senkrecht kreuzende Geraden  $g$  und  $h$ . Die Gerade  $g$  ist erstprojizierend (Abb. 5.1). Gesucht sind der Grund- und Aufriß jenes regelmäßigen Tetraeders, von dem eine Kante in  $g$  und die gegenüberliegende Kante in  $h$  liegt.

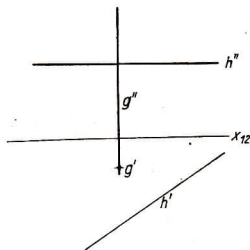


Abb. 5.1

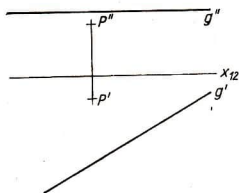


Abb. 5.2

2. Gegeben sind eine Gerade  $g$  und ein Punkt  $P \notin g$  (Abb. 5.2). Gesucht ist ein regelmäßiges Tetraeder, von dem eine Kante in  $g$  liegt und  $P$  ein Eckpunkt ist. Man diskutiere die Anzahl der Lösungen.
3. In der ersten Bildebene  $\pi$ , ist ein regelmäßiges Sechseck vorgegeben. Dieses werde als Grundriß (erster scheinbarer Umriß) eines Würfels angesehen, dessen tiefster Punkt in  $\pi_1$  liegt (Abb. 5.3). Gesucht ist der Aufriß dieses Würfels. Wieviel Lösungen sind möglich?

4. Gegeben sind der Grund- und Aufriß von drei nicht-kollinearen Punkten  $A, B, C$ . Man konstruiere die Normalrisse der Höhen, Winkelhalbierenden und Seitenhalbierenden des Dreiecks  $ABC$  (Abb. 5.4). Ferner überlege man, für welche charakteristischen Linien des Dreiecks die Bestimmung der wahren Gestalt des Dreiecks  $ABC$  nicht erforderlich ist.
5. Gegeben sind zwei zueinander windschiefe Geraden  $g$  und  $h$  durch ihre Normalrisse. Gesucht ist jene Ebene  $\varepsilon$ , die parallel zu  $g$  und zu  $h$  ist und von beiden Geraden den gleichen Abstand besitzt.

Hinweis: Die gesuchte Ebene  $\varepsilon$  halbiert jede Verbindungsstrecke  $GH$  mit  $G \in g$  und  $H \in h$ .

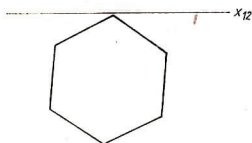


Abb. 5.3

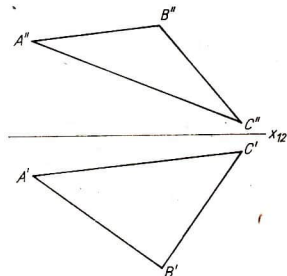


Abb. 5.4

6. Ein aus sechs gleichseitigen Dreiecken zusammengesetztes regelmäßiges Sechseck wird einer perspektiv-affinen Transformation unterworfen. Was läßt sich über die Inhaltsbeziehung der sechs Bilddreiecke aussagen? Man begründe die Antwort unter Verwendung der Eigenschaften einer perspektiv-affinen Transformation.
7. Gegeben sind ein Parallelogramm und eine Gerade  $g$  (Abb. 5.5). Gesucht sind die Affinitätsrichtung und das Affinitätsverhältnis jener perspektiven Affinität, die  $g$  als Affinitätsachse besitzt und das vorgegebene Parallelogramm in ein Quadrat transformiert.

Hinweis: Im Quadrat stehen je zwei benachbarte Seiten und auch die Diagonalen aufeinander normal.

8. Gegeben sind der Grundriß eines in der Ebene  $\varepsilon$  liegenden Rechtecks  $ABCD$  sowie die erste Spur von  $\varepsilon$  (Abb. 5.6). Man bestimme die zweite Spur von der Ebene  $\varepsilon$  und den Aufriß des Rechtecks  $ABCD$ .
9. Gegeben sind ein auf  $\pi_1$  lotrecht stehender Drehkegel und ein Punkt  $P$  außerhalb des Kegels durch ihren Grund- und Aufriß (Abb. 5.7). Man fälle das Lot von  $P$  auf den Kegelmantel, bestimme den Lotfußpunkt und die wahre Länge des Lotes.

Hinweis: Anwendung einer Drehung als Konstruktionsprinzip.

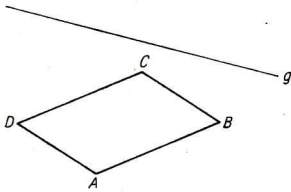


Abb. 5.5

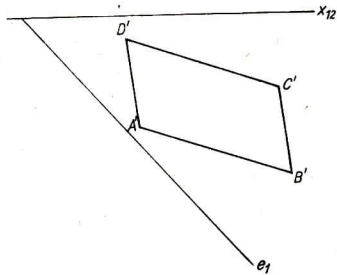


Abb. 5.6

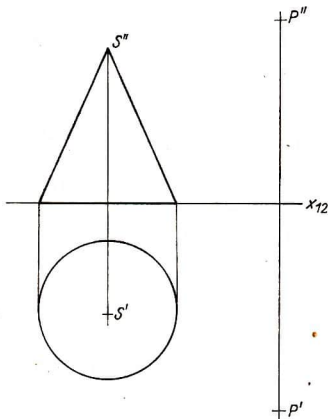


Abb. 5.7

10. Gegeben sind zwei dreiseitige Prismen  $\Phi$  und  $\Psi$  durch Grund- und Aufriß. Die Seitenflächen des Prismas  $\Phi$  sind erstprojizierend und die des Prismas  $\Psi$  zweitprojizierend. Der Durchschnitt beider Körper ist eine nichtleere Punktmenge (Abb. 5.8). Man stelle diesen Durchschnitt vom Aufriß ausgehend in einem Schrägbild dar,  $\lambda = 1$ ,  $\varphi = 60^\circ$ .
11. Für den durch Abb. 5.9 vorgelegten Grundriß der Trauflinien eines Hauses ist die Dachausmittlung zu konstruieren. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Trauflinie überall gleich hoch und das Dach nach allen Seiten unter dem gleichen Winkel gegenüber der horizontalen Ebene geneigt ist.

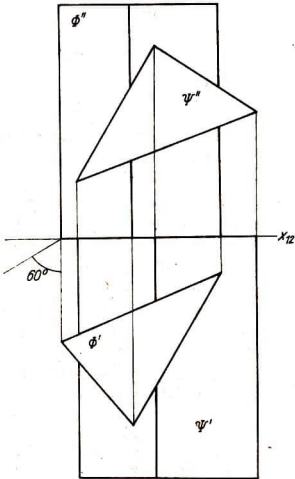


Abb. 5.8

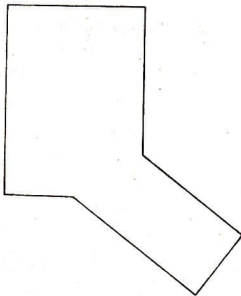


Abb. 5.9

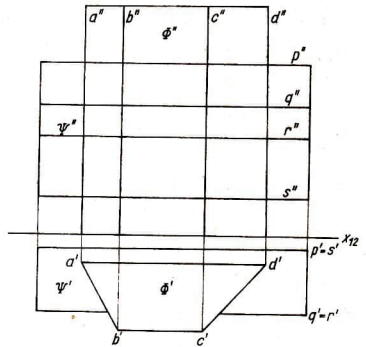


Abb. 5.10



12. Gegeben sind zwei Prismen  $\Phi$  und  $\Psi$  mit trapezförmigen Querschnitten durch Grund- und Aufriß. Das Prisma  $\Phi$  ist erstprojizierend. Die Seitenflächen des Prismas  $\Psi$  sind parallel zur Rißachse (Abb. 5.10). Man konstruiere den Aufriß des Schnittpolygons der beiden Prismen mittels geeigneter Hilfsebenen und stelle das Schnittgebilde unter Einarbeitung der Sichtbarkeit dar.
13. Eine räumliche Ecke sei durch drei sich in  $O$  paarweise senkrecht schneidende Achsen ( $x_1$ -,  $x_2$ -,  $x_3$ -Achse) vorgegeben. Die von den positiven Halbachsen aufgespannten, paarweise aufeinander senkrecht stehenden ebenen Bereiche ( $x_1x_2$ ), ( $x_2x_3$ ) und ( $x_3x_1$ ) bestimmen einen Oktanten des Raumes. Die drei ebenen Bereiche seien als Spiegelflächen nach der Seite des ersten Oktanten ausgebildet. Aus physikalischer Sicht liegt hier ein Tripelspiegel vor (Abb. 5.11). Man zeige mittels einer Darstellung in Grund- und Aufriß, daß ein aus dem ersten Oktanten einfallender Lichtstrahl  $s$  allgemeiner Lage nach dreimaliger Reflexion an den Flächen des Tripelspiegels in einen ausfallenden Strahl  $s^* \parallel s$  übergeführt wird. Zum konstruktiven Beweis dieser Aussage verwende man den folgenden geometrischen Sachverhalt: Liegt bei der Normalprojektion eines Winkels  $\alpha$  auf eine Ebene  $\pi$  die Winkelhalbierende  $w_\alpha$  parallel zur Bildebene  $\pi$ , so ist das Bild der Winkelhalbierenden auch die Halbierungslinie des Bildwinkels  $\alpha'$ .

Bemerkung: Die Wirkungsweise des Tripelspiegels findet im Verkehrswesen bei allen nicht selbstleuchtenden Warnanlagen Verwendung. In der technischen Ausführung werden Serien von Tripelspiegeln zu einem Warnreflektor zusammengefaßt. Die spiegelnden Flächen sind rot gefärbt. Die Bezeichnung „Katzenaugen“ für derartige Sicherungseinrichtungen ist nicht zutreffend, weil das hohe Reflexionsvermögen des Katzenauges auf einem anderen physikalischen Prinzip beruht. Die Wirkungsweise des Tripelspiegels hat in Verbindung mit den Laser-Strahlen durch vielfältige Anwendungsmöglichkeiten im Vermessungswesen erneut an Aktualität gewonnen.

14. Gegeben sind der Drehkegel  $\Phi$  mit dem in  $\pi_1$  liegenden Basiskreis  $k$ , der Richtungs Pfeil  $l$  und eine zweitprojizierende Ebene  $\varepsilon$  durch Grund- und Aufriß. Durch  $l$  wird die Richtung eines parallel einfallenden Strahlenbündels beschrieben (Abb. 5.12). Man konstruiere die Eigenschaftengrenze des Drehkegels sowie den Schlagschatten von  $\Phi$  auf  $\pi_1$  und  $\varepsilon$ .
15. Gegeben sind ein auf  $\pi_1$  lotrecht stehender Drehzylinder mit aufgesetztem Drehkegel sowie ein Richtungs Pfeil  $l$  durch Grund- und Aufriß. Durch  $l$  wird die Richtung eines parallel einfallenden Strahlenbündels wiedergegeben (Abb. 5.13). Man konstruiere die Eigenschaftengrenze des Drehkörpers sowie dessen Schlagschatten auf  $\pi_1$ .
16. Durch kotierte Projektion sind die horizontale Ebene  $\varepsilon_0$  mit der Kote 0,  $\varepsilon_1$  mit der Kote 5 und eine diese beiden Ebenen verbindende Pultebene  $\sigma$  gegeben. In dieses Gelände ist ein horizontales Rechteckplateau  $\pi$  mit der Kote 3 einzupassen, welches mit der Ebene  $\varepsilon_0$  durch einen gleichförmig geneigten Weg  $\omega$  verbunden ist (Abb. 5.14). Zur konstruktiven Einpassung des Plateaus mit Anschlußweg in das Gelände ist der Basiskreis  $k$  des Böschungskegels des Eckpunktes  $P$  von

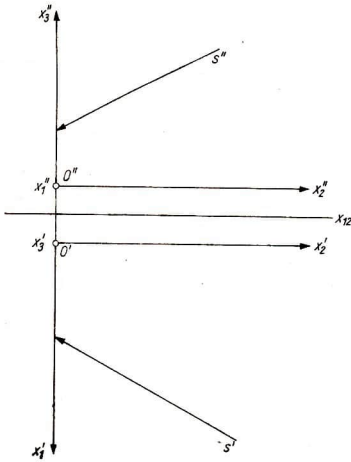


Abb. 5.11

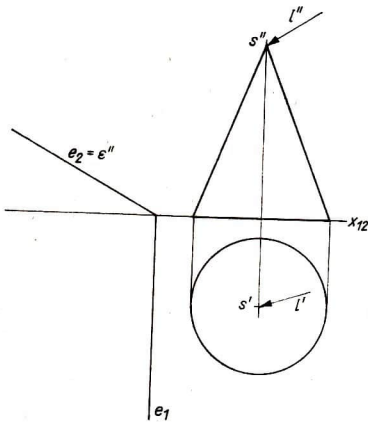


Abb. 5.12

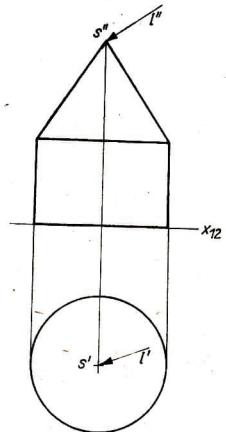


Abb. 5.13

$\pi$  bezüglich  $\varepsilon_0$  vorgegeben. Für Aufschüttung und Geländeeinschnitt ist der gleiche Böschungswinkel zu verwenden. Man konstruiere die durch Einpassung von  $\pi$  und  $\omega$  in das vorgegebene Gelände entstehenden ebenen Böschungflächen im Eintafelverfahren.

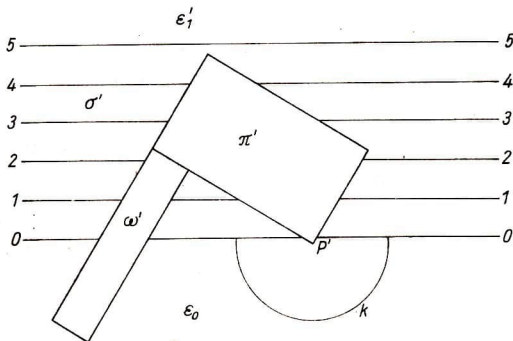


Abb. 5.14

## Kreis und Kugel

### Kontrollfragen

1. Wie konstruiert man einen Kreis, der eine Gerade  $t$  als Tangente besitzt und außerdem durch zwei auf einer Seite von  $t$  liegende Punkte  $P$  und  $Q$  geht? Man diskutiere die Anzahl der Lösungen.
2. Wie konstruiert man einen Kreis, von dem ein Punkt und zwei sich schneidende Tangenten vorgegeben sind? Man diskutiere die Anzahl der Lösungen.
3. Wieviel Kreise kann man an drei sich paarweise schneidende jedoch nicht durch einen Punkt gehende Geraden legen?
4. Welche Beziehung besteht zwischen dem Oberflächeninhalt und dem Rauminhalt einer Kugel mit dem Radius von der Länge  $r$ ? Man stelle eine analoge Beziehung für den Würfel mit der Kantenlänge  $a$  auf und vergleiche die Ergebnisse.
5. Gegeben sind vier Ebenen im Raum derart, daß sich je zwei in einer Geraden und je drei in einem Punkt schneiden. Hingegen besitzen die vier Ebenen keinen gemeinsamen Punkt. Wie kann man eine Kugel konstruieren, die jede der vier Ebenen in je einem Punkt berührt? Wieviel solche Kugeln gibt es? Man diskutiere auch den Fall, daß zwei Schnittgeraden parallel zueinander sind.

- Was versteht man unter einem Großkreis auf der Kugel?
- Bei allgemeiner Parallelbeleuchtung einer auf der Bildebene  $\pi$  liegenden Kugel entsteht als Schlagschatten eine Ellipse. Welche geometrische Bedeutung hat der Berührungspunkt der Kugel mit  $\pi$  für diesen Schlagschatten? Als Eigenschattengrenze der Kugel ergibt sich ein Großkreis. Die Ebene des Großkreises schneidet die Bildebene  $\pi$  nach einer Geraden  $e$ . Welche Bedeutung hat  $e$  für den Schlagschatten der Kugel?

### Aufgaben

- Gegeben sind eine Gerade  $g$  allgemeiner Lage und ein Punkt  $P \in g$  durch Grund- und Aufriß. Gesucht sind die Risse jenes Kreises, der senkrecht auf  $g$  steht, den Punkt  $P$  als Mittelpunkt besitzt und die erste Bildebene  $\pi_1$  berührt.
- Gegeben sind die Punkte  $M$  und  $A$  durch ihren Grund- und Aufriß. Ferner ist der Aufriß eines Punktes  $B$  gegeben (Abb. 5.15). Man bestimme den Grundriß des Punktes  $B$  derart, daß  $M$  der Mittelpunkt und  $A$  und  $B$  Randpunkte eines Kreises  $k$  sind; d. h., das Dreieck  $AMB$  ist gleichschenkelig mit der Strecke  $AB$  als Basis. Ferner bestimme man die erste und zweite Hauptlinie der Kreisebene durch  $M$  und stelle den gesuchten Kreis in Grund- und Aufriß dar. Wieviel Lösungen besitzt die Aufgabe?

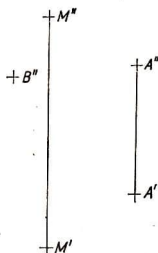


Abb. 5.15

- Gegeben sind die Punkte  $M$  und  $A$  durch Grund- und Aufriß.  $M$  sei der Mittelpunkt und  $A$  ein Randpunkt der Kugel  $\kappa$ . Man stelle die Kugel  $\kappa$  durch Grund- und Aufriß dar.
  - Gegeben sind vier nicht-koplanare Punkte  $A, B, C, D$ . Die drei Punkte  $A, B, C$  liegen in einer zu  $\pi_1$  parallelen Ebene. Man konstruiere jene Kugel  $\kappa$ , die die vier Punkte  $A, B, C, D$  als Randpunkte besitzt.
  - Gegeben sind drei in  $\pi_1$  liegende nicht-kollineare Punkte  $A, B, C$  und eine Ebene  $\varepsilon$  in allgemeiner (nicht-projizierender) Lage. Gesucht ist diejenige Kugel  $\kappa$ , welche die Punkte  $A, B, C$  als Randpunkte besitzt und die Ebene  $\varepsilon$  berührt.
- Hinweis: Man verwende den Potenzbegriff eines Punktes bezüglich eines Kreises und einer Kugel.

6. Gegeben sind zwei im ersten Quadranten (über  $\pi_1$  und vor  $\pi_2$ ) liegende Punkte  $A$  und  $B$ . Gesucht ist jene Kugel  $\kappa$ , die die Punkte  $A$  und  $B$  als Randpunkte besitzt und die Bildebenen  $\pi_1$  und  $\pi_2$  berührt.

Bemerkung: Man beachte den unter Aufgabe 5 gegebenen Hinweis.

7. Gegeben ist eine im ersten Quadranten liegende Kugel  $\kappa$ , die die Bildebenen  $\pi_1$  und  $\pi_2$  berührt, und eine zweitprojizierende Ebene  $\varepsilon$ , die  $\kappa$  schneidet. Gesucht ist der Grundriß der Schnittkurve von  $\kappa$  mit  $\varepsilon$ .
8. Gegeben sind eine Gerade  $g$  allgemeiner Lage und ein Punkt  $M \notin g$ . Gesucht sind die Normalrisse jener Kugel  $\kappa$ , die  $M$  als Mittelpunkt und  $g$  als Tangente besitzt.

Anleitung: Man lege durch  $M$  eine Hilfslinie  $\gamma \perp g$  und bringe diese mit  $g$  zum Schnitt. Der Schnittpunkt  $T = P(\gamma g)$  ist der Berührungspunkt der gesuchten Kugel mit  $g$ . Die Länge der Strecke  $MT$  ist gleich dem Radius der gesuchten Kugel.

## Kegelschnitte

### Kontrollfragen

1. Wie lassen sich Ellipse, Parabel und Hyperbel als Schlagschattengrenzen einer Kugel bei Zentralbeleuchtung erklären?
2. Wie lassen sich Ellipse, Parabel und Hyperbel unter Einbeziehung ihrer Brennpunkte rein planimetrisch definieren?
3. Mittels welchen gemeinsamen Begriffes für Ellipse, Parabel und Hyperbel kann eine zusammenfassende planimetrische Definition der Kegelschnitte gegeben werden?
4. Durch welche geometrische Besonderheit zeichnen sich die Brennpunkte bei Ellipse, Parabel und Hyperbel aus?
5. Durch Drehung einer Parabel um ihre Achse entsteht eine Drehfläche, die man als Drehparaboloid bezeichnet. Welche physikalische Bedeutung hat der Brennpunkt der Parabel für diese Drehfläche? Wo finden sich Anwendungen dieser Fokaleigenschaft in der Nachrichtentechnik, Astrophysik, Heiztechnik und Optik?
6. Wie kann man eine Parabel als Hüllgebilde einer einparametrischen Geradenschar erzeugen?
7. Wodurch ist die Bezeichnung „Wurfparabel“ für die Flugbahn eines schräg nach oben geworfenen Gegenstandes (z. B. eines Steines) gerechtfertigt?
8. Was versteht man unter der „Gärtnerkonstruktion“ einer Ellipse?
9. Was versteht man in der Kinematik unter einer Ellipsenbewegung?

10. Wie konstruiert man an eine Ellipse von einem außerhalb dieses Kegelschnittes gelegenen Punkt  $P$  die Tangenten? Man diskutiere die Konstruktionsmöglichkeiten mittels Leitkreis und perspektiver Affinität.
11. Wie lassen sich Interferenzerscheinungen an Transversalwellen z. B. auf der Wasseroberfläche mit Hyperbeln in Zusammenhang bringen?
12. Was versteht man unter einem Paar konjugierter Durchmesser bei Ellipse und Hyperbel?
13. Für welche kosmischen Bewegungsabläufe sind Kegelschnitte von fundamentaler Bedeutung?

### Aufgaben

1. Gegeben sind die Brennpunkte  $F_1$  und  $F_2$  eines Mittelpunktskegelschnittes und eine Gerade  $g$ .
  - a)  $F_1$  und  $F_2$  liegen in der gleichen Halbebene bezüglich  $g$ . Man bestimme Haupt- und Nebenachse jener Ellipse, die  $F_1$  und  $F_2$  als Brennpunkte und  $g$  als Tangente besitzt. Ferner konstruiere man den Berührungspunkt von  $g$  mit der Ellipse.
  - b)  $F_1$  und  $F_2$  werden von  $g$  getrennt. Man bestimme die Scheitelpunkte und Asymptoten jener Hyperbel, die  $F_1$  und  $F_2$  als Brennpunkte und  $g$  als Tangente besitzt. Ferner konstruiere man den Berührungspunkt von  $g$  mit der Hyperbel.

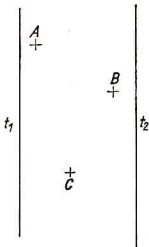


Abb. 5.16

2. Gegeben sind zwei zueinander parallele Geraden  $t_1$  und  $t_2$  sowie drei nicht-kollineare Punkte  $A, B, C$ , die zwischen  $t_1$  und  $t_2$  liegen (Abb. 5.16). Gesucht ist eine Ellipse durch die Punkte  $A, B, C$ , welche  $t_1$  und  $t_2$  als Tangenten besitzt.

Hinweis: Man verwende Überlegungen analog zu Aufgabe 4 in MfL Bd. 8, 3.8., und diskutiere die Anzahl der Lösungen. Mittels der räumlichen Interpretation der Aufgabenstellung als Schnitt von Ebene und Drehzylinder konstruiere man auch die Berührungspunkte  $T_1$  und  $T_2$  von  $t_1$  bzw.  $t_2$  mit der Ellipse.

3. Von einer Parabel sind zwei Tangenten  $t_1$  und  $t_2$  samt den Berührungspunkten  $T_1$  bzw.  $T_2$  gegeben (Abb. 5.17). Man konstruiere unter Einbeziehung räumlicher Überlegungen (ebener Schnitt eines Drehkegels) die gesuchte Parabel.

4. Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck. Auf den beiden Schenkeln des Dreiecks ist je ein innerer Punkt  $T_1$  bzw.  $T_2$  gegeben (Abb. 5.18). Gesucht ist jene Ellipse, die das vorgegebene Dreieck als Tangentendreieck besitzt und die Schenkel des Dreiecks in  $T_1$  bzw.  $T_2$  berührt.

Hinweis: Man interpretiere das gleichschenklige Dreieck als Aufriß eines Drehkegels, der mit einer Ebene in geeigneter Weise zu schneiden ist. Bei Ausführung der Konstruktion ist auch der Grundriß des Drehkegels mit heranzuziehen.

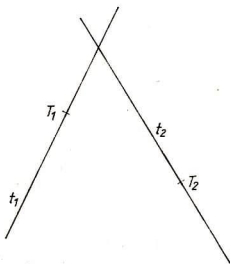


Abb. 5.17

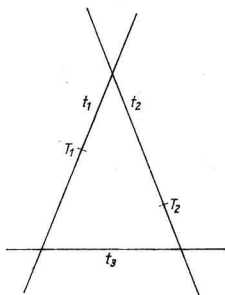


Abb. 5.18

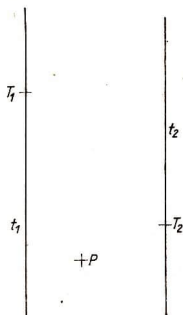


Abb. 5.19

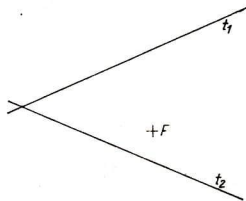


Abb. 5.20

5. Von einer Ellipse sind zwei zueinander parallele Tangenten  $t_1$  und  $t_2$  samt den Berührungspunkten  $T_1$  bzw.  $T_2$  sowie ein zwischen  $t_1$  und  $t_2$  liegender Ellipsenpunkt  $P$  gegeben (Abb. 5.19). Man konstruiere die gesuchte Ellipse unter Verwendung räumlicher Überlegungen analog zu Aufgabe 4 in MfL Bd. 8, 3.8., oder mittels perspektiver Affinität.

6. Gegeben sind der Brennpunkt  $F$  einer Parabel und zwei Parabeltangente  $t_1$  und  $t_2$  (Abb. 5.20). Man bestimme die Achse dieser Parabel und ihre Berührungspunkte mit den beiden Tangenten.
7. Gegeben sind ein Kreis  $k$  und ein außerhalb  $k$  liegender Punkt  $P$  (Abb. 5.21). Gesucht ist eine Parabel  $p$ , die  $k$  als Scheitelkrümmungskreis und  $P$  als einen ihrer Punkte besitzt. Insbesondere bestimme man Brennpunkt und Scheitelpunkt dieser Parabel.

Hinweis: Die Distanz Brennpunkt–Scheitelpunkt entspricht dem halben Radius des Scheitelkrümmungskreises der Parabel.

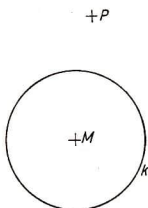


Abb. 5.21

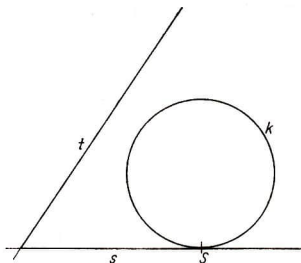


Abb. 5.22

8. Gegeben sind ein Kreis  $k$ , ein Punkt  $S$  auf  $k$  und eine Gerade  $t$ .  $S$  sei ein Scheitelpunkt und  $k$  der zugehörige Scheitelkrümmungskreis der zu bestimmenden Ellipse. Ferner sei  $t$  eine Tangente dieser Ellipse. Durch Anwendung einer zentrischen Kollineation mit  $S$  als Kollineationszentrum und der Tangente  $s$  von  $k$  in  $S$  als Kollineationsachse führe man den Kreis  $k$  in die gesuchte Ellipse über. Insbesondere sind die drei weiteren Scheitelpunkte der Ellipse konstruktiv zu bestimmen (Abb. 5.22).
9. Zu einem von dem Punkt  $O$  ausstrahlenden orthogonalen normierten Rechtsdreiein  $O(e_1e_2e_3)$  kennt man die Normalprojektionen von  $e_1$  und  $e_2$  auf eine horizontale Ebene.  $O$  sei der höchste Punkt dieses Rechtsdreieins (Abb. 5.23). Man konstruiere die Normalprojektion von  $e_3$  auf die Ebene.

Hinweis: Man verwende die Rytzsche Achsenkonstruktion.

10. Gegeben sind eine auf  $\pi_1$  liegende Kugel  $\kappa$  und ein Pfeil  $I$  durch Grund- und Aufriß. Durch  $I$  ist die Richtung eines parallel einfallenden Strahlenbündels vorgegeben. Gesucht sind die Eigenschattengrenzen der Kugel und der Schlagschatten von  $\kappa$  auf  $\pi_1$ .



11. Gegeben sind eine Lichtquelle  $S$  mit kegelförmiger Lichtausbreitung und ein auf  $\pi_1$  liegendes Prisma mit zweitprojizierenden Seitenflächen (Abb. 5.24). Man konstruiere die Begrenzungslinie des von der Lichtquelle  $S$  auf  $\pi_1$  und den Seiten des Prismas erzeugten Lichtfleckes.

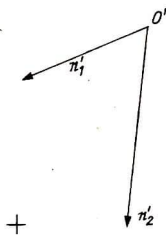


Abb. 5.23

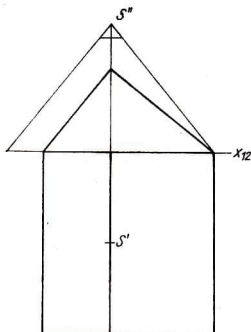


Abb. 5.24

## Durchdringungen von gekrümmten Flächen

### Kontrollfragen

1. Eine Drehkegelfläche werde von einer durch die Spitze dieses Kegels gehende Ebene geschnitten. Wie sieht das Schnittgebilde von Kegelfläche und Ebene aus? (Falldiskussion)
2. Eine Zylinderfläche werde von einer Ebene geschnitten, die parallel zu einer Erzeugenden dieser Fläche liegt. Wie sieht das Schnittgebilde von Ebene und Zylinderfläche aus? (Falldiskussion)
3. Wie ist die Schar von Hilfeebenen zweckmäßig zu legen, wenn die Schnittkurve von zwei Zylinderflächen konstruiert werden soll?
4. Wie ist die Schar von Hilfeebenen zweckmäßig zu legen, wenn die Schnittkurve einer Zylinderfläche mit einer Kegelfläche konstruiert werden soll?
5. Wie ist die Schar von Hilfeebenen zweckmäßig zu legen, wenn die Schnittkurve zweier Kegelflächen konstruiert werden soll?
6. Was versteht man unter dem Stoß zweier sich durchdringender Körper?
7. Der Abstand der Mittelpunkte zweier Kugelflächen beträgt 14 cm. Die Längen der Radien sind 13 cm für die erste und 15 cm für die zweite Kugelfläche. Man beschreibe Art und Größe der Schnittkurve beider Flächen.

## Aufgaben

1. Gegeben sind zwei Drehzylinderflächen  $\Phi$  und  $\Psi$ . Die Zylinderfläche  $\Phi$  ist erstprojizierend, die Zylinderfläche  $\Psi$  ist zweitprojizierend. Die beiden Flächen schneiden sich nach einer Ausreißung. Die Schnittkurve ist unikursal, d. h., sie läßt sich in einem Zuge durchlaufen (Abb. 5.25). Man konstruiere das Schrägbild der Schnittkurve vom Aufriß ausgehend mit dem Verzerrungsverhältnis  $\lambda = 1$  und dem Verzerrungswinkel  $\varphi = 60^\circ$ .

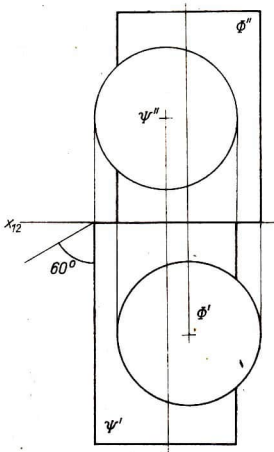


Abb. 5.25

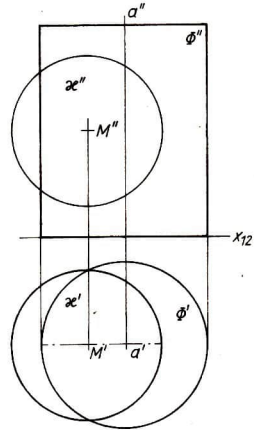


Abb. 5.26

2. Gegeben sind eine auf  $\pi_1$  lotrecht stehende Drehzylinderfläche  $\Phi$  und eine Kugel­fläche  $\kappa$ . Die Zylinderachse und der Kugelmittelpunkt spannen eine zu  $\pi_2$  parallele Ebene auf (Abb. 5.26). Man konstruiere mittels einer Schar von Ebenen parallel zu  $\pi_2$  den Aufriß der Schnittkurve von Kugel- und Zylinderfläche.

**Bemerkung:** Die entstehende Raumkurve ist nach dem Satz von BEZOUT von vierter Ordnung. Wegen der bestehenden Symmetrie erscheint sie im Aufriß doppelt überdeckt. Ihr Bild ist daher eine ebene Kurve zweiter Ordnung. Man weise durch Rechnung nach, daß die Bildkurve ein Parabelabschnitt ist.

3. Für die folgende Aufgabenstellung wird von Paaren von Drehzylinderflächen ausgegangen. Der erste Zylinder  $\Phi$  ist erstprojizierend, und die Achse des zweiten Zylinders  $\Psi$  liegt parallel zur Rißachse. Die Schnittkurve der beiden Flächen ist

mittels einer Schar von Hilfsebenen parallel zur Aufrißtafel punktweise zu konstruieren. Innerhalb eines gewissen Intervalls liefert jede Hilfsebene der Schar vier Punkte der gesuchten Schnittkurve. Diese ist zunächst ohne Beachtung der Sichtbarkeit zu konstruieren. Die Sichtbarkeit ist anschließend noch herauszuarbeiten.

a) Die Durchdringung der Flächen bildet eine Ausreißung (Abb. 5.27). Im Aufriß ergibt sich eine Kurve vierter Ordnung. Die Raumkurve selbst ist unikursal, singularitätenfrei und von vierter Ordnung.

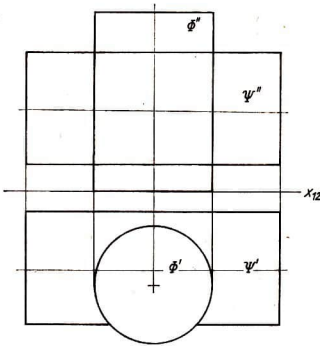


Abb. 5.27

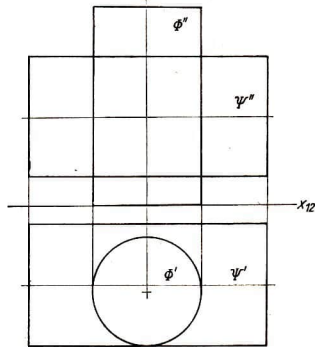


Abb. 5.28

b) Die Durchdringung der Flächen ist ein Grenzfall von Ausreißung und Durchbohrung (Abb. 5.28). Die Raumkurve besitzt einen Knotenpunkt. Sie ist rational von vierter Ordnung.

c) Die Durchdringung der Flächen besteht in einer Durchbohrung (Abb. 5.29). Die Schnittkurve ist eine aus zwei Ästen bestehende Raumkurve vierter Ordnung.

d) Die Durchdringung der beiden Flächen besteht in einer Durchbohrung mit der zusätzlichen Besonderheit, daß sich die Zylinderachsen schneiden (Abb. 5.30). Wegen der bestehenden Symmetrie erscheint die Raumkurve im Aufriß doppelt überdeckt. Ihr Bild ist daher ein Kegelschnitt. Man zeige durch Rechnung, daß der Aufriß den Ausschnitt einer Hyperbel liefert.

e) Die Achsen der sich durchdringenden Flächen schneiden sich. Ferner besitzen die Drehzylinder den gleichen Radius (Abb. 5.31). Die entstehende Schnittkurve hat zwei Knotenpunkte. Daher zerfällt die Raumkurve vierter Ordnung in zwei Kurven zweiter Ordnung. Diese sind Ellipsen. Das Schnittgebilde ist vom Aufriß ausgehend in ein Schrägbild mit dem Verzerrungsverhältnis  $\lambda = 1$  und dem Verzerrungswinkel  $\varphi = 60^\circ$  zu überführen.

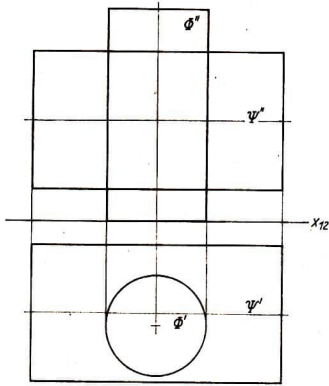


Abb. 5.29

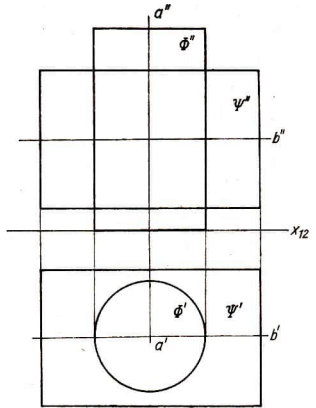


Abb. 5.30

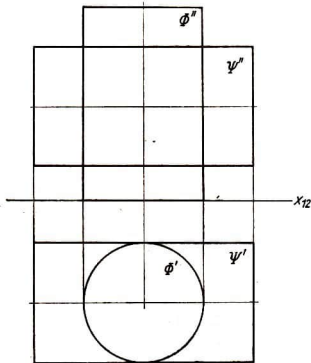


Abb. 5.31

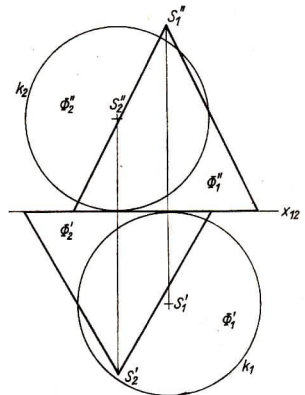


Abb. 5.32

4. Gegeben sind der Drehkegel  $\Phi_1$  mit dem in  $\pi_1$  liegenden Basiskreis  $k_1$  und der Drehkegel  $\Phi_2$  mit dem in  $\pi_2$  liegenden Basiskreis  $k_2$ . Die Spitzen  $S_1$  von  $\Phi_1$  und  $S_2$  von  $\Phi_2$  verbinde man durch eine Gerade  $g$ . Durch  $g$  lege man eine Schar von Hilfsebenen, von denen jede die Kegelflächen  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  innerhalb eines gewissen Intervalles nach je zwei Erzeugenden schneidet (Abb. 5.32). Die sich hierbei ergebenden Punkte sind Punkte der Schnittkurve der Flächen  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ . Unter Einbeziehung der Grenzlagen, in denen die Hilfsebenen einen der Kegel berühren, verschaffe man sich eine hinreichende Zahl von Punkten, die das Zeichnen der Schnittkurve ermöglichen. Der Verschnitt der beiden Flächen ist unter Einbeziehung der Sichtbarkeit darzustellen.

**Bemerkung:** Das hier skizzierte Verfahren bezeichnet man als Pendelebenenverfahren.

## VI. Numerische Mathematik und Rechentechnik

### Arbeitsstufen der Problemanalyse

#### Kontrollfragen

1. Man charakterisiere die Modellmethode und erläutere diese an Beispielen.
2. Es ist der Unterschied zwischen einer Menge von Dingen und einem System zu verdeutlichen.
3. Man erläutere an Beispielen die Aufgabe der Analyse, Synthese und Erkennung von Systemen.
4. Welche Kriterien muß ein allgemeines Verfahren erfüllen, um ein Algorithmus genannt zu werden?
5. In welchem Sinne ist ein Algorithmus ein Alphabetoperator? Man erläutere diesen Begriff an Beispielen.
6. Man stelle konkrete Algorithmen durch Flußdiagramme dar.
7. Es ist ein Flußdiagramm graphentheoretisch zu beschreiben.
8. Man charakterisiere die Arbeitsstufen der Problemanalyse.

#### Aufgaben

1. Abb. 6.1 zeigt das als Wheatstonesche Brücke bekannte elektrische Netzwerk mit der Stromquelle  $E$  und den Widerständen  $a, b, c, d, e$ . Die Stromquelle habe die elektromotorische Kraft  $U_0$ . Der Widerstand der von  $A$  über die Stromquelle  $E$  nach  $C$  führenden Leitung sei  $f$ . Zu berechnen ist die Stromstärke  $I_e$  des über den Zweig  $BD$  fließenden Stromes.

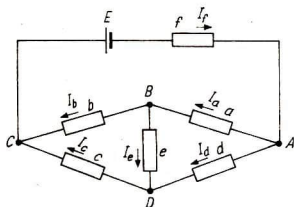


Abb. 6.1

**Lösung:** Grundlage für die *mathematische Modellierung* sind die *Kirchhoffschen Sätze der Stromverzweigung*. Mit den in Abb. 6.1 verwendeten Bezeichnungen ist der Spannungsabfall in den die Widerstände  $a, b, c$  usw. enthaltenden Zweigen nach dem Ohmschen Gesetz

$U_a = aI_a$ ,  $U_b = bI_b$ ,  $U_c = cI_c$  usw. Mit Hilfe des Knotenpunkt- und des Maschensatzes gewinnt man das folgende lineare Gleichungssystem für die Stromstärken:

Knotenpunktsatz bei

$$\left. \begin{array}{l} A \quad -I_a \quad \quad \quad -I_d \quad \quad + I_f = 0, \\ B \quad \quad I_a - I_b \quad \quad \quad -I_e \quad \quad = 0, \\ C \quad \quad \quad I_b + I_c \quad \quad \quad -I_f = 0, \\ \text{Maschensatz für} \\ ABDA \quad aI_a \quad \quad \quad -dI_d + eI_e \quad = 0, \\ BCDB \quad \quad \quad bI_b - cI_c \quad \quad -eI_e \quad = 0, \\ ABCEA \quad aI_a + bI_b \quad \quad \quad + fI_f = U_0. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Für die Koeffizientendeterminante findet man leicht den Wert

$$\Delta = ef(a + b + c + d) + e(a + b)(c + d) + f(a + d)(b + c) + ad(b + c) + bc(a + d). \quad (2)$$

$\Delta$  verschwindet nicht, wenn wenigstens drei der Widerstände  $a, b, c, d$  ungleich Null sind. Nach der Cramerschen Regel ist dann

$$I_e = \frac{U_0(bd - ac)}{\Delta}. \quad (3)$$

2. In dem Netzwerk der Aufgabe 1 sei  $e = f = 0$ , und die Widerstände  $c, d$  werden als veränderlich angenommen. Dann kann dieses als ein System  $\mathfrak{S}$  interpretiert werden, das von den Parametern  $a, b$  abhängt und auf die einstellbaren Eingangsgrößen  $c, d$  mit dem über die Brücke  $BD$  fließenden Strom der Stärke  $I_e$  als Output reagiert (Abb. 6.2).

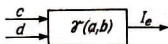


Abb. 6.2

Die *Analyse* von  $\mathfrak{S}$  hat die Bestimmung von  $I_e$  als Funktion von  $c, d$  und der Systemparameter  $a, b$  zum Ziel. Bei der *Syntheseaufgabe* wird  $I_e$  für eine gewisse Menge  $M$  von Werten der Eingangsgrößen vorgegeben, und die Parameter  $a, b$  von  $\mathfrak{S}$  sind so zu bestimmen, daß dieses Input-Output-Verhalten durch das System realisiert wird.

Man analysiere das System  $\mathfrak{S}$  und löse die Syntheseaufgabe für den Fall, daß  $c = d$  und die Brücke  $BD$  stromlos ist.

Lösung: Auf Grund von (3) und (2) ist

$$I_e = \frac{U_0(bd - ac)}{ad(b + c) + bc(a + d)}$$

Für  $c = d$  folgt daraus

$$I_e = \frac{U_0(b-a)}{a(b+c) + b(a+c)},$$

so daß  $I_e = 0$  genau dann gilt, wenn  $a = b$  ist.

3. Das Netzwerk der Aufgabe 1 sei mit einem festen und bekannten Widerstand  $b$  gegeben, so daß dieses im Hinblick auf Abb. 6.2 ein nur noch von dem Parameter  $a$  abhängendes System  $\mathfrak{S}(a)$  darstellt.

Eine Aufgabe der *Systemerkennung* liegt vor, wenn  $a$  für ein konkretes System aus Beobachtungen des Input-Output-Verhaltens bestimmt werden soll. Man interpretiere in diesem Sinne die bekannte Methode der Widerstandsmessung mit der Wheatstoneschen Brückenschaltung.

Lösung: Abb. 6.3 zeigt die Versuchsanordnung, wobei man sich die Widerstände  $c, d$  durch Abschnitte eines zwischen  $A$  und  $C$  gespannten homogenen Manganindrahtes realisiert denke, an dem ein Kontakt  $D$  verschoben werden kann, der über ein Galvanometer mit  $B$  verbunden ist. Zeigt dieses in einer bestimmten Lage von  $D$  Stromlosigkeit der Brücke an, so folgt aus (3)

$$a = b \cdot \frac{d}{c}.$$

Bekanntlich ist aber das Verhältnis der Widerstandswerte  $d, c$  gleich dem der entsprechenden Längen  $l_d$  und  $l_c$  der Abschnitte des Drahtes bei der Nullanzeige des Instrumentes, so daß

$$a = b \cdot \frac{l_d}{l_c}$$

gilt.

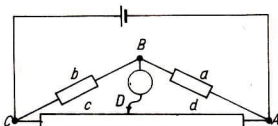


Abb. 6.3

4. Bei der Aufstellung des Systems (1) war auf die lineare Unabhängigkeit der mit Hilfe der Kirchhoffschen Sätze gebildeten Gleichungen zu achten. Beispielsweise hätte die Anwendung des Knotenpunktsatzes auf  $D$  die Beziehung

$$-I_c + I_d + I_e = 0$$

geliefert, die man aus den Gleichungen bei  $A, B, C$  linear kombinieren kann.

In der Elektrotechnik benutzt man das folgende Verfahren, welches gegenüber dem Vorgehen in Aufgabe 1 die Berechnung elektrischer Netzwerke wesentlich vereinfacht und mit Gewißheit zu linear unabhängigen Gleichungen führt.

1. Schritt: Man wählt eine Masche zur Anwendung des Kirchhoffschen Satzes aus und unterbricht diese an einer beliebigen Stelle. In dieser Weise fährt man solange fort, wie noch geschlossene Maschen in dem Netzwerk vorhanden sind.



2. Schritt: In der  $k$ -ten der so ausgezeichneten Maschen führt man einen Maschenumlaufstrom  $y_k$  ein. Hiernach läßt sich jeder Zweigstrom additiv aus Umlaufströmen zusammensetzen.

3. Schritt: Man wendet den Kirchhoffschen Satz auf jede der ausgezeichneten Maschen an, indem der Spannungsabfall in jedem Zweig mit Hilfe der Umlaufströme ausgedrückt wird. Auf diese Weise ergibt sich für die Maschenumlaufströme ein lineares Gleichungssystem, welches ebenso viele Gleichungen wie Unbekannte enthält und dessen Koeffizientendeterminante von Null verschieden ist.

4. Schritt: Nach Bestimmung der Umlaufströme ermittelt man aus diesen eindeutig die Zweigströme.

a) Man löse Aufgabe 1 nach dem angegebenen Verfahren.

b) Man untersuche, ob dieses Verfahren einen Algorithmus darstellt.

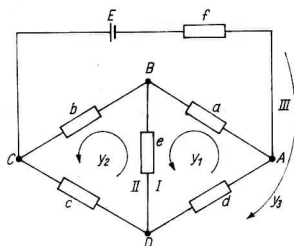


Abb. 6.4

Lösung:

a) 1. Schritt: Nach dem Verfahren lassen sich etwa die in Abb. 6.4 mit I, II, III markierten Maschen auszeichnen, deren letzte die elektromotorische Kraft enthält und im übrigen durch A, D, C, A bestimmt ist.

2. Schritt: In I, II, III werden Maschenumlaufströme  $y_1, y_2, y_3$  mit den durch Pfeile angegebenen Richtungen eingeführt (Abb. 6.4).

3. Schritt: Die Anwendung des Kirchhoffschen Maschensatzes auf I, II, III liefert folgendes lineares Gleichungssystem für die Spannungen  $U_a, U_b, \dots$ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(I)} \quad U_a - U_d + U_e = 0, \\ \text{(II)} \quad U_b - U_c - U_e = 0, \\ \text{(III)} \quad U_c + U_d + U_f = U_0. \end{array} \right\} \quad (4)$$

Zwischen den Zweig- und Maschenumlaufströmen bestehen folgende Beziehungen (vgl. Abb. 6.1):

$$\left. \begin{array}{l} I_a = y_1 \qquad I_b = y_2, \qquad I_f = y_3, \\ I_e = y_1 - y_2, \quad I_c = -y_2 + y_3, \quad I_d = -y_1 + y_3, \end{array} \right\} \quad (5)$$

so daß nach (4)

$$\left. \begin{aligned} (a+d+e)y_1 - ey_2 - dy_3 &= 0, \\ -ey_1 + (b+c+e)y_2 - cy_3 &= 0, \\ -dy_1 - cy_2 + (c+d+f)y_3 &= U_0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ist. Für die Koeffizientendeterminante ergibt sich der Wert (2). Zur Bestimmung von  $y_1$  und  $y_2$  werden die in der Cramerschen Regel auftretenden Zählerdeterminanten  $D_1$  bzw.  $D_2$  berechnet. Man findet

$$D_1 = U_0[ec + d(b+c+e)], \quad D_2 = U_0[ed + c(a+d+e)].$$

4. Schritt: Für  $I_e$  folgt mit  $y_1$  und  $y_2$  gemäß (5) wieder Ausdruck (3).

b) Das oben beschriebene Verfahren bestimmt zu einem Netzwerk, das abstrakt als ein spezieller Graph  $G$  charakterisiert werden kann, ein lineares Gleichungssystem  $L$ . Dieses wollen wir im Sinne der Fußnote 1, MfL Bd. 9, S. 17, als Output zum Input  $G$  auffassen. Solange über die sukzessive Auswahl der Maschen keine Festlegung erfolgt, ist das Verfahren streng genommen kein Algorithmus. — Die eigentlich interessierenden Outputs sind natürlich die Werte der Zweigströme in einem solchen Netzwerk. Die (zu bejahende) Frage, ob diese in algorithmischer Weise von  $L$  ausgehend berechnet werden können, soll hier nicht untersucht werden.

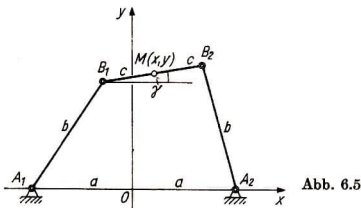


Abb. 6.5

5. Abb. 6.5 veranschaulicht in einem kartesischen Koordinatensystem einen Gelenkmechanismus, der von P. L. ČEBYŠEV in seinen grundlegenden Arbeiten zur Approximationstheorie untersucht wurde. Dieser besteht aus drei drehbar miteinander verbundenen Stäben  $A_1B_1$ ,  $B_1B_2$  und  $A_2B_2$ , deren Längen gemäß Abb. 6.5 gleich  $b$  und  $2c$  sind. Die Drehpunkte  $A_1$ ,  $A_2$  liegen auf der  $x$ -Achse im Abstand  $a$  vom Ursprung.

a) Man bestimme die Bahnkurve des Punktes  $M$  und charakterisiere diese Aufgabe im Sinne einer Systemanalyse.

b) Der Mechanismus ist ein von den Parametern  $a$ ,  $b$ ,  $c$  abhängendes System. Es wird gefordert,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  so zu bestimmen, daß  $M$  bei einer Bewegung über einem gewissen Intervall der  $x$ -Achse möglichst wenig von einer Parallelen zu dieser abweicht (Geradföhrungsmechanismus). Man interpretiere diese Aufgabe im Sinne der Systemsynthese.

Lösung: a) Für die Koordinaten der Punkte  $B_1$ ,  $B_2$  findet man

$$\begin{aligned} x_1 &= x - c \cdot \cos \gamma, & y_1 &= y - c \cdot \sin \gamma, \\ x_2 &= x + c \cdot \cos \gamma, & y_2 &= y + c \cdot \sin \gamma, \end{aligned}$$

wenn  $x, y$  die Koordinaten von  $M$  bedeuten. Die Bindungen von  $B_1, B_2$  drücken sich in den Gleichungen

$$(x_1 + a)^2 + y_1^2 = b^2 \quad \text{und} \quad (x_2 - a)^2 + y_2^2 = b^2$$

aus, so daß

$$(x + a)^2 + y^2 + c^2 - 2c(x + a) \cos \gamma + y \cdot \sin \gamma = b^2,$$

$$(x - a)^2 + y^2 + c^2 + 2c(x - a) \cos \gamma + y \cdot \sin \gamma = b^2$$

ist. Aus diesen linearen Gleichungen für  $\cos \gamma$  und  $\sin \gamma$  folgt

$$\cos \gamma = \frac{1}{2ac} (x^2 + y^2 + a^2 - b^2 + c^2), \quad \sin \gamma = \frac{-x}{2acy} (x^2 + y^2 - a^2 + c^2 - b^2)$$

und damit

$$4a^2c^2y^2 = y^2(x^2 + y^2 + a^2 - b^2 + c^2)^2 + x^2(x^2 + y^2 - a^2 + c^2 - b^2)^2$$

oder — geordnet nach Potenzen von  $x$  —

$$\begin{aligned} x^4 + x^2[y^2 + 2(y^2 - a^2 + c^2 - b^2)] \\ + x^2[(y^2 - a^2 + c^2 - b^2)^2 + 2y^2(y^2 + a^2 - b^2 + c^2)] \\ + y^2(y^2 + a^2 - b^2 + c^2)^2 - 4a^2c^2y^2 = 0. \end{aligned}$$

Wir führen noch die Größen

$$z := x^2 \quad \text{und} \quad r := y^2 - a^2 + c^2 - b^2 \quad (7)$$

ein und erhalten dann

$$z^3 + (2r + y^2)z^2 + (r^2 + 2y^2r + 4y^2a^2)z + y^2r^2 + 4y^2a^2(y^2 - b^2) = 0. \quad (8)$$

Die betrachteten Gelenkmechanismen stellen eine Klasse von Systemen dar, deren jedes durch bestimmte Werte der Parameter  $a, b, c$  charakterisiert wird und entsprechend mit  $\hat{s}(a, b, c)$  bezeichnet sei.  $\hat{s}(a, b, c)$  besitzt einen Freiheitsgrad, was etwa in der Bestimmtheit der Lage des Mechanismus nach Wahl des Winkels  $\gamma$  seinen Ausdruck findet. Damit erweisen sich auch die Koordinaten von  $M$  als Funktionen von  $\gamma$ , und man kann  $\hat{s}(a, b, c)$  als ein System interpretieren, das auf den Input  $\gamma$  mit den Outputs  $x, y$  reagiert.

Die Analyse des Systems besteht in der Bestimmung der Abhängigkeit dieser Größen von  $\gamma$  und den Parametern  $a, b, c$ :

$$x = x(\gamma; a, b, c), \quad y = y(\gamma; a, b, c). \quad (9)$$

Bei fixierten  $a, b, c$  ist (9) bezüglich  $\gamma$  eine Parameterdarstellung der Bahnkurve von  $M$  im Sinne der Differentialgeometrie. Diese wurde bei der Lösung der Aufgabe mit Rücksicht auf eine spätere Anwendung in Form der algebraischen Kurve (8) gegeben.

b) Über einem gewissen Intervall der  $x$ - bzw.  $z$ -Achse soll (8) angenähert mit  $y = y_0 = \text{const}$  erfüllt sein. Die Synthesaufgabe besteht darin, die Parameter  $a, b, c$  so zu bestimmen, daß dieses Verhalten möglichst gut realisiert wird.

Wir werden diese Fragestellung im Rahmen der Aufgaben zur Approximationstheorie präzisieren und eine Methode entwickeln, neben  $a, b, c$  auch die Länge des Intervalls für einen gegebenen Wert  $y_0$  zu berechnen.

6. Man zeige, daß mit dem Euklidischen Algorithmus tatsächlich der größte gemeinsame Teiler zweier positiver ganzer Zahlen bestimmt wird.

- 7.\* Bei der Abarbeitung des Euklidischen Algorithmus für zwei natürliche Zahlen  $x \geq y > 1$  sei in dieser Bezeichnungsweise von MfL Bd. 9, 1.3., ( $r_0 := r$ )

$$x = qy + r_0,$$

$$y = q_1 r_0 + r_1,$$

$$r_0 = q_2 r_1 + r_2,$$

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k,$$

$$r_{k-1} = q_{k+1} r_k, \quad r_k \neq 0,$$

so daß  $l := k + 1$  die Anzahl der Schritte (Zyklen) bis zum Abbruch des Verfahrens bedeutet. Für die Abschätzung dieser Größe, d. h. die Beurteilung des Rechenaufwandes, ist die Theorie der Fibonacci'schen Zahlen  $u_n$  hilfreich. Diese werden rekursiv durch

$$u_1 := 1, \quad u_2 := 1, \quad u_n := u_{n-1} + u_{n-2} \quad (n > 2)$$

definiert.

- a) Man zeige, daß für  $i = 1(1)k$

$$y \geq u_{i+1} r_{i-1} + u_i r_i \quad \text{und} \quad y \geq u_{k+3} \quad (k \geq 1)$$

gilt.

- b) Mit  $\alpha := \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5})$  gilt für die Fibonacci'schen Zahlen die Abschätzung

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \alpha^{n-\frac{1}{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \alpha^{n+\frac{1}{n}}.$$

Man beweise mit deren Hilfe  $l < \frac{3}{2} \log_2 y$ .

8. Es sei  $n > 1$  eine natürliche Zahl. Man formuliere einen Algorithmus zur Bestimmung aller Primzahlen  $p \leq n$  in ihrer natürlichen Reihenfolge.

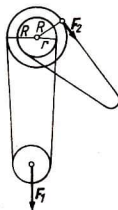


Abb. 6.6

9. a) Die Rollen eines Differentialflaschenzuges haben die Radien  $R$  und  $r$ . Es sei  $F_1$  der Betrag der angehängten Last,  $F_2$  der Betrag der wirkenden Kraft (Abb. 6.6). Man bestimme  $F_2$  im Gleichgewichtszustand.

- b) Der Differentialflaschenzug kann im Gleichgewichtszustand als ein von den Parametern  $R, r$  abhängendes System aufgefaßt werden, welches die Eingangsgröße  $F_1$  in den Output  $F_2$  transformiert. Es sei  $r$  vorgegeben. Man löse folgende Synthesaufgabe: Wie ist  $R$  zu wählen, wenn im Gleichgewichtsfall  $F_2 = \frac{1}{10} F_1$  betragen soll?
- c) Man löse folgende Aufgabe der Systemerkennung: An einem Differentialflaschenzug ergibt  $F_2 = \frac{1}{20} F_1$  Gleichgewicht. Welches Verhältnis  $r : R$  zwischen den Rollenradien  $R, r$  besteht?
10. Abb. 6.7 zeigt einen stabförmigen Träger der Länge  $l$  aus homogenem Material. In den Punkten  $A$  und  $B$  greifen Kräfte mit den Beträgen  $F_A$  und  $F_B$  in der in der Abbildung gezeigten Weise an. Der Betrag des Eigengewichtes des Trägers sei  $F$ . Mit  $l$  als Längeneinheit kann man den Träger im Gleichgewichtszustand als ein von dem Parameter  $F$  abhängendes System auffassen, welches die Eingangsgrößen  $F_A$  und  $F_B$  in die Ausgangsgröße  $x$  transformiert.

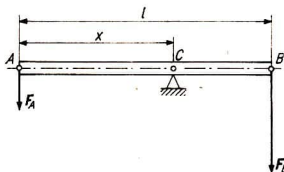


Abb. 6.7

- a) Man ermittle im Sinne einer Systemanalyse für beliebige Inputs  $F_A, F_B$  die Entfernung  $x$  des Punktes  $C$  von  $A$ . Welches Resultat wird für  $x$  erhalten, wenn  $F$  gegenüber  $F_A$  und  $F_B$  vernachlässigbar klein ist?
- b) Man bestimme  $F$  so, daß  $x = \frac{3}{4}$  ist bei gegebenem  $F_B$  und  $F_A = 0$ .
11. Betrachtet wird der schräge Wurf. Bei der mathematischen Modellierung in dem kartesischen Horizontal ( $x$ ), Vertikal ( $y$ )-Koordinatensystem der Abb. 6.8 bleiben der Luftwiderstand und weitere weniger bedeutsame Einflüsse unberücksichtigt. Die Bewegungsrichtung zur Zeit  $t = 0$  sei durch den Winkel ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ) gegeben;  $v_0$  ist die Anfangsgeschwindigkeit.
- a) Zu gegebenem  $\alpha$  und  $v_0$  ist die Wurfweite  $W$  zu bestimmen.

Bemerkung: Bei der Lösung der Aufgabe sollte man von der Zerlegung der Bewegung in eine gleichförmige Bewegung in  $x$ -Richtung und einen Fallanteil ausgehen und beachten, daß diese sich überlagernden Komponenten allein mit Hilfe der Flugzeit koordiniert werden können. Man vergleiche damit den Aufwand, der sich ergibt, wenn zunächst die Bahnkurve als algebraische Gleichung in  $x$  und  $y$  bestimmt wird.

Die Zerlegung von Sachaufgaben in Teilprobleme mit leicht überschaubarer Kopplung („Modularisierung“ mit dünnen „interfaces“) ist von DIJKSTRA als ein methodisches Prinzip hervorgehoben worden.

b) Man berechne  $W$  für  $v_0 = 800 \text{ ms}^{-1}$ ,  $\alpha = 50^\circ$  und diskutiere das Ergebnis hinsichtlich der Versuchsergebnisse, die sich bei diesen Anfangsbedingungen für ein Geschöß vom Kaliber 38 cm und ein Gewehrprojektil ergeben: Schußweiten von 34000 m bzw. 3200 m.

c) Die Erfahrung zeigt, daß bei einem Kugelstoßer die Körpergröße für die Erreichung großer Stoßweiten  $W$  bedeutsam ist. Man verifiziere das durch Berechnung von  $W$ . Dabei soll das Koordinatensystem der Abb. 6.9 zugrunde gelegt werden und die Bemerkung zu a) beachtet werden.

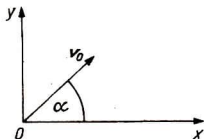


Abb. 6.8

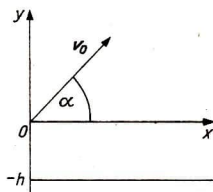


Abb. 6.9

d)\* Bei einem trainierten Sportler können  $h$  und  $v_0$  näherungsweise als konstant angesehen werden. Wie müßte der Winkel  $\alpha$  gewählt werden, wenn  $W$  maximal sein soll? Man zeige, daß dann  $30^\circ < \alpha_0 < 45^\circ$  für den Winkel  $\alpha_0$  gilt. Welchen Winkel  $\alpha_0$  erhält man für  $h = 2,2 \text{ m}$  und  $v_0 = 10 \text{ ms}^{-1}$ ? Welche Stoßweite ergibt sich?

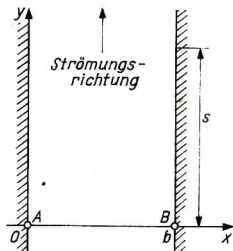


Abb. 6.10

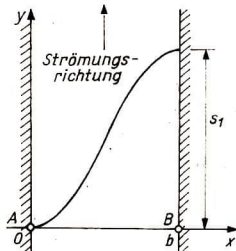


Abb. 6.11

12. Betrachtet wird ein Abschnitt eines hinreichend tiefen Flusses mit parallel verlaufenden Ufern. Vom Punkt A aus startet ein Schiffsmodell mit konstanter Geschwindigkeit  $u$  in Richtung zum gegenüberliegenden Punkt B am anderen Ufer. Infolge der Strömung des Flusses wird das Schiffsmodell gleichzeitig stromabwärts geführt. Die Breite des Flusses sei  $b$  (Abb. 6.10).

a) Wie weit vom Punkt  $B$  entfernt wird das Schiffsmodell stromabwärts das gegenüberliegende Ufer erreichen, wenn angenommen wird, daß die Strömungsgeschwindigkeit in jedem Punkt der Wasseroberfläche konstant vom Betrag  $v_0$  ist?

b) Den realen Verhältnissen besser angepaßt ist die Annahme, daß die Strömungsgeschwindigkeit an den Ufern Null ist, nach der Strommitte hin zunimmt und in der Strommitte den maximalen Wert  $v_{\max}$  erreicht. Das Schiffsmodell wird sich daher auf einer Bahn bewegen, wie sie in Abb. 6.11 dargestellt ist. Um diese angenähert zu ermitteln, machen wir den Ansatz

$$x = ut, \quad y = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0.$$

Man bestimme die Koeffizienten  $a_0, a_1, a_2, a_3$  aus den Randbedingungen an den Ufern und mit Beachtung, daß der Betrag der Fließgeschwindigkeit in der Flußmitte  $v_{\max}$  ist. Wie weit vom Punkt  $B$  entfernt wird das Schiffsmodell stromabwärts das gegenüberliegende Ufer erreichen?

c) Wie wäre in a)  $v_0$  als Betrag der mittleren Geschwindigkeit der in b) betrachteten Strömung zu definieren?

13. Wir betrachten eine Sammellinse als Input-Output-System. Systemparameter sei die Brennweite  $f$ , Eingangsgröße die Gegenstandsweite  $g$ , Ausgangsgröße die Bildweite  $b$ .

a) Als Aufgabe der Systemerkennung kann man den Systemparameter  $f$  nach folgender Methode ermitteln: Die zu vorgegebenen Gegenstandsweiten  $g_i$  gemessenen Bildweiten  $b_i$  werden auf den Achsen eines kartesischen  $g, b$ -Koordinatensystems abgetragen, und entsprechende Punkte werden geradlinig verbunden. Man begründe mit Hilfe der Abbildungsgleichung für Linsen, daß sich die geradlinigen Verbindungen im Punkt  $P(f, f)$  schneiden müssen.

b) Durch geeignete Skalierung der Achsen des  $g, b$ -Koordinatensystems und der Geraden mit der Gleichung  $g = b$  läßt sich ein Rechenblatt (Nomogramm) entwickeln, welches mit Hilfe eines Lineals die graphische Lösung von Analyse-, Synthese- und Erkennungsaufgaben für das betrachtete System ermöglicht. Man entwickle unter Beachtung des Ergebnisses von a) ein solches Nomogramm.

14. Wir betrachten zwei den Raum ausfüllende Substanzen, die durch eine Ebene getrennt sind, als ein System  $\mathfrak{S}(n_1, n_2)$ . Die hervorgehobenen Parameter  $n_1, n_2$  bedeuten die Brechungsindizes der beiden Materialien. Ein unter dem Winkel  $\alpha_1$  aus dem Medium mit dem Brechungsindex  $n_1$  einfallender Lichtstrahl wird beim Austritt in das andere an der Trennebene gebrochen. Der Brechungswinkel  $\alpha_2$  kann als Ausgangsgröße des Systems  $\mathfrak{S}(n_1, n_2)$  zum Input  $\alpha_1$  gedeutet werden.

a) Welches physikalische Gesetz ist Grundlage für die Lösung der Analyse-, Synthese- und Erkennungsaufgabe?

b) Erfolgt der Übergang vom optisch dichteren Medium in das optisch dünnere ( $n_1 > n_2$ ), so kann Totalreflexion eintreten. Man bestimme den sogenannten Grenzwinkel der Totalreflexion und erläutere das Arbeiten mit einem Refraktometer im Sinne einer Systemerkennung.

## Datenverarbeitung in Digitalrechnern

### Kontrollfragen

1. Man vergleiche das Zusammenwirken der Funktionsgruppen eines Digitalrechners bei der Abarbeitung eines Algorithmus mit dem Vorgehen eines Menschen, der dabei neben konventionellen Informationsspeichern (Tafelwerke) einen Taschenrechner benutzt.
2. Man interpretiere die Darstellung von Zahlen in Positionssystemen als Beispiel für die Darstellung von Informationen durch Wörter über einem Alphabet.
3. Die Informationsträger der Rechentechnik sind im allgemeinen bistabil. Was läßt sich daraus für die Speicherung von Zahlinformationen folgern?
4. Was ist Codierung? Wann nennt man einen Code decodierbar?
5. Man gebe Beispiele für codierende Abbildungen an und untersuche diese auf Decodierbarkeit.
6. Man konstruiere zu einigen Codierungen den jeweiligen Codebaum.
7. Man definiere den Begriff der Booleschen Funktion.
8. Was sind normalisierte (normierte) Zahldarstellungen? Man begründe ihre Verwendung mit der Struktur der Zahlenspeicher in einem Rechner und der technischen Realisierung arithmetischer Operationen.

### Aufgaben

1. Man vergleiche die Anzahl der Ziffern bei der Darstellung einer natürlichen Zahl im Dualsystem und einem  $g$ -adischen Positionssystem ( $g \geq 2$ ).

Lösung: Die Anzahl der Ziffern bei der Darstellung von  $n \in \mathbf{N}$  in einem  $g$ -adischen System sei  $k(g, n) + 1$ . Dann ist  $g^{k(g, n)}$  die höchste Potenz von  $g$ , die in  $n$  enthalten ist. Der Größenordnung nach gilt daher  $n \sim g^{k(g, n)}$  und folglich

$$k(g, n) \sim \frac{\ln n}{\ln g}.$$

Für große Werte von  $n$  stellt der Quotient

$$q(g) := \frac{k(2, n)}{k(g, n)} \sim \frac{\ln g}{\ln 2}$$

etwa das Verhältnis der zu betrachtenden Ziffernanzahlen dar. Man findet z. B.  $q(10) \approx 3,3$ .

2. In MfL Bd. 9, 2.4., wird mit Bezug auf Tabelle 2.4 die Codierung der Dezimalziffern im Dreieixzeßcode als ein Problem der Informationsverarbeitung dargestellt. Man entwerfe dazu ein binäres Schaltsystem und stelle dieses mit den allgemeinen Schaltkreissymbolen dar.

Lösung: Es sind vier Boolesche Funktionen auf der Menge der in Tabelle 2.4 angegebenen Wörter des Eins-aus-zehn-Code zu realisieren. Das ist ein spezielles Syntheseproblem für ein binäres Schaltsystem mit zehn Ein- und vier Ausgängen. Die Nummern der Zeilen, bei



denen in der Spalte von  $y_k$  L erscheint, seien  $i_{jk}$  ( $j = 0, 1, 2, 3, 4$ ). Die Alternative

$$x_{i_{0k}} \vee x_{i_{1k}} \vee x_{i_{2k}} \vee x_{i_{3k}} \vee x_{i_{4k}} \quad (*)$$

liefert bei Belegung mit dem Codewort der  $i$ -ten Zeile,  $i = 0(1)9$ , den dort ausgewiesenen  $y_k$ -Binärwert. In der Tat: Ist  $i = i_{jk}$  für ein gewisses  $j = 0(1)4$ , so ist  $x_{i_{jk}}$  mit L belegt, und (\*) nimmt den Wert L an; wenn  $i \neq i_{jk}$  für alle  $j = 0(1)4$  ist, sind sämtliche Variable in (\*) mit 0 belegt. Auf diese Weise ergibt sich die in Tabelle 6.1 dargestellte Zuordnung, und das gewünschte Input-Output-Verhalten wird durch die Schaltung der Abb. 6.12 realisiert.

Tabelle 6.1

| $y_k$ | Alternative (*)                           |
|-------|---|
| $y_0$ | $x_0 \vee x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$ |
| $y_1$ | $x_0 \vee x_5 \vee x_6 \vee x_7 \vee x_8$ |
| $y_2$ | $x_1 \vee x_2 \vee x_5 \vee x_6 \vee x_9$ |
| $y_3$ | $x_1 \vee x_3 \vee x_5 \vee x_7 \vee x_9$ |

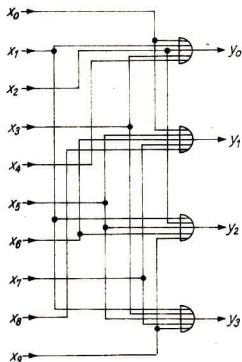


Abb. 6.12

3. Bei der Decodierung ziffernweise binär verschlüsselter Dezimalzahlen sind 0, L-Tetraden als Inputs in zehn Output-Signale zu verwandeln, die zusammen ein Wort des Eins-aus-zehn-Codes ergeben. Man entwerfe für den Dreieckzeßcode eine Decodierungsschaltung.

Lösung: Die Tabelle 2.4 in MfL Bd. 9, 2.4., ist als Darstellung von zehn Schaltfunktionen  $x_k$ ,  $k = 0(1)9$ , in vier Veränderlichen  $y_0, y_1, y_2, y_3$  von rechts nach links zu lesen. Da L in jeder Spalte der Funktionswerte nur einmal erscheint, empfiehlt sich die Benutzung der

kanonischen alternativen Normalform. Dabei mag man sich die Booleschen Funktionen  $x_i$  auch auf nicht in der Tabelle erscheinende 0, L-Tetraden durch 0 fortgesetzt denken. Dann werden diese durch die in Tabelle 6.2 angegebenen Elementarkonjunktionen dargestellt. Die Schaltung der Abb. 6.13 realisiert das gewünschte Input-Output-Verhalten.

Tabelle 6.2

| $x_i$ | Darstellung durch Elementarkonjunktionen                       |
|-------|--|
| $x_0$ | $y_0 \wedge y_1 \wedge \bar{y}_2 \wedge \bar{y}_3$             |
| $x_1$ | $y_0 \wedge \bar{y}_1 \wedge y_2 \wedge y_3$                   |
| $x_2$ | $y_0 \wedge \bar{y}_1 \wedge y_2 \wedge \bar{y}_3$             |
| $x_3$ | $y_0 \wedge \bar{y}_1 \wedge \bar{y}_2 \wedge \bar{y}_3$       |
| $x_4$ | $y_0 \wedge \bar{y}_1 \wedge y_2 \wedge \bar{y}_3$             |
| $x_5$ | $\bar{y}_0 \wedge y_1 \wedge y_2 \wedge y_3$                   |
| $x_6$ | $\bar{y}_0 \wedge y_1 \wedge y_2 \wedge \bar{y}_3$             |
| $x_7$ | $\bar{y}_0 \wedge y_1 \wedge \bar{y}_2 \wedge y_3$             |
| $x_8$ | $\bar{y}_0 \wedge \bar{y}_1 \wedge \bar{y}_2 \wedge \bar{y}_3$ |
| $x_9$ | $\bar{y}_0 \wedge \bar{y}_1 \wedge y_2 \wedge y_3$             |

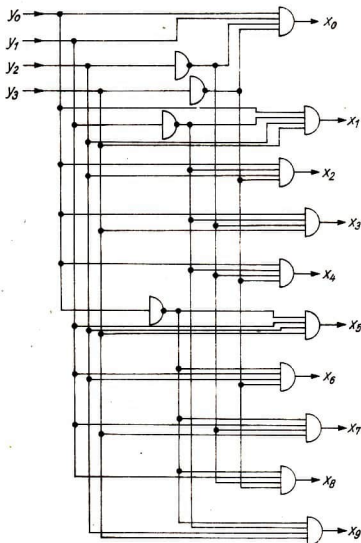


Abb. 6.13

4. In einem  $g$ -adischen Positionssystem ( $g \geq 2$ ) sei  $G$  die Menge der normalisierten Gleitkommazahlen

$$\pm 0, x_1 x_2 \dots x_l \cdot g^{l-1} \quad (*)$$

mit

$$-k \leq j \leq l, \quad k, l \in \mathbf{N}^*,$$

und der Normalisierung (MfL Bd. 9, 2.5.1.)

$$1 \leq x_i \leq g-1, \quad 0 \leq x_i \leq g-1 \quad \text{für } i = 2(1)l.$$

Man untersuche die Verteilung der normalisierten Gleitkommazahlen. Aus Symmetriegründen genügt es, die Menge  $G_+$  der positiven Zahlen von  $G$  zu betrachten.

Speziell sind folgende Fragen zu beantworten:

- Welche ist die größte bzw. kleinste Zahl in  $G_+$ ?
- Wie viele normalisierte Gleitkommazahlen enthält ein Skalenintervall  $\llbracket g^{l-1}, g^l \rrbracket$ ?
- Sind die Zahlen von  $G_+$  in einem Skalenintervall äquidistant verteilt, und wie groß ist gegebenenfalls der Abstand aufeinanderfolgender Elemente?
- Wie viele Elemente enthält  $G_+$ ?

Lösung: a) Die größte Zahl in  $G_+$  ist <sup>2)</sup>

$$\begin{aligned} 0, \underline{g-1} \underline{g-1} \dots \underline{g-1} \cdot g^l &= (g-1) \left( \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} + \dots + \frac{1}{g^l} \right) g^l \\ &= (g-1) g^{l-t} \frac{g^l - 1}{g - 1} = g^{l-t} (g^l - 1). \end{aligned}$$

Die kleinste Zahl in  $G_+$  ist

$$0,100 \dots 0 \cdot g^{-k} = g^{-(k+1)}.$$

b) Im Intervall  $\llbracket g^{l-1}, g^l \rrbracket$  haben alle Elemente von  $G_+$  den Skalenfaktor  $g^l$ ; die kleinste und größte Mantisse ist  $0,100 \dots 0$  bzw.  $0, \underline{g-1} \underline{g-1} \dots \underline{g-1}$  (vgl. a)).

Die Anzahl der Elemente von  $G_+$  im Skalenintervall ist gleich der Anzahl der verschiedenen Belegungen von  $l$  Stellen mit den  $g$  Ziffernsymbolen des Positionssystems, wobei die erste Ziffer nicht 0 sein darf. Auf diese Weise ergeben sich  $g^{l-1}(g-1)$  normalisierte Gleitkommazahlen. Die Mantissen derselben gewinnt man ausgehend von  $0,100 \dots 0$  durch sukzessive Addition von  $0,00 \dots 01$ . Speziell ist

$$0,100 \dots 0 + [g^{l-1}(g-1) - 1] \cdot 0,00 \dots 01 = (g^l - 1) \cdot 0,00 \dots 01,$$

was mit dem Skalenfaktor  $g^l$  die größte Zahl von  $G_+$  im Intervall  $\llbracket g^{l-1}, g^l \rrbracket$  liefert, nämlich

$$(g^l - 1) \cdot 0,00 \dots 01 \cdot g^l = (1,00 \dots 0 - 0,00 \dots 01) \cdot g^l = 0, \underline{g-1} \underline{g-1} \dots \underline{g-1} \cdot g^l.$$

<sup>1)</sup> Als Elemente von  $G$  werden sowohl die Zahlwörter der halblogarithmischen Darstellung (\*) als auch die diesen entsprechenden Zahlen bezeichnet.

<sup>2)</sup> Für  $1 \leq a < g$ ,  $a \in \mathbf{N}$ , bedeutet hier  $\underline{a}$  die  $a$  entsprechende Ziffer in dem  $g$ -adischen Positionssystem.

Das Skalenintervall  $\llbracket g^{j-1}, g^j \llbracket$  enthält also  $g^{t-1}(g - 1)$  Elemente von  $G_+$ , und weiter gilt:  
 e) Die in  $\llbracket g^{j-1}, g^j \llbracket$  liegenden Zahlen von  $G_+$  sind äquidistant mit dem Abstand  $g^{j-t}$  verteilt. Auch  $g^j$  hat von der größten in diesem Intervall gelegenen Zahl aus  $G_+$  diesen Abstand, da

$$g^{j-t}(g^t - 1) + g^{j-t} = g^j$$

ist.

d) Es gibt  $k + l + 1$  Skalenintervalle und damit nach b)

$$(k + l + 1) g^{l-1}(g - 1)$$

Elemente in  $G_+$ . Man vergleiche dazu die Aufgaben 14 und 15.

5. Für die Speicherung der in Aufgabe 4 betrachteten normalisierten Gleitkommazahlen ist natürlich die Einschränkung, daß die erste Ziffer der Mantisse von Null verschieden sein soll, nicht erforderlich. Wird sie aufgehoben, so gewinnt man die  $G$  umfassende Menge  $M$  der Maschinenzahlen. Die Gesamtheit der positiven Elemente von  $M$  werde mit  $M_+$  bezeichnet. Man zeige:

- a)  $M$  ist echte Obermenge von  $G$  und  $0 \in M$ .
- b) Ist  $x \in M$  und  $x_1 \neq 0$ , so ist  $x \in G$ .
- c) Es sei  $x \in M_+$  und  $x = 0, x_1 x_2 \dots x_t \cdot g^j$ ,  $-k \leq j \leq l$ ,  $x_1 = x_2 = \dots = x_s = 0$ ,  $x_{s+1} \neq 0$  für  $0 \leq s < t$ , eine Darstellung von  $x$ . Unter diesen Voraussetzungen gilt  $x \in G_+$  genau dann, wenn  $-k \leq j - s$  ist.
- d) Offensichtlich gehören die in einem Skalenintervall  $\llbracket g^{j-1}, g^j \llbracket$ ,  $-k \leq j \leq l$ , liegenden Elemente von  $M_+$  zu  $G_+$ . Die Zahlen in  $M_+ \setminus G_+$  sind äquidistant mit dem Abstand  $g^{-(k+t)}$  verteilt.

Lösung: a) bis c) ist klar.

d) Es sei  $x \in M_+ \setminus G_+$ ;  $\bar{x}$  bedeute die aus  $x$  als Element von  $M_+$  zu gewinnende normalisierte Zahldarstellung. Ist also

$$x = 0,00 \dots 0 x_{s+1} \dots x_t \cdot g^j, \quad -k \leq j \leq l,$$

so gilt

$$\bar{x} = 0, x_{s+1} \dots x_t \underbrace{00 \dots 0}_s \cdot g^{j-s}.$$

Nach c) folgt aus  $j - s \geq -k$ , daß  $x \in G_+$  ist. Es kann somit  $j - s < -k$  angenommen werden.

Nun sei  $h \geq 0$  so bestimmt, daß  $j - h = -k$ , also  $h = j + k$  ist. Dann gilt  $h < s$  und

$$x = 0,00 \dots 0 x_{s+1} \dots x_t \underbrace{00 \dots 0}_h \cdot g^{j-h} = 0,00 \dots 0 x_{s+1} \dots x_t \underbrace{00 \dots 0}_h \cdot g^{-k}.$$

Damit erweist sich  $x$  als eine positive Zahl, die sich mit dem Exponententeil  $g^{-k}$  und einer Mantisse darstellen läßt, deren erste Ziffer verschwindet. Umgekehrt gehören alle diese Zahlen zu  $M_+ \setminus G_+$ . Aus den Betrachtungen zu Aufgabe 4 c) folgt nun sofort, daß die Elemente von  $M_+ \setminus G_+$  äquidistant mit dem Abstand  $g^{-(k+t)}$  verteilt sind. Die kleinste dieser Zahlen ist

$$0,00 \dots 01 \cdot g^{-k} = g^{-(k+t)}.$$

Die größte dieser Zahlen

$$0, 0g - 1g - 1 \dots g - 1 \cdot g^{-k} = g^{-(k+1)} - g^{-(k+t)}$$

hat von der kleinsten Zahl in  $G_+$  ebenfalls den Abstand  $g^{-(k+t)}$ .

6. Reelle Zahlen sind als Eingabedaten oder Resultate von Rechnungen im allgemeinen keine Maschinenzahlen, müssen vielmehr zum Zwecke ihrer Weiterverarbeitung und Speicherung durch benachbarte Elemente von  $M$  ersetzt werden. Das damit verbundene Approximationsproblem lautet:

Für gegebenes  $x \in \mathbf{R}$  ist  $y^* \in M$  so zu bestimmen, daß

$$|x - y^*| = \min_{y \in M} |x - y| \quad (*)$$

ist.

Zur Lösung von (\*) betrachte man den folgenden Algorithmus: Es sei  $x \neq 0$ .

1. Schritt:  $|x|$  in der Form  $|x| = x' \cdot g^j$  darstellen, wobei  $x' = 0, x_1 x_2 \dots x_t \dots$  und  $x_1 \neq 0$  ist.

2. Schritt: Die  $g$ -adische Darstellung von  $x'' = x' + \frac{1}{2} g^{-t}$  bilden.

3. Schritt: Abschneiden aller Ziffern, die auf die  $t$ -te Ziffer nach dem Komma folgen, führt auf  $x'''$ .

4. Schritt:  $\widetilde{\text{rd}}(x) := \text{sign}(x) \cdot x''' \cdot g^j$ .

Im vierten Schritt wird dem Eingangsdatum  $x$  ein der Rundung im Rechenautomaten nachgebildeter Funktionswert  $\widetilde{\text{rd}}(x)$  zugeordnet.

Man zeige: Ist  $\widetilde{\text{rd}}(x) \in G$ , dann löst  $y^* = \widetilde{\text{rd}}(x)$  das Approximationsproblem (\*).

Lösung: Für  $\widetilde{\text{rd}}(x) \in G$  gilt

$$\begin{aligned} |x - \widetilde{\text{rd}}(x)| &= ||x| - x''g^j| = |x' - x'''| g^j = \left| x' - \frac{1}{2} g^{-t} - x''' \right| g^j \\ &= \left| \underbrace{0,00 \dots 0}_{t \text{ Stellen}} \dots 0 \dots - \frac{1}{2} g^{-t} \right| g^j \leq \left| g^{-t} - \frac{1}{2} g^{-t} \right| g^j = \frac{1}{2} g^{j-t}. \end{aligned}$$

Da  $|x|$  im Intervall  $[[g^{j-1}, g^j]]$  liegt, ist der Abstand aufeinanderfolgender Maschinenzahlen nach Aufgabe 4c), 5 gleich  $g^{j-t}$ . Daraus folgt, daß  $x$  durch eine nächstgelegene Maschinenzahl approximiert wird.

7. Wenn für die nach dem Algorithmus der Aufgabe 6 bestimmte Zahl  $\widetilde{\text{rd}}(x) \notin G$  gilt, bedeutet das für den Exponenten  $j < -k$  oder  $j > l$ . Man spricht dann von *Exponentenunterlauf* bzw. *-überlauf*. Letzterer wird angezeigt und führt zum Abbruch einer Rechnung durch den Automaten. Bei Exponentenunterlauf wird durch die nächstgelegene Zahl aus  $M$  approximiert.

Man zeige, daß dazu der folgende Algorithmus geeignet ist:

Es sei  $|x| = 0, x_1 x_2 \dots x_t \cdot g^j$ ,  $x_1 \neq 0$ ,  $j < -k$ .

0. Schritt:  $h$  so bestimmen, daß  $j + h = -k$ , also  $h = -(k + j)$ .

1. Schritt:  $|x|$  in der Form  $|x| = x' g^{-k}$  darstellen; dabei ist

$$x' = \underbrace{0,00 \dots 0}_{h \text{ Nullen}} x_1 x_2 \dots x_t.$$

2. Schritt:  $x'' = x' + \frac{1}{2}g^{-t}$  in  $g$ -adischer Darstellung bilden.

3. Schritt:  $x'''$  entsteht aus  $x''$  durch Abschneiden aller Ziffern, die auf die  $t$ -te Ziffer nach dem Komma folgen.

4. Schritt:  $\widetilde{\text{rd}}(x) := \text{sign}(x) \cdot x''' \cdot g^{-k}$  löst das in Aufgabe 6 formulierte Approximationsproblem (\*).

Lösung:

$$\begin{aligned} |x - \widetilde{\text{rd}}(x) &= ||x| - x'''g^{-k}| = |x' - x''|g^{-k} = \left| x'' - \frac{1}{2}g^{-t} - x''' \right| g^{-k} \\ &= \left| \underbrace{0,00\dots 0}_{t \text{ Stellen}} - \frac{1}{2}g^{-t} \right| g^{-k} \leq \frac{1}{2}g^{-t}g^{-k} = \frac{1}{2}g^{-(k+t)}. \end{aligned}$$

Auf Grund von Aufgabe 5d) folgt daraus die Behauptung.

8. In den folgenden Aufgaben zur Konvertierung und Rekonvertierung verwende man die Ziffern des Dezimalsystems. Weiter entsprechen 10, 11, ..., 15 die Ziffern A, B, ..., F (MfL Bd. 9, 2.2.).
- Man ermittle für die Dezimalzahl 3387 die Darstellung im Oktalsystem ( $g = 8$ ) und gewinne unmittelbar die Dualdarstellung und aus dieser wiederum unmittelbar die Darstellung im Hexadezimalsystem ( $g = 16$ ).
  - Gegeben ist die Zahl 317B7 in Duodezimaldarstellung ( $g = 12$ ). Gesucht ist die entsprechende Darstellung im Hexadezimalsystem.
  - Man ermittle für den Dezimalbruch  $m = 0,125$  die entsprechende Darstellung im  $g$ -adischen Positionssystem, wenn  $g = 2, 5, 8, 12, 16$  ist.
  - Gegeben sind der periodische Bruch  $0,\overline{C}$  in Hexadezimaldarstellung und der periodische Bruch  $0,\overline{2A}$  in 11adischer Darstellung. Gesucht ist jeweils die entsprechende Darstellung im Dezimalsystem.
9. Eine kanonische alternative Normalform wird wie folgt schrittweise semantisch äquivalent umgeformt<sup>1)</sup>:

$$(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2), \quad (1)$$

$$\text{äqsem } x_1 \wedge (x_2 \vee \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2), \quad (2)$$

$$\text{äqsem } x_1 \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2), \quad (3)$$

$$\text{äqsem } (x_1 \vee \bar{x}_1) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2), \quad (4)$$

$$\text{äqsem } x_1 \vee \bar{x}_2. \quad (5)$$

Man zeichne zu jedem der Ausdrücke (1) bis (5) die zugehörige Reihen-Parallelschaltung. Man stelle jeweils für die Übergänge von einem zum folgenden Ausdruck fest, welche Regel zur Umformung benutzt wurde, und verfolge die schrittweise Vereinfachung auch in den Schaltungen.

<sup>1)</sup> Ausdrücke heißen semantisch äquivalent, wenn die ihnen entsprechenden Booleschen Funktionen wertverlaufsgleich sind (vgl. MfL Bd. 9, 2.4.2.). Als Relationszeichen wird „äqsem“ verwendet.

10. Gegeben sind die in Abb. 6.14 und Abb. 6.15 dargestellten Schaltungen. Für jede Schaltung ist zu prüfen, ob sie vereinfacht werden kann, ohne daß das Outputverhalten geändert wird.

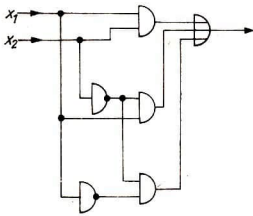


Abb. 6.14

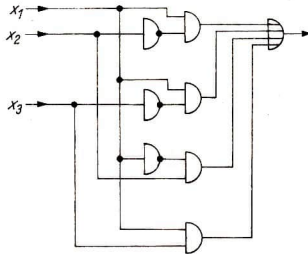


Abb. 6.15

11. Gegeben ist die in Abb. 6.16 dargestellte Reihen-Parallelschaltung von Kontakten. Die Schaltung soll ohne Änderung des Outputs so weit wie möglich vereinfacht werden.

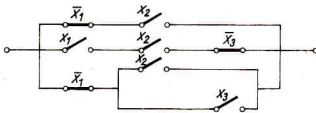


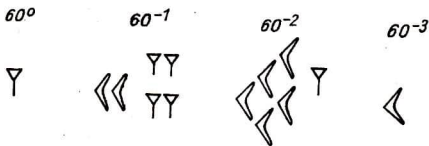
Abb. 6.16

Anleitung: Man forme die der Schaltung entsprechende alternative Normalform nach den Regeln des Aussagenkalküls semantisch äquivalent in den Ausdruck  $(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_2 \vee x_3)$  oder  $\bar{x}_1 \wedge x_2 \vee x_2 \wedge \bar{x}_3$  um.

12. Es soll ein Examensautomat konstruiert werden. Jeder zu Prüfende hat vier Fragen zu beantworten. Für jede Frage sind zwei Antworten vorgegeben, wobei jedoch nur eine der beiden zutrifft. Entsprechend stehen zur Beantwortung jeder Frage zwei Schalter zur Verfügung. Das Testat wird erteilt, wenn für wenigstens drei Fragen die richtige Entscheidung getroffen wurde. Als Signal für den bestandenen Test soll eine Lampe aufleuchten.
- Man ermittle eine Reihen-Parallelschaltung für den Examensautomaten.
  - Unter Verwendung von Brückenschaltungen soll die Reihenparallelschaltung vereinfacht werden.
13. Für das Einschalten der Straßenbeleuchtung einer Stadt soll eine Reihen-Parallelschaltung entwickelt werden. An  $n$  Schaltstellen sind Schalter angebracht. Jeder Schalter wird automatisch betätigt, wenn an der betreffenden Stelle eine

bestimmte Helligkeitsgrenze unterschritten wird. Die Straßenbeleuchtung soll erst dann eingeschaltet werden, wenn mehr als die Hälfte der Schalter betätigt ist. Gesucht ist eine Reihen-Parallelschaltung für  $n = 3$  Schaltstellen.

14. Man ermittle entsprechend Aufgabe 4 für das Intervall  $[[g^{t-1}, g^t[$  die  $(g - 1) g^{t-1}$  äquidistant liegenden Elemente von  $G$ , wenn
  - a)  $g = 10, t = 2, j = 2,$
  - b)  $g = 2, t = 3, j = 4,$
  - c)  $g = 12, t = 2, j = 1$  mit den 10 bzw. 11 entsprechenden Ziffern A bzw. B.
15. Man betrachte die in Aufgabe 4 eingeführte Menge  $G$  von Gleitkommazahlen und veranschauliche deren Verteilung für  $g = 2, t = 3, k = 1, l = 2.$
16. Man zeige, daß das Resultat einer arithmetischen Operation mit Elementen aus  $M$  auch dann nicht zu  $M$  zu gehören braucht, wenn dieses zwischen der größten und kleinsten der darin enthaltenen Zahlen liegt. Welche Konsequenzen ergeben sich daraus für das maschinelle Rechnen? (Zur Charakterisierung der Menge  $M$  vgl. Aufgabe 5.)
17. Man bestimme für
  - a)  $x = e = 2,71828182\dots$  mit  $g = 10, t = 4$  bzw.  $t = 5,$
  - b)  $x = \sqrt{5} = 2,23606797\dots$  mit  $g = 10, t = 7$
 den gerundeten Wert  $y^*$  nach dem Algorithmus der Aufgabe 6.
18. Es sei  $G$  mit  $g = 60, t = 2, k = 3$  und  $l$  bestimmt. Man runde den in MfL Bd. 9, 2.2., angegebenen Näherungswert



für  $\sqrt{2}$  nach dem Algorithmus der Aufgabe 6.

19. Man bestimme eine Schranke für den relativen Fehler bei der Rundung einer Zahl im Bereich der Gleitkommazahlen gemäß Aufgabe 6.
20. Für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum wurde 1941 von R. T. BRIDGE  $c = 299776 \pm 4 \text{ kms}^{-1}$  ermittelt. Man bestimme eine Schranke für den Betrag des relativen Fehlers dieser Messung.
21. Im Tafelwerk für die Klassen 7 bis 12 wird der Wert des Planckschen Wirkungsquantums mit  $h = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ Ws}^2$  angegeben. Die Ziffer 2 dieses Näherungswertes ist gültig. Man bestimme eine Schranke für den Betrag des relativen Fehlers der Messung und vergleiche die Größenordnung des relativen und des absoluten Fehlers in Aufgabe 20 und 21.



## Einführung in die Programmiersprache ALGOL 60

### Kontrollfragen

1. Welche Vorteile bieten problemorientierte Programmiersprachen?
2. Man beschreibe die Struktur eines Maschinenprogramms (Objektprogramms) und die Funktion eines Compilers.
3. Man beschreibe den syntaktischen Aufbau von ALGOL und orientiere sich dabei an den folgenden Fragen: Aus welchen Symbolen setzt sich das ALGOL-Alphabet zusammen? Welche Bedeutung haben die metalinguistischen Begriffe wie  $\langle$ Bezeichnung $\rangle$ ,  $\langle$ Zahl $\rangle$  usw.? Man vergleiche diese mit den grammatikalischen Begriffen einer natürlichen Sprache. In welcher Weise werden korrekte Sprachstrukturen in ALGOL mit Hilfe der Backus'schen Normalform charakterisiert? Welches sind die „Wörter“ der Sprache ALGOL 60?
4. Welche Zeichenreihen des ALGOL-Alphabets fallen unter den Begriff  $\langle$ Bezeichnung $\rangle$ ?
5. Welche Gründe bedingten die Einführung von ALGOL 60-Subsets?
6. Welche Standardfunktionen können in einem ALGOL-Programm verwendet werden?  
Welche Werte werden durch  $\text{entier}(x)$  und  $\text{sign}(x)$  ermittelt?
7. Der Aufbau einer Ergibtanweisung, einer Sprunganweisung und bedingter Anweisungen erster und zweiter Art ist zu beschreiben. Man stelle graphisch den Teil eines Flußdiagramms dar, der durch eine bedingte Anweisung erster Art bzw. zweiter Art erfaßt wird.
8. Es ist der Aufbau einer Laufanweisung mit einem **step-until**-Element in Verbindung mit dem entsprechenden PAP-Muster zu beschreiben.
9. Wie sind Feldvereinbarungen aufgebaut? Welche Schreibweise ist für indizierte Variable zu benutzen?
10. Man beschreibe die Struktur eines ALGOL-Programms.
11. Wie unterscheiden sich Verbundanweisung und Block? Was hat man unter lokalen und globalen Größen in einem Block zu verstehen?
12. Es ist die Blockstruktur der dynamischen Vereinbarung eines Feldes anzugeben.
13. In welcher Weise wird die Unterprogrammtechnik in ALGOL verwirklicht?
14. Man beschreibe den Aufbau von Prozeduren.

### Aufgaben

1. Für die folgenden Zeichenreihen über dem ALGOL-Alphabet ist zu entscheiden, ob a)  $C2H5OH$  Bezeichnung, b)  $31.410-1$  Zahl und c)  $b \times -a$  arithmetischer Ausdruck  
im Sinne der ALGOL-Syntax ist.

Lösung: a) Durch schrittweise Anwendung von Backus-Definitionen schreitet man zu übergeordneten metalinguistischen Begriffen fort. Auf diese Weise ergibt sich etwa

(Buchstabe) 2H5OH  
 (Buchstabe) (Ziffer) H5OH  
 (Buchstabe) (Ziffer) (Buchstabe) 5OH  
 (Buchstabe) (Ziffer) (Buchstabe) (Ziffer) OH  
 (Buchstabe) (Ziffer) (Buchstabe) (Ziffer) (Buchstabe) H  
 (Buchstabe) (Ziffer) (Buchstabe) (Ziffer) (Buchstabe) (Buchstabe)  
 (Bezeichnung) (Ziffer) (Buchstabe) (Ziffer) (Buchstabe) (Buchstabe)  
 (Bezeichnung) (Buchstabe) (Ziffer) (Buchstabe) (Buchstabe)  
 (Bezeichnung) (Ziffer) (Buchstabe) (Buchstabe)  
 (Bezeichnung) (Buchstabe) (Buchstabe)  
 (Bezeichnung) (Buchstabe)

Die durchgeführte Reduktion der Zeichenreihe C2H5OH auf den metalinguistischen Begriff (Bezeichnung) bringt zum Ausdruck, daß diese eine zulässige ALGOL-Bezeichnung ist.

b) Die Reduzierbarkeit auf den metalinguistischen Begriff (Zahl) wird entsprechend a) nachgewiesen.

c)  $b \times -a$  ist genau dann arithmetischer Ausdruck, wenn analog zu a) und b) eine Reduktion auf den metalinguistischen Begriff (arithmetischer Ausdruck) möglich ist. In keinem Fall gelangt man zum Ziel.

Wird statt der vorgegebenen die Zeichenfolge  $b \times (-a)$  betrachtet, so zeigt das Reduktionsschema, daß diese arithmetischer Ausdruck ist.

2. Es ist ein ALGOL-Programm zur Berechnung aller Primzahlen  $p_i$  mit  $3 < p_i < 150$  zu formulieren. Der durch das Programm beschriebene Algorithmus soll so gestaltet sein, daß fortschreitend alle ungeraden natürlichen Zahlen  $n = 5, 7, \dots, 149$  auf Teilbarkeit durch alle ungeraden natürlichen  $k (\geq 3)$  mit  $k^2 < n$  untersucht werden.

Lösung: Ein Programm, welches die gewünschte Berechnung der Primzahlen veranlaßt, ist z. B.

```

begin integer n, k, a;
  for n := 5 step 2 until 149 do
    begin for k := 3 step 2 until sqrt(n) do
      begin a := k × entier(n/k);
        if a = n then goto m
      end;
      Drucke(n);
    m:
  end
end
  
```

3. Die folgende Prozedur DGS berechnet die Summe von Diagonalelementen in einem reellen zweidimensionalen Feld:

```

real procedure DGS( $A, m, n$ );
value  $m, n$ ; array  $A$ ; integer  $m, n$ ;
begin integer  $i$ ; real  $s$ ;
     $s := 0$ ;
    for  $i := m$  step 1 until  $n$  do  $s := s + A[i, i]$ ;
    DGS :=  $s$ 
end

```

Daraus wird eine Prozedur SUM abgeleitet, die sich von DGS darin unterscheidet, daß  $A$  die Bedeutung einer reellen Variablen erhält und die Laufvariable in die Liste der formalen Parameter aufgenommen wird:

```

real procedure SUM( $A, i, m, n$ );
value  $m, n$ ; real  $A$ ; integer  $i, m, n$ ;
begin real  $s$ ;
     $s := 0$ ;
    for  $i := m$  step 1 until  $n$  do  $s := s + A$ ;
    SUM :=  $s$ 
end

```

Mit Hilfe der Prozedur SUM, d. h. durch geeignete Parameteraktualisierung, berechne man

- die Spur einer Matrix, die als **array**  $A[1:k, 1:k]$  gegeben ist,
- die Summe  $S$  der Elemente eines eindimensionalen Feldes **array**  $B[3:10]$ ,
- die Summe  $S$  der geradzahlig indizierten Variablen des Feldes  $B$  von b);
- die  $l$ -te Spaltensumme  $S$  der Matrix  $A$  von a) ( $1 \leq l \leq k$ ),
- die Summe  $S$  der ersten  $n$  natürlichen Zahlen.

Lösung<sup>1)</sup>: a) spur sei die Bezeichnung der zu berechnenden Größe:

spur := SUM( $A[i, i], i, 1, k$ ),

b)  $S :=$  SUM( $B[i], i, 3, 10$ ),      c)  $S :=$  SUM( $B[2 \times i], i, 2, 5$ ),

d)  $S :=$  SUM( $A[i, l], i, 1, k$ ),      e)  $S :=$  SUM( $i, i, 1, n$ ).

Man begründe, warum es für die universelle Nutzbarkeit der Prozedur SUM notwendig ist, die Laufvariable  $i$  in die Liste der formalen Parameter aufzunehmen.

<sup>1)</sup> Beim Aufruf der Prozedur SUM in einer Maschinenimplementation von ALGOL sind die dafür gegebenen Einschränkungen zu beachten.

4. Man betrachte die analog zur Prozedur SUM der Aufgabe 3 gebildete Prozedur

```

real procedure PROD(a,i,m,n);
value m, n; real a; integer i,m,n;
begin real p;
    p := 1;
    for i := m step 1 until n do p := p × a;
    PROD := p
end

```

Mit Hilfe von PROD, d. h. durch geeignete Aktualisierung der formalen Parameter, bestimme man

- a) das Produkt  $P$  der Elemente eines reellwertigen endlichdimensionalen Feldes  $A[k:l]$  zwischen den Indexgrenzen 3 und 11, wobei  $k \leq 3$  und  $11 \leq l$  angenommen sei,  
 b) das Produkt  $P$  der Elemente der zweiten Spalte des array  $Q[1:10,1:10]$  mit ungeradzahligem Zeilenindex,  
 c)  $\binom{n}{m}$ .

Lösung<sup>1)</sup>: a)  $P := \text{PROD}(A[i], i, 3, 11)$ , b)  $P := \text{PROD}(Q[2 \times i + 1, 2], i, 0, 4)$ ,

c)  $k := n - m$ ;  $PI := \text{PROD}((i + k)/i, i, 1, m)$

$k$  und  $PI$  sind als vom Typ **integer** zu vereinbaren;  $P$  bedeutet eine reelle Variable.

5. Welche der folgenden Zeichenreihen sind Bezeichnungen?

**real array** 0—8—15 MP71/1 5a

Welche der folgenden Zeichenreihen sind zulässige Zahldarstellungen?

3.14<sub>10</sub>2.5 27.1828 × 10<sup>-1</sup> 27.1828<sub>10</sub>-1 π 3,14

6. Man entscheide, welche der folgenden Zeichenreihen arithmetischer Ausdruck ist:

$-a \times b$  H<sub>2</sub>O + NaCl 37 2↑-3 2↑(-3) -.314<sub>10</sub>1

7. Man schreibe die folgenden arithmetischen Ausdrücke so in der allgemein üblichen mathematischen Notation, daß die Reihenfolge der Rechenoperationen erkennbar ist:

$a/b \times 0$   $a/b - c$   $a/b/c$   $a/(a - b - c)$   
 $a + b \times c$   $-b \uparrow c$   $a/c \uparrow b$   $a \uparrow b \uparrow c$

- 8.\* Die aktuellen Werte von  $a, b, c$  seien 1, 1, 0. Welche der arithmetischen Ausdrücke in Aufgabe 7 sind dafür definiert, wenn man  $a, b, c$  einmal als vom Typ **integer**, dann als vom Typ **real** annimmt. Gegebenenfalls bestimme man ihren Wert und dessen Typ.

<sup>1)</sup> Beim Aufruf der Prozedur PROD in einer Maschinenimplementation von ALGOL sind die dafür gegebenen Einschränkungen zu beachten.

9. Man drücke die folgenden trigonometrischen Terme in ALGOL-Notation aus:

$$\sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}}, \quad \sqrt{2} \sin(45^\circ + \alpha),$$

$$b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \quad \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta}.$$

10. Man verifiziere, daß die folgende Zeichenreihe logischer Ausdruck ist, und bestimme dessen logischen Wert unter der Annahme, daß  $a, b$  Variable vom Typ **Boolean** mit den aktuellen logischen Werten **false** bzw. **true** sind:

$$(6 \times 4 \div 3 > 6 \times (4 \div 3) \wedge \neg a) \supset (b \supset a)$$

11. Man formuliere eine Anweisung zur Vertauschung der Variablenwerte  $a, b$  bzw.  $b, c$ , je nachdem, ob für die Variablen  $x, y$

$$x < y \quad \text{oder} \quad x \geq y$$

gilt.

12. Die folgenden Programmteile enthalten Ausgabeanweisungen. Man führe ein Protokoll und unterstreiche die Outputgrößen.

a)  $x := -2; y := 5;$

if  $x < 0$  then begin for  $i := 1$  step 1 until 4 do

$y := y + i \times x;$

Drucke ( $y$ )

end;

b)  $i := 1;$

for  $k := 1$  step  $i$  until 10 do

begin  $i := i + k;$

Drucke( $k$ )

end;

13. Die zu einem Programm gehörende Datenfolge sei 4, 3, 7, -3.2, 6, 9. Welche Ausgabe wird durch die Abarbeitung der folgenden Anweisungen veranlaßt?

Lies( $n$ );

$s := 0;$

for  $i := 1$  step 1 until  $n$  do

begin Lies( $x$ );

if  $x < 0$  then goto  $m;$

$s := s + x;$

Drucke ( $s$ );

$m:$

end;

$y := \text{sqrt}(s);$  Drucke( $y$ );

14. In den folgenden Aufgaben ist ein Programmteil gegeben. Es ist jeweils ein entsprechendes Flußbildteil zu skizzieren.

- a)  $m: x := x - 1;$   
     **if**  $x > 0$  **then**  $y := \text{sqrt}(x);$   
     **goto**  $m;$
- b)  $m: x := x - 1;$   
     **if**  $x > 0$  **then begin**  $y := \text{sqrt}(x);$   
                                   **goto**  $m$   
     **end;**
- c)  $A1;$

**if**  $B1$  **then begin if**  $B2$  **then**  $A2$  **end else**  $A3; A4;$

Hinweis:  $A$  steht abkürzend für Anweisung,  $B$  für logischen Ausdruck.

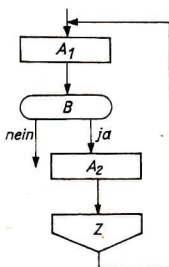


Abb. 6.17

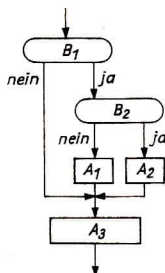


Abb. 6.18

15. Man übertrage die in den Abb. 6.17 bis Abb. 6.20 gezeigten Flußbildteile in eine Folge von ALGOL-Anweisungen.

Hinweis:  $A$  steht abkürzend für Anweisung,  $B$  für logischen Ausdruck.

16. Man interpretiere die folgende bedingte Anweisung, in der  $x$  eine Variable vom Typ *real* bedeutet:

**if**  $x \leq 0 \supset x = 0$  **then else**  $x := -x$

und wandle sie in eine die Standardfunktion *abs* benutzende Ergibtanweisung um.

17. Es ist ein ALGOL-Programmstück zur Berechnung des ganzzahligen Anteils  $g$  und des gebrochenen Anteils  $r$  von  $x$  für  $x = 2.2(-1.5) - 3.8$  zu formulieren.

18. Im Programm zur Berechnung von Polynomwerten nach dem Horner-Schema, MfL Bd. 9, 3.2., ersetze man die Feldvereinbarung  $\text{array } A[0:n]$  durch

$\text{array } A[3 \times (n - 1) \times (n - 2) / 2 : (n - 3) \times (2 - 3 \times n) / 2].$

Man prüfe die syntaktische Richtigkeit des modifizierten Textes und interpretiere diesen für die Eingangsdaten eines Polynoms zweiten bzw. dritten Grades.

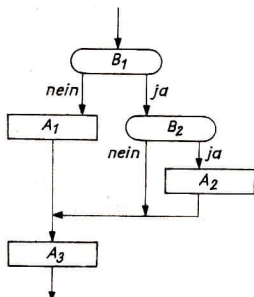


Abb. 6.19

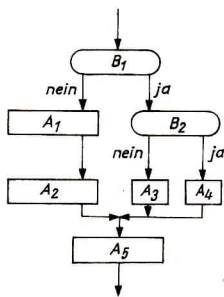


Abb. 6.20

19. Man prüfe, ob der folgende Text ein ALGOL-Programm ist, und interpretiere ihn gegebenenfalls:

```

begin integer i, j; real SU1, SU2;
  SU1 := SU2 :=
  0; for i := 2 step 2 until 50 do
    begin j := i + i; SU1 := SU2 + 1/(j - 1);
    SU2 := SU2 + 1/j end;
end
  
```

20. Zur Berechnung des Skalarproduktes zweier Vektoren  $a, b \in \mathbb{R}^n$  wird folgende Datenstruktur vorgegeben:

$$n, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n,$$

wobei  $a_i, b_i, i = 1(1)n$ , die Koordinaten von  $a, b$  bedeuten. Das folgende Programm zur Berechnung des Skalarproduktes enthält Fehler und soll korrigiert werden:

```

begin integer i; real s; array a, b[1:n];
  Lies(a, b);
  s := 0;
  for i := 1 step 1 until n do
    s := s + a_i × b_i;
  Drucke(s)
end
  
```

21. Die Bogenlänge des Einheitskreises kann als obere Grenze der Umfangswerte eingeschriebener regelmäßiger  $n$ -Ecke bestimmt werden. Bedeutet  $s_n$  deren Seitenlänge, so konvergiert mithin die Folge  $\left(\frac{n}{2} s_n\right)$  monoton wachsend gegen  $\pi$ . Für die  $s_n$  läßt sich auf elementargeometrischem Wege die Formel  $s_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - s_n^2}$  herleiten. Diese lag der Berechnung der Werte  $\frac{n}{2} s_n$  auf einer EDVA R300 zugrunde. Dabei ergab sich Tabelle 6.3. Man begründe, warum die Folge  $(2^{n-1} s_{2n})$  auf dem Rechner nicht konvergiert.

Tabelle 6.3

| $n$   | $\frac{n}{2} s_n$ |
|-------|-------------------|
| 4     | 2.828 427 2       |
| 8     | 3.061 467 4       |
| 16    | 3.121 444 8       |
| 32    | 3.136 546 9       |
| 64    | 3.140 323 6       |
| 128   | 3.141 285 3       |
| 256   | 3.141 611 3       |
| 512   | 3.141 611 3       |
| 1024  | 3.139 524 6       |
| 2048  | 3.139 524 5       |
| 4096  | 3.105 945 8       |
| 8192  | 3.172 748 0       |
| 16384 | 2.590 537 9       |

### Programme ohne Eingabedaten

22. Berechnet werden Elemente von Zahlenfolgen für einen Indexbereich. Die Ergebnisse sollen in Tabellen ausgedruckt werden, die neben dem Wert des Folgeelementes dessen Index ausweisen.

a) Zu berechnen sind die Partialsummen  $s_n$  für  $n = 1, 2, \dots$  bis die Abbruchbedingung  $AB$  erfüllt ist:

$$a_1) \quad s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}, \quad AB: \quad s_n > 0.95;$$

$$a_2) \quad s_n = \sum_{k=1}^n k^2, \quad AB: \quad s_n > 10n^2;$$

$$a_3) \quad s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}, \quad AB: \quad \frac{1}{2^n} < 10^{-5};$$

$$a_4) \quad s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad AB: \quad \frac{1}{n!} < 10^{-6}.$$



b) Die Glieder der Folge  $(x_n)$  mit  $x_n = \frac{1}{n!} (n^3 + 3n^2 + n - 4)^3$  wachsen für zunehmendes  $n$  zunächst, nehmen von einer bestimmten natürlichen Zahl  $k$  an wieder ab. Zu berechnen sind die Werte  $x_n$  für  $n = 1, 2, \dots$ , bis  $x_k < x_{k-1}$  ausfällt.

c) Zu berechnen sind die Glieder der Folgen  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  mit

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

für  $n = 1(1)15$ .

d) Zu berechnen sind die Glieder der Zahlenfolge  $(x_n)$  mit

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

für  $n = 2^k$  und  $k = 0(1)10$ .

e) Zu berechnen sind die Glieder der Zahlenfolge  $(x_n)$  für  $n = 2, 3, \dots$ , bis erstmalig ein Folgenglied größer als  $k$  ausfällt:

$$e_1) x_1 = 1, \quad x_n = x_{n-1} + 2n - 1, \quad k = 500;$$

$$e_2) x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad k = 10^4$$

(Fibonacci'sche Zahlenfolge).

f) In der Formel von STIBLING zur Berechnung von  $n!$  tritt der Term

$$a_n = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2}\right)$$

auf. Für  $n = 1(1)11$  ist  $n!$ ,  $a_n$ ,  $(a_n - n!)$   $\frac{100}{n!}$  zu berechnen und jeweils mit  $n$  auszudrücken.

23. Nach einem altägyptischen Papyrus (Rechenbuch des AHMES, etwa 2000 v. u. Z.) wird der Flächeninhalt des Kreises nach folgender Regel bestimmt:

„Man nehme  $\frac{1}{9}$  des Durchmessers fort. Die anderen acht Neuntel des Durchmessers multipliziere man mit sich selber, womit man den Flächeninhalt ermittelt hat.“

Für die Radien  $r = 1(5)21$  ist der Flächeninhalt des Kreises nach dem von AHMES angegebenen Näherungsverfahren und nach der Formel  $F = r^2\pi$  zu berechnen. Die entsprechenden Werte  $A_r$  und  $F_r$  sind in einer Tabelle auszudrücken.

24. Es bedeute  $x$  das Gradmaß eines Winkels. Für  $x = 1(1)20$  ist der Wert des entsprechenden Bogenmaßes,  $\sin x$  und  $\tan x$  zu berechnen und jeweils mit  $x$  auszudrücken.  $\pi = 3,1415927$

25. Den Flächeninhalt von Kreissegmenten kann man näherungsweise mit Hilfe der Lambertschen Formel berechnen:

$$F = \frac{2}{3} sp.$$

Dabei ist  $s$  die Sehnenlänge und  $p$  die Höhe (Abb. 6.21). Zu berechnen ist für  $r = 1$  und  $x = 10(10)180$  (Gradmaß) a) der Flächeninhalt  $A$  des Kreissegmentes, b) der Näherungswert dafür mit Hilfe der Formel von LAMBERT und c) der prozentuale Fehler. Jeweils mit  $x$  sind die zugehörigen Werte auszudrucken.

26. Die Binomialkoeffizienten sind entsprechend dem Vorgehen beim Aufstellen des Pascalschen Dreiecks für  $n = 0(1)8$  mit Hilfe eines Programms zu berechnen. Neben  $n$  sind jeweils die entsprechenden Koeffizienten auszudrucken.
27. Man formuliere ein ALGOL-Programm, das die Plätze des integer array  $A[1:15]$ , mit 0 beginnend, alternierend mit 0 und 1 belegt.

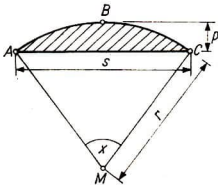


Abb. 6.21

#### Programme mit Eingabedaten

28. Für  $n$  natürliche Zahlen in Dualdarstellung mit maximal sieben wesentlichen Ziffern ist die entsprechende Dezimaldarstellung zu ermitteln und zusammen mit  $n$  in einer Tabelle auszudrucken.  
Eingabedaten:  $n, a_1, a_2, \dots, a_n$ ;  $a_i$  bedeutet die sieben Zeichen umfassende Folge der Dualziffern der  $i$ -ten Zahl, beginnend mit dem niedrigsten Stellenwert und eventuell ergänzt durch Nullen.
29. Man formuliere ein ALGOL-Programm zur Konvertierung von  $n$  natürlichen Zahlen  $a$  mit  $0 \leq a < 500$  in die entsprechende Dualdarstellung. Vgl. den PAP der Abb. 2.7 in MfL Bd. 9. Es ist  $n$  und jeweils mit der Dezimalzahl die entsprechende Dualdarstellung auszudrucken.
30. Gegeben ist die folgende Struktur der Eingabedaten:  $n, a_1, a_2, \dots, a_n$ ; die  $a_i$ ,  $i = 1(1)n$ , bedeuten reelle Zahlen. Es soll das Maximum der  $n$  Zahlen bestimmt werden. Auszudrucken ist  $n$ , das Maximum und der Index  $i$  der Zahl  $a_i$ , bei welcher das Maximum erstmalig erreicht wird, wenn man die Zahlen in der gegebenen Folge durchmustert.
31. Bei den Eingabedaten folgt auf die positive gerade Zahl  $n$  eine entsprechende Anzahl Paare  $(a, b)$  reeller Zahlen.  
a) Es seien  $a, b$  Koeffizienten in der Geradengleichung  $g(x) = ax + b$ . Betrachtet werden zunächst die ersten beiden Paare. Im Programm ist festzustellen, ob die beiden zugehörigen Geraden parallel sind. Trifft dies zu, so werden beide Paare ausgegeben, und es erfolgt ein entsprechender Textdruck. Verlaufen die Geraden

nicht parallel, so sind die Koordinaten des Schnittpunktes zu berechnen. In diesem Fall sind die gegebenen Paare und die Schnittpunktskoordinaten auszugeben. Dann werden die nächsten beiden Paare eingelesen usw.

b) Es seien  $a, b$  Real- bzw. Imaginärteil der komplexen Zahl  $z = a + bi$ . Betrachtet werden zunächst die ersten beiden Paare, die  $z_1$  bzw.  $z_2$  entsprechen. Zu ermitteln sind der Realteil  $p$  und der Imaginärteil  $q$  der komplexen Zahl  $z_1 \cdot z_2$ . Mit den beiden gegebenen Paaren werden  $p$  und  $q$  ausgegeben. Dann werden die nächsten beiden Paare eingelesen usw.

c) Die Aufgabenstellung entspricht der von b), jedoch sind der Realteil  $p$  und der Imaginärteil  $q$  der komplexen Zahl  $z_1/z_2$  zu ermitteln. Vorher ist im Programm zu prüfen, ob  $z_2 \neq 0$  ist. Ist  $z_2 = 0$ , so soll mit der Ausgabe der Paare zusätzlich ein entsprechender Textdruck erfolgen.

32. Bei den Eingabedaten folgt auf die natürliche Zahl  $n$  eine entsprechende Anzahl Tripel  $(a, b, c)$  positiver Zahlen.

a) Es seien  $a, b, c$  die Seitenlängen eines Dreiecks. Für jedes Dreieck ist der Flächeninhalt mit Hilfe der Heronschen Formel

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad 2s = a + b + c,$$

zu berechnen. Es ist  $n$  und mit jedem Tripel der zugehörige Flächeninhalt auszudrucken.

b) Die Zahlen jedes Tripels bedeuten Streckenlängen. Von jedem Tripel ist festzustellen, ob sich aus den drei Strecken ein eigentliches Dreieck konstruieren läßt, ein Ausartungsfall vorliegt bzw. kein Dreieck konstruiert werden kann. Es ist  $n$  und mit jedem Tripel ein entsprechender Text auszudrucken.

c) Die Zahlen jedes Tripels seien Seitenlängen eines Dreiecks. Die erste Zahl jedes Tripels ist das Maximum der drei Zahlen. Von jedem durch ein Zahlentripel bestimmten Dreieck ist festzustellen, ob es sich um ein spitzwinkliges, rechtwinkliges oder stumpfwinkliges Dreieck handelt. Es ist  $n$  und mit jedem Tripel ein entsprechender Text auszudrucken.

33. Es ist ein ALGOL-Programm zur Berechnung der Summe der Elemente a) der Hauptdiagonale, b) der Nebendiagonale, c) oberhalb der Hauptdiagonale einer Matrix vom Typ  $n \times n$  zu formulieren. Vgl. Aufgabe 3.

34. Es ist ein ALGOL-Programm zu formulieren, welches eine Matrix vom Typ  $n \times n$  transponiert.

Hinweis: Das Programm kann so abgefaßt werden, daß das eingelesene Feld a) im Speicher erhalten bleibt oder b) mit der transponierten Matrix überschrieben wird.

35.  $B$  sei ein mit den Zeichen eines Binäralphabets belegtes eindimensionales Feld. Man programmiere einen Sortieralgorithmus, der dieses so umordnet, daß zwei aufeinanderfolgende Abschnitte einheitlicher Zeichen resultieren.

36.  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$  seien verkettete Boolesche Matrizen des Typs  $m \times n$  bzw.  $n \times p$ ; die  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  können also nur die Werte **true** bzw. **false** annehmen. Das Ele-

ment  $c_{ik}$  der Produktmatrix  $C = A \cdot B$  ist durch

$$c_{ik} = \bigvee_{j=1}^n a_{ij} \wedge b_{jk} \\ = (a_{i1} \wedge b_{1k}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2k}) \vee \dots \vee (a_{in} \wedge b_{nk})$$

definiert. Man schreibe ein ALGOL-Programm zur Bestimmung des Produkts zweier Boolescher Matrizen und aktiviere dieses für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(0 steht für false, 1 für true).

## Ausgewählte Gegenstände der Numerischen Mathematik

### Kontrollfragen

1. Welche Schritte sind bei der numerischen Lösung einer Gleichung wesentlich?
2. Unter welchen Bedingungen konvergiert das auf eine Gleichung zweiter Art angewandte Verfahren der sukzessiven Approximation?
3. Wie lauten die Fehlerabschätzungen a priori und a posteriori beim gewöhnlichen Iterationsverfahren?
4. Welche geometrische Vorstellung liegt dem Newtonschen Verfahren zugrunde?
5. Unter welchen Voraussetzungen konvergiert das Newtonsche Verfahren?
6. In welcher Weise kann das erweiterte Horner-Schema zur Nullstellenbestimmung von Polynomen eingesetzt werden?
7. In welchem Sinne nennt man das Newtonsche Verfahren konvergent vom Grade 2?
8. Man erläutere den Algorithmus der Bisektionsmethode und der Regula falsi.
9. Wie lautet der Unitäts- und Einzigkeitssatz der Interpolation mit ganzen rationalen Funktionen?
10. Welche formalen Unterschiede weisen die Interpolationspolynome nach LAGRANGE und NEWTON auf?
11. Man rekapituliere den Begriff und wesentliche Eigenschaften der Steigung  $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ .
12. Wie lautet die Newtonsche Darstellungsformel?
13. Man diskutiere das Restglied der Newtonschen Darstellungsformel.
14. Man beschreibe den Aufbau des Differenzenschemas bei der Interpolation mit äquidistanten Stützstellen und die Koeffizientenbestimmung für spezielle Interpolationsformeln.

15. Man rekapituliere die Konstruktion der Besselschen und der Stirlingschen Interpolationsformel aus den Formeln von GAUSS.
16. Nach welchem Prinzip werden Näherungswerte für Ableitungswerte und Integrale mit Hilfe von Interpolationspolynomen berechnet?
17. Man bringe den Aufbau der Formeln von STIRLING und BESSEL mit ihren numerischen Anwendungen in Zusammenhang.
18. Man beschreibe die Struktur einer Interpolationsquadraturformel und ihres Restgliedes.
19. Man vergleiche die Struktur der Formeln von NEWTON-COTES mit der der verallgemeinerten Trapezregel und der Simpsonschen Regel. Welche Konsequenzen ergeben sich daraus für den Verfahrensfehler der numerischen Integration?

### Aufgaben

1. Mit einem Taschenrechner bestimme man näherungsweise die Lösungen der Gleichung

$$g(x) = x^2 - \ln x - 2 = 0.$$

- a) In welchen Intervallen der  $x$ -Achse sind die folgenden Gleichungen zweiter Art  $x = f(x)$ :

$$x = \sqrt{\ln x + 2}, \quad x = e^{x^2-2}, \quad x = \frac{\ln x + 2}{x}$$

der Gleichung  $g(x) = 0$  äquivalent?

Welcher der Operatoren  $f$  ist auf einem Einschließungsintervall der größten Nullstelle von  $g$  kontraktiv? Man berechne diese mit einem solchen nach der Methode der sukzessiven Approximation auf Grund von MfL Bd. 9, 4.1., Satz 1.

- b) Die kleinste Nullstelle von  $g$  soll mit dem Newtonschen Verfahren berechnet werden.

Lösung: Aus der Betrachtung der Graphen von  $y = x^2 - 2$  und  $y = \ln x$  ergeben sich zwei Nullstellen von  $g$ ; eine liegt im Intervall  $0 < x < 1$ , die andere im Intervall  $1 < x < 2$ .

- a) Auf der Umgebung  $\bar{U}_{0,5}(1,5)$  ist  $f(x) = \sqrt{\ln x + 2}$  kontraktiv mit  $q = 0,36$ , so daß  $(1 - q)r = 0,32$  ist. Wegen

$$|z - f(z)| = |1,5 - f(1,5)| < 0,051$$

ist auch die Bedingung

$$|z - f(z)| \leq (1 - q)r$$

erfüllt. Die mit  $x_0 = 1,5$  gestartete Iterationsfolge  $(x_j)$  erwies sich auf dem benutzten Taschenrechner ab  $j = 8$  als stationär mit dem Wert  $\xi_1^* = 1,5644622$ .

- b) Auf der Umgebung  $\bar{U}_{0,1}(0,2)$  lassen sich die Voraussetzungen von Satz 3, MfL Bd. 9, 4.1., verifizieren. Dasselbst ist

$$g(0,1) = 0,312585, \quad g(0,3) = -0,706027,$$

$$g' < 0, \quad g'' > 0$$

und  $x_0 = 0,1$  ein zulässiger Startwert. Die mit einem Taschenrechner nach dem Newtonschen Verfahren konstruierte Folge  $(x_j)$  war ab  $j = 3$  stationär mit dem Wert

$$\xi_2^* = 0,1379347.$$

Die Iterationen bilden eine monoton wachsende Folge.

## 2. Die Polynome

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

und

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$$

mögen eine gemeinsame Nullstelle besitzen. Dann gelten die Gleichungen

$$\begin{array}{rcl} a_n x^{n+m-1} + a_{n-1} x^{n+m-2} + \dots + a_0 x^{m-1} & = & 0, \\ a_n x^{n+m-2} + \dots + a_1 x^{m-1} + a_0 x^{m-2} & = & 0, \\ \hline a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 & = & 0, \\ b_m x^{n+m-1} + b_{m-1} x^{n+m-2} + \dots + b_0 x^{n-1} & = & 0, \\ b_m x^{n+m-2} + \dots + b_1 x^{n-1} + b_0 x^{n-2} & = & 0, \\ \hline b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0 & = & 0. \end{array}$$

Das sind  $m + n$  lineare Gleichungen für die Größen

$$x_1 = x^{n+m-1}, \quad x_2 = x^{n+m-2}, \quad \dots, \quad x_{n+m} = 1,$$

die nicht sämtlich verschwinden. Für die Koeffizientendeterminante  $R(P, Q)$  gilt daher

$$R(P, Q) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & a_n & \dots & \dots & \dots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & b_m & \dots & \dots & \dots & b_0 \end{vmatrix} = 0.$$

$R(P, Q)$  heißt die *Resultante* der Polynome  $P, Q$ . In der Algebra wird gezeigt, daß umgekehrt auch aus  $R(P, Q) = 0$  das Vorhandensein einer gemeinsamen Nullstelle von  $P$  und  $Q$  folgt. Man bestimme sämtliche reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$x^2 - 2xy + 3x + 2 = 0,$$

$$2xy - y^2 + x - y - 2 = 0.$$

**Lösung:** Die linken Seiten dieser Gleichungen lassen sich in der Form

$$P(x) = x^2 + (3 - 2y)x + 2$$

und

$$Q(x) = (2y + 1)x - (y^2 + y + 2)$$

schreiben und erscheinen so als Polynome zweiten bzw. ersten Grades in  $x$ . Sie besitzen eine gemeinsame Nullstelle genau dann, wenn die Resultate

$$R(P, Q) = \begin{vmatrix} 1 & 3 - 2y & 2 \\ 2y + 1 & -(y^2 + y + 2) & 0 \\ 0 & 2y + 1 & -(y^2 + y + 2) \end{vmatrix}$$

verschwindet. Das liefert die Gleichung

$$3y^4 - 2y^3 - 12y^2 - 23y - 12 = 0.$$

Es zeigt sich, daß diese zwei reelle Wurzeln hat, und zwar  $\eta_1 = 3$  und eine weitere  $\eta_2$  zwischen  $-1$  und  $0$ . Durch Abspalten des Linearfaktors  $y - 3$  mit Hilfe des Horner'schen Schemas gewinnt man die Gleichung

$$F(y) = 3y^3 + 7y^2 + 9y + 4 = 0.$$

Tabelle 6.4

| $j$ | $y_j$        | $F(y_j)$    | $F'(y_j)$    |
|-----|--------------|-------------|--------------|
| 0   | 0            | 4           | 9            |
| 1   | -0,4         | 1,119 341 7 | -4,555 555 6 |
| 2   | -0,690 153 5 | 0,136 616 5 | 3,624 657 6  |
| 3   | -0,727 844 3 | 0,000 960 0 | 3,577 995 1  |
| 4   | -0,728 112 6 | 0,000 000 1 | 3,577 755 3  |
| 5   | -0,728 112 6 |             |              |

Dafür gilt

$$F'(y) = 9y^2 + 14y + 9$$

und

$$F''(y) = 18y + 14,$$

d. h.,  $F''$  verschwindet bei  $y = -\frac{7}{9}$ . Wegen  $F\left(-\frac{7}{9}\right) < 0$  ist  $-\frac{7}{9} < \eta_2 < 0$ . Die Wurzel  $\eta_2$  von  $F(y) = 0$  kann nach Satz 3, MfL Bd. 9, 4.1., berechnet werden. Mit  $y_0 = 0$  als Startwert ergibt sich die in Tabelle 6.4 dargestellte Iterationsfolge. Aus der Gleichung  $Q(x) = 0$  gewinnt man nun mit  $y = \eta_1$  bzw.  $y = \eta_2$

$$\xi_1 = \frac{\eta_1^2 + \eta_1 + 2}{2\eta_1 + 1} = 2, \quad \xi_2 = \frac{\eta_2^2 + \eta_2 + 2}{2\eta_2 + 1} = -3,949 881 1$$

und  $(\xi_1, \eta_1)$ ,  $(\xi_2, \eta_2)$  als reelle Lösungen des vorgelegten Gleichungssystems.

### 3. Das Polynom

$$P(x) = 25x^3 - 3x^2 + x - 100$$

besitzt im Intervall  $\llbracket 1, 2 \rrbracket$  eine Nullstelle  $\xi$ . Es ist ein Faktor  $\tau(x)$  so zu bestimmen, daß die Gleichung zweiter Art

$$x = x + \tau(x)P(x) = f(x)$$

auf dem Intervall  $\llbracket 1, 2 \rrbracket$  mit der algebraischen Gleichung  $P(x) = 0$  äquivalent ist und das gewöhnliche Iterationsverfahren mit einem beliebigen Startpunkt  $x_0 \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$  gegen  $\xi$  konvergiert.

Lösung: Die beiden Gleichungen sind äquivalent, wenn  $\tau(x) \neq 0$  auf  $\llbracket 1, 2 \rrbracket$  ist. Wird  $\tau$  als differenzierbar vorausgesetzt, so ist

$$f'(x) = 1 + \tau'(x) P(x) + \tau(x) (75x^2 - 6x + 1).$$

Die Ableitung  $P'(x) = 75x^2 - 6x + 1$  wächst über  $\llbracket 1, 2 \rrbracket$  von  $P'(1) = 70$  monoton auf  $P'(2) = 289$ . Wählt man  $\tau = -\frac{1}{289}$ , so gilt in  $\llbracket 1, 2 \rrbracket$  die Ungleichung  $0 < f'(x) < 1$  und auf Grund des Mittelwertsatzes mit  $x_1 := f(x_0)$ ,  $0 < \theta < 1$ ,

$$\xi - x_1 = f(\xi) - f(x_0) = (\xi - x_0) f'(\xi - \theta(\xi - x_0)).$$

Also liegt  $x_1$  zwischen  $\xi$  und  $x_0$  und gehört wieder dem Intervall  $\llbracket 1, 2 \rrbracket$  an. Man erkennt so, daß die Iterationen  $x_{j+1} = f(x_j)$  für jedes Startelement  $x_0 \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$  in diesem Intervall eine monotone Folge bilden. Diese konvergiert gegen  $\xi$ . Da  $f'$  auf  $\llbracket 1, 2 \rrbracket$  monoton fallend ist gilt für  $x_0 \geq \xi$  mit  $q := f'(\xi)$

$$\xi - x_{j+1} \leq q(\xi - x_j) \leq q^{j+1}(\xi - x_0),$$

also

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = \xi.$$

Im Fall  $x_0 < \xi$  lassen sich die Schlüsse für  $j \geq 1$  mit  $q := f'(x_1)$  durchführen.

Für  $x_0 = 1$  ergibt sich  $x_1 = 1,2664359$  usw. Ab  $x_{13} = 1,6198138$  ist die Iterationsfolge stationär.

4. Zur Funktion  $y = f(x) = (1+x)^5$  bestimme man die Stirlingsche und die Besselsche Approximation bezüglich des Intervalls  $\llbracket 0, 1 \rrbracket$ , und zwar nacheinander abbrechend mit den ersten, zweiten, dritten und vierten Differenzen. Stützstellen seien die Argumente  $x_j = j$ ,  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Zu diskutieren sind die Interpolationsfehler dieser acht Polynome.

Tabelle 6.5

| $x = s$ | $(1+x)^5$ | $\Delta^1$ | $\Delta^2$ | $\Delta^3$ | $\Delta^4$ |
|---------|-----------|------------|------------|------------|------------|
| -2      | -1,00     | 1,00       |            |            |            |
| -1      | 0,00      | 1,00       | 0,00       |            |            |
| 0       | 1,00      | 31,00      | 30,00      | 30,00      | 120,00     |
| 1       | 32,00     | 211,00     | 180,00     | 150,00     | 240,00     |
| 2       | 243,00    | 781,00     | 570,00     | 390,00     |            |
| 3       | 1024,00   |            |            |            |            |

Lösung: Zur Bestimmung der Zahlwerte in den Formeln von STIRLING und BESSEL wird das Differenzschema aufgestellt (Tab. 6.5). Bezüglich der Transformation  $x = x_0 + hs$  gilt im vorliegenden Fall  $x = s$ .

Die zu betrachtenden Interpolationsformeln werden mit  $S_1, S_2, S_3, S_4$  bzw.  $B_1, B_2, B_3, B_4$  bezeichnet. Für die nach Potenzen von  $s$  geordneten Polynome findet man nach MfL



Bd. 9, 4.2.5.,

$$S_1(s) = 1 + 16s,$$

$$S_2(s) = 1 + 16s + 15s^2,$$

$$S_3(s) = 1 + s + 15s^2 + 15s^3,$$

$$S_4(s) = 1 + s + 10s^2 + 15s^3 + 5s^4;$$

$$B_1(s) = 1 + 31s,$$

$$B_2(s) = 1 - 21,5s + 52,5s^2,$$

$$B_3(s) = 1 - 9s + 15s^2 + 25s^3,$$

$$B_4(s) = 1 + 6s + 7,5s^2 + 10s^3 + 7,5s^4.$$

Tabelle 6.6

| $s$ | $S_1(s)$ | $S_2(s)$ | $S_3(s)$ | $S_4(s)$ | $(1 + s)^5$ |
|-----|----------|----------|----------|----------|-------------|
| 0,0 | 1,000    | 1,000    | 1,000    | 1,000    | 1,000       |
| 0,2 | 4,200    | 4,800    | 1,920    | 1,728    | 2,488       |
| 0,4 | 7,400    | 9,800    | 4,760    | 4,088    | 5,378       |
| 0,6 | 10,600   | 16,000   | 10,240   | 9,088    | 10,486      |
| 0,8 | 13,800   | 23,400   | 19,080   | 17,928   | 18,896      |
| 1,0 | 17,000   | 32,000   | 32,000   | 32,000   | 32,000      |

Tabelle 6.7

| $s$ | $B_1(s)$ | $B_2(s)$ | $B_3(s)$ | $B_4(s)$ |
|-----|----------|----------|----------|----------|
| 0,0 | 1,000    | 1,000    | 1,000    | 1,000    |
| 0,2 | 7,200    | -1,200   | 0,000    | 2,592    |
| 0,4 | 13,400   | 0,800    | 1,400    | 5,432    |
| 0,6 | 19,600   | 7,000    | 6,400    | 10,432   |
| 0,8 | 25,800   | 17,400   | 16,200   | 18,792   |
| 1,0 | 32,000   | 32,000   | 32,000   | 32,000   |

Bei der Berechnung der Werte von  $S_j$  und  $B_j$ ,  $j = 1(1)4$ , wird man unmittelbar von den Newtonschen Produktformen dieser Polynome ausgehen und den Algorithmus des Schemas (25) aus MfL Bd. 9, 4.2.3., benutzen. Es ist darauf hinzuweisen, daß Tabellen für die „Newtonschen Interpolationskoeffizienten“

$$C_k(s) := \frac{s(s-1) \cdots (s-k+1)}{k!}$$

existieren, mit deren Hilfe sich die Berechnung weiter vereinfachen läßt. Es ergeben sich die Wertetabellen 6.6 und 6.7 für die miteinander zu vergleichenden Funktionen. Für die Interpolationsfehler

$$R_j^{(S)}(s) := f(s) - S_j(s)$$

und

$$R_j^{(B)}(s) := f(s) - B_j(s), \quad j = 1(1)4,$$

gewinnt man damit Tabelle 6.8.

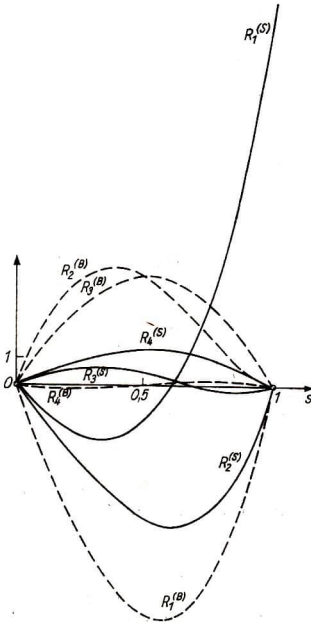


Abb. 6.22

Tabelle 6.8

| $s$ | $R_1^{(S)}$ | $R_2^{(S)}$ | $R_3^{(S)}$ | $R_4^{(S)}$ | $R_1^{(B)}$ | $R_2^{(B)}$ | $R_3^{(B)}$ | $R_4^{(B)}$ |
|-----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0,0 | 0,000       | 0,000       | 0,000       | 0,000       | 0,000       | 0,000       | 0,000       | 0,000       |
| 0,2 | -1,712      | -2,312      | 0,568       | 0,760       | -4,712      | 3,688       | 2,488       | -0,104      |
| 0,4 | -2,022      | -4,422      | 0,618       | 1,290       | -8,022      | 4,878       | 3,878       | -0,054      |
| 0,6 | -0,114      | -5,514      | 0,246       | 1,398       | -9,114      | 3,486       | 4,086       | 0,054       |
| 0,8 | 5,096       | -4,504      | -0,184      | 0,986       | -6,904      | 1,496       | 2,696       | 0,104       |
| 1,0 | 15,000      | 0,000       | 0,000       | 0,000       | 0,000       | 0,000       | 0,000       | 0,000       |

Anhand der Abb. 6.22 erkennt man: Im größeren Teil des Intervalls  $[0, 1]$  approximiert  $S_1$  besser als  $S_2$  und im ganzen Intervall  $S_3$  besser als  $S_4$ .<sup>1)</sup> Über dem Intervall  $[0,5; 1]$  approximiert  $B_3$  besser als  $B_2$ . In  $[0; 0,6]$  approximiert  $S_1$  besser als  $B_1$ ,  $B_2$  und  $B_3$ . Im ganzen Intervall  $[0, 1]$  leistet  $B_4$  die beste Approximation, gefolgt von  $S_3$  und  $S_4$ .

<sup>1)</sup> Hier und in den folgenden Bemerkungen wird die Approximationsgüte über einem Intervall nach dem maximalen Betrag des Fehlers beurteilt.

5. Es soll ein Extremum einer in Tabellenform gegebenen differenzierbaren Funktion  $f$  bestimmt werden.

Lösung: Anhand des Werteverlaufs ermittelt man ein Argument  $x_0$  bzw.  $s_0$  ( $x = x_0 + hs$ ) der Tabelle als Näherungswert für ein Extremum ( $\xi, f(\xi)$ ). Da notwendigerweise  $f'(\xi) = 0$  gelten muß, wird bezüglich  $x_0$  das Stirlingsche Polynom bis zu den sich noch regulär verhaltenden Differenzen gebildet und nach Differentiation gleich Null gesetzt. Diese algebraische Gleichung ist zu lösen, etwa durch sukzessive Approximation mit dem Startelement  $s_0$ . Um zu sichern, daß es sich tatsächlich um ein Extremum handelt, werden die zweiten Differenzen in der Nachbarschaft von  $s_0$  betrachtet, die näherungsweise bis auf den Faktor  $h^2$  mit den entsprechenden zweiten Ableitungen von  $f$  übereinstimmen (MfL Bd. 9, 4.3.1.).

Tabelle 6.9

| $x$   | $y$     | $\Delta^1$ | $\Delta^2$ | $\Delta^3$ |
|-------|---------|------------|------------|------------|
| 0,180 | 20,5387 | 2851       |            |            |
| 0,185 | 20,8238 | 2007       | -844       | 66         |
| 0,190 | 21,0245 | 1229       | -778       | 64         |
| 0,195 | 21,1474 | 515        | -714       | 65         |
| 0,200 | 21,1989 | -134       | -649       | 65         |
| 0,205 | 21,1855 | -718       | -584       | 59         |
| 0,210 | 21,1137 | -1243      | -525       | 62         |
| 0,215 | 20,9894 | -1706      | -463       |            |
| 0,220 | 20,8188 |            |            |            |

Beispiel: Ein Körper von der absoluten Temperatur  $T$  sendet elektromagnetische Wellen aller Wellenlängen  $\lambda$  aus. Dabei verteilt sich die ausgestrahlte Energie nach dem Planckschen Strahlungsgesetz

$$I = c^2 h \lambda^{-5} \left( e^{\frac{ch}{k\lambda T}} - 1 \right)^{-1}$$

über das Spektrum. Darin bedeutet  $c = 2,997925 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum,  $k = 1,38054 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$  die Boltzmannsche Konstante,  $h = 6,6256 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$  das Plancksche Wirkungsquantum.  $I d\lambda$  gibt die Intensität der Strahlung im Wellenlängenbereich  $\lambda$  und  $\lambda + d\lambda$  an.

Mit den folgenden Gleichungen werden Größen  $x, y$  eingeführt, die bei konstanter Temperatur  $\lambda$  bzw.  $I$  proportional sind:

$$c_2 := \frac{\lambda T}{x} = \frac{ch}{k} = 1,4388 \text{ cmK}, \quad \text{also} \quad \lambda = \frac{c_2}{T} x;$$

$$c_1 := \frac{\lambda^5 I}{x^5 y} = c^2 h = 0,5955 \cdot 10^{-12} \text{ Wcm}^2.$$

Dann ist

$$c_3 := \frac{I}{T^5 y} = \frac{k^5}{c^5 h^4} = 0,2809 \cdot 10^{-10} \text{ Wcm}^2 \text{K}^{-5}, \quad \text{also} \quad I = c_3 T^5 y.$$

Das Plancksche Strahlungsgesetz nimmt damit die Form

$$(e^{1/x} - 1) x^6 y = 1$$

an. Gesucht ist das Maximum von  $y$ . Tabelle 6.9 enthält einige Werte der Funktion  $y = y(x)$ .

Bemerkung: Die Differenzen sind als ganzzahlige Vielfache der Einheit der letzten Stelle der tabulierten Funktionswerte geschrieben. Mit  $x_0 = 0,200$  liefert das Differenzenschema auf Grund von MfL Bd. 9, 4.3.1., (9), die Gleichung

$$0 = 190,5 - 649s + \frac{1}{6} \cdot 65(3s^2 - 1),$$

also  $0 = 179,7 - 649s + 32,5s^2$ . Für die Extremwertbestimmung ist die Wurzel

$$s^* = 0,2809$$

maßgebend, welcher der Näherungswert

$$\xi^* = 0,200 + 0,005s^* = 0,2014$$

von  $\xi$  entspricht. An den Differenzen zweiter Ordnung erkennt man, daß es sich um ein Maximum handelt.

Für  $f(\xi^*)$  ergibt sich mit Hilfe des nach den Differenzen dritter Ordnung abgebrochenen Stirlingschen Polynoms der Näherungswert

$$f(\xi^*) \approx 21,1989 + 190,5 \cdot 10^{-4}s^* - 324,5 \cdot 10^{-4}s^{*2} + 10,8 \cdot 10^{-4}s^*(s^{*2} - 1) = 21,2015.$$

Den gleichen Wert erhält man mit dem Ausdruck  $[(e^{1/\xi^*} - 1)\xi^{**}]^{-1}$  der Planckschen Strahlungsfunktion.

6. Die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels der Länge  $l$  mit der Maximalauslenkung  $\alpha$  wird durch das elliptische Integral

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}, \quad k = \sin \frac{\alpha}{2}, \quad g = 9,81 \text{ ms}^{-2},$$

bestimmt. Man berechne

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} \quad \text{für } \alpha = 60^\circ$$

mit vier gültigen Ziffern nach dem Komma

- mit Hilfe einer numerischen Quadraturformel,
- durch Reihenentwicklung des Integranden.
- Man berechne  $I$  für einen kleinen Wert von  $\alpha$ , etwa  $\alpha = 10^\circ$ , und vergleiche mit dem nach der meistens benutzten Näherungsformel

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

ermittelten Resultat.

Lösung: Mit der Substitution  $t = \frac{\pi}{2} x$  gewinnt man

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{\pi}{2} x}}, \quad k = 0,5.$$

a) Zur Bestimmung der Schrittweite  $h$  in der Simpsonschen Formel entnimmt man einem Differenzenschema die Werte zur Bestimmung des Betrages der vierten Ableitung des Integranden. Mit  $M_4 = 16,3$ ,  $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-6}$  und  $h = 0,05$  ist die Abschätzung

$$h < \sqrt[4]{\frac{180 \cdot \varepsilon}{M_4(b-a)}}$$

erfüllt.

Die Simpsonsche Regel liefert damit den Wert  $I = 1,68575$ .

b) Mit Hilfe der binomischen Entwicklung gewinnt man die für alle  $x$  ( $k^2 < 1$ ) gleichmäßig konvergente Reihe

$$\begin{aligned} & \left(1 - k^2 \sin^2 \frac{\pi}{2} x\right)^{-1/2} \\ &= 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \frac{\pi}{2} x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 \frac{\pi}{2} x + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \sin^6 \frac{\pi}{2} x + \dots \end{aligned}$$

und durch gliedweise Integration mit Beachtung von

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m} t \, dt = \frac{(2m-1)(2m-3)\dots 1}{2m \cdot (2m-2)\dots 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

den Wert

$$I = \frac{\pi}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots\right).$$

Tabelle 6.10

| $n$ | $I_n$     |
|-----|-----------|
| 1   | 1,5707963 |
| 2   | 1,6689711 |
| 3   | 1,6827769 |
| 4   | 1,6851735 |
| 5   | 1,6856323 |
| 6   | 1,6857250 |
| 7   | 1,6857445 |
| 8   | 1,6857487 |

Tabelle 6.11

| $n$ | $I_n$     |
|-----|-----------|
| 1   | 1,5707963 |
| 2   | 1,5737793 |
| 3   | 1,5737920 |

Für die Partialsummen  $I_n = \frac{\pi}{2} s_n$  dieser Reihe ergab sich mit einem Taschenrechner Tabelle 6.10.

c) Es sind die Werte von  $I$  und  $\frac{\pi}{2} = 1,5707963$  miteinander zu vergleichen. Für  $\alpha = 10^\circ$ , also  $k = 0,0871557$ , liefert die Reihenentwicklung die in Tabelle 6.11 angegebenen Werte.

7. L. W. KANTOROVİČ hat folgende Methode zur näherungsweise Berechnung uneigentlicher Integrale mit isolierten Singularitäten des Integranden  $f$  vorge schlagen: Um  $\int_a^b f(x) \, dx$  zu ermitteln, betrachte man eine „elementar integrierbare“

Funktion  $g$ , welche in  $[[a, b]]$  dieselben Singularitäten wie  $f$  besitzt, so daß  $f - g$  hinreichend glatt ist. Auf Grund der Zerlegung

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx + \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \quad (1)$$

wird dann das Integral der linken Seite durch exakte Integration von  $g$  und Berechnung von

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

mit Hilfe einer Quadraturformel bestimmt.

Man entwickle diese Methode für uneigentliche Integrale des Typs

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{(x - x_0)^\alpha} dx, \quad 0 < \alpha < 1, \quad x_0 \in [[a, b]]; \quad (2)$$

$\varphi$  wird als  $(m + 1)$ -mal stetig differenzierbar auf  $[[a, b]]$  vorausgesetzt. Dabei gehe man von der Taylorentwicklung von  $\varphi$  an der Stelle  $x_0$  aus und betrachte

$$g(x) = \frac{1}{(x - x_0)^\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Lösung: In

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^m \frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \psi(x)$$

ist das Restglied

$$\psi(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^m \frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \frac{\varphi^{(m+1)}(\xi_x)}{(m+1)!} (x - x_0)^{m+1}, \quad (3)$$

$$x \dots \xi_x \dots x_0,$$

wie  $\varphi$  auf  $[[a, b]]$   $(m + 1)$ -mal stetig differenzierbar. Durch  $l$ -malige Differentiation von (3),  $0 < l \leq m$ , findet man mit  $\varphi_l := \varphi^{(l)}$

$$\begin{aligned} \varphi^{(l)}(x) &= \varphi^{(l)}(x) - \sum_{k=l}^m \frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{(k-l)!} (x - x_0)^{k-l} = \varphi_l(x) - \sum_{k=0}^{m-l} \frac{\varphi_l^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ &= \varphi_l^{(m-l+1)}(\xi_x) \frac{(x - x_0)^{m-l+1}}{(m-l+1)!} = \varphi^{(m+1)}(\xi_x) \frac{(x - x_0)^{m-l+1}}{(m-l+1)!}, \quad x \dots \xi_x \dots x_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Für das Integral (2) ergibt sich auf Grund von (1) mit Beachtung, daß

$$f(x) - g(x) = \frac{\psi(x)}{(x - x_0)^\alpha}$$

ist

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\varphi(x)}{(x-x_0)^\alpha} dx &= \sum_{k=0}^m \frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!} \int_a^b (x-x_0)^{k-\alpha} dx + \int_a^b \frac{\varphi(x)}{(x-x_0)^\alpha} dx \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot \frac{1}{k-\alpha+1} [(b-x_0)^{k-\alpha+1} - (a-x_0)^{k-\alpha+1}] + \int_a^b \frac{\varphi(x)}{(x-x_0)^\alpha} dx. \end{aligned}$$

Der Integrand

$$F: x \mapsto \frac{\varphi(x)}{(x-x_0)^\alpha}, \quad F(x_0) = 0,$$

des letzten Integrals ist auf  $\llbracket a, b \rrbracket$  wenigstens  $m$ -mal stetig differenzierbar, und dieses kann mit einer entsprechenden Quadraturformel berechnet werden.

Die Behauptung zur Differenzierbarkeit von  $F$  bedarf nur bezüglich der Stelle  $x_0$  einer Begründung. Zunächst ergibt sich mit (3)

$$F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi^{(m+1)}(\xi_x)}{(m+1)!} (x-x_0)^{m+1-\alpha} = 0.$$

Ist für  $1 < l < m$  bereits  $F^{(l)}(x_0) = 0$  gezeigt, so folgt mit (4)

$$F^{(l+1)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F^{(l)}(x) - F^{(l)}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi^{(m+1)}(\xi_x)}{(m-l+1)!} (x-x_0)^{m-l+1-\alpha} = 0.$$

Damit gilt  $F^{(l)}(x_0) = 0$  für  $l = 0(1)m$ .

Für  $x \neq x_0$  ergibt sich durch formale Differentiation

$$F^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \varphi^{(k)}(x) \frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}} \left[ \frac{1}{(x-x_0)^\alpha} \right].$$

Da die Ableitungen  $\varphi^{(k)}$  stetig sind und nach (3), (4)  $\varphi^{(k)}(x_0) = 0$  für  $k = 0(1)m$  ist, folgt schließlich

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F^{(m)}(x) = 0 = F^{(m)}(x_0)$$

und damit die Stetigkeit von  $F^{(l)}$  auf  $\llbracket a, b \rrbracket$  für  $l = 0(1)m$ .

8. Auf  $\bar{U}_r(z)$  seien die in Tabelle 6.12 aufgeführten Abbildungen  $f$  gegeben:

a) Man zeige für jede Abbildung  $f_i$ , daß sie auf  $\bar{U}_r(z)$  kontrahierend ist, ermittle einen Kontraktionsfaktor  $q$  und weise nach, daß die Bedingung  $|z - f_i(z)| \leq (1-q)r$  erfüllt ist.

b) Man führe jeweils eine Anzahl Iterationsschritte gemäß  $x_{i+1} := f_i(x_i)$  mit dem Startelement  $x_0 = z$  aus und schätze den Fehler a posteriori ab.

9. Man bestimme die Extrema der Funktion  $f(x) = x^2(e^x + x)$  mit fünf gültigen Ziffern nach dem Komma.

10. Man bestimme auf Grund von MfL Bd. 9, 4.1., Satz 3, näherungsweise die Lösung der Gleichung

$$g(x) = e^x x^2 + e^{-x} + x^3 = 0.$$

Anleitung: Die Diskussion der Graphen der Funktionen  $g_1(x) = e^{-x}$ ,  $g_2(x) = -x^2(e^x + x)$  führt zu einer Lokalisierung der Nullstelle von  $g$ . Für ein Einschließungsintervall verifiziere man die Voraussetzungen des Satzes und programmiere die Konstruktion der Iterationsfolge nach dem Newtonschen Verfahren. Die Abbruchbedingung soll unter Beachtung der Bemerkung am Ende von MfL Bd. 9, 4.1.2., gebildet werden.

Tabelle 6.12

| $i$ | $f_i(x)$                         | $r$  | $z$                |
|-----|----------------------------------|------|--------------------|
| 1   | $\frac{1}{2+x}$                  | 0,5  | 0,5                |
| 2   | $2 + \frac{1}{x^2}$              | 0,25 | 2,25 vgl. Aufg. 13 |
| 3   | $\frac{1}{3-x^3}$                | 0,5  | 0,3 vgl. Aufg. 13  |
| 4   | $2 + \ln x$                      | 0,5  | 3                  |
| 5   | $\sin(x+1)$                      | 0,5  | 1                  |
| 6   | $\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + 1$      | 1    | 3                  |
| 7   | $\frac{1}{p+x} \quad (p \geq 3)$ | 1    | 0                  |

11. Man bestimme mit sechs gültigen Ziffern nach dem Komma alle reellen Lösungen der Gleichung

$$x^2 - 3x - 4 \cdot \sin^2 x = 0.$$

12. Das Polynom  $P(x) = 10x^3 - 101x^2 - 109x + 1799$  ist nach Potenzen von  $x - 9$  umzuordnen.

13. Man berechne mit fünf gültigen Ziffern nach dem Komma

a) die in  $[[0, 1]]$  gelegene Nullstelle des Polynoms  $P(x) = x^4 - 3x + 1$ ,

b) die reelle Nullstelle des Polynoms  $P(x) = x^3 - 2x^2 - 1$

nach der Methode der Bisektion, der Regula falsi und von NEWTON-HORNER und vergleiche die Konvergenz der Iterationsfolgen. Man vergleiche mit Aufgabe 8,  $i = 2$  und  $i = 3$ .

14. a) Zu berechnen sind die Quadratwurzeln der Primzahlen  $p$  mit  $2 \leq p < 30$  auf folgendem Wege: Man setze  $x_0 = p$  und ermittle  $x_n = \frac{1}{2} \left( x_{n-1} + \frac{p}{x_{n-1}} \right)$  für  $n = 1(1)8$ .

b) Man formuliere ein ALGOL-Programm zur Berechnung dieser Quadratwurzeln unter Verwendung der Funktionsprozedur WURZ (MfL Bd. 9, 4.1.2.).

15. Zu bestimmen ist das Extremum der Funktion

$$y(x) = \frac{1}{x^5(e^{1/x} - 1)}, \quad 0,1 < x < 0,3.$$



Hinweis: Man ermittle die Nullstelle der Ableitung mit Hilfe der Regula falsi oder nach dem Verfahren von NEWTON. Vgl. Aufgabe 5.

16.\* Man bestimme mit sechs gültigen Ziffern

a) die im ersten Quadranten gelegene reelle Lösung des Gleichungssystems

$$4x^3 - 27xy^2 + 25 = 0,$$

$$4x^2y - 3y^3 - 1 = 0, \quad \text{vgl. Aufgabe 2,}$$

b) die dem Ursprung am nächsten gelegene Lösung des Gleichungssystems

$$\sin x \sinh y = 0,2,$$

$$\cos x \cosh y = 1,2.$$

17. Im Schulunterricht wird bei der Bestimmung von Funktionswerten lediglich linear interpoliert. Wie lautet das Interpolationspolynom in der Form von NEWTON, welches an den Stellen  $x_0, x_1, x_0 \neq x_1$ , die Werte  $y_0, y_1$  annimmt?

18. Die zwischen 1 und 2 gelegenen Nullstellen von

$$g(x) = x^3 - 7x + 7$$

sind näherungsweise durch quadratische Interpolation zu bestimmen, d. h., es ist ein Interpolationspolynom  $h$  zweiten Grades zu ermitteln, das im Intervall  $1 \leq x \leq 2$  die Funktion  $g$  approximiert und dessen Nullstellen als Näherungen für die Wurzeln von  $g(x) = 0$  genommen werden können. Man benutze  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 1,5$ ,  $x_2 = 2$  als Stützstellen und kontrolliere die Güte der Näherungsnulstellen durch Berechnung der entsprechenden Funktionswerte  $g(x)$ .

19. Die Gammafunktion nimmt ihr absolutes Minimum für  $x > 0$  zwischen 1 und 2 an. Man bestimme dieses näherungsweise durch quadratische Interpolation bezüglich der Stützstellen 0,5, 1, 3 ( $\Gamma(0,5) = \sqrt{\pi}$ ,  $\Gamma(1) = 1$ ,  $\Gamma(3) = 2$ ; vgl. MfL Bd. 5, 4.3.2.).

20. Bestimmung eines Extremwertes aus drei Messungen (z. B. Kulminationshöhe eines Gestirns): Von einer zwei physikalische Größen verbindenden Funktion mögen auf Grund eines Experiments drei zusammengehörige Wertepaare  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  mit  $x_1 < x_2 < x_3$  vorliegen. Ferner sei bekannt, daß die Funktion im Intervall  $]x_1, x_3[$  genau ein absolutes Extremum besitzt. Man bestimme dieses näherungsweise unter Benutzung eines Interpolationspolynoms.

Anleitung: Man setze mit unbestimmten Koeffizienten

$$y(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

an und eliminiere die  $a_i$  aus den Gleichungen

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 - y(x) = 0,$$

$$a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 - y_1 = 0,$$

$$a_2x_2^2 + a_1x_2 + a_0 - y_2 = 0,$$

$$a_2x_3^2 + a_1x_3 + a_0 - y_3 = 0$$

mit Hilfe einer Determinantenbedingung.

21. Es charakterisiere  $g(t)$ , in Sekunden ausgedrückt, den täglichen Gang einer Uhr, wobei  $t$  die in Grad Celsius gemessene Temperatur bedeutet. Negative Werte von  $g$  sind als Vorgehen, positive als Nachgehen zu interpretieren. Die Meßwerte der Tabelle

|        |      |      |      |
|--------|------|------|------|
| $t$    | 5,5  | 21,5 | 30,2 |
| $g(t)$ | 2,52 | 3,12 | 4,23 |

sollen durch ein Polynom zweiten Grades interpoliert werden. Mit diesem berechne man den Gang für  $8,3^\circ$ .

22. Die größte zulässige Belastung  $B$  einer eisernen Kette in Abhängigkeit vom Kettenglieddurchmesser  $d$  ist in Tabelle 6.13 gegeben. Man bestimme zu den Punkten  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 0, 2, 3, 5, 7$ , das Newtonsche Interpolationspolynom und vergleiche die an den übrigen Stützstellen berechneten Werte mit denen in der Tabelle.

Tabelle 6.13

| $i$          | 0    | 1    | 2    | 3     | 4     | 5     | 6     | 7      |
|--------------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $x = d$ [mm] | 5    | 8    | 10   | 16    | 20    | 26    | 30    | 36     |
| $y = B$ [N]  | 1569 | 5394 | 9316 | 24517 | 37265 | 62763 | 83357 | 122583 |

23. a) Mit Hilfe der Newtonschen Interpolationsformel entwickle man das Polynom

$$P(x) = x^5 - 2x^4 + 3x - 4$$

nach den Linearfaktoren  $x, x - 1, x + 1, x - 2, x + 2$  in dieser Reihenfolge.

b) Welche Formen nimmt das Interpolationspolynom für die anderen möglichen Anordnungen der in a) betrachteten Stützstellen an?

Hinweis: Man beachte MfL Bd. 9, 4.2.4., S. 176–177.

24. Über dem Intervall  $[-8, 8]$  tabuliere man die mit den Werten der Funktion

$$y(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

zu den Stützstellen  $0, \pm 2, \pm 4, \pm 8$  bzw.  $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 8$  gebildeten Interpolationspolynome. Vgl. MfL Bd. 9, Abb. 4.12.

25. Gegeben seien die äquidistanten Abszissen  $x_j = x_0 + jh$ ,  $j = 0, 1, \dots$ . Man zeige, daß

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{1}{h^k k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x_j)$$

ist.

Hinweis: Man gehe von MfL Bd. 9, 4.2.2., (11), aus.

26. In MfL Bd. 9, 4.2.5., werden mit einer Schrittweite  $h > 0$  durch

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x),$$

$$\delta f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right)$$

und

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x - h)$$

vordere, zentrale und hintere Differenzen eingeführt. Entsprechende Differenzen der Ordnung  $k$  definiert man induktiv durch

$$\begin{aligned} \Delta^1 f(x) &:= \Delta f(x), & \Delta^{k+1} f(x) &:= \Delta \Delta^k f(x) \\ & & &= \Delta^k f(x + h) - \Delta^k f(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta^1 f(x) &:= \delta f(x), & \delta^{k+1} f(x) &:= \delta \delta^k f(x) \\ & & &= \delta^k f\left(x + \frac{h}{2}\right) - \delta^k f\left(x - \frac{h}{2}\right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla^1 f(x) &:= \nabla f(x), & \nabla^{k+1} f(x) &:= \nabla \nabla^k f(x) \\ & & &= \nabla^k f(x) - \nabla^k f(x - h). \end{aligned}$$

Abkürzend schreibt man bezüglich einer Folge äquidistanter Argumente

$$x_j = x_0 + jh, \quad j = m(1)n \quad (m, n \text{ ganz}),$$

$$\Delta_j^k, \delta_j^k, \nabla_j^k \quad \text{für} \quad \Delta^k f(x_j), \delta^k f(x_j), \nabla^k f(x_j).$$

a) Man beweise durch vollständige Induktion

$$\Delta_j^k = k! h^k f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}];$$

$$\nabla_j^k = k! h^k f[x_{j-k}, x_{j-k+1}, \dots, x_j];$$

$$\delta_{j+(1/2)}^{2m+1} = (2m+1)! h^{2m+1} f[x_{j-m}, \dots, x_j, \dots, x_{j+m}, x_{j+m+1}];$$

$$\delta_j^{2m} = (2m)! h^{2m} f[x_{j-m}, \dots, x_j, \dots, x_{j+m}].$$

b) Man drücke das Differenzenschema der Abb. 4.6. in MfL Bd. 9, 4.2.5., mit hinteren und zentralen Differenzen aus.

27. Wie lautet die Besselsche Formel (MfL Bd. 9, 4.2.5. (57)) nach der Variablentransformation  $s = t + \frac{1}{2}$ ?

28.\* Tabelle 6.14 enthält einige Werte einer Sinustafel (Argumente im Gradmaß). Zwischen  $x = 30^\circ$  und  $x = 36^\circ$  soll eine Untertafelung mit der Schrittweite 0,5 vorgenommen werden.

29. Die Logarithmentabelle 6.15 enthält einen Tafelfehler. Dieser ist mit Hilfe des Differenzenschemas zu korrigieren.

30. Mit Hilfe der aus dem Lagrangeschen Interpolationspolynom für drei Stützstellen abgeleiteten numerischen Differentiationsformeln berechne man die Ableitung der in der Tabelle 6.16 gegebenen Funktion an der Stelle  $x = 7,50$ .
31. Tabelle 6.17 enthält einige Werte der Besselfunktion  $J_0$ . Man berechne mit Hilfe der aus dem Stirlingschen Polynom abgeleiteten Differentiationsformeln näherungsweise  $J_0'(1)$  und  $J_0''(1)$ .

Tabelle 6.14

| $x$ | $f(x)$  |
|-----|---------|
| 26  | 0,43837 |
| 28  | 0,46947 |
| 30  | 0,50000 |
| 32  | 0,52992 |
| 34  | 0,55919 |
| 36  | 0,58779 |
| 38  | 0,61566 |
| 40  | 0,64279 |

Tabelle 6.15

| $x$ | $f(x)$  |
|-----|---------|
| 40  | 1,60206 |
| 41  | 1,61278 |
| 42  | 1,62325 |
| 43  | 1,63347 |
| 44  | 1,64345 |
| 45  | 1,65312 |
| 46  | 1,66276 |
| 47  | 1,67210 |
| 48  | 1,68124 |
| 49  | 1,69020 |
| 50  | 1,69897 |
| 51  | 1,70757 |
| 52  | 1,71600 |
| 53  | 1,72428 |

Tabelle 6.16

| $x_i$ | $y_i$  |
|-------|--------|
| 7,47  | 0,1933 |
| 7,48  | 0,1959 |
| 7,49  | 0,1984 |
| 7,50  | 0,2009 |
| 7,51  | 0,2033 |
| 7,52  | 0,2058 |
| 7,53  | 0,2082 |

Tabelle 6.17

| $x$  | $J_0(x)$  |
|------|-----------|
| 0,96 | 0,7825361 |
| 0,98 | 0,7739332 |
| 1,00 | 0,7651977 |
| 1,02 | 0,7563321 |
| 1,04 | 0,7473390 |

32. Das Minimum der Gammafunktion im Intervall  $x > 0$  ist nach der Methode von Aufgabe 5 zu bestimmen. Man vergleiche das Resultat mit dem von Aufgabe 19.
33. Man berechne die Gewichte der Keplerschen Faßregel durch Integration der Lagrangeschen Koeffizientenfunktionen  $l_i$ .
34. Man berechne die Gewichte der Formeln von NEWTON-COTES für fünf und für neun Ordinaten, ermittle damit näherungsweise  $\ln 11 = \int_0^{10} \frac{dx}{1+x}$  und vergleiche das Resultat mit dem exakten Wert.

35. Es sei  $f$  auf  $\llbracket a, b \rrbracket$  zweimal stetig differenzierbar und  $M_2$  eine Schranke für  $|f''|$  auf diesem Intervall. Man zeige, daß für den Verfahrensfehler  $RI_1(a, b)$  der Trapezregel

$$|RI_1(a, b)| \leq \frac{(b-a)^3}{12} M_2$$

gilt.

36. Der Zahlenwert von  $\pi$  läßt sich näherungsweise mit Hilfe des Integrals

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

berechnen. Man stelle zuerst fest, welche Schrittweite zu wählen ist, wenn der Verfahrensfehler bei Anwendung der Simpsonschen Regel kleiner als  $\varepsilon = 10^{-4}$  sein soll, und berechne dann den Näherungswert für  $\pi$ .

37. Ist der Zahlenwert für  $\ln 2$  bekannt, so kann der entsprechende Wert für  $\ln 2^n = n \cdot \ln 2$  leicht berechnet werden. Ist der Wert für  $\ln 2$  fehlerhaft, so wird entsprechend dem Faktor  $n$  der Fehler vervielfacht. Es werde der Zahlenwert für

$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$  mit Hilfe der Simpsonschen Regel berechnet, indem das Integrationsintervall  $\llbracket 1, 2 \rrbracket$  in  $k = 4$  gleichlange Teile zerlegt wird. Welcher Verfahrensfehler ergibt sich bei der Berechnung von  $\ln 32$ ?

38. Zur Berechnung von  $I = \int_0^{\pi} \sin nx \, dx$  für  $n = 1, 3, 5, \dots$  kann die Beziehung

$$\int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \int_0^{\pi/n} \sin nx \, dx = 2 \int_0^{\pi/2n} \sin nx \, dx$$

benutzt und das letzte Integral näherungsweise mit Hilfe der Keplerschen Faßregel bestimmt werden. Man berechne  $I$  auf diesem Wege, schätze den Verfahrensfehler ab und vergleiche mit dem exakten Resultat.

39. Man bestimme bezüglich des Intervalls  $\llbracket -1, 1 \rrbracket$  die Gewichte der (offenen) Interpolationsquadraturformel

$$\int_{-1}^1 f(x) \, dx \approx A_{-1} f\left(-\frac{1}{2}\right) + A_0 f(0) + A_1 f\left(\frac{1}{2}\right)$$

und zeige, daß diese für Polynome bis zum Grade 3 exakt ist.

40. Es sei  $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ . Das Integral  $\int_a^b P(x) dx$  ist ein arithmetischer Ausdruck in  $a$  und  $b$ . Durch Umformung desselben zeige man, daß

$$\int_a^b P(x) dx = \frac{b-a}{6} \left[ P(a) + P(b) + 4 \cdot P\left(\frac{a+b}{2}\right) \right]$$

gilt.

41. Zur Berechnung von Flächeninhalten von Segmenten mit der Sehnenlänge  $s$  und der Höhe  $p$  (vgl. Abb. 6.21) gilt nach LAMBERT die Formel

$$F = \frac{2}{3} sp.$$

a) Es ist zu zeigen, daß die Formel exakt gilt, wenn die Segmentberandung  $CBA$  (Abb. 6.21) eine Parabel zweiten Grades mit dem Scheitel im Punkt  $B$  ist.

b) Man zeige, daß sich die Formel sehr einfach mit Hilfe der Keplerschen Faßregel herleiten läßt.

c) Für  $r = 1$  und die Winkel  $x = 30^\circ(30^\circ)180^\circ$  berechne man die Flächeninhalte  $A$  der Kreisabschnitte, die dafür nach der Lambertschen Formel ermittelten Näherungswerte und jeweils den prozentualen Fehler, der bei Anwendung der Lambertschen Formel entsteht.

42. Es werde  $\int_a^b e^{-x^2/2} dx$  mit Hilfe der verallgemeinerten Trapezregel näherungsweise berechnet. Man ermittle eine obere Schranke für die Schrittweite  $h$ , wenn  $\epsilon$  eine obere Schranke für den Verfahrensfehler und  $M_2$  eine Schranke für  $|f''|$  auf  $[[a, b]]$  ist.

43. Die Funktion  $f$  sei auf dem Intervall  $[[a, b]]$  stetig. Dann ist das Volumen des durch  $f$  über  $[[a, b]]$  erzeugten Rotationskörpers

$$\mu = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

(MFL Bd. 5, 4.4.3.).

a) Man berechne mit Hilfe der Keplerschen Faßregel das Volumen der Kugelzone  $K_a^b$ :

Kugelradius  $r$ ,  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ,  $-r \leq a \leq x \leq b \leq r$ .

b) Man begründe, daß  $\mu$  durch die Keplersche Faßregel exakt geliefert wird, wenn der Graph von  $f$  ein Bogen der Ellipse

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

ist.

44. a) Das Integral  $I = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 e^{-t^2/2} dt$  ist nach der Simpsonschen Regel mit fünfstelliger Genauigkeit zu berechnen.

b) Man berechne  $I$  näherungsweise nach NEWTON-COTES mit fünf Ordinaten.

45. Mit Hilfe einer numerischen Quadraturformel und durch Reihenentwicklung des Integranden berechne man mit vier gültigen Ziffern den Wert des Integralsinus

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

für  $x = 3$ . Vgl. Aufgabe 6.

46.\* Nach der Methode von Aufgabe 7 berechne man mit Hilfe der Simpsonschen Regel und der Schrittweite  $h = 0,05$

$$I = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

47.\* Man berechne mit fünf gültigen Ziffern nach dem Komma

$$I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

Hinweis: Man substituiere  $x = \frac{1}{t}$ .

## Approximationstheorie

### Kontrollfragen

1. Welches ist die Grundaufgabe der Approximationstheorie, und worin drückt sich die Linearität eines Approximationsproblems aus?
2. Man erläutere den Normbegriff an Beispielen, speziell in den Räumen  $\mathbf{R}^n$  und  $\mathbf{C}_{(a,b)}$ .
3. Man formuliere das Problem der Quadratmittelapproximation. Welche Rolle spielen die Normalgleichungen?
4. Was kann hinsichtlich der Existenz und Unität der Lösung eines linearen Approximationsproblems ausgesagt werden?
5. Welche Vorteile ergeben sich, wenn die Basisfunktionen bei der Quadratmittelapproximation orthogonal sind?

6. Man diskutierte die Methode der Orthogonalisierung im Zusammenhang mit der Quadratmittelapproximation.
7. Man gebe Beispiele für Orthogonalsysteme an und nenne einige Eigenschaften orthogonaler Polynome.
8. Was leistet der Goertzel-Algorithmus? Welche speziellen Anwendungen sind möglich?
9. Was versteht man unter gleichmäßiger Approximation?
10. Bilden die folgenden Funktionen Čebyšev-Systeme bezüglich der angegebenen Intervalle? Man begründe die Antwort in jedem Fall.
  - a)  $\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = \sin x$  auf  $\llbracket 0, \pi \rrbracket$ ,
  - b)  $\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = \sin x$  auf  $\llbracket 0, \frac{\pi}{2} \rrbracket$ ,
  - c)  $\varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = \cos x$  auf  $\llbracket 0, \pi \rrbracket$ ,
  - d)  $\varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = x^2$  auf  $\llbracket -1, 1 \rrbracket$ .
11. Auf Grund des Alternantensatzes charakterisiere man das normierte Čebyšev-Polynom  $n$ -ten Grades als dasjenige, welches in der Menge aller Polynome  $n$ -ten Grades mit dem Leitkoeffizienten 1 auf  $\llbracket -1, 1 \rrbracket$  am wenigsten von Null abweicht.
12. Welche Abbruchoptimierung bei Potenzreihen kann durch Umordnen der Partialsumme nach Čebyšev-Polynomen erreicht werden?

### Aufgaben

1. Die Funktion  $y = f(x) = x^2$  soll auf  $\llbracket 0, 1 \rrbracket$  durch ein Polynom  $F_{\mathbf{a}}(x) = a_0 + a_1x$  approximiert werden. Man bestimme Minimalösungen für folgende Distanzfunktionen und interpretiere die Ergebnisse geometrisch:

$$\text{a) } Z(\mathbf{a}) = \int_0^1 [f(x) - F_{\mathbf{a}}(x)]^2 dx,$$

$$\text{b) } Z(\mathbf{a}) = [f(0) - F_{\mathbf{a}}(0)]^2 + \left[ f\left(\frac{1}{2}\right) - F_{\mathbf{a}}\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 + [f(1) - F_{\mathbf{a}}(1)]^2,$$

$$\text{c) } Z(\mathbf{a}) = \int_0^1 x(1-x) [f(x) - F_{\mathbf{a}}(x)]^2 dx,$$

$$\text{d) } Z(\mathbf{a}) = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - F_{\mathbf{a}}(x)|.$$

Lösung:

$$\text{a) } Z(\mathbf{a}) = \int_0^1 (x^2 - a_0 - a_1x)^2 dx = \frac{1}{5} - \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_1^2 - \frac{2}{3}a_0 + a_0a_1 + a_0^2,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial a_0} = -\frac{2}{3} + a_1 + 2a_0, \quad \frac{\partial Z}{\partial a_1} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}a_1 + a_0.$$



Für  $a_0 = -\frac{1}{6}$  und  $a_1 = 1$  verschwinden die partiellen Ableitungen. Wegen

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial a_0^2} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial a_1^2} - \left( \frac{\partial^2 Z}{\partial a_0 \partial a_1} \right)^2 = \frac{1}{3} > 0$$

und

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial a_0^2} = 2 > 0, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial a_1^2} = \frac{2}{3} > 0 \quad (\text{vgl. MfL Bd. 5, 3.3.6.})$$

ist  $Z(\mathbf{a}^*)$  mit  $\mathbf{a}^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ 1 \end{pmatrix}$  minimal.

$$F_{\mathbf{a}^*}(x) = -\frac{1}{6} + x.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } Z(\mathbf{a}) &= a_0^2 + \left( \frac{1}{4} - a_0 - \frac{1}{2} a_1 \right)^2 + (1 - a_0 - a_1)^2 \\ &= 3a_0^2 + \frac{5}{4} a_1^2 - \frac{5}{2} a_0 - \frac{9}{4} a_1 + 3a_0 a_1 + \frac{17}{16}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial a_0} = 6a_0 + 3a_1 - \frac{5}{2}, \quad \frac{\partial Z}{\partial a_1} = 3a_0 + \frac{5}{2} a_1 - \frac{9}{4}.$$

$$\left. \frac{\partial Z}{\partial a_0} \right|_{\mathbf{a}^*} = 0, \quad \left. \frac{\partial Z}{\partial a_1} \right|_{\mathbf{a}^*} = 0 \quad \text{für } \mathbf{a}^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial a_0^2} = 6, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial a_1^2} = \frac{5}{2}, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial a_0 \partial a_1} = 3,$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial a_0^2} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial a_1^2} - \left( \frac{\partial^2 Z}{\partial a_0 \partial a_1} \right)^2 = 6 > 0,$$

daher  $Z(\mathbf{a}^*)$  minimal.

$$F_{\mathbf{a}^*}(x) = -\frac{1}{12} + x.$$

$$\text{c) } Z(\mathbf{a}) = \int_0^1 x(1-x)(x^2 - a_0 - a_1 x)^2 dx,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial a_0} = -2 \int_0^1 x(1-x)(x^2 - a_0 - a_1 x) dx,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial a_1} = -2 \int_0^1 x^2(1-x)(x^2 - a_0 - a_1 x) dx.$$

$$\frac{\partial Z}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial a_1} = 0 \quad \text{führt auf } a_0 = -\frac{1}{5}, \quad a_1 = 1.$$

Weiter ist

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial a_0^2} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial a_1^2} = \frac{1}{10}, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial a_0 \partial a_1} = \frac{1}{6}$$

und

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial a_0^2} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial a_1^2} - \left( \frac{\partial^2 Z}{\partial a_0 \partial a_1} \right)^2 = \frac{1}{180},$$

daher  $Z(\mathbf{a}^*)$  minimal.

$$F_{\mathbf{a}^*}(x) = -\frac{1}{5} + x.$$

$$d) Z(\mathbf{a}) = \max_{0 \leq x \leq 1} |x^2 - a_0 - a_1 x|.$$

Um den Werteverlauf der Funktion  $Z$  zu bestimmen, wird das Polynom

$$g(x) = x^2 - a_0 - a_1 x = \left(x - \frac{a_1}{2}\right)^2 - \frac{a_1^2}{4} - a_0$$

betrachtet, das an der Stelle  $x_m = \frac{1}{2} a_1$  das absolute Minimum annimmt. Dementsprechend machen wir die Fallunterscheidung

I.  $a_1 \leq 0$  oder  $a_1 \geq 2$  und II.  $0 < a_1 < 2$ .

I. Zur Bestimmung von  $Z(\mathbf{a})$  sind die Beträge von

$$g_0 := g(0) = -a_0 \quad \text{und} \quad g_1 := g(1) = 1 - a_0 - a_1$$

zu vergleichen.

Es gilt  $|a_0| = |1 - a_0 - a_1|$  genau dann, wenn  $a_1 = 1$  oder  $a_1 = -2a_0 + 1$  ist. Damit lassen sich in der  $a_0, a_1$ -Ebene die durch  $|a_0| \leq |1 - a_0 - a_1|$  und  $|a_0| \geq |1 - a_0 - a_1|$  bestimmten Bereiche für  $a_1 \leq 0$  und  $a_1 \geq 2$  angeben.

II. Es sind nun die Beträge von  $g_0, g_1$  und

$$g_m := g\left(\frac{1}{2} a_1\right) = -\left(a_0 + \frac{1}{4} a_1^2\right)$$

zu vergleichen. Im Streifen  $0 < a_1 < 2$  gilt

$$|a_0| = \left| a_0 + \frac{1}{4} a_1^2 \right| \quad \text{für} \quad a_1 = 0 \quad \text{und} \quad a_1^2 = -8a_0$$

bzw.

$$|1 - a_0 - a_1| = \left| a_0 + \frac{1}{4} a_1^2 \right| \quad \text{für} \quad a_1 = 2 \quad \text{und} \quad a_1 = -2 + \sqrt{8 - 8a_0}.$$

Damit gewinnt man den in Abb. 6.23 angegebenen Werteverlauf der Funktion  $Z$ . Diese ist offenbar in der ganzen  $a_0, a_1$ -Ebene stetig und nimmt bei  $a_0^* = -\frac{1}{8}$ ,  $a_1^* = 1$  ihr absolutes Minimum an. Letzteres erkennt man leicht durch Betrachtung der Niveaulinien  $Z(\mathbf{a}) = \text{const}$  in den einzelnen Definitionsbereichen. Die Minimallösung  $F_{\mathbf{a}^*}(x) = -\frac{1}{8} + x$  entspricht der gemäß MFL Bd. 10, Abb. 5.1, zu konstruierenden Geraden. Die Minimallösungen  $F_{\mathbf{a}^*}$  der vier Aufgaben werden in Abb. 6.24 zusammen mit  $f(x) = x^2$  veranschaulicht.

2.\* Es sei  $f$  eine auf  $[[a, b]]$  stetige Funktion,  $\varphi_i$ ,  $i = 1(1)n$ , ein Čebyšev-System bezüglich dieses Intervalls und  $X = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n\}$  eine Alternante für die mit der Bestapproximation

$$F_{a^*} = \sum_{i=1}^n a_i^* \varphi_i$$

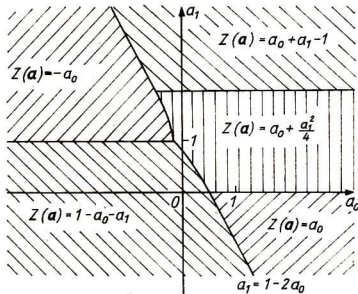


Abb. 6.23

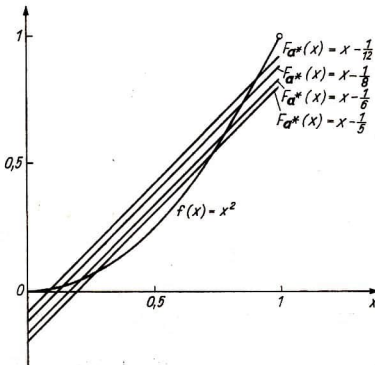


Abb. 6.24

von  $f$  gebildete Funktion  $\Phi = f - F_{a^*}$ . Man zeige, daß dann die Gleichungen

$$\Phi^2(\xi_i) = L^2, \quad \Phi'(\xi_i) (\xi_i - a) (\xi_i - b) = 0, \quad i = 1(1)n,$$

erfüllt sein müssen, wenn  $L$  die maximale Abweichung von  $f$  und  $F_{a^*}$  auf  $[[a, b]]$  bedeutet. Wie kann man diese Gleichungen zur Konstruktion einer Minimal-lösung benutzen?

Lösung: Die Gleichungen  $\Phi^2(\xi_i) = L^2$  bringen zum Ausdruck, daß  $\Phi$  über  $X$  alterniert. Ist  $\xi_i$  ein Punkt von  $X$ , so muß  $\Phi$  daselbst ein relatives Extremum annehmen, oder  $\xi_i$  ist einer der Intervallendpunkte; es gilt also  $\Phi'(\xi_i) = 0$  oder  $\xi_i = a$  oder  $\xi_i = b$ . Unter den Voraussetzungen der Aufgabe haben die betrachteten  $2n + 2$  Gleichungen für die  $2n + 2$  Unbekannten  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, a_1^*, \dots, a_n^*, L$  eine Lösung. Ist eine solche bestimmt und gilt dafür

$$a \leq \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n \leq b, \quad L = \max_{a \leq x \leq b} \left| f - \sum_{i=1}^n a_i^* \varphi_i \right|$$

und alterniert  $f - F_{a^*}$  über  $X = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n\}$ , so ist  $F_{a^*}$  auf Grund des Alternantensatzes Minimallösung.

3. Die nach der sechsten, achten und zehnten Potenz abgebrochene Maclaurinsche Reihe von  $y = \cos x$  ist nach Čebyšev-Polynomen zu entwickeln. Daraus sind über dem Intervall  $[-1, 1]$  Polynomapproximationen minimalen Grades der Kosinusfunktion herzuleiten, die von dieser um weniger als  $5 \cdot 10^{-5}$  abweichen.

Lösung: Die zu entwickelnden Polynome werden mit  $P_6$ ,  $P_8$  und  $P_{10}$  bezeichnet. Es ist

$$P_{10}(x) = 1 - 0,5x^2 + 4,16667 \cdot 10^{-2}x^4 - 1,38889 \cdot 10^{-3}x^6 + 2,48016 \cdot 10^{-5}x^8 - 2,75573 \cdot 10^{-7}x^{10}.$$

Auf  $[-1, 1]$  gilt

$$|\cos x - P_6(x)| \leq 2,5 \cdot 10^{-5},$$

$$|\cos x - P_8(x)| \leq 2,8 \cdot 10^{-7},$$

$$|\cos x - P_{10}(x)| \leq 2,1 \cdot 10^{-9}.$$

Mit Hilfe der Prozedur CHEBY, MfL Bd. 10, 5.3.2., ergeben sich die Entwicklungen

$$P_6(x) = 7,65191 \cdot 10^{-1} - 2,29818 \cdot 10^{-1}T_2(x) + 4,94792 \cdot 10^{-3}T_4(x) - 4,34028 \cdot 10^{-5}T_6(x),$$

$$P_8(x) = 7,65198 \cdot 10^{-1} - 2,29807 \cdot 10^{-1}T_2(x) + 4,95334 \cdot 10^{-3}T_4(x) - 4,18527 \cdot 10^{-5}T_6(x) + 1,93762 \cdot 10^{-7}T_8(x),$$

$$P_{10}(x) = 7,65198 \cdot 10^{-1} - 2,29807 \cdot 10^{-1}T_2(x) + 4,95328 \cdot 10^{-3}T_4(x) - 4,13769 \cdot 10^{-5}T_6(x) + 1,88380 \cdot 10^{-7}T_8(x) - 5,38229 \cdot 10^{-10}T_{10}(x).$$

Betrachtet wird zunächst  $P_6(x)$ :

$$\begin{aligned} \left| \cos x - \sum_{i=0}^6 c_i T_i(x) \right| &= \left| \cos x - \sum_{i=0}^4 c_i T_i(x) - c_6 T_6(x) \right| \\ &\geq \left| \cos x - \sum_{i=0}^4 c_i T_i(x) \right| - |c_6 T_6(x)|, \end{aligned}$$

also

$$\left| \cos x - \sum_{i=0}^4 c_i T_i(x) \right| \leq 2,5 \cdot 10^{-5} + 4,4 \cdot 10^{-5} = 6,9 \cdot 10^{-5}.$$

Eine bessere Approximation wird mit  $P_8$  erreicht.

Es gilt nämlich

$$\left| \cos x - \sum_{i=0}^4 c_i T_i(x) \right| \leq \left| \cos x - \sum_{i=0}^8 c_i T_i(x) \right| + |c_6 T_6(x)| + |c_8 T_8(x)| \\ \leq 2,8 \cdot 10^{-7} + 4,2 \cdot 10^{-5} + 2,0 \cdot 10^{-7} < 5 \cdot 10^{-5},$$

und folglich approximiert  $\sum_{i=0}^4 c_i T_i(x)$  die Kosinusfunktion mit der gewünschten Genauigkeit. Ein analoges Resultat läßt sich für  $P_{10}(x)$  herleiten.

- 4.\* Es sei  $\{\varphi_i\}$ ,  $i = 1(1)n$ , ein Čebyšev-System auf  $[[a, b]]$ , ferner sei  $X$  eine endliche Teilmenge dieses Intervalls und  $M_X$  die Menge der auf  $X$  definierten reellwertigen Funktionen.  $F_{\alpha^*} = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* \varphi_i$  heißt Bestapproximation (Minimallösung) einer Funktion  $f \in M_X$  in der Čebyšev-Norm, wenn

$$\max_{x \in X} |f(x) - F_{\alpha^*}(x)| \leq \max_{x \in X} |f(x) - F_{\alpha}(x)|$$

für alle  $\alpha \in \mathbf{R}^n$  gilt.

a) Analog zum Beweis des Čebyševschen Alternantensatzes für die gleichmäßige Bestapproximation in  $\mathbf{C}_{[a,b]}$  zeige man:  $F_{\alpha^*}$  ist Minimallösung, wenn  $f - F_{\alpha^*}$  auf  $X$  mindestens  $n$ -mal alterniert.

Lösung: Nach MfL Bd. 10, 5.1., Satz 2, besitzt das Approximationsproblem eine Lösung. Angenommen,  $F_{\bar{\alpha}}$  und nicht  $F_{\alpha^*}$  sei eine solche.  $F_{\bar{\alpha}} - F_{\alpha^*}$  ist eine nichttriviale Linearkombination der  $\varphi_i$ . Die Punkte der nach Voraussetzung existierenden Alternante werden mit  $\xi_i$ ,  $i = 0(1)n$ , bezeichnet, und es gelte  $\xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n$ . Wegen

$$\max_{x \in X} |f(x) - F_{\bar{\alpha}}(x)| < \max_{x \in X} |f(x) - F_{\alpha^*}(x)|$$

folgt aus

$$F_{\bar{\alpha}} - F_{\alpha^*} = (f - F_{\alpha^*}) - (f - F_{\bar{\alpha}}),$$

daß  $F_{\bar{\alpha}} - F_{\alpha^*}$  beim Übergang von einem  $\xi_i$  zum nächstfolgenden das Vorzeichen wechselt.  $F_{\bar{\alpha}} - F_{\alpha^*}$  besitzt also im Intervall  $[[a, b]]$  mindestens  $n$  Nullstellen. Das widerspricht der Voraussetzung, daß die  $\varphi_i$ ,  $i = 0(1)n$ , auf  $[[a, b]]$  ein Čebyšev-System bilden.

b) Es seien  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  paarweise verschiedene Punkte der Menge  $X$ . Man zeige, daß die Matrix

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) & 1 \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_n(x_2) & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_{n+1}) & \varphi_2(x_{n+1}) & \dots & \varphi_n(x_{n+1}) & (-1)^n \end{pmatrix}$$

regulär ist.

Hinweis: Man beachte MfL Bd. 10, 5.3., Hilfssatz 2.

Lösung: Aus dem zitierten Hilfssatz folgt, daß die ersten  $n$  Spalten der Matrix linear unabhängig sind. Die letzte Spalte wiederum ist von diesen linear unabhängig, da aus

$$(1, -1, \dots, (-1)^n)^T = \sum_{i=1}^n a_i (\varphi_i(x_1), \varphi_i(x_2), \dots, \varphi_i(x_{n+1}))^T$$

folgen würde, daß die Linearkombination  $\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x)$  auf  $[[a, b]]$  mindestens  $n$  Nullstellen hat. Dem widerspricht, daß die  $\varphi_i$  auf  $[[a, b]]$  ein Čebyšev-System bilden.

c) Die Menge  $X$  enthalte genau  $n + 1$  Punkte. Man zeige, daß für gegebenes  $f \in M_X$  das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(x_i) - f(x_i) = (-1)^i d, \quad i = 1(1)n + 1,$$

in den Unbekannten  $a_j, d$  genau eine Lösung hat und  $F_a = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j$  Minimallösung für  $f$  ist.

Lösung: Die eindeutige Lösbarkeit folgt aus dem nach b) gegebenen Nichtverschwinden der Koeffizientendeterminante. Da  $F_a - f$  auf  $X$  nur die Werte  $\pm d$  annimmt, muß

$$|d| = \max_{x \in X} |F_a(x) - f(x)|$$

gelten, d. h.,  $F_a - f$  alterniert auf  $X$   $n$ -mal, und  $F_a$  ist auf Grund von a) Bestapproximation von  $f$ .

Bemerkung: Die Durchrechnung eines Zahlenbeispiels ist Gegenstand von Aufgabe 14 im Abschnitt „Lösung von Gleichungen“.

5. In Aufgabe 5 des Abschnitts „Arbeitsstufen der Problemanalyse“ wurde ein Gelenkmechanismus betrachtet. Für die Bahnkurve des Punktes  $M$  war die Gleichung

$$z^3 + (2r + y^2) z^2 + [2y^2(r + 2a^2) + r^2] z + y^2 r^2 + 4y^2 a^2 (y^2 - b^2) = 0$$

hergeleitet worden. Es sind  $x, y$  die Koordinaten von  $M$  im kartesischen System der Abb. 6.5,

$$z := x^2, \quad r := y^2 - a^2 + c^2 - b^2,$$

wobei  $a, b, c$  als Systemparameter die Abmessungen der Stangen sind. Man bestimme  $a, b, c$  so, daß der Mechanismus über einem Intervall  $\alpha \leq z \leq \beta$  optimale Geradföhrung realisiert, d. h.,  $y$  soll für die diesen  $z$  entsprechenden  $x$  möglichst wenig von einem konstanten Wert  $y_0$  abweichen.

Lösung: Die Forderung läuft darauf hinaus, daß das Polynom

$$P_3(z) = z^3 + (2r + y_0^2) z^2 + [2y_0^2(r + 2a^2) + r^2] z + y_0^2 r^2 + 4y_0^2 a^2 (y_0^2 - b^2)$$

über dem Intervall  $[[\alpha, \beta]]$  möglichst wenig von Null abweicht. Nach MfL Bd. 10, 5.3.2. (50), muß  $P_3(z)$  dann mit dem transformierten Polynom  $\frac{(\beta - \alpha)^3}{2^3} \hat{T}_3 \left( \frac{2z - (\beta + \alpha)}{\beta - \alpha} \right)$  übereinstimmen, wobei  $\hat{T}_3$  das normierte Čebyšev-Polynom dritten Grades bedeutet. Die

maximale Abweichung von Null über dem Intervall  $[\alpha, \beta]$  ist

$$d = \frac{(\beta - \alpha)^3}{2^6}. \quad (1)$$

Aus  $\hat{T}_3(t) = t^3 - \frac{3}{4}t$  ergibt sich

$$P_3(z) = z^3 - \frac{3}{2}(\alpha + \beta)z^2 + \frac{3}{16}(\alpha + 3\beta)(\beta + 3\alpha)z - \frac{1}{32}(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2 + 14\alpha\beta)$$

und durch Koeffizientenvergleich

$$\left. \begin{aligned} 2r + y_0^2 &= -\frac{3}{2}(\alpha + \beta) = p_2, \\ r^2 + 2y_0^2(r + 2a^2) &= \frac{3}{16}(\alpha + 3\beta)(\beta + 3\alpha) = p_1, \\ y_0^2 r^2 + 4y_0^2 a^2 (y_0^2 - b^2) &= -\frac{1}{32}(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2 + 14\alpha\beta) = p_0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Durch Elimination von  $\alpha, \beta$  findet man für die zur Abkürzung der rechten Seiten eingeführten Größen  $p_0, p_1, p_2$  die Gleichung  $27p_0 = p_2(9p_1 - 2p_2^2)$  und nach Einsetzen der linken Seiten von (2)

$$y_0^3 = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^3}{18a^2(2c^2 + b^2 - 2a^2)}. \quad (3)$$

Damit ergibt sich  $y_0$  als Funktion der Systemparameter, und man erkennt, daß die Aufgabe keine Lösung hat, wenn

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2c^2 + b^2 - 2a^2} < 0 \quad (4)$$

ist.

Aus Symmetriegründen ist der Fall  $\alpha = 0$  von besonderem Interesse. Dafür nimmt (2) die Form

$$\left. \begin{aligned} 2r + y_0^2 &= -\frac{3}{2}\beta, \\ r^2 + 2y_0^2(r + 2a^2) &= \frac{9}{16}\beta^2, \\ y_0^2 r^2 + 4y_0^2 a^2 (y_0^2 - b^2) &= -\frac{1}{32}\beta^3 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

an.

Die Approximation der Geraden  $y = y_0$  findet über einem Intervall der  $x$ -Achse von der Länge  $l = 2\sqrt{\beta}$  statt, und die maximale Abweichung des Polynoms  $P_3$  von Null ist nach (1)

$$d = \frac{\beta^3}{32} = \frac{1}{2048} l^6. \quad (6)$$

Eine Synthesaufgabe könnte nach folgendem Schema gelöst werden:

1. Vorgabe von  $d$  als Maß der Approximationsgüte und Berechnung von  $\beta$  gemäß (6):

$$\beta = \sqrt[3]{32d}.$$

2. Berechnung von  $a, b, c$  als Lösung von (5) mit Beachtung von (3) und der Definition von  $r$ .

Man gibt etwa  $y_0$  vor und berechnet  $r$  aus der ersten Gleichung (5), danach  $a$  aus der zweiten und schließlich  $b$  aus der dritten. Mit diesen Werten liefert die Definitionsgleichung von  $r$  die Größe  $c$ .

Zahlenbeispiele:

a)  $\beta = \frac{1}{3}, y_0 = 1; r = -\frac{3}{4}, a = \frac{1}{2}, b = 1,2505, c = 0,2523.$

b)  $\beta = \frac{1}{4}, y_0 = 1; r = -\frac{11}{16}, a = 0,4841, b = 1,2267, c = 0,2271.$

6. Es sei  $f: x \mapsto x - \frac{1}{x}$  und  $F_a$  die durch  $F_a(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  definierte Funktionenschar. Bezüglich der Stellen  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$  werden die Vektoren

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{F}_a = \begin{pmatrix} F_a(x_1) \\ F_a(x_2) \\ F_a(x_3) \\ F_a(x_4) \end{pmatrix}$$

gebildet. Wie lautet die Minimallösung für das mit einer beliebigen Vektornorm  $\|\cdot\|$  des  $\mathbb{R}^4$  formulierte Approximationsproblem

$$Z(\mathbf{a}) = \varrho(f, F_a) := \|\hat{f} - \hat{F}_a\| = \text{Min!}$$

auf  $X$ , wobei  $X$  eine beliebige Menge reeller Zahlen bedeutet, welche die Stellen  $x_i, i = 1, 2, 3, 4$ , enthält.

7. Die Funktion  $f: x \mapsto \frac{1}{x}$  soll auf  $\llbracket x_0, x_0 + 1 \rrbracket, x_0 > 0$ , durch ein Polynom der Schar  $F_a: x \mapsto a$  approximiert werden. Man bestimme die Minimallösungen zu den Distanzfunktionen

a)  $Z(\mathbf{a}) = \int_{x_0}^{x_0+1} [f(x) - F_a(x)]^2 dx$

und

b)  $Z(\mathbf{a}) = [f(x_0) - F_a(x_0)]^2 + \left[ f\left(x_0 + \frac{1}{2}\right) - F_a\left(x_0 + \frac{1}{2}\right) \right]^2 + [f(x_0 + 1) - F_a(x_0 + 1)]^2.$



8. Man interpretiere die Aufgaben 1a), b) und c) als Quadratmittelapproximationsprobleme und löse die mit den entsprechenden Skalarprodukten gebildeten Normalgleichungssysteme.
9. Die Legendreschen Polynome  $P_j$  sind im unitären Raum  $\mathbf{C}_{(-1,1)}$  mit dem Skalarprodukt

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx$$

orthogonal. Man vergleiche die nach der fünften Potenz abgebrochene MacLaurin-Entwicklung der Funktion  $y = \sin \frac{\pi}{2} x$  mit der Quadratmittelapproximation durch die  $P_j, j = 0(1)5$ . Für die Minimallösung ist der Wert der Distanzfunktion zu berechnen.

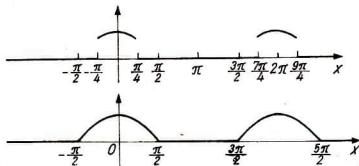


Abb. 6.25

10. In Abb. 6.25 sind Gleichrichtercurven dargestellt, die aus dem Graphen der Kosinusfunktion hergeleitet wurden. Man bestimme deren beste Quadratmittelapproximation durch trigonometrische Polynome.
11. Man betrachte über dem Intervall  $-\pi \leq x \leq 0$  die Funktion  $y = \sin x$  und setze diese durch die Funktionen a)  $y = 1$ , b)  $y = 0$  und c)  $y = -\frac{1}{\pi} x(x - \pi)$  in das Intervall  $0 < x < \pi$  fort.  
Es bezeichne  $f$  eine der auf diese Weise im Intervall  $[-\pi, \pi[$  definierten Funktionen. Es sind die Fourierkoeffizienten von  $f$  bezüglich des trigonometrischen Systems

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}, \quad \varphi_{2j-1}(x) = \sin jx, \quad \varphi_{2j}(x) = \cos jx, \quad j = 1, 2, \dots,$$

zu berechnen und in ihrem Verhalten für  $j \rightarrow \infty$  miteinander zu vergleichen. Welcher Zusammenhang mit Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften der auf die ganze Zahlgerade periodisch fortgesetzten Funktion  $f$  ist erkennbar?

12. Im Raum  $\mathbf{R}^2$  der Vektoren  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  mit  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$  wird das Skalarprodukt

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

betrachtet.

- a) Man zeige, daß die Elemente  $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  linear unabhängig sind, und bestimme die beste Quadratmittelnäherung von  $f = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  in der Vektorschchar  $F_a = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2$ .
- b) Die entsprechende Aufgabe ist bezüglich der Schar  $F_a = a_1\varphi_1$  zu lösen.
- c) Man orthogonalisiere die Elemente  $\varphi_1, \varphi_2$  nach dem Verfahren von E. SCHMIDT und zeige, daß die lineare Hülle der resultierenden Vektoren  $\psi_1, \psi_2$  mit der von  $\varphi_1, \varphi_2$  übereinstimmt.
- d) Nach Berechnung der Fourierkoeffizienten  $a_1^*, a_2^*$  von  $f$  bezüglich  $\psi_1, \psi_2$  verifiziere man die Besselsche Ungleichung.

13. Es sei  $\mathbf{E}$  der unitäre Raum der auf  $[-1, 1]$  stetigen Funktionen mit dem Skalarprodukt

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx, \quad f, g \in \mathbf{E}.$$

Bezüglich der Elemente  $f: x \rightarrow \sqrt{1-x^2}$ ,  $\varphi_0: x \mapsto 1$ ,  $\varphi_1: x \mapsto x$ ,  $\varphi_2: x \mapsto x^2$  formuliere und löse man die der Aufgabe 12 entsprechenden Probleme.

14.\* Es seien  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$  linear unabhängige Vektoren des  $\mathbf{R}^n$  und  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p$  die daraus nach dem Verfahren von E. SCHMIDT bezüglich eines Skalarprodukts (...) gewonnenen orthonormierten Elemente. Man zeige, daß mit den aus den Spalten  $\varphi_i$  bzw.  $\psi_i$  gebildeten Matrizen des Typs  $n \times p$  die folgende Faktorisierung vorgenommen werden kann:

$$(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p) = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p) \begin{pmatrix} (\psi_1, \varphi_1) & (\psi_1, \varphi_2) & \dots & (\psi_1, \varphi_p) \\ 0 & (\psi_2, \varphi_2) & \dots & (\psi_2, \varphi_p) \\ 0 & 0 & \dots & (\psi_3, \varphi_p) \\ \hline 0 & 0 & \dots & (\psi_p, \varphi_p) \end{pmatrix};$$

der zweite Faktor der rechten Seite ist eine obere Dreiecksmatrix des Typs  $p \times p$ .

15. In MfL Bd. 10, 5.2.4., wurde mit Hilfe einer Orthogonalisierung der Potenzen  $\varphi_0(x) = 1$ ,  $\varphi_1(x) = x$ , ...,  $\varphi_5(x) = x^5$  über der Menge  $X = \{x_j\}$ ,  $x_j = 0,0(0,3)2,7$ , die beste Quadratmittelnäherung der gemäß Tabelle 6.18 definierten Funktion  $f$  durch ein auf  $X$  eingeschränktes Polynom fünften Grades bestimmt. Man stelle das bezüglich der  $\varphi_i$ ,  $i = 0(1)5$ , gebildete System der Normalgleichungen auf. Skalarprodukt zweier auf  $X$  definierten Funktionen  $f, g$  sei

$$(f, g) = \sum_{j=1}^{10} f(x_j) g(x_j).$$

Die Lösung des Systems der Normalgleichungen ist Gegenstand von Aufgabe 7 im Abschnitt „Lösung von Gleichungen“.

Tabelle 6.18

| $j$      | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7      | 8      | 9      | 10     |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| $x_j$    | 0,0   | 0,3   | 0,6   | 0,9   | 1,2   | 1,5   | 1,8    | 2,1    | 2,4    | 2,7    |
| $f(x_j)$ | 1,300 | 1,245 | 1,095 | 0,855 | 0,514 | 0,037 | -0,600 | -1,295 | -1,767 | -1,914 |

16. Man führe die angenäherte harmonische Analyse der in MfL Bd. 10, 5.2.5., tabulierten Kippspannung mit einem trigonometrischen Polynom dritten Grades durch.

17. Es soll  $f: x \mapsto x^3$  auf  $\llbracket -1, 2 \rrbracket$  optimal in der Čebyšev-Norm durch ein Polynom der Schar  $F_{\mathbf{a}}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$  approximiert werden.

Hinweis: Man beachte MfL Bd. 10, 5.3.2., Satz 6.

18.\* Die Funktion  $y = 1 - 2x$  ist über dem Intervall  $\llbracket 0, 1 \rrbracket$  in der Čebyšev-Norm optimal durch eine Funktion der Schar  $F_{\mathbf{a}}(x) = a_1x + a_2x^2$  zu approximieren.

a) Die folgende Überlegung enthält einen Fehler; man decke diesen auf: Nach MfL Bd. 10, 5.1.2., Satz 2, ist die Aufgabe lösbar;  $F_{\mathbf{a}^*}(x) = a_1^*x + a_2^*x^2$  sei eine Minimallösung. Das Polynom  $P^*(x) = a_2^*x^2 + a_1^*x + 2x - 1$  weicht also unter den Polynomen zweiten Grades mit dem Leitkoeffizienten  $a_2^*$  am wenigsten von Null ab und muß daher nach MfL Bd. 10, 5.3.2., Satz 6, mit dem transformierten Čebyšev-Polynom

$$\hat{T}_2(x) = \frac{1}{4} a_2^* \left[ (2x - 1)^2 - \frac{1}{2} \right]$$

übereinstimmen. Der Koeffizientenvergleich liefert

$$-a_2^* = a_1^* + 2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{8} a_2^* = -1,$$

also

$$a_2^* = -8 \quad \text{und} \quad a_1^* = 6.$$

$F_{\mathbf{a}^*}$  ist eindeutig bestimmt; die maximale Abweichung ist 1.

b) Für  $x = 0$  nehmen die Polynome  $P(x) = a_2x^2 + a_1x + 2x - 1$  unabhängig von  $a_1, a_2$  den Wert  $-1$  an, d. h., die maximale Abweichung von Null kann bei keinem dieser Polynome den Wert 1 unterschreiten. Die unter a) bestimmte Funktion  $F_{\mathbf{a}^*}$  ist also Bestapproximation, aber nicht die einzige. Man bestimme sämtliche Minimallösungen.

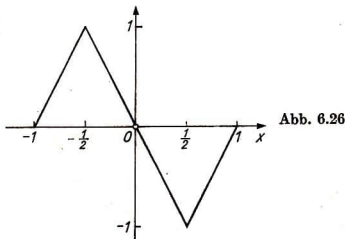
c) Man diskutiere das Ergebnis in Verbindung mit MfL Bd. 10, 5.3., Satz 3.

19.\* Man diskutiere über dem Intervall  $\llbracket -1, 1 \rrbracket$  die optimale Čebyšev-Approximation der in Abb. 6.26 dargestellten Funktion  $f$  durch Polynome der Form  $F_{\mathbf{a}}(x) = a + bx^2$ .

20. a) Die Funktion  $y = e^x$  soll über dem Intervall  $[-1, 1]$  mit einer Toleranz von 0,01 durch ein Polynom  $P$  dritten Grades approximiert werden.

Hinweis: Man gehe von der nach der fünften Potenz abgebrochenen Maclaurinschen Reihe der Exponentialfunktion aus und wende die in MFL Bd. 10, 5.3.2., dargestellte Methode der Minimierung des Abbruchfehlers bei Potenzreihen an.

- b) Man untersuche die Abweichung  $d(x) = e^x - P(x)$  im Intervall  $[-1, 1]$ . Ist  $P$  gleichmäßige Bestapproximation von  $e^x$ ?



- 21.\* Man approximiere die Funktion  $y = \frac{\sin x}{x}$  über dem Intervall  $[-1, 1]$  mit einer Toleranz von  $10^{-5}$  durch ein Polynom möglichst niedrigen Grades, das nach der Methode der Aufgabe 20 aus der Taylorentwicklung

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$$

gewonnen wird, wenn man diese nach der achten Potenz abbricht.

## Lösung von Gleichungen

### Kontrollfragen

1. Man beschreibe den  $k$ -ten Umformungsschritt zur Lösung eines linearen Gleichungssystems nach dem Verfahren von GAUSS. Welche Bedeutung hat die Pivotierung?
2. Unter welcher Voraussetzung kann ein lineares Gleichungssystem mit dem verketteten Algorithmus von GAUSS gelöst werden? Man erläutere das Schema von CROUT.
3. Welche linearen Gleichungssysteme können nach dem Verfahren von CHOLESKY gelöst werden? In welchen Schritten vollzieht sich die Lösung nach diesem Verfahren?

4. Was ist eine Matrixnorm? Wann nennt man diese mit einer Vektornorm verträglich?
5. Wie ist der Begriff der Äquivalenz zweier Normen in einem linearen Raum erklärt? Was kann über die Äquivalenz von Normen in endlichdimensionalen Räumen gesagt werden?
6. Man formuliere den Fixpunktsatz von BANACH und die Fehlerabschätzungen a priori und a posteriori.
7. Der Fixpunktsatz von BANACH ist Grundlage für die iterative Lösung linearer Gleichungssysteme. Man geht dazu von der Form  $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{c}$  aus. Unter welcher Voraussetzung über  $\mathbf{B}$  ist die Abbildung  $f: \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{c}$  kontrahierend?
8. Man formuliere das Zeilen-, Spalten- und Quadratsummenkriterium.
9. Man gebe eine Übersicht über Methoden zur Lösung linearer Gleichungssysteme und charakterisiere die einzelnen Verfahren auch hinsichtlich des Rechenaufwandes.
10. Unter welchen Voraussetzungen kann ein nichtlineares Gleichungssystem auf iterativem Wege gelöst werden? Wann sagt man, daß eine Funktion  $f$  eine Lipschitz-Bedingung erfüllt? Wie läßt sich dies praktisch zeigen?
11. Man stelle die Verfahren zur Bestimmung einer oberen Schranke für die Nullstellen eines Polynoms zusammen und begründe das Vorgehen zur Ermittlung einer entsprechenden unteren Schranke.
12. Wie geht man bei der Bestimmung der Anzahl der Nullstellen eines Polynoms in einem Intervall  $[[a, b]]$  nach dem Satz von BUDAN-FOURIER vor?
13. Man formuliere die Cartesische Zeichenregel und erläutere ihre Anwendung an Beispielen.
14. Welcher Ansatz liegt der Methode von BAIRSTOW-HITCHCOCK zur Bestimmung von Polynomnullstellen zugrunde?

### Aufgaben

1. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$x_1 + 4x_2 - x_3 = p,$$

$$2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = q,$$

$$5x_1 + 18x_2 + ax_3 = r.$$

- a) Es sei zunächst  $a = 0$ . Man stelle mit Hilfe des Algorithmus von GAUSS fest, ob das System für beliebige Werte von  $p, q, r$  lösbar ist, und ermittle gegebenenfalls alle Lösungen des Systems.
- b) Man begründe, daß das lineare Gleichungssystem im Fall  $a \neq 0$  für beliebige Werte von  $p, q, r$  genau eine Lösung besitzt.

c) Man bestimme die Lösung für  $a = 10^{-5}$ ,  $p = \frac{1}{7}$ ,  $q = \frac{2}{13}$  und  $r = \frac{757}{1300}$  durch rundungsfehlerfreies Rechnen mit rationalen Zahlen. Damit ist das Resultat zu vergleichen, das sich nach Abarbeitung des Gaußschen Algorithmus mit Hilfe eines Taschenrechners ergibt.

Lösung: a) Nach dem ersten Umformungsschritt hat man

$$\begin{aligned}x_1 + 4x_2 - x_3 &= p, \\ -2x_2 + 5x_3 &= -2p + q, \\ -2x_2 + 5x_3 &= -5p + r,\end{aligned}$$

woraus  $0 = 3p + q - r$  folgt. Genügen  $p$ ,  $q$ ,  $r$  der letzten Gleichung, so ist das System lösbar. In diesem Fall ist

$$\begin{aligned}x_1 &= -3p + 2q - 9t, \\ x_2 &= p - \frac{1}{2}q + \frac{5}{2}t, \\ x_3 &= t.\end{aligned}$$

b) Es ist

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 5 & 18 & a \end{vmatrix} = -2a \neq 0$$

und daher das Gleichungssystem eindeutig lösbar.

c) Mit

$$x_3 = \frac{1}{a}(r - q - 3p) = -\frac{1000}{91} = -10,989011$$

folgt

$$x_1 = -3p + 2q - 9x_3 = \frac{8989}{91} = 98,780219,$$

$$x_2 = p - \frac{1}{2}q + \frac{5}{2}x_3 = -\frac{2494}{91} = -27,406593.$$

Nach dem Gaußschen Algorithmus folgt für die zweite und dritte Gleichung bei Rundung auf sieben Dezimalstellen

$$\begin{aligned}-2x_2 + 5x_3 &= -0,1318681, \\ -2x_2 + (5 + 10^{-5})x_3 &= -0,1319779.\end{aligned}$$

Der nächste Schritt führt auf  $10^{-5}x_3 = -0,0001098$ , woraus

$$x_3 = -10,98$$

folgt. Die weitere Rechnung mit diesem Resultat ergibt

$$\begin{aligned}x_2 &= -27,384065, \\ x_1 &= 98,69911.\end{aligned}$$

2. Die exakte Lösung des linearen Gleichungssystems  $Ax = b$  mit der regulären Koeffizientenmatrix  $A$  des Typs  $n \times n$  sei  $x$ . Wird mit einem Algorithmus infolge von Rundungsfehlern statt dessen der Näherungsvektor  $x^*$  berechnet und setzt man  $x = x^* + \delta$ , so gilt  $A(x^* + \delta) = b$ , d. h., der Korrekturvektor  $\delta$  kann als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$A\delta = \varepsilon \quad \text{mit} \quad \varepsilon = b - Ax^*$$

bestimmt werden. Wurde  $x^*$  mit dem Gaußschen Algorithmus gefunden, so sind lediglich dessen Operationen mit den Störgliedern auf  $\varepsilon$  auszudehnen, während die Umformungen der Koeffizientenmatrix von der Berechnung des Vektors  $x^*$  übernommen werden können.

Man berechne mit dem Gaußschen Algorithmus die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 530,20,$$

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 591,01,$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 378,02$$

(vgl. MfL Bd. 10, 6.1.(8)) mit zwei gültigen Ziffern nach dem Komma.  $x^*$  sei der Vektor der auf eine Stelle nach dem Komma gerundeten Lösungskomponenten; dieser ist nach der dargelegten Methode zu korrigieren.

Lösung: Durch Subtraktion des Doppelten und Dreifachen der letzten Gleichung von der zweiten bzw. ersten gewinnt man

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 378,02,$$

$$x_2 + 2x_3 = 150,965,$$

$$x_3 = 41,2575$$

und daraus

$$x_3 = 41,26, \quad x_2 = 68,45, \quad x_1 = 117,35.$$

Der zu betrachtende Näherungsvektor ist  $x^* = \begin{pmatrix} 117,4 \\ 68,5 \\ 41,3 \end{pmatrix}$ , und für  $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$  ergibt sich

$$\varepsilon_1 = 530,20 - 530,5 = -0,3,$$

$$\varepsilon_2 = 591,01 - 591,4 = -0,39,$$

$$\varepsilon_3 = 378,02 - 378,3 = -0,28.$$

Die entsprechenden Störglieder des Systems in Diagonalform sind

$$\bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_3 = -0,28,$$

$$\bar{\varepsilon}_2 = -\frac{1}{4}(\varepsilon_1 - 3\varepsilon_3) = -0,135,$$

$$\bar{\varepsilon}_3 = -\frac{1}{4}(\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3) = -0,0425.$$

Damit findet man für den Vektor  $\delta$

$$\delta_3 = -0,0425, \quad \delta_2 = -0,05, \quad \delta_1 = -0,0525$$

und für die korrigierte Lösung

$$x_1 = 117,35, \quad x_2 = 68,45, \quad x_3 = 41,26.$$

3. Man berechne den Wert  $\Delta$  der Koeffizientendeterminante des Normalgleichungssystems aus Aufgabe 15 im Abschnitt „Approximationstheorie“.

Lösung: Die Koeffizientenmatrix ist nach MfL Bd. 10, 6.1.2., positiv definit, und der Gaußsche Algorithmus kann ohne Zeilen- und Spaltenvertauschung in Form des Schemas von CROUT abgearbeitet werden. Der gesuchte Determinantenwert ist das Produkt der in 6.1.2. (22) eingeführten Elemente  $c_{kk}$ ,  $k = 1(1)n$ . Mit der Prozedur CROUT wurden dafür die Werte

$$\begin{aligned} c_{11} &= 10, & c_{22} &= 7,4250000, & c_{33} &= 4,2768000, \\ c_{44} &= 2,2518012, & c_{55} &= 1,0816566, & c_{66} &= 0,4793295 \end{aligned}$$

berechnet. Es ergibt sich

$$\Delta = 370,74.$$

4. Zu der in Aufgabe 3 betrachteten Koeffizientenmatrix  $A$  berechne man die Inverse.

Lösung: Nach MfL Bd. 3, 6.5., kann das durch Lösen der linearen Gleichungssysteme

$$Ax = e_j, \quad j = 1(1)n,$$

erfolgen, wobei  $e_j$  der Vektor mit den Koordinaten  $\delta_{ij}$  (Kroneckersymbol) ist. Sind  $x^{(j)}$  die entsprechenden Lösungsvektoren, so ist  $A^{-1}$  die Matrix mit den  $x^{(j)}$  als Spalten. Mit dem Verfahren von CHOLSKY ergab sich

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.980 & -5.166 & 8.982 & -6.833 & 2.356 & -0.301 \\ -5.166 & 81.459 & -203.961 & 188.551 & -73.500 & 10.228 \\ 8.982 & -203.961 & 563.224 & -549.432 & 221.757 & -31.623 \\ -6.833 & 188.551 & -549.432 & 553.686 & -228.554 & 33.135 \\ 2.356 & -73.500 & 221.757 & -228.554 & 95.892 & -14.076 \\ -0.301 & 10.228 & -31.623 & 33.135 & -14.076 & 2.086 \end{pmatrix}$$

5. Es sei  $B = \alpha A$ ,  $\alpha > 0$ , wobei  $A$  die in Aufgabe 4 betrachtete Matrix ist. Man berechne die Konditionszahl bezüglich der Norm  $|\cdot|_{\infty}$ .

Lösung:

$$|A|_{\infty} = 4,754 \cdot 10^4, \quad |A^{-1}|_{\infty} = 1,579 \cdot 10^3, \quad \mu(A) = 7,507 \cdot 10^7;$$

$$|B|_{\infty} = \alpha |A|_{\infty}, \quad |B| = \alpha^n |A|, \quad |B^{-1}|_{\infty} = \frac{1}{\alpha} |A^{-1}|_{\infty}, \quad \mu(B) = \mu(A).$$

6. In MfL Bd. 10, 6.1.4., wurde

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$



als Beispiel für eine schlecht konditionierte Matrix vorgestellt. Man berechne für die Matrix  $\bar{A}$ , die aus  $A$  durch Ersetzung des Elements  $a_{11}$  durch den Wert 4,993 entsteht,  $\bar{A}^{-1}$  und interpretiere das Ergebnis im Hinblick auf MfL Bd. 10, 6.1.4. (106).

Lösung: Nach der in Aufgabe 4 rekapitulierten Methode findet man mit Hilfe des Algorithmus von CHOLESKY

$$\bar{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 129.771 & -78.244 & -32.443 & 19.084 \\ -78.244 & 47.456 & 19.311 & -11.477 \\ -32.443 & 19.311 & 8.861 & -5.271 \\ 19.084 & -11.477 & -5.271 & 3.336 \end{pmatrix}.$$

7. Man löse das in Aufgabe 15 im Abschnitt „Approximationstheorie“ betrachtete Normalgleichungssystem  $Ax = b$  nach den in MfL Bd. 10 erörterten direkten Methoden.

Lösung: Die Rechnung wurde auf einer BESM 6 mit Benutzung der in MfL Bd. 10, 6., angegebenen Prozeduren durchgeführt (vgl. Tab. 6.19).

Tabelle 6.19

| Verfahren | GAUSS      | CHOLESKY   | CROUT      |
|-----------|------------|------------|------------|
| $a_0$     | 1.3033682  | ebenso     | ebenso     |
| $a_1$     | -0.1113355 | -0.1113357 | -0.1113357 |
| $a_2$     | -0.4277677 | -0.4277670 | -0.4277668 |
| $a_3$     | 0.2217248  | 0.2217241  | 0.2217239  |
| $a_4$     | -0.3044978 | -0.3044975 | -0.3044974 |
| $a_5$     | 0.0838086  | 0.0838085  | 0.0838085  |

8. An einem Dreibeck, dessen Spitze  $S$  6 m über der Basis liegt und dessen Stablagen der Abb. 6.27 zu entnehmen sind, greift in Richtung von  $S$  nach  $T$  ( $T$  liegt in der von  $A, B, C$  aufgespannten Ebene) eine Kraft von  $10^4$  N an. Man berechne die in den Punkten  $A, B, C$  wirkenden Kräfte, wenn vom Gewicht der Stäbe abgesehen wird.

Lösung: Es seien  $e_1, e_2, e_3$  die Einheitsvektoren des kartesischen Koordinatensystems von Abb. 6.27 und  $a, b, c, t$  die den Vektoren  $\vec{SA}, \vec{SB}, \vec{SC}, \vec{ST}$  entsprechenden Einheitsvektoren. Dann gilt

$$a = \frac{1}{14} (-12e_1 + 4e_2 - 6e_3),$$

$$b = \frac{1}{19} (-e_1 - 18e_2 - 6e_3),$$

$$c = \frac{1}{7} (3e_1 + 2e_2 - 6e_3),$$

$$t = \frac{1}{14} (-12e_1 - 4e_2 - 6e_3).$$



## 10. Gegeben sind die Gleichungssysteme

a)  $2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 4,$     b)  $2x_1 - 5x_2 + x_3 = 14,$

$-x_1 + x_2 + 3x_3 = 4,$      $-x_1 + x_2 + 2x_3 = 7,$

$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6;$      $3x_1 + 2x_2 - x_3 = -1.$

Man prüfe, ob die Voraussetzungen zur Anwendung des verketteten Gaußschen Algorithmus erfüllt sind, und löse die Gleichungssysteme gegebenenfalls mit Hilfe des Schemas von CROUT.

## 11. Warum ist das Gleichungssystem

$x_1 + x_2 + 3x_3 = 12,$

$x_1 + x_2 + 4x_3 = 15,$

$5x_1 + x_2 + 2x_3 = 13$

nicht nach dem verketteten Gaußschen Algorithmus lösbar, obwohl die Koeffizientenmatrix regulär ist? Man zeige, daß nach der Vertauschung der zweiten und dritten Gleichung das System mit Hilfe des Schemas von CROUT gelöst werden kann, und bestimme die Lösung.

## 12. Gegeben ist das Gleichungssystem

$5x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 16,$

$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 11,$

$3x_1 + x_2 + 6x_3 = 3.$

Man überzeuge sich, daß alle Voraussetzungen für die Anwendung des Verfahrens von CHOLBSKY erfüllt sind, und ermittle die Lösung nach dieser Methode.

## 13. Es werde die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 2 & 0 \\ -3 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

betrachtet.

a) Man zeige, daß alle Abschnittsdeterminanten der Matrix  $A$  von Null verschieden sind.

b) Man zerlege mit Hilfe des Schemas von CROUT die Matrix derart, daß  $A = C \cdot B$  gilt, wobei  $C$  untere und  $B$  obere Dreiecksmatrix mit  $b_{ii} = 1$  für  $i = 1(1)4$  ist.

14. Für die in Tabelle 6.13 gegebene Funktion  $f$  berechne man nach Aufgabe 4c) im Abschnitt „Approximationstheorie“ dasjenige Polynom höchstens sechsten

Grades, welches  $f$  auf der Menge  $X$  der Meßwerte für den Kettenglieddurchmesser gleichmäßig am besten approximiert. Man ermittle die maximale Abweichung.

15. Das lineare Gleichungssystem

$$4x_1 + x_2 + x_3 = 4,$$

$$x_1 + 2x_2 = 5,$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 = -5$$

forme man in geeigneter Weise in eine Gleichung zweiter Art  $x = Bx + c$  um und zeige, daß die durch  $f: x \mapsto Bx + c$  vermittelte Abbildung kontrahierend ist.

Ausgehend von einem Startvektor  $x^{(0)}$  bestimme man die Näherungen  $x^{(1)}$ ,  $x^{(2)}$ ,  $x^{(3)}$  nach dem Gesamtschrittverfahren und schätze den Fehler a posteriori ab. Man wende auch das Einzelschrittverfahren an.

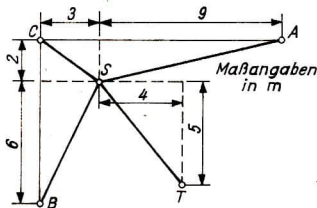


Abb. 6.28

16. Das lineare Gleichungssystem

$$7x_1 - x_2 - x_3 = 2,$$

$$x_1 + 7x_2 + x_3 = 18,$$

$$x_1 + x_2 - 7x_3 = -18$$

hat die Lösung  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$ .

- Man berechne diese iterativ nach dem Gesamtschrittverfahren.
  - Man zeige, daß das Einzelschrittverfahren konvergiert. Damit sind einige Iterationen zu berechnen.
  - Man führe an einer der in a) und b) bestimmten Näherungen eine Fehlerabschätzung a posteriori durch.
17. Man löse Aufgabe 8, beziehe sich jedoch auf die in Abb. 6.28 gegebenen Stablagen eines Dreiblocks.
18. Das folgende lineare Gleichungssystem ist iterativ nach der Nekrasov-Seidelschen Methode (Einzelschrittverfahren) und nach dem Algorithmus der Prozedur

TRIDAG aus MfL Bd. 10, 6.1.2., zu lösen:

$$\begin{aligned} 3,955x_1 - 1,013x_2 &= 0,3068, \\ -1,007x_1 + 3,926x_2 - 1,023x_3 &= 0,8669, \\ -1,013x_2 + 3,887x_3 - 1,038x_4 &= 1,3168, \\ -1,021x_3 + 3,841x_4 &= 2,7997. \end{aligned}$$

19. Man berechne mit einem Taschenrechner die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x &= \sin(x + y), \\ y &= \cos(x - y). \end{aligned}$$

20. Gegeben ist das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{8}x_1^2 - \frac{1}{10}x_2^2 + 1, \\ x_2 &= \frac{1}{24}x_1^3 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Die Betrachtungen werden auf die Umgebung  $\bar{U}_1(z) = \{x: \|x - z\|_2 \leq 1\}$  mit  $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  beschränkt.

a) Man ermittle geeignete Lipschitzkonstanten und zeige, daß das System nach einer Verallgemeinerung von MfL Bd. 9, 4.1.1., Satz 1, iterativ gelöst werden kann.

b) Man bestimme, ausgehend von  $x^{(0)} = z$ , die Näherungen  $x^{(1)}$ ,  $x^{(2)}$ ,  $x^{(3)}$  durch sukzessive Approximation und schätze den Fehler a posteriori ab.

21. In Aufgabe 2 zum Abschnitt „Ausgewählte Gegenstände der Numerischen Mathematik“ wurde mit einer Eliminationsmethode

$$\xi = -3,9498811, \quad \eta = -0,7281126$$

als eine Näherungslösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} F(x, y) &= x^2 - 2xy + 3x + 2 = 0, \\ G(x, y) &= 2xy - y^2 + x - y - 2 = 0 \end{aligned}$$

bestimmt. Ausgehend vom Startpunkt  $x^{(0)} = -3,95$ ,  $y^{(0)} = -0,73$ , berechne man nach dem Newtonschen Verfahren die folgende Näherung  $x^{(1)}$ ,  $y^{(1)}$ .

22. Gegeben ist das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x^3 - 27xy^2 + 25 &= 0, \\ 4x^2y - 3y^3 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

- a) Man zeige, daß dieses in der mit der Maximum-Betrag-Norm gebildeten Umgebung  $\bar{U}_{0,25}(z)$  mit  $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  genau eine Lösung besitzt, und berechne diese nach der Methode der sukzessiven Approximation.
- b) Man berechne nach dem Newtonschen Verfahren die auf den Startpunkt  $z$  folgende Näherung und vergleiche das Ergebnis mit dem von a).

23. Gegeben sind die Polynome

$$P_1(x) = x^3 + 2x^2 - 9x + 3,$$

$$P_2(x) = x^4 + 5x^3 + x^2 + 18x - 14,$$

$$P_3(x) = x^5 - x^4 - 11x^3 + 9x^2 + 18x - 4.$$

Man ermittle für die Nullstellen jedes Polynoms eine obere Schranke auf folgendem Wege:

a) Zuerst wird  $L_0 := 1 + \frac{A}{|a_n|}$  mit  $A := \max(|a_{n-1}|, \dots, |a_0|)$  bestimmt und weiter festgestellt, welchen Wert man für  $L_1 := 1 + \sqrt[m]{\alpha}$  nach der Regel von LAGRANGE-MACLAUREN erhält.

b) Mit Hilfe der Regel von NEWTON und eventuell der Regel von LAGUERRE wird geprüft, ob sich, ausgehend von  $L_0$  bzw.  $L_1$ , eine kleinere obere Schranke für die Nullstellen des jeweils betrachteten Polynoms finden läßt.

Man bestimme entsprechend eine untere Schranke für die Nullstellen jedes Polynoms.

24. Man wende die Regeln zur Bestimmung einer oberen Schranke für die Nullstellen eines Polynoms auf

$$P(x) = x^3 + bx^2 + bx + 1, \quad -\frac{3}{2} < b < 1,$$

an. Man prüfe, ob  $L = 2$  eine obere Schranke für die Nullstellen des Polynoms ist.

25. Zur Bestimmung der Anzahl der Nullstellen des Polynoms

$$P(x) = 231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5$$

im Intervall  $[[0, 1]]$  wende man die Regel von BUDAN-FOURIER an. Welche Aussage bezüglich der Anzahl der positiven Nullstellen läßt sich auf Grund der Cartesischen Zeichenregel machen?

26. Für das Polynom  $P(x) = 9x^3 - 61x + 60$  etgibt sich die Wertetabelle

|        |    |   |    |     |       |
|--------|----|---|----|-----|-------|
| $x$    | 0  | 1 | 2  | 3   | $> 3$ |
| $P(x)$ | 60 | 8 | 10 | 120 | $> 0$ |

Danach könnte man vermuten, daß  $P$  keine positive Nullstelle besitzt. Das ist jedoch falsch. Man zeige mit Hilfe des Satzes von STURM, daß im Intervall  $[1, 2]$  genau zwei Nullstellen des Polynoms liegen.

27.\* Man ermittle die komplexen Nullstellen des Polynoms

$$P(x) = x^3 - x^2 + 3x + 5$$

näherungsweise nach dem Verfahren von BAIRSTOW-HITCHCOCK.

## Lineare Optimierung

### Kontrollfragen

1. Man rekapituliere die Formen des mathematischen Modells eines LO-Problems und deren äquivalente Transformierbarkeit ineinander.
2. Man definiere die Begriffe Strecke  $S[x, y]$ ,  $K \subseteq \mathbf{R}^n$  konvexe Menge, Hyperebene und Hyperhalbraum im  $\mathbf{R}^n$ , Zulässigkeitsbereich eines LO-Problems, Eckpunkt einer konvexen Menge.
3. Wie läßt sich zeigen, daß der Zulässigkeitsbereich eines LO-Problems eine konvexe Menge ist?
4. Man definiere die Begriffe Basislösung und zulässige Basislösung eines LO-Problems. Wann heißt ein LO-Problem ausgeartet?
5. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Ecken des Zulässigkeitsbereiches und zulässigen Basislösungen des entsprechenden LO-Problems?
6. Wie läßt sich die Anzahl der Basislösungen eines LO-Problems abschätzen?
7. Man kommentiere das Fundamentaltheorem der linearen Optimierung.
8. Wie lautet das Simplexkriterium?
9. Man beschreibe die wesentlichen Schritte des Simplexalgorithmus.
10. Wie läßt sich für ein gegebenes LO-Problem eine zulässige Basislösung als Startvektor für den Simplexalgorithmus bestimmen?

### Aufgaben

1. Ein Betrieb stellt die Erzeugnisse  $A$  und  $B$  her. Die Produktionskapazitäten unterliegen gewissen Beschränkungen. Für eine Zeiteinheit gilt:
  - a) Die  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Gießerei} \\ \text{Putzerei} \end{array} \right\}$  kann entweder  $\left\{ \begin{array}{l} 50 \\ 40 \end{array} \right\}$  Mengeneinheiten des Erzeugnisses  $A$  oder  $\left\{ \begin{array}{l} 30 \\ 40 \end{array} \right\}$  Mengeneinheiten des Erzeugnisses  $B$  oder entsprechende Mengenteile von  $A$  und  $B$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{herstellen} \\ \text{bearbeiten} \end{array} \right\}$ .

b) Die Kapazität der Montagestraße  $\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$  beträgt  $\begin{Bmatrix} 35 \\ 25 \end{Bmatrix}$  Einheiten des Erzeugnisses  $\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}$ .

Der Betriebsgewinn beträgt pro Erzeugniseinheit 25 TM bei A, 35 TM bei B. Ziel ist ein gewinnoptimales Produktionsprogramm. Man löse das Problem graphisch. Inwieweit werden bei diesem Produktionsprogramm die vorhandenen Kapazitäten ausgenutzt?

Lösung: Es sei  $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$  die Anzahl der Mengeneinheiten des Erzeugnisses  $\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}$ . Die Zielfunktion ist daher  $Z(x) = 25x_1 + 35x_2$ . Die mathematische Formulierung der Restriktionen führt auf

$$\begin{aligned} \frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{30}x_2 &\leq 1, & 3x_1 + 5x_2 &\leq 150, \\ \frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{40}x_2 &\leq 1, & x_1 + x_2 &\leq 40, \\ x_1 &\leq 35, & \text{bzw.} & x_1 &\leq 35, \\ x_2 &\leq 25, & & x_2 &\leq 25, \\ x_1 &\geq 0, & & x_1 &\geq 0, \\ x_2 &\geq 0 & & x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

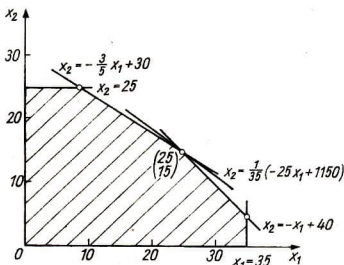


Abb. 6.29

Gesucht ist ein Punkt des Zulässigkeitsbereiches, in dem die Zielfunktion einen maximalen Wert erhält.

Man betrachte den Zulässigkeitsbereich in Abb. 6.29. Die aus der Zielfunktion gewonnene Gerade mit der Gleichung

$$x_2 = \frac{1}{35}(-25x_1 + Z)$$

wird parallel verschoben, bis diese durch den Eckpunkt  $x = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix}$  des Zulässigkeitsbereiches verläuft. In diesem Punkt hat die Zielfunktion den Wert  $Z(x) = 1150$ . Der optimale Gewinn beträgt 1150 TM.



Bezüglich der Ausnutzung vorhandener Kapazitäten ergibt sich für die

$$\text{Gießerei:} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \triangleq 100\%,$$

$$\text{Putzerei:} \quad \frac{25}{40} + \frac{15}{40} = 1 \triangleq 100\%,$$

$$\text{Montagestraße 1:} \quad \frac{25}{35} \triangleq 71,4\%,$$

$$\text{Montagestraße 2:} \quad \frac{15}{25} \triangleq 60\%.$$

2. Man transformiere das in Aufgabe 1 betrachtete Problem durch Einführung von Schlupfvariablen in Normalform und zeige, daß

a)  $x$  mit  $x^T = (10, 10, 70, 20, 25, 15)$  Lösung, jedoch keine Basislösung ist,  $\tilde{x}$  mit  $\tilde{x}^T = (40, 0, 30, 0, -5, 25)$  Basislösung, jedoch nicht zulässig ist.

b) Man gebe in einer lexikographischen Ordnung sämtliche Basislösungen des Problems an.

Lösung:

$$3x_1 + 5x_2 + x_3 = 150, \quad Z(x) = 25x_1 + 35x_2 \text{ Max.}$$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 40,$$

$$x_1 + x_5 = 35,$$

$$x_2 + x_6 = 25,$$

$$x_i \geq 0 \text{ für } i = 1(1)6.$$

a)  $x$  gehört dem Zulässigkeitsbereich an, d. h.,  $x$  erfüllt sämtliche Restriktionsgleichungen. Es sind jedoch mehr als  $m = 4$  Koordinaten von  $x$  von Null verschieden; daher ist  $x$  keine Basislösung.

$\tilde{x}$  ist Basislösung, da genau  $m = 4$  der  $n = 6$  Koordinaten von Null verschieden sind,  $\tilde{x}$  sämtliche nichttrivialen Restriktionsgleichungen erfüllt, die zu den von Null verschiedenen Koordinaten von  $x$  gehörigen Spaltenvektoren der Koeffizientenmatrix linear unabhängig sind.

$\tilde{x}$  ist jedoch nicht zulässig, da nicht sämtliche Koordinaten von  $\tilde{x}$  nichtnegativ sind.

b) Die Tabelle enthält  $\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15$  Spalten. Jeweils  $n - m = 2$  Koordinaten werden Null gesetzt. Die übrigen Koordinaten errechnen sich aus den nichttrivialen Restriktionsgleichungen. Vgl. Tabelle 6.21. (BL - Basislösung, zBL - zulässige Basislösung; die zur betreffende Menge gehörigen Vektoren sind angekreuzt. W bedeutet Widerspruch, d. h., das System der nichttrivialen Restriktionsgleichungen ist bei den vorgegebenen Koordinaten  $x_i = 0$  nicht erfüllbar.)

Die Koordinaten der Eckpunkte des Zulässigkeitsbereiches in Abb. 6.29 sind hervorgehoben.

3. Durch Hinzunahme einer weiteren Restriktionsungleichung

$$2x_1 + x_2 \leq 75$$

werde das LO-Problem von Aufgabe 1 modifiziert. Man transformiere die neue Aufgabe in Normalform und zeige, daß das Problem ausgeartet ist.

Tabelle 6.21

|                 | 1   | 2  | 3   | 4 | 5   | 6   | 7  | 8   | 9 | 10   | 11 | 12             | 13   | 14  | 15  |
|-----------------|-----|----|-----|---|-----|-----|----|-----|---|------|----|----------------|------|-----|-----|
| $x_1$           | 0   | 0  | 0   | 0 | 0   | 50  | 40 | 35  |   | 25   | 35 | $\frac{25}{3}$ | 35   | 15  | 35  |
| $x_2$           | 0   | 30 | 40  |   | 25  | 0   | 0  | 0   | 0 | 15   | 9  | 25             | 5    | 25  | 25  |
| $x_3$           | 150 | 0  | -50 |   | 25  | 0   | 30 | 45  |   | 0    | 0  | 0              | 20   | -20 | -80 |
| $x_4$           | 40  | 10 | 0   |   | 15  | -10 | 0  | 5   |   | 0    | -4 | $\frac{20}{3}$ | 0    | 0   | -20 |
| $x_5$           | 35  | 35 | 35  | 0 | 35  | -15 | -5 | 0   |   | 10   | 0  | $\frac{80}{3}$ | 0    | 20  | 0   |
| $x_6$           | 25  | -5 | -15 |   | 0   | 25  | 25 | 25  | 0 | 10   | 16 | 0              | 20   | 0   | 0   |
| BL              | ×   | ×  | ×   | W | ×   | ×   | ×  | ×   | W | ×    | ×  | ×              | ×    | ×   | ×   |
| zBL             | ×   | -  | -   |   | ×   | -   | -  | ×   |   | ×    | -  | ×              | ×    | -   | -   |
| $Z(\mathbf{x})$ | 0   |    |     |   | 875 |     |    | 875 |   | 1150 |    | 1083,5         | 1050 |     |     |

Lösung:

$$\begin{aligned}
 3x_1 + 5x_2 + x_3 &= 150, & Z(\mathbf{x}) &= 25x_1 + 35x_2 \text{ Max.} \\
 x_1 + x_2 + x_4 &= 40, \\
 x_1 + x_5 &= 35, \\
 x_2 + x_6 &= 25, \\
 2x_1 + x_2 + x_7 &= 75, \\
 x_i &\geq 0 \text{ für } i = 1(1)7.
 \end{aligned}$$

Zu zeigen ist, daß es einen Vektor  $\mathbf{x}$  gibt, der  $A\mathbf{x} = \mathbf{a}_{s0}$  erfüllt und der weniger als  $m = 5$  von Null verschiedene Koordinaten besitzt. Dies trifft zu für den Vektor  $\mathbf{x}$  mit  $\mathbf{x}^T = (35, 5, 20, 0, 0, 20, 0)$ .

Man überzeuge sich, daß der Zulässigkeitsbereich des betrachteten Problems mit dem in Abb. 6.29 dargestellten übereinstimmt.

4. Das LO-Problem der Aufgabe 1 werde dadurch abgeändert, daß bei gleichen Restriktionen die Zielfunktion durch

$$Z(\mathbf{x}) = 24x_1 + 40x_2$$

ersetzt wird. Man löse das Problem graphisch und vergleiche das Ergebnis mit der Aussage des Fundamentaltheorems der linearen Optimierung.

Lösung: Beim Aufsuchen einer optimalen Lösung fällt die der Zielfunktion entsprechende Gerade mit einer den Zulässigkeitsbereich berandenden Geraden zusammen, so daß die Zielfunktion in allen Punkten  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  mit

$$x_2 = -\frac{3}{5}x_1 + 30 \text{ und } \frac{25}{3} \leq x_1 \leq 25$$

den optimalen Wert annimmt. Betrachtet man das Problem in Normalform, so stellen alle Vektoren

$$x(x_1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -\frac{3}{5}x_1 + 30 \\ 0 \\ -\frac{2}{5}x_1 + 10 \\ -x_1 + 35 \\ \frac{3}{5}x_1 - 5 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \frac{25}{3} \leq x_1 \leq 25$$

optimale Lösungen dar. Unter diesen befinden sich die zulässigen Basislösungen  $x \begin{pmatrix} 25 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $x(25)$ .

Tabelle 6.22

|            |       |          | 5          | 6          |
|------------|-------|----------|------------|------------|
| $i$        | $x_i$ | $a_{0i}$ | 25         | 35         |
| 1          | 150   | 0        | 3          | 5          |
| 2          | 40    | 0        | 1          | 1          |
| 3          | 35    | 0        | 1          | 0          |
| 4          | 25    | 0        | 0          | 1          |
| $Z(x) = 0$ |       |          | $d_5 = 25$ | $d_6 = 35$ |

5. Für das in Aufgabe 1 formulierte LO-Problem in der Normalform soll die optimale Lösung mit Hilfe der Simplextabellen bestimmt werden.

Lösung: Aus formalen Gründen führen wir neue Variablenbezeichnungen ein und betrachten das Problem

$$x_1 + 3x_5 + 5x_6 = 150, \quad Z(x) = 25x_5 + 35x_6 \text{ Max.}$$

$$x_2 + x_5 + x_6 = 40,$$

$$x_3 + x_5 = 35,$$

$$x_4 + x_6 = 25,$$

$$x_i \geq 0 \quad \text{für} \quad i = 1(1)6.$$

1. Schritt: Nach MfL Bd. 10, 7.4.4., findet man als Startvektor die zulässige Basislösung  $x^T = (150, 40, 35, 25, 0, 0)$  und verfährt entsprechend dem PAP für den Simplexalgorithmus (vgl. Tab. 6.22).

$d_5 > 0$  bzw.  $d_6 > 0$  macht deutlich, daß  $x$  nicht optimal ist. Man wählt etwa  $k = 6$ , bestimmt

$$\{\lambda_{ik} : i = 1(1)4 \wedge \lambda_{ik} > 0\} = \{5, 1\}, \quad k' = \min \{30, 40, 25\} = 25$$

und hat daher  $l = 4$ . Weiter ist

$$x^{(k')} = \begin{pmatrix} 150 - 5 \cdot 25 \\ 40 - 1 \cdot 25 \\ 35 \\ 25 - 1 \cdot 25 \\ 0 \\ 0 + 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \\ 35 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

2. Schritt: Wir vertauschen die vierte und sechste Koordinate und erhalten die aktuelle Basislösung  $x^T = (25, 15, 35, 25, 0, 0)$  und die Zielfunktion  $Z(x) = 35x_3 + 25x_5$  (vgl. Tab. 6.23).

Tabelle 6.23

|              |     |       |          | 5          | 6           |
|--------------|-----|-------|----------|------------|-------------|
|              |     |       |          | 5          | 4           |
|              |     |       |          | 25         | 0           |
|              | $i$ | $x_i$ | $a_{0i}$ |            |             |
| 1            | 1   | 25    | 0        | 3          | -5          |
| 2            | 2   | 15    | 0        | 1          | -1          |
| 3            | 3   | 35    | 0        | 1          | 0           |
| 4            | 6   | 25    | 35       | 0          | 1           |
| $Z(x) = 875$ |     |       |          | $d_5 = 25$ | $d_6 = -35$ |

Durch  $d_6 > 0$  in der Simplextablelle wird angezeigt, daß  $x$  nicht optimal ist. Analog zum ersten Schritt gewinnt man hier mit  $k = 5$

$$k' = \frac{25}{3}, \quad l = 1 \quad \text{und} \quad (x^{(k')})^T = \left(0, \frac{20}{3}, \frac{80}{3}, 25, \frac{25}{3}, 0\right).$$

3. Schritt: Die Vertauschung der ersten und fünften Koordinate ergibt die Basislösung  $x^T = \left(\frac{25}{3}, \frac{20}{3}, \frac{80}{3}, 25, 0, 0\right)$  und die Zielfunktion  $Z(x) = 25x_1 + 35x_4$  (vgl. Tab. 6.24).

Ersichtlich ist  $x$  nicht optimal. Mit  $k = 6$  hat man

$$k' = 10, \quad l = 2 \quad \text{und} \quad (x^{(k')})^T = (25, 0, 10, 15, 0, 10).$$

4. Schritt: Um zu prüfen, ob die Basislösung optimal ist, werden die zweite und sechste Koordinate vertauscht, so daß man die Basislösung  $x^T = (25, 10, 10, 15, 0, 0)$  erhält; die Zielfunktion ändert sich nicht (vgl. Tab. 6.25). Mit  $d_5 < 0$  und  $d_6 < 0$  ist nach dem Simplexkriterium  $x$  optimale Basislösung.

Macht man die Vertauschungen rückgängig, so erhält man als optimale Lösung des in Aufgabe 2 betrachteten LO-Problems in Normalform  $x^T = (25, 15, 0, 0, 10, 10)$ .

6. Für die Belieferung von drei Baustellen mit Betonfertigteilen stehen zwei Werke zur Verfügung. Im Werk  $W_1$  stehen für diese Baustellen 200, im Werk  $W_2$  400 Fertigteile pro Zeiteinheit bereit. Es benötigt die Baustelle  $B_1$  150, die Baustelle  $B_2$  350, die Baustelle  $B_3$  100 Fertigteile pro Zeiteinheit.

Tabelle 6.24

|                      |     |                |          | 5                     | 6                    |
|----------------------|-----|----------------|----------|-----------------------|----------------------|
|                      |     |                |          | 1                     | 6                    |
|                      |     |                |          | 0                     | 0                    |
|                      | $i$ | $x_i$          | $a_{0i}$ |                       |                      |
| 1                    | 5   | $\frac{25}{3}$ | 25       | $\frac{1}{3}$         | $-\frac{5}{3}$       |
| 2                    | 2   | $\frac{20}{3}$ | 0        | $-\frac{1}{3}$        | $\frac{2}{3}$        |
| 3                    | 3   | $\frac{80}{3}$ | 0        | $-\frac{1}{3}$        | $\frac{5}{3}$        |
| 4                    | 4   | 25             | 35       | 0                     | 1                    |
| $Z(x)$<br>$= 1083,3$ |     |                |          | $d_5 = -\frac{25}{3}$ | $d_6 = \frac{20}{3}$ |

Tabelle 6.25

|               |     |       |          | 5              | 6              |
|---------------|-----|-------|----------|----------------|----------------|
|               |     |       |          | 5              | 2              |
|               |     |       |          | 0              | 0              |
|               | $i$ | $x_i$ | $a_{0i}$ |                |                |
| 1             | 1   | 25    | 25       | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{2}$  |
| 2             | 6   | 10    | 0        | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$  |
| 3             | 3   | 10    | 0        | $\frac{1}{2}$  | $-\frac{5}{2}$ |
| 4             | 4   | 15    | 35       | $\frac{1}{2}$  | $-\frac{3}{2}$ |
| $Z(x) = 1150$ |     |       |          | $d_5 = -5$     | $d_6 = -10$    |

Es ist ein Belieferungsplan bei minimalen Transportkosten zu ermitteln, wenn diese pro Fertigteil vom Werk  $W_1$  bzw.  $W_2$  zur Baustelle  $B_1$  13 Mark bzw. 14 Mark, zur Baustelle  $B_2$  17 Mark bzw. 20 Mark und zur Baustelle  $B_3$  22 Mark bzw. 15 Mark betragen.

Lösung: Es bezeichne  $x_{ij}$  die Anzahl der Fertigteile, die vom Werk  $W_i$  zur Baustelle  $B_j$  transportiert werden. Die Transportkosten

$$Z(x) = 13x_{11} + 17x_{12} + 22x_{13} + 14x_{21} + 20x_{22} + 15x_{23} \quad (*)$$

sollen unter den Restriktionen

$$(I) \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} = 200,$$

$$(II) \quad \quad \quad x_{21} + x_{22} + x_{23} = 400,$$

$$(III) \quad x_{11} \quad \quad \quad + x_{21} = 150,$$

$$(IV) \quad \quad x_{12} \quad \quad \quad + x_{22} = 350,$$

$$(V) \quad \quad \quad x_{13} \quad \quad \quad + x_{23} = 100,$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{für } i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3,$$

ein Minimum annehmen.

Bei genauer Betrachtung erkennt man, daß die Anzahl der Restriktionsgleichungen reduziert werden kann:

$$(1) \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} = 200, \quad (I)$$

$$(2) \quad \quad \quad x_{21} + x_{22} + x_{23} = 400, \quad (II)$$

$$(3) \quad -x_{12} - x_{13} + x_{21} = -50, \quad (III) - (I)$$

$$(4) \quad \quad -x_{13} + x_{21} + x_{22} = 300, \quad (IV) + (3)$$

$$(5) \quad \quad \quad x_{21} + x_{22} + x_{23} = 400. \quad (V) + (4)$$

Man erhält somit das Maximumproblem mit der Zielfunktion

$$Z(x) = -13x_{11} - 17x_{12} - 22x_{13} - 14x_{21} - 20x_{22} - 15x_{23} \text{ Max.}$$

und den Nebenbedingungen

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 200,$$

$$x_{12} + x_{13} - x_{21} = 50,$$

$$-x_{13} + x_{21} + x_{22} = 300,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 400,$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{für } i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3.$$

Setzt man  $x_{12} = 0$  und  $x_{21} = 0$ , so erhält man die zulässige Basislösung  $x^T = (150, 50, 0, 0, 300, 100)$ .

Auf das nochmals in den Bezeichnungen abgeänderte und umgeordnete LO-Problem mit der Zielfunktion

$$Z(x) = -13x_{11} - 17x_{12} - 20x_{13} - 15x_{21} - 22x_{22} - 14x_{23} \text{ Max.}$$

und den Restriktionen

$$x_{11} + x_{12} \quad \quad \quad + x_{22} = 200,$$

$$x_{12} \quad \quad \quad + x_{22} - x_{23} = 50,$$

$$x_{13} \quad \quad \quad - x_{22} + x_{23} = 300,$$

$$x_{13} + x_{21} \quad \quad \quad + x_{23} = 400,$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{für } i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3,$$

wird, ausgehend von der zulässigen Basislösung  $x^T = (150, 50, 300, 100, 0, 0)$  als Startlösung, der Simplexalgorithmus angewendet. Mit dem zweiten Simplexschritt kann das Verfahren abgebrochen werden.

Nachdem die Vertauschungen rückgängig gemacht wurden, hat man als optimale Lösung  $x^T = (0, 200, 0, 150, 150, 100)$ . Diese ergibt einen Betrag von 10 TM als minimalen Wert der Zielfunktion (\*).

7. Die folgende Aufgabe repräsentiert einen Typ sogenannter Mischungs- oder Materialeinsatzprobleme: Aus  $n$  Futtermitteln (Rüben, Silomais, Kraftfutter, ...), deren Preis und Gehalt an  $m$  Grundnährstoffen (Eiweiß, Fett, Kohlehydrate, ...) bekannt ist, soll ein Mischfutter hergestellt werden, das vorgeschriebene Mindestmengen der einzelnen Grundnährstoffe in der Tagesration enthält und möglichst billig ist.

Es bezeichne

$p_j$  den Preis der Mengeneinheit des  $j$ -ten Futtermittels,

$a_{ij}$  die in der Mengeneinheit des  $j$ -ten Futtermittels enthaltene Menge des  $i$ -ten Grundnährstoffes,

$q_i$  die in der Tagesration geforderte Mindestmenge des  $i$ -ten Nährstoffes,

$x_j$  die Menge des  $j$ -ten Futtermittels in der Tagesration.

a) Man modelliere die Aufgabe als Problem der linearen Optimierung und transformiere dieses durch Einführung von Schlupfvariablen in Normalform.

b) Für das Mischungsproblem bestimme man eine zulässige Basislösung unter der Voraussetzung, daß wenigstens ein Futtermittel sämtliche Nährstoffe enthält.

Lösung:

- a)  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$  gibt die Menge des  $i$ -ten Nährstoffes in der Tagesration,  
 $\sum_{j=1}^n p_j x_j$  deren Preis wieder.

Daraus resultiert das LO-Problem

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq q_i, \quad i = 1(1)m, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1(1)n, \\ \sum_{j=1}^n p_j x_j \text{ Min.} \end{array} \right\} \quad (1)$$

oder

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n (-a_{ij}) x_j \leq -q_i, \\ x_j \geq 0, \\ Z(x) = \sum_{j=1}^n (-p_j) x_j \text{ Max.} \end{array} \right\} \quad (2)$$

Mit den Schlupfvariablen  $u_1, u_2, \dots, u_m$  ergibt sich

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n (-a_{ij}) x_j + u_i = -q_i, \quad i = 1(1)m, \\ u_i \geq 0, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1(1)n, \\ Z(x) = \sum_{j=1}^n (-p_j) x_j \text{ Max.} \end{array} \right\} \quad (3)$$

b) Wenn das  $k$ -te Futtermittel sämtliche Nährstoffe enthält, sind die Größen  $a_{ik}$  für  $i = 1(1)m$  positiv.

Setzt man nun  $x_j = 0$  für  $j \neq k$ , so läßt sich für genügend große Wahl von  $x_k$  ( $x_k > 0$ ) erreichen, daß in (1) sämtliche Mindestanforderungen erfüllt sind. Dabei kann noch dafür gesorgt werden, daß in einer der nichttrivialen Nebenbedingungen das Gleichheitszeichen auftritt. Ist das für  $i = i_0$  der Fall, so verschwindet in der Normalform  $u_{i_0}$ .

Wir betrachten den Vektor  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}$ , der die so bestimmten  $x_j$  und die entsprechenden Schlupfvariablenwerte gemäß (3) als Komponenten hat. Offenbar ist  $\mathbf{y}$  für das LO-Problem

(3) zulässig und besitzt höchstens  $m$  von Null verschiedene Koordinaten. Wird Ausartung ausgeschlossen, so sind genau  $m$  Koordinaten von Null verschieden, und  $\mathbf{y}$  ist zulässige Basislösung. Die lineare Unabhängigkeit der Spaltenvektoren bei den Basisvariablen folgt aus  $a_{ik} \neq 0$ .

8. Man löse graphisch die folgenden LO-Probleme:

a)  $x_1 + x_2 \leq 5, \quad Z(\mathbf{x}) = x_1 + 3x_2 \text{ Max.}$

$$-2x_1 + x_2 \leq 2,$$

$$x_1 \geq 0,$$

$$x_2 \geq 0.$$

b)  $x_1 + 2x_2 \geq 1,6, \quad Z(\mathbf{x}) = 10x_1 + 25x_2 \text{ Min.}$

$$6x_1 + 2x_2 \leq 2,8,$$

$$x_1 \geq 0,$$

$$x_2 \geq 0.$$

9. Gegeben ist das LO-Problem

$$-3x_1 + 2x_2 \leq 2; \quad Z(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_2 \text{ Max.}$$

$$2x_1 - 5x_2 \leq 5,$$

$$x_1 + x_2 \leq 6,$$

$$x_1 \geq 0,$$

$$x_2 \geq 0.$$

a) Man löse das Problem graphisch.

b) Man führe das gegebene LO-Problem in Normalform über und zeige, daß  $\mathbf{x}$  mit  $\mathbf{x}^T = (1, 1, 3, 8, 4)$  Lösung, jedoch  $\mathbf{x}$  keine Basislösung ist; daß  $\tilde{\mathbf{x}}$  mit  $\tilde{\mathbf{x}}^T = (6, 0, 20, -7, 0)$  Basislösung, diese aber nicht zulässig ist.

c) Man stelle entsprechend Aufgabe 2 sämtliche Basislösungen in einer Tabelle zusammen und berechne für jede zulässige Basislösung den Wert der Zielfunktion.

d) Man löse das Problem mit Hilfe des Simplexalgorithmus unter Verwendung von Simplextabellen.

10. Gegeben ist das LO-Problem

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4, \quad Z(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_2 \text{ Max.}$$

$$x_1 + x_4 = 2,$$

$$-x_1 + x_2 + x_5 = 4,$$

$$x_i \geq 0 \quad \text{für } i = 1(1)5.$$

Zur Lösung des Problems auf Grund des Fundamentaltheorems wurde eine Tabelle (Tab. 6.26) angelegt und diese teilweise ausgefüllt.

a) Man zeige, daß  $\mathbf{x}^{(6)} = (4, 0, 0, -2, 8)^T$  Basislösung ist.

b) Ist das LO-Problem ausgeartet? Man begründe die Aussage.

c) Man zeige, daß jeder Punkt der Strecke  $S[\mathbf{x}^{(6)}, \mathbf{x}^{(6)}]$  zum Zulässigkeitsbereich  $B$  gehört.



Tabelle 6.26

| $i$   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6 | 7  | 8 | 9 | 10 |
|-------|---|---|---|---|----|---|----|---|---|----|
| $x_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 4  | 2 | -4 | 2 |   | 2  |
| $x_2$ | 0 |   |   |   | 0  | 0 | 0  | 2 |   | 6  |
| $x_3$ | 4 | 0 |   |   | 0  | 2 | 8  | 0 | 0 | -4 |
| $x_4$ | 2 |   | 0 |   | -2 | 0 | 6  | 0 |   | 0  |
| $x_5$ | 4 |   |   | 0 | 8  | 6 | 0  | 4 | 0 | 0  |

11. Man beweise den Satz: *Der Durchschnitt beliebig vieler konvexer Mengen ist konvex.*
12. Es seien  $X$  und  $Y$  konvexe Mengen im  $\mathbf{R}^n$ ,  $a$  und  $b$  reelle Zahlen. Man zeige, daß die Menge

$$Z := \{z: z = ax + by \wedge x \in X \wedge y \in Y\}$$

konvex ist.

13. Es seien  $X \subseteq \mathbf{R}^n$ ,  $Y \subseteq \mathbf{R}^m$  konvexe Mengen. Man zeige, daß die Menge

$$Z := \left\{ z: z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \wedge x \in X \wedge y \in Y \right\} \subseteq \mathbf{R}^{n+m}$$

konvex ist.

14. Gegeben ist das LO-Problem

$$-x_1 + 3x_2 \leq 21, \quad Z(x) = x_1 + x_2 \text{ Max.}$$

$$2x_1 - 3x_2 \leq 6,$$

$$x_1 + x_2 \leq 11,$$

$$x_1 \geq 0,$$

$$x_2 \geq 0,$$

- a) Man löse das Problem graphisch.
- b) Man führe das Problem in Normalform über.
- c) Es sei  $\bar{x}^T = (3, 8, 0, 24, 0)$ ,  $\bar{x}^T = (5, 6, 8, 14, 0)$ . Man zeige, daß neben  $\bar{x}$  auch  $\bar{x}$  optimal ist.
- d) Ausgehend von  $\bar{x}$  verfolge man an diesem Beispiel den Beweis zum Fundamentalsatz.
15. Gegeben ist das LO-Problem

$$-x_1 + x_2 \leq 2, \quad Z(x) = x_1 + x_2 \text{ Max.}$$

$$0,5x_1 - x_2 \leq 3,$$

$$x_1 \geq 0,$$

$$x_2 \geq 0,$$

Man transformiere das Problem in Normalform und wende darauf den Simplexalgorithmus an.

16. Man zeige: Eine konvexe Linearkombination optimaler Vektoren  $x^{(i)}$ ,  $i=1(1)k$ , eines LO-Problems ist wieder ein optimaler Vektor.

17. Zur Herstellung zweier Erzeugnisse werden in einem Betrieb drei Materialarten eingesetzt. Die pro Zeiteinheit zur Verfügung stehende Materialmenge, die erforderliche Materialmenge je Längeneinheit der Erzeugnisse und der Gewinn je Längeneinheit sind der Tabelle 6.27 zu entnehmen. Wie viele Längeneinheiten sind von jedem Erzeugnis pro Zeiteinheit herzustellen, um einen maximalen Gewinn zu erzielen? Welcher Gewinn wird bei diesem Produktionsprogramm erzielt, und welche Mengen der einzelnen Materialarten werden tatsächlich pro Zeiteinheit verarbeitet?

Tabelle 6.27

| Materialart                                       | Benötigte Materialmenge<br>(in Mengeneinheiten)<br>für eine Längeneinheit beim |             | Zur Verfügung<br>stehende<br>Materialmenge<br>(in Mengen-<br>einheiten) |
|---|--|-------------|---|
|   | Erzeugnis 1  | Erzeugnis 2 |   |
| 1   | 2  | 4           | 180   |
| 2   | 3  | 3           | 180   |
| 3   | 5  | 1           | 200   |
| Gewinn<br>(in Geldeinheiten<br>pro Längeneinheit) | 10   | 15          |   |

18. Ein Betrieb hat die Möglichkeit, ein Erzeugnis nach drei verschiedenen Technologien herzustellen, wobei nach allen Technologien in der gleichen Zeit die gleiche Menge des Erzeugnisses produziert wird. Für die Herstellung des Erzeugnisses werden drei Rohstoffarten eingesetzt.

Nach der ersten Technologie werden für die Herstellung einer Einheit des Erzeugnisses vier Einheiten des ersten Rohstoffs und 0,5 Einheiten des zweiten Rohstoffs benötigt. Für die zweite und dritte Technologie entnehme man die entsprechenden Angaben der folgenden Tabelle 6.28. Pro Zeiteinheit stehen vom ersten Rohstoff 540 Einheiten, vom zweiten und dritten 150 bzw. 90 Einheiten zur Verfügung. Wie viele Einheiten sind nach jeder Technologie bei maximaler Gesamtproduktion herzustellen?

Tabelle 6.28

|  | Rohstoff | Technologie |     |   | Pro Zeiteinheit<br>vorhandene Rohstoff-<br>menge in Einheiten |
|--|----------|-------------|-----|---|---|
|  |          | 1           | 2   | 3 |   |
| Erforderliche<br>Rohstoffmenge in<br>Einheiten | 1        | 4           | 3   | 1 | 540   |
|  | 2        | 0,5         | 1   | 2 | 150   |
|  | 3        | 0           | 0,5 | 3 | 90  |

19. Allgemein bezeichnet man das in MfL Bd. 10, 7.1. (1)–(4) vorgestellte LO-Problem als Transportproblem. Auf Grund von (2) und (3) gewinnt man

$$\sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^m a_i$$

als eine von den rechten Seiten der Restriktionsgleichungen notwendigerweise zu erfüllende Bedingung. Man zeige, daß beim Transportproblem jede der Restriktionsgleichungen eine Linearkombination der anderen ist, und vergleiche die hervorgehobenen Sachverhalte mit Aufgabe 6.

Tabelle 6.29

|       | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ |
|-------|-------|-------|-------|
| $B_1$ | 12    | 6     | 11    |
| $B_2$ | 15    | 8     | 13    |

20. Auf den Bahnhöfen  $B_1, B_2$  stehen 36 bzw. 21 leere gleichartige Waggons, die nach Bedarf in die Einsatzorte  $E_1, E_2, E_3$  gebracht werden. Von  $E_1, E_2, E_3$  hat man 12 bzw. 14 bzw. 24 Waggons angefordert. Die Entfernungen (in km) von den Bahnhöfen zu den Einsatzorten sind in Tabelle 6.29 zusammengestellt. Wie sind die Waggons zu den Einsatzorten zu leiten, damit die Transportstrecke minimal wird?
21. Aus zwei Nahrungsmitteln  $N_j, j = 1, 2$ , soll eine Diät hergestellt werden, welche die Vitamine A, B, C und Eiweiß in vorgeschriebenen Mindestmengen  $q_i$  pro Ration enthält (Tab. 6.30;  $i = 1, 2, 3, 4$  entspricht in dieser Reihenfolge Vitamin A, B, C bzw. Eiweiß).

Tabelle 6.30

| $i$   | 1     | 2     | 3     | 4    |
|-------|-------|-------|-------|------|
| $q_i$ | 150 E | 270 E | 200 E | 3,5% |

Tabelle 6.31

| $i \quad j \rightarrow$ | 1    | 2     |
|-------------------------|------|-------|
| $\downarrow$            |      |       |
| 1                       | 2 E  | 0,5 E |
| 2                       | 1 E  | 3 E   |
| 3                       | 2 E  | 1,5 E |
| 4                       | 5,0% | 2,5%  |

$a_{ij}$  bedeutet die in einer Mengeneinheit ME von  $N_j$  enthaltenen Mengen der dem Index  $i$  entsprechenden Stoffe (Tab. 6.31).  $N_1$  ist fünfmal so teuer wie  $N_2$ .

- a) Man bestimme die Anteile der Mischung so, daß die Diät möglichst billig wird.  
 b) Man minimiere die Kosten, nachdem den Restriktionen von a) die Forderung hinzugefügt wurde, daß der Nährwert der Ration höchstens 2500 kJ betragen soll. Eine Mengeneinheit von  $N_1$  und  $N_2$  enthält 12,6 bzw. 16,8 kJ.

## VII. Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik

### Zufällige Ereignisse

#### Kontrollfragen

1. Man stelle Operationen und Relationen bei zufälligen Ereignissen zusammen und vergleiche sie mit den entsprechenden Operationen und Relationen bei Mengen.
2. Was versteht man unter der Unvereinbarkeit zweier zufälliger Ereignisse? Sind die Ereignisse  $A$  und  $\overline{A \cup B}$  unvereinbar?
3. Was versteht man unter einem Ereignisfeld, unter einer  $\sigma$ -Algebra, unter einer Booleschen Algebra?
4. Was versteht man unter einem meßbaren Raum?

#### Aufgaben

1. Eine elektrische Schaltung habe die in Abb. 7.1 angegebene Gestalt. Fällt das Element  $E_k$  aus, so entspreche dies dem Ereignis  $A_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ). Es sind Ausdrücke für die Ereignisse  $B$  und  $\overline{B}$  anzugeben, wobei  $B$  die Unterbrechung des Stromkreises bedeutet.

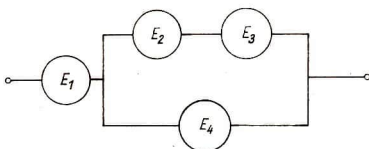


Abb. 7.1

2. Ein System bestehe aus einem Gerät vom Typ I, vier Geräten vom Typ II und zwei Geräten vom Typ III. Es bezeichne  $A$  bzw.  $B_k$  bzw.  $C_j$  das Ereignis, daß das Gerät vom Typ I bzw. das  $k$ -te Gerät vom Typ II bzw. das  $j$ -te Gerät vom Typ III in Ordnung ist ( $k = 1, 2, 3, 4$ ;  $j = 1, 2$ ). Das System funktioniert, wenn von jedem Typ mindestens ein Gerät arbeitet (Ereignis  $D$ ). Man beschreibe  $D$  und  $\overline{D}$  mit Hilfe von  $A, B_k, C_j$  und den üblichen Operationen mit Ereignissen.

Hinweis: Man fertige zunächst ein Schaltbild des Systems an.

3. In einem Behälter befinden sich Teile aus der laufenden Produktion eines Betriebes, die auf ihr Gewicht hin überprüft werden sollen. Mit  $A_k$  werde das

Ereignis bezeichnet, daß ein herausgegriffenes Teil weniger als  $k$  Gramm wiegt  
Was bedeuten die Ereignisse

$$\text{a) } \overline{A_{50}}, \quad \text{b) } A_{30} \cup \overline{A_{40}}, \quad \text{c) } \left( \bigcup_{j=1}^{100} A_j \right) \cap \left( \bigcup_{j=1}^{90} \overline{A_j} \right)?$$

4. Die Ereignisse  $A, B, C$  sollen bedeuten, daß entsprechend aus drei verschiedenen Bücherstapeln mindestens je ein Buch entnommen wird.  $A_j$  bzw.  $B_k$  bezeichne das Ereignis, daß dem ersten Stapel  $j$  bzw. dem zweiten Stapel  $k$  Bände entnommen werden. Was bedeuten die Ereignisse

$$\begin{aligned} \text{a) } A \cup B \cup C, & \quad \text{b) } A \cap B \cap C, & \quad \text{c) } A_1 \cup B_3, \\ \text{d) } A_2 \cap B_2, & \quad \text{e) } [(A_1 \cap B_3) \cup (B_1 \cap A_3)] \cap C? \end{aligned}$$

5. Man beweise die folgenden Aussagen:

$$\text{a) } A \subseteq B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A};$$

$$\text{b) } \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \text{allgemeiner: } \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i};$$

$$\text{c) } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \text{allgemeiner: } \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}.$$

6. Es seien  $A$  und  $B$  zufällige Ereignisse. Man zeige, daß die Ereignisse  $A, \overline{A} \cap B$  und  $A \cup B$  ein vollständiges System bilden.

7. Man vereinfache den Ausdruck  $A := (B \cup C) \cap (B \cup \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup C)$ .

8. Der zufällige Versuch bestehe im einmaligen Würfeln mit zwei Spielwürfeln; der Versuchsausgang werde durch die Summe der gewürfelten Augenzahlen gekennzeichnet. Man prüfe, ob die folgenden zufälligen Ereignisse atomare Ereignisse sind:

- Die gewürfelte Augensumme ist nicht größer als 2.
- Die gewürfelte Augensumme ist kleiner als 4.
- Die gewürfelte Augensumme ist eine zweistellige Primzahl.

## Wahrscheinlichkeit

### Kontrollfragen

- Welche Werte kann die relative Häufigkeit (eines Ereignisses  $A$  in  $n$  Versuchen) annehmen?
- Welche gemeinsamen Eigenschaften besitzen die relative Häufigkeit, die klassische Wahrscheinlichkeit, die geometrische Wahrscheinlichkeit? Welche Eigenschaften lassen sich jeweils daraus ableiten?
- Unter welchen Voraussetzungen ist die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit anwendbar?

4. Unter welchen Voraussetzungen ist die geometrische Definition der Wahrscheinlichkeit anwendbar?
5. Was versteht man unter einem sicheren, was unter einem fast sicheren Ereignis?
6. Was versteht man unter einem unmöglichen, was unter einem fast unmöglichen Ereignis?

### Aufgaben

Hinweis: Wenn nachfolgend z. B. von einer „zufälligen Auswahl“ die Rede ist, so ist damit gemeint, daß alle in Frage kommenden Objekte die gleiche Chance haben, ausgewählt zu werden.

1. Es seien fünf Strecken mit den Längen 1, 3, 5, 7 und 9 (Einheiten) gegeben.
  - a) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man mit drei aus diesen zufällig ausgewählten Strecken ein Dreieck bilden kann.
  - b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein spitzwinkliges Dreieck gebildet werden kann?
2. Die Trommel eines Revolvers besteht aus sieben Kammern. Fünf der Kammern sind geladen, zwei Kammern sind leer. Nach Drehung der Trommel erscheint zufällig eine der Kammern vor dem Lauf. Ist die Kammer leer, so erfolgt nach Betätigung des Abzughahns kein Schuß. Man berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
 

A ... Bei zwei Versuchen erfolgt kein Schuß.

B ... Bei zwei Versuchen erfolgt beide Male ein Schuß.
3. Beim Skatspiel bekommt bekanntlich jeder der drei Mitspieler 10 Karten (ein „Blatt“), zwei Karten bilden den sogenannten Skat, und eine Farbe wird als Trumpf bezeichnet.
  - a) Wie viele verschiedene Blätter gibt es?
  - b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Spieler im nächsten Spiel dasselbe Blatt wieder erhält?
  - c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine zufällig gezogene Karte ein As oder ein Trumpf ist?
  - d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß im Skat mindestens ein Bube liegt?
4. Auf einem Schachbrett werden zufällig acht Türme plaziert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß keiner dieser Türme einen anderen schlagen kann?
5. Den Aufzug eines siebengeschossigen Hauses betreten in der ersten Etage drei Personen. Jede dieser Personen verläßt — unabhängig von den anderen, beginnend in der zweiten Etage — den Aufzug zufällig in irgendeiner der Etagen.

Man berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

$A$  ... Alle Personen steigen in der vierten Etage aus.

$B$  ... Alle Personen steigen in ein und derselben Etage aus.

$C$  ... Alle Personen steigen in verschiedenen Etagen aus.

6. In einem Behälter befinden sich  $w$  weiße und  $s$  schwarze Kugeln ( $w \geq 2, s \geq 2$ ). Diesem Behälter werden gleichzeitig zwei Kugeln zufällig entnommen. Man berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

$A$  ... Die entnommenen Kugeln sind beide weiß.

$B$  ... Die entnommenen Kugeln sind von gleicher Farbe.

$C$  ... Die entnommenen Kugeln sind von unterschiedlicher Farbe.

Außerdem vergleiche man  $P(B)$  und  $P(C)$ .

7. Jeder von  $n$  Stäben gleicher Länge wird in zwei Teile zerbrochen, ein kurzes und ein langes. Dann werden die  $2n$  Bruchstücke zufällig zu  $n$  Paaren zusammengelegt, so daß  $n$  neue „Stäbe“ entstehen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, a) daß jeweils die zwei Bruchstücke zusammengelegt werden, die aus dem gleichen Stab entstanden sind, b) alle langen Teile mit kurzen Teilen zusammengelegt werden?

8. Es setzen sich  $N$  Personen ( $N > 2$ ) in zufälliger Weise a) an einen runden Tisch, b) an eine Seite eines rechteckigen Tisches. Man berechne jeweils die Wahrscheinlichkeit  $p$  dafür, daß zwei vorher bestimmte Personen nebeneinander sitzen.

9. Es wird einmal mit einem idealen Würfel gewürfelt. Wir betrachten die folgenden Ereignisse:

$A$  ... Die gewürfelte Augenzahl ist gleich 5.

$B$  ... Die gewürfelte Augenzahl ist gerade.

$C$  ... Die gewürfelte Augenzahl ist größer als 2.

Man berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse  $A, B, C, A \cup B, A \cap B, B \cup C, B \cap C, \bar{B} \cup C, C \setminus B, \bar{A} \cap B \cap \bar{C}, A \cup \bar{B} \cup C, B \Delta C$ .

10. Bei einem „gezinkten“ Würfel seien die Wahrscheinlichkeiten dafür, die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 bzw. 6 zu würfeln, gleich  $\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{7}$  bzw.  $\frac{5}{14}$ . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, a) daß mehr als drei Augen gewürfelt werden, b) daß weder zwei noch fünf Augen gewürfelt werden, c) daß eine Zahl  $i$  gewürfelt wird, für die  $|i - 2| < 2$  gilt?

11. Es seien  $A$  und  $B$  zufällige Ereignisse.

a) Man zeige, daß  $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$  gilt.

b) Man berechne  $P(A \Delta B), P(A \cap \bar{B}), P(\bar{A} \cap \bar{B})$ , wenn die Zahlen  $p = P(A), q = P(B)$  und  $r = P(A \cup B)$  bekannt sind.

12. Eine Strecke der Länge  $L$  wird durch zwei zufällig gewählte Teilpunkte in drei Stücke zerlegt. Man berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß aus den drei Teilstücken ein Dreieck gebildet werden kann.

Lösung: Bezeichnen  $x$  und  $y$  die Längen zweier Stücke, so hat das dritte Stück die Länge  $L - (x + y)$ . Aus den drei Teilstücken läßt sich genau dann ein Dreieck bilden, wenn die Summe je zweier Teilstrecken mindestens so groß ist wie die übrigbleibende Teilstrecke, d. h., wenn

$$\left. \begin{aligned} x + y &\geq L - (x + y), \\ x + L - (x + y) &\geq y, \\ y + L - (x + y) &\geq x, \end{aligned} \right\} \text{ d. h., } \left\{ \begin{aligned} x + y &\geq \frac{L}{2}, \\ y &\leq \frac{L}{2}, \\ x &\leq \frac{L}{2} \end{aligned} \right\} \text{ gilt.}$$

Abb. 7.2 entnimmt man unmittelbar – bei Zugrundelegung der geometrischen Definition der Wahrscheinlichkeit –, daß die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{4}$  beträgt.

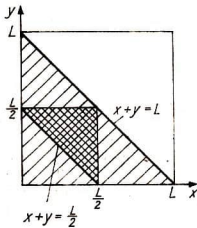


Abb. 7.2

13. Durch ein waagrecht angeordnetes rechtwinkliges Gitter mit zylindrischen Stäben (Radius  $r$ , Abstand zwischen den Stäben  $a$  bzw.  $b$ ; vgl. Abb. 7.3) fällt eine Kugel vom Durchmesser  $d$ . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dabei kein Gitterstab berührt wird?

Hinweis: Man lege die geometrische Definition der Wahrscheinlichkeit zugrunde.

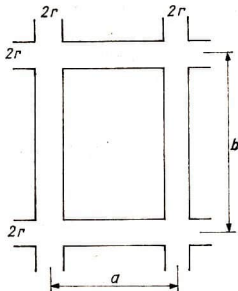


Abb. 7.3



14.\* Im Quadrat mit den Eckpunkten  $(0; 0)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(1; 0)$ ,  $(1; 1)$  werde ein Punkt  $M$  zufällig gewählt und markiert. Die Koordinaten von  $M$  seien  $X$  und  $Y$ . Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß  $M$  in einen beliebig vorgegebenen Bereich dieses Quadrats fällt, sei gleich dem Flächeninhalt dieses Bereiches (geometrische Definition der Wahrscheinlichkeit).

a) Man zeige, daß  $P(X < x, Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y)$  für beliebige  $0 \leq x, y \leq 1$  gilt.

b) Man bestimme für  $z$ ,  $0 < z < 1$ , die Wahrscheinlichkeiten

$\alpha) P(|X - Y| < z)$ ,  $\beta) P(X \cdot Y < z)$ ,  $\gamma) P(\min\{X, Y\} < z)$ ,

$\delta) P(\max\{X, Y\} < z)$ ,  $\varepsilon) P\left(\frac{1}{2}(X + Y) < z\right)$ .

c) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Wurzeln der Gleichung  $z^2 + Xz + Y = 0$  reell sind.

## Bedingte Wahrscheinlichkeit

### Kontrollfragen

1. Man überlege sich, daß die bedingte Wahrscheinlichkeit alle Eigenschaften besitzt, die einer Wahrscheinlichkeit zukommen. Welche besonderen Eigenschaften besitzt die bedingte Wahrscheinlichkeit?
2. Man charakterisiere Inhalt und Bedeutung des Multiplikationssatzes. Welche Rolle spielt in diesem Zusammenhang der Begriff der Unabhängigkeit?
3. Man beschreibe die Situation, die der Anwendung der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit zugrunde liegt. Welche Frage beantwortet die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit?
4. Man beschreibe die Situation, die der Anwendung der Bayesschen Formel zugrunde liegt. Welche Frage beantwortet die Bayessche Formel?
5. Man erläutere das Entscheidungsprinzip, das sich mittels der Bayesschen Formel formulieren läßt. Welche Rolle spielen in diesem Zusammenhang a-priori-Wahrscheinlichkeiten und a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten?

### Aufgaben

1. Ein Behälter enthalte 100 schwarze und rote Kugeln, die 25 p und 50 p wiegen, und zwar in folgender Aufteilung:

|      | rot | schwarz |
|------|-----|---------|
| 25 p | 15  | 25      |
| 50 p | 40  | 20      |

- Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine zufällig herausgegriffene Kugel a) rot ist, b) rot ist und 25 p wiegt, c) 25 p wiegt, d) 25 p wiegt, wenn man weiß, daß sie rot ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zuerst eine rote Kugel zu 50 p, dann eine rote zu 25 p und zuletzt eine schwarze zu 50 p entnommen wird, wenn die zufällig entnommenen Kugeln e) wieder zurückgelegt werden, f) nicht zurückgelegt werden?
- Ein Arbeiter bediene drei Webstühle. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Webstuhl im Laufe einer Stunde die Aufmerksamkeit des Arbeiters nicht erfordert, betrage für den ersten Webstuhl 0,9, für den zweiten Webstuhl 0,8 und für den dritten Webstuhl 0,85. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß im Laufe einer Stunde a) keiner der Webstühle die Aufmerksamkeit des Arbeiters beansprucht, b) wenigstens einer der drei Webstühle nicht die Aufmerksamkeit des Arbeiters beansprucht?
  - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, im Tele-Lotto („5 aus 35“) mit einem Tip in 50 Wochen mindestens einmal zu gewinnen?  
Hinweis: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man mit einem Tip einen Gewinn erzielt, beträgt etwa 0,014 (vgl. MfL Bd. 11, 2.2., Beispiel 1, S. 36).
  - Zwei Jäger schießen unabhängig voneinander gleichzeitig auf einen Fuchs. Schütze 1 hat eine Treffwahrscheinlichkeit von 0,7, Schütze 2 eine von 0,8. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß a) beide Schützen treffen, b) der Fuchs getroffen wird, c) genau einer der beiden Schützen trifft?
  - Zwischen zwei Punkten  $M$  und  $N$  sei eine elektrische Schaltung wie in Abb. 7.4 aufgebaut. Während der Zeitspanne  $T$  sollen die Elemente der Schaltung unabhängig voneinander mit den nachfolgend angegebenen Wahrscheinlichkeiten ausfallen:

| Schaltelement      | $K_1$ | $K_2$ | $L_1$ | $L_2$ | $L_3$ |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Wahrscheinlichkeit | 0,6   | 0,5   | 0,4   | 0,7   | 0,9   |

Man bestimme die Wahrscheinlichkeit für die Unterbrechung des Stromkreises im gegebenen Zeitabschnitt  $T$ .

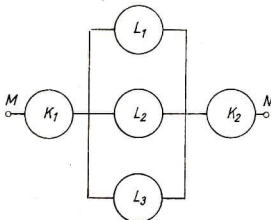


Abb. 7.4

6. Ein mit zwei Raketen bewaffneter Abfangjäger erhält die Aufgabe, ein Luftziel abzufangen. Der Jäger kann mit der Wahrscheinlichkeit  $p_1$  in eine Stellung gebracht werden, aus der ein Angriff auf das Ziel möglich ist. Aus der Angriffsstellung schießt der Jäger beide Raketen auf das Ziel ab. Jede Rakete gelangt unabhängig von der anderen mit der Wahrscheinlichkeit  $p_2$  in die Umgebung des Ziels. Sobald eine Rakete in die Umgebung des Ziels gelangt, wird dieses mit der Wahrscheinlichkeit  $p_3$  vernichtet. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Ziel vernichtet wird.
7. In einem Luftkampf wird ein Bomber von zwei Jägern angegriffen. Das Feuer wird durch den Bomber eröffnet; er gibt auf jeden Jäger einen Schuß ab und schießt ihn dabei mit der Wahrscheinlichkeit  $p_1$  ab. Wird ein Jäger nicht abgeschossen, so gibt er unabhängig vom Schicksal des anderen einen Schuß auf den Bomber ab und schießt diesen dabei mit der Wahrscheinlichkeit  $p_2$  ab. Man bestimme die Wahrscheinlichkeiten folgender Ausgänge des Kampfes:
- A* ... Der Bomber wird abgeschossen.  
*B* ... Beide Jäger werden abgeschossen.  
*C* ... Mindestens ein Jäger wird abgeschossen.  
*D* ... Mindestens ein Flugzeug wird abgeschossen.  
*E* ... Genau ein Jäger wird abgeschossen.
8. Ein hohlzylinderförmiges Werkstück wird bezüglich seiner Länge und seines Innendurchmessers auf Maßhaltigkeit geprüft. Wir bezeichnen mit *A* das Ereignis, daß die Länge maßhaltig ist, und mit *B* das Ereignis, daß der Innendurchmesser maßhaltig ist. Auf statistischem Wege wurden die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse zu  $P(A) = 0,81$  und  $P(B) = 0,75$  bestimmt.
- a) Kann  $P(A \cap B) = 0,50$  gelten?  
 b) Man gebe Ungleichungen für  $P(A \cap B)$  an.  
 c) Wie groß ist  $P(A \cap B)$ , wenn *A* und *B* unabhängig sind?
9. In einem Bus befinden sich  $n$  Fahrgäste. An der nächsten Haltestelle steige jeder Fahrgast unabhängig von den anderen mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  aus. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in den Bus kein neuer Fahrgast einsteigt, sei  $p_0$ ; die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Fahrgast einsteigt, sei gleich  $1 - p_0$ . Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, daß nach der Abfahrt des Busses von der Haltestelle sich in ihm wieder  $n$  Fahrgäste befinden.
- 10.\* Zwei Personen spielen bis zum Sieg. Dafür muß die erste Person  $m$  Partien gewinnen, die zweite Person muß  $n$  Partien gewinnen. Die Wahrscheinlichkeit des Sieges in jeder dieser Partien beträgt für den ersten Spieler  $p$ , für den zweiten  $q = 1 - p$ . Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der erste Spieler das Spiel gewinnt.
11. Zwei Spieler vereinbaren, daß derjenige gewinnen soll, der eine bestimmte Anzahl von Einzelpartien gewinnt. Das Spiel mußte abgebrochen werden, als der erste Spieler noch  $m$  und der zweite noch  $n$  siegreiche Partien zum Gesamtsieg brauchte.

Wie soll der Einsatz verteilt werden, wenn die Wahrscheinlichkeit für den Gewinn einer Partie bei jedem Spieler 0,5 ist? Was ergibt sich speziell für  $m = 1, n = 2$ ?

Lösung: Der Einsatz ist proportional dem Quotienten  $\frac{p_1}{p_2}$  aus den Wahrscheinlichkeiten des Sieges für den ersten Spieler ( $= p_1$ ) und den zweiten Spieler ( $= p_2 = 1 - p_1$ ) zu teilen; dabei gilt

$$p_1 = \frac{1}{2^m} \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} \binom{m}{1} + \frac{1}{2^2} \binom{m+1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \binom{m+n-2}{n-1} \right).$$

Im Fall  $m = 1, n = 2$  ist der Einsatz wegen  $p_1 = \frac{3}{4}, p_2 = 1 - p_1 = \frac{1}{4}$  im Verhältnis 3 : 1 zu teilen.

12. In einem Behälter liegen  $N$  Lose, davon  $M$  Gewinne. Zwei Personen  $P_1$  und  $P_2$  ziehen nacheinander je ein Los. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Person  $P_2$  ein Gewinnlos zieht, wenn sie a) weiß, daß Person  $P_1$  etwas gewonnen hat, b) weiß, daß Person  $P_1$  nichts gewonnen hat, c) nicht weiß, ob Person  $P_1$  etwas gewonnen hat.
13. Es seien  $A_1, A_2, \dots, A_n$  zufällige Ereignisse. Man beweise mittels vollständiger Induktion die folgende Gleichung:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n P(A_k \cap A_j) + \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{j=k+1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n P(A_k \cap A_j \cap A_i) - \dots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right).$$

14. In einer Garderobe geben  $N$  Personen ihren Hut ab. Bei der Ausgabe erhält jede Person zufällig irgendeinen Hut. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit  $p_N$  dafür, daß mindestens eine Person ihren Hut wiederbekommt?

Anleitung: Man denke sich die Personen numeriert. Es bezeichne  $A_k$  das Ergebnis, daß die Person mit der Nummer  $k$  ihren Hut wiederbekommt. Dann gilt also  $p_N = P\left(\bigcup_{k=1}^N A_k\right)$ .

Nun wende man die in der darüberstehenden Aufgabe angegebene Formel an; die dadurch auftretenden Wahrscheinlichkeiten von Produkten zufälliger Ereignisse berechne man mit dem Multiplikationssatz (vgl. MfL Bd. 11, 3.2., Satz 2).

15. Es seien  $A_1, A_2, \dots, A_n$  unabhängige zufällige Ereignisse mit positiven Wahrscheinlichkeiten  $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$ ; dabei sei  $n \geq 2$ . Man beweise die Ungleichung

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) < P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

16. Von drei gleichartigen Maschinen eines Betriebes stellt die erste 20%, die zweite 30% und die dritte 50% der Gesamtproduktion her. Dabei verursacht die erste 5%, die zweite 4% und die dritte 2% Ausschuß.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein zufällig aus der Gesamtproduktion entnommenes Teil Ausschuß ist?

b) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein zufällig gefundenes Ausschußstück von der ersten, zweiten bzw. dritten Maschine produziert wurde.

Lösung: Wir führen die folgenden Ereignisse ein:

$B$  ... Ein entnommenes Teil ist ein Ausschussteil.

$A_i$  ... Ein entnommenes Teil wurde mit der  $i$ -ten Maschine produziert ( $i = 1, 2, 3$ ).

Den obigen Angaben entnehmen wir die Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} P(A_1) &= 0,20, & P(A_2) &= 0,30, & P(A_3) &= 0,50, \\ P(B|A_1) &= 0,05, & P(B|A_2) &= 0,04, & P(B|A_3) &= 0,02. \end{aligned}$$

Außerdem gilt  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$  und  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ . Damit sind alle Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit und der Bayesschen Formel erfüllt.

a)  $P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3) = 0,032$ .

b)  $P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)} = 0,3125$ , und entsprechend ergibt sich  $P(A_2|B) = 0,3750$  und  $P(A_3|B) = 0,3125$ .

17. Von 25 Studenten einer Seminargruppe beherrschen sieben den Vorlesungsstoff gut (d. h. zu 90%), 13 mittelmäßig (d. h. zu 60%) und fünf schlecht (d. h. zu 30%). Ein zufällig ausgewählter Student beantwortet eine ihm gestellte Frage richtig.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dieser Student den Vorlesungsstoff gut, mittelmäßig bzw. schlecht beherrscht?

b) Der Prüfer stellt eine zweite Frage — unabhängig von der ersten —, die der Student ebenfalls richtig beantwortet. Der Prüfer will dem Student das Urteil geben, das nun mit der größten Wahrscheinlichkeit zutrifft. Welches gibt er?

18. Von 12 Schützen treffen vier mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{3}{5}$ , sechs mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{2}{3}$  und zwei mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{3}{4}$  das Ziel. Ein zufällig ausgewählter Schütze traf das Ziel. Welcher Gruppe gehörte er mit der größten Wahrscheinlichkeit an?

## Diskrete Zufallsgrößen

### Kontrollfragen

1. Was versteht man allgemein unter einer Zufallsgröße? Man gehe insbesondere auf Definitionsbereich und Wertevorrat ein.
2. Wie ist die Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße definiert? Was drücken die Werte aus? Welche Eigenschaften besitzt eine Verteilungsfunktion?
3. Was versteht man speziell unter einer diskreten Zufallsgröße? Man nenne Beispiele für diskrete Zufallsgrößen.

4. Welche speziellen Eigenschaften besitzt die Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsgröße?
5. Man nenne wesentliche Charakteristiken diskreter Zufallsgrößen, gebe deren Definition und wichtige Rechenregeln an.
6. Man stelle die behandelten Wahrscheinlichkeitsverteilungen diskreter Zufallsgrößen nach dem Schema: Werte — Einzelwahrscheinlichkeiten — Erwartungswert — Streuung — Anwendungsbeispiel zusammen.
7. Welche Erkenntnisse ergaben sich über den Zusammenhang zwischen der relativen Häufigkeit (eines Ereignisses in  $n$  Versuchen) und der Wahrscheinlichkeit (dieses Ereignisses)?
8. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Binomialverteilung und der Poissonverteilung? Man gehe insbesondere auf die praktischen Konsequenzen ein.

### Aufgaben

1. Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum  $[\Omega, \mathfrak{A}, P]$  mit  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ ,  $\mathfrak{A} = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3\}\}$ . Ist die durch  $X(\omega_i) = i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) auf  $\Omega$  definierte Funktion  $X$  eine Zufallsgröße?

Lösung: Nein, denn es gilt z. B.  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < 3\} = \{\omega_1, \omega_2\} \notin \mathfrak{A}$ .

2. Als Ergebnis eines Zufallsexperiments möge genau eines der Ereignisse  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  eintreten. Es sei bekannt, daß  $P(A_1) = \frac{1}{3}$ ,  $P(A_2) = \frac{1}{12}$ ,  $P(A_3) = P(A_5) = \frac{1}{6}$  gilt. Durch die Festsetzung  $X(\omega) = 2i - 1$  für  $\omega \in A_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) ist eine diskrete Zufallsgröße  $X$  definiert.

a) Man gebe die Verteilungstabelle von  $X$  an.

b) Man bestimme und skizziere die Verteilungsfunktion von  $X$ .

Lösung: Aus  $\sum_{i=1}^5 P(A_i) = 1$  folgt  $P(A_4) = \frac{1}{4}$ .

a) Für die Verteilungstabelle von  $X$  ergibt sich damit

Tabelle 7.1

|    |               |                |               |               |               |
|----|---------------|----------------|---------------|---------------|---------------|
| X: | 1             | 3              | 5             | 7             | 9             |
|    | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{6}$ |

b) Für die Verteilungsfunktion von  $X$  erhält man (vgl. Abb. 7.5)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 1, \\ \frac{1}{3} & \text{für } 1 < x \leq 3, \\ \frac{5}{12} & \text{für } 3 < x \leq 5, \\ \frac{7}{12} & \text{für } 5 < x \leq 7, \\ \frac{5}{6} & \text{für } 7 < x \leq 9, \\ 1 & \text{für } x > 9. \end{cases}$$

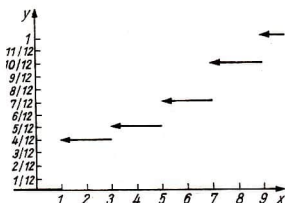


Abb. 7.5

3. Ein Behälter enthält 10 Kugeln mit den Massen 1 g, 2 g, 3 g, ..., 10 g. Es wird eine Kugel zufällig entnommen und mit Hilfe einer Balkenwaage gewogen. Es stehen folgende Wägesätze zur Verfügung:

a) 1, 2, 2, 5, 10; b) 1, 2, 3, 4, 10; c) 1, 1, 2, 5, 10.

Die Anzahl der zum Ermitteln der Masse der Kugel nötigen Wägestücke sei die Zufallsgröße  $X$  bzw.  $Y$  bzw.  $Z$  für den Fall a) bzw. b) bzw. c). Die Wägestücke dürfen nur auf eine Waagschale der Balkenwaage gelegt werden. Sie werden stets so gewählt, daß man mit möglichst wenigen Wägestücken auskommt. Man ermittle den Wägesatz, für den die mittlere Anzahl der benötigten Wägestücke am kleinsten ist.

4. Die Zufallsgröße  $X$  habe eine diskrete gleichmäßige Verteilung auf den Werten  $x_1 = 4,7$ ,  $x_2 = 5,2$ ,  $x_3 = 4,9$ ,  $x_4 = 5,6$ ,  $x_5 = 5,1$  und  $x_6 = 5,0$ . Man berechne a) den Erwartungswert  $EX$  von  $X$ , b) das zweite Moment bezüglich der Zahl  $\alpha$   $c = 5$ ,  $\beta) c = 5,1$ ,  $\gamma) c = EX$ .

5. Zwei Schachspieler  $A$  und  $B$  wollen zwei Vergleichskämpfe unter folgenden Bedingungen austragen:

(1) Gewinnt  $A$  eine Partie, dann erhält er einen Punkt. Wird eine Partie remis oder gewinnt  $B$ , dann erhält  $B$  den Punkt.

(2) Der erste Wettkampf wird über vier Partien ausgetragen, der zweite über sechs Partien.

(3)  $A$  hat einen Wettkampf gewonnen, wenn er mehr Punkte als  $B$  hat.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Spieler  $A$  a) den ersten Wettkampf gewinnt, b) den zweiten Wettkampf gewinnt, c) beide Wettkämpfe gewinnt, d) aus beiden Wettkämpfen mehr als fünf Punkte sammelt, wenn für ihn die Wahrscheinlichkeit, eine Partie zu gewinnen, 0,6 beträgt.

Hinweis: Die Anzahl der Siege von  $A$  in  $n$  Partien ist binomialverteilt mit den Parametern  $n$  und  $p = 0,6$ .

6. An einem Basketballturnier nehmen 18 Mannschaften teil, aus denen durch Los zwei Gruppen zu je neun Mannschaften gebildet wurden. Unter den teilnehmenden

Mannschaften befinden sich fünf Mannschaften der höchsten Spielklasse. Man bestimme die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

- A* ... Alle Mannschaften der höchsten Spielklasse befinden sich in einer Gruppe.  
*B* ... In einer Gruppe befinden sich zwei Mannschaften der höchsten Spielklasse, in der anderen drei.

**Hinweis:** Die Anzahl der Mannschaften der höchsten Spielklasse in jeder Gruppe ist hypergeometrisch verteilt.

7. Um zu erfahren, wie viele Fische in einem See sind, fängt man  $M$  Fische, kennzeichnet diese und läßt sie in den See zurück. Einige Zeit später fängt man erneut Fische, und zwar  $n$  Stück. Befinden sich darunter  $m$  gekennzeichnete, so verwendet man als Schätzwert  $\hat{N}$  für die unbekannte Anzahl  $N$  der Fische in dem See eine ganze Zahl, die sich durch Rundung aus der Zahl  $n \cdot \frac{M}{m}$  ergibt. Man motiviere dieses Vorgehen; dazu überlege man sich, welche Verteilung die zufällige Anzahl der gekennzeichneten Fische in der Gruppe der  $n$  gefangenen Fische besitzt, und beziehe den Erwartungswert dieser Zufallsgröße in die Argumentation ein.

Zahlenbeispiel:  $n = 150$ ,  $m = 10$ ,  $M = 1000$ .

8. Es bezeichne  $X$  die Anzahl der abgestrahlten  $\alpha$ -Teilchen eines Radiumpräparats, die während einer bestimmten Beobachtungsdauer registriert werden. Auf Grund statistischer Untersuchungen kann angenommen werden, daß  $X$  eine Poissonverteilung mit dem Parameter  $\lambda = 3$  besitzt. Man bestimme die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
- a)  $A := (X \leq 3)$ , b)  $B := (X \geq 2)$ ,  
 c)  $C := A \cup B$ , d)  $D := A \cap B$ , e)  $E := A \cap \bar{B}$ .
9. An einem Sommerabend wird durchschnittlich alle 10 Minuten eine Sternschnuppe beobachtet. Man kann annehmen, daß die Zufallsgröße  $X_t$ , die die Anzahl der Sternschnuppen während einer Beobachtungszeit von  $t$  Minuten angibt, eine Poissonverteilung mit dem Parameter  $\lambda = \frac{t}{10}$  besitzt. Man berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß während einer Viertelstunde mindestens zwei Sternschnuppen beobachtet werden.
10. Ein Mathematikstudent hat sich vorgenommen, nur so lange beim Zahlenlotto zu spielen, bis er einen Gewinn erzielt. Er will dabei jede Woche nur einen Tip abgeben. Es bezeichne  $X$  die (zufällige) Anzahl der Wochen, die der Student spielen muß.
- a) Man berechne die Verteilung von  $X$ .  
 b) Man berechne den Erwartungswert von  $X$ .  
 c) Man berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß nach  $N$  Wochen noch immer kein Gewinn erzielt wurde, und untersuche den Grenzübergang  $N \rightarrow \infty$ .



d) Man gebe eine — möglichst kleine — natürliche Zahl  $n_0$  an, so daß die Wahrscheinlichkeit des Gewinnens in  $n_0$  Wochen mindestens  $\alpha) 0,9, \beta) 0,99, \gamma) 0,999$  beträgt.

Hinweis: Die Wahrscheinlichkeit eines Gewinnes mit einem Tip beträgt beim Zahlenlotto  $p = 0,023$ .

11. In einer Versicherungsgesellschaft seien 600 Personen gleichen Alters und gleicher Berufsgruppe versichert. Die Wahrscheinlichkeit, im Verlaufe eines Jahres zu sterben, sei für jede Person gleich 0,005 und von dem Gesundheitszustand der anderen Personen unabhängig. Jeder Versicherte bezahlt am Anfang des Jahres 10 M Beitrag. Im Sterbefall erhalten die Hinterbliebenen 1500 M von der Versicherungsgesellschaft.
- Wie groß ist der Erwartungswert des Gewinns  $G$  der Gesellschaft?
  - Man ermittle die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Versicherungsgesellschaft mit Verlust arbeitet.
  - Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Versicherungsgesellschaft einen Gewinn von mindestens 2000 M erzielt.

Anleitung: Man überlege sich zunächst die Verteilung der (zufälligen) Anzahl  $X$  der Sterbefälle im Jahr, stelle eine Beziehung zwischen dieser Zufallsgröße und der Zufallsgröße  $G$  auf und beantworte auf dieser Grundlage die unter a) gestellte Frage. Bei b) und c) wende man außerdem den Grenzwertsatz von Poisson (vgl. MfL Bd. 11, 4.7., Satz 3) an

## Stetige Zufallsgrößen

### Kontrollfragen

- Was versteht man unter einer stetigen Zufallsgröße? Man nenne Beispiele für stetige Zufallsgrößen.
- Welche speziellen Eigenschaften besitzt die Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsgröße?
- Man nenne wesentliche Charakteristiken stetiger Zufallsgrößen, gebe deren Definition und wichtige Rechenregeln an.
- Man stelle die behandelten Wahrscheinlichkeitsverteilungen stetiger Zufallsgrößen nach dem Schema: Dichtefunktion — Erwartungswert — Streuung — Anwendungsbeispiel zusammen.
- Was versteht man unter dem Zentrieren, dem Normieren und dem Standardisieren einer Zufallsgröße?

### Aufgaben

1. Von einer Zufallsgröße  $X$  sei bekannt, daß sie eine Dichtefunktion folgender Gestalt besitzt:

$$f(x) = \frac{a}{e^x + e^{-x}} \quad (-\infty < x < \infty).$$

- a) Man bestimme die Konstante  $a$ .  
 b) Man berechne  $P(X < 1)$ .  
 c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Zufallsgröße  $X$  Werte zwischen 0 und  $\ln \sqrt{3}$  annimmt?

Lösung:

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \text{ führt mit } \int_0^{\infty} \frac{1}{t^2 + 1} dt = \frac{\pi}{2} \text{ auf } a = \frac{2}{\pi}.$$

$$\text{b) } P(X < 1) = \int_{-\infty}^1 f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{2}{\pi} \arctan e = 0,7756.$$

$$\text{c) } P(0 < X < \ln \sqrt{3}) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{2}{\pi} \arctan t \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{6}.$$

2. Wir betrachten die durch

$$f(x) = \begin{cases} cx^2(1-x) & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegebene Funktion  $f$  ( $c$  reell).

- a) Man bestimme  $c$  so, daß  $f$  Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgröße  $X$  wird.  
 b) Man skizziere diese Dichtefunktion. Wo liegt das Maximum?  
 c) Man berechne Erwartungswert und Streuung der Zufallsgröße  $X$ .
3. Wir gehen davon aus, daß die (als Zufallsgröße aufgefaßte) Zerfallszeit  $T$  für ein Poloniumatom eine Exponentialverteilung hat und daß die Wahrscheinlichkeit des Zerfallens in einem Zeitraum von 140 Tagen 0,5 beträgt. (Die sogenannte Halbwertszeit beträgt also 140 Tage.)
- a) Man bestimme den Parameter dieser Exponentialverteilung.  
 b) Nach welcher Zeit beträgt die Wahrscheinlichkeit des Zerfallenseins 0,95?
- 4.\* Wir nehmen an, daß die Anzahl  $X$  der Fehler auf einer Fläche von  $F$  Quadratmetern eines bestimmten Gewebes einer Poissonverteilung mit dem Parameter  $\lambda F$  genügt. Das Gewebe sei 1,5 m breit, und es gelte  $\lambda = 1$ .
- a) Es bezeichne  $Y$  die (zufällige) Länge eines Gewebestückes zwischen zwei Fehlern. Man bestimme die Dichte von  $Y$ .

- b) Man denke sich das Gewebe in Stücke zu 1 m Länge zerschnitten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter sechs zufällig ausgewählten Stücken genau zwei fehlerlos sind?
5. Es seien  $b$  und  $p$  positive Zahlen. Eine stetige Zufallsgröße  $X$  heißt gammaverteilt, wenn die Dichte  $f_X$  die Form

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ \frac{b^p}{\Gamma(p)} e^{-bx} \cdot x^{p-1} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

hat; dabei bedeutet  $\Gamma$  die Gammafunktion (vgl. MfL Bd. 11, 5.6.1.).

- a) Man berechne Erwartungswert, Streuung, Variationskoeffizient, Schiefe und Exzeß für die Gammaverteilung.
- b) Man stelle einen Bezug zur  $\chi^2$ -Verteilung her.
6. Ein Betrieb stellt Luftpostumschläge her. Die (als Zufallsgröße aufgefaßte) Masse  $X$  eines Luftpostumschlags ist erfahrungsgemäß normalverteilt mit den Parametern  $\mu = 1,95$  g und  $\sigma^2 = (0,05 \text{ g})^2$ .
- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein zufällig herausgegriffener Umschlag zwischen 1,8 g und 2,1 g wiegt?
- b) Man berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein zufällig herausgegriffener Umschlag mindestens 2 g wiegt und beantworte damit die Frage, wieviel solche Umschläge man in einem Päckchen von 100 Stück etwa in Kauf nehmen muß.
7. Wir nehmen an, daß der (als Zufallsgröße aufgefaßte) Milchfettgehalt bei Kühen normalverteilt sei, und zwar mit den Parametern  $\mu = 3,7(\%)$  und  $\sigma^2 = (0,3)^2$ . Um einen züchterischen Fortschritt zu erreichen, werden nur solche Tiere zur Zucht verwendet, deren Milchfettgehalt über 3,5% liegt. Wie groß ist der Prozentsatz der Kühe, die nicht zur Zucht verwendet werden?

## Zufällige Vektoren

### Kontrollfragen

1. Was versteht man unter einem zufälligen Vektor? Wie wird allgemein die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines zufälligen Vektors beschrieben?
2. Was versteht man speziell unter einem diskreten bzw. stetigen zufälligen Vektor? Wie wird speziell die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines diskreten bzw. stetigen zufälligen Vektors beschrieben?
3. Unter welchen Voraussetzungen gilt für Zufallsgrößen  $X$  und  $Y$ 
  - a)  $E(X + Y) = EX + EY$ ,    b)  $D^2(X + Y) = D^2X + D^2Y$ ?
4. Was versteht man unter  $\text{cov}(X, Y)$ , was unter  $\rho(X, Y)$ ?

5. Welche Eigenschaften besitzt der Korrelationskoeffizient? Warum ist er kein „ideales“ Maß für die Abhängigkeit zweier Zufallsgrößen?
6. Man charakterisiere — ausgehend von der Definition — die Unabhängigkeit zweier diskreter bzw. stetiger Zufallsgrößen und nenne einige Konsequenzen der Unabhängigkeit.
7. Welche besondere Rolle spielt die Normalverteilung unter dem Gesichtspunkt der Begriffe „unkorreliert“ und „unabhängig“?
8. Wie ist die Unabhängigkeit von  $n (\geq 2)$  Zufallsgrößen definiert? Man vergleiche diese Definition mit der Definition der Unabhängigkeit von  $n (\geq 2)$  zufälligen Ereignissen.

### Aufgaben

1. Der zufällige Vektor besitze die in Tabelle 7.2 angegebene Verteilungstabelle:

Tabelle 7.2

| $X \downarrow Y \rightarrow$ | -1            | 0             | 1             |
|------------------------------|---------------|---------------|---------------|
| -1                           | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |
| 0                            | $\frac{1}{8}$ | 0             | $\frac{1}{8}$ |
| 1                            | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

- a) Man berechne die Randverteilung des Vektors  $(X, Y)$ .
  - b) Sind  $X$  und  $Y$  identisch verteilt?
  - c) Man ermittle den Korrelationskoeffizienten von  $X$  und  $Y$ .
  - d) Sind  $X$  und  $Y$  stochastisch unabhängig?
  - e) Man berechne  $P(X = Y)$ .
2. Die Zufallsgrößen  $X$  und  $Y$  mögen die Werte 1, 2 und 3 mit den Wahrscheinlichkeiten

$$P(X = 1) = 0,5, \quad P(X = 2) = 0,3, \quad P(X = 3) = 0,2,$$

$$P(Y = 1) = 0,7, \quad P(Y = 2) = 0,2, \quad P(Y = 3) = 0,1$$

annehmen; außerdem sei bekannt, daß  $P(X = 3, Y = 1) = 0,20$ ,  $P(X = 1, Y = 1) = 0,35$ ,  $P(X = 2, Y = 2) = 0,06$  gilt.

- a) Man bestimme die gemeinsame Verteilung der Zufallsgrößen  $X$  und  $Y$ , d. h. die Verteilung des zufälligen Vektors  $(X, Y)$ .
- b) Man skizziere die Verteilungsfunktion von  $(X, Y)$ .

- c) Sind  $X$  und  $Y$  stochastisch unabhängig?
- d) Man gebe die Verteilung der Zufallsgröße  $Z := X + Y$  an.
- 3.\* Von der laufenden Produktion eines Betriebes sei bekannt, daß jedes Teil mit Wahrscheinlichkeit  $p$  fehlerfrei ist. Alle Teile passieren nacheinander den Prüfstand. Jedes Teil wird dort mit der Wahrscheinlichkeit  $p'$  geprüft. Bei der Prüfung eines Teils wird der Fehlerzustand stets richtig bestimmt. Wir führen folgende Zufallsgrößen ein:
- $N$  ... (zufällige) Anzahl der (geprüften und ungeprüften) Teile, die den Prüfstand passieren, bevor der erste Fehler festgestellt wird,
- $K$  ... (zufällige) Anzahl der fehlerhaften Teile, die den Prüfstand passieren, bevor der erste Fehler festgestellt wird.
- a) Man bestimme die gemeinsamen Verteilung von  $N$  und  $K$ .
- b) Man bestimme die Randverteilungen des Vektors  $(N, K)$ .
- c) Man berechne  $E\left(\frac{K}{N+1}\right)$  und deute diese Größe anschaulich.
- d) Man ermittle  $\text{cov}(N, K)$ .
- e) Man untersuche, ob die Beziehung  $E\left(\frac{K}{N+1}\right) = \frac{EK}{E(N+1)}$  gilt.

Hinweis: Man unterscheide vier Gruppen von Teilen, und zwar: geprüfte und fehlerfreie, geprüfte und fehlerhafte, usw.

4. Die Zufallsgröße  $X$  sei gleichmäßig über dem Intervall  $[-1, 1]$  verteilt. Außerdem betrachten wir die Zufallsgröße  $Y = X^2$ .
- a) Man bestimme die Verteilungsfunktion  $F_Y$  von  $Y$ .
- b) Man bestimme die Dichtefunktion  $f_Y$  von  $Y$ .
- c) Sind  $X$  und  $Y$  unabhängig?
- d) Sind  $X$  und  $Y$  unkorreliert?
5. Der zufällige Vektor  $(X, Y)$  besitze die Dichtefunktion

$$f(x, y) = \frac{1}{16\pi} e^{-\frac{1}{2} \left[ \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} \right]}.$$

Man bestimme die Randverteilungen von  $(X, Y)$  sowie die Größen  $EX$ ,  $EY$ ,  $D^2X$ ,  $D^2Y$ ,  $\text{cov}(X, Y)$  und  $\varrho(X, Y)$ .

Lösung: Unter Beachtung von  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x; \mu, \sigma^2) dx = 1$  (vgl. MfL Bd. 11, 5.4.) erhält man für die Randverteilungsdichte  $f_X$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{16\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left[ \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} \right]} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x; 1, 2^2) \cdot \varphi(y; -2, 4^2) dy = \varphi(x; 1, 2^2). \end{aligned}$$

Die Zufallsgröße  $X$  ist also  $N(1, 2^2)$ -verteilt. Ebenso ergibt sich, daß  $Y$  eine  $N(-2, 4^2)$ -Verteilung besitzt. Damit ist klar, daß  $EX = 1$ ,  $D^2X = 2^2$ ,  $EY = -2$ ,  $D^2Y = 4^2$  gilt. Wegen  $f_X(x) \cdot f_Y(y) = f(x, y)$  sind  $X$  und  $Y$  unabhängig, woraus  $\text{cov}(X, Y) = \rho(X, Y) = 0$  folgt.

6. Es seien  $X_1$  und  $X_2$  unabhängige Zufallsgrößen mit den Verteilungsfunktionen  $F_1$  und  $F_2$ . Man bestimme a) die Verteilungsfunktion der Zufallsgröße  $Y := \min\{X_1, X_2\}$ , b) die Verteilungsfunktion der Zufallsgröße  $Z := \max\{X_1, X_2\}$ .
7. \*Die Moleküle eines Gases bewegen sich im dreidimensionalen Raum zu einem gegebenen Zeitpunkt unabhängig in jeder Koordinate mit einer  $N(0, \sigma^2)$ -verteilten Geschwindigkeitskomponente ( $\sigma^2 = \frac{kT}{m}$ , wobei  $m$  die Masse,  $T$  die absolute Temperatur und  $k$  die Boltzmann-Konstante bedeuten). Die Zufallsgröße  $V$  bezeichne die Geschwindigkeit (= Betrag des Geschwindigkeitsvektors) eines Moleküls. Man bestimme a) die Verteilung von  $V$  (es handelt sich um die sogenannte Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung), b) die mittlere Geschwindigkeit  $E V$ , c) die Streuung  $D^2 V$ , d) die mittlere kinetische Energie  $\bar{w} = E\left(\frac{m}{2} V^2\right)$ .

Hinweis: Man überlege sich zunächst, daß die Zufallsgröße  $Z := \frac{V^2}{\sigma^2}$  eine  $\chi^2$ -Verteilung mit drei Freiheitsgraden besitzt. Danach zeige man, daß zwischen der Dichte  $f_V$  und der Dichte  $f_Z$  der Zusammenhang  $f_V(x) = \frac{2x}{\sigma^2} f_Z\left(\frac{x^2}{\sigma^2}\right)$  ( $-\infty < x < \infty$ ) besteht.

8. Es seien  $X$  und  $Y$  unabhängige exponentialverteilte Zufallsgrößen (Parameter  $\alpha, \beta$ ). Man berechne die Wahrscheinlichkeitsdichte von  $Z := X + Y$  und untersuche dabei speziell den Fall  $\alpha = \beta$ .

Hinweis: Man verwende die Faltungsformel (vgl. MfL Bd. 11, 6.5., Satz 5, Aussage 1).

9. Es seien  $X$  und  $Y$  unabhängige  $N(0, 1)$ -verteilte Zufallsgrößen. Man bestimme die Wahrscheinlichkeitsdichte  $f_Z$  der Zufallsgröße  $Z := \frac{X}{Y}$ . Um welche Verteilung handelt es sich?

Hinweis: Man verwende die Aussage 4 in MfL Bd. 11, 6.5., Satz 5.

10. Eine Maschine füllt Dosen mit Trockenmilch. Es ist ein Sollnettogewicht von 250 p vorgesehen. Das Füllgewicht  $X_1$  kann als eine normalverteilte Zufallsgröße mit  $\mu = 250$  p und  $\sigma = 7,5$  p aufgefaßt werden. Das Dosengewicht  $X_2$  wird ebenfalls als normalverteilte Zufallsgröße angesehen, und zwar mit  $\mu = 30$  p und  $\sigma = 2,2$  p. Die Zufallsgrößen  $X_1$  und  $X_2$  werden als unabhängig voneinander betrachtet.

a) Man bestimme ein Intervall, so daß das (als Zufallsgröße aufgefaßte) Gewicht einer gefüllten Dose mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% in diesem Intervall liegt; dabei soll dieses Intervall symmetrisch zum Erwartungswert dieses Gewichts liegen.

b) Die abgefüllten Dosen werden zu je 50 Stück in Kartons verpackt. Wir gehen davon aus, daß die (zufälligen) Gewichte untereinander unabhängig sind. Das

Gewicht  $X_3$  des Kartons kann als normalverteilte Zufallsgröße mit  $\mu = 750$  p und  $\sigma = 20$  p angesehen werden, die von  $X_1$  und  $X_2$  unabhängig ist. Man bestimme ein Intervall, so daß das (als Zufallsgröße aufgefaßte) Gewicht eines gepackten Kartons mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% in diesem Intervall liegt; dabei soll dieses Intervall symmetrisch zum Erwartungswert dieses Gewichts liegen.

## Grenzwertsätze

### Kontrollfragen

1. Man gebe verschiedene Formen der Čebyševschen Ungleichung an und formuliere deren Inhalt auch in Worten.
2. Welche Konvergenzarten wurden behandelt? Man stelle die Definitionen zusammen und vergleiche sie untereinander.
3. Man erläutere das Bernoullische Gesetz der großen Zahlen und erkläre damit den immer wieder zu beobachtenden Effekt der Stabilisierung der relativen Häufigkeit.
4. Was versteht man allgemein unter einem Gesetz der großen Zahlen? Wie ordnet sich in diesen allgemeinen Rahmen das Bernoullische Gesetz der großen Zahlen ein?
5. Man erläutere den Inhalt des Grenzwertsatzes von DE MOIVRE-LAPLACE und gehe dabei insbesondere auf praktische Konsequenzen ein.
6. Was versteht man allgemein unter einem Zentralen Grenzwertsatz? Wie ordnet sich in diesen allgemeinen Rahmen der Grenzwertsatz von DE MOIVRE-LAPLACE ein?

### Aufgaben

- 1.\* Die Zufallsgrößen  $X_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , mögen Zweipunktverteilungen besitzen:

$$P(X_n = n^c) = \frac{1}{n}, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n};$$

dabei sei  $c$  eine beliebige reelle Zahl.

- a) Für welche  $c$  konvergiert  $(X_n)$  mit Wahrscheinlichkeit Eins gegen Null?
  - b) Für welche  $c$  konvergiert  $(X_n)$  in Wahrscheinlichkeit gegen Null?
  - c) Für welche  $c$  konvergiert  $(X_n)$  im quadratischen Mittel gegen Null?
2. Wir betrachten die Folge  $(X_k)$  von unabhängigen Zufallsgrößen  $X_k$  mit  $P(X_k = 2^k) = P(X_k = -2^k) = 2^{-(2k+1)}$  und  $P(X_k = 0) = 1 - 2^{-2k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Man zeige, daß für diese Folge das schwache Gesetz der großen Zahlen gilt.

Lösung: Es gilt  $EX_k = 0$ ,  $D^2X_k = 1$  für  $k = 1, 2, \dots$ . Für

$$Y_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - EX_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

gilt bei beliebigem  $\varepsilon > 0$

$$P(|Y_n| \geq \varepsilon) = P\left(\left|\sum_{k=1}^n X_k\right| \geq n\varepsilon\right) \leq \frac{D^2\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\sum_{k=1}^n D^2X_k}{n^2\varepsilon^2} = \frac{1}{n\varepsilon^2};$$

dabei wurde insbesondere die Čebyševsche Ungleichung verwendet. Hieraus folgt dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n| \geq \varepsilon) = 0$  für jedes  $\varepsilon > 0$ , d. h., die Folge  $(Y_n)$  konvergiert stochastisch gegen Null, d. h., die Folge  $(X_k)$  genügt dem schwachen Gesetz der großen Zahlen.

3. Die Komponenten  $X_i$  des zufälligen Vektors  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  seien unabhängige identisch  $N(0, 1)$ -verteilte Zufallsgrößen.

a) Man bestimme die Verteilung der (zufälligen) Länge  $L$  dieses zufälligen Vektors.

b) Man löse die unter a) gestellte Aufgabe für große  $n$  näherungsweise unter Bezugnahme auf den Grenzwertsatz von LINDBERGB-LÉVY.

c) Für  $n = 15$  ermittle man die Wahrscheinlichkeit  $p$  dafür, daß die Länge  $L$  des Vektors größer als 5 ausfällt, exakt (mit a)) und näherungsweise (mit b)).

4. Die Zufallsgröße  $X_n$  gebe an, wie oft in einer Serie von  $n$  unabhängigen Würfeln mit einem idealen Würfel die Zahl „4“ auftritt.

a) Man beweise, daß die Folge  $\left(\frac{X_n}{n}\right)$  in Wahrscheinlichkeit gegen  $\frac{1}{6}$  konvergiert.

b) Mit Hilfe der Čebyševschen Ungleichung gebe man eine natürliche Zahl  $n_0$  so an, daß die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $\left\{\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{6}\right| \geq 0,01\right\}$  für alle  $n \geq n_0$  kleiner als 0,05 ist.

c) Man löse die unter b) gestellte Aufgabe mit Hilfe des Grenzwertsatzes von DE MOIVRE-LAPLACE.

Lösung:  $X_n$  ist binomialverteilt mit den Parametern  $n$  und  $p = \frac{1}{6}$ . Es gilt also

$$EX_n = \frac{n}{6}, \quad D^2X_n = \frac{5n}{36}, \quad E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{6}, \quad D^2\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{5}{36n}.$$

a) Damit und mit der Čebyševschen Ungleichung erhält man ( $\varepsilon > 0$ )

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{6}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D^2\left(\frac{X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{5n}{36} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{5}{36n\varepsilon^2}.$$

Also gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{6}\right| \geq \varepsilon\right) = 0$  für jedes  $\varepsilon > 0$ , w. z. b. w.

b) Wählt man  $n \geq \frac{5}{36 \cdot 0,01^2} \cdot \frac{1}{0,05} \approx 27778$ , so gilt auf Grund der unter a) angegebenen



Ungleichung die Aussage  $P\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{6}\right| \geq 0,01\right) \leq 0,05$ . Man kann also  $n_0 = 27\,778$  setzen.

c)  $\frac{X_n - \frac{n}{6}}{\sqrt{\frac{5n}{36}}}$  ist nach dem Grenzwertsatz von DE MOIVRE-LAPLACE asymptotisch  $N(0, 1)$ -verteilt. Damit ergibt sich

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{6}\right| \geq 0,01\right) = 1 - P\left(-\frac{0,01n}{\sqrt{\frac{5n}{36}}} < \frac{X_n - \frac{n}{6}}{\sqrt{\frac{5n}{36}}} < \frac{0,01n}{\sqrt{\frac{5n}{36}}}\right) \\ \approx 2\left(1 - \Phi\left(\frac{6\sqrt{n}}{100\sqrt{5}}\right)\right).$$

Der rechtsstehende Ausdruck ist dann  $\leq 0,05$ , wenn  $\frac{6\sqrt{n}}{100\sqrt{5}} \geq 1,96$  gilt, d. h., wenn  $n \geq 5336$  ist. Man kann also  $n_0 = 5336$  setzen.

5. Ein Gütekontrollierer prüft nacheinander Teile eines Postens. Die Kontrolle eines Teiles geschieht auf folgende Weise: In einer ersten Prüfung, die 10 s dauert, kann mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  entschieden werden, ob das Teil „gut“ oder „schlecht“ ist. Falls diese Prüfung zu keiner Entscheidung führt, wird sofort eine zweite Prüfung angeschlossen, die ebenfalls 10 s dauert und in jedem Fall die Entscheidung „gut“ oder „schlecht“ nach sich zieht.

a) Man gebe die Wahrscheinlichkeitsverteilung, den Erwartungswert und die Streuung der (zufälligen) Zeit  $T_{950}$  an, die zur Prüfung von 950 Teilen benötigt wird.

b) Unter Verwendung des Grenzwertsatzes von DE MOIVRE-LAPLACE berechne man näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zur Prüfung von 950 Teilen nicht mehr als vier Stunden benötigt werden.

c) Auf dem gleichen Wege ermittle man näherungsweise, wie groß die Anzahl  $n$  der Teile eines Postens höchstens sein darf, damit dieser Posten mit einer Wahrscheinlichkeit von (mindestens) 99% innerhalb von drei Stunden restlos geprüft werden kann.

6. Ein Transformator Kern besteht aus 50 Blechen und 49 Papierzwischenlagen, deren Dicken als unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen aufgefaßt werden können. Erwartungswerte und Standardabweichungen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

|        | Erwartungswert            | Standardabweichung           |
|--------|---------------------------|------------------------------|
| Blech  | $\mu_1 = 0,50 \text{ mm}$ | $\sigma_1 = 0,05 \text{ mm}$ |
| Papier | $\mu_2 = 0,05 \text{ mm}$ | $\sigma_2 = 0,02 \text{ mm}$ |

Eine Montage des Transformator kernels ist genau dann möglich, wenn dessen Dicke zwischen 27 und 28 mm liegt. Man berechne näherungsweise die Wahrscheinlichkeit  $p$  dafür, daß eine Montage des Transformator kernels durchgeführt werden kann.

Hinweis: Man überlege sich zunächst, daß die (als Zufallsgröße aufgefaßte) Dicke eines Transformator kernels näherungsweise normalverteilt ist mit  $\mu = 50 \cdot \mu_1 + 49 \cdot \mu_2 = 27,45$  mm und  $\sigma^2 = 50 \cdot \sigma_1^2 + 49 \cdot \sigma_2^2 = 0,1446$  mm<sup>2</sup>.

## Beschreibende Statistik

### Kontrollfragen

1. Welche Möglichkeiten gibt es zur übersichtlichen Darstellung von Meßreihen und anderem Zahlenmaterial?
2. Man nenne und bewerte statistische Maßzahlen zur Beurteilung einer Meßreihe.
3. Wie kann man die Abhängigkeit zweier Merkmale anhand von konkretem Datenmaterial beurteilen?

### Aufgaben

1. Bei der Auswertung einer Prüfungsklausur ergab sich folgendes Leistungsbild:

|        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Punkte | 7   | 10  | 13  | 16  | 19  | 22  | 25  | 28  | 31  | 34  |
|        | bis | bis | bis | bis | bis | bis | bis | bis | bis | bis |
|        | 9   | 12  | 15  | 18  | 21  | 24  | 27  | 30  | 33  | 36  |
| Anzahl | 3   | 22  | 40  | 73  | 90  | 96  | 72  | 31  | 9   | 1   |

- a) Man berechne den arithmetischen Mittelwert  $\bar{x}$ , die empirische Streuung  $s^2$  und die empirische Standardabweichung  $s$  der erreichten Punktzahlen.
  - b) Man fertige ein Histogramm an.
2. An 60 Tannen eines 40jährigen Bestandes wurde der Durchmesser (Brusthöhe) gemessen (Maße in cm):

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 16 | 15 | 17 | 16 | 19 | 17 | 16 | 16 | 16 | 18 | 15 | 14 | 14 | 14 | 15 |
| 11 | 7  | 8  | 10 | 9  | 11 | 11 | 13 | 12 | 12 | 12 | 14 | 13 | 13 | 15 |
| 11 | 9  | 12 | 10 | 12 | 11 | 12 | 14 | 13 | 11 | 12 | 14 | 15 | 13 | 14 |
| 15 | 18 | 16 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 14 | 14 | 12 | 14 | 12 | 13 | 12 |

- a) Unter Verwendung der Klasseneinteilung 6,5–8,5; 8,5–10,5; ...; 18,5–20,5 gebe man eine Häufigkeitstabelle an und veranschauliche diese durch ein Histogramm und durch ein Polygon.

b) Man berechne das arithmetische Mittel, die empirische Streuung, die empirische Standardabweichung mit und ohne Verwendung der Klasseneinteilung. Man bestimme ferner den empirischen Median, empirische Modalwerte, die Spannweite und den empirischen Variationskoeffizienten.

3. Zur Untersuchung der Abhängigkeit der Bruchdehnung ( $X$ ) vom Kohlenstoffgehalt ( $Y$ ) bei einer Stahlsorte wurden die folgenden 25 Meßwertpaare (Angaben in %) erhalten:

|     |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $X$ | 9,9  | 22,1 | 28,6 | 12,0 | 24,8 | 12,4 | 20,2 | 26,1 | 17,6 |
| $Y$ | 0,70 | 0,40 | 0,14 | 0,60 | 0,25 | 0,65 | 0,50 | 0,30 | 0,55 |
| $X$ | 30,5 | 14,9 | 24,9 | 11,0 | 20,5 | 29,4 | 12,1 | 19,0 | 16,4 |
| $Y$ | 0,10 | 0,60 | 0,30 | 0,70 | 0,40 | 0,20 | 0,70 | 0,40 | 0,55 |
| $X$ | 30,4 | 27,9 | 31,0 | 11,0 | 23,0 | 26,0 | 13,1 |      |      |
| $Y$ | 0,15 | 0,20 | 0,20 | 0,65 | 0,30 | 0,25 | 0,60 |      |      |

Man ermittle die arithmetischen Mittelwerte  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$ , die empirischen Streuungen  $s_x^2$  und  $s_y^2$ , die empirische Kovarianz  $s_{xy}$  und den empirischen Korrelationskoeffizienten  $r$ .

4. Bei zehn Baustellen  $B_i$  ergaben sich folgende Werte  $x_i$  für die Jahresproduktion und  $y_i$  für die Jahresgesamtkosten (in  $10^4$  M):

| $B_i$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $B_6$ | $B_7$ | $B_8$ | $B_9$ | $B_{10}$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| $x_i$ | 12    | 15    | 18    | 18    | 20    | 21    | 24    | 25    | 36    | 37       |
| $y_i$ | 11    | 12    | 16    | 17    | 18    | 18    | 20    | 21    | 26    | 31       |

Zur Beurteilung der Abhängigkeit zwischen Jahresproduktion und Jahresgesamtkosten ist der empirische Korrelationskoeffizient zu berechnen.

## Grundbegriffe der mathematischen Statistik

### Kontrollfragen

1. Man beschreibe verschiedene Methoden der Stichprobenerhebung. Dabei gehe man insbesondere auf Stichproben ohne Zurücklegen und auf Stichproben mit Zurücklegen ein.
2. Was versteht man unter einer mathematischen Stichprobe, was unter einer konkreten Stichprobe vom Umfang  $n$  aus einer Grundgesamtheit  $X$  mit der Verteilungsfunktion  $F$ ?

3. Was drückt die empirische Verteilungsfunktion einer konkreten Stichprobe aus? Man beschreibe das Bild einer solchen Funktion.
4. Wie ist die empirische Verteilungsfunktion einer mathematischen Stichprobe definiert? In welchem Zusammenhang steht diese zur Verteilungsfunktion der Grundgesamtheit?

### Aufgaben

1. Erzeugnisse einer maschinellen Serienproduktion werden einer Qualitätskontrolle unterworfen. Es werden Posten genügend großen Umfangs produziert. Bei der Kontrolle werden einem Posten  $n$  Erzeugnisse entnommen und geprüft. Sind alle Gegenstände einwandfrei, so wird der Posten angenommen.
    - a) Wie groß darf  $n$  höchstens gewählt werden, damit bei  $p = 1\%$  Ausschub in der Gesamtproduktion die Annahmewahrscheinlichkeit mindestens  $0,90$  beträgt?
    - b) Wie verändert sich bei Zugrundelegung des unter a) bestimmten  $n$  die Annahmewahrscheinlichkeit, wenn  $p = 5\%$  bzw.  $p = 10\%$  Ausschub vorhanden sind?
  2. Ein sehr großer Warenposten enthalte  $100p\%$  fehlerhafte Stücke. Es werde eine Stichprobe vom Umfang  $50$  entnommen. Die Probe wird für „gut“ befunden, wenn sie höchstens ein fehlerhaftes Stück enthält.
    - a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Urteil „gut“, wenn  $p = 0,02$  bzw.  $p = 0,05$  gilt?
    - b) Man fertige eine Skizze an, die den Zusammenhang zwischen der „Ausschubwahrscheinlichkeit“  $p$  und der „Annahmewahrscheinlichkeit“  $L(p)$ , d. h. der Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Probe für „gut“ befunden wird, wiedergibt.
  3. Für eine Massenproduktion soll ein einfacher Stichprobenprüfplan derart aufgestellt werden, daß ein Posten angenommen wird, wenn in einer Stichprobe vom Umfang  $n$  höchstens  $c$  Ausschubstücke gefunden werden. Der Käufer der Produktion fordert vom Prüfplan, daß ein Posten mit Ausschubanteilen von  $100p_1\%$  mit  $p \geq p_1 = 0,06$  nur mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens  $0,05$  angenommen wird (Konsumentenrisiko). Demgegenüber fordert der Erzeuger, daß Posten mit einem Ausschubanteil von  $100p_2\%$  mit  $p \leq p_2 = 0,01$  mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens  $90\%$  angenommen werden (Produzentenrisiko).
    - a) Wie müssen  $n$  und  $c$  gewählt werden, um beide Forderungen zu erfüllen?
    - b) Man berechne für den unter a) bestimmten Prüfplan zu einigen Werten von  $p$  die Annahmewahrscheinlichkeit  $L(p)$  und stelle diesen Zusammenhang graphisch dar.
- Hinweis: Bei a) verwende man den Grenzwertsatz von DE MOIVRE-LAPLACE, bei b) approximiere man die Binomialverteilung durch die Poissonverteilung.
4. Es sei  $(X_n)$  eine Folge unabhängiger, identisch gleichmäßig über dem Intervall  $[[0, 1]]$  verteilter Zufallsgrößen.

a) Man beweise die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n \cdot \min \{X_1, \dots, X_n\} < x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ 1 - e^{-x} & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

b) Man zeige mit a), daß  $Z_n := \frac{n}{\lambda} \min \{X_1, \dots, X_n\}$  ( $\lambda > 0$  fest) asymptotisch exponentialverteilt ist mit dem Parameter  $\lambda$ .

Hinweis: Man verwende MfL Bd. 11, 9.4., Satz 1 über die Verteilungsfunktion der Stichprobenfunktion  $\min \{X_1, \dots, X_n\}$ .

## Einführung in die Schätztheorie

### Kontrollfragen

1. Was versteht man allgemein unter einer Punktschätzung? Man beschreibe die Ausgangssituation und das Ziel.
2. Man nenne „erwünschte“ Eigenschaften von Punktschätzungen, gebe deren Definition an und erläutere diese.
3. Wie vergleicht man erwartungstreue Punktschätzungen miteinander? Was versteht man unter dem Wirkungsgrad einer Punktschätzung in bezug auf eine andere? In diesem Zusammenhang gehe man auch auf den Begriff der effektiven Schätzung ein.
4. Man beschreibe die Maximum-Likelihood-Methode zur Konstruktion von Punktschätzungen. Welches Prinzip liegt dieser Methode zugrunde?
5. Man gebe Punktschätzungen für Erwartungswert und Streuung einer Grundgesamtheit, für die Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses und für die Verteilungsfunktion einer Grundgesamtheit an. Dabei nenne man auch wichtige Eigenschaften der jeweiligen Schätzung.
6. Was versteht man allgemein unter einer Konfidenzschätzung? Worin besteht der wesentliche Unterschied zwischen einer Punktschätzung und einer Konfidenzschätzung?
7. Was versteht man insbesondere unter einer Konfidenzschätzung zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha$ ?
8. Man motiviere die Entscheidung, die bei Vorliegen einer konkreten Stichprobe auf der Grundlage einer Konfidenzschätzung zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha$  getroffen wird. Was läßt sich über die Wahrscheinlichkeit einer Fehlentscheidung aussagen?

## Aufgaben

1. Die Grundgesamtheit  $X$  besitze eine sogenannte verschobene Exponentialverteilung, gekennzeichnet durch die Dichtefunktion

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq \theta, \\ e^{-(x-\theta)} & \text{für } x > \theta. \end{cases}$$

Der Parameter  $\theta$  ist anhand einer Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  vom Umfang  $n$  aus der Grundgesamtheit  $X$  zu schätzen.

- a) Man konstruiere eine erwartungstreue Schätzung unter Verwendung von

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n) \text{ und untersuche diese auf Konsistenz.}$$

- b) Man ermittle für die Stichprobenfunktion  $\min\{X_1, \dots, X_n\}$  Verteilungsfunktion, Dichte, Erwartungswert und Streuung.

- c) Man konstruiere eine erwartungstreue Schätzung aus der Stichprobenfunktion  $\min\{X_1, \dots, X_n\}$  und untersuche diese auf Konsistenz.

- d) Man vergleiche die unter a) und b) erhaltenen Schätzungen hinsichtlich ihrer Wirksamkeit.

- e) Welche Schätzung erhält man bei Verwendung der Momentenmethode?

Lösung: Man rechnet leicht nach, daß  $E_{\theta}X = 1 + \theta$  und  $D_{\theta}^2X = 1$  gilt.

- a) Für die Stichprobenfunktion  $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n) - 1$  ergibt sich damit  $E_{\theta}\hat{\theta}_n = \theta$  und  $D_{\theta}^2\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}$ . Also ist  $\hat{\theta}_n$  eine erwartungstreue und konsistente Punktschätzung für  $\theta$ .

- b) Mit MfL Bd. 11, 9.4, Satz 1, erhält man

$$F_{\min\{X_1, \dots, X_n\}}(x) = 1 - \left(1 - \int_{\theta}^x f_{\theta}(t) dt\right)^n = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq \theta, \\ 1 - e^{-n(x-\theta)} & \text{für } x > \theta. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich durch Differentiation

$$f_{\min\{X_1, \dots, X_n\}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq \theta, \\ ne^{-n(x-\theta)} & \text{für } x > \theta \end{cases}$$

und damit

$$E_{\theta} \min\{X_1, \dots, X_n\} = \frac{1}{n} + \theta, \quad D_{\theta}^2 \min\{X_1, \dots, X_n\} = \frac{1}{n^2}.$$

- c) Für die Stichprobenfunktion  $\bar{\theta}_n = \min\{X_1, \dots, X_n\} - \frac{1}{n}$  ergibt sich mit b)  $E_{\theta}\bar{\theta}_n = \theta$  und  $D_{\theta}^2\bar{\theta}_n = \frac{1}{n^2}$ . Also ist  $\bar{\theta}_n$  eine erwartungstreue und konsistente Punktschätzung für  $\theta$ .

- d) Die Punktschätzung  $\bar{\theta}_n$  ist wirksamer als die Punktschätzung  $\hat{\theta}_n$ ; der Wirkungsgrad von  $\bar{\theta}_n$  in bezug auf  $\hat{\theta}_n$  beträgt  $\frac{1}{n}$ .

- e) Wegen  $E_{\theta}X = 1 + \theta$  erhält man nach der Momentenmethode die (unter a) untersuchte) Punktschätzung  $\hat{\theta}_n$ .

2. Es sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Stichprobe vom Umfang  $n$  aus einer  $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilten Grundgesamtheit;  $\mu$  sei bekannt,  $\sigma^2$  hingegen nicht. Man zeige, daß

$$V_n = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=1}^n |X_k - \mu|$$

eine erwartungstreue und schwach konsistente Schätzung für  $\sigma$  ist.

3. Es sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Stichprobe vom Umfang  $n$  aus einer exponentialverteilten Grundgesamtheit; der Parameter  $\lambda$  sei unbekannt. Man konstruiere eine Punktschätzung für den Median  $\theta$  unter Verwendung der Maximum-Likelihood-Methode.

Hinweis: Zwischen dem Medium  $\theta$  und dem Parameter  $\lambda$  einer exponentialverteilten Zufallsgröße besteht der Zusammenhang  $\theta = \frac{1}{\lambda} \ln 2$ .

4. Ein Gerät besteht aus  $m$  gleichartigen parallel geschalteten Elementen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Element während einer Arbeitsperiode nicht ausfällt, sei gleich  $p$ . Zur Bestimmung von  $p$  wurden  $n$  Arbeitsperioden beobachtet. Dabei fiel das Gerät insgesamt  $k$ -mal aus.

a) Man bestimme einen Schätzwert  $\hat{p}$  für  $p$  nach der Maximum-Likelihood-Methode.

b) Man ermittle speziell  $\hat{p}$  im Fall  $m = 20$ ,  $n = 100$ ,  $k = 4$ .

5. Es sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Stichprobe vom Umfang  $n$  aus einer Grundgesamtheit, die das Verteilungsgesetz

$$P(X = k) = p(1 - p)^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

besitzt (sogenannte geometrische Verteilung); der Parameter  $p$  sei unbekannt. Man konstruiere eine Punktschätzung für  $p$  unter Verwendung der Maximum-Likelihood-Methode.

6. Die Grundgesamtheit  $X$  besitze eine sogenannte verschobene Exponentialverteilung, gekennzeichnet durch die Dichtefunktion

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq \theta, \\ e^{-(x-\theta)} & \text{für } x > \theta. \end{cases}$$

Der Parameter  $\theta$  ist anhand einer Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  vom Umfang  $n$  aus der Grundgesamtheit  $X$  zu schätzen.

a) Man konstruiere eine Konfidenzschätzung für  $\theta$  zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha$ , wobei man die Stichprobenfunktion  $\hat{\theta}_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$  verwende und eine Zerlegung  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$  zugrunde lege.

Hinweis: Man gehe von dem Ansatz  $I(X_1, \dots, X_n) = \llbracket \hat{\theta}_n - \delta_1, \hat{\theta}_n - \delta_2 \rrbracket$  aus ( $0 \leq \delta_2 \leq \delta_1$ ) und bestimme  $\delta_1$  und  $\delta_2$  passend.

b) Man ermittle speziell die Konfidenzschätzung für  $\delta_2 = 0$ , bestimme die hierzu gehörige Kennfunktion, skizziere diese Funktion und überprüfe, ob die ermittelte Konfidenzschätzung unverfälscht ist.

- c) Man berechne die Länge des Konfidenzintervalls für die unter b) erhaltene Konfidenzschätzung, speziell für  $n = 10$  und  $\alpha = 0,05$ . Wie groß muß der Stichprobenumfang  $n$  mindestens gewählt werden, damit bei vorgegebenem Konfidenzniveau von  $0,95$  die Länge des Konfidenzintervalles nicht größer als  $0,20$  ausfällt.
7. Der zufällige Vektor  $(X, Y)$  sei auf der Kreisfläche  $\{(x, y): x^2 + y^2 \leq R^2\}$  gleichmäßig verteilt;  $R$  sei unbekannt. Der unbekannte Parameter  $\gamma = R$  ist auf Grund einer Stichprobe  $((X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n))$  vom Umfang  $n$  aus der Grundgesamtheit  $(X, Y)$  zu schätzen.
- a) Man konstruiere eine Konfidenzschätzung für  $\gamma$  zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha$ .
- b) Man stelle die Kennfunktion der in a) erhaltenen Konfidenzschätzung auf und skizziere diese. Ist die Konfidenzschätzung unverfälscht?

Anleitung: Man überlege sich zunächst die Verteilung der Zufallsgröße  $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$  (= Länge des zufälligen Vektors  $(X, Y)$ ) und untersuche damit die Stichprobenfunktion  $\hat{\gamma}_n = \max\{Z_1, \dots, Z_n\}$ . Die Konfidenzschätzung setze man in der Form  $[\hat{\gamma}_n, \delta \hat{\gamma}_n]$ ,  $\delta > 1$ , an.

8. Die Zufallsgröße  $X$  sei exponentialverteilt mit dem Parameter  $\lambda$ ;  $\lambda$  sei unbekannt. Der Parameter  $\gamma = \lambda$  soll anhand einer Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  vom Umfang  $n$  aus der Grundgesamtheit  $X$  durch eine Konfidenzschätzung zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha$  geschätzt werden.

Anleitung: Es gilt  $E_\gamma X = \frac{1}{\gamma}$ . Dies legt die Verwendung der Stichprobenfunktion  $\hat{\gamma}_n = \frac{1}{\bar{X}_n}$  mit  $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$  bei der Konstruktion der Konfidenzschätzung nahe. Man mache daher den Ansatz  $I(X_1, \dots, X_n) = \left[ \frac{a}{\bar{X}_n}, \frac{b}{\bar{X}_n} \right]$ ,  $0 < a < 1 < b$ , und bestimme dann  $a$  und  $b$  so, daß  $P_\gamma(I(X_1, \dots, X_n) \ni \gamma) = 1 - \alpha$  für alle  $\gamma > 0$  gilt. Dazu verwendet man die Aussage, daß  $2n\gamma\bar{X}_n$  unter der Annahme, daß  $X$  exponentialverteilt ist mit dem Parameter  $\gamma$ , eine  $\chi^2$ -Verteilung mit  $2n$  Freiheitsgraden besitzt.

9. Aus der laufenden Produktion von Schrauben wird eine Stichprobe vom Umfang 9 entnommen. Die Abweichungen vom Nennmaß werden als Realisierungen einer normalverteilten Zufallsgröße angesehen, deren Standardabweichung den Gütegrad der Maschine ausdrückt und mit  $\sigma_0 = 24 \mu\text{m}$  als bekannt angenommen wird. Die Stichprobe führt auf eine mittlere Abweichung vom Nennmaß von  $\bar{x} = -61 \mu\text{m}$ . Man gebe ein symmetrisch zu  $\bar{x} = -61 \mu\text{m}$  gelegenes Schätzintervall auf der Grundlage einer Konfidenzschätzung zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha = 0,95$  für den unbekanntem Erwartungswert der (zufälligen) Abweichung vom Nennmaß an.

Hinweis: Man verwende MfL Bd. 11, 10.6.1., Satz 1 (mit  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$ ).

10. Gegeben sei eine Stichprobe, die aus einer  $N(\mu, 1)$ -verteilten Grundgesamtheit stammt.  $H$  zählt, wie oft der Wert  $x$  in der Stichprobe auftritt:

|     |    |    |    |    |    |
|-----|----|----|----|----|----|
| $x$ | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| $H$ | 2  | 5  | 8  | 4  | 3  |



a) Man ermittle auf der Grundlage einer erwartungstreuen Schätzung für den Erwartungswert  $\mu$  einen Schätzwert.

b) Man ermittle auf der Grundlage einer Konfidenzschätzung für  $\mu$  der Form  $\llbracket A(X_1, \dots, X_n), \infty \llbracket$  zu obiger Stichprobe ein Schätzintervall (Konfidenzniveau  $1 - \alpha = 0,99$ ).

Hinweis: Man verwende MfL Bd. 11, 10.6.1., Satz 1 (mit  $\alpha_2 = 0$ ).

11. Aus der laufenden Produktion von Kugellagerinnenringen wird eine Stichprobe vom Umfang 20 entnommen. Die Breiten der Rohlinge werden als Realisierungen einer normalverteilten Zufallsgröße angesehen. Die Stichprobe führte auf einen arithmetischen Mittelwert  $\bar{x} = 32,2975$  mm und auf eine empirische Streuung  $s^2 = 0,13305$  mm<sup>2</sup>. Man gebe ein Schätzintervall für  $\sigma^2$  auf der Grundlage einer Konfidenzschätzung zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha = 0,95$  an.

Hinweis: Man verwende MfL Bd. 11, 10.6.1., Satz 4 (mit  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$ ).

## Einführung in die Testtheorie

### Kontrollfragen

1. Worin besteht die Aufgabe eines statistischen Tests? Man beschreibe die Ausgangssituation und das Ziel.
2. Man erläutere die folgenden Grundbegriffe der Testtheorie: Hypothese (einfache, zusammengesetzte, Null-, Alternativhypothese), kritischer Bereich, Fehler erster Art, Fehler zweiter Art.
3. Wie ist die Gütefunktion eines Tests definiert? Was drücken die Funktionswerte aus?
4. Was versteht man unter einem Signifikanztest zum Signifikanzniveau  $\alpha$ ?
5. Man beschreibe das allgemeine Vorgehen beim Signifikanztest.
6. Was versteht man unter einem Parametertest? Man gebe Beispiele für Parametertests an und erläutere insbesondere den a) einfachen  $t$ -Test, b) doppelten  $t$ -Test, c)  $\chi^2$ -Streuungstest, d)  $F$ -Test.
7. Was versteht man unter einem verteilungsfreien Test? Man gebe Beispiele für verteilungsfreie Tests an und erläutere insbesondere den a)  $\chi^2$ -Anpassungstest, b)  $\chi^2$ -Homogenitätstest, c)  $\chi^2$ -Unabhängigkeitstest (Unabhängigkeitstest in Kontingenztafeln).

### Aufgaben

1. Bei 100 Personen einer bestimmten Gruppe wurde die Körperlänge gemessen. Diese Messungen ergaben das arithmetische Mittel  $\bar{x} = 175$  cm. Unter der Voraussetzung, daß die Körperlänge  $X$  eine normalverteilte Zufallsgröße mit  $\sigma = 6$  cm ist, prüfe man die Hypothese  $H: \mu = 177$  cm zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0,05$ .

Hinweis: Man benutze den in MfL Bd. 11, 11.1., als Beispiel angegebenen Test.

2. Es wird behauptet, daß das — als normalverteilt anzunehmende — Gewicht von Eiern einer bestimmten Güteklasse den Erwartungswert  $\mu_0 = 56p$  besitzt. Jemand kauft zwölf Eier dieser Güteklasse und ermittelt dazu das arithmetische Mittel  $\bar{x} = 53p$  und die empirische Standardabweichung  $s = 5,3p$ . Sind diese Ergebnisse noch mit der Annahme verträglich, daß die Eier tatsächlich der entsprechenden Güteklasse angehören (Signifikanzniveau  $\alpha = 0,10$ )?

Hinweis: Man verwende den  $t$ -Test (vgl. MfL Bd. 11, 11.4.1.).

3. Eine Stichprobe von 25 Werten der Zugfestigkeit von Blechen, gemessen in  $\text{kg/mm}^2$ , ergab die empirische Streuung  $s^2 = 1,921$ . Man prüfe die Hypothese  $H: \sigma^2 = 1,5$  unter der Voraussetzung, daß die Zugfestigkeit normalverteilt ist (Signifikanzniveau  $\alpha = 0,10$ ).

Hinweis: Man verwende den  $\chi^2$ -Streuungstest (vgl. MfL Bd. 11, 11.4.3.).

4. In einer Kooperationsgemeinschaft erhielten von 20 Versuchsrindern zehn zufällig ausgewählte (Gruppe I) jeden Tag Kraftfutter der Zusammensetzung A, die übrigen zehn Rinder (Gruppe II) erhielten das herkömmliche Futter der Zusammensetzung B. Nach einer gewissen Zeit wurde die Gewichtszunahme in kg festgestellt:

Gruppe I:    4    2,5   3,5   4   1,5   1   3,5   3    2,5   3,5

Gruppe II:   1,5   3,5   2,5   3   2,5   2   2    2,5   1,5   3

a) Unter der Annahme, daß die Gewichtszunahme in beiden Fällen normalverteilt ist, prüfe man die Hypothese über die Gleichheit der Streuungen in beiden Gruppen (Signifikanzniveau  $\alpha = 0,1$ ).

b) Unter der Annahme, daß die Gewichtszunahme in beiden Fällen normalverteilt ist mit der gemeinsamen unbekanntem Streuung  $\sigma^2$  prüfe man die Hypothese über die Gleichheit der Mittelwerte in beiden Gruppen (Signifikanzniveau  $\alpha = 0,05$ ).

Hinweis: Für a) verwende man den  $F$ -Test (vgl. MfL Bd. 11, 11.4.4.), für b) verwende man den doppelten  $t$ -Test (vgl. MfL Bd. 11, 11.4.2.).

5. a) Bei 200 Würfeln mit einem Würfel trat 22mal die Augenzahl „6“ auf. Man prüfe, ob dieser Würfel die Bedingungen eines idealen Würfels erfüllt (Signifikanzniveau  $\alpha = 0,05$ ).
- b) Ein zweiter Würfel ergab bei 200 Würfeln 40mal die Augenzahl „6“. Kann dieser Würfel als ideal angesehen werden?

Hinweis: Man verwende den in MfL 11, 11.4.5., angegebenen Test.

6. Bei 20000 Würfeln mit einem Würfel ergab sich folgendes Bild:

| Augenzahl $i$    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    |
|------------------|------|------|------|------|------|------|
| Häufigkeit $m_i$ | 3407 | 3631 | 3176 | 2916 | 3448 | 3422 |

Kann der Würfel als ideal angesehen werden (Signifikanzniveau  $\alpha = 0,01$ )?

Hinweis: Man verwende den  $\chi^2$ -Anpassungstest (vgl. MfL Bd. 11, 11.5.1.).

7. Bei der Berechnung von  $\pi$  auf 800 Stellen nach dem Komma traten die Ziffern 0, 1, ..., 8 bzw. 9 mit den Häufigkeiten 74, 92, 83, 79, 80, 73, 77, 75, 76 bzw. 91 auf. Man prüfe die Hypothese, daß alle Ziffern bei der Dezimalbruchdarstellung der Zahl  $\pi$  gleichwahrscheinlich sind (Signifikanzniveau  $\alpha = 0,05$ ).

Hinweis: Man verwende den  $\chi^2$ -Anpassungstest (vgl. MfL Bd. 11, 11.5.1.).

8. In 64 Würfeln von je sechs Kaninchen wurde die Anzahl  $i$  der männlichen Tiere mit den Häufigkeiten  $m_i$  ( $i = 0, 1, \dots, 6$ ) beobachtet:

| $i$   | 0 | 1 | 2  | 3  | 4  | 5 | 6 |
|-------|---|---|----|----|----|---|---|
| $m_i$ | 0 | 3 | 14 | 19 | 20 | 6 | 2 |

Man prüfe die Hypothese, daß die beobachtete Häufigkeitsverteilung als Stichprobe aus einer mit den Parametern  $m = 6$  und  $p = 0,5$  binomialverteilten Grundgesamtheit bezeichnet werden kann (Signifikanzniveau  $\alpha = 0,05$ ).

Hinweis: Man verwende den  $\chi^2$ -Anpassungstest (vgl. MfL Bd. 11, 11.5.1.).

9. Um zu prüfen, ob der Verbrauch eines bestimmten Grundnahrungsmittels pro Jahr in den Haushalten zweier verschiedener Städte  $A$  und  $B$  identisch verteilt ist, wird in der Stadt  $A$  eine Stichprobe vom Umfang  $m = 65$  und in der Stadt  $B$  eine Stichprobe vom Umfang  $n = 57$  gewählt. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt; dabei gibt  $m_j$  bzw.  $n_j$  die Anzahl der Haushalte in der Stichprobe aus  $A$  bzw.  $B$  an, die  $j$  kg des Grundnahrungsmittels pro Jahr verbrauchen.

| $j$ | $m_j$ | $n_j$ | $j$ | $m_j$ | $n_j$ |
|-----|-------|-------|-----|-------|-------|
| 1   | 0     | 4     | 13  | 0     | 1     |
| 2   | 0     | 2     | 14  | 1     | 4     |
| 3   | 3     | 1     | 15  | 2     | 0     |
| 4   | 2     | 1     | 16  | 1     | 4     |
| 5   | 3     | 2     | 17  | 6     | 2     |
| 6   | 5     | 4     | 18  | 1     | 0     |
| 7   | 7     | 5     | 19  | 0     | 0     |
| 8   | 5     | 6     | 20  | 2     | 1     |
| 9   | 9     | 7     | 21  | 0     | 0     |
| 10  | 8     | 2     | 22  | 0     | 1     |
| 11  | 5     | 3     | 23  | 0     | 3     |
| 12  | 5     | 3     | 24  | 0     | 1     |

Man prüfe die oben erwähnte Hypothese zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0,05$ .

Hinweis: Man verwende den  $\chi^2$ -Homogenitätstest (vgl. MfL Bd. 11, 11.5.3.).

10. Bei der Auswertung einer Klausur für zwei Seminargruppen soll geprüft werden, ob die Seminargruppen ein- und dieselbe Klausurnotenverteilung besitzen

(Signifikanzniveau  $\alpha = 0,05$ ). Bei der Korrektur erhielt man folgende Häufigkeitstabelle:

| Note            | 1  | 2  | 3  | 4 | 5 |
|-----------------|----|----|----|---|---|
| Seminargruppe 1 | 11 | 13 | 11 | 9 | 6 |
| Seminargruppe 2 | 3  | 12 | 27 | 9 | 4 |

Die Zufallsgröße  $X$  bzw.  $Y$  bezeichne die (zufällige) Note bzw. die (zufällige) Nummer der Seminargruppe eines Studenten.

a) Man zeige, daß die zu prüfende Hypothese damit gleichbedeutend ist, daß die Zufallsgrößen  $X$  und  $Y$  stochastisch unabhängig sind.

b) Man führe den  $\chi^2$ -Unabhängigkeitstest durch (vgl. MfL Bd. 11, 11.5.5.).

## VIII. Grundlagen der Mathematik

### Zeichenreihen

#### Kontrollfragen

1. Was versteht man unter einer freien Halbgruppe?
2. Was versteht man unter einem Isomorphismus zwischen freien Halbgruppen?
3. Man begründe, daß jede freie Halbgruppe mit höchstens abzählbarem Erzeugendensystem isomorph zu einer Worthalbgruppe ist.
4. Man begründe, daß zwei freie Halbgruppen genau dann isomorph sind, wenn ihre Erzeugendensysteme gleichmächtig sind.
5. Wie viele Isomorphismen einer freien Halbgruppe auf sich selbst (Automorphismen) gibt es in Abhängigkeit von der Mächtigkeit des Erzeugendensystems?
6. Man definiere die durch eine gegebene Ordnung des Alphabets  $\mathcal{A}$  induzierte lexikographische Ordnung der Worthalbgruppe  $W(\mathcal{A})$  und leite aus der Definition die ordnungstheoretischen Eigenschaften der lexikographischen Ordnung her.

#### Aufgaben

1. Es sei  $(F, \circ, e, E)$  eine beliebige freie Halbgruppe. Eine auf  $F$  definierte Abbildung  $f$  heißt *Inversion*, wenn gilt:

$$f(e) = e \quad \text{und} \quad f(W \circ a) = a \circ f(W) \quad \text{für alle } a \in E \quad \text{und} \quad W \in F. \quad (1)$$

Man zeige: In jeder freien Halbgruppe gibt es genau eine Inversion. Diese ist eine eindeutige Abbildung von  $F$  auf sich und erfüllt auch

$$f(V \circ W) = f(W) \circ f(V) \quad \text{für alle } V, W \in F \quad (2)$$

und

$$f(f(W)) = W \quad \text{für alle } W \in F. \quad (3)$$

Lösung: Sind  $f_1, f_2$  Inversionen von  $F$ , so folgt aus (1) durch Induktion über die Länge  $l(W)$  für alle  $W \in F$  die Beziehung  $f_1(W) = f_2(W)$ . Außerdem folgt aus (1) sofort, daß jede Inversion längentreu ist. Zum Nachweis der Existenz einer Inversion geben wir sie als Menge von geordneten Paaren an. Dies gelingt aber nur durch einen Kunstgriff (vgl. den Existenzbeweis für die induktiv definierte Addition der natürlichen Zahlen in MfL Bd. 1, 3.3.): Es sei  $f_0 := \{(e, e)\}$ .

$$f_{n+1} := \{(W \circ a, a \circ f_n(W)) : a \in E, W \in F, l(W) = n\}.$$

Dann erfüllt  $f := \cup f_n$  die Bedingung (1).

(2) und (mit Hilfe von (2)) (3) ergeben sich durch Induktion bezüglich  $W$ . Dabei bedeutet (3), daß  $f^{-1}$  existiert und gleich  $f$  ist.

2. Für  $W \in F$  sei  $W$  *symmetrisch* : $\leftrightarrow f(W) = W$  ( $f$  Inversion von  $F$ ). Man zeige:
  - a) Für  $W \in F$  (und  $a \in E$ ) ist  $W \circ f(W)$  (und  $W \circ a \circ f(W)$ ) symmetrisch.
  - b) Ist  $V$  symmetrisch, so hat  $V$  die Form  $W \circ f(W)$  oder  $W \circ a \circ f(W)$  mit eindeutig bestimmtem  $W$  (und  $a$ ), je nachdem, ob  $l(V)$  gerade oder ungerade ist.
  - c) In Verallgemeinerung von b) ist  $W \circ V \circ f(W)$  bei beliebigem  $W$  symmetrisch, falls  $V$  symmetrisch ist.
3. Ist  $f$  die Inversion von  $F$  und sind  $a, b \in E$  zwei verschiedene Erzeugende von  $F$ , so ist durch  $g(V, W) := V \circ a \circ W \circ b \circ f(V)$  eine eindeutige Abbildung von  $F \times F$  in  $F$  definiert.

## Aussagenlogik

### Kontrollfragen

1. Wie viele  $n$ -stellige Wahrheitsfunktionen würde es in bezug auf eine Bewertung von Aussagen durch die drei Wahrheitswerte  $W$  (wahr),  $F$  (falsch) und  $U$  (unklar, unsinnig) geben?
2. Man formuliere eine induktive Definition der Menge der Ausdrücke für den Fall, daß nur Negation und Nicodsche Funktion (Zeichen  $!$ ) als Grundfunktionen benutzt werden sollen.
3. Man prüfe die Definitionen 2, 3, 4 und die Sätze 1 bis 4 aus MfL Bd. 12, 2.2.; wieweit sie für den in Frage 2 angenommenen Fall wörtlich übernommen werden können bzw. welche Formulierungen verändert werden müssen, und führe diese Veränderungen gegebenenfalls durch.
4. Man führe die entsprechende Prüfung für den in Frage 1 angenommenen Fall durch.

### Aufgaben

1. Man überprüfe, ob die folgenden Zeichenreihen aussagenlogische Ausdrücke sind markiere gegebenenfalls die jeweils zusammengehörigen Faktoren und Klammerpaare durch gleiche Nummern nach dem Muster

$$\left( \left( (p \wedge q) \wedge r \right) \leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r)) \right).$$

0 1 2 2 2 1 1 0 3 3 4 4 4 3 0

- a)  $\left( \left( p \rightarrow \left( (q \rightarrow ((q \rightarrow (r \leftrightarrow r) \rightarrow q)) \rightarrow q \right) \right) \rightarrow p \right)$ ,

$$b) \left( (p \rightarrow (\neg(\neg(q \wedge p) \wedge \neg(q \wedge r)) \wedge p)) \rightarrow \neg\neg r \right),$$

$$c) \left( (p \rightarrow (q \leftrightarrow \neg(r \wedge \neg p))) \rightarrow (\neg p \vee \neg(\neg r \wedge q)) \right).$$

2. Man stelle für die in Aufgabe 1 erkannten Ausdrücke die vollständigen Wertetabellen auf.
3. Man zeige die Allgemeingültigkeit des Ausdrucks

$$(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q))$$

a) durch Berechnung der Wertetabelle, b) durch schrittweise Überführung in eine äquivalente kanonische alternative Normalform, c) indem man die Annahme, daß eine Belegung  $f$  den Gesamtausdruck falsch werden läßt, zum Widerspruch führt.

4. Es sind möglichst kurze Ausdrücke anzugeben, die semantisch äquivalent sind zu

$$a) \left( ((\neg p \vee q) \rightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))) \wedge (\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \leftrightarrow q)) \right),$$

$$b) \left( (\neg((p \wedge \neg q) \wedge (q \vee \neg q)) \wedge \neg(q \wedge \neg p)) \wedge ((\neg q \leftrightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)) \right).$$

## Strukturen und formalisierte Sprachen

### Kontrollfragen

1. Was versteht man unter einer Relation bzw. Operation im Bereich der Mengen  $M_1, \dots, M_n$ ?
2. Was versteht man unter einer  $n$ -sortigen Struktur? Man erläutere auch Spezialfälle.
3. Man definiere den Typ einer Relation, Operation, Konstanten, Struktur.
4. Man erkläre, wie sich jede Struktur als einsortige Relationsstruktur („Relativ“) auffassen läßt.
5. Man beschreibe den Aufbau einer kanonischen formalisierten Sprache für die Theorie der geordneten Körper, gebe eine gleichwertige modifizierte formalisierte Sprache an und erläutere an diesem Beispiel die Vor- und Nachteile und den unterschiedlichen Verwendungszweck kanonischer bzw. modifizierter formalisierter Sprachen.

### Aufgaben

1. Man verwandle die folgenden, unter Benutzung der in MfL Bd. 12, 3.4., vereinbarten Abkürzungen geschriebenen Zeichenreihen in korrekte Ausdrücke der Sprache  $S_{\text{eukl}}$ , stelle in diesen wie in Aufgabe 1 des vorigen Abschnitts die Zuordnung zwischen Klammerpaaren und zugehörigen Booleschen Funktoren her

und übersetze die Ausdrücke außerdem in stilistisch einwandfreie mathematische Umgangssprache.

$$a) \wedge ABC(\neg \vee g(A \text{ auf } g \wedge B \text{ auf } g \wedge C \text{ auf } g) \rightarrow \vee !!(M(MA \cong MB \wedge MB \cong MC))),$$

$$b) \wedge ABCD(\vee !!(M([A, M, B] \wedge [C, M, D]) \rightarrow \neg A = B \wedge \neg C = D \\ \wedge \neg \vee g(A \text{ auf } g \wedge B \text{ auf } g \wedge C \text{ auf } g \wedge D \text{ auf } g)),$$

$$c) \neg \vee g(A \text{ auf } g \wedge B \text{ auf } g \wedge C \text{ auf } g) \wedge \vee D([A, D, B] \wedge D \text{ auf } h) \wedge \neg A \text{ auf } h \\ \wedge \neg B \text{ auf } h \wedge \neg C \text{ auf } h \rightarrow \vee E(E \text{ auf } h \wedge ([A, E, C] \vee [B, E, C])).$$

$$\text{Lösung von a): } \wedge A \wedge B \wedge C(\neg \vee g((A \text{ auf } g \wedge B \text{ auf } g) \wedge C \text{ auf } g) \rightarrow (\vee M(MA \cong MB \wedge \\ MB \cong MC) \wedge \neg M_1 \vee M_2((\neg M_1 = M_2 \wedge (M_1A \cong M_1B \wedge M_1B \cong M_1C)) \wedge (M_2A \cong M_2B \wedge \\ M_2B \cong M_2C))))).$$

Zu je drei nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegenden Punkten A, B, C gibt es genau einen Punkt M, der von A, B, C gleich weit entfernt ist (nämlich den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC).

2. Man stelle die prädikatenlogische Struktur der folgenden Sätze nach dem angegebenen Muster dar:

- Wer den Pfennig nicht ehrt, ist den Taler nicht wert.
- Jung gefreit hat nie gereut.
- Morgenstunde hat Gold im Munde.
- Es kann der Frömmste nicht in Frieden leben, wenn es dem bösen Nachbarn nicht gefällt.
- Wer Banknoten nachmacht oder verfälscht oder nachgemachte oder verfälschte sich verschafft und in Verkehr bringt, wird bestraft.

Lösung von a): Es sei x eine Variable für Menschen, E(x) die einstellige Relation des „Ehrens des Pfennigs“, W(x) die einstellige Relation des „Talers wert seins“. Dann wird der Sinn des Sprichworts durch den Ausdruck  $\wedge x(\neg E(x) \rightarrow \neg W(x))$  dargestellt, den man aussagenlogisch äquivalent in  $\wedge x(W(x) \rightarrow E(x))$  umformen könnte. Eine tiefergehende Analyse des Satzes benötigt außer x noch eine Variable p für Pfennige und eine Variable t für Taler, also bereits eine dreisortige Sprache. Statt E(x) benutzen wir nun die zwei-stellige Relation E(x, p) der Bedeutung „die Person x ehrt den Pfennig p“. Analog bedeute W(x, t) „die Person x ist den Taler t wert“. Das Sprichwort läßt sich nun etwa präzisieren durch

$$\wedge x(\vee p \neg E(x, p) \rightarrow \wedge t \neg W(x, t)),$$

was sich äquivalent umformen läßt zu

$$\wedge x(\neg \wedge p E(x, p) \rightarrow \neg \vee t W(x, t))$$

und weiter zu

$$\wedge x(\vee t W(x, t) \rightarrow \wedge p E(x, p)).$$

Analog erlauben auch die übrigen Sätze der Aufgabe verschiedene bzw. verschieden tief gehende Analysen.



## Semantische Grundbegriffe der Metamathematik

### Kontrollfragen

1. Worin besteht der entscheidende Schritt vom bloßen praktischen Gebrauch formalisierter Sprachen zur Untersuchung von Grundlagenfragen der Mathematik?
2. Welchen Wahrheitswert haben bei üblicher Interpretation gemäß MfL Bd. 12, 4.1., und unter Berücksichtigung der Fußnote dort S. 52 die Aussagen  
Der Mann im Mond trägt einen Bart.  
Es stimmt nicht, daß der Mann im Mond einen Bart trägt.  
Für jeden Punkt A und jede Gerade g gilt: g ist parallel zur Verbindungsgeraden AA.
3. Man erkläre die Begriffe Allgemeingültigkeit eines Ausdrucks bei einer Interpretation und Allgemeingültigkeit eines Ausdrucks und belege den Unterschied mit Beispielen.
4. Von welchen Ausdrücken kann man die Generalisierte bilden, warum nicht von jedem Ausdruck?
5. Man erläutere den Begriff des Folgerns bzw. Folgerns als Quintessenz des deduktiven Vorgehens bzw. der axiomatischen Methode.
6. Was versteht man unter semantischer Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit, Unabhängigkeit, Kategorizität eines Axiomensystems?
7. Was versteht man unter einer elementaren Theorie?
8. Warum kann man prinzipiell jedes endliche Axiomensystem durch ein einzelnes Axiom ersetzen?
9. Man definiere die Begriffe nichtelementare Sprache, nichtelementares Folgern, nichtelementare Theorie und erläutere sie an Beispielen.
10. Man erläutere die Begriffe Erweiterung einer (nichtelementaren) Sprache, definitorische Spracherweiterung erster bzw. zweiter Art und belege sie mit Beispielen.
11. Man charakterisiere den Unterschied zwischen der Disziplin Grundlagen der Mathematik und den Grundlagen spezieller mathematischer Theorien, z. B. Grundlagen der Geometrie oder Grundlagen der Arithmetik der natürlichen Zahlen.

### Aufgaben

1. Man überführe durch gebundene Umbenennungen den Ausdruck

$$\wedge z((\wedge xR(x, y, z) \wedge \vee yS(x, y)) \rightarrow \vee xR(x, y, z))$$

in einen Ausdruck, in dem alle freien Variablen vollfrei vorkommen.

2. Man überführe den Ausdruck  $\forall x \wedge y S(x, y) \rightarrow \wedge x R(x)$  in eine semantisch äquivalente pränexen Normalform.
3. Man gebe drei paarweise nicht isomorphe Interpretationen der in MfL Bd. 12, 3.3., eingeführten Sprache der linearen Algebra an.
4. Man zeige: Aus den Gruppenaxiomen und dem Axiom

$$x \neq y \rightarrow z = x \vee z = y$$

folgt das Kommutativgesetz. Was besagt das Zusatzaxiom inhaltlich?

5. Man begründe, daß das Kommutativgesetz unabhängig von den übrigen Axiomen der Gruppentheorie ist.
6. Man beweise die Unabhängigkeit des Systems der Axiome von PEANO für die natürlichen Zahlen.

Anleitung: Die Axiome lauten in formalisierter Sprache (vgl. MfL Bd. 12, S. 78)

$$(b') \wedge n_1 \vee n_2 n'_1 = n_2.$$

$$(c') \neg \vee n_1 n'_1 = 0.$$

$$(d') n'_1 = n'_2 \rightarrow n_1 = n_2.$$

$$(e') 0 \in M \wedge \wedge n_1 (n_1 \in M \rightarrow n'_1 \in M) \rightarrow \wedge n_2 n_2 \in M.$$

Eine zulässige Interpretation der zugrunde liegenden nichtelementaren Sprache besteht in der Angabe eines Grundbereichs  $N$  für die Variablen  $n_i$ , einer in  $N$  definierten (eventuell partiellen) Nachfolgerfunktion und eines ausgezeichneten Elements  $\omega(o)$  von  $N$ . Für unseren Zweck ist es ausreichend,  $N$  als Menge von Punkten anzudeuten, wobei  $\omega(o)$  als Hohlpunkt o hervorgehoben wird, und  $x \in N$  mit seinem Nachfolger (falls dieser existiert) durch einen Pfeil zu verbinden. Das (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte) Standardmodell der Axiome sieht dann etwa so aus:

$$o \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \dots$$

Es sind nun vier derartige gerichtete Graphen anzugeben, in denen jeweils genau eines der Axiome (b') bis (e') nicht erfüllt ist. Zum Beispiel ist in  $o \rightarrow$  nur (b') falsch. Da (e') unter stillschweigender Voraussetzung von (b') formuliert wurde, ist es in der hingeschriebenen Form automatisch bei jeder Interpretation gültig, in der (b') falsch ist. Aber auch eine von (b') unabhängige Fassung

$$(e'') 0 \in M \wedge \wedge n_1 (n_1 \in M \wedge \vee n_2 n'_1 = n_2 \rightarrow n'_1 \in M) \rightarrow \wedge n_2 n_2 \in M$$

des Induktionsaxioms ist bei der Interpretation  $o \rightarrow$  erfüllt. Man setze die Betrachtungen durch den Nachweis der Unabhängigkeit von (c'), (d') und (e') fort.

7. Man gebe in der Sprache  $S_{\text{eukl}}$  (vgl. MfL Bd. 12, 3.3., S. 44f.) korrekte und inhaltlich sinnvolle Definitionen für folgende Relationen an:

$g_1$  senkrecht auf  $g_2$ .

A, B, C, D sind (in dieser Reihenfolge) Eckpunkte eines Quadrats.

A, B, C, D sind (in dieser Reihenfolge) Eckpunkte eines konvexen Vierecks.

S ist Schwerpunkt des Dreiecks ABC.

P liegt im Innern des Dreiecks ABC.

8. Man beweise unter Benutzung der Axiome I1 bis K9 (MfL Bd. 12, 4.7.) und der zu Aufgabe 7 gefundenen Definitionen:
- $g_1$  senkrecht auf  $g_2 \rightarrow g_2$  senkrecht auf  $g_1$ .
  - $\neg g$  senkrecht auf  $g$ .
  - $g_1$  senkrecht auf  $g_2 \wedge g_2$  senkrecht auf  $g_3 \wedge g_1 \neq g_3 \rightarrow g_1 \parallel g_3$ .
  - A, B, C, D sind Eckpunkte eines Quadrats  $\rightarrow$  A, B, C, D sind Eckpunkte eines konvexen Vierecks (d. h., jedes Quadrat ist ein konvexes Viereck).
  - Jedes Dreieck hat genau einen Schwerpunkt, und dieser liegt im Innern des Dreiecks. (Man übersetze diese Behauptung unter Benutzung der definierten Relationen zunächst in die formalisierte Sprache.)
9.  $S_{\text{eukl}}$  soll durch Variablen  $s_i$  für offene Strecken, d. h. Punktfolgen der Form  $\{P: [A, P, B]\}$  ( $A \neq B$ ), und die Punkt-Strecken-Inzidenz  $\in$  definitorisch erweitert werden.
- Wie lauten die zugehörigen Einführungsaxiome?
  - Man gebe ein Eliminationsverfahren für quantifizierte Streckenvariablen an.

## Eine Formalisierung der Mengenlehre

### Kontrollfragen

- Man erläutere die Begriffe Urelement, Menge, Unmenge, Element, Klasse und die gegenseitigen Beziehungen zwischen ihnen.
- Worin besteht die inhaltliche Bedeutung des Fundierungsaxioms? Zu welchen Axiomen anderer Theorien z. B. der Arithmetik der natürlichen Zahlen oder der der freien Halbgruppen, kann man es in Analogie setzen?
- Was ist ein Ordinal, was ist eine Ordinalzahl, worin besteht der Unterschied zwischen beiden Begriffen?
- Man nenne Sätze, die (unter Voraussetzung der üblichen Grundaxiome) zum Auswahlaxiom äquivalent sind.

### Aufgaben

- Man übersetze mit Hilfe der in MfL Bd. 12, S. 100, angegebenen Definitionen die folgenden Ausdrücke in der Grundsprache  $S_m$  der Mengenlehre zurück und zeige durch entsprechende Interpretationen von  $S_m$ , daß diese Ausdrücke nicht allgemeingültig sind:
  - x Urelement  $\rightarrow$  x Element.
  - x Unmenge  $\rightarrow$  x Klasse.
  - $\neg \forall x x \in \emptyset$ .
  - $\emptyset$  Menge.

2. Man zeige, daß  $(x, y) := \{\{y\}, \{x, \emptyset\}\}$  eine mögliche Definition des geordneten Paares von beliebigen Elementen  $x, y$  ist.
3. Man beweise, daß die Klasse  $K_{x \in x}^x$  eine Menge und die Klasse  $K_{x \notin x}^x$  eine Unmenge ist.
4. Man gebe formalisierte Formulierungen folgender Endlichkeitsdefinitionen an:  
 $M$  endlich (T, d. h. im Sinne von TARSKI) : $\leftrightarrow$  Jedes nichtleere Teilsystem der Potenzmenge von  $M$  besitzt bezüglich Inklusion ein maximales Element.  
 $M$  endlich (T\*) : $\leftrightarrow$  ... minimales Element.  
 $M$  endlich ( $\bar{T}$ ) : $\leftrightarrow$  Jedes bezüglich Inklusion totalgeordnete nichtleere Teilsystem der Potenzmenge von  $M$  besitzt bezüglich Inklusion ein maximales Element.  
 $M$  endlich ( $\bar{T}^*$ ) : $\leftrightarrow$  ... totalgeordnete ... minimales Element.  
 $M$  endlich (H, d. h. im Sinne von HESSENBERG) : $\leftrightarrow$   $M$  läßt sich nicht in zwei disjunkte zu  $M$  gleichmächtige Teilmengen zerlegen  $\vee M = \emptyset$ .
5. Man zeige ohne Benutzung des Auswahlaxioms  
 $M$  endlich (R)  $\leftrightarrow$   $M$  endlich (T).
6. Man zeige ohne Benutzung des Auswahlaxioms  
 $M$  endlich (T)  $\rightarrow$   $M$  endlich ( $\bar{T}$ ).  
 $M$  endlich ( $\bar{T}$ )  $\rightarrow$   $\mathfrak{P}(M)$  endlich (D).  
 $\mathfrak{P}(M)$  endlich (D)  $\rightarrow$   $M$  endlich (D).  
 $M$  endlich (D)  $\rightarrow$   $M$  endlich (H).

Bemerkung: Aus dem Auswahlaxiom folgt:  $M$  endlich (H)  $\rightarrow$   $M$  endlich (T), d. h. die Äquivalenz aller angegebenen Endlichkeitsdefinitionen.

## Syntaktische Grundbegriffe der Metamathematik

### Kontrollfragen

1. Man definiere die Begriffe Schlußregel, Beweiskalkül, Beweishülle eines Axiomensystems bezüglich eines Beweiskalküls.
2. Was versteht man unter einem vollständigen Beweiskalkül?
3. Warum muß jeder vollständige Beweiskalkül mindestens eine Ogliedrige Schlußregel enthalten?
4. Man erläutere die gegenseitigen Beziehungen zwischen folgenden Sätzen: Satz von GÖDEL-MAL'CEV (Hauptsatz), Satz von GÖDEL (Vollständigkeitssatz), Satz von MAL'CEV (Endlichkeitssatz für Modelle), Endlichkeitssatz für das Folgern.
5. Man nenne einige Folgerungen bzw. Anwendungen des Satzes von MAL'CEV.

## Aufgaben

1. Man formuliere je eine nichtelementare (d. h. für das elementare Folgern nicht zulässige) Schlußregel, die für das Folgern in den in MFL Bd. 12, S. 74, Beispiel 1 und 2, vorgestellten nichtelementaren Sprachen zulässig ist.
2. Man zeige, daß  $Bew_{\mathcal{X}}$  ein Hüllenoperator ist, a) unter Benutzung der Definition von  $Bew_{\mathcal{X}}(X)$  als kleinster  $\mathcal{X}$ -abgeschlossener Obermenge von  $X$ , b) unter Benutzung der Charakterisierung von  $Bew_{\mathcal{X}}(X)$  als Menge aller Ausdrücke, für die ein  $\mathcal{X}$ -Beweis aus  $X$  existiert.
3. Unter welchen Minimalvoraussetzungen über einen Beweiskalkül gelten folgende Sätze:
  - a) Ist  $H \in Bew_{\mathcal{X}}(X)$ , so existiert zu jeder natürlichen Zahl  $n$  ein  $\mathcal{X}$ -Beweis von  $H$  aus  $X$ , der mindestens die Länge  $n$  hat.
  - b) Existiert ein  $\mathcal{X}$ -Beweis von  $H$  aus  $X$ , der die Länge  $n_0$  hat, so gibt es zu jeder natürlichen Zahl  $n \geq n_0$  einen  $\mathcal{X}$ -Beweis von  $H$  aus  $X$ , der genau die Länge  $n$  hat.
- 4.\* Man beweise unter alleiniger Verwendung der Abtrennungsregel, der in MFL Bd. 12, S. 125f., angegebenen 15 Axiomenschemata sowie der dort bereits abgeleiteten Schemata

$$(H' \rightarrow (H' \rightarrow H'')) \rightarrow (H' \rightarrow H'') \quad \text{und} \quad H \rightarrow H$$

das Schema

$$((H' \rightarrow H'') \rightarrow H') \rightarrow ((H' \rightarrow H'') \rightarrow H'').$$

(Vgl. hierzu Aufgabe 3 des Abschnitts Aussagenlogik.)

**Hinweis:** Eine vollständige Lösung dieser nicht leichten Aufgabe findet man in G. ASSEB: Einführung in die mathematische Logik, Teil I, 2. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner 1975, S. 81ff.

## Algorithmen

### Kontrollfragen

1. Man definiere die Begriffe Kodierung, Umkodierung, Numerierung, Gödelisierung und erläutere sie an Beispielen.
2. Man diskutiere die gegenseitigen Beziehungen zwischen den Begriffen Berechenbarkeit, Entscheidbarkeit, Aufzählbarkeit.
3. Warum genügt es prinzipiell, den Begriff der berechenbaren Wortfunktion für den Fall einelementiger Alphabete zu definieren?
4. Was versteht man unter einem universellen Algorithmus?
5. Man nenne Beispiele nicht entscheidbarer Probleme (Wortmengen).

6. Man gebe eine anschauliche Beschreibung der Turingmaschinen.
7. Man beschreibe eine Turingmaschine (abweichend von MfL Bd. 12!) als Struktur. Welchen Typ hat diese Struktur?
8. Man beschreibe die normalen Algorithmen.
9. Man definiere die Begriffe der primitiv- bzw. partiellrekursiven arithmetischen Funktion.
10. Was besagt die Hypothese von CHURCH? Wodurch wird sie gestützt? Wieso ist diese Hypothese kein im mathematischen Sinne beweisbarer Satz?

### Aufgaben

1. Bezüglich des geordneten Alphabets (a, b, c, d, e) bestimme man  $g_{\text{lex}}(\text{bade})$  und  $g_{\text{prim}}(\text{bade})$ .
2. Man stelle fest, ob die folgenden Zahlen im Wertebereich von  $g_{\text{prim}}$  liegen, und bestimme gegebenenfalls  $g_{\text{prim}}^{-1}(n)$  in bezug auf das Alphabet  $\{a_i : i = 1, 2, 3, \dots\}$ :

$$n_1 = 71500; \quad n_2 = 92400; \quad n_3 = 5402250.$$

3. Man zeige durch rein arithmetische Betrachtungen, daß für jedes feste  $n \geq 1$  sich jede natürliche Zahl in der Form

$$\sum_{k=1}^m i_k \cdot n^{m-k}$$

mit eindeutig bestimmtem  $m$  und eindeutig bestimmten Koeffizienten  $i_k \in \{1, \dots, n\}$  darstellen läßt, daß mithin  $g_{\text{lex}}$  für jedes endliche geordnete Alphabet eine eineindeutige Abbildung auf  $\mathbf{N}$  ist.

4. Für die drei Zahlen aus Aufgabe 2 bestimme man bezüglich des geordneten Alphabets (a, b, c, d, e)  $g_{\text{lex}}^{-1}(n)$ .
5. Man gebe je ein Turingprogramm an, das zwei durch ein Hilfszeichen b getrennte, als Wortlängen im Alphabet {a} kodierte natürliche Zahlen a) addiert, b) multipliziert, c) potenziert.
6. Man löse die Aufgaben 5a—c für den Fall, daß die Eingabezahlen im Dualsystem kodiert sind.
7. Man löse die Aufgaben 5a—c und 6a—c mittels einer Turingmaschine mit zwei Bändern.
- 8.\* Man löse die Aufgaben 5a—c und 6a—c durch normale Algorithmen.
9. Man entwerfe je ein Turingprogramm zur Umkodierung von Wortlängen in Dualzahlen und umgekehrt und führe mittels dieser Unterprogramme die Lösungen der Aufgaben 5a—c bzw. 6a—c gegenseitig aufeinander zurück.
10. Man konstruiere einen normalen Algorithmus, der jedes  $W \in W(\{a, b\})$  in das „umgedrehte“ Wort  $f(W)$  überführt. ( $f$  Inversion, vgl. die Aufgaben des Abschnitts Zeichenreihen.)

## Entscheidbarkeit und Aufzählbarkeit von Sprachen und Theorien

### Kontrollfragen

1. Man beschreibe inhaltlich einen Entscheidungsalgorithmus für die Sprache  $S_{\text{enk}}$ .
2. Für welche elementaren Sprachen  $S$  ist die Menge  $Fl_S(\emptyset)$  der allgemeingültigen Ausdrücke entscheidbar bzw. unentscheidbar?
3. Man nenne Beispiele unentscheidbarer Theorien.
4. Man beschreibe ein Verfahren zur Entscheidung von  $Fl_S(\emptyset)$  für solche Sprachen  $S$ , deren Basis nur aus einstelligen Relationssymbolen besteht.
5. Man erkläre die Begriffe aufzählbare Theorie, axiomatisierbare Theorie, entscheidbare Theorie, vollständige Theorie und die Zusammenhänge zwischen diesen Begriffen.

### Aufgaben

1. Man entscheide die Allgemeingültigkeit des Ausdrucks

$$\wedge x(R(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow \vee y(R(y) \wedge S(y)) \vee \neg \vee x R(x).$$

Lösung: Damit der gegebene Ausdruck bei einer Interpretation  $\omega$  falsch wird, müßte seine Prämisse wahr und seine Conclusio falsch sein, d. h.  $\wedge x(R(x) \rightarrow S(x))$  wahr,  $\vee y(R(y) \wedge S(y))$  falsch,  $\vee x R(x)$  wahr sein. Die erste Bedingung verlangt  $\omega(R) \subseteq \omega(S)$ , die zweite  $\omega(R) \cap \omega(S) = \emptyset$ , woraus im Widerspruch zur dritten Bedingung  $\omega(R) = \emptyset$  folgt. Also ist der gegebene Ausdruck allgemeingültig.

2. Man entscheide die Allgemeingültigkeit der Ausdrücke

$$a) \wedge x \vee y(R(x) \leftrightarrow S(x) \vee T(y)) \rightarrow \neg \vee z(T(z) \wedge S(z)) \vee \neg \vee z(R(z) \wedge S(z)).$$

$$b) \wedge x \wedge y(R(x) \vee \neg \vee z(S(z) \wedge T(y))) \leftrightarrow \neg \vee y \wedge x(S(x) \rightarrow (S(y) \vee R(x))).$$

$$c) \vee x(\vee y(R(x) \wedge R(y)) \rightarrow \vee y(S(x) \vee T(y))) \leftrightarrow \wedge x R(x) \rightarrow \vee y S(y) \vee \vee z T(z).$$

Hinweis: Da in Sprachen mit nur einstelligen Relationssymbolen und ohne „=“ jeder prädikative Ausdruck nur eine Variable enthält, kann man durch Verschiebung der Quantoren nach innen (vgl. MfL Bd. 12, 4.2.) deren Wirkungsbereiche trennen. Der so umgeformte Ausdruck ist eine aussagenlogische Verknüpfung von Teilausdrücken der Formen  $\wedge x H(x)$  bzw.  $\vee x H(x)$ , wobei die Wirkungsbereiche  $H(x)$  ihrerseits nur aussagenlogische Verknüpfungen von  $R(x)$ ,  $S(x)$ ,  $T(x)$ , ... sind.

3. Man finde ein spezielles Verfahren zur Entscheidung der Allgemeingültigkeit von Ausdrücken, die nur aus Variablengleichungen als einzigen prädikativen Ausdrücken aufgebaut sind. Man beschreibe das Verfahren durch ein Flußdiagramm.

# Lösungen (Auswahl)

## IV. Geometrie

### Inzidenz, Parallelität und Verschiebungen in der Ebene

- Es gibt drei Richtungen, nämlich  $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}, \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$ .
- $\{A, B, C, D\}$  ist ein Parallelogramm:  $\Leftrightarrow A, B, C, D$  sind vier paarweise verschiedene, zu je dreien nicht kollineare Punkte, und es gibt vier Geraden  $g, h, k, l$  mit  $g \parallel h$  und  $k \parallel l$ , so daß jede von ihnen genau zwei der vier Punkte enthält. Sind  $A, B, C$  gegeben, so gibt es höchstens drei Punkte  $X$ , so daß  $\{A, B, C, X\}$  ein Parallelogramm ist.
- Genau folgende Permutationen sind Verschiebungen:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Anordnung in der Ebene

- Strecke, Punkt, leere Menge.
- Es gibt zwei Klassen, sie sind die Durchschnitte je eines Richtungssinnes mit der Menge aller Strahlen auf der vorgegebenen Trägergeraden.
- Für  $n = 1$  gibt es zwei, für  $n = 2$  vier Klassen. Die Klassen können als „Gebiete“ gedeutet werden, in die die Ebene durch die Geraden „eingeteilt“ wird.
- Nein.

### Bewegungen und Kongruenz in der euklidischen Ebene

- Der Punkt  $D$  liegt so, daß die Paare  $(A, B)$  und  $(D, C)$  verschiebungsgleich sind; falls  $A, B, C$  nicht kollinear sind, ist  $(A, B, D, C)$  ein Parallelogramm.
- Es folgt  $k \perp g$ .
- Der Kern ist die Gruppe aller Verschiebungen.
- $|X_1X_2| < |X_1X_3|, \quad |X_1X_2| < |X_1X_4|, \quad |X_1X_3| < |X_1X_4|,$   
 $|X_2X_3| < |X_2X_4|, \quad |X_2X_3| < |X_1X_3|, \quad |X_2X_3| < |X_1X_4|,$   
 $|X_2X_4| < |X_1X_4|, \quad |X_3X_4| < |X_2X_4|, \quad |X_3X_4| < |X_1X_4|.$
- Zw  $(XYZ)$ .



15.  $A$  ist Mittelpunkt von  $BC$ .

21. Nullwinkelgröße.

22. Die Menge besteht aus den Elementen  $r, -r, s_1, s_2, -s_1, -s_2, g, n$ , wobei  $g$  die Größe der gestreckten orientierten Elementarwinkel und  $n$  die Nullwinkelgröße ist.

| Gruppentafel: | $n$ | $r$ | $-r$ | $s_1$  | $s_2$  | $-s_1$ | $-s_2$ | $g$    |
|---------------|-----|-----|------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $n$           | $n$ | $r$ | $-r$ | $s_1$  | $s_2$  | $-s_1$ | $-s_2$ | $g$    |
| $r$           |     | $g$ | $n$  | $-s_2$ | $-s_1$ | $s_1$  | $s_2$  | $-r$   |
| $-r$          |     |     | $g$  | $-s_1$ | $-s_2$ | $s_2$  | $s_1$  | $r$    |
| $s_1$         |     |     |      | $r$    | $-r$   | $n$    | $g$    | $s_2$  |
| $s_2$         |     |     |      |        | $r$    | $g$    | $n$    | $s_1$  |
| $-s_1$        |     |     |      |        |        | $-r$   | $r$    | $-s_2$ |
| $-s_2$        |     |     |      |        |        |        | $-r$   | $-s_1$ |
| $g$           |     |     |      |        |        |        |        | $n$    |

(kommutativ)

23. Die Vereinigung des Durchschnitts mit den Schnittpunkten von  $g$  mit den Schenkeln ist eine Strecke.

25. Es sei  $w_4$  die kleinere der beiden in Aufgabe 24 genannten Winkelgrößen. Ferner sei  $w_6$  die Größe der überstumpfen Winkel, die dieselben Elementarwinkel haben wie die Winkel von  $w_5$ , und  $w_7$  sei die Größe der überstumpfen Winkel, die dieselben Elementarwinkel haben wie die Winkel von  $w_4$ . Dann gilt folgende Additionstabelle:

|       | $w_1$        | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ | $w_5$ |
|-------|--------------|-------|-------|-------|-------|
| $w_1$ | $w_2$        | $w_3$ | —     | $w_5$ | $w_6$ |
| $w_2$ |              | —     | —     | $w_6$ | $w_7$ |
| $w_3$ |              |       | —     | $w_7$ | —     |
| $w_4$ | (kommutativ) |       |       | $w_1$ | $w_2$ |
| $w_5$ |              |       |       |       | $w_3$ |

## Inzidenz, Parallelität, Anordnung, Bewegungen und Senkrechtsein im euklidischen Raum

2. Man verwende die Axiome (R1), (R2) und (R3).

6. Es ergibt sich je nach Lage der Ebene zur Randfahne der Orientierungsfigur eine Fahne, eine Fahne ohne den Anfangspunkt, eine offene oder abgeschlossene Halbebene, eine Ebene oder die leere Menge.

## Strecken- und Winkelmessung

1. Nein.

### Elementarer Inhalt in der Ebene

2. a) Nein; b) ja; c) nein.

12. Nein..

$$17. F(P_n) = \frac{na^2}{4} \cot \frac{\pi}{n}.$$

18. b) Keine.

### Elementarer Inhalt im Raum

3. Nein

10.  $O(W) = 6a^2$  ( $a$  Kantenlängenmaßzahl des Würfels  $W$ ).

11.  $O$  ist kein Volumenfunktional.

12.  $O(T) = a^2 \sqrt{3}$ ,  $V(T) = \frac{a^3}{12} \sqrt{2}$  ( $a$  Kantenlängenmaßzahl des regulären Tetraeders  $T$ ).

### Allgemeiner Inhalt

1. Ja.

5. Nein.

6. Nein.

7. Nein.

### Die Methode der analytischen Geometrie

$$\begin{aligned} 3. & \{x^{-1}(x_1, x_2, x_3) : x_2 = 0\} \cap \{x^{-1}(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0\} \\ & = \{x^{-1}(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0 \wedge x_2 = 0\} \\ & = \{x^{-1}(x_1, x_2, x_3) : \mu = 3 \Rightarrow x_\mu = 0\}. \end{aligned}$$

### Vektoren, ihre Addition und Vervielfachung

2. a)  $(3, -1, 4)$ ,  $(5, 1, 3)$ ,  $(4, 3, 5)$ ,  $(2, 0, 7)$ ,  $(3, 4, 8)$ ,  $(4, 2, 6)$ ,  $(6, 5, 4)$ ,  $(5, 6, 7)$ .

b)  $-\mathbf{a} = \langle -2, -2, 1 \rangle$ ,  $\mathbf{b} = \langle 1, 4, 1 \rangle$ ,  $-\mathbf{c} = \langle 1, -1, -3 \rangle$ .

3.  $v(SA_1) + \dots + v(SA_k) = \mathbf{a}_1 - \mathbf{s} + \dots + \mathbf{a}_k - \mathbf{s} = \mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_k - k\mathbf{s} = \mathbf{0}$ .

## Analytische Darstellung von Länge, Winkelgröße, Flächeninhalt, Volumen

$$1. |BC| = 4\sqrt{2} \approx 5,66, \quad |CA| = 2\sqrt{17} \approx 8,25, \quad |AB| = 2\sqrt{5} \approx 4,47;$$

für  $\alpha := m(\sphericalangle BAC)$ ,  $\beta := m(\sphericalangle CBA)$ ,  $\gamma := m(\sphericalangle ACB)$  gilt

$$\cos \alpha = \frac{7}{\sqrt{5 \cdot 17}}, \quad \sin \alpha = \frac{6}{\sqrt{5 \cdot 17}}, \quad \alpha \approx 40,6^\circ \text{ mod } 360^\circ,$$

$$\cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{2 \cdot 5}}, \quad \sin \beta = \frac{3}{\sqrt{2 \cdot 5}}, \quad \beta \approx 108,4^\circ \text{ mod } 360^\circ,$$

$$\cos \gamma = \frac{5}{\sqrt{17 \cdot 2}}, \quad \sin \gamma = \frac{3}{\sqrt{17 \cdot 2}}, \quad \gamma \approx 31,0^\circ \text{ mod } 360^\circ.$$

$$2. \text{ a) Im } R^2 \text{ gilt } |ABCD| = \frac{1}{2} (p+1) \cdot |\det(a, b)|, \text{ im } R_n \text{ (} n \geq 2 \text{ beliebig) gilt } |ABCD| = \frac{1}{2} \times (p+1) \cdot \sqrt{a^2 b^2 - (ab)^2}.$$

$$\text{ b) Mit } a = \langle 6, 3 \rangle, b = \langle 1, 4 \rangle, p = \frac{2}{3} \text{ wird } |ABCD| = \frac{35}{2}.$$

$$3. \text{ Kantenlängen: } 3; 3\sqrt{2} \approx 4,24; \sqrt{11} \approx 3,32.$$

$$\text{ Flächeninhalte: } 9\sqrt{2} \approx 12,73; 3\sqrt{10} \approx 9,49; 9.$$

Volumen: 9.

Elementarwinkelgrößen s. Tabelle

| Kosinus und Näherungswert der Elementarwinkelgröße |                        |        |                               |       |                        |        |
|--|------------------------|--------|-------------------------------|-------|------------------------|--------|
| zwischen →<br>und ↓                                | a                      | b      |                               | c     |                        |        |
| b  | $\frac{1}{\sqrt{2}}$   | 45,0°  |                               |       |                        |        |
| c  | $-\frac{1}{\sqrt{11}}$ | 107,5° | $\frac{2}{\sqrt{2 \cdot 11}}$ | 64,8° |                        |        |
| i  | $\frac{2}{3}$          | 48,2°  | $\frac{1}{3\sqrt{2}}$         | 76,4° | $-\frac{1}{\sqrt{11}}$ | 107,5° |
| i  | $\frac{2}{3}$          | 48,2°  | $\frac{4}{3\sqrt{2}}$         | 19,5° | $\frac{1}{\sqrt{11}}$  | 72,5°  |
| f  | $-\frac{1}{3}$         | 109,5° | $\frac{1}{3\sqrt{2}}$         | 76,4° | $\frac{3}{\sqrt{11}}$  | 25,2°  |

4. a)  $V = \frac{1}{2} |\det(a, b, c)|$ ; b)  $a = \langle 2, -6, 2 \rangle$ ,  $b = \langle 3, -3, -1 \rangle$ ,  $c = \langle -1, 1, 6 \rangle$ ;  $V = 34$ .
8. Notwendig und hinreichend für  $(ab)c = a(bc)$  ist die Bedingung  $(\mathcal{B}_1) \vee (\mathcal{B}_2) \vee (\mathcal{B}_3)$ , wobei  $(\mathcal{B}_1)$ ,  $(\mathcal{B}_2)$ ,  $(\mathcal{B}_3)$  folgende Aussagen sind:  
 $(\mathcal{B}_1) : \Leftrightarrow B = O$ .  
 $(\mathcal{B}_2) : \Leftrightarrow$  Es gilt  $B \neq O$ , und die zu  $g(OB)$  senkrechte Hyperebene durch  $O$  enthält  $A$  und  $C$ .  
 $(\mathcal{B}_3) : \Leftrightarrow O, A, C$  sind kollinear.
9. Man beweist  $(a \times b) \times c = a \times (b \times c) \Leftrightarrow (ab)c = a(bc)$ . Also löst  $(\mathcal{B}_1) \vee (\mathcal{B}_2) \vee (\mathcal{B}_3)$  aus Aufgabe 8 auch Aufgabe 9.

### Lineare Parameterdarstellungen

3. Für  $\varrho = 1$  gibt es kein  $X$ . Für  $\varrho \neq 1$  hat  $X$  den Ortsvektor  $\xi = \lambda p + \mu q$  mit  $\lambda + \mu = 1$  und  $\mu : \lambda = -\varrho$ , also  $\xi = \frac{1}{1-\varrho} p + \frac{\varrho}{\varrho-1} q$ . Ist auch  $\varrho \neq 0$ , so folgt

$$q = \frac{1}{\varrho} p + \frac{\varrho-1}{\varrho} \xi, \quad \text{TV}(P, X; Q) = 1 - \varrho;$$

es gilt

$$p = \varrho q + (1 - \varrho) \xi, \quad \text{TV}(Q, X; P) = \frac{\varrho-1}{\varrho}$$

und damit die behaupteten Äquivalenzen wegen  $1 - \varrho < 0 \Leftrightarrow \varrho > 1$  bzw.  $\frac{\varrho-1}{\varrho} < 0 \Leftrightarrow 0 < \varrho < 1$ .

4. Für  $g \nparallel h$  ist  $M$  die sowohl zu  $g$  als auch zu  $h$  parallele Ebene durch den Mittelpunkt einer (beliebig gewählten) Strecke  $PQ$  mit  $P \in g$ ,  $Q \in h$ . Für  $g \parallel h$  ist  $M$  die mittelparallele Gerade zu  $g, h$ .
5. (I) Ist  $n$  ungerade, so ist genau  $(a_1, \dots, a_n)$  mit

$$a_1 = m_1 - m_2 + \dots - m_{n-1} + m_n,$$

$$a_2 = m_2 - m_3 + \dots - m_n + m_1,$$

$$a_n = m_n - m_1 + \dots - m_{n-2} + m_{n-1}$$

Lösung. Ist  $n$  gerade und  $m_1 - m_2 + \dots - m_n \neq 0$ , so existiert keine Lösung. Ist  $n$  gerade und  $m_1 - m_2 + \dots - m_n = 0$ , so sind genau alle  $(a_1, \dots, a_n)$  mit beliebigem  $a_1$  und

$$a_2 = 2m_1 - a_1,$$

$$a_3 = 2(m_2 - m_1) + a_1,$$

$$a_n = 2(m_{n-1} - m_{n-2} + \dots + m_1) - a_1$$

Lösung.

(II) Für gerades  $n$  liegt genau dann Unlösbarkeit vor, wenn für irgendeinen Punkt  $P_1$  das zugehörige  $(n+1)$ -Tupel die Eigenschaft  $P_1 \neq P_{n+1}$  hat. Andernfalls ( $P_1 = P_{n+1}$ ) ist für jeden Punkt  $A_1 \in R^2$  das zugehörige  $(n+1)$ -Tupel von der Gestalt  $(A_1, \dots, A_n, A_1)$ , also Lösung, und so werden alle Lösungen erhalten.

6. Ortsvektoren der Eckpunkte:  $a + \frac{1}{5}u + \frac{2}{5}v$ ,  $a + \frac{3}{5}u + \frac{1}{5}v$ ,  $a + \frac{4}{5}u + \frac{3}{5}v$ ,  
 $a + \frac{2}{5}u + \frac{4}{5}v$ . Flächeninhalt:

$$\left| \det \left( \frac{2}{5}u - \frac{1}{5}v, \frac{1}{5}u + \frac{2}{5}v \right) \right| = \frac{1}{5} |\det(u, v)| = \frac{1}{5} |ABCD|.$$

7. Mit  $a := v(OA)$ ,  $b := v(AB)$ ,  $c := v(OC)$ ,  $d := v(CD)$  haben  $S, T$  die Ortsvektoren  $\bar{s} = a + sb$ ,  $t = c + tb$ , wobei  $s, t \in \mathbf{R}$  zusammen mit einer Zahl  $z \in \mathbf{R}$  die Bedingung  $c + tb - a - sb = z(b \times b)$  erfüllen. (Woraus folgen Existenz und Eindeutigkeit solcher  $s, t, z$ ?) Im Beispiel wird  $\bar{s} = \left\langle \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle$ ,  $t = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right\rangle$ .

- 8.\* Mit  $a, b, c, d$  wie eben und  $p := v(OP)$  können nicht beide Vektoren  $a - p$  und  $c - p$  von  $b, d$  linear abhängig sein (man führe den (indirekten) Beweis aus). Sind sie dies beide nicht, so hat  $g(AB)$  leeren Durchschnitt mit der Parallelen durch  $P$  zu  $g(CD)$ , ebenso  $g(CD)$  mit der Parallelen durch  $P$  zu  $g(AB)$  (Beweis!). Als  $q$  ergibt sich die Gerade  $g(PS)$  mit  $v(OS) = \bar{s} = a + sb$ , wobei  $s \in \mathbf{R}$  zusammen mit Zahlen  $z, t \in \mathbf{R}$  die Bedingung  $p + z(\bar{s} - p) = c + tb$ , d. h.  $szb - tb + z(a - p) = c - p$  erfüllt. (Existenz und Eindeutigkeit von  $sz, t, z$  folgen aus der linearen Unabhängigkeit von  $b, d, a - p$ ; warum ist darin  $z \neq 0$ ?) Im Beispiel wird  $S$  der Punkt  $\left( \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right)$ . Ist etwa  $a - p$  linear abhängig von  $b, d$ , so ergibt sich als  $q$  genau die Parallele durch  $P$  zu  $g(CD)$ .

## Lineare Gleichungen

2. Mittelsenkrechte von  $(1, 1) (-3, 5)$ :  $x - y + 4 = 0$ ,

Mittelsenkrechte von  $(-3, 5) (-1, -3)$ :  $x - 4y + 6 = 0$ ,

Mittelsenkrechte von  $(-1, -3) (1, 1)$ :  $x + 2y + 2 = 0$ .

Hessesche Normalform von  $(1, 1) (-3, 5)$ :  $f_1(x) := \frac{1}{\sqrt{2}} (-x - y + 2) = 0$ ,

von  $(-3, 5) (-1, -3)$ :  $f_2(x) := \frac{1}{\sqrt{17}} (4x + y + 7) = 0$ ,

von  $(-1, -3) (1, 1)$ :  $f_3(x) := \frac{1}{\sqrt{5}} (-2x + y + 1) = 0$ ;

darin Wahl der Vorzeichen so, daß  $f_1(-1, -3)$ ,  $f_2(1, 1)$ ,  $f_3(-3, 5)$  positiv sind (vgl. Lösung zu Aufgabe 1). Also:

Innenwinkelhalbierende:

$$f_2(x) - f_3(x) = 0, \quad f_3(x) - f_1(x) = 0, \quad f_1(x) - f_2(x) = 0;$$

Außenwinkelhalbierende:

$$f_2(x) + f_3(x) = 0, \quad f_3(x) + f_1(x) = 0, \quad f_1(x) + f_2(x) = 0.$$

3. Nachweis für die Mittelsenkrechten: Es gilt  $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ , und eine nichtverschwin-

dende Unterdeterminante maximaler Reihenzahl ist z. B.  $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$ . Entsprechend können die übrigen Nachweise geführt werden.

4. Die gesuchte Bedingung ist  $a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$ , die gesuchte Ebene

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} z = 0.$$

5. a) 
$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0;$$

b)  $((2, 1, -3) \times (-1, 3, 2)) \cdot ((x, y, z) - (-2, 2, 3)) = 0$  führen auf  $11x - y + 7z + 3 = 0$ .

6. An einer durch  $a$  gegebenen Kante stoßen zwei Flächen zusammen, die  $c \times a$  und  $a \times b$  als Stellungsvektoren haben. Für ihren Neigungswinkel  $\varphi$  gilt daher  $\cos \varphi = \frac{|(c \times a) \cdot (a \times b)|}{|c \times a| \cdot |a \times b|} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ,  $\varphi \approx 18,4^\circ$ . Entsprechend gilt für die bei  $b$  bzw.  $c$  auftretenden Neigungswinkel  $\chi$

bzw.  $\psi$ :  $\cos \chi = \frac{4}{3\sqrt{2}}$ ,  $\chi \approx 19,5^\circ$ ;  $\cos \psi = \frac{13}{6\sqrt{5}}$ ,  $\psi \approx 14,3^\circ$ .

## Konvexe Polygone

1. a) Wie in MfL Bd. 7, 2.6.2., enthält man  $\text{TV}(C, A; V) = -\lambda : v$ ,  $\text{TV}(A, B; W) = -\mu : \lambda$ . Aus  $g(AX) \parallel g(BC)$  und  $X \in A$  folgt die Existenz von  $\varrho \neq 0$  mit  $x - a = \varrho(c - b)$ , also  $(\mu + \varrho)(b - a) + (v - \varrho)(c - a) = 0$ , also  $(\varrho - 1) - \mu = v$ .

b)  $\text{TV}(A, B; W) = -1$ , d. h.,  $W$  ist der Mittelpunkt von  $AB$ .

3.  $\{W'_a, W_b, W_c\}$ ,  $\{W_a, W'_b, W_c\}$ ,  $\{W_a, W_b, W'_c\}$ ,  $\{W'_a, W'_b, W'_c\}$ .

4.  $x - 7y + 8 = 0$ .

6.\*  $\text{TV}(A, B; g(AB) \cap \varepsilon(XCD)) = -\mu : \lambda$ ,  $\text{TV}(A, C; g(AC) \cap \varepsilon(XBD)) = -v : \lambda$ ,

$\text{TV}(A, D; g(AD) \cap \varepsilon(XBC)) = -\vartheta : \lambda$ ,  $\text{TV}(B, C; g(BC) \cap \varepsilon(XAD)) = -v : \mu$ ,

$\text{TV}(B, D; g(BD) \cap \varepsilon(XAC)) = -\vartheta : \mu$ ,  $\text{TV}(C, D; g(CD) \cap \varepsilon(XAB)) = -\vartheta : v$ .

## Analytische Darstellung von Bewegungen und Koordinatentransformationen

1. a)  $(1, 2)$ ; b)  $(-2, -3)$ ; c)  $\left(-1 + \frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)$ ; d)  $\left(\frac{18}{5}, \frac{1}{5}\right)$ ; e)  $\left(\frac{26}{5}, \frac{17}{5}\right)$ .

2. Mit  $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$ ;  $a = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix}$ ,  $a' = \begin{pmatrix} a'_{11} \\ a'_{12} \\ a'_{13} \end{pmatrix}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) gilt  $a'_{ij} = \sum_{k=1}^3 q_{jk} a_{ik}$

( $i, j = 1, 2, 3$ ). Daraus errechnet man: Die erste Komponente  $a_{12}a'_{23} - a'_{13}a_{22}$  von

$\mathbf{a}'_1 \times \mathbf{a}'_2$  lautet

$$(q_{22}q_{33} - q_{23}q_{32})(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) + (q_{23}q_{31} - q_{21}q_{33})(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) \\ + (q_{21}q_{32} - q_{22}q_{31})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).$$

Aus  $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$  schließt man  $\mathbf{Q} = \text{adj } \mathbf{Q}$  und damit weiter

$$a'_{12}a'_{23} - a'_{13}a'_{22} = q_{11}a_{31} + q_{12}a_{32} + q_{13}a_{33} = a'_{31}.$$

Entsprechend erhält man  $a'_{32}, a'_{33}$  als zweite bzw. dritte Komponente von  $\mathbf{a}'_1 \times \mathbf{a}'_2$ .

3.\* Für  $\omega$  gilt  $\cos \omega = -\frac{1}{2}$ ,  $\sin \omega = \pm \frac{1}{2} \sqrt{3}$ . Es sei etwa  $\sin \omega = \frac{1}{2} \sqrt{3}$  gewählt. Man

kann  $\alpha, \beta$  z. B. mit  $\cos \alpha = \sqrt{\frac{5}{6}}$ ,  $\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ ;  $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  $\sin \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$  wählen, da hiermit  $\delta_{z,\alpha}(\sqrt{6}, 0, 0) = (\sqrt{5}, -1, 0)$  und  $\delta_{y,\beta}(\sqrt{5}, -1, 0) = (1, -1, 2)$  wird.

Für

$$(x_{11}, x_{12}, x_{13}) := \delta_{y,-\beta}(x_1, x_2, x_3), \quad (x_{21}, x_{22}, x_{23}) := \delta_{z,-\alpha}(x_{11}, x_{12}, x_{13}), \\ (x_{31}, x_{32}, x_{33}) := \delta_{x,\alpha}(x_{21}, x_{22}, x_{23}), \quad (x_{41}, x_{42}, x_{43}) := \delta_{z,\alpha}(x_{31}, x_{32}, x_{33}), \\ (x'_1, x'_2, x'_3) := \delta_{y,\beta}(x_{41}, x_{42}, x_{43})$$

ergibt sich dann

$$x_{11} = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1 + 2x_3), \quad x_{12} = x_2, \quad x_{13} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x_1 + x_3);$$

$$x_{21} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{5}x_{11} - x_{12}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1 - x_2 + 2x_3),$$

$$x_{22} = \frac{1}{\sqrt{6}}(x_{11} + \sqrt{5}x_{12}) = \frac{1}{\sqrt{30}}(x_1 + 5x_2 + 2x_3);$$

$$x_{23} = x_{13} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x_1 + x_3);$$

$$x_{31} = x_{21} = \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1 - x_2 + 2x_3),$$

$$x_{32} = \frac{1}{2}(-x_{22} - \sqrt{3}x_{23}) = \frac{1}{2\sqrt{30}}((-1 + 6\sqrt{2})x_1 - 5x_2 + (-2 - 3\sqrt{2})x_3),$$

$$x_{33} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x_{22} - x_{23}) = \frac{1}{2\sqrt{10}}((1 + 2\sqrt{2})x_1 + 5x_2 + (2 - \sqrt{2})x_3);$$

$$x_{41} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{5}x_{31} + x_{32}) = \frac{1}{4\sqrt{5}}((3 + 2\sqrt{2})x_1 - 5x_2 + (6 - \sqrt{2})x_3),$$

$$x_{42} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-x_{31} + \sqrt{5}x_{32}) = \frac{1}{4}((-1 + 2\sqrt{2})x_1 - x_2 + (-2 - \sqrt{2})x_3),$$

$$x_{43} = x_{33} = \frac{1}{2\sqrt{10}}((1 + 2\sqrt{2})x_1 + 5x_2 + (2 - \sqrt{2})x_3);$$

$$x'_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_{41} - 2x_{43}) = \frac{1}{4}(-x_1 + (-1 - 2\sqrt{2})x_2 + (2 - \sqrt{2})x_3),$$

$$x'_2 = x_{42} = \frac{1}{4}((-1 + 2\sqrt{2})x_1 - x_2 + (-2 - \sqrt{2})x_3),$$

$$x'_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x_{41} + x_{43}) = \frac{1}{4}((2 + \sqrt{2})x_1 + (-2 + \sqrt{2})x_2 + 2x_3),$$

$$\text{also } v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 - 2\sqrt{2} & 2 - \sqrt{2} \\ -1 + 2\sqrt{2} & -1 & -2 - \sqrt{2} \\ 2 + \sqrt{2} & -2 + \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

4. a) Die Axiome für die Addition sind leicht zu bestätigen, die Distributivgesetze wegen der Distributivität der Bildungen  $a_0b_0$ ,  $ab$ ,  $a_0b$ ,  $b_0a$ ,  $a \times b$  ebenfalls. Daher genügt nun zum Beweis des Assoziativgesetzes der Multiplikation der Nachweis, daß speziell für  $1, i, j, k$  die definierte Multiplikation

|   | 1 | i  | j  | k  |
|---|---|----|----|----|
| 1 | 1 | i  | j  | k  |
| i | i | -1 | k  | -j |
| j | j | -k | -1 | i  |
| k | k | j  | -i | -1 |

assoziativ ist, was man leicht nachrechnet. Als Inverses jeweils einer Quaternion  $a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \neq 0$  weist man die Quaternion  $\frac{1}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}(a_0 - a_1i - a_2j - a_3k)$  nach.

b) In  $(z', \xi') = \Omega \cdot (z, \xi) \cdot \Omega^{-1} = (pz - r\xi, p\xi + zr + r \times \xi)(p, -r)$  ist

$$z' = (pz - r\xi)p - (p\xi + zr + r \times \xi)(-r) = p^2z + zr^2 + (r \times \xi)r = z,$$

und es ist

$$\xi' = (pz - r\xi)(-r) + p(p\xi + zr + r \times \xi) + (r \times \xi) \times (-r)$$

von  $z$  unabhängig.

c) Aus  $(-r' \eta', \xi' \times \eta') = (0, \xi')(0, \eta') = \Omega(0, \xi) \Omega^{-1} \cdot \Omega(0, \eta) \Omega^{-1} = \Omega(0, \xi)(0, \eta) \Omega^{-1} = \Omega(-\xi\eta, \xi \times \eta) \Omega^{-1}$  folgt nach b) die Behauptung  $\xi' \eta' = \xi \eta$ .

d)  $(z, \xi) := t\Omega$  ergibt  $(z', \xi') = \Omega \cdot t\Omega \cdot \Omega^{-1} = t\Omega$ , also  $\xi' = \xi$ .

e) Man findet  $\xi' = (p^2 - r^2)\xi + 2pr \times \xi$ ,  $\xi\xi' = p^2 - r^2$ ,  $\det(\xi, \xi', r) = 2pr^2$ .

f) Für  $\Omega = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{2}} - \frac{j}{2\sqrt{2}} + \frac{k}{\sqrt{2}}$  wird  $\Omega^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{2}} + \frac{j}{2\sqrt{2}} - \frac{k}{\sqrt{2}}$ ,

$$\begin{aligned} \Omega \cdot (x_1i + x_2j + x_3k) &= \left(-\frac{x_1}{2\sqrt{2}} + \frac{x_2}{2\sqrt{2}} - \frac{x_3}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{\sqrt{2}} - \frac{x_3}{2\sqrt{2}}\right)i \\ &\quad + \left(\frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{2} - \frac{x_3}{2\sqrt{2}}\right)j + \left(\frac{x_1}{2\sqrt{2}} + \frac{x_2}{2\sqrt{2}} + \frac{x_3}{2}\right)k, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \Omega \cdot (x_1 i + x_2 j + x_3 k) \cdot \Omega^{-1} &= \frac{1}{4} \left( -x_1 + (-1 - 2\sqrt{2}) x_2 + (2 - \sqrt{2}) x_3 \right) i \\ &+ \frac{1}{4} \left( (-1 + 2\sqrt{2}) x_1 - x_2 + (-2 - \sqrt{2}) x_3 \right) j \\ &+ \frac{1}{4} \left( (2 + \sqrt{2}) x_1 + (-2 + \sqrt{2}) x_2 + 2x_3 \right) k. \end{aligned}$$

5. Die Eckpunkte seien  $A, B, C, A', B', C'$ . Für die gesuchten Bewegungen gibt es genau die folgenden Möglichkeiten:

(I) Jede der Ebenen  $z = 1, z = -1$  wird auf sich abgebildet. Die Bewegung bewirkt eine Permutation der Punkte  $A, B, C$  und die entsprechende Permutation der Punkte  $A', B', C'$ . So bewirkt

- |  |                 |                                 |
|--|-----------------|---------------------------------|
| a) die Identität                         | die Permutation | $(A, B, C) \mapsto (A, B, C)$ , |
| b) die Spiegelung an $y = 0$             | die Permutation | $(A, B, C) \mapsto (A, C, B)$ , |
| c) die Spiegelung an $x\sqrt{3} - y = 0$ | die Permutation | $(A, B, C) \mapsto (B, A, C)$ , |
| d) die Drehung $\delta_{z, 120^\circ}$   | die Permutation | $(A, B, C) \mapsto (B, C, A)$ , |
| e) die Drehung $\delta_{z, 240^\circ}$   | die Permutation | $(A, B, C) \mapsto (C, A, B)$ , |
| f) die Spiegelung an $x\sqrt{3} + y = 0$ | die Permutation | $(A, B, C) \mapsto (C, B, A)$ . |

Die Abbildungsgleichungen lauten jeweils:

- |   |  |           |
|---|--|-----------|
| a) $x' = x,$                                    | $y' = y,$                                    | $z' = z.$ |
| b) $x' = -x,$                                   | $y' = y,$                                    | $z' = z.$ |
| c) $x' = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}y,$ | $y' = \frac{1}{2}\sqrt{3}x + \frac{1}{2}y,$  | $z' = z.$ |
| d) $x' = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{3}y,$ | $y' = \frac{1}{2}\sqrt{3}x - \frac{1}{2}y,$  | $z' = z.$ |
| e) $x' = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}y,$ | $y' = -\frac{1}{2}\sqrt{3}x - \frac{1}{2}y,$ | $z' = z.$ |
| f) $x' = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{3}y,$ | $y' = -\frac{1}{2}\sqrt{3}x + \frac{1}{2}y,$ | $z' = z.$ |

(II) Die Ebenen  $z = 1, z = -1$  werden miteinander vertauscht. Die Bewegungen (I) a)–f) sind mit der Spiegelung an der Ebene  $z = 0$  zu komponieren; in den Abbildungsgleichungen ist die Gleichung  $z' = z$  jeweils durch  $z' = -z$  zu ersetzen.

## Kurven zweiter Ordnung

1. Aus  $|MX_i| \leq r$  ( $i = 1, 2$ ) (bzw. entsprechend mit Ausschluß des Gleichheitszeichens für offene Kreisflächen) folgt für den Ortsvektor  $\underline{x} = \lambda \underline{x}_1 + \mu \underline{x}_2$  ( $\lambda + \mu = 1; \lambda, \mu \geq 0$ ) jedes Punktes  $X$  der Strecke  $X_1 X_2$  auch  $|MX| \leq r$ . Beweis: Aus  $|\underline{x}_i - m| \leq r$  folgt

$$|\underline{x} - m| = |\lambda(\underline{x}_1 - m) + \mu(\underline{x}_2 - m)| \leq \lambda|\underline{x}_1 - m| + \mu|\underline{x}_2 - m| \leq (\lambda + \mu)r = r.$$

3. Durch die Drehung  $x = \sigma x' - \tau y', y = \tau x' + \sigma y'$  ( $\sigma^2 + \tau^2 = 1$ ) erhält  $x'y'$  den Koeffizienten  $2a(\sigma^2 - \tau^2)$ , also etwa bei der Wahl  $\sigma = \tau = \frac{1}{\sqrt{2}}$  den Koeffizienten 0. Es entsteht

$$(1 + a)x'^2 + (1 - a)y'^2 + \sqrt{2}(a^2 - a - 2)x' + \sqrt{2}(a - 2)y' = 0.$$

Für  $a = 1$  ist dies die Parabel  $y' + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \left( x' - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2$ ,

für  $a = -1$  die Vereinigungsmenge paralleler Geraden  $y'(2y' - 3\sqrt{2}) = 0$ .

Für  $a \neq 1, -1$  entsteht

$$(1+a) \left( x' - \frac{1}{\sqrt{2}}(2-a) \right)^2 + (1-a) \left( y' - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2-a}{1-a} \right)^2 = \frac{a^2(a-2)^2}{a-1},$$

also in den Fällen  $a < -1$ ,  $1 < a < 2$ ,  $a > 2$  eine Hyperbel, in den Fällen  $-1 < a < 0$ ,  $0 < a < 1$  die leere Menge (eine „imaginäre Ellipse“), im Fall  $a = 0$  ein Punkt (zwei sich in diesem Punkt schneidende „konjugiert komplexe Geraden“), im Fall  $a = 2$  zwei sich schneidende (reelle) Geraden.

5. Ist  $e$  die gemeinsame Exzentrizität von  $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$  und  $\frac{x^2}{a_2^2} - \frac{y^2}{b_2^2} = 1$ , so gilt  $e^2 = a_1^2 - b_1^2 = a_2^2 + b_2^2$ . Ist  $(x_1, y_1)$  einer der Schnittpunkte, so folgt für ihn  $\frac{x_1^2}{a_1^2 a_2^2} = \frac{b_1^2 + b_2^2}{a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2}$ ,  $\frac{y_1^2}{b_1^2 b_2^2} = \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2}$ . Die Ellipsen- und Hyperbeltangente in  $(x_1, y_1)$  haben  $\left\langle \frac{x_1}{a_1}, \frac{y_1}{b_1} \right\rangle$  bzw.  $\left\langle \frac{x_1}{a_2}, -\frac{y_1}{b_2} \right\rangle$  als Stellungsvektoren. Also sind sie orthogonal.

6. Nein. Verläuft nämlich (vgl. Abb. A.1) ein Büschel parallel zu  $-\langle \cos \alpha, \sin \alpha \rangle$  ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ), so lege man z. B. durch  $F$  eine Gerade mit einem Anstieg  $m > \tan \alpha$ . Sie schneidet die Parabel in zwei Punkten  $P_1, P_2$ . Die durch  $F, P_1$  und  $P_2$  gehenden Strahlen des Büschels gehen nach der Reflexion in Strahlen über, die man als nicht konzentrisch nachweise.

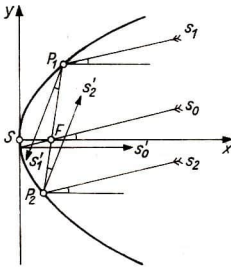


Abb. A.1

7. a) Genau dann hat  $(x_1, y_1)$  die genannte Eigenschaft, wenn im Fall der Parabel die Ungleichung  $y_1^2 > 2px_1$ , im Fall der Ellipse oder Hyperbel die Ungleichung  $\pm \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} > \pm 1$  sowie für die Hyperbel zusätzlich die Ungleichung  $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} \neq 0$  gilt.

c) (Abb. A.2) Auf  $g$  gibt es zwei Punkte  $P_1, P_2$ , von denen aus je zwei Tangenten an  $c$  existieren. Sind  $S_1, T_1$  bzw.  $S_2, T_2$  die Berührungspunkte, so (kann man  $g(S_1T_1) \neq g(S_2T_2)$  beweisen, und es ist  $g(S_1T_1) \cap g(S_2T_2)$  der gesuchte Pol.

d) (Abb. A.3) Durch  $P$  gibt es zwei Geraden  $g_1, g_2$ , die  $c$  in je zwei Punkten schneiden. Sind  $s_1, t_1$  bzw.  $s_2, t_2$  die Tangenten an  $c$  in diesen Punkten, so ist  $g(s_1 \cap t_1, s_2 \cap t_2)$  die gesuchte Polare. Dabei sind  $g_1, g_2$  nicht durch den Ellipsen- bzw. Hyperbelmittelpunkt zu legen (weshalb?). Dies ist genau dann unmöglich, wenn  $P$  selbst der Mittelpunkt ist, d. h. keine Polare besitzt.

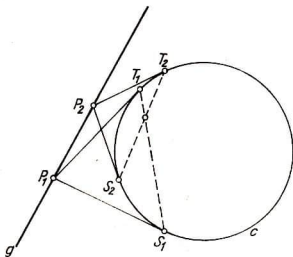


Abb. A.2

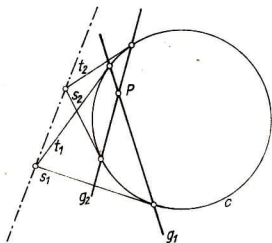


Abb. A.3

8. Die Kurve sei in einem Koordinatensystem, in dem  $P$  der Punkt  $(0, 0)$  und  $g$  die  $x$ -Achse  $y = 0$  ist,

$$a_{00} + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0.$$

Sie schneidet  $g$  in  $(x_1, 0)$  und  $(x_2, 0)$ , wobei  $x_1, x_2$  die (nach Voraussetzung existierenden)

Lösungen der Gleichung  $a_{00} + 2a_{01}x + a_{11}x^2 = 0$  sind, also  $x_1 + x_2 = -\frac{2a_{01}}{a_{11}}$ ,  $x_1x_2 = \frac{a_{00}}{a_{11}}$  erfüllen. Die Polare von  $P$ ,

$$a_{00} + a_{01}x + a_{02}y = 0,$$

schneidet  $g$  in  $(x_0, 0)$ , wobei  $x_0$  die Lösung von  $a_{00} + a_{01}x = 0$  ist. Daher gilt  $2x_1x_2 - (x_1 + x_2)x_0 = 0$ , woraus die Behauptung

$$\frac{(0 - x_1) : (0 - x_2)}{(x_0 - x_1) : (x_0 - x_2)} = -1$$

folgt.

## Abbildungen als Ordnungsprinzip in der Geometrie

1. a) Verschiebung oder Drehung; b) Geradenspiegelung oder Schubspiegelung.
5. Verschiebung für  $n = 2m$ , Punktspiegelung für  $n = 2m + 1$  ( $m \geq 1$ ).
6. Die identische Transformation.
9. a)  $x' = \frac{2}{3}x - 1$ ,  $y' = \frac{2}{3}y + \frac{5}{3}$ ; b)  $2x' - y' + 6 = 0$ .
22.  $\left(-\frac{9}{10}, \frac{6}{5}\right)$ ,  $20x' - 21y' - 96 = 0$ .
23.  $(0, 0)$ ,  $y = \frac{-2 \pm \sqrt{13}}{3}x$ ;  $(2, 1)$ ,  $y = \frac{-2 \pm \sqrt{13}}{3}x + \frac{7 \mp 2\sqrt{13}}{3}$ .
24.  $x' = 3x + 2y - 1$ ,  $y' = -2x + 3y + 5$ ,  $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$ ;  
 $x' = \frac{1}{5}x - \frac{18}{5}y + \frac{37}{5}$ ,  $y' = -\frac{18}{5}x - \frac{1}{5}y + \frac{49}{5}$ ,  $\left(\frac{11}{5}, \frac{47}{30}\right)$ ;  
 $(x' + 1)^2 + (y' - 5)^2 = 13$ .
25. Mögliche spezielle Lösungen:
- a)  $x' = 5x$ ,  $y' = 5y$  } und  $\begin{cases} x'' = \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' - 4, \\ y'' = -\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' + 1; \end{cases}$
- b)  $x' = 13x$ ,  $y' = 13y$  } und  $\begin{cases} x'' = \frac{5}{13}x' + \frac{12}{13}y' - 6, \\ y'' = \frac{12}{13}x' - \frac{5}{13}y' + 3. \end{cases}$
29.  $A' \left(\frac{10}{17}, \frac{57}{17}\right)$ ,  $B' \left(-\frac{86}{17}, \frac{166}{17}\right)$ ,  $C' \left(-\frac{21}{17}, \frac{35}{17}\right)$ .
30.  $x' = \frac{1}{13}(5x - 12y + 32)$ ,  $y' = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 48)$ .
- a)  $7x' + 17y' - 41 = 0$ ; b)  $5x' - 12y' + 32 = 0$ ; c)  $\left(x' - \frac{32}{13}\right)^2 + \left(y' - \frac{48}{13}\right)^2 = 1$ .
31.  $x' = 2x - y + 1$ ,  $y' = 3x + 4y - 5$ ;  $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ .
33. a)  $(7, 8)$ ; b)  $31x' - 22y' + 7 = 0$ , c)  $3x' - 2y' - 1 = 0$ ;  
d)  $25x'^2 - 36x'y' + 13y'^2 - 22x' + 16y' + 4 = 0$ ;  
e)  $7x'^2 - 12x'y' + 5y'^2 - 10x' + 8y' + 2 = 0$ ;  
f)  $16x'^2 - 24x'y' + 9y'^2 - 19x' + 14y' + 5 = 0$ .
34. a)  $(2, -1)$ ; b)  $4x - 3y + 4 = 0$ ; c) kein Fixpunkt.
35.  $4x - 2y + 3 = 0$ ,  $2x - 3y + t = 0$ ,  $-\infty < t < \infty$ ,  $t \in \mathbf{R}$ ,  $k = 9$ .
36.  $x' = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}$ ,  $y' = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}$ ;  $k = -1$ .

37.  $x' = x - \frac{3}{2}y$ ,  $y' = -\frac{1}{2}y$ .

39. a)  $c = -5$ ,  $d = 2$ ; b)  $c = 5$ ,  $d = -2$ ; c)  $c = -\frac{1}{4}$ ,  $d = -\frac{1}{4}$ ;

d)  $c$  und  $d$  sind so zu wählen, daß die Gleichung  $d = 5c + 1$  erfüllt ist,  $c = -\frac{1}{4}$  ist dabei auszuschließen;

e)  $c$  und  $d$  sind so zu wählen, daß die Gleichung  $5c - 2d + 1 = 0$  erfüllt wird.

40.  $(0, 0)$ ,  $y = \frac{1}{3}x$ ,  $y = -2x$ ;

$(2, 1)$ ,  $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ ,  $y = -2x + 5$ .

50.  $ad - bc = 1$ ,  $a + d = -1$ .

53.  $k = 0$ , Senkgerade:  $3x - 2y + 22 = 0$ ,  
Originalgerade zu  $P'$ :  $x + 3y - 1 = 0$ .

56. Die Ellipse besitzt keinen uneigentlichen Punkt, die Parabel einen, die Hyperbel hat zwei uneigentliche Punkte.

61. a)  $(\frac{3}{25}, -\frac{4}{25})$ ; b)  $(x' + \frac{1}{7})^2 + (y' - \frac{2}{7})^2 = \frac{5}{49}$ ;

c)  $(x' - \frac{1}{6})^2 + (y' + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{9}$ ;

d)  $(x'^2 + y'^2)^2 - (x'^2 - y'^2) = 0$  (Lemniskate).

## Einführung in eine Theorie der geometrischen Konstruktionen

4. a) Ja; b) nein; denn es ist  $x = \pi$ , und wegen der Unlösbarkeit der „Quadratur des Kreises“ ist es auch nicht möglich, aus einer Einheitsstrecke mit Zirkel und Lineal eine Strecke der Maßzahl  $\pi$  zu konstruieren; c) ja; denn es ist  $x = 6$ .
15. a), b), c) sind lösbar; d) ist nicht lösbar, weil kein Dreieck mit den geforderten Größen existiert; a) und c) sind mit Zirkel und Lineal lösbar.

## Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

4. 24, 30, 32, 34, 40.
7. Wenn  $g(PQ)$  nicht parallel zu  $g$  und nicht orthogonal zu  $g$  ist, so existieren genau zwei der gesuchten Punkte. Andernfalls gibt es genau einen solchen Punkt.

## Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal in algebraischer Behandlung

2. Beim Auflösen der quadratischen Gleichung in  $x$  erscheint unter der Wurzel der Ausdruck

$$\begin{aligned} D &:= (3h_a^2 - 3L^2 + 2KL)^2 - 4 \cdot 4L \cdot (Kh_a^2 - 2Lh_a^2 - KL^2) \\ &= 9h_a^4 + 9L^4 + 4K^2L^2 - 4KLh_a^2 + 14L^2h_a^2 + 4KL^3. \end{aligned}$$

Wegen  $4K^2L^2 - 4KLh_a^2 + h_a^4 = (2KL - h_a^2)^2$  folgt schließlich

$$D = 8h_a^2 + 9L^4 + (2KL - h_a^2)^2 + 14L^2h_a^2 + 4KL^3.$$

Da stets  $D > 0$  ist, besitzt die gegebene Gleichung im Fall  $L = 0$  (d. h.  $w_a = h_a$ ) eine reelle Lösung, und im Fall  $L \neq 0$  (d. h.  $w_a > h_a$ ) zwei reelle Lösungen.

5. Der Beweisschritt, der sich bei Gleichungen dritten Grades nach Anwendung des Vieta-schen Wurzelsatzes ergab, ist bei Gleichungen vierten Grades nicht anwendbar.
6. Die Begründung kann durch Gegenbeispiele gegeben werden.  
Im Fall  $n = 2 \cdot k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) ist beispielsweise  $(x^2 - 2)^k = 0$  eine Gleichung  $n$ -ten Grades mit rationalen Koeffizienten und dem Koeffizient 1 vor  $x^n$ . Die Gleichung besitzt keine rationale Lösung, und dennoch existieren Lösungen, die aus rationalen Zahlen konstruierbar sind (sogar alle Lösungen).  
Im Fall  $n = 2 \cdot k + 3$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) ist beispielsweise  $(x^3 - 2) \cdot (x^2 - 2)^k = 0$  eine Gleichung  $n$ -ten Grades mit rationalen Koeffizienten und dem Koeffizient 1 vor  $x^n$ . Die Gleichung besitzt keine rationale Lösung, und dennoch existieren Lösungen, die aus rationalen Zahlen konstruierbar sind.  
Im Fall  $n = 1$  ist der Satz ebenfalls richtig (allerdings trivial).

### Die Unlösbarkeit einiger Konstruktionsaufgaben

4. Es sei  $x := |\sphericalangle P_1AP_2|$  und  $y := |\sphericalangle BAP_1|$ . Offensichtlich ist dann auch  $y = |\sphericalangle P_2AC|$ .
- |  |   |  |
|--|---|--|
| a) $x \approx 36^\circ 52' \approx 36,9^\circ$ | — | rund 22,9% Abweichung von $30^\circ$ ; |
| $y \approx 26^\circ 34' \approx 26,6^\circ$    | — | rund 11,4% Abweichung von $30^\circ$ . |
| b) $x \approx 21^\circ 47' \approx 21,8^\circ$ | — | rund 8,9% Abweichung von $20^\circ$ ;  |
| $y \approx 19^\circ 7' \approx 19,1^\circ$     | — | rund 4,4% Abweichung von $20^\circ$ .  |
| c) $x \approx 10^\circ 12' \approx 10,2^\circ$ | — | rund 2% Abweichung von $10^\circ$ ;    |
| $y \approx 9^\circ 54' \approx 9,9^\circ$      | — | rund 1% Abweichung von $10^\circ$ .    |
5. Die Aussage „ $|\sphericalangle GFH| = 3\alpha$ “ ist falsch. Die Abweichung der Größe  $\alpha := |\sphericalangle CHG|$  von der Größe  $\frac{1}{7} \cdot 180^\circ$  beträgt rund 1%.
6. Ein weiteres geeignetes spezielles Zahlentripel ist beispielsweise  $a := 2$ ,  $b := 1$ ,  $w_a := 1$ . Mit  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $w_a = 1$  ergibt sich für  $c$  die Gleichung  $c^3 + c^2 - 5c - 1 = 0$ .
7. Ein geeignetes spezielles Zahlentripel ist beispielsweise  $a := 2 \cdot \sqrt[3]{3}$ ,  $b := 2$ ,  $w_a := 1$ . Mit  $a = 2 \cdot \sqrt[3]{3}$ ,  $b = 2$ ,  $w_a = 1$  ergibt sich für  $x := 2 \cdot c$  die Gleichung  $x^3 + 7x^2 - 40x - 16 = 0$ .
8. Eine geeignete Zahl ist beispielsweise  $w_a := 1$ . Denn mit  $w_a := 1$ ,  $w_\beta := 2$ ,  $w_\gamma := 2$  folgt aus

den Überlegungen in MfL Bd. 7, 4.4.5.,

$$\cos \beta = \sin \frac{3}{2} \cdot \beta, \text{ d. h. } 1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{\beta}{2} = 3 \cdot \sin \frac{\beta}{2} - 4 \cdot \sin^3 \frac{\beta}{2}.$$

Mit  $x := 2 \cdot \sin \frac{\beta}{2}$  ergibt sich schließlich  $x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$ , und diese Gleichung hat die Lösungen

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}, \quad x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}.$$

Für den vorliegenden geometrischen Sachverhalt kommt lediglich  $x_2$  in Betracht, und das bedeutet  $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{5} - 1)$ , d. h.  $\beta = 36^\circ$ .

## VI. Numerische Mathematik und Rechentechnik

### Arbeitsstufen der Problemanalyse

9. a)  $F_2 = F_1 \cdot \frac{R-r}{2R}$ ; b)  $R = \frac{5}{4} r$ ; c)  $\frac{r}{R} = 0,9$ .

10. a)  $x = \frac{F_B + \frac{1}{2} F}{F_A + F_B + F} \cdot l$ ; falls  $F$  gegenüber  $F_A, F_B$  vernachlässigbar klein ist, kann näherungsweise  $x = \frac{F_B}{F_A + F_B} \cdot l$  gesetzt werden;

b)  $F = F_B$ .

11. a) Vertikalbewegung:  $\frac{2v_0 \sin \alpha}{T} = g$  ( $T$  Gesamtflugzeit),

Horizontalbewegung:  $W = T v_0 \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ ;

c) Gesamtflugzeit:  $T = \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{g}$ ,

Horizontalbewegung:  $W = \frac{v_0^2}{2g} \left( \sin 2\alpha + \sqrt{\sin^2 2\alpha + \frac{8gh}{v_0^2} \cos^2 \alpha} \right)$ .

d)  $W'(\alpha)|_{\alpha=\alpha_0} = 0$  führt mit  $C := \frac{8gh}{v_0^2}$  auf

$$\sin^2 2\alpha_0 (C - 4 \cos 2\alpha_0)^2 = 16 \cos^2 2\alpha_0 (\sin^2 2\alpha_0 + C \cdot \cos^2 \alpha_0),$$

woraus  $\sin^2 \alpha_0 = \frac{4}{8+C}$  folgt. Für den hieraus ermittelten Winkel  $\alpha_0$  wird  $W$  maximal.

Für  $h = 2,2$  m und  $v_0 = 10 \text{ ms}^{-1}$  ist  $\sin^2 \alpha_0 = 0,411245$  und  $\alpha_0 \approx 39,9^\circ$ ;  $W = 12,20$  m.

12. a)  $s = T v_0 = \frac{b}{u} v_0$ ;

b)  $a_0 = a_1 = 0$ ,  $a_2 = \frac{2}{T} v_{\max}$ ,  $a_3 = -\frac{4}{3} \cdot \frac{v_{\max}}{T^2}$ ,  $s_1 = \frac{2}{3} T v_{\max} = \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{u} v_{\max}$ ;

c)  $v_0 = \frac{2}{3} v_{\max}$ .

13. a) Es gilt  $\frac{x}{g} + \frac{y}{b} = 1$ ; aus  $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$  folgt  $\frac{f}{g} + \frac{f}{b} = 1$ .

14. a) Brechungsgesetz von SNELLIUS:  $n_1 \cdot \sin \alpha_1 = n_2 \cdot \sin \alpha_2$ ;

b)  $\sin \alpha_1 = \frac{n_2}{n_1}$ , da  $\alpha_2 = 90^\circ$  ist.

### Datenverarbeitung in Digitalrechnern

8. a)  $g = 8$ : 6473,

$g = 2$ : 110100111011,

$g = 16$ : D3B;

b)  $g = 10$ : 65083,

$g = 16$ : FE3B;

c)  $g = 2$ : 0,001,

$g = 5$ : 0,03,

$g = 8$ : 0,1,

$g = 12$ : 0,16,

$g = 16$ : 0,2;

d)  $0,\overline{C}_{16} \triangleq 0,8$ ,  $0,2\overline{A}_{11} \triangleq 0,2\overline{6}$ .

14. Im Intervall

a)  $\llbracket 10, 100\llbracket$ ,

b)  $\llbracket 2^3, 2^4\llbracket$ ,

c)  $\llbracket 1, 12\llbracket$

liegen

90

4

132

Elemente, und zwar:

$0,10 \cdot 10^2$ ,

$0,100 \cdot 2^4$ ,

$0,10 \cdot 12$ ,

$0,11 \cdot 10^2$ ,

$0,101 \cdot 2^4$ ,

$0,11 \cdot 12$ ,

.....,

$0,110 \cdot 2^4$ ,

.....,

$0,99 \cdot 10^2$ .

$0,111 \cdot 2^4$ .

$0,19 \cdot 12$ ,

$0,1A \cdot 12$ ,

$0,1B \cdot 12$ ,

$0,20 \cdot 12$ ,

.....

$0,BB \cdot 12$ .

15.  $G_+ = \{s_j \cdot 2^j, j = -1(1)2\}$  und  $s_j$  aus der Tabelle

| $i$ | $s_i$ |
|-----|-------|
| 1   | O.LOO |
| 2   | O.LOL |
| 3   | O.LLO |
| 4   | O.LLL |

Vgl. auch Abb. A.4.

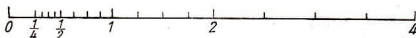


Abb. A.4



16. Es sei  $g = 2$ ,  $t = 3$ ,  $k = 1$ ,  $l = 2$  und  $z = \frac{1}{s}$  mit  $s = 0,LLL$ . Dann ist  $z = L,\overline{00L}$  und  $0,\overline{00L} \cdot 2^{-1} < z < 0,LLL \cdot 2^3$ , aber  $z \notin M$ .
17. a)  $t = 4$ :  $y = 0,2718 \cdot 10$ ,  
 $t = 5$ :  $y = 0,27183 \cdot 10$ ;  
 b)  $t = 7$ :  $y = 0,2236068 \cdot 10$ .
18. Zur Vereinfachung werden die Sexagesimalziffern durch Unterstreichen der entsprechenden dezimal notierten Zahlwerte ausgedrückt:
- $$x = 1,24 \underline{51} \underline{10},$$
- $$x' = 0,1 \underline{24} \underline{51} \underline{10},$$
- $$x'' = 0,1 \underline{25} \underline{21} \underline{10},$$
- $$x''' = 0,1 \underline{25},$$
- $$y^* = 0,1 \underline{25} \cdot 60 = 1 + \frac{25}{60} \approx 1,42.$$
19.  $z$  liege im Intervall  $\llbracket g^{j-1}, g^j \llbracket$ . Dann ist  $|z^* - z| \leq \frac{1}{2} g^{j-t}$  und  $|z| \geq g^{j-1}$ , daher
- $$|\delta z| = \frac{|z^* - z|}{|z|} \leq \frac{1}{2} g^{t-1}.$$
20.  $\square c = 4$ ,  $|c^*| - \square c = 299772$ ,  $|\delta c| < 1,4 \cdot 10^{-5}$ .
21. Nach MfL Bd. 9, 2.5.2.(9), ist  $|\delta h| \leq \frac{1}{12} \cdot 10^{-2} < 10^{-3}$ .

## Einführung in die Programmiersprache ALGOL 60

8. Ausdruck: Wert und Typ:
- |                           |                  |  |
|---------------------------|------------------|--|
| $a/b \times 0$            | 0                | real,  |
| $a/b - c$                 | 1                | real,  |
| $a/b/c$                   | nicht definiert, |  |
| $a/(a - b - c)$           | nicht definiert, |  |
| $a + b \times c$          | 1                | $\left\{ \begin{array}{l} \text{integer} \\ \text{real} \end{array} \right\}$ , falls $a, b, c$ vom Typ $\left\{ \begin{array}{l} \text{integer} \\ \text{real} \end{array} \right\}$ ,  |
| $-b \uparrow c$           | -1               | $\left\{ \begin{array}{l} \text{integer} \\ \text{real} \end{array} \right\}$ , falls $\left\{ \begin{array}{l} b \\ c \end{array} \right\}$ vom Typ $\left\{ \begin{array}{l} \text{integer} \\ \text{real} \end{array} \right\}$ , |
| $a/c \uparrow b$          | nicht definiert, |  |
| $a \uparrow b \uparrow c$ | 1                | $\left\{ \begin{array}{l} \text{integer} \\ \text{real} \end{array} \right\}$ , falls $a, b, c$ vom Typ $\left\{ \begin{array}{l} \text{integer} \\ \text{real} \end{array} \right\}$ .  |
11. **if**  $x < y$  **then begin**  $h := a$ ;  $a := b$ ;  $b := h$  **end**  
**else begin**  $h := b$ ;  $b := c$ ;  $c := h$  **end**;
12. a) -15; b) 1, 3, 8.
13.  $s$ : 3, 10, 16;  $y$ : 4.
15. a)  $m$ : A1;  
**if** B **then begin** A2; *Drucke* (Z); **goto** m **end**;  
 b) **if** B1 **then begin if** B2 **then** A2 **else** A1 **end**; A3;  
 c) **if** B1 **then begin if** B2 **then** A2 **end else** A1; A3;  
 d) **if** B1 **then begin if** B2 **then** A4 **else** A3 **end**  
**else begin** A1; A2 **end**; A5;

17. for  $x := 2.2$  step  $-1.5$  until  $-3.8$  do  
 begin if  $x < 0$  then  $g := -\text{entier}(-x)$  else  $g := \text{entier}(x)$ ;  
      $r := x - g$ ;  
     Drucke ( $x, g, r$ )  
 end;  
 20. begin integer  $n$ ;  
     Lies( $n$ );  
     begin integer  $i$ ; real  $s$ ; array  $a, b[1:n]$ ;  
       ...;  
        $s := s + a[i] \times b[i]$ ;  
       ...  
     end  
 end

## Ausgewählte Gegenstände der Numerischen Mathematik

9.  $P_{\min}(0; 0)$ ,  $P_{\max}(-0,3733004; 0,0439171)$ .  
 10.  $x = -1,984782$ .  
 11.  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 3,019612$ .  
 12.  $P(x) = 10(x - 9)^3 + 169(x - 9)^2 + 503(x - 9) - 73$ .  
 13. a)  $x = 0,3376667$ ; b)  $x = 2,2055695$ .  
 15.  $P_{\max}(0,2014; 21,2019)$ .  
 16. a)  $x = 1,01943$ ,  $y = 1,03065$ ; b)  $x = 0,27245$ ,  $y = 0,68775$ .  
 18. Näherungsnulstellen:  $x_1 = \frac{4}{3}$ ,  $x_2 = \frac{5}{3}$ ;  $g(x_1) = \frac{1}{27}$ ,  $g(x_2) = -\frac{1}{27}$ .  
 19. Minimum des Interpolationspolynoms:  $P_{\min}(1,694363; 0,605627)$ .  
 20.

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & 1 & -y_1 \\ x_2^2 & 1 & -y_2 \\ x_3^2 & 1 & -y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & 1 & -y_1 \\ x_2 & 1 & -y_2 \\ x_3 & 1 & -y_3 \end{vmatrix}}.$$

21.  $g(t) = 2,52 + 0,0375(t - 5,5) + 0,00368(t - 5,5)(t - 21,5)$ ,  $g(8,3) = 2,49$ .  
 23. a) Nach MfL Bd. 9, 4.2.5.(51), (II), ist  

$$P(x) = -4 + 2x - 2x(x - 1) + x(x - 1)(x + 1) - 2x(x - 1)(x + 1)(x - 2) + x(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2).$$

27.  $B(t) = \hat{B}\left(t + \frac{1}{2}\right)$   

$$= \frac{f_0 + f_1}{2} + \frac{1}{1!} \Delta_0^1 t + \frac{1}{2!} \frac{\Delta_1^2 + \Delta_0^2}{2} \left(t^2 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3!} \Delta_{-1}^3 t \left(t^2 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4!} \frac{\Delta_{-2}^4 + \Delta_{-1}^4}{2} \left(t^2 - \frac{1}{4}\right) t^2 - \frac{9}{4} + \dots$$

28. Für zwei aufeinanderfolgende Argumente  $x_0, x_1$  der gegebenen Sinustafel sei  $B_3^{[x_0, x_1](t)}$  das nach den Differenzen  $k$ -ter Ordnung abgebrochene Besselpolynom (vgl. Aufgabe 27). Mit Hilfe von MfL Bd. 9, 4.2.5.(54), (II), ergibt sich für das jeweilige Restglied  $|R_3| \leq 3,5 \cdot 10^{-8}$ , so daß es genügt,  $k = 3$  zu wählen. Mit den Besselpolynomen dieses Grades findet man:

| $x$  | $t$   | $B_3(t) \approx \sin x$ |
|------|-------|-------------------------|
| 30,5 | -0,25 | 0,50754                 |
| 31   | 0,00  | 0,51504                 |
| 31,5 | 0,25  | 0,52250                 |
| 32,5 | -0,25 | 0,53730                 |
| 33   | 0,00  | 0,54464                 |
| 33,5 | 0,25  | 0,55194                 |
| 34,5 | -0,25 | 0,56641                 |
| 35   | 0,00  | 0,57358                 |
| 35,5 | 0,25  | 0,58071                 |

29. Man erkennt aus dem Differenzenschema, daß der Fehler bei  $x = 45$  liegt. Der korrigierte Wert ist  $f(45) = \lg 45 = 1,65321$ .
30. Mit Benutzung der zweiten Formel (6), MfL Bd. 9, 4.3.1., erhält man den Wert  $y'(7,50) \approx \frac{1}{0,02} (0,2033 - 0,1984) = 0,245$ .
31. Mit Hilfe von (10), MfL Bd. 9, 4.3.1., berechnet man auf Grund des Differenzenschemas  $J_0'(1) \approx -0,44005$ ,  $J_0''(1) \approx -0,3253$ .
33.  $A_0 = \frac{b-a}{6}$ ,  $A_1 = 4 \cdot \frac{b-a}{6}$ ,  $A_2 = A_0$ .
34. Mit der in MfL Bd. 9, 4.3.2., benutzten Stützstellenindizierung sind die Gewichte für fünf Ordinaten  $A_0 = \frac{4}{15}$ ,  $A_{\pm 1} = \frac{32}{45}$ ,  $A_{\pm 2} = \frac{7}{45}$ ,  
für neun Ordinaten  $A_0 = -\frac{4540}{14175}$ ,  $A_{\pm 1} = \frac{10496}{14175}$ ,  $A_{\pm 2} = -\frac{928}{14175}$ ,  
 $A_{\pm 3} = \frac{5888}{14175}$ ,  $A_{\pm 4} = \frac{989}{14175}$ ,  
 $\ln 11 = 2,39789527$ .
36. Für  $h = 0,1$  wird der Verfahrensfehler kleiner als  $\varepsilon$  (vgl. MfL Bd. 9, 4.3.2.(36), (37)). Es ergibt sich  $\pi \approx 3,1415926$ .
37. Der Verfahrensfehler ist kleiner als  $15 \cdot 10^{-4}$ .

38.  $I \approx \frac{1}{n} \cdot 2,0045595$ ,

Verfahrensfehler:  $\left| RI_{\frac{1}{2}} \left( 0, \frac{\pi}{2n} \right) \right| < \frac{1}{n} \cdot 0,007$ ,

$I_{\text{exakt}} = \frac{2}{n}$ .

39. Vgl. MfL Bd. 9, 4.3.2.(23). Man erhält  $A_0 = -\frac{2}{3}$ ,  $A_1 = A_{-1} = \frac{4}{3}$ . Es genügt zu zeigen, daß  $f(x) = x^3$  exakt integriert wird.

41.

| e) | $x$  | $A$         | $F$         | $\frac{A-F}{A} \cdot 100$ |
|----|------|-------------|-------------|---------------------------|
|    | 30°  | 0.011 799 3 | 0.011 760 7 | 0.327                     |
|    | 60°  | 0.090 586 1 | 0.089 316 4 | 1.402                     |
|    | 90°  | 0.285 398 2 | 0.276 142 4 | 3.243                     |
|    | 120° | 0.619 184 8 | 0.577 350 3 | 6.756                     |
|    | 150° | 1.058 996 9 | 0.954 560 7 | 9.862                     |
|    | 180  | 1.570 796 3 | 1.333 333 3 | 15.117                    |

42. Nach MfL Bd. 9, 4.3.2.(34), folgt

$$h < \sqrt{\frac{12\varepsilon}{M_2(b-a)}}.$$

Eine Schranke für  $|f''|$  auf  $[a, b]$  ist  $M_2 = \max(1, b^2 - 1, a^2 - 1)$ .

44. a) Mit der Schrittgröße  $h = 0,125$  erhält man  $I = 0,68269$ ; b) man erhält den gleichen Wert.

45.  $\text{Si}(3) = 1,84865$ .

46. Der exakte Wert ist  $I = \frac{\pi}{2} = 1,5707963$ .

47. Der exakte Wert ist  $I = \frac{\pi}{2}$ .

## Approximationstheorie

$$7. \text{ a) } \alpha^* = \left( \ln \frac{x_0 + 1}{x_0} \right); \quad \text{ b) } \alpha^* = \left( \frac{1}{3} \left( \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{x_0 + 1} \right) \right).$$

9. Maclaurin-Entwicklung:

$$y_5(x) = 1,570796x - 0,645964x^3 + 0,079693x^5;$$

$$F_{\alpha^*}(x) = 1,215854 \cdot P_1(x) - 0,224892 \cdot P_3(x) + 0,009235 \cdot P_5(x) \\ = 1,570508x - 0,643036x^3 + 0,072726x^5;$$

$$Z(\alpha^*) = \left\| \sin \frac{\pi}{2} x - F_{\alpha^*}(x) \right\|^2 < 10^{-7}.$$

| $x$                    | 0 | 0,25    | 0,5     | 0,75    | 1       |
|------------------------|---|---------|---------|---------|---------|
| $\sin \frac{\pi}{2} x$ | 0 | 0,38268 | 0,70711 | 0,92388 | 1       |
| $y_5(x)$               | 0 | 0,38268 | 0,70714 | 0,92449 | 1,00452 |
| $F_{\alpha^*}(x)$      | 0 | 0,38265 | 0,70715 | 0,92386 | 1,00020 |

## 10. Erste Gleichrichterkurve:

$$b_j^* = 0 \quad (j = 1, 2, \dots),$$

$$a_{4j}^* = \frac{(-1)^j \sqrt{2}}{\pi[1 - (4j)^2]} \quad (j = 0, 1, 2, \dots),$$

$$a_{4j+1}^* = \frac{(-1)^j}{2\pi(2j+1)} \quad (j = 1, 2, \dots), \quad a_1^* = \frac{2 + \pi}{4\pi},$$

$$a_{4j+2}^* = -\frac{(-1)^j \sqrt{2} 2(2j+1)}{\pi[1 - 4(2j+1)^2]} \quad (j = 0, 1, 2, \dots),$$

$$a_{4j+3}^* = \frac{(-1)^j}{2\pi(2j+1)} \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

Zweite Gleichrichterkurve:

$$b_j^* = 0 \quad (j = 1, 2, \dots),$$

$$a_{2j}^* = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^j}{1 - 4j^2} \quad (j = 0, 1, 2, \dots),$$

$$a_{2j+1}^* = 0 \quad (j = 1, 2, \dots), \quad a_1^* = \frac{1}{2}.$$

$$11. \text{ a) } a_0^* = \frac{\pi - 2}{\pi},$$

$$a_j^* = \begin{cases} 0, & \text{falls } j \text{ ungerade,} \\ \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{j^2 - 1}, & \text{falls } j \text{ gerade } (j \neq 0), \end{cases}$$

$$b_j^* = \begin{cases} \frac{2}{\pi \cdot j}, & \text{falls } j \text{ ungerade,} \\ 0, & \text{falls } j \text{ gerade.} \end{cases}$$

$$\text{b) } a_0^* = \frac{1}{\pi},$$

$$a_j^* = \begin{cases} 0, & \text{falls } j \text{ ungerade,} \\ \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{j^2 - 1}, & \text{falls } j \text{ gerade } (j \neq 0), \end{cases}$$

$$b_j^* = 0 \quad \text{für } j = 1, 2, \dots$$

$$\text{c) } a_0^* = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{\pi},$$

$$a_j^* = \begin{cases} 0, & \text{falls } j \text{ ungerade,} \\ \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{j^2} \cdot \frac{1}{j^2 - 1}, & \text{falls } j \text{ gerade } (j \neq 0), \end{cases}$$

$$b_j^* = \begin{cases} \frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{2} & \text{für } j = 1, \\ \frac{4}{\pi^2 j^3}, & \text{falls } j \text{ ungerade } (j \neq 1), \\ 0, & \text{falls } j \text{ gerade.} \end{cases}$$

12. a)  $F_{a^*} = \varphi_1 + \varphi_2$ ; b)  $F_{a^*} = 2\varphi_1$ ; c)  $\psi_1 = \varphi_1, \psi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ; d)  $F_{a^*} = 2\psi_1 + \psi_2$ .

13. a)  $F_{a^*}(x) = \frac{21}{64}\pi - \frac{15}{64}\pi x^2$ ; b)  $F_{a^*} = \frac{\pi}{4}$ ; c)  $F_{a^*}(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{32} \cdot \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$ .

18. a)  $P^*$  weicht unter allen Polynomen zweiten Grades mit dem Leitkoeffizienten  $a_2^*$  und dem absoluten Glied  $-1$  am wenigsten von Null ab.

b) Neben  $F_{a^*}$  ist z. B. auch  $F_0 = 0$  Minimallösung. Für  $a_2 = 0$  leisten noch alle Funktionen  $y = a_1x$  mit  $-2 \leq a_1 \leq 0$  Bestapproximation.

Alle  $F_{a^*}$  mit  $0 < a_2 \leq -a_1 \leq 2$  sind Minimallösungen.

Für  $a_2 < 0$  ist der zulässige Parameterbereich für Minimallösungen durch die Ungleichungen

$$-1 \leq a_2 + a_1 + 1 \leq 1, \quad \frac{a_1 + 2}{-2a_2} < 1, \quad -1 \leq P \begin{pmatrix} a_1 + 2 \\ -2a_2 \end{pmatrix} \leq 1$$

bestimmt.

Für die unter a) bestimmte Minimallösung  $F_{a^*}$  markiert  $a^* = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$  einen Eckpunkt des Zulässigkeitsbereiches.

c) Die Funktionen  $\varphi_1(x) = x$  und  $\varphi_2(x) = x^2$  bilden auf  $[0, 1]$  kein Čebyšev-System.

19. Minimallösungen sind alle Polynome  $F_{a^*}(x) = b \left( x^2 - \frac{1}{4} \right)$  mit  $-\frac{4}{3} \leq b \leq \frac{4}{3}$ .

20. a)  $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + R_5(x), |R_5(x)| < 0,0038$ ;

Umordnung des Polynoms

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5$$

nach Čebyšev-Polynomen:

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x,$$

$$f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + \frac{1}{16 \cdot 120} T_5(x),$$

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 1 - \frac{5}{16 \cdot 120} = \frac{383}{384}, \quad b_2 = \frac{1}{2}, \quad b_3 = \frac{17}{96}, \quad b_4 = \frac{1}{24};$$

$$\frac{|T_5(x)|}{1920} \leq \frac{1}{1920} < 5,21 \cdot 10^{-4}.$$

Abermalige Reduktion mit  $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$  führt auf

$$\tilde{f}(x) = \frac{382}{384} + \frac{383}{384}x + \frac{208}{384}x^2 + \frac{68}{384}x^3 + \frac{1}{8 \cdot 24} T_4(x), \quad \frac{|T_4(x)|}{192} < 5,21 \cdot 10^{-3}.$$

Benutzt man zur Approximation von  $e^x$  das Polynom

$$P(x) = \frac{1}{384} (382 + 383x + 208x^2 + 68x^3),$$

so gilt auf  $[[-1, 1]]$  für den Fehler  $R$

$$|R| < 0,0038 + 5,21(10^{-4} + 10^{-3}) < 0,01.$$

b)  $d(x) = e^x - P(x)$  ist auf  $[[-1, 1]]$  zu untersuchen.  $P$  ist nicht Minimallösung im Sinne von Čebyšev, da das Kriterium des Alternantensatzes verletzt ist.

21. Nach Substitution von  $t = x^2$  wird die Funktion

$$f(t) = \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{t}{3!} + \frac{t^3}{5!} - \frac{t^5}{7!} + \frac{t^7}{9!} + R_5 \text{ für } 0 \leq t \leq 1$$

betrachtet. Um die der zulässigen Toleranz entsprechende Graderniedrigung bezüglich des Intervalls  $0 \leq t \leq 1$  durchführen zu können, sind an Stelle der  $T_j$  die transformierten Čebyšev-Polynome  $\hat{T}_j(t) = T_j(2t - 1)$  zu betrachten.

## Lösung von Gleichungen

9. Ist  $b - 4a \begin{cases} \neq 0 \\ = 0 \end{cases}$ , so ist das System  $\begin{cases} \text{für beliebige Werte } c, d \text{ lösbar} \\ \text{nur lösbar, wenn } d - 2c = 0 \text{ ist} \end{cases}$ .
10. a)  $x_1 = x_2 = 1$ ,  $x_3 = 2$ ; b)  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -1$ ,  $x_3 = 5$ .
12.  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3$ ,  $x_3 = -1$ .
14. Zu lösen ist das lineare Gleichungssystem
- $$a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_6x_i^6 - y_i = (-1)^i d, \quad i = 0(1)7; \quad x_i, y_i \text{ gemäß Tabelle.}$$
- $$a_0 = 6,56706 \cdot 10^4, \quad a_1 = -3,08186 \cdot 10^4, \quad a_2 = 5,36565 \cdot 10^3,$$
- $$a_3 = -4,28849 \cdot 10^2, \quad a_4 = 1,78458 \cdot 10^1, \quad a_5 = -3,67035 \cdot 10^{-1},$$
- $$a_6 = 2,95826 \cdot 10^{-3}, \quad d = 5,96400 \cdot 10^2.$$
15.  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = -2$ .
17. Die bei  $A$  bzw.  $B$  auftretende Druckkraft hat einen Betrag von 7312 N bzw. von 8974 N, die bei  $C$  auftretende Zugkraft einen Betrag von 3656 N.
18.  $x_1 = 0,1938724$ ,  $x_2 = 0,4540627$ ,  $x_3 = 0,7043213$ ,  $x_4 = 0,9161187$ .
19.  $x = 0,93508$ ,  $y = 0,99802$ .
20.  $x_1 = 1,0173287$ ,  $x_2 = 1,0584940$ .
22.  $x = 1,01943$ ,  $y = 1,03065$ .
24. Nach der Regel von NEWTON ist  $L = 2$  obere Schranke.
25.  $N = 3 - g$ ; tatsächlich liegen genau drei Nullstellen im Intervall  $\llbracket 0, 1 \rrbracket$ .
27. Komplexe Nullstellen:  $x_{1/2} = 1 \pm 2i$ .

## Lineare Optimierung

8. Optimale Lösung: a)  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ; b)  $x = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \end{pmatrix}$ .
9. a) Optimale Lösung:  $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
10. b) Das Problem ist ausgeartet, da  $x^{(2)} = (0, 4, 0, 2, 0)^T$  weniger als  $m = 3$  von Null verschiedene Koordinaten hat.

14. a) Optimale Lösungen sind alle  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  mit  $x_2 = -x_1 + 11$  und  $3 \leq x_1 \leq \frac{39}{5}$ .
15. Das Problem besitzt keine Lösung.
17. Von jedem Erzeugnis sind 30 Längeneinheiten pro Zeiteinheit herzustellen. Der Gewinn beträgt 750 Geldeinheiten. Die pro Zeiteinheit verarbeiteten Materialmengen sind 180, 90, 180 Einheiten der Materialarten 1, 2, 3.
18. Erste, zweite, dritte Technologie 68, 84, 16 Einheiten. Es gibt weitere optimale Lösungen.
20. Vom Bahnhof  $B_1$  erhalten  $E_1, E_2, E_3$  12 bzw. 14 bzw. 10 Waggons, und vom Bahnhof  $B_2$  erhält  $E_3$  14 Waggons. Auf dem Bahnhof  $B_2$  verbleiben 7 Waggons.
21. a)  $x_1 = 54,55, x_2 = 81,82$  (Anzahlen der Mengeneinheiten).  
 b) Die weitere Restriktion  $12,6x_1 + 16,8x_2 \leq 2500$  bewirkt keine Änderung der Lösung.

## VII. Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik

### Zufällige Ereignisse

1.  $B = A_1 \cup [(A_2 \cup A_3) \cap A_4], \quad \bar{B} = \bar{A}_1 \cap [(\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup \bar{A}_4].$
2.  $D = A \cap \left( \bigcup_{k=1}^4 B_k \right) \cap \left( \bigcup_{j=1}^2 C_j \right), \quad \bar{D} = \bar{A} \cup \left( \bigcap_{k=1}^4 \bar{B}_k \right) \cup \left( \bigcap_{j=1}^2 \bar{C}_j \right)$
3. a) Das Teil wiegt mindestens 50 g.  
 b) Das Teil wiegt weniger als 30 g oder mindestens 40 g.  
 c) Das Teil wiegt mindestens 90 g, aber weniger als 100 g.
6. Es gilt  $A \cap (\bar{A} \cap B) = \emptyset, A \cap (\bar{A} \cup B) = \emptyset, (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cup B) = \emptyset$  und  
 $A \cup (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cup B) = \Omega.$
7.  $A = B \cap C.$
8.  $A$  und  $C$  sind atomar,  $B$  ist zusammengesetzt.

### Wahrscheinlichkeit

1. a) 0,3; b) 0.
2.  $P(A) = \frac{4}{49}, \quad P(B) = \frac{20}{49}.$
3. a)  $\binom{32}{10} \approx 4,32 \cdot 10^7$  ( $> 40$  Millionen); b)  $\frac{1}{\binom{32}{10}} \approx 0,00000002$ ; c)  $\frac{11}{32} \approx 0,34$ ;
- d)  $1 - \frac{\binom{4}{0} \cdot \binom{28}{2}}{\binom{32}{2}} \approx 0,238.$



$$4. p = \frac{8!}{\binom{64}{8}} \approx 9,1 \cdot 10^{-6}.$$

$$5. P(A) = \frac{1}{216}, \quad P(B) = \frac{1}{36}, \quad P(C) = \frac{5}{9}.$$

$$6. P(A) = \frac{w(w-1)}{(w+s)(w+s-1)}, \quad P(B) = \frac{w(w-1) + s(s-1)}{(w+s)(w+s-1)},$$

$$P(C) = \frac{2sw}{(w+s)(w+s-1)}.$$

$P(B) \cong P(C)$  gilt genau dann, wenn  $(w-s)^2 \cong w+s$  gilt.

$$7. \text{ a) } \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)(2n-1)}; \quad \text{ b) } \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)(2n-1)}.$$

$$8. \text{ a) } p = \frac{2}{(N-1)!}; \quad \text{ b) } p = \frac{2(N-1)}{N!}.$$

$$9. P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(C) = \frac{2}{3}, \quad P(A \cup B) = \frac{2}{3}, \quad P(A \cap B) = 0,$$

$$P(B \cup C) = \frac{5}{6}, \quad P(B \cap C) = \frac{1}{3}, \quad P(\bar{B} \cup C) = \frac{5}{6}, \quad P(C \setminus B) = \frac{1}{3},$$

$$P(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) = \frac{1}{6}, \quad P(A \cup \bar{B} \cup C) = \frac{5}{6}, \quad P(B \triangle C) = \frac{1}{2}.$$

$$10. \text{ a) } \frac{7}{12}; \quad \text{ b) } \frac{29}{42}; \quad \text{ c) } \frac{5}{12}.$$

$$11. \text{ b) } P(A \triangle B) = 2r - p - q, \quad P(A \cap \bar{B}) = r - q, \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - r.$$

$$13. \frac{(a-2r-d)(b-2r-d)}{ab}.$$

$$14. \text{ a) } \left. \begin{array}{l} P(X < x, Y < y) = x \cdot y, \\ P(X < x) = P(X < x, Y < 1) = x \cdot 1 = x, \\ P(Y < y) = P(X < 1, Y < y) = 1 \cdot y = y \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Behauptung;}$$

$$\text{ b) } \alpha) P(|X - Y| < z) = 1 - (1 - z)^2 = 2z - z^2,$$

$$\beta) P(X \cdot Y < z) = z + \int_z^1 \frac{z}{x} dx = z - z \cdot \ln z,$$

$$\gamma) P(\min\{X, Y\} < z) = 1 - (1 - z)^2 = 2z - z^2,$$

$$\delta) P(\max\{X, Y\} < z) = z^2,$$

$$\varepsilon) P\left(\frac{1}{2}(X + Y) < z\right) = \begin{cases} 2z^2 & \text{für } 0 < z < \frac{1}{2}, \\ 1 - 2(1 - z)^2 = 4z - 1 - 2z^2 & \text{für } \frac{1}{2} \leq z < 1 \end{cases}$$

(Abb. A.5a);

$$\text{ c) } P(\text{Wurzeln reell}) = P\left(Y \leq \frac{X^2}{4}\right) = \int_0^1 \frac{x^2}{4} dx = \frac{1}{12} \quad (\text{Abb. A.5b}).$$

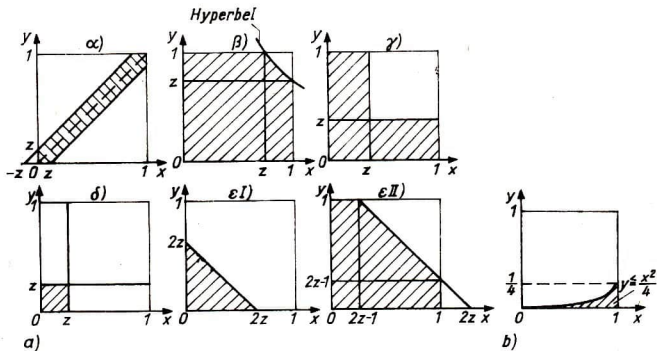


Abb. A.5

### Bedingte Wahrscheinlichkeit

- a) 0,55; b) 0,15; c) 0,40; d) 0,27; e) 0,012; d) 0,01237.
- a) 0,612; b) 0,997.
- $1 - (1 - 0,014)^{50} \approx 0,5$ .
- a) 0,56; b) 0,96; c) 0,38.
- $1 - (1 - 0,6)(1 - 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,9)(1 - 0,5) = 0,8504 \approx 85\%$ .
- $p_1 \cdot [1 - (1 - p_2 p_0)^2]$ .
- $P(A) = 1 - [1 - (1 - p_1) p_2]^2$ ,  $P(B) = p_1^2$ ,  $P(C) = 1 - (1 - p_1)^2$ ,  
 $P(D) = 1 - (1 - p_1)^2 (1 - p_2)^2$ ,  $P(E) = 2p_1(1 - p_1)$ .
- a) Nein; b)  $0,56 \leq P(A \cap B) \leq 0,75$ ; c) 0,6075.
- $np(1 - p)^{n-1}(1 - p_0) + (1 - p)^n p_0$ .
- $p^m \left( 1 + \binom{m}{1} q + \binom{m+1}{2} q^2 + \dots + \binom{m+n-2}{n-1} q^{n-1} \right)$ .
- a)  $\frac{M-1}{N-1}$ ; b)  $\frac{M}{N-1}$ ; c)  $\frac{M}{N}$ .
- $p_N = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{N-1} \frac{1}{N!} \left( \rightarrow 1 - \frac{1}{e} \text{ für } N \rightarrow \infty \right)$ .
- a)  $P(\text{„gut“}) = 0,404$ ,  $P(\text{„mittelmäßig“}) = 0,500$ ,  $P(\text{„schlecht“}) = 0,096$ ,  
Urteil: mittelmäßig;  
b)  $P(\text{„gut“}) = 0,52$ ,  $P(\text{„mittelmäßig“}) = 0,44$ ,  $P(\text{„schlecht“}) = 0,04$ ,  
Urteil: gut.
- Gruppe 2.

## Diskrete Zufallsgrößen

$$3. EX = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,2 = 1,8,$$

$$EY = 1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,2 = 1,7,$$

$$EZ = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,1 = 2,0.$$

Der unter b) aufgeführte Wägsatz ist also optimal.

$$4. a) EX = 5,08\bar{3}; \quad b) \alpha) 0,0850, \quad \beta) 0,078\bar{3}, \quad \gamma) 0,078056.$$

5. Vgl. MfL Bd. 11, Tafel 12.1 zur Binomialverteilung

$$a) b(3; 4, 0,6) + b(4; 4, 0,6) = 0,476;$$

$$b) b(4; 6, 0,6) + b(5; 6, 0,6) + b(6; 6, 0,6) = 0,545;$$

$$c) 0,476 \cdot 0,545 = 0,26; \quad d) b(6; 10, 0,6) + \dots + b(10; 10, 0,6) = 0,63.$$

$$6. P(A) = 2 \cdot \frac{\binom{5}{5} \binom{13}{4}}{\binom{18}{9}} = \frac{1}{34}, \quad P(B) = \frac{\binom{5}{2} \binom{13}{7}}{\binom{18}{9}} + \frac{\binom{5}{3} \binom{13}{6}}{\binom{18}{9}} = \frac{12}{17}.$$

8. Vgl. MfL Bd. 11, Tafel 12.2 zur Poissonverteilung

$$a) p(0; 3) + p(1; 3) + p(2; 3) + p(3; 3) = 0,647;$$

$$b) 1 - p(0; 3) - p(1; 3) = 0,801; \quad c) 1;$$

$$d) p(2; 3) + p(3; 3) = 0,448; \quad e) p(0; 3) + p(1; 3) = 0,199.$$

$$9. P(X_{15} \geq 2) = 1 - p(0; 1,5) - p(1; 1,5) = 0,4422 \approx 44\% \\ (\text{vgl. MfL Bd. 11, Tafel 12.1 zur Binomialverteilung}).$$

$$10. a) P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p = 0,977^{k-1} \cdot 0,023 \quad (k = 1, 2, \dots);$$

$$b) EX = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} p = -p \frac{d}{dp} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k \right) = \frac{1}{p} = 43,48;$$

$$c) P(X > N) = (1-p)^N = 0,977^N \rightarrow 0 \quad \text{für } N \rightarrow \infty;$$

$$d) \alpha) n_0 = 99, \quad \beta) n_0 = 198, \quad \gamma) n_0 = 297.$$

11.  $X$  ist binomialverteilt mit  $n = 600$  und  $p = 0,05$ , näherungsweise poissonverteilt mit  $\lambda = 600 \cdot 0,005 = 3$ ,

$$G = 600 \cdot 10 - 1500 \cdot X.$$

$$a) EG = 6000 - 1500 \cdot EX = 6000 - 1500 \cdot 3 = 1500;$$

$$b) P(G < 0) = P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \sum_{k=0}^4 P(X = k) \approx 0,18;$$

$$c) P(G \geq 2000) = P\left(X \leq \frac{8}{3}\right) = P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^2 P(X = k) \approx 0,42$$

(vgl. MfL Bd. 11, Tafel 12.2 zur Poissonverteilung).

## Stetige Zufallsgrößen

$$2. a) c = 12; \quad b) x_{\max} = \frac{2}{3}; \quad c) EX = 0,6, \quad D^2X = 0,04.$$

$$3. a) \alpha = 0,005 \text{ ((Tage)}^{-1}); \quad b) \frac{1}{\alpha} \ln 20 \approx 605 \text{ (Tage)}.$$

4. a)  $f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y \leq 0, \\ 1,5 \cdot e^{-1,5y} & \text{für } y > 0; \end{cases}$  Exponentialverteilung mit  $\alpha = 1,5$ .

b) Die zufällige Anzahl  $Z$  der fehlerlosen Stücke unter sechs Stücken ist binomialverteilt mit den Parametern  $n = 6$  und  $p = e^{-1,5}$ . Damit folgt  $P(Z = 2) = b(2; 6, e^{-1,5}) \approx 0,27$ .

5. a)  $EX = \frac{p}{b}$ ,  $D^2X = \frac{p}{b^2}$ ,  $v = \frac{1}{\sqrt{p}}$ ,  $\gamma = \frac{2}{\sqrt{p}}$ ,  $\eta = \frac{6}{p}$ .

b) Eine Gammaverteilung mit  $b = \frac{1}{2}$  und  $p = \frac{m}{2}$  ( $m$  natürliche Zahl) ist eine  $\chi^2$ -Verteilung mit  $m$  Freiheitsgraden.

6. a)  $P(1,8 < X < 2,1) = \Phi\left(\frac{2,1 - 1,95}{0,05}\right) - \Phi\left(\frac{1,8 - 1,95}{0,05}\right) = 0,9973$ ;

b)  $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \Phi\left(\frac{2 - 1,95}{0,05}\right) = 0,1587$ ;

man muß also etwa mit 16 Umschlägen in einem Päckchen von 100 Stück rechnen, die eine Masse vom mindestens 2 g haben.

7.  $P(X \leq 3,5) = \Phi\left(\frac{3,5 - 3,7}{0,3}\right) = \Phi\left(\frac{-2}{3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2}{3}\right) = 0,252 \approx 25\%$ .

### Zufällige Vektoren

1. a)  $P(X = -1) = \frac{3}{8}$ ,  $P(X = 0) = \frac{1}{4}$ ,  $P(X = 1) = \frac{3}{8}$ ,

$P(Y = -1) = \frac{3}{8}$ ,  $P(Y = 0) = \frac{1}{4}$ ,  $P(Y = 1) = \frac{3}{8}$ ;

b) ja; c)  $EX = EY = 0$ ,  $EXY = 0$ ,  $D^2X = D^2Y = 0$ ,  $\rho(X, Y) = 0$ ;

d) nein, denn z. B. gilt  $P(X = 0, Y = 0) \neq P(X = 0) \cdot P(Y = 0)$ ;

e)  $P(X = Y) = \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ .

2. a)

| $X \setminus Y \rightarrow$ | 1    | 2    | 3    |
|-----------------------------|------|------|------|
| 1                           | 0,35 | 0,14 | 0,01 |
| 2                           | 0,15 | 0,06 | 0,09 |
| 3                           | 0,20 | 0    | 0    |

c) nein;

d)

$Z:$

| 2    | 3    | 4    | 5    |
|------|------|------|------|
| 0,35 | 0,29 | 0,27 | 0,09 |

3.  $q := 1 - p$ ,  $q' := 1 - p'$ .

a)  $P(N = n, K = k) = \binom{n}{k} p^k q'^k p'^{n-k}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ;  $n = 0, 1, \dots$ );

b)  $P(N = n) = \sum_{k=0}^n P(N = n, K = k) = p^k q(1 - p'q)^n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ),

$P(K = k) = \sum_{n=k}^{\infty} P(N = n, K = k) = p^k q^k$  ( $k = 0, 1, \dots$ );

$$c) E\left(\frac{K}{N+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{k}{n+1} P(N=n, K=k) = \frac{q'q}{(1-p'q)} - \frac{q^2 p' q'}{(1-p'q)^2} \ln(p'q)$$

ist ein Maß für den Ausschubanteil in der geprüften Produktion;

$$d) EK = \frac{q'}{p'}, \quad EN = \frac{1-p'q}{p'q}, \quad E(K \cdot N) = q'q \frac{2-p'q}{(p'q)^2},$$

$$\text{cov}(N, K) = E(K \cdot N) - (EK)(EN) = \frac{q'}{p'^2 q};$$

$$e) \frac{EK}{E(N+1)} = \frac{EK}{EN+1} = qq' \neq E\left(\frac{K}{N+1}\right).$$

$$4. a) F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ \sqrt{x} & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{für } x > 1; \end{cases}$$

$$b) f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \text{ und für } x \geq 1, \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{für } 0 < x < 1; \end{cases}$$

$$c) \text{nein, denn z. B. gilt } F_{(X,Y)}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = F_X\left(\frac{1}{2}\right) \cdot F_Y\left(\frac{1}{4}\right);$$

$$d) \text{ja, denn es ist } EXY = EX^2 = 0, \quad EX = 0, \quad D^2X > 0, \quad D^2Y > 0.$$

$$6. a) F_Y(x) = 1 - [1 - F_1(x)] \cdot [1 - F_2(x)]; \quad b) F_Z(x) = F_1(x) \cdot F_2(x).$$

$$7. a) f_V(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{x^2}{\sigma^3} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0; \end{cases} \quad b) EV = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{\pi}} \sigma = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}};$$

$$c) D^2V = \left(3 - \frac{8}{\pi}\right) \sigma^2 = 0,4535 \frac{kT}{m}; \quad d) \bar{w} = E\left(\frac{m}{2} V^2\right) = \frac{3}{2} m \sigma^2 = \frac{3}{2} kT.$$

$$8. \alpha \neq \beta: \quad f_Z(z) = \begin{cases} \frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta} (e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}) & \text{für } z > 0, \\ 0 & \text{für } z \leq 0; \end{cases}$$

$$\alpha = \beta: \quad f_Z(z) = \begin{cases} \alpha^2 z e^{-\alpha z} & \text{für } z > 0, \\ 0 & \text{für } z \leq 0. \end{cases}$$

$$9. f_Z(z) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+z^2} \quad (-\infty < z < \infty), \quad \text{Cauchy-Verteilung.}$$

$$10. a) \llbracket 280p - 15,32p, 280p + 15,32p \rrbracket = \llbracket 264,68p, 295,32p \rrbracket;$$

$$b) \llbracket 14750p - 115,2p, 14750p + 115,2p \rrbracket = \llbracket 14634,8p, 14865,2p \rrbracket.$$

## Grenzwertsätze

$$1. a) c < 0; \quad b) c \text{ beliebig}; \quad c) c < \frac{1}{2}.$$

$$3. a) F_L(x) = P(L < x) = P(L^2 < x^2) = P(X_1^2 + \dots + X_n^2 < x^2) = F_{x_n^2}(x^2);$$

- b)  $F_L(x) = P\left(\frac{X_1^2 + \dots + X_n^2 - n}{\sqrt{2n}} < \frac{x^2 - n}{\sqrt{2n}}\right) \approx \Phi\left(\frac{x^2 - n}{\sqrt{2n}}\right);$   
 c)  $p = 0,05$  mit a),  $p \approx 0,04$  mit b).  
 5. a)  $P(T_{950} = 10 \cdot (950 + k)) = \binom{950}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{950-k} = \binom{950}{k} \frac{1}{2^{950}},$   
 $ET_{950} = 14250, D^2T_{950} = 23750;$   
 b)  $P(T_{950} \leq 4 \cdot 60 \cdot 60) \approx \Phi\left(\frac{4 \cdot 60 \cdot 60 - 14250}{\sqrt{23750}}\right) = \Phi(0,973) = 0,83;$   
 c)  $n \geq 770.$   
 6.  $p \approx \Phi\left(\frac{28,00 - 27,45}{\sqrt{0,1446}}\right) - \Phi\left(\frac{27,00 - 27,45}{\sqrt{0,1446}}\right) = 0,807 \approx 81\%.$

### Beschreibende Statistik

1. a)  $\bar{x} = 21, s^2 = 26, s = 5,1.$   
 2. b)  $\bar{x} = 13,45, s^2 = 6,14, s = 2,48, \bar{x} = 14, \hat{x} = 14, \delta = 12, v = 0,184, \bar{x}_K = 13,4,$   
 $s_K^2 = 6,19, s_K = 2,49, \bar{x}_K = 13,5, \hat{x}_K = 13,5, \delta_K = 12, v_K = 0,186.$   
 3.  $\bar{x} = 20,592, \bar{y} = 0,4156, s_x^2 = 50,383, s_y^2 = 0,04057, s_{xy} = -1,408, r = -0,985.$   
 4.  $r = 0,992979.$

### Grundbegriffe der mathematischen Statistik

1. a)  $n = 10;$  b) für  $p = 5\%$  ergibt sich eine Annahmewahrscheinlichkeit von  $60\%$ ,  
 für  $p = 10\%$  eine von  $35\%$ .  
 2. a)  $L(0,02) \approx 74\%, L(0,05) \approx 29\%.$

b) 

|        |   |      |      |      |      |      |      |      |      |
|--------|---|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $p$    | 0 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,08 | 0,1  |
| $L(p)$ | 1 | 0,91 | 0,74 | 0,56 | 0,41 | 0,29 | 0,20 | 0,09 | 0,04 |

 (Abb. A.6).

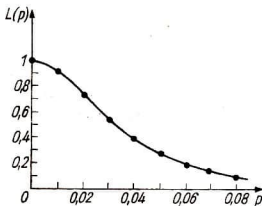


Abb. A.6

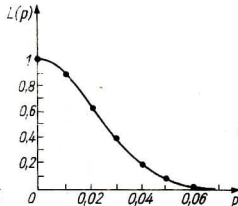


Abb. A.7

3. a)  $n = 108, c = 2$

|              |       |       |       |       |       |       |        |             |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------------|
| b) $\hat{p}$ | 0,01  | 0,02  | 0,03  | 0,04  | 0,05  | 0,06  | 0,10   | (Abb. A.7). |
| $L(\hat{p})$ | 0,904 | 0,633 | 0,372 | 0,195 | 0,095 | 0,044 | 0,0014 |             |

## Einführung in die Schätztheorie

3.  $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n \cdot \ln 2 = \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n) \cdot \ln 2.$

4.  $\hat{p} = 1 - \sqrt[m]{\frac{k}{n}},$  speziell:  $\hat{p} = 0,1487.$

5.  $\hat{p}_n = \frac{n}{n + (X_1 + \dots + X_n)} = \frac{1}{n + \bar{X}_n}.$

6. a)  $I(X_1, \dots, X_n) = \left[ \hat{\theta}_n + \frac{1}{n} \ln \alpha_2, \hat{\theta}_n + \frac{1}{n} \ln (1 - \alpha_1) \right];$

b)  $I(X_1, \dots, X_n) = \left[ \hat{\theta}_n + \frac{1}{n} \ln \alpha, \hat{\theta}_n \right].$

$$K(\theta, \theta') = \begin{cases} 0 & \text{für } \theta' \leq \theta + \frac{1}{n} \ln \alpha, \\ 1 - \alpha e^{-n(\theta' - \theta)} & \text{für } \theta + \frac{1}{n} \ln \alpha \leq \theta' \leq \theta, \\ (1 - \alpha) e^{-n(\theta' - \theta)} & \text{für } \theta' \geq \theta \end{cases} \quad (\text{vgl. Abb. A.8}).$$

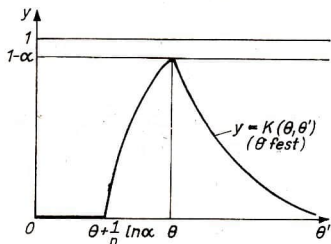


Abb. A.8

Es gilt  $K(\theta, \theta') \leq K(\theta, \theta) = 1 - \alpha$  für alle  $\theta$ ; die Konfidenzschätzung ist also unverfälscht.

c) Länge:  $-\frac{1}{n} \ln \alpha,$  speziell:  $0,2996; n = 15.$

7. a)  $I(X_1, \dots, X_n) = \left[ \hat{\gamma}_n, \frac{1}{\hat{\gamma}_n} \hat{\gamma}_n \right]$  mit  $\hat{\gamma}_n = \max \{Z_1, \dots, Z_n\}$

$$b) K(\gamma, \gamma') = \begin{cases} (1 - \alpha) \left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^{2n} & \text{für } \gamma' \leq \gamma, \\ 1 - \alpha \left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^{2n} & \text{für } \gamma \leq \gamma' \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \gamma, \\ 0 & \text{für } \gamma' \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \gamma \end{cases} \quad (\text{vgl. Abb. A.9}).$$

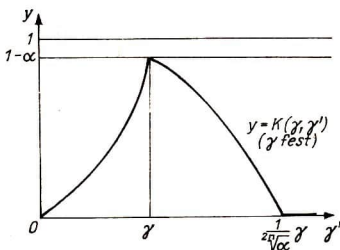


Abb. A.9

Es gilt  $K(\gamma, \gamma') \leq K(\gamma, \gamma) = 1 - \alpha$  für alle  $\gamma$ ; die Konfidenzschätzung ist also unverfälscht.

$$8. I(X_1, \dots, X_n) = \left[ \left[ \frac{\chi_{2n; \alpha_2}^2}{2n\bar{X}_n}, \frac{\chi_{2n; 1-\alpha_1}^2}{2n\bar{X}_n} \right] \right] \text{ mit } \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha.$$

$$9. \llbracket -76,68 \mu\text{m}, -45,32 \mu\text{m} \rrbracket.$$

$$10. a) \hat{\mu}_n = \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n) \text{ liefert den Schätzwert } 16,05;$$

$$b) I(X_1, \dots, X_n) = \left[ \left[ \bar{X}_n - z_{1-\alpha} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \infty \right] \right] \text{ liefert für } 1 - \alpha = 0,99 \text{ das Schätzintervall } \llbracket 15,55, \infty \llbracket.$$

$$11. \llbracket 0,07695, 0,28382 \rrbracket.$$

## Einführung in die Testtheorie

$$1. \text{ Wegen } |t| = \left| -\frac{10}{3} \right| = \frac{10}{3} > 1,96 = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{ wird } H \text{ abgelehnt.}$$

$$2. \text{ Wegen } |t| = |-1,961| = 1,961 > 1,645 = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{ wird } H \text{ abgelehnt.}$$

$$3. \text{ Wegen } \chi_{24; 0,05}^2 = 13,85 < 30,736 = t < 36,42 = \chi_{24; 0,95}^2 \text{ ist gegen } H \text{ nichts einzuwenden.}$$

$$4. \bar{x}_I = 2,9, \quad \bar{x}_{II} = 2,4, \quad s_I^2 = 1,04, \quad s_{II}^2 = 0,43.$$



- a) Wegen  $F_{9,9;0,05} = 0,31 < t = 2,42 < F_{9,9;0,95} = 3,18$  ist gegen die Hypothese nichts einzuwenden.
- b) Wegen  $|t| = 1,30 < 2,101 = t_{18;0,975}$  ist gegen die Hypothese nichts einzuwenden.
5. a) Wegen  $|t| = |-2,15| = 2,15 > 1,96 = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  ist die Hypothese abzulehnen; der Würfel kann nicht als ideal angesehen werden.
- b) Wegen  $|t| = 1,26 < 1,96 = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  ist gegen die Hypothese nichts einzuwenden; der Würfel kann als ideal angesehen werden.
6. Wegen  $t = 94,2 > 15,09 = \chi_{5;0,99}^2$  ist die Hypothese abzulehnen; der Würfel kann nicht als ideal angesehen werden.
7. Wegen  $t = 5,125 < 16,92 = \chi_{9;0,95}^2$  ist gegen die Hypothese nichts einzuwenden.
8. Wegen  $t = 5,3 < 12,59 = \chi_{6;0,95}^2$  ist gegen die Hypothese nichts einzuwenden.
9. Wegen  $t = 27,45 < 36,42 = \chi_{23;0,95}^2$  ist gegen die Hypothese nichts einzuwenden.
10. b) Wegen  $t = 11,54 > 9,488 = \chi_{(5-1)(2-1);0,95}^2$  ist die Hypothese abzulehnen.

## VIII. Grundlagen der Mathematik

### Aussagenlogik

1. a ist kein Ausdruck, b und c sind Ausdrücke.

|      |   |   |    |    |
|------|---|---|----|----|
| 2. p | q | r | 1b | 1c |
| W    | W | W | W  | W  |
| W    | W | F | F  | F  |
| W    | F | W | W  | W  |
| W    | F | F | W  | W  |
| F    | W | W | W  | W  |
| F    | W | F | F  | W  |
| F    | F | W | W  | W  |
| F    | F | F | F  | W  |

4. a)  $q \rightarrow p$ ; b)  $p \wedge q$ .

### Semantische Grundbegriffe der Metamathematik

1. Zum Beispiel  $\wedge z((\wedge vR(v, y, z) \wedge \vee uS(x, u)) \rightarrow \vee tR(t, y, z))$ .
2.  $\wedge x \vee y \wedge z(S(x, y) \rightarrow R(z))$  oder  $\wedge z \wedge x \vee y(S(x, y) \rightarrow R(z))$ .

## Algorithmen

1.  $g_{\text{lex}}(\text{bade}) = 300$ ;  $g_{\text{prim}}(\text{bade}) = 126052500$ .
2.  $g_{\text{prim}}^{-1}(71500)$  existiert nicht;  $g_{\text{prim}}^{-1}(92400) = a_4 a_1 a_2 a_1 a_1$ ;  $g_{\text{prim}}^{-1}(5402250) = a_1 a_2 a_3 a_4$ .
4.  $g_{\text{lex}}^{-1}(71500) = \text{dbdadde}$ ;  $g_{\text{lex}}^{-1}(92400) = \text{edbceede}$ ;  $g_{\text{lex}}^{-1}(5402250) = \text{bcceocbdde}$ .

## Entscheidbarkeit und Aufzählbarkeit von Sprachen und Theorien

2. a und b nicht allgemeingültig, c allgemeingültig.