Studienbücherei

B. Renschuch

Elementare und praktische Idealtheorie

Mathematik für Lehrer
Band 16

Herausgegeben von:
W. Engel, S. Brehmer, M. Schneider, H. Wussing

Unter Mitarbeit von:
G. Asser, J. Böhm, J. Flachsmeyer, G. Geise, T. Glocke,
K. Härtig, G. Kasdorf, O. Krötenheerdt, H. Lugowski,
P. H. Müller, G. Porath

Studienbücherei

Elementare und praktische Idealtheorie

B. Renschuch

Mit 2 Abbildungen

VEB Deutscher Verlag
der Wissenschaften
Berlin 1976

Verlagslektoren: Dipl.-Math. E. Arndt, Dipl.-Math. K. Bratz
Umschlaggestaltung: R. Wendt

Printed in the German Democratic Republic
Lizenz-Nr. 206 · 435/14/76
Gesamtherstellung: VEB Druckhaus „Maxim Gorki", 74 Altenburg
LSV 1024
Bestellnummer: 570 415 9
DDR 19,80 M

Vorwort

„Wenn man mit einer Theorie nicht rechnen kann, dann taugt die ganze Theorie nichts.“
Hermann Ludwig Schmid

Das vorliegende Buch ist entstanden aus Arbeitsgemeinschaften, Seminaren und Vorlesungen, die ich an der Humboldt-Universität Berlin, der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg und der Pädagogischen Hochschule „Karl Liebknecht“ Potsdam gehalten habe, zuletzt vor Lehrerstudenten im Rahmen der wahlweise-obligatorischen Ausbildung im Direktstudium sowie der differenziert-obligatorischen Ausbildung im Fernstudium. Es soll auch weiterhin für diese beiden Veranstaltungsreihen Verwendung finden.

Im Rahmen dieser Ausbildungen dürfte die Vertiefung des Wissens auf einem Spezialgebiet Vorrang vor der Vermittlung von Überblickswissen haben, über dessen Effektivität mancher Zweifel angemeldet werden kann. Somit müssen grundsätzliche Begriffe und Gedankengänge als solche zum Ausdruck kommen, ohne daß die Möglichkeit der Verweisung auf Analogien besteht. Hierdurch und durch die Verwendung als Lehrmaterial im Fernstudium ist die Breite der Darstellung im vorliegenden Band motiviert. Lediglich in den letzten beiden Kapiteln wird hiervon etwas abgegangen; insbesondere sollen die dort häufigeren Literaturverweisungen Anregungen für das Hinüberwechseln der Studierenden zur Originalliteratur geben.

Dieses Buch knüpft konsequent an die schon erschienenen Bände der Reihe „Mathematik für Lehrer“ (MfL) an; dies bedeutet einmal eine Fortführung der dort verwendeten Zeichen und Bezeichnungen und ferner, daß keine anderen als die dort vermittelten Kenntnisse vorausgesetzt werden und auf die entsprechenden Stellen (vor allem im Band 3) laufend verwiesen wird. Die dadurch gegebenen Einschränkungen bei der Darstellung und Beweisführung werden besonders im zweiten und dritten Kapitel sichtbar, wo bei der Einführung des Dimensionsbegriffes der Begriff „Transzendenzgrad“ nicht zur Verfügung stand. Hier wird der fachkundige Leser möglicherweise ein Unbehagen empfinden. Fehlende Vorkenntnisse zwangen auch zum Verzicht auf eine Darstellung von Primäridealketten und der Kroneckerschen Eliminationstheorie; ersteres kommt im sechsten Kapitel bei Satz 25 zum Tragen, während die Existenz von Nullstellen für P-Ideale, die vom Einheitsideal verschieden sind, über die Existenz allgemeiner Nullstellen von Primidealen und die Lasker-Noetherschen Sätze nachgewiesen wird.

Die Stoffauswahl wurde außerdem durch das Grundanliegen bestimmt, eine Einführung in die Theorie der Polynomideale zu geben und dafür zugleich einige praktische Verfahren vorzulegen, welche zum Teil mit früheren Diplomanden entwickelt worden sind. Unter diesen möchte ich vor allem die Arbeit von Frau Dr. Renate Kummer (Halle) über Potenzproduktideale erwähnen, auf die im Text wiederholt Bezug genommen wird. Erst dadurch ist es möglich, die vielen Begriffe der Idealtheorie laufend durch Beispiele zu illustrieren, wobei ein Teil der Rechnungen jeweils dem Leser überlassen wird. Auf weitere Übungsaufgaben konnte daher im Text verzichtet werden; die am Schluß angegebenen Beispiele bieten dafür ein weiteres Betätigungsfeld, sollen aber auch den in der Forschung tätigen Kollegen ein gewisses Material liefern. Dasselbe gilt für die Formeltabellen im ersten Kapitel, die zum größten Teil von Herrn Prof. Dr. O.-H. Keller (Halle) stammen.

Die historische Entwicklung der Theorie der Polynomideale als Anwendung der abstrakten Idealtheorie brachte es wohl mit sich, daß in der bisherigen Literatur Analogien und Unterschiede zwischen linearen und nichtlinearen Gleichungssystemen nicht herausgearbeitet worden sind, welche hier neben der Entwicklung praktischer Verfahren im Vordergrund stehen. Dem letztgenannten Aspekt dient auch das im Anschluß an die Literatur gegebene „Verzeichnis der praktischen Methoden", welches neben der detaillierten Untergliederung dem Leser das Auffinden bestimmter Textstellen erleichtern soll.

Dadurch wird auch der nur fachinteressierte Leser in diesem Buch trotz oder wegen der Breite der Darstellung manches finden, was in anderen Lehrbüchern bisher unerwähnt blieb: so etwa die strenge Unterscheidung zwischen quasiprimären und primären Idealen, die vielfach verwischt und bei Hodge und Pedoe ganz aufgehoben wird, und die Notwendigkeit der Unterscheidung zwischen Minimalbasen und Basen minimaler Länge bei P-Idealen. Letzteres rechtfertigt es auch, Sätze für P- und H-Ideale gesondert zu formulieren und die Bezeichnungen strikt zu differenzieren; so werden grundsätzlich inhomogene Polynome mit kleinen, Formen mit großen Buchstaben gekennzeichnet.

Mit diesen Bemerkungen hoffe ich, die Konzeption des Buches ausreichend erläutert zu haben. Innerhalb des damit abgesteckten Rahmens wird es gewiß noch manche Möglichkeit zur Verbesserung geben. Für diesbezügliche Hinweise werde ich stets dankbar sein.

An dieser Stelle gilt mein Dank vor allem meinen Lehrern, den Herren Prof. Dr. O.-H. Keller (Halle) und Prof. Dr. W. Gröbner (Innsbruck), die mir nach dem Tode meines Doktorvaters in vielfacher Weise geholfen haben, so weit zu kommen,

daß ich es wagen konnte, Lehrerstudenten an diese schöne Theorie heranzuführen. Gleichzeitig möchte ich ein ehrendes Gedenken für meinen am 16. April 1956 im Alter von 48 Jahren verstorbenen Berliner Lehrer Prof. Dr. HERMANN LUDWIG SCHMID zum Ausdruck bringen (vgl. HASSE [1]), durch den ich die Idealtheorie im Sommersemester 1950 in einer vierstündigen Vorlesung über algebraische Geometrie an der Berliner Humboldt-Universität kennenlernte und welcher bereits im Anschluß daran die Zielrichtung meiner Arbeiten im wesentlichen bestimmte.

Mein Dank gebührt ferner dem Direktor der Sektion Mathematik/Physik der Pädagogischen Hochschule „Karl Liebknecht" Potsdam, Herrn Prof. Dr. G. JUNGHÄHNEL, und dem Leiter des Lehrkollektivs Algebra, Herrn Prof. Dr. H. LUGOWSKI, die mir die arbeitsmäßigen Bedingungen für das Schreiben verschafften.

Ohne einzelne Namensnennungen danke ich den ehemaligen Fernstudenten der Gruppen B 2 und B 3 Magdeburg für das kritische Durcharbeiten des Manuskriptes und zugleich allen ehemaligen Diplomanden und Staatsexamenskandidaten, die durch ihre Arbeiten zu manchem Beispiel und zu mancher Erkenntnis verholfen haben, sowie allen denjenigen, die mir ermöglichten, das Manuskript in relativ kurzer Zeit fertigzustellen.

Den Herausgebern der Reihe MfL, vor allem Herrn Prof. Dr. W. ENGEL (Rostock), Herrn Prof. Dr. S. BREHMER (Potsdam), Herrn Prof. Dr. H. WUSSING (Leipzig) sowie abermals Herrn Prof. Dr. LUGOWSKI und insbesondere Herrn Dr. D. NESSELMANN (Rostock) danke ich für viele wertvolle Hinweise.

Dem Lektorat Mathematik des VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, vor allem Fräulein Dipl.-Math. ERIKA ARNDT, danke ich für Geduld und Verständnis, dem Druckhaus „Maxim Gorki" in Altenburg für den übersichtlich angelegten und sorgfältig ausgeführten Satz.

Schließlich und endlich danke ich meiner lieben Frau ERIKA über das in der Madelungschen Widmung zum Ausdruck Gebrachte hinaus für das Auszeichnen und kritische Erstlesen des Manuskriptes, die Zeichnung der Abbildungen, die Anfertigung des Registers und für das Mitlesen der Korrekturen.

Potsdam, im November 1976

BODO RENSCHUCH

Inhalt

Überblick über die wichtigsten im vorliegenden Band eingeführten Zeichen

Die in Band 1 der Reihe „Mathematik für Lehrer" (MfL) eingeführten Zeichen werden beibehalten und nicht noch einmal aufgeführt; hier werden daher im folgenden nur neu bzw. in den Bänden 2 und 3 der Reihe MfL erstmals eingeführte Bezeichnungen notiert.

K: beliebiger Körper.

$\mathbf{K}$: algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0.

Die in MfL Bd. 1 eingeführten Symbole $a \sqcap b$ für den größten gemeinsamen Teiler (g.g.T.) von a und b sowie $a \sqcup b$ für das kleinste gemeinsame Vielfache (k.g.V.) werden hier auch für den g.g.T. bzw. das k.g.V. von Potenzprodukten (im zahlentheoretischen Sinne) verwendet.

Mit [1], [2], ... sind Verweisungen auf das Literaturverzeichnis am Schluß des Buches gekennzeichnet. Daneben verwenden wir $[a]$, $[b]$, ... im Beweis von Kap. 2, Satz 8, und in Kap. 3, Satz 9, als Restklassensymbole; diese Bezeichnung wurde bereits in MfL Bd. 2 und 3 verwendet. Die von EMMY NOETHER und ihren Schülern benutzten Bezeichnungen $[f]$ bzw. $[f]_i$ für Gradzahlen von Polynomen werden hier nicht übernommen.

$f(x)$ bzw. $f(x_1, \ldots, x_n)$, entsprechend $g, h, \ldots$: inhomogene Polynome.

$F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, entsprechend $G, H, \ldots, \Phi, \Psi, \ldots$: Formen, d. h. homogene Polynome.

Von dieser Bezeichnungsweise abweichend führen wir für H-Ideale

$$\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

die folgenden inhomogenen Anzahlfunktionen ein:

$V(t; \mathfrak{a})$: Volumfunktion.

$\Delta(t; n) := V(t; (x_0, x_1, \ldots, x_n))$.

$H(t; \mathfrak{a})$: ***Hilbertfunktion*** und die damit zusammenhängenden Hilfsfunktionen $A(t; \mathfrak{a})$, $B(t; \mathfrak{a})$ und $C(t; \mathfrak{a})$.

$P(t; \mathfrak{a}) = h_0 \binom{t}{d} + h_1 \binom{t}{d-1} + \cdots + h_d$: charakteristisches Polynom.

$h_0(\mathfrak{a})$: Ordnung von $\mathfrak{a}$.

Analog zu MfL Bd. 3 setzen wir für Gradzahlen:

$h(f) = h(f(x_1, \ldots, x_n))$: Grad von f in *allen* Variablen $x_1, \ldots, x_n$.

$h(f)_i = h(f(x_1, \ldots, x_n))_i$: Grad von f in $x_1, \ldots, x_i$ $(1 \leqq i < n)$.

$h(F) = h(F(x_0, x_1, \ldots, x_n))$: Grad von F in *allen* Variablen $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

$h(F)_i = h(F(x_0, x_1, \ldots, x_n))_i$: Grad von F in $x_0, x_1, \ldots, x_i$ $(0 \leqq i < n)$.

Soll ein Polynom $f(x_1, \ldots, x_n)$ in *allen* Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ***identisch verschwinden***, so schreiben wir:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ id. in } x_1, \ldots, x_n,$$

entsprechend

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ id. in } x_0, x_1, \ldots, x_n \quad \text{für Formen} \quad F(x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

Die Gleichheit $f = g$ zweier Polynome bzw. $F = G$ zweier Formen F, G ist dann durch das identische Verschwinden von $f - g$ bzw. $F - G$ erklärt.

Nullstellen von inhomogenen Polynomen $f(x_1, \ldots, x_n)$ werden mit $(y_1, \ldots, y_n)$ bezeichnet. Hängen die Nullstellenkoordinaten $y_1, \ldots, y_n$ noch von Parametern $t_1, \ldots, t_d$ ab, so bedeutet demgemäß $f(y_1, \ldots, y_n) = 0$ das identische Verschwinden in den Parametern $t_1, \ldots, t_d$, also:

$$f(y_1, \ldots, y_n) = 0 \text{ id. in } t_1, \ldots, t_d.$$

Entsprechend gilt für Nullstellen $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ von Formen $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ mit den Nullstellenparametern $t_0, t_1, \ldots, t_d$:

$$F(y_0, y_1, \ldots, y_n) = 0 \text{ id. in } t_0, t_1, \ldots, t_d.$$

Das in der Literatur mitunter für Identitäten eingeführte Zeichen $\equiv$ wird hier ausschließlich für Idealkongruenzen verwendet.

$\boldsymbol{U}_{hi}$, $\boldsymbol{V}_{jk}$: Matrizen vom Format (h, i) bzw. (j, k).

$h(\boldsymbol{U}_{hi})$: Gradmatrix von $\boldsymbol{U}_{hi}$, d. h. Matrix der Gradzahlen von $\boldsymbol{U}_{hi}$.

$\boldsymbol{U}^{\mathsf{T}}$, $\boldsymbol{V}^{\mathsf{T}}$: transponierte Matrizen.

$\boldsymbol{W}_{s1}$, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s}_i$, $\boldsymbol{h}_k$, $\boldsymbol{w}_j$: einspaltige Matrizen (Spaltenvektoren, n-Tupel); insbesondere sind

$\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s}_i$: Syzygien (Kap. 5, Definition 5).

$\boldsymbol{h}_k$: Hauptklassensyzygien (Kap. 5, Definition 11).

$\boldsymbol{W}_{s1}^{\mathsf{T}}$, $\boldsymbol{s}^{\mathsf{T}}$, $\boldsymbol{s}_i{}^{\mathsf{T}}$, $\boldsymbol{w}_j{}^{\mathsf{T}}$: transponierte Vektoren (Zeilenvektoren).

$h(\boldsymbol{W}_{s1}^{\mathsf{T}})$, $h(\boldsymbol{s}^{\mathsf{T}})$, $h(\boldsymbol{s}_i{}^{\mathsf{T}})$, $h(\boldsymbol{w}_j{}^{\mathsf{T}})$: Gradvektoren (Zeilenvektoren).

Ideale werden mit kleinen Frakturbuchstaben $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ bezeichnet. Bei der abstrakten Idealtheorie im ersten und zweiten Kapitel werden auf diese Weise abstrakte Ideale gekennzeichnet, vom dritten Kapitel an nur noch H-Ideale, also homogene Ideale aus $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. Zur Unterscheidung hiervon werden P-Ideale, also inhomogene Polynomideale aus $K[x_1, \ldots, x_n]$, mit $(\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{b})$, $(\mathfrak{c})$, ... bezeichnet; dementsprechend wird bei Hauptidealen, Idealsummen und Idealkongruenzen noch eine weitere Klammer hinzugefügt.

Für Potenzproduktideale, die wir hier grundsätzlich als H-Ideale aus

$$K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

auffassen wollen, schreiben wir $\mathfrak{a}_\pi$, $\mathfrak{b}_\pi$, $\mathfrak{c}_\pi$, ... Es bedeuten insbesondere:

(a): Hauptideal, das ist die Gesamtheit der Elemente ra mit beliebigem $r \in R$.

(0): Nullideal, besteht nur aus der Null.

(1): Einheitsideal, besteht aus allen Ringelementen, also $(1) = R$.

$\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_s)$: Basisdarstellung für das Ideal $\mathfrak{a}$.

$\mathfrak{g}_i(\mathfrak{a})$: i-tes Grundideal eines H-Ideals $\mathfrak{a} \subset \mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ (Kap. 4, Definition 4, (54)).

$\mathfrak{g}_i\big((\mathfrak{a})\big)$: i-tes Grundideal eines P-Ideals $(\mathfrak{a}) \subset \mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ (Kap. 4, Definition 5, (55)).

$\mathfrak{h}$: Ideale der Hauptklasse.

$\mathfrak{l} = (L_1, \ldots, L_s)$: H-Ideal mit lauter Linearformen als Basiselementen.

$(\mathfrak{l}) = (l_1, \ldots, l_t)$: P-Ideal mit lauter linearen Polynomen als Basiselementen.

$\mathfrak{m}$: maximales Ideal.

$\mathfrak{p}$: Primideal.

$\mathfrak{p}_T = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$: triviales Primideal.

$\mathfrak{q}$: Primärideal.

$\mathfrak{q}_T$: T-Ideal, d. h. triviales Ideal.

$\mathfrak{r}$: quasiprimäres Ideal.

$\mathfrak{v}_{dm}$: Veronesesches Ideal.

$\mathfrak{v}_{dm}^{(i,j,\ldots)}$: Veronesesches Projektionsideal.

Das Zeichen $\equiv$ wird für Idealkongruenzen verwendet:

$$a \equiv b \bmod \mathfrak{a} \Leftrightarrow a - b \in \mathfrak{a}.$$

Die Kurzschreibweise $a \equiv b$ $(\mathfrak{a})$ anstelle von $a \equiv b \bmod \mathfrak{a}$ wird nur verwendet, wenn Verwechslungen mit P-Idealen $(\mathfrak{a}), (\mathfrak{b}), \ldots$ nicht auftreten können. Kongruenzen für P-Ideale, bei denen $a \equiv b\ \big((\mathfrak{a})\big)$ zu schreiben wäre, werden nicht benutzt.

$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$: Idealsumme.

$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$: Idealprodukt.

$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$: Idealdurchschnitt.

$\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$: Idealquotient.

$\operatorname{Rad} \mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$: Radikal des Ideals $\mathfrak{a}$; das ist für $\mathfrak{a} \subset R$ die Gesamtheit derjenigen Elemente von R, von denen eine Potenz in $\mathfrak{a}$ liegt.

$\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b} :\Leftrightarrow \operatorname{Rad} \mathfrak{a} = \operatorname{Rad} \mathfrak{b}$ (Äquivalenz von Idealen, vgl. Kap. 1, Definition 38).

$\mathfrak{M}(t; \mathfrak{a})$: K-Modul der Formen t-ten Grades aus einem H-Ideal

$$\mathfrak{a} \subset K[x_0, x_1, \ldots, x_n].$$

V: homogener Vektormodul (Kap. 5, Definition 3).

$\mathrm{NG}\big((\mathfrak{a})\big)$: Nullstellengebilde eines P-Ideals $(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ (Kap. 3, Definition 2).

$\mathrm{NG}(\mathfrak{a})$: Nullstellengebilde eines H-Ideals $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ (Kap. 3, Definition 3).

$\operatorname{Dim}(\mathfrak{a})$: Dimension des P-Ideals $(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ (vgl. 4.3., 4.5.).

$\operatorname{Dim} \mathfrak{a}$: Dimension des H-Ideals $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ (vgl. 4.3., 4.5.).

$\operatorname{Kodim}(\mathfrak{a}) := n - \operatorname{Dim}(\mathfrak{a})$ (Kap. 4, Definition 1).

$\operatorname{Kodim} \mathfrak{a} := n - \operatorname{Dim} \mathfrak{a}$ (Kap. 4, Definition 1).

$L(\mathfrak{a})$: Länge der Syzygienkette des H-Ideals $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$.

1. Grundbegriffe und Rechenoperationen der abstrakten Idealtheorie in Noetherschen Ringen

1.1. Einleitung

Die Idealtheorie entstand historisch aus der Beschäftigung von Ernst Eduard Kummer (1810—1893) mit der großen Fermatschen Vermutung der Zahlentheorie; mit den von ihm eingeführten „idealen Zahlen" erzwang er eindeutige Zerlegungen in algebraischen Zahlkörpern. Daraus wurde der Begriff „Ideal" von Richard Dedekind (1831—1916) geprägt.

Den heute üblichen abstrakten Aufbau der Idealtheorie verdanken wir der Mathematikerin Emmy Noether (1882—1935), welche dabei an Überlegungen des (zweiten) Schachweltmeisters Emanuel Lasker (1868—1941) anknüpfte (vgl. Lasker [1]). Emmy Noether wirkte hauptsächlich in Göttingen. Sie stammte aus einer jüdischen Gelehrtenfamilie und verlor daher 1933 nach der Errichtung der faschistischen Diktatur in Deutschland ihre Lehrerlaubnis und emigrierte nach den USA. Zur näheren Information über Leben und Persönlichkeit dieser ungewöhnlichen Frau sei auf entsprechende Literatur verwiesen (vgl. Dick [1], Franzke und Günther [1], van der Waerden [4] und Wussing [2]).

Emmy Noether erkannte die Bedeutung der abstrakten Idealtheorie für die exakte Grundlegung der algebraischen Geometrie, als deren Schöpfer ihr Vater Max Noether (1844—1921) angesehen wird. Diese Grundlegung war Gegenstand einer Vorlesung von Emmy Noether im Jahre 1924; zur gleichen Zeit gewann van der Waerden, der damals noch nicht zum Noether-Kreis gehörte, völlig unabhängig davon dieselben Resultate.

Auguste Dick schreibt dazu in [1]: „*In kongenialer Weise hatten van der Waerden und E. Noether unabhängig voneinander aus einer Theorie dieselben wesentlichen Begriffsbildungen klar herausgestellt und dieselben Schlüsse gezogen. Emmy Noether erhob keinen Anspruch auf Priorität und überließ die Publikation dem jungen Kollegen.*" (vgl. van der Waerden [1] und auch [8], Kap. 13, bzw. [9], Kap. 14, bzw. [10], Kap. 16). Van der Waerden äußert sich in [11] hierzu folgendermaßen: "*I wrote a paper* (gemeint ist [1]) … *and showed it Emmy Noether. She at once accepted it for the Mathematische Annalen, without telling me that she had presented the same idea in a course of lectures before I came to Göttingen. I heard it later from Grell, who had attended her course.*"

Diese historische Entwicklung ist als Beispiel zur Erkenntnisgewinnung in der Mathematik gewiß von grundsätzlichem Interesse. Wie schon im Vorwort gesagt wurde, traten jedoch dadurch Beziehungen zwischen nichtlinearen und linearen Gleichungssystemen sowie rechnerische Verfahren in den Hintergrund.

Bevor darauf eingegangen wird, wollen wir uns in den ersten beiden Kapiteln mit der Noetherschen abstrakten Idealtheorie beschäftigen, in welche jedoch zahlreiche Beispiele eingeflochten sind, u. a. die von Renate Kummer und dem Verfasser entwickelte Theorie der Potenzproduktideale (vgl. Kummer und Renschuch [1, 2]).

1.2. Idealdefinitionen, Restklassen nach Idealen, Kongruenzrechnung

In Zusammenhang mit der Einführung der Grundbegriffe der abstrakten Algebra, die hier als bekannt vorausgesetzt werden (vgl. MfL Bd. 3), wird der Begriff „Ideal" zumeist bei der Betrachtung des Kernes eines Ringhomomorphismus definiert (vgl. MfL Bd. 3, 13.4., Definition 2). Dem schließen wir uns hier an:

Definition 1. Es sei R ein Ring. Dann definieren wir:

$$\mathfrak{a} \text{ \textit{Ideal} von } R :\Leftrightarrow \mathfrak{a} \text{ Unterring von } R \wedge \bigwedge_{r \in R} (r\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{a}r \subseteqq \mathfrak{a}).$$

Ein Ideal ist also gleichzeitig Unterring von R und R-Modul.
In vielen Büchern findet man stattdessen die

Definition 2. In dem Ring R heißt eine nichtleere Untermenge $\mathfrak{a}$ *Ideal* von R, wenn gilt:

$$a \in \mathfrak{a} \wedge b \in \mathfrak{a} \Rightarrow a - b \in \mathfrak{a}, \tag{1}$$

$$a \in \mathfrak{a} \wedge r \in R \Rightarrow ra \in \mathfrak{a} \wedge ar \in \mathfrak{a}.$$

Zum Äquivalenzbeweis haben wir offensichtlich nur zu zeigen, daß aus (1) die Unterringeigenschaft folgt. Da $\mathfrak{a} \subset R$ in Definition 2 vorausgesetzt wird, ist die Erfüllung der Rechengesetze für Ringe gesichert; $0 \in \mathfrak{a}$ folgt aus (1) für $b = a$, mithin $-b \in \mathfrak{a}$ aus (1) für $a = 0$ und $a + b \in \mathfrak{a}$ aus (1) wegen $a + b = a - (-b) \in \mathfrak{a}$.

Ideale werden mit kleinen Frakturbuchstaben $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ bezeichnet; die Wahl des Buchstabens ergibt sich oftmals aus anderen Zusammenhängen, beispielsweise $\mathfrak{g}$ für *Grundideale*, $\mathfrak{h}$ für *Hauptklassenideale*, $\mathfrak{k}$ für *Komponentenideale*, $\mathfrak{m}$ für *maximale Ideale*, $\mathfrak{n}$ für *Kerne* (lat. *nucleus* = *Kern*), $\mathfrak{p}$ für *Prim-*

ideale, $\mathfrak{q}$ für *Primärideale* (weil $\mathfrak{p}$ schon für Primideale verwendet wurde), $\mathfrak{r}$ für *quasiprimäre Ideale* (weil $\mathfrak{q}$ bereits für *Primärideale* vergeben ist), $\mathfrak{v}$ für *Veronesesche Ideale* und $\mathfrak{w}$ für daraus durch Umindizierung gewonnene Ideale.

Setzen wir voraus, daß R ein *kommutativer Ring* ist, so vereinfachen sich die Definitionen 1 und 2 wie folgt:

Definition 3. Es sei R ein kommutativer Ring. Dann definieren wir:

$$\mathfrak{a} \textit{ Ideal} \text{ von } R :\Leftrightarrow \mathfrak{a} \text{ Unterring von } R \wedge \bigwedge_{r \in R} (r\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{a}).$$

Definition 4. In dem kommutativen Ring R heißt eine nichtleere Untermenge $\mathfrak{a}$ *Ideal* von R, wenn gilt:

$$a \in \mathfrak{a} \wedge b \in \mathfrak{a} \Rightarrow a - b \in \mathfrak{a}, \tag{1}$$

$$a \in \mathfrak{a} \wedge r \in R \Rightarrow ra \in \mathfrak{a}. \tag{2}$$

In analoger Weise zum Beweis von $a + b \in \mathfrak{a}$ folgt aus (1) und (2):

$$a \in \mathfrak{a} \wedge b \in \mathfrak{a} \wedge r \in R \wedge s \in R \Rightarrow ra + sb \in \mathfrak{a}. \tag{3}$$

Enthält der kommutative Ring R überdies ein Einselement 1, mithin auch -1, so kann auch umgekehrt von (3) auf (1) und (2) geschlossen werden; wir haben also den

Satz 1. *In dem kommutativen Ring R mit Einselement ist eine nichtleere Untermenge $\mathfrak{a}$ Ideal von R, wenn gilt:*

$$a \in \mathfrak{a} \wedge b \in \mathfrak{a} \wedge r \in R \wedge s \in R \Rightarrow ra + sb \in \mathfrak{a}. \tag{3}$$

Aus (3) folgt unmittelbar (vgl. MfL Bd. 3, 13.4.):

Satz 2. *In dem kommutativen Ring R mit Einselement bilden für alle $k \in R$ die Vielfachen ka eines Ringelementes $a \in R$ ein Ideal.*

Definition 5. Das aus den Vielfachen eines Ringelementes $a \in R$ bestehende Ideal eines kommutativen Ringes R mit Einselement heißt das von a erzeugte *Hauptideal* $\mathfrak{h} = (a)$.

Hier gibt es offenbar zwei Extremfälle.

Definition 6. Das nur aus dem Nullelement bestehende Ideal heißt *Nullideal* und wird mit (0) bezeichnet.

Definition 7. Das vom Einselement erzeugte Hauptideal (1) heißt *Einheitsideal*. Offenbar ist $(1) = R$.

Satz 3. *In einem Körper K existieren nur das Nullideal und das Einheitsideal.*

Beweis. Ist $R = K$ und $\mathfrak{a} \neq (0)$, so existiert wenigstens ein Element $a \in K$ mit $a \neq 0$ und $a \in \mathfrak{a}$. Nach (2) ist dann auch $\frac{1}{a} \cdot a = 1 \in \mathfrak{a}$, also $\mathfrak{a} = (1)$, q.e.d.

Definition 8. Ein Integritätsbereich mit Einselement, in dem jedes Ideal ein Hauptideal ist, heißt *Hauptidealring* (HIR; vgl. MfL Bd. 3, 13.5.).

Durch die zusätzliche Forderung, daß der Ring mit Einselement ein Integritätsbereich ist, gelten in jedem Hauptidealring die Sätze vom größten gemeinsamen Teiler und von der eindeutigen Zerlegung in Primelemente ((ZPE); vgl. dazu MfL Bd. 3, 13.5.). Definiert man hingegen Hauptidealringe *ohne* die Voraussetzung, daß R Integritätsbereich ist (was teilweise in der Literatur geschieht), so muß die Nullteilerfreiheit *zusätzlich* gefordert werden, um die Gültigkeit der genannten Sätze zu sichern.

Hauptidealringe sind beispielsweise $\mathbf{Z}$ und $K[x]$, nicht aber $K[x_1, \ldots, x_n]$ mit $n \geqq 2$. Um dies zu zeigen, stellen wir die folgenden Überlegungen an, welche zugleich den entscheidenden Bezug zur algebraischen Geometrie herstellen: Es sei $y_1(t_1, \ldots, t_d)$, $y_2(t_1, \ldots, t_d), \ldots, y_n(t_1, \ldots, t_d)$ eine rationale Parameterdarstellung einer d-dimensionalen algebraischen „Varietät“ (für $d = 1$ Kurve, für $d = 2$ Fläche) im n-dimensionalen affinen Raum. Wir fragen wie im linearen Fall (vgl. MfL Bd. 3, 5.3.) nach „parameterfreien Gleichungen“, d. h. nach allen Polynomen $f(x_1, \ldots, x_n)$, die $(y_1, \ldots, y_n)$ als Nullstelle haben, für die also $f(y_1, \ldots, y_n) = 0$ identisch in $t_1, \ldots, t_d$ ist (unabhängig von der Wahl der Parameter $t_1, \ldots, t_d$), abgekürzt

$$f(y_1, \ldots, y_n) = 0 \text{ id. in } t_1, \ldots, t_d. \tag{4}$$

Die Gesamtheit dieser Polynome $f(x_1, \ldots, x_n)$ bildet nun ein Ideal $\mathfrak{p}$, welches definiert ist durch:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{p} :\Leftrightarrow f(y_1, \ldots, y_n) = 0. \tag{5}$$

Ist nämlich $g(x_1, \ldots, x_n)$ ein weiteres Polynom mit $g(y_1, \ldots, y_n) = 0$, so ist auch

$$(f - g)\,(y_1, \ldots, y_n) = f(y_1, \ldots, y_n) - g(y_1, \ldots, y_n) = 0 - 0 = 0 \text{ id. in } t_1, \ldots, t_d,$$

also

$$(f - g)\,(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) - g(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{p},$$

also (1) erfüllt. Ist $h(x_1, \ldots, x_n)$ ein beliebiges Polynom, so ist jedenfalls

$$(hf)\,(y_1, \ldots, y_n) = h(y_1, \ldots, y_n) \cdot f(y_1, \ldots, y_n) = 0 \text{ id. in } t_1, \ldots, t_d$$

auch für $h(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$; also ist

$$(hf)\,(x_1, \ldots, x_n) = h(x_1, \ldots, x_n) \cdot f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{p},$$

und folglich gilt auch (2). Mithin ist $\mathfrak{p}$ ein Ideal (die Bezeichnung $\mathfrak{p}$ werden wir in 2.2. rechtfertigen), aber für $d < n - 1$ kein Hauptideal. Das einfachste Beispiel liefern Geraden im dreidimensionalen affinen Raum, zu deren Darstellung als Schnittgebilde aber zwei Ebenen, also zwei lineare Gleichungen, unbedingt erforderlich sind.

Wir wollen nun eine *Kongruenzrechnung nach Idealen* einführen. Dies ist eine direkte Übertragung der Kongruenzrechnung in $\mathbf{Z}$ (vgl. MfL Bd. 2, 5.6. im Anschluß an Satz 2), die ihrerseits eine Übertragung der Kongruenzrechnung in $\mathbf{N}^*$ war (MfL Bd. 1, 3.7., (63)ff.) und sich in die allgemeine Definition als Spezialfall für Hauptideale einordnet.

Für a, b, m aus $\mathbf{Z}$ bedeutete $a \equiv b \bmod m$, daß $m \mid a - b$ gilt und umgekehrt (MfL Bd. 1, 3.7., (64), MfL Bd. 2, 5.6., (7)). Nun ist aber $m \mid a - b$ wiederum damit gleichwertig, daß $a - b$ ein ganzzahliges Vielfaches von m, also Element des Hauptideals (m) ist; die Kongruenzrechnung in $\mathbf{Z}$ kann also auch charakterisiert werden durch

$$a \equiv b \bmod (m) :\Leftrightarrow a - b \in (m). \tag{6}$$

Statt (6) schreibt man auch noch kürzer:

$$a \equiv b \ (m) :\Leftrightarrow a - b \in (m). \tag{7}$$

Entsprechend definieren wir allgemein:

Definition 9. Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal eines kommutativen Ringes R mit Einselement, so heißen zwei Ringelemente a, b *kongruent nach* $\mathfrak{a}$ oder *kongruent modulo* $\mathfrak{a}$, wenn $a - b \in \mathfrak{a}$ ist, in Zeichen

$$a \equiv b \bmod \mathfrak{a} :\Leftrightarrow a - b \in \mathfrak{a} \tag{8}$$

oder kurz

$$a \equiv b \ (\mathfrak{a}) :\Leftrightarrow a - b \in \mathfrak{a}. \tag{9}$$

Hieraus folgt leicht

$$a_1 \equiv b_1 \ (\mathfrak{a}) \wedge a_2 \equiv b_2 \ (\mathfrak{a}) \Rightarrow a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \ (\mathfrak{a}). \tag{10}$$

Beweis. $(b_1 + b_2) - (a_1 + a_2) = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) \in \mathfrak{a}$ gemäß (3).

Entsprechend gilt:

$$a_1 \equiv b_1 \ (\mathfrak{a}) \wedge a_2 \equiv b_2 \ (\mathfrak{a}) \Rightarrow a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 \ (\mathfrak{a}). \tag{11}$$

Beweis. $b_1 b_2 - a_1 a_2 = b_2(b_1 - a_1) + a_1(b_2 - a_2) \in \mathfrak{a}$ gemäß (3).
Aus (10) und (11) ergeben sich durch mehrmalige Anwendung

$$a_i \equiv b_i \ (\mathfrak{a}) \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, s \Rightarrow a_1 + \cdots + a_s \equiv b_1 + \cdots + b_s \ (\mathfrak{a}) \tag{12}$$

und

$$a_i \equiv b_i \ (\mathfrak{a}) \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, s \Rightarrow a_1 \cdots a_s \equiv b_1 \cdots b_s \ (\mathfrak{a}). \tag{13}$$

Aus (13) folgt weiterhin

$$a \equiv b \ (\mathfrak{a}) \Rightarrow a^h \equiv b^h \ (\mathfrak{a}) \quad \text{mit} \quad h \in \mathbf{N}^* \tag{14}$$

sowie

$$a \equiv b\ (\mathfrak{a}) \wedge c \equiv d\ (\mathfrak{a}) \Rightarrow a^h c^k \equiv b^h d^k\ (\mathfrak{a}) \quad \text{mit} \quad h, k \in \mathbf{N}^*; \tag{15}$$

Entsprechendes gilt für drei und mehr Faktoren. Die Formeln (14) und (15) werden wir des öfteren benötigen.

Hierzu betrachten wir ein Beispiel. Es sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal mit $x_0x_3 - x_1x_2 \in \mathfrak{a}$ und $x_1x_3^2 - x_2^3 \in \mathfrak{a}$, also $x_0x_3 \equiv x_1x_2\ (\mathfrak{a})$ und $x_1x_3^2 \equiv x_2^3\ (\mathfrak{a})$. Dann ist auch

$$x_0^a x_1^b x_3^{3a+2b} - x_2^{4a+3b} = (x_0x_3^3)^a (x_1x_3^2)^b - (x_2^4)^a (x_2^3)^b \in \mathfrak{a}$$

wegen $x_1x_3^2 \equiv x_2^3\ (\mathfrak{a})$ und $x_0x_3^3 \equiv x_1x_2x_3^2 \equiv x_2^4\ (\mathfrak{a})$.

In Kongruenzen nach einem Ideal darf jedoch nicht immer gekürzt werden; beispielsweise ist $15 \equiv 5\ (10)$, aber $3 \not\equiv 1\ (10)$.

Satz 4. *Kongruenzen nach Idealen sind Äquivalenzrelationen* (vgl. MfL Bd. 1, 2.4., (22)).

Beweis. *Reflexivität*: Es ist $a \equiv a\ (\mathfrak{a})$ wegen $a - a = 0 \in \mathfrak{a}$.
Transitivität: $a \equiv b\ (\mathfrak{a}) \wedge b \equiv c\ (\mathfrak{a}) \Rightarrow a \equiv c\ (\mathfrak{a})$; wegen

$$c - a = (c - b) + (b - a) \in \mathfrak{a} \text{ nach (3).}$$

Symmetrie: $a \equiv b\ (\mathfrak{a}) \Rightarrow b \equiv a\ (\mathfrak{a})$; wegen $a - b = -(b - a) \in \mathfrak{a}$ nach (2).
Wir können also durch (8) *Restklassen* definieren und haben offenbar

Satz 5. *Die Restklassen nach einem Ideal $\mathfrak{a}$ eines kommutativen Ringes R mit Einselement bilden einen Ring, den Restklassenring $R/\mathfrak{a}$* (vgl. MfL Bd. 3, 13.4.2.).

Zur Frage der Anzahl der Restklassen nach Hauptidealen sei auf MfL Bd. 1, 3.7., (68) und (69), verwiesen. Bei Restklassenringen nach beliebigen Idealen kann man nur weit schwächere Aussagen machen; für homogene Polynomideale sei dazu auf das sechste Kapitel über die *Hilbertfunktion* verwiesen.

1.3. Idealbasen, Minimalbasen, Basen minimaler Länge, Ringe mit Basisbedingung

Es sei R wieder ein kommutativer Ring mit Einselement. Sind $a_1, \ldots, a_s$ s herausgegriffene Ringelemente, so bildet die Gesamtheit der Elemente $r_1a_1 + \cdots + r_sa_s$ wegen (3) ein Ideal. Wir definieren:

Definition 10. Es sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Ein Ideal $\mathfrak{a} \subset R$, das aus sämtlichen Ringelementen

$$a = r_1a_1 + \cdots + r_sa_s \tag{16}$$

mit *festen* Ringelementen $a_1, \ldots, a_s$ entsteht, wobei $r_1, \ldots, r_s$ unabhängig voneinander *alle* Ringelemente durchlaufen, wird mit

$$\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_s) \tag{17}$$

bezeichnet. Die Elemente $a_1, \ldots, a_s$ bilden dann eine *Basis* von $\mathfrak{a}$.

Ein Ideal $\mathfrak{a}$ heißt *gegeben*, wenn von ihm eine Basis bekannt ist.

Ein Ideal $\mathfrak{a}$ zu berechnen heißt, eine Basis von $\mathfrak{a}$ zu berechnen.

Für den Fall, daß $s = 1$ gewählt werden kann, heißt $\mathfrak{a}$ ein *Hauptideal* (vgl. Definition 5).

Definition 11. Eine Basis (17) heißt *Minimalbasis* oder *reduzierte Basis* von $\mathfrak{a}$, wenn keines der Elemente $a_1, \ldots, a_s$ überflüssig ist, wenn also

$$\left.\begin{aligned} &(a_2, \ldots, a_{s-1}, a_s) \subset \mathfrak{a}, \quad (a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}) \subset \mathfrak{a} \\ \text{und}\quad &\\ &(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_s) \subset \mathfrak{a} \text{ für } i = 2, 3, \ldots, s-1 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

gilt.

Definition 12. Eine Basis (17) heißt *Basis minimaler Länge* von $\mathfrak{a}$, wenn folgendes zutrifft:

$$\text{Für jede weitere Basis } \mathfrak{a} = (b_1, \ldots, b_k) \text{ ist } k \geqq s. \tag{19}$$

Es ist unmittelbar einleuchtend, daß jede Basis minimaler Länge eine Minimalbasis ist. Die Umkehrung ist jedoch keineswegs immer richtig. Sie trifft, wie wir im Satz 22 sehen werden, zwar für homogene Polynomideale (H-Ideale) zu, nicht jedoch für inhomogene Polynomideale (P-Ideale), worin die eigentliche Ursache mancher bei P-Idealen erschwerten Beweisführung gesehen werden kann. Wir wollen uns hier mit einem Beispiel begnügen: Wir betrachten die drei Basisdarstellungen in $K[x_1, x_2, x_3]$:

$$(x_1, x_2, x_3), \tag{20}$$

$$(x_1 + x_3, x_1^2 + x_2, x_1x_2, x_1^3 + x_1), \tag{21}$$

$$\big(x_1 + x_3, x_1^2 + x_2, x_1x_2, (x_3 + 1)(x_1^3 + x_1), x_3(x_1^3 + x_1)\big). \tag{22}$$

Hier ist zunächst klar, daß man aus den Elementen der ersten Basis alle Elemente der zweiten und dritten Basis gewinnt. Es ist auch unmittelbar zu sehen, wie man von der zweiten zur dritten Basis gelangt und auch umgekehrt (man subtrahiere die beiden letzten Basiselemente der dritten Basis und hat das letzte Basiselement der zweiten Basis). Um zu wissen, daß alle drei Basisdarstellungen dasselbe Ideal definieren, nämlich (x_1, x_2, x_3), brauchen wir also nur noch zu zeigen, daß aus der zweiten Basisdarstellung die erste folgt, d. h., wir müssen x_1, x_2, x_3 durch die Elemente der zweiten Basis ausdrücken:

$$x_1 = 0(x_1 + x_3) + (-x_1)(x_1^2 + x_2) + 1x_1x_2 + 1(x_1^3 + x_1),$$

$$x_2 = 0(x_1 + x_3) + (x_1^2 + 1)(x_1^2 + x_2) + (-x_1)x_1x_2 + (-x_1)(x_1^3 + x_1)$$

und

$$x_3 = 1(x_1 + x_3) + x_1(x_1^2 + x_2) + (-1)x_1x_2 + (-1)(x_1^3 + x_1).$$

Aus diesen Darstellungen wird plausibel, daß (21) und (22) Minimalbasen sind (den exakten Beweis werden wir im fünften Kapitel führen); daß (20) eine Basis minimaler Länge ist, ist evident. Wir haben zusammenfassend den

Satz 6. *Eine Minimalbasis kann aus einer Basis stets durch Streichungen gewonnen werden.*

Die Begriffe „Minimalbasis" und „Basis minimaler Länge" fallen im allgemeinen nicht zusammen. Eine Basis minimaler Länge kann aus einer Minimalbasis im allgemeinen nicht allein durch Streichungen gewonnen werden.

Definition 13. Ein kommutativer Ring R mit Einselement heißt *Ring mit Basisbedingung*, wenn die folgende Bedingung (B) gilt:

$$\text{(B)} :\Leftrightarrow \textit{Jedes Ideal } \mathfrak{a} \subset R \textit{ besitzt eine endliche Basis.} \tag{23}$$

„Endliche Basis" bedeutet dabei, daß die Anzahl s der Basiselemente eine endliche Zahl ist.

Die vorangegangenen Betrachtungen lassen erkennen, daß der Basisbegriff gegebenenfalls Schwierigkeiten in sich bergen kann; allein daher ist es gerechtfertigt, zu versuchen, die Bedingung (B) durch äquivalente Bedingungen zu ersetzen. Damit wollen wir uns in den nächsten Abschnitten befassen.

1.4. Oberideale, Unterideale, Teilerketten, Teilerkettenbedingung, Maximalbedingung

Definition 14. Es sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Ist $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{b}$, so heißt $\mathfrak{a}$ *Unterideal* oder *Vielfaches* von $\mathfrak{b}$, und $\mathfrak{b}$ heißt *Oberideal* oder *Teiler* von $\mathfrak{a}$.

Ist $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, so heißt $\mathfrak{a}$ *echtes Unterideal* oder *echtes Vielfaches* von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}$ *echtes Oberideal* oder *echter Teiler* von $\mathfrak{a}$.

Die aus der historischen Entwicklung der Idealtheorie entstandenen Bezeichnungen „Vielfaches" und „Teiler" kann man durch Beispiele in $\mathbf{Z}$ leicht erklären: Beispielsweise ist

$$2/4 \Leftrightarrow (4) \subset (2) \quad \text{usw.}$$

Entsprechendes gilt für Teilerketten:

$$1/3/15/30/60 \Leftrightarrow (60) \subset (30) \subset (15) \subset (3) \subset (1).$$

Wir definieren daher:

Definition 15. Eine Folge $\{\mathfrak{a}_i\}$ von Idealen, von denen jedes Ideal Oberideal des vorhergehenden Ideals ist, heißt eine *Teilerkette* oder *aufsteigende Idealkette*. Eine Teilerkette ist mithin durch

$$\mathfrak{a}_1 \subseteqq \mathfrak{a}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{a}_i \subseteqq \mathfrak{a}_{i+1} \subseteqq \cdots \tag{24}$$

gegeben. Steht in (24) nirgends das Gleichheitszeichen, gilt also

$$\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{a}_{i+1} \subset \cdots, \tag{25}$$

so spricht man von einer *echten Teilerkette*.

Ist R ein Hauptidealring, so kann jede echte Teilerkette (25) nur endlich viele Glieder enthalten; dies besagt der *Teilerkettensatz* (vgl. MfL Bd. 3, 13.5.2., Satz 4). Aus ihm folgt für Hauptidealringe der ZPE-Satz (vgl. MfL Bd. 3, 13.5.2., Satz 5).

Für beliebige kommutative Ringe R mit Einselement stellt die Aussage des Teilerkettensatzes eine Bedingung dar, die zusätzlich gefordert werden muß.

Definition 16. Ein kommutativer Ring R mit Einselement heißt *Ring mit Teilerkettenbedingung* oder *Ring mit aufsteigender Kettenbedingung*, wenn die folgende Bedingung (T) erfüllt ist:

$$\left.\begin{array}{l} (\mathrm{T}) :\Leftrightarrow \textit{Jede Teilerkette hat die Bauart} \\ \mathfrak{a}_1 \subseteqq \mathfrak{a}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{a}_i \subseteqq \mathfrak{a}_{i+1} \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{a}_{k-1} \subset \mathfrak{a}_k \\ \quad = \mathfrak{a}_{k+1} = \mathfrak{a}_{k+2} = \cdots = \mathfrak{a}_m = \cdots. \end{array}\right\} \tag{26}$$

Notieren wir von (26) nur die echten Oberideale, so geht (26) über in

$$\begin{array}{l} \mathfrak{a}_{i_1} \subset \mathfrak{a}_{i_2} \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_{k-1} \subset \mathfrak{a}_k = \mathfrak{a}_{k+1} = \cdots = \mathfrak{a}_m = \cdots \\ \text{mit} \quad 1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < k-1. \end{array} \tag{27}$$

Wir können diesen Sachverhalt gleichwertig auch so formulieren:

(T_1) :⇔ In (24) gilt „$\subset$“ nur an endlich vielen Stellen

oder

(T_2) :⇔ In (24) gilt von einem bestimmten Index an stets das Gleichheitszeichen.

Definition 17. Es sei M eine nichtleere Menge von Idealen in einem kommutativen Ring R mit Einselement. Ein Ideal $\overline{\mathfrak{m}} \in M$ heißt *maximal* bezüglich M, wenn es kein Ideal $\mathfrak{a} \in M$ mit $\overline{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{a}$ gibt.

Definition 18. Es sei M eine nichtleere Menge von Idealen in einem kommutativen Ring R mit Einselement. Ein Ideal $\underline{\mathfrak{m}} \in M$ heißt *minimal* bezüglich M, wenn es kein Ideal $\mathfrak{a} \in M$ mit $\mathfrak{a} \subset \underline{\mathfrak{m}}$ gibt.

Definition 19. Ein kommutativer Ring R mit Einselement heißt *Ring mit Maximalbedingung*, wenn die folgende Bedingung (M) erfüllt ist:

(M) $:\Leftrightarrow$ *Jede nichtleere Menge M von Idealen aus R enthält wenigstens ein maximales Ideal.*

Satz 7. *Ist R ein kommutativer Ring mit Einselement, so gilt:*

R ist ein Ring mit (T) $\Leftrightarrow$ *R ist ein Ring mit* (M).

Beweis. ($\Rightarrow$) (indirekt): Angenommen, es wäre M eine Menge von Idealen *ohne* maximales Ideal; dann existiert zu jedem $\mathfrak{a}_1 \in M$ wenigstens ein $\mathfrak{a}_2 \in M$ mit $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2$, zu $\mathfrak{a}_2$ wiederum ein $\mathfrak{a}_3 \in M$ mit $\mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{a}_3$ usw. So würde eine nicht abbrechende Teilerkette (25) im Widerspruch zu (T) entstehen. Hierbei wurde das Auswahlprinzip benutzt (vgl. MfL Bd. 3, 2.8., sowie KERTÉSZ [2], Kap. III).

($\Leftarrow$) (indirekt): Aus der Annahme der Existenz einer nicht abbrechenden echten Teilerkette ergibt sich, daß die durch die Folge $\{\mathfrak{a}_i\}$ gegebene Menge M von Idealen kein maximales Ideal besitzt.

In analoger Weise definiert man eine *Vielfachenkettenbedingung* oder *absteigende Kettenbedingung* und *Ringe mit Minimalbedingung*, welche auch *Artinsche Ringe* genannt werden. Die Äquivalenz beider Begriffe kann man in analoger Weise beweisen. Die Forderung der Gültigkeit der Vielfachenkettenbedingung ist jedoch eine recht starke Voraussetzung, aus der allerdings viel gefolgert werden kann; für eine zusammenfassende Darstellung sei auf KERTÉSZ [1] verwiesen.

1.5. Der Äquivalenzsatz von Emmy Noether, Noethersche Ringe

Es handelt sich dabei um den grundlegenden

Satz 8. *Ist R ein kommutativer Ring mit Einselement, so gilt:*

R ist ein Ring mit (T) $\Leftrightarrow$ *R ist ein Ring mit* (B).

Beweis. ($\Rightarrow$): In dieser Beweisrichtung benötigen wir wieder das Auswahlprinzip aus MfL Bd. 1, 2.8. Es sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal aus R und es gelte (T). Es sei $a_1 \in \mathfrak{a}$. Ist $\mathfrak{a} = (a_1)$, so sind wir fertig. Andernfalls existiert wenigstens ein Element $a_2 \in \mathfrak{a}$ mit $a_2 \notin (a_1)$. Ist $\mathfrak{a} = (a_1, a_2)$, so sind wir fertig. Andernfalls existiert $a_3 \in \mathfrak{a}$ mit $a_3 \notin (a_1, a_2)$. Ist $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, a_3)$, so sind wir fertig, andernfalls wird das Verfahren fortgesetzt. Der Fall $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$ muß nach endlich vielen, etwa s, Schritten eintreten, weil andernfalls eine nicht abbrechende echte Teilerkette (25) entstehen würde im Widerspruch zur Voraussetzung (T).

($\Leftarrow$) (indirekt): Angenommen, es existiert eine nicht abbrechende echte Teilerkette

$$\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{a}_{i+1} \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_m \subset \cdots. \tag{28}$$

Jedes dieser unendlich vielen Ideale hat eine endliche Basis. Wir betrachten dasjenige Ideal $\mathfrak{a}$, welches von *allen* diesen Basiselementen erzeugt wird, für welches also $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{a}$ für alle i, insbesondere

$$\mathfrak{a}_m \subset \mathfrak{a} \tag{29}$$

gilt. Nach der Voraussetzung (B) genügen zur Erzeugung von $\mathfrak{a}$ jedoch bereits endlich viele Basiselemente, $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_t)$. Jedes dieser t Basiselemente ist in einem der Ideale der Kette (28) erstmals enthalten; es sei $\mathfrak{a}_m$ dasjenige Ideal, in welchem als erstem $a_1, a_2, \ldots, a_t$ sämtlich enthalten sind. Dann gilt aber $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{a}_m$ im Widerspruch zu (29). Mithin war die Annahme der Existenz der nicht abbrechenden echten Teilerkette (28) falsch, q.e.d.

Wir können also Satz 7 und Satz 8 zusammenfassen zum

Satz 9. *In einem kommutativen Ring R mit Einselement sind die drei zusätzlichen Bedingungen* (T), (M) *und* (B) *äquivalent.*

Diese Zusammenhänge wurden erstmals von Emmy Noether erkannt; wir wollen daher im folgenden solche Ringe als Noethersche Ringe bezeichnen.

Definition 20. Kommutative Ringe R mit Einselement, die den äquivalenten Bedingungen (T), (M), (B) genügen, heißen *Noethersche Ringe.*

1.6. Der Hilbertsche Basissatz

Wir hatten zu Beginn darauf hingewiesen, daß für Hauptidealringe der Teilerkettensatz gilt; Hauptidealringe sind also Noethersche Ringe. Der Hilbertsche Basissatz, den wir im folgenden beweisen wollen, sagt nun aus, daß Polynomringe über Noetherschen Ringen wieder Noethersche Ringe sind. Wir beweisen zunächst

Satz 10 (Spezieller Hilbertscher Basissatz). *Ist R ein Noetherscher Ring, so auch $R[x]$.*

Beweis. Der Ring $R[x]$ besteht aus Polynomen

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k + \cdots + a_m x^m \quad \text{mit} \quad a_i \in R. \tag{30}$$

Für festen Grad m ($m = 0, 1, 2, \ldots$) bilden die höchsten Koeffizienten a_m offenbar ein Ideal $\mathfrak{a}_m \subset R$, weil (1) und (2) erfüllt sind. Es sei nun $\mathfrak{a} \subset R[x]$ ein Ideal. Mit $f(x) \in \mathfrak{a}$ ist dann wegen (3) auch $xf(x) \in \mathfrak{a}$, $x^2 f(x) \in \mathfrak{a}, \ldots$ usw. Daraus folgt:

Jedes $a_0 \in \mathfrak{a}_0$ ist auch Element von $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4, \ldots$,
jedes $a_1 \in \mathfrak{a}_1$ ist auch Element von $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4, \ldots$,
jedes $a_2 \in \mathfrak{a}_2$ ist auch Element von $\mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4, \ldots$ usw.;

wir erhalten also eine Teilerkette (24) von Idealen in R, welche nach Voraussetzung die Bauart (26) haben muß. Die Basis von $\mathfrak{a} \subset R[x]$ wird nun durch die Gesamtheit der im folgenden beschriebenen Elemente gebildet:

(a) alle Elemente von $\mathfrak{a}_0$,

(b) alle linearen Polynome $a_1 x + c_0$ mit $a_1 \in \mathfrak{a}_1$, $a_1 \notin \mathfrak{a}_0$ und c_0 beliebig aus $\mathfrak{a}_0$,

(c) alle quadratischen Polynome $a_2 x^2 + k_1 x + k_0$ mit $a_2 \in \mathfrak{a}_2$, $a_2 \notin \mathfrak{a}_1$, k_i beliebig aus $\mathfrak{a}_i$, und entsprechend für höhere Gradzahlen.

Wegen der vorausgesetzten Endlichkeit der Basen der Ideale $\mathfrak{a}_i$ sind dies jeweils nur endlich viele Elemente.

Ist umgekehrt ein Polynom $f(x) \in \mathfrak{a} \subset R[x]$ durch (30) gegeben, so liegen wegen (26) zunächst $a_m \in \mathfrak{a}_k$, $a_{m-1} \in \mathfrak{a}_k, \ldots, a_k \in \mathfrak{a}_k$. Damit läßt sich $f(x)$ mit Hilfe der konstruierten Basiselemente auf ein Polynom $(k-1)$-ten Grades reduzieren, dessen höchster Koeffizient in $\mathfrak{a}_{k-1}$ liegt; dieses Polynom können wir weiter auf ein Polynom $(k-2)$-ten Grades reduzieren, dessen höchster Koeffizient in $\mathfrak{a}_{k-2}$ liegt; ... usw., bis wir bei Elementen von $\mathfrak{a}_0$ angelangt sind, q.e.d.

Wegen $R[x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i] = (R[x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}])\,[x_i]$ folgt durch n-malige Anwendung der

Satz 11 (Allgemeiner Hilbertscher Basissatz). *Ist R ein Noetherscher Ring, so auch $R[x_1, \ldots, x_n]$.*

Nun sind Körper stets Noethersche Ringe, denn in einem Körper sind (0) und (1) die einzigen Ideale; wir haben also den

Satz 12. *Der Polynomring $K[x_1, \ldots, x_n]$ über einem Körper K ist ein Noetherscher Ring.*

Alle Polynomideale besitzen also eine endliche Basis. Mit ihnen wollen wir uns im nächsten Abschnitt beschäftigen.

1.7. Polynome, Formen, Polynomideale, *P*-Ideale, *H*-Ideale, Potenzproduktideale

Bei den geometrischen Anwendungen wird der Koeffizientenkörper K der zu betrachtenden Polynome in der Regel der Körper $\mathbf{C}$ der komplexen Zahlen sein. Für die Nullstellentheorie der Polynomideale ist jedoch wesentlich, daß K (wie eben beispielsweise $\mathbf{C}$) ein algebraisch abgeschlossener Körper ist, den wir mit $\mathbf{K}$ bezeichnen wollen (vgl. MfL Bd. 3, 14.7., Schluß).

Definition 21. Mit $\mathbf{K}$ werde ein algebraisch abgeschlossener Körper bezeichnet, mit $\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ bzw. $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ Polynomringe, deren Polynome Koeffizienten aus dem algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbf{K}$ haben.

Zur Definition von Polynomen in einer bzw. in mehreren Unbestimmten sei auf MfL Bd. 3, 14.1. bzw. 14.6., verwiesen. In Anlehnung an MfL Bd. 3, 14.2.1., geben wir die

Definition 22. Sind $f(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n]$, $F(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ Polynome, so bezeichne

$$h(f) := h\big(f(x_1, \ldots, x_n)\big) := \text{Grad von } f \text{ in } allen \text{ Variablen } x_1, \ldots, x_n, \tag{31}$$

$$h(f)_i := h\big(f(x_1, \ldots, x_n)\big)_i := \text{Grad von } f \text{ in } x_1, \ldots, x_i \quad (1 \leqq i < n), \tag{32}$$

$$h(F) := h\big(F(x_0, \ldots, x_n)\big) := \text{Grad von } F \text{ in } allen \text{ Variablen } x_0, \ldots, x_n, \tag{33}$$

$$h(F)_i := h\big(F(x_0, \ldots, x_n)\big)_i := \text{Grad von } F \text{ in } x_0, \ldots, x_i \quad (0 \leqq i < n), \tag{34}$$

$$h(0) := \text{jedes beliebige Element aus } \mathbf{N}. \tag{35}$$

In der Literatur sind hierfür die Bezeichnungen $[f]$, $[F]$ bzw. $[f]_i$, $[F]_i$ üblich, welche wir hier zur Vermeidung von Verwechslungen mit Restklassen nicht benutzen wollen. Die Schreibweise $h(f)_i$ anstelle von $h_i(f)$ wurde gewählt, um Verwechslungen mit den Hilbertschen Koeffizienten auszuschließen (vgl. Kap. 6).

Daß dem Polynom 0 gemäß (35) *jede* natürliche Zahl (einschließlich der Null) als Grad zugeschrieben werden kann, wird sich im folgenden als sinnvoll erweisen.

Beispiel. Ist $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1x_3^2 - 2x_2^2x_3$, dann ist $h(f) = 3$, $h(f)_2 = 2$, $h(f)_1 = 1$.

Definition 23. Ausdrücke der Gestalt $x_1^{j_1}x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n}$ $(j_1, \ldots, j_n \in \mathbf{N})$ bzw. $p := x_0^{i_0}x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ $(i_0, i_1, \ldots, i_n \in \mathbf{N})$ heißen *Potenzprodukte*.

Satz 13. *Die Glieder von Polynomen aus* $K[x_1, \ldots, x_n]$ *bzw.* $K[x_0, \ldots, x_n]$ *sind mit Elementen aus* K *multiplizierte Potenzprodukte.*

Definition 24. Ein Polynom in mehreren Unbestimmten heißt *homogen*, wenn alle auftretenden Glieder (also nach Satz 13 alle auftretenden Potenzprodukte) denselben Grad haben, andernfalls heißt es *inhomogen*. Homogene Polynome werden kürzer als *Formen* bezeichnet und mit großen Buchstaben $F, G, H, \ldots$ geschrieben, inhomogene Polynome mit kleinen Buchstaben $f, g, h, \ldots$ (vgl. MfL Bd. 3, 14.6.1., Schluß). *Potenzprodukte werden o.B.d.A. als spezielle Formen aufgefaßt.*

Beispiel 1. $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + 2x_1^2x_2 - 3x_1^2x_3 + 4x_2x_3^2$ ist homogen, da alle Glieder den Grad 3 haben.

Beispiel 2. $f(x_1, x_2, x_3) = 2 + 3x_1 - 4x_2 + 5x_1^2 - 6x_2x_3 + 7x_1^3 - x_2^2x_3$ ist inhomogen vom Grad 3, da Glieder mit den Gradzahlen 0, 1, 2, 3 auftreten.
Homogener Bestandteil 3. Grades: $7x_1^3 - x_2^2x_3$,
homogener Bestandteil 2. Grades: $5x_1^2 - 6x_2x_3$,
homogener Bestandteil 1. Grades: $3x_1 - 4x_2$,
homogener Bestandteil 0. Grades: 2.

Beispiel 3. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ ist homogen vom Grad 1 für $a_0 = 0$ (*Linearform*) und inhomogen für $a_0 \neq 0$. Das steht im Einklang mit der Homogenitätsdefinition der linearen Algebra (vgl. MfL Bd. 3, 5.1.). Zur Anpassung an die nichtlineare Algebra wäre für lineare Gleichungssysteme eine Schreibweise $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n + a_{i0} = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ anstelle von $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ $(i = 1, \ldots, m;\ a_{i0} = -b_i)$ vorzuziehen (vgl. Kap. 3).

Beispiel 4. Es sei

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2 + 7x_1 - 4x_3 + 20x_1^2 - 4x_1x_3 - 7x_2^2 + 5x_2x_3 + 8x_1^3 - 9x_3^3 \tag{36}$$

wiederum ein inhomogenes Polynom dritten Grades, also $h(f) = 3$.

Führen wir nun eine neue Variable x_0 ein und multiplizieren jedes Potenzprodukt von (36) mit einer Potenz von x_0 zur „Auffüllung", d. h. derart, daß insgesamt der Grad 3 herauskommt, so entsteht eine Form

$$F(x_0, x_1, x_2, x_3) = 2x_0^3 + 7x_0^2x_1 - 4x_0^2x_3 + 20x_0x_1^2 - 4x_0x_1x_3 - 7x_0x_2^2 + 5x_0x_2x_3 + 8x_1^3 - 9x_3^3. \tag{37}$$

Um für diesen Prozeß, den man *Homogenisierung* nennt, eine allgemeine Formel zu gewinnen, klammern wir in (37) den Faktor x_0^3 aus und haben im Quotientenkörper $K(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ (vgl. MfL Bd. 3, 13.6.)

$$\begin{aligned} F(x_0, x_1, x_2, x_3) &= x_0^3 \left(2 + 7\frac{x_1}{x_0} - 4\frac{x_3}{x_0} + 20\frac{x_1^2}{x_0^2} - 4\frac{x_1x_3}{x_0^2} - 7\frac{x_2^2}{x_0^2}\right. \\ &\qquad \left. + 5\frac{x_2x_3}{x_0^2} + 8\frac{x_1^3}{x_0^3} - 9\frac{x_3^3}{x_0^3}\right) \\ &= x_0^3 f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}\right) = x_0^{h(f)} f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}\right). \end{aligned}$$

Allgemein gilt die

Definition 25. Unter der *Homogenisierung* eines (inhomogenen oder homogenen) Polynoms $f(x_1, \ldots, x_n)$ versteht man den Übergang von $f(x_1, \ldots, x_n)$ zur äquivalenten

Form $F(x_0, \ldots, x_n)$ mit

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_n) := x_0^{h(f)} f\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right). \tag{38}$$

Der umgekehrte Prozeß wird als *Enthomogenisierung* bezeichnet:

$$F(1, x_1, \ldots, x_n) := f(x_1, \ldots, x_n). \tag{39}$$

Ist $f(x_1, \ldots, x_n)$ bereits in $x_1, \ldots, x_n$ homogen, so führt dieser Prozeß zu nichts Neuem, d. h., es gilt dann $f(x_1, \ldots, x_n) = F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$; beispielsweise ist

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 3x_1^3 + 2x_1^2x_2 - 5x_1x_2x_3 \\ &= x_0^3\left(3\,\frac{x_1^3}{x_0^3} + 2\,\frac{x_1^2}{x_0^2}\cdot\frac{x_2}{x_0} - 5\,\frac{x_1}{x_0}\cdot\frac{x_2}{x_0}\cdot\frac{x_3}{x_0}\right) = F(x_0, x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Insbesondere tritt also bei Potenzprodukten keine Änderung ein, womit die Festlegung in Definition 24 gerechtfertigt ist. Wir brauchen also im folgenden bei den Polynomen $f, g, \ldots$ aus $K[x_1, \ldots, x_n]$ die (zufällige) Homogenität nicht auszuschließen.

Sind $f(x_1, \ldots, x_n)$ und $g(x_1, \ldots, x_n)$ zwei Polynome, so gilt (vgl. MfL Bd. 3, 14.1., Satz 1)

$$h(fg) = h(f) + h(g) \tag{40}$$

und entsprechend für Formen $F(x_0, \ldots, x_n)$, $G(x_0, \ldots, x_n)$

$$h(FG) = h(F) + h(G). \tag{41}$$

Für den Grad der Summe $f + g$ müssen wir offenbar zwei Fälle unterscheiden:

$$h(f) \neq h(g) \Rightarrow h(f + g) = \operatorname{Max}\{h(f), h(g)\}, \tag{42}$$

$$h(f) = h(g) \Rightarrow h(f + g) \leqq h(f). \tag{43}$$

Entsprechendes gilt für die Differenz $f - g$ wegen $f - g = f + (-g)$.

In (43) tritt nun das $<$-Zeichen dann auf, wenn sich die Bestandteile höchsten Grades gegeneinander wegheben. Dies hat Konsequenzen für die Idealtheorie in Polynomringen. Dazu geben wir zunächst die

Definition 26. Ideale im Polynomring $K[x_1, \ldots, x_n]$ heißen ***inhomogene Polynomideale***, kurz P-Ideale, und werden im folgenden mit $(\mathfrak{a})$ bezeichnet.

Die Bezeichnung „inhomogene Polynomideale" soll nur bedeuten, daß in solchen Idealen inhomogene Polynome enthalten sind (in gewissem Gegensatz zu den noch zu definierenden homogenen Idealen).

Nun folgt die angekündigte Folgerung aus (43) für P-Ideale: Sind $f_1, \ldots, f_t$ Polynome aus einem Ideal $(\mathfrak{a}) \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ und sind $g_1, \ldots, g_t$ Polynome aus $K[x_1, \ldots, x_n]$, so ist auch $f = g_1 f_1 + \cdots + g_t f_t \in (\mathfrak{a})$, und es gilt wegen (43) und (40)

$$h(f) \leqq \text{Max}\,\{h(g_i) + h(f_i)\} \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, s. \tag{44}$$

Hierzu geben wir zwei Beispiele an.

Beispiel 1. $(\mathfrak{a}) = (f_1, f_2) \subset K[x]$ mit $f_1 = 4x - 1$, $f_2 = 2x - 5$; dann ist

$$19x - 16 = (x + 1)(4x - 1) + (-2x + 3)(2x - 5)$$

und

$$h(g_i) + h(f_i) = 2 \quad \text{für} \quad i = 1, 2,$$

aber $h(19x - 16) = 1$. Dieses Beispiel ist jedoch insofern nicht überzeugend, da (f_1, f_2) keine Basis minimaler Länge sein kann, weil $K[x]$ als euklidischer Ring ein Hauptidealring ist (vgl. MfL Bd. 3, 13.5., Satz 6); bei diesem Beispiel ist

$$(\mathfrak{a}) = (4x - 1, 2x - 5) = ((4x - 1) \sqcap (2x - 5))$$

das Einheitsideal wegen $1 = \frac{1}{9}(4x - 1) + \left(-\frac{2}{9}\right)(2x - 5)$.

Beispiel 2. Dieses Beispiel stammt von Macaulay (vgl. [2], S. 39). $(\mathfrak{a}) = (f_1, f_2) \subset K[x_1, x_2, x_3]$ mit $f_1 = x_1^2$, $f_2 = x_2 + x_1 x_3$. Dann ist

$$x_1 x_2 = (-x_3)\, x_1^2 + x_1(x_2 + x_1 x_3),$$

$$h(g_i) + h(f_i) = 3 \quad \text{für} \quad i = 1, 2,$$

hingegen $h(x_1 x_2) = 2$ und entsprechend

$$x_2^2 = (x_3^2)\, x_1^2 + (x_2 - x_1 x_3)(x_2 + x_1 x_3),$$

$$h(g_i) + h(f_i) = 4 \quad \text{für} \quad i = 1, 2 \quad \text{und} \quad h(x_2^2) = 2.$$

Derartige Gradüberschreitungen sind beim Rechnen mit P-Idealen sehr lästig. Man könnte daran denken, durch geeignete Wahl der Basis in (44) doch stets das Gleichheitszeichen zu erzwingen. Solche Basen nennt Macaulay *H-Basen*:

Definition 27. Eine Basis $(f_1, \ldots, f_t)$ eines P-Ideals $(\mathfrak{a})$ heißt *H-Basis*, wenn für jedes $f \in (\mathfrak{a})$ die Darstellung $f = g_1 f_1 + \cdots + g_t f_t$ so gewählt werden kann, daß $h(f) = \text{Max}\,\{h(g_i) + h(f_i)\}$ gilt.

Die Frage nach der Existenz von H-Basen werden wir auf dem Umweg über die Existenz äquivalenter H-Ideale gleich positiv beantworten (Satz 14).

Mit Hilfe der Syzygientheorie werden wir in Kapitel 5 zeigen können, daß im Fall des zweiten Beispiels $(f_1, f_2, x_1 x_2, x_2^2)$ eine H-Basis ist. Hier entsteht also die H-Basis durch *Verlängerung* der Ausgangsbasis, worauf auch schon Macaulay hinweist (vgl. [2], S. 39).

Doch kann es vorkommen, daß durch die hinzukommenden Elemente eine Streichung früherer Basiselemente möglich wird. Dies ist beispielsweise bei den Idealen (21) und (22) der Fall, wo die Berechnung der H-Basis auf x_1, x_2, x_3 führt, mit deren Hilfe alle ursprünglichen Basiselemente ausgedrückt und mithin gestrichen werden können. In diesen Fällen hat die H-Basis nach der Streichung weniger Elemente als die Ausgangsbasis; diese Möglichkeit bleibt bei MACAULAY unerwähnt. Bei den Idealen (21) und (22) führt die H-Basis sogar zu einer Basis minimaler Länge; ob dies allgemein eine Methode zur Gewinnung von Basen minimaler Länge darstellt, konnte noch nicht entschieden werden.

Es sei noch erwähnt, daß man gegebenenfalls H-Basen nur bezüglich bestimmter Elemente $x_1, \ldots, x_i$ $(i < n)$ benötigt; hierzu beachte man die von EMMY NOETHER angeregte und betreute Dissertation von GRETE HERMANN (vgl. [1], Satz 4).

Ausgangspunkt dieser Komplikationen war die Möglichkeit des Auftretens des $<$-Zeichens in (43). Um dies auszuschließen, muß man zu Formen F, G gleichen Grades übergehen, was gemäß (38) geschehen kann. Dann gilt:

$$h(F) = h(G) \Rightarrow h(F + G) = h(F). \tag{45}$$

Für $G = -F$, also $F + G = 0$, ist $h(0) = h(F)$ wegen (35) formal auch zutreffend.

Nun ist zwar das Produkt FG zweier Formen stets wieder eine Form, Summe (und Differenz) zweier Formen ergeben aber nur bei Gradgleichheit wieder eine Form. Will man sich auf Formen beschränken, so ergeben sich offenbar zwei Möglichkeiten:

(A) Man läßt Addition und Subtraktion von Formen nur bei Gradgleichheit zu. Das bedeutet eine Verletzung der Ring- und Idealeigenschaften. Man spricht daher dann auch von *gestuften* oder *graduierten Ringen* und von *gestuften* oder *graduierten Idealen* (vgl. GRÖBNER [9], § 4, III).

(B) Wir lassen das Auftreten inhomogener Polynome bei Operationen mit Formen zwar zu, verlangen aber, daß dann mit einem Polynom auch alle homogenen Bestandteile bereits zum Ideal gehören sollen. Damit gleichwertig ist offenbar die Eigenschaft, daß eine Basis aus lauter Formen existieren soll.

Wir wollen uns hier — um die Ringeigenschaften nicht einzuschränken — auf den Standpunkt (B) stellen, zumal bei unseren Anwendungen die Berechnung von Basen im Vordergrund stehen wird. Wir geben also die

Definition 28. Ein Ideal $\mathfrak{a}$ im Polynomring $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ heißt *homogenes Polynomideal*, kurz *H-Ideal*, wenn für $\mathfrak{a}$ wenigstens eine Basis aus lauter Formen besteht, was genau dann eintritt, wenn mit jedem inhomogenen Polynom aus $\mathfrak{a}$ alle homogenen Bestandteile bereits zu $\mathfrak{a}$ gehören.

Definition 29. Ein Ideal $\mathfrak{a}_\pi \subset K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ heißt *Potenzproduktideal*, wenn für $\mathfrak{a}_\pi$ wenigstens eine Basis aus lauter Potenzprodukten existiert; Schreibweise:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_\pi &= \left(x_{11}^{c_{11}} x_{12}^{c_{12}} \cdots x_{1m_1}^{c_{1m_1}}, \ldots, x_{s1}^{c_{s1}} x_{s2}^{c_{s2}} \cdots x_{sm_s}^{c_{sm_s}}\right) \\ \text{mit} \quad c_{ik} &\geqq 1 \quad \text{und} \quad x_{ik} \in (x_0, x_1, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{46}$$

Die Ausschaltung der 0 als Exponent in (46) erweist sich für das weitere Rechnen mit Potenzproduktidealen als unumgänglich.

Die Gesamtheit derjenigen Formen $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $G(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ aus dem Polynomring $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, die nach Enthomogenisierung in einem vorgegebenen P-Ideal $(\mathfrak{a}) \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ liegen, liefert ein H-Ideal $\mathfrak{a} \subset K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ wegen:

$$F(1, x_1, \ldots, x_n) \in (\mathfrak{a}) \wedge G(1, x_1, \ldots, x_n) \in (\mathfrak{a}) \Rightarrow (F - G)\,(1, x_1, \ldots, x_n) \in (\mathfrak{a})$$

und

$$F(1, x_1, \ldots, x_n) \in (\mathfrak{a}) \wedge H(1, x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n] \Rightarrow (HF)\,(1, x_1, \ldots, x_n) \in (\mathfrak{a});$$

$\mathfrak{a}$ enthält alle durch Homogenisierung (38) entstehenden Formen $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ und Produkte $x_0{}^k F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ mit $k \in \mathbf{N}$ (vgl. van der Waerden [3], §3, Satz 7, 8), also alle Formen der Gestalt (vgl. Gröbner [2], 124.4 b)

$$x_0{}^k F(x_0, x_1, \ldots, x_n) := x_0{}^{k+h(f)} f\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right), \qquad k \in \mathbf{N}. \tag{47}$$

Definition 30. Das aus einem P-Ideal $(\mathfrak{a}) \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ gemäß (47) hervorgehende H-Ideal $\mathfrak{a} \subset K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ heißt das zu $(\mathfrak{a})$ *äquivalente H-Ideal* $\mathfrak{a}$.

In der Literatur wird das äquivalente H-Ideal häufig mit $\mathfrak{a}_0$ bezeichnet (vgl. Gröbner [2, 8, 9]). Einleuchtend ist auch die Bezeichnung

$$(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}|_{x_0=1}, \tag{48}$$

die den Sachverhalt von (47) und Definition 30 am kürzesten wiedergibt.

Da wir in einem Noetherschen Ring sind, besitzt $\mathfrak{a}$ eine endliche Basis

$$\mathfrak{a} = \big(F_1(x_0, x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_s(x_0, x_1, \ldots, x_n)\big), \tag{49}$$

und nach Eigenschaft der H-Ideale treten *keine* Gradüberschreitungen mehr auf, d. h., aus $F = G_1F_1 + \cdots + G_sF_s$ folgt

$$h(F) = h(G_1) + h(F_1) = \cdots = h(G_s) + h(F_s).$$

Mithin ist durch $F_1(1, x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_s(1, x_1, \ldots, x_n)$ eine H-Basis für das inhomogene P-Ideal $(\mathfrak{a})$ gegeben.

Satz 14. *Eine H-Basis für ein inhomogenes P-Ideal* $(\mathfrak{a}) \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ *entsteht durch Enthomogenisierung der Basisformen des äquivalenten H-Ideals* $\mathfrak{a} \subset [Kx_0, x_1, \ldots, x_n]$.

Damit drängt sich die Frage auf, *wie man äquivalente H-Ideale berechnen* kann. Auf diese Aufgabe werden wir in Abschnitt 1.16. über Idealquotienten und in Kapitel 5 über Syzygientheorie eingehen. Weiterhin werden wir auf äquivalente H-Ideale in Kapitel 4 zurückkommen.

Bei der Behandlung *linearer Gleichungssysteme*

$$a_{i0} + a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m;\; a_{i0} = -b_i) \tag{50}$$

führt die Homogenisierung (38) zu

$$a_{i0}x_0 + a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m;\; a_{i0} = -b_i), \tag{51}$$

und in der Literatur spricht man dann vom „homogen machen" (vgl. NEISS [1], § 29, Anfang; dort wird wie manchmal in der älteren Literatur x_{n+1} anstelle von x_0 gesetzt). Doch lohnt sich das nicht so recht, da man den entscheidenden *Gaußschen Algorithmus* auch bei inhomogenen linearen Gleichungssystemen anwenden kann; man gewinnt lediglich die Aussage: (50) ist genau dann unlösbar, wenn $x_0 = 0$ für *alle* Lösungen von (51) gilt.

Der entscheidende Grund zur Einführung von H-Idealen ist aus algebraischer Sicht die Möglichkeit, den Gaußschen Algorithmus übertragen und damit verschiedene Rechenprozesse effektiv durchführen zu können. Die geometrische Interpretation durch die projektive Geometrie (vgl. MfL Bd. 7) steht dazu nicht im Widerspruch, wenn man bedenkt, daß gewisse durch Rechenprozesse zu bewältigende Probleme erst in projektiven Räumen sinnvoll werden.

Grundlage für die Übertragung des Gaußschen Algorithmus bilden die beiden folgenden Sätze.

Satz 15. *Alle Formen eines festen Grades t aus $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ bilden einen K-Modul $\mathfrak{M}(t; (x_0, x_1, \ldots, x_n))$.*

Beweis. Die Differenz $F - G$ zweier Formen t-ten Grades ist wieder eine Form t-ten Grades; das Produkt von F mit einem Körperelement ist wieder vom Grad t, wenn F den Grad t hat.

Satz 16. *Eine linear unabhängige Modulbasis von $\mathfrak{M}(t; (x_0, x_1, \ldots, x_n))$ wird durch alle Potenzprodukte t-ten Grades in $x_0, x_1, \ldots, x_n$ gegeben.*

Beweis. Daß die Potenzprodukte t-ten Grades in $x_0, x_1, \ldots, x_n$ eine Basis bilden, ist evident; die lineare Unabhängigkeit folgt aus der Verschiedenheit der Potenzprodukte.

Hieraus folgt sofort

Satz 17. *Alle Formen eines festen Grades t aus einem H-Ideal $\mathfrak{a} \subset K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ bilden einen Modul $\mathfrak{M}(t; \mathfrak{a})$, der ein Untermodul von $\mathfrak{M}(t; (x_0, \ldots, x_n))$ ist.*

Satz 18. *Eine linear unabhängige Modulbasis von $\mathfrak{M}(t; \mathfrak{a})$ kann aus einer Basis von $\mathfrak{a}$ mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus in endlich vielen Schritten berechnet werden.*

Beweis. Wir numerieren die Potenzprodukte $p_1, p_2, \ldots$ in irgendeiner Weise (vgl. 7.1. bis 7.4.) und führen nach diesen Potenzprodukten den Gaußschen Algorithmus durch wie in der linearen Algebra nach $x_1, x_2, \ldots$ (vgl. MfL Bd. 3, 5.4.). Demzufolge gilt auch

Satz 19. *Alle linear unabhängigen Modulbasen von $\mathfrak{M}(t; \mathfrak{a})$ bestehen aus der gleichen Anzahl von Elementen.*

Satz 20. *Ist $\mathfrak{a} \subset K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ein H-Ideal, so kann eine Minimalbasis von $\mathfrak{a}$ aus der vorgegebenen Basis von $\mathfrak{a}$ in endlich vielen Schritten bestimmt werden.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_s)$ eine Basisdarstellung und o.B.d.A.

$$m_0 := h(F_1) \leqq h(F_2) \leqq \cdots \leqq h(F_s) =: M \qquad (52)$$
$$(m_0 \textit{ Minimalgrad, } M \textit{ Maximalgrad}).$$

Wir bilden nun nacheinander $\mathfrak{M}(m_0; \mathfrak{a})$, $\mathfrak{M}(m_0 + 1; \mathfrak{a}), \ldots, \mathfrak{M}(M; \mathfrak{a})$. Zu $\mathfrak{M}(m_0; \mathfrak{a})$ gehören alle Basisformen m_0-ten Grades. Ob diese linear unabhängig sind, kann mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus für $t = m_0$ entschieden werden. Zu $\mathfrak{M}(m_0 + 1; \mathfrak{a})$ gehören alle jeweils mit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ multiplizierten Elemente aus $\mathfrak{M}(m_0; \mathfrak{a})$ und die Basiselemente $(m_0 + 1)$-ten Grades (falls solche existieren), von denen die linear abhängigen gestrichen werden können. So fährt man fort bis zum Grad M.

Beispiel. Es sei $\mathfrak{a} = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$ mit

$$F_1 = x_0x_3 - x_1x_2, \qquad F_2 = x_0^2x_2 - x_1^3,$$
$$F_3 = x_0x_2^2 - x_1^2x_3, \qquad F_4 = x_0x_2x_3 - x_1x_2^2, \qquad F_5 = x_1x_3^2 - x_2^3.$$

Hier ist $m_0 = 2$, $M = 3$. $\mathfrak{M}(2; \mathfrak{a})$ wird gebildet aus F_1 allein, welches mithin linear unabhängig ist. Zur Aufstellung von $\mathfrak{M}(3; \mathfrak{a})$ benutzen wir nun 7.2. Dann ist

$$x_0F_1 = p_4 - p_6, \qquad x_1F_1 = p_7 - p_{12}, \qquad x_2F_1 = p_9 - p_{14}, \qquad x_3F_1 = p_{10} - p_{15},$$
$$F_2 = p_3 - p_{11}, \qquad F_3 = p_8 - p_{13}, \qquad F_4 = p_9 - p_{14}, \qquad F_5 = p_{16} - p_{17}.$$

Wir ordnen nach den ersten Potenzprodukten:

$$F_2 = p_3 - p_{11}, \qquad x_0F_1 = p_4 - p_6, \qquad x_1F_1 = p_7 - p_{12}, \qquad F_3 = p_8 - p_{13},$$
$$x_2F_1 = p_9 - p_{14}, \qquad F_4 = p_9 - p_{14}, \qquad x_3F_1 = p_{10} - p_{15}, \qquad F_5 = p_{16} - p_{17},$$

und hieraus ist $F_4 = x_2F_1$ sofort ersichtlich. Mithin kann F_4 gestrichen werden, und (F_1, F_2, F_3, F_5) ist eine Minimalbasis.

Aus dem Beweisverfahren folgt, daß in zwei verschiedenen Minimalbasen für ein und dasselbe H-Ideal $\mathfrak{a}$ die Gradzahlen m_0 und M übereinstimmen und die Anzahl der Basisformen mit den Gradzahlen $m_0, m_0 + 1, \ldots, M$ in beiden Minimalbasen jeweils gleich ist. Um dies einfacher formulieren zu können, führen wir eine Bezeichnung ein, die wir später ohnehin benötigen werden.

Definition 31. Ist $\mathfrak{a} \subset K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ein H-Ideal mit der Minimalbasis

$$\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_s), \qquad (53)$$

so heißt

$$\big(h(F_1), \ldots, h(F_s)\big) \qquad (54)$$

der zu (53) gehörige *Gradvektor*.

Dann gilt also der

Satz 21. *Alle Minimalbasen ein und desselben H-Ideals* $\mathfrak{a} \subset K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *haben bei Anordnung der Basisformen nach steigenden Gradzahlen gemäß* (52) *übereinstimmende Gradvektoren. Insbesondere haben also alle Minimalbasen von* $\mathfrak{a}$ *dieselbe Länge.*

Daraus folgt unmittelbar der

Satz 22. *Bei H-Idealen fallen die Begriffe „Minimalbasis" und „Basis minimaler Länge" zusammen.*

1.8. Die Idealsumme

Wir wollen nun Rechenoperationen für Ideale einführen. Dazu wollen wir R als Noetherschen Ring voraussetzen, auch wenn dies für die zu betrachtenden Operationen nicht erforderlich ist.

Ausgehend von der mengentheoretischen Betrachtungsweise könnte man dabei zunächst an die Vereinigungsmenge $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ im mengentheoretischen Sinne denken. Aber $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ ist noch *kein* Ideal, denn ist $a \in \mathfrak{a}$, $a \notin \mathfrak{b}$, $b \notin \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$, so ist $a + b \notin \mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ im Widerspruch zur Idealeigenschaft (3). Um das kleinste Oberideal zu erhalten, welches $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ umfaßt, müssen alle Summen $a + b$ mit $a \in \mathfrak{a}$ und $b \in \mathfrak{b}$ mit berücksichtigt werden. Dies reicht aber schon aus, denn die für kommutative Ringe R mit Einselement charakteristische Bedingung (3) ist erfüllt:

$$a \in \mathfrak{a} \wedge b \in \mathfrak{b} \Rightarrow ra \in \mathfrak{a} \wedge sb \in \mathfrak{b};$$

mithin ist $ra + sb$ aus dem zu definierenden Ideal.

Definition 32. Unter der *Idealsumme* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} := (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ zweier Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ aus einem Noetherschen Ring R versteht man die Gesamtheit der Elemente $a + b$ mit $a \in \mathfrak{a}$ und $b \in \mathfrak{b}$; entsprechend werden mehrgliedrige Idealsummen $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}, \ldots$ usw. definiert.

Nach dem vorher Gesagten gilt dann der

Satz 23. *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *Ideale aus einem Noetherschen Ring* R, *so ist* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ *ebenfalls ein Ideal aus* R.

Die Basisschreibweise

$$\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_s) \tag{55}$$

steht in Einklang mit der Schreibweise $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ für die Idealsumme. Die Schreibweise

(55) bedeutet doch, daß alle Elemente aus $\mathfrak{a}$ in der Gestalt $r_1 a_1 + \cdots + r_s a_s$ darstellbar sind; es ist also

$$\mathfrak{a} = (a_1) + (a_2) + \cdots + (a_s) = \big((a_1), (a_2), \ldots, (a_s)\big),$$

womit die Schreibweise (55) motiviert ist. Umgekehrt ist die Schreibweise $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ für $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ durch die Schreibweise (55) gerechtfertigt.

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich unmittelbar der

Satz 24. *Hat $\mathfrak{a}$ die Basisdarstellung*

$$\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_s) \tag{55}$$

und $\mathfrak{b}$ die Basisdarstellung

$$\mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_t), \tag{56}$$

so hat $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ die Basisdarstellung

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_t). \tag{57}$$

Aus Satz 24 folgt unmittelbar

Satz 25. *Die Idealsumme zweier Potenzproduktideale ist wieder ein Potenzproduktideal.*

Satz 26. *Ist $(a_1, \ldots, a_s)$ eine Minimalbasis für $\mathfrak{a}$ und ist $(b_1, \ldots, b_t)$ eine Minimalbasis für $\mathfrak{b}$, so braucht $(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_t)$ keine Minimalbasis für $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ zu sein.*

Beispiel 1.

$$\mathfrak{a} = (x_1 + x_2, x_2x_3, x_3^2 - x_4x_5), \qquad \mathfrak{b} = (x_1 + x_2, x_2x_4, x_4^2 - x_5^2),$$
$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (x_1 + x_2, x_2x_3, x_3^2 - x_4x_5, x_1 + x_2, x_2x_4, x_4^2 - x_5^2);$$

hier tritt das Element $x_1 + x_2$ doppelt auf und kann einmal gestrichen werden.

Beispiel 2.

$$\mathfrak{a} = (x_1 + x_2, x_2x_3, x_3^2 - x_4x_5), \qquad \mathfrak{c} = (x_1^2 - x_2^2, x_2x_4, x_4^2 - x_5^2),$$
$$\mathfrak{a} + \mathfrak{c} = (x_1 + x_2, x_2x_3, x_3^2 - x_4x_5, x_1^2 - x_2^2, x_2x_4, x_4^2 - x_5^2);$$

hier kann $x_1^2 - x_2^2$ gestrichen werden wegen $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = (x_1 - x_2)\, a_1$.

Aus (57) folgt ferner

Satz 27. *Die Bildung von Idealsummen ist kommutativ und assoziativ; es gilt also*

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \tag{58}$$

und

$$\big((\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}\big) = \big(\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})\big). \tag{59}$$

Unmittelbar einzusehen ist auch

Satz 28. *Für Oberideale* $\mathfrak{c}$ *gilt*

$$\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{c} \Rightarrow \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a} + \mathfrak{c}. \tag{60}$$

Wie die beiden Beispiele von oben zeigen, kann dabei der Fall $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{c} \Rightarrow \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{a} + \mathfrak{c}$ durchaus eintreten.

1.9. Das Idealprodukt

Wir gehen hierbei aus von der Menge aller Elemente ab mit $a \in \mathfrak{a}$ und $b \in \mathfrak{b}$ und stellen ähnliche Überlegungen an wie beim Übergang von der Vereinigungsmenge zweier Ideale zur Idealsumme. Die Gesamtheit der Elemente ab kann kein Ideal bilden, weil die Idealeigenschaft (1) und damit die Idealeigenschaft (3) nicht erfüllt sind. Es muß also zusätzlich gefordert werden, daß mit $a_{h_1}b_{j_1}, a_{h_2}b_{j_2}, \ldots, a_{h_m}b_{j_m}$ auch alle endlichen Summen $a_{h_1}b_{j_1} + a_{h_2}b_{j_2} + \cdots + a_{h_m}b_{j_m}$ zu unserer Menge gehören müssen, damit diese ein Ideal wird. Daß dies genügt, folgt aus der Gültigkeit von (3). Wir haben also die

Definition 33. Unter dem *Idealprodukt* $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ zweier Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ aus einem Noetherschen Ring R versteht man die Gesamtheit der Elemente $a_{h_1}b_{j_1} + \cdots + a_{h_m}b_{j_m}$ mit $a_{h_i} \in \mathfrak{a}$ und $b_{j_k} \in \mathfrak{b}$; entsprechend werden mehrgliedrige Idealprodukte $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}, \ldots$ usw. definiert.

Satz 29. *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *Ideale aus einem Noetherschen Ring* R, *so ist* $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ *ebenfalls ein Ideal aus* R.

Gelten für $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ wieder die Basisdarstellungen (55) und (56) und drücken wir die Elemente a_{h_i} durch $a_1, \ldots, a_s$ und die Elemente b_{j_k} durch $b_1, \ldots, b_t$ aus, so ergibt sich durch Zusammenfassen gleicher Produkte $a_i b_k$ der

Satz 30. *Hat* $\mathfrak{a}$ *die Basisdarstellung* (55) *und* $\mathfrak{b}$ *die Basisdarstellung* (56), *so hat* $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ *die Basisdarstellung*

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = (a_1b_1, a_1b_2, \ldots, a_1b_t, a_2b_1, \ldots, a_2b_t, \ldots, a_ib_k, \ldots, a_sb_t). \tag{61}$$

In (61) stehen st Basiselemente a_ib_k $(i = 1, \ldots, s; k = 1, \ldots, t)$. Aus (61) folgt sofort

Satz 31. *Das Idealprodukt zweier Potenzproduktideale ist wieder ein Potenzproduktideal.*

Satz 32. *Ist* $(a_1, \ldots, a_s)$ *eine Minimalbasis für* $\mathfrak{a}$ *und ist* $(b_1, \ldots, b_t)$ *eine Minimalbasis für* $\mathfrak{b}$, *so braucht* $(a_1b_1, a_2b_1, \ldots, a_sb_t)$ *keine Minimalbasis für* $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ *zu sein.*

Beispiel 1.

$$\mathfrak{a} = (x_1^2, x_1x_3, x_2^2), \qquad \mathfrak{b} = (x_1x_2, x_2x_3),$$

$$\mathfrak{ab} = (x_1^3x_2, x_1^2x_2x_3, x_1^2x_2x_3, x_1x_2x_3^2, x_1x_2^3, x_2^3x_3);$$

hier tritt das Element $x_1^2x_2x_3$ doppelt auf und kann einmal gestrichen werden.

Beispiel 2.

$$\mathfrak{a} = (x_1, x_2x_4, x_3^2), \qquad \mathfrak{b} = (x_1x_2, x_2x_3),$$

$$\mathfrak{ab} = (x_1^2x_2, x_1x_2x_3, x_1x_2^2x_4, x_2^2x_3x_4, x_1x_2x_3^2, x_2x_3^3);$$

hier kann $x_1x_2x_3^2$ als Vielfaches von $x_1x_2x_3$ gestrichen werden.

Aus (61) folgt

Satz 33. *Die Bildung von Idealprodukten ist kommutativ und assoziativ; es gilt also*

$$\mathfrak{ab} = \mathfrak{ba} \tag{62}$$

und

$$\big((\mathfrak{ab})\mathfrak{c}\big) = \big(\mathfrak{a}(\mathfrak{bc})\big). \tag{63}$$

Unmittelbar einzusehen ist

Satz 34. *Für Oberideale gilt*

$$\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{ac} \subseteqq \mathfrak{bc}. \tag{64}$$

Aus (57) und (61) folgt ferner

Satz 35. *Die Bildung von Idealsummen und Idealprodukten ist distributiv:*

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{ac} + \mathfrak{bc}, \tag{65}$$

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{ab} + \mathfrak{ac}. \tag{66}$$

Dabei ergibt sich (66) aus (65) und (62) und umgekehrt.

Es sei nun c ein beliebiges Element aus $\mathfrak{ab}$. Wegen (61) gilt dann

$$\begin{aligned} c &= r_{11}a_1b_1 + r_{12}a_1b_2 + \cdots + r_{ik}a_ib_k + \cdots + r_{st}a_sb_t \\ &= (r_{11}b_1 + \cdots + r_{1t}b_t)\,a_1 + \cdots + (r_{s1}b_1 + \cdots + r_{st}b_t)a_s \in \mathfrak{a} \\ &= (r_{11}a_1 + \cdots + r_{s1}a_s)b_1 + \cdots + (r_{1t}a_1 + \cdots + r_{st}a_s)b_t \in \mathfrak{b}, \end{aligned}$$

mithin gilt

Satz 36. *Für Idealprodukte gilt*

$$\mathfrak{ab} \subseteqq \mathfrak{a}, \tag{67}$$

$$\mathfrak{ab} \subseteqq \mathfrak{b}, \tag{68}$$

$$\mathfrak{ab} + \mathfrak{c} \supseteqq (\mathfrak{a} + \mathfrak{c})\,(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}). \tag{69}$$

Dabei folgt (69) unschwer aus (67) und (68). Als Beispiel für das Auftreten von $\supset$ in (69) betrachte man

$$\mathfrak{a} = (x_1), \quad \mathfrak{b} = (x_2), \quad \mathfrak{c} = (x_1 + x_2), \quad \mathfrak{a} + \mathfrak{c} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = (x_1, x_2),$$

also

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{c})(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (x_1^2, x_1x_2, x_2^2) \subset (x_1x_2, x_1 + x_2) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{c}.$$

Definition 34. Bei gleichen Faktoren in Idealprodukten ($\mathfrak{b} = \mathfrak{a}, \mathfrak{c} = \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ usw.) spricht man von *Idealpotenzen* $\mathfrak{a}^2, \mathfrak{a}^3, \ldots$ Ferner gilt

$$\mathfrak{a}^0 := (1).$$

Aus (61) folgt unmittelbar

Satz 37. *Ist* $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_s)$ *die Basis eines Ideals, so gilt für die Idealpotenzen*

$$\mathfrak{a}^2 = (a_1^2, a_1a_2, \ldots, a_1a_s, a_2^2, a_2a_3, \ldots, a_2a_s, \ldots, a_{s-1}a_s, a_s^2), \tag{70}$$

$$\mathfrak{a}^3 = (a_1^3, a_1^2a_2, \ldots, a_1a_s^2, a_2^3, a_2^2a_3, \ldots, a_2a_s^2, \ldots, a_{s-1}a_s^2, a_s^3), \tag{71}$$

....

$$\mathfrak{a}^m = (a_1^m, a_1^{m-1}a_2, \ldots, a_1a_s^{m-1}, a_2^m, \ldots, a_{s-1}a_s^{m-1}, a_s^m). \tag{72}$$

Ist durch (55) eine Minimalbasis gegeben, so brauchen (70), (71), (72) keine Minimalbasen zu sein; dafür geben wir ein Beispiel an.

Beispiel. $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ mit $a_1 = x_1^2, a_2 = x_1x_2, a_3 = x_1x_3, a_4 = x_2x_3$. Bei der Berechnung von $\mathfrak{a}^2$ gemäß (70) tritt $x_1^2x_2x_3$ zweimal auf wegen $a_1a_4 = a_2a_3 = x_1^2x_2x_3$, kann also einmal gestrichen werden.

Aus (67) folgt

Satz 38. *Für Idealpotenzen gilt*

$$\mathfrak{a} \supseteqq \mathfrak{a}^2 \supseteqq \mathfrak{a}^3 \supseteqq \cdots. \tag{73}$$

Beispielsweise für Polynomideale aus $\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$ ist (73) eine echte Vielfachenkette, die mithin nicht abbricht; dies unterstreicht die vorerwähnte Bedeutsamkeit für Artinsche Ringe.

Zum Abschluß der Betrachtungen über Idealprodukte und anknüpfend an MfL Bd. 3, 13.5.1., wollen wir noch anhand eines Beispiels die historische Entwicklung zur Idealtheorie andeuten. In $R = \mathbf{Z}\left[\sqrt{10}\right]$ hat 10 die beiden verschiedenen Zerlegungen in Primelemente $10 = 2 \cdot 5$ und $10 = \sqrt{10} \cdot \sqrt{10}$. Mit Hilfe der Idealtheorie ergibt sich die *eindeutige* Zerlegung als Idealprodukt

$$(10) = \left(2, \sqrt{10}\right)^2 \cdot \left(5, \sqrt{10}\right)^2 \tag{74}$$

von vier Idealen. Je nachdem, wie man dies als Produkt von zwei Faktoren zusammenfaßt, ergibt sich die eine oder die andere Zerlegung wegen

$$\begin{aligned}
&\left(2, \sqrt{10}\right)^2 = \left(4, 2\sqrt{10}, 10\right) = \left(2, 2\sqrt{10}\right) = (2),\\
&\left(5, \sqrt{10}\right)^2 = \left(25, 5\sqrt{10}, 10\right) = \left(5, 5\sqrt{10}\right) = (5),\\
&\left(2, \sqrt{10}\right)\left(5, \sqrt{10}\right) = \left(10, 5\sqrt{10}, 2\sqrt{10}\right) = \left(10, \sqrt{10}\right) = \left(\sqrt{10}\right).
\end{aligned}$$

Für diese zahlentheoretische Richtung der Idealtheorie sei auf HECKE [1] und EICHLER [1] verwiesen.

1.10. Das Radikal eines Ideals

Wenn man von Idealen Potenzen bilden kann, so liegt die Frage nahe, ob man auch umgekehrt Wurzelziehen kann. Dazu wird der Begriff „Radikal" eingeführt, der auf KRULL (1931) zurückgeht, in die Lehrbuchliteratur aber erst 1953 von NORTHCOTT [1] aufgenommen wurde. Inzwischen sind hierzu moderne Theorien entwickelt worden (vgl. KERTÉSZ [2], SZÁSZ [1]), Satz 31.1, S. 151).

Definition 35. Ist R ein Noetherscher Ring, so versteht man unter dem *Radikal* $\operatorname{Rad} \mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ eines Ideals $\mathfrak{a} \subset R$ die Gesamtheit derjenigen Ringelemente w, von denen eine gewisse Potenz in $\mathfrak{a}$ liegt:

$$\operatorname{Rad} \mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}} := \left\{w \colon \bigvee_{x \in \mathbf{N}} w^x \in \mathfrak{a}\right\}. \tag{75}$$

Der kleinste Exponent x mit $w^x \in \mathfrak{a}$ heißt *Exponent* des Elementes w:

$$\varrho(w)\ \textit{Exponent}\ \text{von}\ w \colon \Leftrightarrow w^{\varrho(w)-1} \notin \mathfrak{a} \wedge w^{\varrho(w)} \in \mathfrak{a}. \tag{76}$$

Satz 39. Rad $\mathfrak{a}$ *ist ein Ideal aus* R.

Beweis. Es ist (3) nachzuweisen. Wir zeigen das gleich für mehrgliedrige Ausdrücke

$$w = r_1 w_1 + r_2 w_2 + \cdots + r_k w_k. \tag{77}$$

Es sei also

$$w_1^{\varrho_1} \in \mathfrak{a}, \quad w_2^{\varrho_2} \in \mathfrak{a}, \quad \ldots, \quad w_k^{\varrho_k} \in \mathfrak{a}, \tag{78}$$

und es ist die Existenz natürlicher Zahlen x nachzuweisen mit

$$w^x = (r_1 w_1 + r_2 w_2 + \cdots + r_k w_k)^x \in \mathfrak{a}. \tag{79}$$

Multiplizieren wir (79) aus, so erhalten wir homogene Polynome vom Grad x in $w_1, \ldots, w_k$ mit Potenzprodukten der Bauart $w_1^{i_1} w_2^{i_2} \cdots w_k^{i_k}$ und $i_1 + i_2 + \cdots + i_k = x$. Wenn nun $w^x \notin \mathfrak{a}$ ist, existiert wenigstens ein Potenzprodukt $w_1^{i_1} w_2^{i_2} \cdots w_k^{i_k} \notin \mathfrak{a}$, für welches wegen (78)

$$i_1 \leqq \varrho_1 - 1, \quad i_2 \leqq \varrho_2 - 1, \quad \ldots, \quad i_k \leqq \varrho_k - 1 \tag{80}$$

gelten muß. Aus $w^x \notin \mathfrak{a}$ folgt mithin $i_1 + i_2 + \cdots + i_k = x \leqq \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_k - k$. Ist also

$$x \geqq \tau \quad \text{mit} \quad \tau := \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_k - k + 1, \tag{81}$$

so ist (79) erfüllt, q.e.d.

Da $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem Noetherschen Ring ist, existiert eine endliche Basis, etwa

$$\operatorname{Rad} \mathfrak{a} = (w_1, \ldots, w_k). \tag{82}$$

Mit dem soeben geführten Beweis haben wir dann auch den

Satz 40. *Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem Noetherschen Ring R, so existieren Exponenten x mit*

$$(\operatorname{Rad} \mathfrak{a})^x \subseteqq \mathfrak{a} \subseteqq \operatorname{Rad} \mathfrak{a}. \tag{83}$$

Satz 40 wird sich als einer der bedeutungsvollsten Sätze der Idealtheorie herausstellen. Die Teilaussage $\mathfrak{a} \subseteqq \operatorname{Rad} \mathfrak{a}$ von (83) folgt unmittelbar aus Definition 35.

Definition 36. Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem Noetherschen Ring R, so heißt der kleinste Exponent ϱ, für den (83) gilt, der *Exponent* von $\mathfrak{a}$:

$$\varrho \textit{ Exponent} \text{ von } \mathfrak{a} :\Leftrightarrow (\operatorname{Rad} \mathfrak{a})^{\varrho-1} \not\subseteqq \mathfrak{a} \wedge (\operatorname{Rad} \mathfrak{a})^{\varrho} \subseteqq \mathfrak{a}; \tag{84}$$

insbesondere gilt also

$$\varrho \leqq \tau. \tag{85}$$

Aus Definition 35 ergeben sich unmittelbar die folgenden *Rechenregeln für Radikale*:

Satz 41. *Für die Radikalbildung gelten:*

$$\operatorname{Rad} (\operatorname{Rad} \mathfrak{a}) = \operatorname{Rad} \mathfrak{a}, \tag{86}$$

$$\operatorname{Rad} (\mathfrak{a}^k) = \operatorname{Rad} \mathfrak{a}, \tag{87}$$

$$\operatorname{Rad} (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}^k) = \operatorname{Rad} (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}), \tag{88}$$

$$\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{b} \Rightarrow \operatorname{Rad} \mathfrak{a} \subseteqq \operatorname{Rad} \mathfrak{b}. \tag{89}$$

In (89) ist folgendes möglich: $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \Rightarrow \operatorname{Rad} \mathfrak{a} = \operatorname{Rad} \mathfrak{b}$.
Beispielsweise gilt dies für geeignete $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^2$.

Ist ein Ideal $\mathfrak{a}$ gegeben, also eine Basis von $\mathfrak{a}$ bekannt, so kann Rad $\mathfrak{a}$, also die Basis von Rad $\mathfrak{a}$, nur unter größten Anstrengungen und Schwierigkeiten berechnet werden. Lediglich bei Potenzproduktidealen ist es möglich, aus der Basis von $\mathfrak{a}_\pi$ die Basis von Rad $\mathfrak{a}_\pi$ unmittelbar anzugeben.

Satz 42. *Ist* $\mathfrak{a}_\pi$ *ein Potenzproduktideal mit der Basis* (46), *so ist* Rad $\mathfrak{a}_\pi$ *gegeben durch*

$$\operatorname{Rad} \mathfrak{a}_\pi = (x_{11}x_{12} \cdots x_{1m_1}, \ldots, x_{s1}x_{s2} \cdots x_{sm_s}). \tag{90}$$

Beweis. Es sei

$$\mathfrak{b}_\pi := (x_{11}x_{12} \cdots x_{1m_1}, \ldots, x_{s1}x_{s2} \cdots x_{sm_s}),$$

ferner

$$c_1 := \operatorname{Max}\{c_{1\mu_1}\} \quad (\mu_1 = 1, \ldots, m_1), \quad \ldots, \quad c_s := \operatorname{Max}\{c_{s\mu_s}\} \quad (\mu_s = 1, \ldots, m_s),$$

dann gilt

$$(x_{11} \cdots x_{1m_1})^{c_1} \in \mathfrak{a}_\pi, \quad \ldots, \quad (x_{s1} \cdots x_{sm_s})^{c_s} \in \mathfrak{a}_\pi,$$

also $\mathfrak{b}_\pi{}^\tau \subseteqq \mathfrak{a}_\pi$ mit $\tau = c_1 + c_2 + \cdots + c_s - s + 1$ nach (81); weiterhin ist offenbar $\mathfrak{a}_\pi \subseteqq \mathfrak{b}_\pi$, also insgesamt

$$\mathfrak{b}_\pi{}^\tau \subseteqq \mathfrak{a}_\pi \subseteqq \mathfrak{b}_\pi. \tag{91}$$

Mit (87) und (89) folgt aus (91) aber Rad $\mathfrak{b}_\pi \subseteqq$ Rad $\mathfrak{a}_\pi \subseteqq$ Rad $\mathfrak{b}_\pi$, also

$$\operatorname{Rad} \mathfrak{a}_\pi = \operatorname{Rad} \mathfrak{b}_\pi. \tag{92}$$

Da in $\mathfrak{b}_\pi$ alle Variablen der Basiselemente nur in der ersten Potenz auftreten, ist Rad $\mathfrak{b}_\pi = \mathfrak{b}_\pi$, wegen (92) also insgesamt Rad $\mathfrak{a}_\pi = \mathfrak{b}_\pi$, q.e.d.

Zwei Schlüsse aus diesem Beweis wollen wir noch allgemein formulieren. Dazu geben wir die

Definition 37. Ideale $\mathfrak{a}$ mit Rad $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ heißen *halbprim* oder *semiprim*.

Semiprime Ideale stellen eine Verallgemeinerung der Primideale dar, welche wir in 2.2. einführen werden. Die Bezeichnung „halbprim" wurde von Krull geprägt; neuerdings ist die Bezeichnung „semiprim" gebräuchlicher.

Satz 43. *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zwei Ideale aus einem Noetherschen Ring* R, *dann gilt:*

$$\mathfrak{b}^\varrho \subseteqq \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{b} \Rightarrow \operatorname{Rad} \mathfrak{a} = \operatorname{Rad} \mathfrak{b}, \tag{93}$$

$$\mathfrak{b} \textit{ semiprim} \wedge \mathfrak{b}^\varrho \subseteqq \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{b} \Rightarrow \operatorname{Rad} \mathfrak{a} = \mathfrak{b}. \tag{94}$$

Es erweist sich als bedeutungsvoll, nach der Umkehrung von (93) zu fragen. Dies führt zur Bildung von *Klassen von Idealen mit demselben Radikal.*

Definition 38. Zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ eines Noetherschen Ringes heißen *äquivalent*, wenn ihre Radikale übereinstimmen:

$$\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b} :\Leftrightarrow \operatorname{Rad} \mathfrak{a} = \operatorname{Rad} \mathfrak{b}. \tag{95}$$

Offenbar gilt:

Satz 44. *Durch* (95) *ist eine Äquivalenzrelation gegeben* (vgl. MfL Bd. 1, 2.4., (22)).

Aus $\mathfrak{a} \subseteqq \operatorname{Rad} \mathfrak{a}$ (vgl. (83)) folgt

Satz 45. *In jeder der durch* (95) *gegebenen Äquivalenzklassen ist das Radikal das maximale Ideal.*

Offene Frage (*Verallgemeinerung des Problems von* KRONECKER *und* PERRON): Wie findet man in jeder Äquivalenzklasse ein Ideal, dessen Basis aus möglichst wenig Elementen besteht?

Das dritte und vierte der nachfolgenden Beispiele zeigen, daß das maximale Ideal $\operatorname{Rad} \mathfrak{a}$ diese Bedingung nicht erfüllt.

Beispiel 1. $\mathfrak{a} = (x_1^2x_2, x_1^2x_3, x_1x_2^2, x_1x_3^2, x_2^2x_3, x_2x_3^2)$, also

$$\operatorname{Rad} \mathfrak{a} = (w_1, w_2, w_3) = (x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3),$$

also $s = 3$. Der Leser prüfe selbst nach, daß $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = 2$, also $\tau = 2 + 2 + 2 - 3 + 1 = 4$ ist. Dagegen ist $\varrho = 2$ wegen $(\operatorname{Rad} \mathfrak{a})^2 \subset \mathfrak{a}$, wie man schnell nachrechnet. Hier nimmt also ϱ den kleinstmöglichen Wert an.

Beispiel 2. $\mathfrak{a} = (x_1^3x_2, x_1^3x_3, x_1x_2^3, x_1x_3^3, x_2^3x_3, x_2x_3^3)$, also

$$\operatorname{Rad} \mathfrak{a} = (w_1, w_2, w_3) = (x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3),$$

also $s = 3$. Durch Nachrechnen bestätigt der Leser $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = 3$, $\tau = 3 + 3 + 3 - 3 + 1 = 7$. Zur Bestimmung von ϱ bestätigt man zunächst $(\operatorname{Rad} \mathfrak{a})^3 \not\subset \mathfrak{a}$ wegen $x_1^2x_2^2x_3^2 = w_1w_2w_3 \notin \mathfrak{a}$, also ist auch $(\operatorname{Rad} \mathfrak{a})^2 \not\subset \mathfrak{a}$ wegen (73). Der Leser möge $(\operatorname{Rad} \mathfrak{a})^4 \subset \mathfrak{a}$ selbst bestätigen. Hier ist also $\varrho = 4$ und damit größer als der kleinstmögliche Wert, jedoch immer noch kleiner als τ.

Beispiel 3. $\mathfrak{b} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$ mit

$$F_1 = x_0x_3 - x_1x_2, \quad F_2 = x_0^2x_2 - x_1^3, \quad F_3 = x_0x_2^2 - x_1^2x_3, \quad F_4 = x_1x_3^2 - x_2^3. \tag{96}$$

Dieses erstmals von MACAULAY in anderem Zusammenhang angegebene Ideal scheint in seinen Auswertungsmöglichkeiten schier unerschöpflich; wir werden es auch öfter heranziehen. Der Leser möge im Augenblick glauben, daß $\mathfrak{b}$ semiprim ist (wir werden darauf in Kapitel 6 eingehen und die Primidealeigenschaft dann beweisen), daß also $\operatorname{Rad} \mathfrak{b} = \mathfrak{b}$ gilt. Wir betrachten daneben das Ideal $\mathfrak{a} = (F_1, F_2, F_4)$. Es ist dann jedenfalls $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$. Zum Nachweis von $\operatorname{Rad} \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ gemäß (94) zeigen wir $\mathfrak{b}^2 \subset \mathfrak{a}$. Wegen $F_i \in \mathfrak{a}$ für $i = 1, 2, 4$ bleibt nur noch $F_3^2 \in \mathfrak{a}$ zu zeigen. Der Leser möge dazu $F_3^2 = -2x_1^2x_2^2F_1 + x_3^3F_2 + x_1^3F_4$ selbst bestätigen. Es ist also $\varrho_3 = 2$, dagegen $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_4 = 1$ wegen $F_i \in \mathfrak{a}$ für $i = 1, 2, 4$. Es ist hier also $\tau = 1 + 1 + 2 + 1 - 4 + 1 = 2$, also $\mathfrak{b}^2 \subset \mathfrak{a}$, was zu zeigen war. Hier ist $\varrho = \tau = 2$. Die Frage, ob es zu diesem Ideal $\mathfrak{b}$ Ideale $\mathfrak{c}$ gibt, für die ebenfalls $\operatorname{Rad} \mathfrak{c} = \mathfrak{b}$ gilt und bei denen $\mathfrak{c}$ eine zweigliedrige Basis besitzt, ist zur Zeit noch nicht entschieden.

Beispiel 4. $\mathfrak{b} = (F_1, F_2, F_3)$ und $\mathfrak{a} = (F_1, F_4)$ mit

$$F_1 = x_0x_2 - x_1^2, \qquad F_2 = x_0x_3 - x_1x_2, \qquad F_3 = x_1x_3 - x_2^2,$$
$$F_4 = x_3F_2 - x_2F_3 = x_0x_3^2 - 2x_1x_2x_3 + x_2^3. \tag{97}$$

Auch dieses $\mathfrak{b}$ ist ein in der Literatur oft diskutiertes Primideal; der Leser möge also an dieser Stelle wiederum die Richtigkeit von $\operatorname{Rad}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}$ voraussetzen. Wegen $F_4 = x_3F_2 - x_2F_3$ ist $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ evident. Weiterhin ergibt sich, was der Leser selbst nachrechnen möge: $F_1 \in \mathfrak{a}$, $F_2^2 \in \mathfrak{a}$ wegen $F_2^2 = -x_2^2F_1 + x_0F_4$ und $F_3^2 \in \mathfrak{a}$ wegen $F_3^2 = -x_3^2F_1 + x_2F_4$; wir haben also $\varrho_1 = 1$, $\varrho_2 = \varrho_3 = 2$, also $\tau = 1 + 2 + 2 - 3 + 1 = 3$, also $\mathfrak{b}^3 \subset \mathfrak{a}$ und wegen (94) mithin $\operatorname{Rad}\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. Hier ist jedoch $\varrho = 2$; dazu ist wegen $\mathfrak{b}^2 = (F_1^2, F_1F_2, F_1F_3, F_2^2, F_2F_3, F_3^2)$ nach (70) nur noch $F_2F_3 \in \mathfrak{a}$ zu zeigen, was wegen $F_2F_3 = -x_2x_3F_1 + x_1F_4$ zutrifft.

Wir wollen nun noch einige nützliche *Formeln für Radikale* herleiten.

$\operatorname{Rad}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$ ist die Gesamtheit der Elemente $\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{c}^{\varrho(\mathfrak{c})} \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a} + \operatorname{Rad}\mathfrak{b}$, also gilt zunächst

$$\operatorname{Rad}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \subseteqq \operatorname{Rad}(\mathfrak{a} + \operatorname{Rad}\mathfrak{b}). \tag{98}$$

Ist umgekehrt $d \in \operatorname{Rad}(\mathfrak{a} + \operatorname{Rad}\mathfrak{b})$, so existieren Exponenten x mit $d^x = a + B$ mit $a \in \mathfrak{a}$ und $B \in \operatorname{Rad}\mathfrak{b}$, also existieren Exponenten y mit $B^y = b \in \mathfrak{b}$. Dann wird

$$d^{xy} = (d^x)^y = (a + B)^y = (a^y + \cdots + yaB^{y-1}) + B^y := ra + B^y \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b},$$

also gilt

$$\operatorname{Rad}(\mathfrak{a} + \operatorname{Rad}\mathfrak{b}) \subseteqq \operatorname{Rad}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b});$$

zusammen mit (98) folgt

$$\operatorname{Rad}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \operatorname{Rad}(\mathfrak{a} + \operatorname{Rad}\mathfrak{b}). \tag{99}$$

Durch Vertauschung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ folgt aus (99) sofort

$$\operatorname{Rad}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \operatorname{Rad}(\operatorname{Rad}\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$$

und durch Ersetzen von $\mathfrak{b}$ durch $\operatorname{Rad}\mathfrak{b}$ und Benutzung von (99) schließlich

$$\begin{aligned}\operatorname{Rad}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) &= \operatorname{Rad}(\mathfrak{a} + \operatorname{Rad}\mathfrak{b}) = \operatorname{Rad}(\operatorname{Rad}\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \\ &= \operatorname{Rad}(\operatorname{Rad}\mathfrak{a} + \operatorname{Rad}\mathfrak{b}).\end{aligned} \tag{100}$$

Nun wollen wir eine analoge Formel für *Radikale von Idealprodukten* herleiten. Es sei

$$\operatorname{Rad}\mathfrak{a} = (A_1, \ldots, A_k), \quad \operatorname{Rad}\mathfrak{b} = (B_1, \ldots, B_l)$$

mit

$$A_1^{\varrho_1} := a_1 \in \mathfrak{a}, \ \ldots, \ A_k^{\varrho_k} := a_k \in \mathfrak{a}, \quad B_1^{\sigma_1} := b_1 \in \mathfrak{b}, \ \ldots, \ B_l^{\sigma_l} := b_l \in \mathfrak{b};$$

dann ist

$$(\operatorname{Rad}\mathfrak{a}) \cdot (\operatorname{Rad}\mathfrak{b}) = (A_1B_1, A_1B_2, \ldots, A_kB_l).$$

Ist $\tau_{ij} = \mathrm{Max}\,\{\varrho_i, \sigma_j\}$ $(i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, l)$, $\tau = \tau_{11} + \tau_{12} + \cdots + \tau_{1k} - kl + 1$, so ist für alle $x \geqq \tau$ sicher

$$\big((\mathrm{Rad}\,\mathfrak{a}) \cdot (\mathrm{Rad}\,\mathfrak{b})\big)^{\tau} \subseteqq \mathfrak{a}\mathfrak{b}\,,$$

also

$$(\mathrm{Rad}\,\mathfrak{a}) \cdot (\mathrm{Rad}\,\mathfrak{b}) \subseteqq \mathrm{Rad}\,(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\,.$$

Weiter ist offenbar $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteqq (\mathrm{Rad}\,\mathfrak{a}) \cdot (\mathrm{Rad}\,\mathfrak{b})$, also insgesamt

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteqq (\mathrm{Rad}\,\mathfrak{a}) \cdot (\mathrm{Rad}\,\mathfrak{b}) \subseteqq \mathrm{Rad}\,(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\,. \tag{101}$$

Gehen wir in allen drei Termen zur Radikalbildung über, so folgt wegen (86) sofort

$$\mathrm{Rad}\,(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \mathrm{Rad}\,\big((\mathrm{Rad}\,\mathfrak{a}) \cdot (\mathrm{Rad}\,\mathfrak{b})\big)\,. \tag{102}$$

Schließlich wollen wir auf (69) beiderseitige Radikalbildung unter Benutzung von (100) anwenden. Dann wird

$$\begin{aligned}\mathrm{Rad}\,\big((\mathfrak{a} + \mathfrak{c})\,(\mathfrak{b} + \mathfrak{c})\big) &= \mathrm{Rad}\,(\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{c}^2 + \mathfrak{a}\mathfrak{c} + \mathfrak{b}\mathfrak{c})\\ &= \mathrm{Rad}\,\big(\mathrm{Rad}\,(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) + \mathrm{Rad}\,(\mathfrak{c}^2) + \mathrm{Rad}\,(\mathfrak{a}\mathfrak{c}) + \mathrm{Rad}\,(\mathfrak{b}\mathfrak{c})\big)\\ &= \mathrm{Rad}\,\big(\mathrm{Rad}\,(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) + \mathrm{Rad}\,\mathfrak{c}\big) = \mathrm{Rad}\,(\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{c})\end{aligned}$$

wegen (87), (68), (89) und (100), also

$$\mathrm{Rad}\,(\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathrm{Rad}\,\big((\mathfrak{a} + \mathfrak{c})\,(\mathfrak{b} + \mathfrak{c})\big)\,. \tag{103}$$

Der durch (103) gegebene Tatbestand, daß durch Radikalbildung Gleichheiten entstehen, wird uns noch öfter begegnen und ist in der algebraischen Geometrie von Bedeutung.

1.11. Der Idealdurchschnitt

Definition 39. Unter dem *Idealdurchschnitt* $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ zweier Ideale aus einem Noetherschen Ring R versteht man die Gesamtheit derjenigen Elemente aus R, die *sowohl aus* $\mathfrak{a}$ *als auch aus* $\mathfrak{b}$ sind; entsprechend werden mehrgliedrige Idealdurchschnitte $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}, \ldots$ usw. definiert.

Die Bezeichnungsweise $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ lehnt sich an die vielfach übliche Bezeichnung $[m, n]$ für das kleinste gemeinsame Vielfache zweier natürlicher Zahlen an (vgl. die Beispiele).

Satz 46. *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *Ideale aus einem Noetherschen Ring* R, *so ist* $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ *ebenfalls ein Ideal aus* R, *also das umfassendste Ideal, das Unterideal sowohl von* $\mathfrak{a}$ *wie auch von* $\mathfrak{b}$ *ist.*

Beweis. Wegen $a \in \mathfrak{a}$ und $b \in \mathfrak{a}$ ist auch $ra + sb \in \mathfrak{a}$, wegen $a \in \mathfrak{b}$ und $b \in \mathfrak{b}$ ist auch $ra + sb \in \mathfrak{b}$, also $ra + sb \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, also ist (3) erfüllt.

Satz 47. *Für Idealdurchschnitte gilt:*

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}, \tag{104}$$

$$\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}, \tag{105}$$

$$\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a}. \tag{106}$$

Beweis. (104) ist eine Zusammenfassung von (67) und (68); (105) und (106) ergeben sich unmittelbar aus Definition 39.

Ebenso ist unmittelbar einsichtig der

Satz 48. *Die Bildung von Idealdurchschnitten ist kommutativ und assoziativ:*

$$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}, \tag{107}$$

$$(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \cap \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}). \tag{108}$$

Wie wir im folgenden zeigen wollen, ist die Situation bezüglich der Gültigkeit von Distributivgesetzen ungünstiger. Wir beweisen zunächst

$$(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} \subseteqq (\mathfrak{a} + \mathfrak{c}) \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}), \tag{109}$$

$$\mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{b} \Rightarrow (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = (\mathfrak{a} + \mathfrak{c}) \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}). \tag{110}$$

Beweis. $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}$ ist die Gesamtheit der Elemente $a + c$ mit $a \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ und $c \in \mathfrak{c}$, $(\mathfrak{a} + \mathfrak{c}) \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$ ist die Gesamtheit der Elemente $a + c = b + c^*$ mit $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}, c \in \mathfrak{c}, c^* \in \mathfrak{c}$, zu denen also auch die Elemente aus $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}$ gehören. Ist $\mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{a}$, so ist $b = a + c - c^* \in \mathfrak{a}$, also $b \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, $b + c^* \in (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}$. Entsprechend schließt man bei $\mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{b}$.

In (109) kann das $\subset$-Zeichen auftreten:

$$\mathfrak{a} = (x_1) \wedge \mathfrak{b} = (x_2) \wedge \mathfrak{c} = (x_1 + x_2) \Rightarrow (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} \subset (\mathfrak{a} + \mathfrak{c}) \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}), \tag{111}$$

denn es ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{c} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = (x_1, x_2)$, dagegen $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = (x_1 x_2, x_1 + x_2)$.

Gehen wir auf beiden Seiten von (109) zu den Radikalen über, so tritt die Gleichheit ein. Bevor wir dies beweisen können, müssen wir noch einige Beziehungen für die Radikale von Durchschnitten bereitstellen.

Ist $c \in \operatorname{Rad} \mathfrak{a} \cap \operatorname{Rad} \mathfrak{b}$, so gilt $c^\varrho \in \mathfrak{a}$ und $c^\sigma \in \mathfrak{b}$; ist etwa $\varrho \geqq \sigma$, so ist $c^\varrho \in \mathfrak{a}$ und $c^\varrho \in \mathfrak{b}$, also $c^\varrho \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, folglich $c \in \operatorname{Rad}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$, also gilt

$$\operatorname{Rad} \mathfrak{a} \cap \operatorname{Rad} \mathfrak{b} \subseteqq \operatorname{Rad}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}).$$

Ist $c \in \operatorname{Rad}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$, so gilt $c^\varrho \in \mathfrak{a}$ und $c^\varrho \in \mathfrak{b}$, folglich $c \in \operatorname{Rad} \mathfrak{a}$ und $c \in \operatorname{Rad} \mathfrak{b}$, mithin $c \in \operatorname{Rad} \mathfrak{a} \cap \operatorname{Rad} \mathfrak{b}$, also $\operatorname{Rad}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteqq \operatorname{Rad} \mathfrak{a} \cap \operatorname{Rad} \mathfrak{b}$. Zusammen mit dem zuvor

Bewiesenen folgt daraus

$$\operatorname{Rad}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \operatorname{Rad} \mathfrak{a} \cap \operatorname{Rad} \mathfrak{b}. \tag{112}$$

Ist $c \in \operatorname{Rad}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$, so gilt $c^{\varrho} \in \mathfrak{a}$ und $c^{\varrho} \in \mathfrak{b}$, folglich $c^{2\varrho} \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, mithin $c \in \operatorname{Rad}(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$, also gilt

$$\operatorname{Rad}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteqq \operatorname{Rad}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}).$$

Aus (104) folgt durch Radikalbildung $\operatorname{Rad}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \subseteqq \operatorname{Rad}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$, also insgesamt

$$\operatorname{Rad}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \operatorname{Rad}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}).$$

Zusammen mit (112) folgt daraus der wichtige

Satz 49. *Für Radikale gilt*

$$\operatorname{Rad} \mathfrak{a} \cap \operatorname{Rad} \mathfrak{b} = \operatorname{Rad}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \operatorname{Rad}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}). \tag{113}$$

Nunmehr können wir die angekündigte Gleichheit bei der Radikalbildung in (109) beweisen, nämlich

$$\operatorname{Rad}\big((\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}\big) = \operatorname{Rad}\big((\mathfrak{a} + \mathfrak{c}) \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})\big) = \operatorname{Rad}\big((\mathfrak{a}\mathfrak{b}) + \mathfrak{c}\big). \tag{114}$$

Wir benutzen dazu (100), (113) und (103) und erhalten

$$\begin{aligned}\operatorname{Rad}\big((\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}\big) &= \operatorname{Rad}\big(\operatorname{Rad}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + \operatorname{Rad} \mathfrak{c}\big)\\ &= \operatorname{Rad}\big(\operatorname{Rad}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) + \operatorname{Rad} \mathfrak{c}\big) = \operatorname{Rad}\big((\mathfrak{a}\mathfrak{b}) + \mathfrak{c}\big)\end{aligned}$$

und

$$\operatorname{Rad}\big((\mathfrak{a} + \mathfrak{c}) \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})\big) = \operatorname{Rad}\big((\mathfrak{a} + \mathfrak{c}) \cdot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})\big) = \operatorname{Rad}\big((\mathfrak{a}\mathfrak{b}) + \mathfrak{c})\big).$$

Analog zu (109) und (110) beweisen wir nunmehr

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cap \mathfrak{c} \supseteqq (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}) + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}), \tag{115}$$

$$\mathfrak{c} \supseteqq \mathfrak{a} \vee \mathfrak{c} \supseteqq \mathfrak{b} \Rightarrow (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cap \mathfrak{c} = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}) + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}). \tag{116}$$

Beweis. $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}) + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c})$ ist die Gesamtheit der Elemente $a + b$ mit $a \in \mathfrak{a}$, $a \in \mathfrak{c}$, $b \in \mathfrak{b}$, $b \in \mathfrak{c}$; hingegen ist $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cap \mathfrak{c}$ die Gesamtheit der Elemente $a + b$ mit $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$, $a + b \in \mathfrak{c}$, also eine Obermenge. Ist $\mathfrak{c} \supseteqq \mathfrak{a}$, so ist auf jeden Fall $b = (a + b) - a \in \mathfrak{c}$ wegen $a + b \in \mathfrak{c}$ und $a \in \mathfrak{c}$; entsprechend schließt man im Fall $\mathfrak{c} \supseteqq \mathfrak{b}$.

In (115) kann das $\supset$-Zeichen auftreten:

$$\mathfrak{a} = (x_1) \wedge \mathfrak{b} = (x_2) \wedge \mathfrak{c} = (x_1 + x_2) \Rightarrow (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cap \mathfrak{c} \supset (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}) + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}), \tag{117}$$

denn es ist

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cap \mathfrak{c} = (x_1 + x_2) \cap (x_1 + x_2) = (x_1 + x_2),$$

dagegen

$$(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}) + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) = (x_1^2 + x_1x_2, x_1x_2 + x_2^2) \subset (x_1 + x_2).$$

Auch bei (115) tritt Gleichheit bei der Radikalbildung ein; es gilt nämlich

$$\operatorname{Rad}\big((\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cap \mathfrak{c}\big) = \operatorname{Rad}\big((\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}) + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c})\big) = \operatorname{Rad}\big((\mathfrak{a} + \mathfrak{b})\mathfrak{c}\big). \tag{118}$$

Der Beweis verläuft ganz analog zu dem Beweis von (114) und bleibe dem Leser überlassen.

Wir vermerken noch

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \cap \mathfrak{c} \supseteqq (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c})\,(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}). \tag{119}$$

Beweis. $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \cap \mathfrak{c}$ ist die Gesamtheit der Elemente $a_1b_1 + \cdots + a_kb_k$ mit $a_i \in \mathfrak{a}$, $b_j \in \mathfrak{b}$, $(a_1b_1 + \cdots + a_kb_k) \in \mathfrak{c}$ und offenbar Obermenge von $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c})\,(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c})$ als Gesamtheit der $a_1b_1 + \cdots + a_kb_k$ mit $a_i \in \mathfrak{a}$, $a_i \in \mathfrak{c}$, $b_j \in \mathfrak{b}$, $b_j \in \mathfrak{c}$.

$$\mathfrak{a} = (x_1) \wedge \mathfrak{b} = (x_2) \wedge \mathfrak{c} = (x_1x_2) \Rightarrow (\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \cap \mathfrak{c} \supset (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c})\,(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) \tag{120}$$

wegen $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c} = \mathfrak{c} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c} = \mathfrak{c} = (x_1x_2)$, mithin $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c})\,(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) = (x_1^2x_2^2)$, hingegen

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \cap \mathfrak{c} = (x_1x_2) \cap (x_1x_2) = (x_1x_2) \supset (x_1^2x_2^2).$$

Auch in (119) tritt Gleichheit bei Radikalbildung ein:

$$\operatorname{Rad}\big((\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \cap \mathfrak{c}\big) = \operatorname{Rad}\big((\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c})\,(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c})\big) = \operatorname{Rad}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) = \operatorname{Rad}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}), \tag{121}$$

wie der Leser selbst beweisen möge.

$$(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} \subseteqq (\mathfrak{a}\mathfrak{c}) \cap (\mathfrak{b}\mathfrak{c}), \tag{122}$$

$$\operatorname{Rad}\big((\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c}\big) = \operatorname{Rad}\big((\mathfrak{a}\mathfrak{c}) \cap (\mathfrak{b}\mathfrak{c})\big) = \operatorname{Rad}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}). \tag{123}$$

Beweise. $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{a}\mathfrak{c}$, $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{b}\mathfrak{c}$, mithin $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} \subseteqq (\mathfrak{a}\mathfrak{c}) \cap (\mathfrak{b}\mathfrak{c})$, q.e.d.; den Beweis von (123) überlassen wir wieder dem Leser, der auch folgendes bestätigen möge:

$$\mathfrak{a} = (x_1) \wedge \mathfrak{b} = (x_2) \wedge \mathfrak{c} = (x_1, x_2) \Rightarrow (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} \subset (\mathfrak{a}\mathfrak{c}) \cap (\mathfrak{b}\mathfrak{c}). \tag{124}$$

Zur Erholung geben wir noch zwei einfache Beispiele an.

Beispiel 1. $\mathfrak{a} = (8) \wedge \mathfrak{b} = (9) \Rightarrow \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = (8 \sqcup 9) = (72) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$.

Beispiel 2. $\mathfrak{a} = (6) \wedge \mathfrak{b} = (10) \Rightarrow \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = (6 \sqcup 10) = (30) \supset \mathfrak{a}\mathfrak{b}$.

Im Gegensatz zu diesen simplen Beispielen ist es jedoch im allgemeinen *nicht* möglich, wie bei Idealsummen und Idealprodukten die Basis des Idealdurchschnitts sofort hinzuschreiben. Wir wollen uns daher im nächsten Abschnitt mit der Frage der Berechnung der Basis des Idealdurchschnitts befassen.

1.12. Zur Berechnung von Idealdurchschnitten, Beispiele

Es sei $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_s)$, $\mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_t)$, also nach (57)

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (a_1, a_2, \ldots, a_s, b_1, b_2, \ldots, b_t).$$

Dann ist $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ die Gesamtheit aller derjenigen Elemente c, zu denen es Ringelemente $r_1, r_2, \ldots, r_s, s_1, s_2, \ldots, s_t$ gibt mit

$$c = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_s a_s = s_1 b_1 + s_2 b_2 + \cdots + s_t b_t, \tag{125}$$

also mit

$$r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_s a_s + (-s_1) b_1 + (-s_2) b_2 + \cdots + (-s_t) b_t = 0. \tag{126}$$

Zur Lösung von Gleichungen der Gestalt (126) in R bestimmt man zuerst eine Minimalbasis $(c_1, \ldots, c_k)$ von $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ und drückt $a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_t$ durch die $c_1, \ldots, c_k$ aus; dabei ist es häufig (aber nicht immer) zweckmäßig, $c_1, \ldots, c_k$ aus den $a_1, \ldots, a_s$, $b_1, \ldots, b_t$ zu wählen. Unser Problem ist also auf die Aufgabe reduziert, in R Gleichungen der Gestalt

$$u_1 c_1 + u_2 c_2 + \cdots + u_k c_k = 0 \tag{127}$$

zu lösen, bei denen $(c_1, \ldots, c_k)$ eine Minimalbasis des Ideals $\mathfrak{c} = (c_1, \ldots, c_k)$ ist. Jeder Lösungsvektor $\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}$ von (127) heißt dann eine *Syzygie* von $\mathfrak{c}$; jede Identität (127) heißt eine *Passivitätsbedingung*.

Da wir uns im folgenden hauptsächlich mit Polynomidealen beschäftigen wollen, wird uns also überwiegend die *Syzygientheorie der Polynomideale* interessieren. Wie aber schon in 1.3. angedeutet wurde, stößt dabei bereits die Berechnung von Minimalbasen für inhomogene P-Ideale auf Schwierigkeiten, weshalb hier die Syzygientheorie der H-Ideale im fünften Kapitel ausführlicher untersucht werden wird.

Diese Andeutungen sollen jetzt nur die zuvor gemachte Bemerkung erläutern, daß es für die Basis des Idealdurchschnitts $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ keine allgemein gültige formelmäßige Darstellung gibt, wie wir sie für die Idealsumme durch (57) und für das Idealprodukt durch (61) kennengelernt haben. Für H-Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ kann immerhin eine Basis von $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ in endlich vielen Schritten mit Hilfe der Syzygientheorie berechnet werden. Wie dies geschieht, soll im folgenden an zwei Beispielen (unter Vorwegnahme von Ergebnissen der Syzygientheorie) angedeutet werden.

Beispiel 1. In $R = K[x_0, x_1, x_2, x_3]$ seien $\mathfrak{a} = (F_1, F_2)$, $\mathfrak{b} = (F_3, F_4)$ mit

$$F_1 = x_0 x_3 - x_1 x_2, \quad F_2 = x_0^2 x_3 - x_1^3, \quad F_3 = x_0 x_2^2 - x_1^2 x_3, \quad F_4 = x_1 x_3^2 - x_2^3. \tag{96}$$

Hier bilden (F_1, F_2, F_3, F_4) eine Minimalbasis von $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. Dann ist $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ die Gesamtheit der Formen G mit

$$G = G_1F_1 + G_2F_2 = G_3F_3 + G_4F_4; \tag{128}$$

es gilt also

$$G_1F_1 + G_2F_2 + (-G_3)\,F_3 + (-G_4)\,F_4 = 0. \tag{129}$$

In der Syzygientheorie der H-Ideale wird gezeigt:

$$\Phi_1(x_0x_3 - x_1x_2) + \Phi_2(x_0^2x_2 - x_1^3) + \Phi_3(x_0x_2^2 - x_1^2x_3) + \Phi_4(x_1x_3^2 - x_2^3) = 0 \tag{130}$$

hat die vollständige Lösung

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_1 &= \Psi_1x_1^2 + \Psi_2x_0x_2 + \Psi_3x_1x_3 + \Psi_4x_2^2,\\
\Phi_2 &= -\Psi_1x_2 - \Psi_2x_3,\\
\Phi_3 &= \Psi_1x_0 + \Psi_2x_1 - \Psi_3x_2 - \Psi_4x_3,\\
\Phi_4 &= -\Psi_3x_0 - \Psi_4x_1
\end{aligned}\right\} \tag{131}$$

mit beliebigen Parametern $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$, also mit beliebigen Formen $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ geeigneten Grades. Aus (129), (130) und (131) folgt dann

$$\begin{aligned}
G_1 &= \Phi_1 = \Psi_1x_1^2 + \Psi_2x_0x_2 + \Psi_3x_1x_3 + \Psi_4x_2^2,\\
G_2 &= \Phi_2 = -\Psi_1x_2 - \Psi_2x_3,\\
G_3 &= -\Phi_3 = -\Psi_1x_0 - \Psi_2x_1 + \Psi_3x_2 + \Psi_4x_3,\\
G_4 &= -\Phi_4 = \Psi_3x_0 + \Psi_4x_1.
\end{aligned}$$

Dies in (128) eingesetzt und nach $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ geordnet, gibt

$$G = \Psi_1(-x_0^2x_2^2 + x_0x_1^2x_3) + \Psi_2(-x_0x_1x_2^2 + x_1^3x_3) + \Psi_3(x_0x_1x_3^2 - x_1^2x_2x_3) + \Psi_4(x_0x_2^2x_3 - x_1x_2^3);$$

mithin ist

$$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = (x_0^2x_2^2 - x_0x_1^2x_3,\ x_0x_1x_2^2 - x_1^3x_3,\ x_0x_1x_3^2 - x_1^2x_2x_3,\ x_0x_2^2x_3 - x_1x_2^3).$$

Beispiel 2. Wir ändern dazu das erste Beispiel nur leicht ab. F_1, F_2, F_3, F_4 seien dieselben Formen wie im ersten Beispiel und $F_5 = x_0F_1 = x_0^2x_3 - x_0x_1x_2$, $\mathfrak{a} = (F_1, F_2)$, $\mathfrak{c} = (F_5, F_3, F_4)$. Jetzt ist also $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$ die Gesamtheit der Formen G mit

$$G = G_1F_1 + G_2F_2 = G_3F_5 + G_4F_3 + G_5F_4,$$

folglich

$$G_1F_1 + G_2F_2 + (-G_3)\,F_5 + (-G_4)\,F_3 + (-G_5)\,F_4 = 0.$$

Wegen $F_5 = x_0F_1$ bilden in diesem Fall $(F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$ keine Minimalbasis von $\mathfrak{a} + \mathfrak{c}$; wir müssen daher $F_5 = x_0F_1$ einsetzen und erhalten

$$(G_1 - x_0G_3)\,F_1 + G_2F_2 + (-G_4)\,F_3 + (-G_5)\,F_4 = 0.$$

Jetzt können wir wieder (130) und (131) anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}
G_1 - x_0G_3 &= \Phi_1 = \Psi_1x_1^2 + \Psi_2x_0x_2 + \Psi_3x_1x_3 + \Psi_4x_2^2,\\
G_2 &= \Phi_2 = -\Psi_1x_2 - \Psi_2x_3,\\
G_4 &= -\Phi_3 = -\Psi_1x_0 - \Psi_2x_1 + \Psi_3x_2 + \Psi_4x_3,\\
G_5 &= -\Phi_4 = \Psi_3x_0 + \Psi_4x_1.
\end{aligned}$$

Für G_2 kann irgend etwas gesetzt werden, etwa $G_3 := \Psi_5$. Dann wird

$$G_1 = \Psi_1 x_1^2 + \Psi_2 x_0 x_2 + \Psi_3 x_1 x_3 + \Psi_4 x_2^2 + \Psi_5 x_0.$$

Nach $\Psi_5, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ geordnet, folgt

$$G = \Psi_5(x_0^2x_3 - x_0x_1x_2) + \Psi_1(-x_0^2x_2^2 + x_0x_1^2x_3) + \Psi_2(-x_0x_1x_2^2 + x_1^3x_3) \\ + \Psi_3(x_0x_1x_3^2 - x_1^2x_2x_3) + \Psi_4(x_0x_2^2x_3 - x_1x_2^3).$$

(Der Leser prüfe diese Ergebnisse durch Nachrechnen nach.) Als Endergebnis haben wir

$$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = (x_0^2x_3 - x_0x_1x_2, x_0^2x_2^2 - x_0x_1^2x_3, x_0x_1x_2^2 - x_1^3x_3, x_0x_1x_3^2 - x_1^2x_2x_3, x_0x_2^2x_3 - x_1x_2^3).$$

1.13. Idealdurchschnitte von Potenzproduktidealen

R. Kummer ist es gelungen (vgl. Kummer und Renschuch [1], Satz 3), für Idealdurchschnitte von Potenzproduktidealen eine geschlossene Formel anzugeben, die jetzt hergeleitet werden soll.

Wir erinnern hierzu an den Beweis von

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cap \mathfrak{c} \supseteqq (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}) + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}). \tag{115}$$

Das $\supset$-Zeichen konnte auftreten wegen: $a + b \in \mathfrak{c} \not\Rightarrow a \in \mathfrak{c} \wedge b \in \mathfrak{c}$. Da nun aber bei Potenzproduktidealen mit einem Polynom jedes auftretende Potenzprodukt bereits in dem Potenzproduktideal enthalten sein muß, gilt jetzt: $a + b \in \mathfrak{c}_\pi \Rightarrow a \in \mathfrak{c}_\pi \wedge b \in \mathfrak{c}_\pi$, mithin:

$$\mathfrak{a}_\pi, \mathfrak{b}_\pi, \mathfrak{c}_\pi \text{ Potenzproduktideale} \Rightarrow (\mathfrak{a}_\pi + \mathfrak{b}_\pi) \cap \mathfrak{c}_\pi = (\mathfrak{a}_\pi \cap \mathfrak{c}_\pi) + (\mathfrak{b}_\pi \cap \mathfrak{c}_\pi). \tag{132}$$

Vertauschung und Umbenennung in (132) liefert

$$\mathfrak{a}_\pi \cap (\mathfrak{b}_\pi + \mathfrak{c}_\pi) = (\mathfrak{a}_\pi \cap \mathfrak{b}_\pi) + (\mathfrak{a}_\pi \cap \mathfrak{c}_\pi). \tag{133}$$

Aus (132) und (133) folgen für den Durchschnitt mehrgliedriger Idealsummen

$$(\mathfrak{a}_{\pi_1} + \cdots + \mathfrak{a}_{\pi_k}) \cap (\mathfrak{b}_{\pi_1} + \cdots + \mathfrak{b}_{\pi_l}) = (\mathfrak{a}_{\pi_1} \cap \mathfrak{b}_{\pi_1}) + (\mathfrak{a}_{\pi_1} \cap \mathfrak{b}_{\pi_2}) + \cdots + (\mathfrak{a}_{\pi_k} \cap \mathfrak{b}_{\pi_l}). \tag{134}$$

Aus (134) ergeben sich für Hauptideale und damit für Idealbasen (vgl. (55)ff.)

$$(p_1, p_2, \ldots, p_s) \cap (q_1, q_2, \ldots, q_t) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} \big((p_i) \cap (q_j)\big). \tag{135}$$

Durch (135) wird die Problematik auf die Bestimmung des Idealdurchschnitts von Potenzprodukthauptidealen zurückgeführt. Dies ist nun aber einfach; ist beispielsweise $p_i = x_1^2x_2^3$, $q_j = x_1^4x_2x_3^5$, so ist $(p_i) \cap (q_j) = x_1^4x_2^3x_3^5$. Allgemein ist offenbar

$$(p_i) \cap (q_j) = (p_i \sqcup q_j), \tag{136}$$

wobei $p_i \sqcup q_j$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Potenzprodukte p_i und q_j ist. Setzen wir (136) in (135) ein, so haben wir den angekündigten

Satz 50. *Sind $\mathfrak{a}_\pi$ und $\mathfrak{b}_\pi$ Potenzproduktideale aus $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, so gilt:*

$$\mathfrak{a}_\pi = (p_1, \ldots, p_s) \wedge \mathfrak{b}_\pi = (q_1, \ldots, q_t)$$
$$\Rightarrow \mathfrak{a}_\pi \cap \mathfrak{b}_\pi = (p_1 \sqcup q_1, \ldots, p_1 \sqcup q_t, \ldots, p_s \sqcup q_1, \ldots, p_s \sqcup q_t). \tag{137}$$

Dabei braucht (137) keine Minimalbasis zu sein.

Beispiel.

$$\mathfrak{a}_\pi = (x_1^2, x_1x_2^2x_3, x_1x_2x_3^2, x_3x_4), \qquad \mathfrak{b}_\pi = (x_1x_3^2, x_2x_4^2, x_3^3),$$
$$\mathfrak{a}_\pi \cap \mathfrak{b}_\pi = (x_1^2x_3^2, x_1^2x_2x_4^2, x_1^2x_3^3, x_1x_2^2x_3^2, x_1x_2^2x_3x_4^2, x_1x_2^2x_3^3,$$
$$x_1x_2x_3^2, x_1x_2x_3^2x_4^2, x_1x_2x_3^3, x_1x_3^2x_4, x_2x_3x_4^2, x_3^3x_4);$$

und hierin kann das dritte, vierte, fünfte, sechste, achte, neunte Potenzprodukt gestrichen werden, wie sich der Leser selbst überzeugen möge.

1.14. Der Idealquotient

Wie bei der Quotientenbildung in der Arithmetik liegt auch diesem Begriff der Gedanke der Umkehrbarkeit der Produktbildung zugrunde. Geht man etwa von der Idealgleichung $(2) \cdot (3) = (6)$ aus, so steht also eine Art Auflösung nach (2) oder (3) zur Debatte. Um hier weiterzukommen, geben wir zunächst die

Definition 40. Unter $c\mathfrak{b}$ mit $c \in R$, $\mathfrak{b} \subset R$ werde die Gesamtheit der Elemente $cb \in R$ verstanden, bei der b *alle* Elemente des Ideals $\mathfrak{b}$ durchläuft.

Nunmehr können wir Idealquotienten definieren.

Definition 41. Der *Idealquotient* $\mathfrak{c} := \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ ist erklärt als Gesamtheit aller $c \in R$ mit $c\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a}$:

$$\mathfrak{c} := \mathfrak{a} : \mathfrak{b} := \{c : c \in R \wedge c\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a}\}. \tag{138}$$

Beispiel 1. $\mathfrak{a} = (6)$, $\mathfrak{b} = (3)$, $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = (6) : (3) = (2)$.

Beispiel 2. $\mathfrak{a} = (7)$, $\mathfrak{b} = (3)$, $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = (7) : (3)$ ist die Gesamtheit der c mit $c(3) \subseteqq (7)$, muß also ein Vielfaches von (7) sein, also $(7) : (3) = (7)$; in diesem Beispiel ist also $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$.

Beispiel 3. $\mathfrak{a} = (14)$, $\mathfrak{b} = (15)$, $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = (14) : (15) = (14) = \mathfrak{a}$.

Beispiel 4. $\mathfrak{a} = (x_1^2)$, $\mathfrak{b} = (x_1^2, x_2^2)$, $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = (x_1^2) : (x_1^2, x_2^2) = (x_1^2) = \mathfrak{a}$ wegen $x_2^2 \notin \mathfrak{b}$. Hingegen ist $\mathfrak{b} : \mathfrak{a} = (x_1^2, x_2^2) : (x_1^2) = (1)$.

Satz 51. *Ist R ein Noetherscher Ring, so ist mit* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *auch* $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ *ein Ideal in R.*

Beweis. Ist $c_1 \in \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$, so auch $r_1 c_1 \in \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ wegen $c_1 \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a}$, folglich $r_1 c_1 \mathfrak{b} = c_1(r_1 \mathfrak{b}) \subseteqq c_1 \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a}$. Entsprechend ist mit $c_2 \in \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ auch $r_2 c_2 \in \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$. Dann ist aber auch $r_1 c_1 + r_2 c_2 \in \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ wegen

$$(r_1 c_1 + r_2 c_2)\, \mathfrak{b} = r_1 c_1 \mathfrak{b} + r_2 c_2 \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}.$$

Mithin ist (3) erfüllt.

$c\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a}$ ist in jedem Fall für alle $c \in \mathfrak{a}$ erfüllt; wir haben also

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} \supseteqq \mathfrak{a}. \tag{139}$$

Definition 42. Gilt in (139) das Gleichheitszeichen, so heißt $\mathfrak{b}$ *relativ prim* zu $\mathfrak{a}$:

$$\mathfrak{b} \text{ relativ prim zu } \mathfrak{a} :\Leftrightarrow (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}. \tag{140}$$

Im allgemeinen braucht dann nicht gleichzeitig $\mathfrak{a}$ relativ prim zu $\mathfrak{b}$ zu sein, wie das vierte Beispiel lehrt.

Satz 52. *Für Idealquotienten gilt:*

$$\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a} \Leftrightarrow \mathfrak{a} : \mathfrak{b} = (1) = R, \tag{141}$$

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{a} = (1) = R, \tag{142}$$

$$\mathfrak{a} : (0) = (1) = R, \tag{143}$$

$$\mathfrak{a} : (1) = \mathfrak{a}, \tag{144}$$

$$(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})\, \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a}, \tag{145}$$

$$\mathfrak{b} = (b) \text{ Hauptideal} \Rightarrow \big(\mathfrak{a} : (b)\big) \cdot (b) = \mathfrak{a} \cap (b), \tag{146}$$

$$\mathfrak{b}\mathfrak{d} \subseteqq \mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{a} : \mathfrak{b} \supseteqq \mathfrak{d} \wedge \mathfrak{a} : \mathfrak{d} \supseteqq \mathfrak{b}, \tag{147}$$

$$\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{a} : \mathfrak{d} \subseteqq \mathfrak{b} : \mathfrak{d}, \tag{148}$$

$$\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{d} : \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{d} : \mathfrak{a}, \tag{149}$$

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} : \mathfrak{b} \supseteqq \mathfrak{a}, \tag{150}$$

$$R \text{ Integritätsbereich} \wedge \mathfrak{b} = (b) \text{ Hauptideal} \Rightarrow \mathfrak{a}(b) : (b) = \mathfrak{a}. \tag{151}$$

Beweise. (141) folgt aus $(1) \cdot \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a}$; (142) und (143) sind Spezialfälle von (141). Die Gleichung (144) folgt aus (151) für $b = 1$. – Nach (138) ist $\mathfrak{c}\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a}$; wegen $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ folgt mithin (145).

Zum Beweis von (146) nehmen wir für $\mathfrak{a}$ die Basisdarstellung $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_s)$ an. Dann bedeutet $c \in \mathfrak{a} \cap (b)$, daß $c = rb = r_1 a_1 + \cdots + r_s a_s$ gilt, mithin $r \in \mathfrak{a} : (b)$ und $c = rb \in \big(\mathfrak{a} : (b)\big) \cdot (b)$, also $\mathfrak{a} \cap (b) \subseteqq \big(\mathfrak{a} : (b)\big) \cdot (b)$. Ist umgekehrt $c \in \big(\mathfrak{a} : (b)\big) \cdot (b)$, so kann aus jedem c der Faktor b ausgeklammert werden, mithin ist $c \in (b)$; außerdem ist $c \in \mathfrak{a}$ nach (145), insgesamt also $\big(\mathfrak{a} : (b)\big) \cdot (b) \subseteqq \mathfrak{a} \cap (b)$. Daraus folgt mit dem zuvor Bewiesenen die Gültigkeit von (146).

Die Aussagen von (147) sind mit $\mathfrak{d} \subseteqq \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a} : \mathfrak{d}$ gleichwertig, und dies ist sofort aus (138) abzulesen; dasselbe gilt für (148) und (149) unter Berücksichtigung von (64).

$\mathfrak{a}\mathfrak{b} : \mathfrak{b}$ ist die Gesamtheit der c mit $c\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, was für $c \in \mathfrak{a}$ sicher erfüllt ist, also ist $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{a}\mathfrak{b} : \mathfrak{b}$, womit (150) bewiesen ist.

Zum Beweis von (151) nehmen wir für $\mathfrak{a}$ wieder die Basisdarstellung $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_s)$ an. Wegen (150) brauchen wir nur noch $\mathfrak{a}(b) : (b) \subseteqq \mathfrak{a}$ zu zeigen. $\mathfrak{a}(b) : (b)$ ist die Gesamtheit der Elemente c mit $crb \in (a_1 b, \ldots, a_s b)$, wobei r ein beliebiges Ringelement ist; insbesondere kann $r = 1$ sein. Daraus aber folgt in Integritätsbereichen $c \in \mathfrak{a}$ und mithin $\mathfrak{a}(b) : (b) \subseteqq \mathfrak{a}$, q.e.d.

Um ein Beispiel für das Auftreten des Zeichens $\supset$ in (150) zu finden, darf also in Integritätsbereichen $\mathfrak{b}$ kein Hauptideal sein. Wir ziehen dazu das dritte Beispiel von 1.10. heran. Dort war

$$F_1 = x_0 x_3 - x_1 x_2, \quad F_2 = x_1^2 x_2 - x_1^3,$$
$$F_3 = x_0 x_2^2 - x_1^2 x_3, \quad F_4 = x_1 x_3^2 - x_2^3, \quad \mathfrak{a} = (F_1, F_2, F_4).$$

Das dort ebenfalls eingeführte Ideal $\mathfrak{b}$ wollen wir jetzt $\mathfrak{d}$ nennen, $\mathfrak{d} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$. Der Leser möge selbst nachrechnen, daß dann gilt:

$$\left.\begin{aligned} x_0 F_3 &= -x_1^2 F_1 + x_2 F_2 \in \mathfrak{a} \cdot (x_0, x_1, x_2, x_3),\\ x_1 F_3 &= -x_0 x_2 F_1 + x_3 F_2 \in \mathfrak{a} \cdot (x_0, x_1, x_2, x_3),\\ x_2 F_3 &= x_1 x_3 F_1 - x_0 F_4 \in \mathfrak{a} \cdot (x_0, x_1, x_2, x_3),\\ x_3 F_3 &= x_2^2 F_1 - x_1 F_4 \in \mathfrak{a} \cdot (x_0, x_1, x_2, x_3). \end{aligned}\right\} \tag{152}$$

Wir erinnern ferner an $\mathfrak{d} \supset \mathfrak{a}$. Wir zeigen nun, daß

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} \cdot (x_0, x_1, x_2, x_3) &= \mathfrak{d} \cdot (x_0, x_1, x_2, x_3)\\ &= (x_0 F_1, x_1 F_1, x_2 F_1, x_3 F_1, x_0 F_2, x_1 F_2, x_2 F_2, x_3 F_2,\\ &\qquad x_0 F_4, x_1 F_4, x_2 F_4, x_3 F_4) \end{aligned}$$

gilt. Das ist wegen (152) richtig, da die bei der Basisaufstellung von $\mathfrak{d} \cdot (x_0, x_1, x_2, x_3)$ auftretenden Basiselemente $x_0 F_3, x_1 F_3, x_2 F_3, x_3 F_3$ wegen (152) gestrichen werden können. Aus

$$\mathfrak{a} \cdot (x_0, x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{d} \cdot (x_0, x_1, x_2, x_3)$$

folgt

$$\big(\mathfrak{a} \cdot (x_0, x_1, x_2, x_3)\big) : (x_0, x_1, x_2, x_3) = \big(\mathfrak{d} \cdot (x_0, x_1, x_2, x_3)\big) : (x_0, x_1, x_2, x_3) \supseteqq \mathfrak{d}$$

nach (150). Wegen $\mathfrak{d} \supset \mathfrak{a}$ folgt mithin $\mathfrak{a}\mathfrak{b} : \mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}$ für $\mathfrak{b} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$.

Bei diesem Beispiel tritt zufällig Gleichheit bei beiderseitiger Radikalbildung ein, die aber nicht allgemein bewiesen werden kann. Der Übergang zu Radikalen führt bei Quotientenbildung zu Schwierigkeiten; dies beinhaltet der

Satz 53. *Für Radikale gilt*

$$\mathrm{Rad}\,(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) \subseteqq (\mathrm{Rad}\,\mathfrak{a}) : (\mathrm{Rad}\,\mathfrak{b}), \tag{153}$$

$$\mathfrak{a} = (x_1^2) \wedge \mathfrak{b} = (x_1) \Rightarrow \mathrm{Rad}\,(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) \subset (\mathrm{Rad}\,\mathfrak{a}) : (\mathrm{Rad}\,\mathfrak{b}). \tag{154}$$

Beweis. Ist $c \in \mathrm{Rad}\,(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$, so gilt $c^\varrho \in \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$, mithin $c^\varrho \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a}$, also $c^\varrho b \in \mathfrak{a}$ für alle $b \in \mathfrak{b}$. Für jedes $B \in \mathrm{Rad}\,\mathfrak{b}$ existiert nun ein σ mit $B^\sigma := b \in \mathfrak{b}$, also $c^\varrho B^\sigma \in \mathfrak{a}$. Ist $\tau = \mathrm{Max}\,\{\varrho, \sigma\}$, so gilt $c^\tau B^\tau = (cB)^\tau \in \mathfrak{a}$, also $cB \in \mathrm{Rad}\,\mathfrak{a}$. Dabei war B beliebig aus $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{b}$, also $c \cdot \mathrm{Rad}\,\mathfrak{b} \subseteqq \mathrm{Rad}\,\mathfrak{a}$, mithin $c \in (\mathrm{Rad}\,\mathfrak{a}) : (\mathrm{Rad}\,\mathfrak{b})$, womit (153) bewiesen ist. Zu (154) bemerken wir $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = (x_1)$, also $\mathrm{Rad}\,(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) = (x_1)$, dagegen $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{a} = (x_1)$, $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{b} = (x_1)$ und mithin $(\mathrm{Rad}\,\mathfrak{a}) : (\mathrm{Rad}\,\mathfrak{b}) = (1)$ nach (144).

Dieses Ergebnis läßt bereits ahnen, daß es bei distributiven Beziehungen für Idealquotienten nicht möglich ist, eine nicht vorhandene Gleichheit durch beiderseitige Radikalbildung allgemein beweisen zu können.

Wir wollen dennoch auch hier alle möglichen distributiven Beziehungen untersuchen.

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) : \mathfrak{c} \supseteqq (\mathfrak{a} : \mathfrak{c}) + (\mathfrak{b} : \mathfrak{c}). \tag{155}$$

Beweis. $(\mathfrak{a} : \mathfrak{c}) + (\mathfrak{b} : \mathfrak{c})$ ist die Gesamtheit der Elemente $a + b$ mit $a\mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{a} \wedge b\mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{b}$. Dann gilt $(a + b)\,\mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, mithin $a + b \in (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) : \mathfrak{c}$.

Beispiel für $\supset$-Zeichen:

$$\mathfrak{a} = (x_1, x_2^2) \wedge \mathfrak{b} = (x_1^2, x_2) \wedge \mathfrak{c} = (x_1, x_2) \Rightarrow (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) : \mathfrak{c} \supset (\mathfrak{a} : \mathfrak{c}) + (\mathfrak{b} : \mathfrak{c}). \tag{156}$$

Dies gilt wegen $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (x_1, x_2) = \mathfrak{c}$ und $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) : \mathfrak{c} = (1)$ nach (142) und andererseits

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{c} = (x_1, x_2), \quad \mathfrak{b} : \mathfrak{c} = (x_1, x_2), \quad (\mathfrak{a} : \mathfrak{c}) + (\mathfrak{b} : \mathfrak{c}) = (x_1, x_2) \subset (1).$$

Dieses zeigt zugleich, daß auch bei beiderseitiger Radikalbildung in (155) nicht generell das Gleichheitszeichen zu gelten braucht. Dieser Tatbestand bedeutet eine Erschwernis für das praktische Rechnen mit Idealquotienten.

$$(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) : \mathfrak{c} \supseteqq \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} : \mathfrak{c}). \tag{157}$$

Beweis. $\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} : \mathfrak{c})$ ist die Gesamtheit der Elemente ad mit $d\mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{b}$, $ad\mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$, $ad \in (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) : \mathfrak{c}$. Auch in (157) gilt nicht immer das Gleicheitszeichen:

$$\mathfrak{a} = (x_1) \wedge \mathfrak{b} = (x_1, x_2) \wedge \mathfrak{c} = (x_1) \Rightarrow (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) : \mathfrak{c} \supset \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} : \mathfrak{c}). \tag{158}$$

Dies gilt wegen $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = (x_1^2, x_1 x_2)$, $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) : \mathfrak{c} = (x_1, x_2)$, andererseits $\mathfrak{b} : \mathfrak{c} = (1)$ wegen $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{b}$ gemäß (141).

$$(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) : \mathfrak{c} = (\mathfrak{a} : \mathfrak{c}) \cap (\mathfrak{b} : \mathfrak{c}). \tag{159}$$

Beweis.

$$d \in (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) : \mathfrak{c} \Leftrightarrow d\mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \Leftrightarrow d\mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{a} \wedge d\mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{b}$$
$$\Leftrightarrow d \in \mathfrak{a} : \mathfrak{c} \wedge d \in \mathfrak{b} : \mathfrak{c} \Leftrightarrow d \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{c}) \cap (\mathfrak{b} : \mathfrak{c});$$

jedes Element der linken Seite von (159) ist auch Element der rechten und umgekehrt, woraus die Gleichheit (159) folgt.

Aus (159) ergibt sich durch mehrmalige Anwendung

Satz 54. *Für Idealquotienten gilt*

$$(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_k) : \mathfrak{b} = (\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{a}_2 : \mathfrak{b}) \cap \cdots \cap (\mathfrak{a}_k : \mathfrak{b}). \tag{160}$$

Für Durchschnittsdarstellungen von Idealquotienten werden wir (160) im nächsten Kapitel öfter heranziehen.

Wir zeigen als nächstes

$$(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c} = \mathfrak{a} : (\mathfrak{b}\mathfrak{c}). \tag{161}$$

Beweis. Wir verfahren dazu in analoger Weise wie beim Beweis von (159):

$$d \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c} \Leftrightarrow d\mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{a} : \mathfrak{b} \Leftrightarrow d\mathfrak{c}\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a} \Leftrightarrow d\mathfrak{b}\mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{a} \Leftrightarrow d \in \mathfrak{a} : (\mathfrak{b}\mathfrak{c}).$$

$$(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} \subseteqq (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\mathfrak{c}) : \mathfrak{b}, \tag{162}$$

$$\mathfrak{b} = (b) \Rightarrow \big(\mathfrak{a} : (b)\big) + \mathfrak{c} = \big(\mathfrak{a} + (b)\,\mathfrak{c}\big) : (b). \tag{163}$$

Beweise. Ersetzen wir $\mathfrak{b}$ in (155) durch $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}$ durch $\mathfrak{b}$, so folgt

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\mathfrak{c}) : \mathfrak{b} \supseteqq (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) + (\mathfrak{b}\mathfrak{c} : \mathfrak{b}) \supseteqq (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}$$

wegen (150), mithin gilt also (162). — Zum Beweis von (163) ist wegen (162) nur noch $\big(\mathfrak{a} + (b)\,\mathfrak{c}\big) : (b) \subseteqq \big(\mathfrak{a} : (b)\big) + \mathfrak{c}$ zu zeigen, was der Leser mit Hilfe von Basisdarstellungen für $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ selbst beweisen möge.

Um (162) zu verallgemeinern, benötigen wir eine Verallgemeinerung von (150), nämlich

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{d}) : (\mathfrak{b}\mathfrak{d}) \supseteqq \mathfrak{a} : \mathfrak{b}. \tag{164}$$

Beweis. $c \in \mathfrak{a} : \mathfrak{b} \Leftrightarrow c\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a} \Rightarrow c\mathfrak{b}\mathfrak{d} \subseteqq \mathfrak{a}\mathfrak{d} \Leftrightarrow c \in (\mathfrak{a}\mathfrak{d}) : (\mathfrak{b}\mathfrak{d})$.

$$(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) + (\mathfrak{c} : \mathfrak{d}) \subseteqq (\mathfrak{a}\mathfrak{d} + \mathfrak{b}\mathfrak{c}) : \mathfrak{b}\mathfrak{d}. \tag{165}$$

Beweis. Dazu ersetzen wir in (155) $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{a}\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}$ durch $\mathfrak{b}\mathfrak{d}$ und erhalten mit (164)

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{d} + \mathfrak{b}\mathfrak{c}) : \mathfrak{b}\mathfrak{d} \supseteqq \big((\mathfrak{a}\mathfrak{d}) : (\mathfrak{b}\mathfrak{d})\big) + \big((\mathfrak{b}\mathfrak{c}) : (\mathfrak{b}\mathfrak{d})\big) \supseteqq (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) + (\mathfrak{c} : \mathfrak{d}),$$

q.e.d.

Für $\mathfrak{b} = (1)$ geht (165) in (162) über.

$$(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} \subseteqq (\mathfrak{a}\mathfrak{c}) : \mathfrak{b} \tag{166}$$

folgt direkt aus (157) durch Seitenvertauschung und Umbenennung;

$$(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) \cap \mathfrak{c} \subseteqq (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}\mathfrak{c}) : \mathfrak{b} \tag{167}$$

ergibt sich aus (159) und (150).

Da die Quotientenbildung nicht kommutativ ist, müssen wir noch Bildungen der Gestalt $\mathfrak{a} : (\mathfrak{b} o \mathfrak{c})$ untersuchen.

$$\mathfrak{a} : (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{a} : \mathfrak{c}). \tag{168}$$

Beweis.

$$d \in \mathfrak{a} : (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) \Leftrightarrow d(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) \subseteqq \mathfrak{a} \Leftrightarrow d\mathfrak{b} + d\mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{a} \Leftrightarrow d\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a} \wedge d\mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{a}$$
$$\Leftrightarrow d \in \mathfrak{a} : \mathfrak{b} \wedge d \in \mathfrak{a} : \mathfrak{c} \Leftrightarrow d \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{a} : \mathfrak{c}).$$

Durch mehrmalige Anwendung von (168) folgt der wichtige

Satz 55. *Für Idealquotienten gilt*

$$\mathfrak{a} : (\mathfrak{b}_1 + \cdots + \mathfrak{b}_m) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}_1) \cap \cdots \cap (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}_m), \tag{169}$$

$$\mathfrak{a} : (b_1, \ldots, b_t) = \big(\mathfrak{a} : (b_1)\big) \cap \cdots \cap \big(\mathfrak{a} : (b_t)\big). \tag{170}$$

Dabei folgt (170) aus (169) für $m = t$ und Hauptideale $\mathfrak{b}_t = (b_t)$. Die Bedeutung von (170) vermerken wir in

Satz 56. *Vermöge* (170) *läßt sich die Berechnung von Idealquotienten zurückführen auf die Berechnung von Idealquotienten der Bauart* $\mathfrak{a} : (b)$, *wobei* (b) *ein Hauptideal ist.*

Wir untersuchen nun noch $\mathfrak{a} : (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})$, $\mathfrak{a} : (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c})$ und $\mathfrak{a} : (\mathfrak{b} : \mathfrak{c})$.

$$\mathfrak{a} : (\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c} \tag{171}$$

folgt durch Seitenvertauschung von (161).

$$\mathfrak{a} : (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) \supseteqq (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} : \mathfrak{c}), \tag{172}$$

$$\mathfrak{a} = (x_1 x_2) \wedge \mathfrak{b} = (x_1) \wedge \mathfrak{c} = (x_2) \Rightarrow \mathfrak{a} : (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) \supset (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} : \mathfrak{c}). \tag{173}$$

Beweis. Für die Gesamtheit der Elemente $a + b$ aus $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} : \mathfrak{c})$ gilt

$$a\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a} \wedge b\mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{a} \Rightarrow a(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) \subseteqq \mathfrak{a} \wedge b(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) \subseteqq \mathfrak{a}$$
$$\Leftrightarrow (a + b)\,(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) \subseteqq \mathfrak{a}$$
$$\Leftrightarrow a + b \in \mathfrak{a} : (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}),$$

q.e.d. — (173) folgt wegen $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c} = (x_1x_2)$, $\mathfrak{a} : (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) = (1)$, $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = (x_2)$, $\mathfrak{a} : \mathfrak{c} = (x_1)$, $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} : \mathfrak{c}) = (x_1, x_2)$.

$$\mathfrak{a} : (\mathfrak{b} : \mathfrak{c}) \supseteqq (\mathfrak{a}\mathfrak{c}) : \mathfrak{b}\,, \tag{174}$$

$$\mathfrak{a} = (x_1) \wedge \mathfrak{b} = (x_1) \wedge \mathfrak{c} = (x_2) \Rightarrow \mathfrak{a} : (\mathfrak{b} : \mathfrak{c}) \supset (\mathfrak{a}\mathfrak{c}) : \mathfrak{b}\,. \tag{175}$$

Beweis. Ist $\mathfrak{d} := \mathfrak{b} : \mathfrak{c}$, dann ist $\mathfrak{a} : (\mathfrak{b} : \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} : \mathfrak{d}$ die Gesamtheit der Elemente d mit $d\mathfrak{d} \subseteqq \mathfrak{a} \Rightarrow d\mathfrak{d}\mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{a}\mathfrak{c} \wedge d\mathfrak{d}\mathfrak{c} \subseteqq d\mathfrak{b}$ (wegen $\mathfrak{d}\mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{b}$). Beide Bedingungen sind speziell erfüllt im Fall $d\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a}\mathfrak{c}$, also für $d \in (\mathfrak{a}\mathfrak{c}) : \mathfrak{b}$. — Zu (175): Es ist

$$\mathfrak{b} : \mathfrak{c} = (x_1) : (x_2) = (x_1)\,, \quad \mathfrak{a} : (\mathfrak{b} : \mathfrak{c}) = (x_1) : (x_1) = (1)\,,$$

$$\mathfrak{a}\mathfrak{c} = (x_1x_2)\,, \quad (\mathfrak{a}\mathfrak{c}) : \mathfrak{b} = (x_1x_2) : (x_1) = (x_2) \subset (1)\,.$$

1.15. Zusammenstellung der Gesetzmäßigkeiten bei distributiven idealtheoretischen Operationen

Der Gedanke hierzu geht auf meinen hallischen Lehrer, Herrn Prof. Dr. O.-H. Keller, zurück, von dem auch der größte Teil der Gegenbeispiele stammt (vgl. [2], S. 114). Statt der einen Tabelle von O.-H. Keller wollen wir hier zwei Tabellen A und B (vgl. S. 62/63) anlegen, die erste für $(\mathfrak{a}o_1\mathfrak{b})\,o_2\mathfrak{c}$ und die zweite für $\mathfrak{a}o_1(\mathfrak{b}o_2\mathfrak{c})$. Die Operationen o_1 sind links untereinander aufgeführt, die Operationen o_2 oben nebeneinander, jeweils in der Reihenfolge $+$, $\cdot$, $\cap$, $:$.

1.16. Äquivalente *H*-Ideale als Idealquotienten

Wir knüpfen dazu an Definition 30 an. Dort war $f(x_1, \ldots, x_n)$ ein inhomogenes Polynom aus einem P-Ideal $(\mathfrak{a}) \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ und $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ die zu $f(x_1, \ldots, x_n)$ äquivalente Form aus dem zu $(\mathfrak{a})$ äquivalenten H-Ideal $\mathfrak{a} \subset K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, welches als Gesamtheit der durch

$$x_0{}^k F(x_0, x_1, \ldots, x_n) := x_0{}^{k+h(f)} f\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right), \qquad k \in \mathbf{N}\,, \tag{47}$$

gegebenen Formen charakterisiert war. $\mathfrak{a}$ enthält dann auch die durch Gradüberschreitung und anschließende Homogenisierung gewonnenen Formen. Wir wollen dies nochmals an dem zweiten Beispiel (im Anschluß an (44)) erläutern: Dort war $(\mathfrak{a}) = (f_1, f_2)$ mit $f_1 = x_1{}^2$, $f_2 = x_2 + x_1x_3$, ferner

$$x_1x_2 = (-x_3)\,x_1{}^2 + x_1(x_2 + x_1x_3) = (-x_3)\,f_1 + x_1f_2$$

und

$$x_2^2 = (x_3^2)\, x_1^2 + (x_2 - x_1x_3)\,(x_2 + x_1x_3) = x_3^2 f_1 + (x_2 - x_1x_3)\, f_2 .$$

Homogenisieren wir nun f_1, f_2 zu $F_1 = x_1^2$, $F_2 = x_0x_2 + x_1x_3$, so erhalten wir bei beiderseitiger Homogenisierung und Multiplikation mit x_0^3 bzw. x_0^4 daraus $x_0x_1x_2 = -x_3F_1 + x_1F_2$ und $x_0^2x_2^2 = x_3^2F_1 + (x_0x_2 - x_1x_3)\,F_2$. Nach (138) bedeutet dies $x_1x_2 \in (F_1, F_2) : (x_0)$ bzw. $x_2^2 \in (F_1, F_2) : (x_0^2) = \big((F_1, F_2) : (x_0)\big) : (x_0)$ nach (161). In unserem Beispiel ist dann offenbar

$$(F_1, F_2) \subset (F_1, F_2) : (x_0) \subset (F_1, F_2) : (x_0^2).$$

Man bekommt also *alle* Elemente des zu (f_1, f_2) äquivalenten H-Ideals durch Betrachtung der Ideale der Teilerkette

$$(F_1, F_2) \subset (F_1, F_2) : (x_0) \subset (F_1, F_2) : (x_0^2) \subseteqq (F_1, F_2) : (x_0^3) \subseteqq \cdots,$$

welche gemäß (27) nach endlich vielen Schritten abbrechen muß. Wir haben also so viele Idealquotienten zu berechnen, bis erstmals der Fall

$$(F_1, F_2) : (x_0^{k+1}) = (F_1, F_2) : (x_0^k)$$

eintritt, was in diesem Beispiel für $k = 2$ wirklich eintritt, an dieser Stelle jedoch noch nicht bewiesen werden kann. Das zu $(\mathfrak{a}) = (f_1, f_2)$ äquivalente H-Ideal ist also durch $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_3 = (F_1, F_2) : (x_0^2)$ gegeben.

Diese Überlegungen lassen sich leicht allgemein formulieren.

Satz 57 (Satz von van der Waerden, vgl. [3], Satz 8, S. 507). *Ist* $(\mathfrak{a}) = (f_1, \ldots, f_t) \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ *ein inhomogenes Polynomideal, geht* f_i *bei Homogenisierung* (38) *in* F_i *über* $(i = 1, \ldots, t)$ *und ist*

$$\mathfrak{a}_1 := (F_1, \ldots, F_t) \subset K[x_0, \ldots, x_n], \quad \mathfrak{a}_{i+1} := \mathfrak{a}_i : (x_0) \quad (i = 1, 2, \ldots), \tag{176}$$

so ist das zu $(\mathfrak{a})$ *äquivalente H-Ideal* $\mathfrak{a} \subset K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *das Schlußglied der echten Teilerkette*

$$\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \cdots. \tag{177}$$

In unserem Beispiel ist $\mathfrak{a}_3$ das zu $(\mathfrak{a}) = (f_1, f_2)$ äquivalente H-Ideal, während $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ zwar H-Ideale sind, jedoch keine zu einem P-Ideal $(\mathfrak{a})$ äquivalenten H-Ideale; aus (176) folgt vielmehr der

Satz 58. *Ein H-Ideal* $\mathfrak{a} \subset K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ist genau dann das zum inhomogenen P-Ideal* $(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\,|_{x_0=1} \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ *äquivalente H-Ideal, wenn*

$$\mathfrak{a} : (x_0) = \mathfrak{a} \tag{178}$$

gilt.

Tabelle A

	$+$	$\cdot$
$+$	$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c}=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$ (59)	$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c}=\mathfrak{a}\mathfrak{c}+\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ (65)
$\cdot$	$(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})+\mathfrak{c}\supseteqq(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})\cdot(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})$ (69) $\mathrm{Rad}\,((\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})+\mathfrak{c})=\mathrm{Rad}\,((\mathfrak{a}+\mathfrak{c})\cdot(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}))$ (103)	$(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c}=\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ (63)
$\cap$	$(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})+\mathfrak{c}\subseteqq(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})\cap(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})$ (109) $\mathrm{Rad}\,((\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})+\mathfrak{c})=\mathrm{Rad}\,((\mathfrak{a}+\mathfrak{c})\cap(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}))$ $=\mathrm{Rad}\,((\mathfrak{a}\mathfrak{b})+\mathfrak{c})$ (114)	$(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c}\subseteqq(\mathfrak{a}\mathfrak{c})\cap(\mathfrak{b}\mathfrak{c})$ (122) $\mathrm{Rad}\,((\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c})=\mathrm{Rad}\,((\mathfrak{a}\mathfrak{c})\cap(\mathfrak{b}\mathfrak{c}))$ $=\mathrm{Rad}\,(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})$ (123)
$:$	$(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})+\mathfrak{c}\subseteqq(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\mathfrak{c}):\mathfrak{b}$ (162) $(\mathfrak{a}:(b))+\mathfrak{c}=(\mathfrak{a}+(b)\mathfrak{c}):(b)$ (163)	$(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c}\subseteqq(\mathfrak{a}\mathfrak{c}):\mathfrak{b}$ (166)

Tabelle B

	$+$	$\cdot$
$+$	$\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$ (59)	$\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})\supseteqq(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\cdot(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})$ (69) $\mathrm{Rad}\,(\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}))$ $=\mathrm{Rad}\,((\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\cdot(\mathfrak{a}+\mathfrak{c}))$ (103)
$\cdot$	$\mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})=\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ (66)	$\mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})=\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ (63)
$\cap$	$\mathfrak{a}\cap(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})\supseteqq(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})+(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c})$ (115) $\mathrm{Rad}\,(\mathfrak{a}\cap(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}))=\mathrm{Rad}\,((\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})+(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c}))$ $=\mathrm{Rad}\,(\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}))$ (118)	$\mathfrak{a}\cap(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})\supseteqq(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})\cdot(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c})$ (119) $\mathrm{Rad}\,(\mathfrak{a}\cap(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}))=\mathrm{Rad}\,((\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})\cdot(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c}))$ $=\mathrm{Rad}\,(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})$ (121)
$:$	$\mathfrak{a}:(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})=(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})\cap(\mathfrak{a}:\mathfrak{c})$ (168)	$\mathfrak{a}:(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})=(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}):\mathfrak{c}$ (171)

$\cap$		$:$	
$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\cap\mathfrak{c} \supseteqq (\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c})+(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c})$ $\mathrm{Rad}\,((\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\cap\mathfrak{c}) = \mathrm{Rad}\,((\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c})+(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}))$ $= \mathrm{Rad}\,((\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\,\mathfrak{c})$	(115) (118)	$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}):\mathfrak{c} \supseteqq (\mathfrak{a}:\mathfrak{c})+(\mathfrak{b}:\mathfrak{c})$	(155)
$(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\cap\mathfrak{c} \supseteqq (\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c})\cdot(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c})$ $\mathrm{Rad}\,((\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\cap\mathfrak{c}) = \mathrm{Rad}\,((\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c})\cdot(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}))$ $= \mathrm{Rad}\,(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})$	(119) (121)	$(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}):\mathfrak{c} \supseteqq \mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{b}:\mathfrak{c})$	(157)
$(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})\cap\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}$	(108)	$(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}):\mathfrak{c} = (\mathfrak{a}:\mathfrak{c})\cap(\mathfrak{b}:\mathfrak{c})$	(159)
$(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})\cap\mathfrak{c} \subseteqq (\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}\mathfrak{c}):\mathfrak{b}$	(167)	$(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}):\mathfrak{c} = \mathfrak{a}:(\mathfrak{b}\mathfrak{c})$	(161)

$\cap$		$:$	
$\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}) \subseteqq (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\cap(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})$ $\mathrm{Rad}\,(\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c})) = \mathrm{Rad}\,((\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\cap(\mathfrak{a}+\mathfrak{c}))$ $= \mathrm{Rad}\,((\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}\mathfrak{c}))$	(109) (114)	$\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}:\mathfrak{c}) \subseteqq (\mathfrak{a}\mathfrak{c}+\mathfrak{b}):\mathfrak{c}$ $\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}:(c)) = (\mathfrak{a}(c)+\mathfrak{b}):(c)$	(162) (163)
$\mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}) \subseteqq (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\cap(\mathfrak{a}\mathfrak{c})$ $\mathrm{Rad}\,(\mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c})) = \mathrm{Rad}\,((\mathfrak{a}\mathfrak{b})\cap(\mathfrak{a}\mathfrak{c}))$ $= \mathrm{Rad}\,(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})$	(122) (123)	$\mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{b}:\mathfrak{c}) \subseteqq (\mathfrak{a}\mathfrak{b}):\mathfrak{c}$	(166)
$\mathfrak{a}\cap(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}$	(108)	$\mathfrak{a}\cap(\mathfrak{b}:\mathfrak{c}) \subseteqq (\mathfrak{a}\mathfrak{c}\cap\mathfrak{b}):\mathfrak{c}$	(167)
$\mathfrak{a}:(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}) \supseteqq (\mathfrak{a}:\mathfrak{b})+(\mathfrak{a}:\mathfrak{c})$	(172)	$\mathfrak{a}:(\mathfrak{b}:\mathfrak{c}) \supseteqq (\mathfrak{a}\mathfrak{c}):\mathfrak{b}$	(174)

Mit Satz 57 wird eine erste praktische Anwendung des Begriffes „Idealquotient" gegeben. Im nächsten Kapitel wird das Bilden von Idealquotienten ein wesentliches beweistechnisches Hilfsmittel darstellen. Wir wollen uns daher auch bei diesem Begriff im folgenden Abschnitt der Frage nach der praktischen Berechnung einer Basis für Idealquotienten zuwenden.

1.17. Zur Berechnung von Idealquotienten, Beispiele

Nach Satz 56 genügt es, Idealquotienten vom Typ

$$\mathfrak{a} : (b) = (a_1, \ldots, a_s) : (b) \tag{179}$$

berechnen zu können. Nun ist $\mathfrak{a} : (b)$ die Gesamtheit der c mit $cb = r_1 a_1 + \cdots + r_s a_s$, also

$$r_1 a_1 + \cdots + r_s a_s + (-c)\, b = 0. \tag{180}$$

Wäre nun $b \in \mathfrak{a}$, so wäre nach (141) $\mathfrak{a} : (b) = (1)$ und dieser Fall ist uninteressant. Wir können also $b \notin \mathfrak{a}$ annehmen; überdies sei $(a_1, \ldots, a_s, b)$ eine Minimalbasis und (180) gemäß (127) eine Passivitätsbedingung; die Lösungsvektoren von (180) sind Syzygien der Art

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_s \\ \Phi_{s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_s \\ -c \end{pmatrix},$$

von denen hier also nur jeweils die letzte Koordinate interessiert.

Beispiel.

$$\mathfrak{a} = (x_0 x_3 - x_1 x_2,\, x_0^2 x_2 - x_1^3,\, x_0 x_2^2 - x_1^2 x_3), \qquad \mathfrak{b} = (b) = (x_1 x_3^2 - x_2^3).$$

(180) geht über in

$$G_1(x_0 x_3 - x_1 x_2) + G_2(x_0^2 x_2 - x_1^3) + G_3(x_0 x_2^2 - x_1^2 x_3) - c(x_1 x_3^2 - x_2^3) = 0.$$

Hier können wir nun (130) und (131) verwenden und finden $-c = \Phi_4 = -\Psi_3 x_0 - \Psi_4 x_1$, mithin ist $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = (x_0, x_1)$.

1.18. Idealquotienten von Potenzproduktidealen

Auch hierfür gelangte R. KUMMER (vgl. KUMMER und RENSCHUCH [1]) zu geschlossenen Ausdrücken. Dazu beweisen wir als erstes:

$$p, q \text{ Potenzprodukte} \Rightarrow (p) : (q) = \left(\frac{p}{p \sqcap q}\right). \tag{181}$$

Beweis. $(p) : (q)$ ist die Gesamtheit der c mit

$$cq = kp, \tag{182}$$

worin o. B. d. A. c und k ebenfalls Potenzprodukte sind. Für die vorgegebenen Potenzprodukte p und q sei nun

$$p = (p \sqcap q)\, p^*, \quad q = (p \sqcap q)\, q^*. \tag{183}$$

Setzen wir (183) in (182) ein und kürzen $p \sqcap q$ heraus, so folgt

$$cq^* = kp^* \quad \text{mit} \quad p^* \sqcap q^* = 1; \tag{184}$$

die Lösung von (184) ist

$$c = rp^* \quad \text{und} \quad k = rq^*, \qquad r \text{ beliebig.} \tag{185}$$

Setzen wir (183) in (185) ein, so folgt (181), q.e.d.

Wir wollen nun zeigen, daß in

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) : \mathfrak{c} \supseteqq (\mathfrak{a} : \mathfrak{c}) + (\mathfrak{b} : \mathfrak{c}) \tag{155}$$

das Gleichheitszeichen für den Fall gilt, daß $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Potenzproduktideale sind und $\mathfrak{c}$ ein Potenzprodukthauptideal ist, also:

$$(\mathfrak{a}_\pi + \mathfrak{b}_\pi) : (q) = \big(\mathfrak{a}_\pi : (q)\big) + \big(\mathfrak{b}_\pi : (q)\big). \tag{186}$$

Dazu genügt wegen (155) der Nachweis von

$$(\mathfrak{a}_\pi + \mathfrak{b}_\pi) : (q) \subseteqq \big(\mathfrak{a}_\pi : (q)\big) + \big(\mathfrak{b}_\pi : (q)\big). \tag{187}$$

Beweis. $(\mathfrak{a}_\pi + \mathfrak{b}_\pi) : (q)$ ist die Gesamtheit der d mit $d(kq) \in \mathfrak{a}_\pi + \mathfrak{b}_\pi$ mit beliebigem k. Mithin kann o. B. d. A. $k = 1$ gesetzt werden; dann aber folgt die Gültigkeit für beliebiges k aus der Idealeigenschaft (2). Ist $\mathfrak{a}_\pi = (p_1, \ldots, p_s)$, $\mathfrak{b}_\pi = (q_1, \ldots, q_t)$, so ist $dq \in \mathfrak{a}_\pi + \mathfrak{b}_\pi$ mit $dq \in (p_1, \ldots, p_s, q_1, \ldots, q_t)$ gleichbedeutend. Da $p_1, \ldots, p_s, q_1, \ldots, q_t$ und q Potenzprodukte sind, ist o. B. d. A. auch d ein Potenzprodukt; damit aber ergibt sich die Gesamtheit der in Frage kommenden d aus den Gleichungen

$$dq = r_1 p_1, \ldots, dq = r_s p_s \tag{188}$$

und

$$dq = s_1 q_1, \ldots, dq = s_t q_t, \tag{189}$$

welche analog (182) zu lösen sind. (188) bedeutet nun aber $dq \in \mathfrak{a}_\pi$, und (189) bedeutet $dq \in \mathfrak{b}_\pi$, also gilt $d \in \mathfrak{a}_\pi : (q), d \in \mathfrak{b}_\pi : (q)$, mithin $d \in \big(\mathfrak{a}_\pi : (q)\big) + \big(\mathfrak{b}_\pi : (q)\big)$, also gilt (187) und mithin (186), q.e.d.

Durch mehrfache Anwendung von (186) folgt

$$(p_1, \ldots, p_s) : (q) = \big((p_1) : (q)\big) + \cdots + \big((p_s) : (q)\big); \tag{190}$$

mit (181) folgt

$$\mathfrak{a}_\pi : (q) = \left(\frac{p_1}{p_1 \sqcap q}, \ldots, \frac{p_s}{p_s \sqcap q}\right) \tag{191}$$

und mit (170) schließlich

Satz 59. *Für Idealquotienten von Potenzproduktidealen gilt*

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_\pi : \mathfrak{b}_\pi &= (p_1, \ldots, p_s) : (q_1, \ldots, q_t) \\ &= \left(\frac{p_1}{p_1 \sqcap q_1}, \ldots, \frac{p_s}{p_s \sqcap q_1}\right) \cap \cdots \cap \left(\frac{p_1}{p_1 \sqcap q_t}, \ldots, \frac{p_s}{p_s \sqcap q_t}\right). \end{aligned} \tag{192}$$

Aus (192) ist die weitere Berechnung sukzessiv nach (137) möglich.

Demgemäß ist übrigens auch die Angabe einer geschlossenen Formel möglich (vgl. Kummer und Renschuch [1], Satz 5′, S. 85), worauf hier aber verzichtet werden soll.

Beispiel 1. $\mathfrak{a}_\pi = (x_1^2, x_1x_3, x_2^2)$, $\mathfrak{b}_\pi = (x_1x_2, x_2x_3)$. Dann wird

$$\mathfrak{a}_\pi : (x_1x_2) = (x_1, x_3, x_2) = (x_1, x_2, x_3), \qquad \mathfrak{a}_\pi : (x_2x_3) = (x_1^2, x_1, x_2) = (x_1, x_2),$$

also

$$\mathfrak{a}_\pi : \mathfrak{b}_\pi = (x_1, x_2, x_3) \cap (x_1, x_2) = (x_1, x_2).$$

Beispiel 2. $\mathfrak{a}_\pi = (x_1, x_2x_4, x_3^2)$, $\mathfrak{b}_\pi = (x_1x_2, x_2x_3)$. Hier wird

$$\mathfrak{a}_\pi : (x_1x_2) = (1), \qquad \mathfrak{a}_\pi : (x_2x_3) = (x_1, x_4, x_3) = (x_1, x_3, x_4)$$

und

$$\mathfrak{a}_\pi : \mathfrak{b}_\pi = (1) \cap (x_1, x_3, x_4) = (x_1, x_3, x_4).$$

Beispiel 3. $\mathfrak{a}_\pi = (x_1^3x_2, x_1^2x_2x_3, x_1x_2^3, x_1x_2x_3^2, x_2^3x_3)$, $\mathfrak{b}_\pi = (x_1^2, x_1x_3, x_2^2)$ gibt (jeweils nach Streichung überflüssiger Basiselemente)

$$\mathfrak{a}_\pi : (x_1^2) = (x_1x_2, x_2x_3, x_2^3) = \mathfrak{a}_\pi : (x_1x_3), \qquad \mathfrak{a}_\pi : (x_2^2) = (x_1^3, x_1^2x_3, x_1x_2, x_1x_3^2, x_2x_3),$$

also auch $\big(\mathfrak{a}_\pi : (x_1^2)\big) \cap \big(\mathfrak{a}_\pi : (x_1x_3)\big) = (x_1x_2, x_2x_3, x_2^3)$ und endlich

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_\pi : \mathfrak{b}_\pi &= \big(\mathfrak{a}_\pi : (x_1^2)\big) \cap \big(\mathfrak{a}_\pi : (x_1x_3)\big) \cap \big(\mathfrak{a}_\pi : (x_2^2)\big) \\ &= (x_1x_2, x_2x_3, x_2^3) \cap (x_1x_2, x_2x_3, x_1^3, x_1^2x_3, x_1x_3^2) = (x_1x_2, x_2x_3); \end{aligned}$$

bei der letzten Durchschnittsbildung können in der Tat 13 der 15 Potenzprodukte gestrichen werden. Die Einzelausrechnungen seien dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.

2. Die Lasker-Noetherschen Sätze

2.1. Einleitung

Ziel dieses Kapitels ist eine Zerlegungstheorie für Ideale. Dabei wird man zunächst an die Zerlegung natürlicher Zahlen als Produkt von Primzahlpotenzen und analoge Produktdarstellungen für Polynome $f(x)$ in einer Variablen denken. Andererseits traten u. a. bei den zuletzt behandelten Beispielen Durchschnittsdarstellungen von Idealen auf; in Spezialfällen kann der Idealdurchschnitt mit dem Idealprodukt übereinstimmen (vgl. (104)).

Für Polynomideale ist das jedoch im allgemeinen nicht der Fall. Wir betrachten dazu als Beispiel das zu einem Geradenpaar gehörige Ideal. Bleiben wir in der Ebene, betrachten das Ideal also in $K[x_0, x_1, x_2]$, so haben wir

$$(x_1^2 - x_2^2) = (x_1 - x_2) \cap (x_1 + x_2) = \big((x_1 - x_2)\,(x_1 + x_2)\big).$$

Sind wir dagegen im dreidimensionalen Raum, so benötigen wir zur Darstellung des Geradenpaares nunmehr die beiden Gleichungen $x_1^2 - x_2^2 = 0$ und $x_3 = 0$, haben also als zugehöriges Ideal in $K[x_0, x_1, x_2, x_3]$ das Ideal

$$\begin{aligned}(x_1^2 - x_2^2, x_3) &= (x_1 - x_2, x_3) \cap (x_1 + x_2, x_3)\\ &\supset \big((x_1 - x_2, x_3)\cdot(x_1 + x_2, x_3)\big) = (x_1^2 - x_2^2, x_1x_3, x_2x_3, x_3^2).\end{aligned}$$

Dieses einfache Beispiel zeigt, daß wir also um Durchschnittsdarstellungen bemüht sein müssen. In Analogie zur Zerlegungstheorie in $\mathbf{Z}$ müssen wir dazu erst geeignete Analoga zu den Begriffen „Primzahl“ und „Primzahlpotenz“ prägen. Dies werden die Begriffe „Primideal“ und „Primärideal“ sein, die wir neben den quasiprimären Idealen zu Anfang einführen wollen. Damit werden wir die Existenz einer Durchschnittszerlegung nachweisen können. Dieser „erste Zerlegungssatz“ wird meistens E. Lasker zugeschrieben (vgl. [1], Satz VII), dabei aber nicht erwähnt, daß Lasker in seinem Satz VII die Existenz der Durchschnittsdarstellung nur für H-Ideale herleitet, während EMMY NOETHER diesen und die folgenden Zerlegungs- und Eindeutigkeitssätze unter Benutzung der Teilerkettenbedingung (T) (vgl. Kap. 1, (26)), also für beliebige Noethersche Ringe, beweist (vgl. NOETHER [1], §§ 2—7).

Die praktische Durchführung der Zerlegung wird uns wiederum im Fall der Potenzproduktideale gelingen (vgl. 2.22.). In 2.23. wollen wir dann den Anschluß an Produktzerlegungen herstellen.

2.2. Primideale

Eine Primzahl p ist dadurch charakterisiert, daß sie nur die Teiler $1, -1, p, -p$ besitzt, daß also (1) das einzige Oberideal von (p) ist. Die daran anknüpfende Verallgemeinerung (auf die wir im Beispiel 6 von 2.3. eingehen werden) erweist sich als zu einschränkend. Dazu folgende Überlegung: Bei der Zerlegung eines Polynoms in Linearfaktoren sind die linearen Polynome die Primelemente. Geht man davon aus, so wird man beispielsweise das Ideal (x_0, x_1) sicher als primes Ideal in dem noch zu definierenden Sinne ansehen, obwohl es die (ähnlich gebauten) echten Oberideale $(x_0, x_1, x_2), \ldots, (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ mit $(x_0, x_1) \subset (x_0, x_1, x_2) \subset \cdots \subset (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ hat.

Wir müssen also eine solche Charakterisierung für Primzahlen geben, die eine für uns sinnvollere Verallgemeinerung induziert.

Nehmen wir beispielsweise das Ideal (6) und das Element $c = 24 = 3 \cdot 8 \in (6)$. Hier ist $3 \notin (6)$ und $8 \notin (6)$, aber $3 \cdot 8 \in (6)$. Betrachten wir dagegen alle echten Zerlegungen der Zahl $42 \in (7)$ als Produkt zweier Zahlen, so haben wir $42 = 2 \cdot 21 = 3 \cdot 14 = 6 \cdot 7 = 7 \cdot 6 = 14 \cdot 3 = 21 \cdot 2$, und jeweils ein Faktor ist durch 7 teilbar. Wäre dies nicht der Fall, wäre also $c = a \cdot b$ mit $a \notin (7)$ und $b \notin (7)$, so wäre auch $a \cdot b \notin (7)$. Damit haben wir bereits eine für alle Primzahlen charakteristische Eigenschaft E_1 gefunden:

E_1: Für alle Elemente a, b aus $\mathbf{Z}$ mit $a \notin (p)$ und $b \notin (p)$ folgt $ab \notin (p)$.

Die Kontraposition von E_1 ist

E_2: Für alle Elemente a, b aus $\mathbf{Z}$ mit $ab \in (p)$ folgt $a \in (p)$ oder $b \in (p)$.

Mit E_2 gleichwertig ist offenbar

E_3: Der Restklassenring $\mathbf{Z}/(p)$ ist nullteilerfrei, also ein Integritätsbereich.

Daß dann $\mathbf{Z}/(p)$ sogar ein Körper ist, wurde bereits in MfL Bd. 3, 13.2. (Folgerung aus Satz 1) gezeigt.

Die im ersten Kapitel vor Satz 4 gemachte Feststellung, daß in Kongruenzen nach einem Ideal nicht immer gekürzt werden darf, kann für $\mathbf{Z}$ wegen E_3 dahingehend präzisiert werden, daß in Kongruenzen modulo (m) genau dann gekürzt werden darf, wenn $m = p$ eine Primzahl ist.

Nunmehr ist es leicht, den Begriff „Primideal“ zu definieren.

Definition 1. Ein Ideal $\mathfrak{p}$ aus einem Noetherschen Ring R heißt *Primideal*, wenn eine der drei folgenden Eigenschaften erfüllt ist:

$$\text{Für alle } a, b \text{ aus } R \text{ mit } a \notin \mathfrak{p} \text{ und } b \notin \mathfrak{p} \text{ folgt } ab \notin \mathfrak{p}. \tag{1}$$

$$\text{Für alle } a, b \text{ aus } R \text{ mit } ab \in \mathfrak{p} \text{ folgt } a \in \mathfrak{p} \text{ oder } b \in \mathfrak{p}. \tag{2}$$

$$\text{Der Restklassenring } R/\mathfrak{p} \text{ ist nullteilerfrei, also ein Integritätsbereich.} \tag{3}$$

Durch Übergang zu Restklassen folgt unmittelbar die Äquivalenz von (2) und (3); ferner ist (2) die Kontraposition von (1) und umgekehrt. Wir haben damit den

Satz 1. *Die Eigenschaften* (1), (2) *und* (3) *sind äquivalent.*

Damit haben wir den Anschluß an den letzten Abschnitt von 13.4.2. in MfL Bd. 3 gefunden.

Unsere anfangs gemachten Bemerkungen zeigten uns die Existenz von Teilerketten von Primidealen. Dazu geben wir die

Definition 2. Teilerketten von Primidealen heißen *Primidealketten*.

Das Beispiel $(x_0, x_1) \subset (x_0, x_1, x_2) \subset \cdots \subset (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ beweist den

Satz 2. *In Noetherschen Ringen existieren Primidealketten.*

Die große Bedeutung der Primidealketten wurde von Krull erkannt; wir können uns hier jedoch nicht näher mit ihnen beschäftigen.

Nunmehr wollen wir einige Eigenschaften von Primidealen herleiten.

Satz 3. *Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal in einem Noetherschen Ring R, so gilt für Ideale $\mathfrak{a} \subset R$, $\mathfrak{b} \subset R$*

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{p} \wedge \mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{p}, \tag{4}$$

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{p} \wedge \mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}. \tag{5}$$

Beweis. Offenbar genügt der Nachweis von (4), denn (5) folgt aus (4) durch Vertauschung und Umbenennung. Wegen $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$ existiert ein $a \in \mathfrak{a}$ mit $a \notin \mathfrak{p}$; dann ist $a\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{p}$. Nach Definition 40 von Kapitel 1 bedeutet $a\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{p}$, daß $ab \in \mathfrak{p}$ für *alle* $b \in \mathfrak{b}$ gilt; wegen $a \notin \mathfrak{p}$ folgt nach (2) also $b \in \mathfrak{p}$ für *alle* $b \in \mathfrak{b}$, also $\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{p}$, q.e.d.

Satz 4. *Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal und $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal eines Noetherschen Ringes R, so gilt*

$$\mathfrak{a}^x \subseteqq \mathfrak{p} \quad \textit{für} \quad x \in \mathbf{N}^* \Rightarrow \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}. \tag{6}$$

Beweis (indirekt). Angenommen, es wäre $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$. Wir benutzen jetzt zur Konstruktion eines Widerspruchs das *Abbauprinzip* für die Exponenten:

Aus $\mathfrak{a}^x = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{x-1} \subseteq \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$ folgt $\mathfrak{a}^{x-1} \subseteq \mathfrak{p}$ nach (4),

aus $\mathfrak{a}^{x-1} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{x-2} \subseteq \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$ folgt $\mathfrak{a}^{x-2} \subseteq \mathfrak{p}$ nach (4), ... usw.,

schließlich:

aus $\mathfrak{a}^3 = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^2 \subseteq \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$ folgt $\mathfrak{a}^2 \subseteq \mathfrak{p}$ nach (4),

aus $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$ folgt $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ nach (4) im Widerspruch zu $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$.

Diese Annahme war also falsch, mithin gilt (6).

Aus Satz 4 folgt unmittelbar

Satz 5. *Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal eines Noetherschen Ringes und $a \in R$, so gilt*

$$a^x \in \mathfrak{p} \text{ für } x \in \mathbf{N}^* \Rightarrow a \in \mathfrak{p}. \tag{7}$$

Nach Kap. 1, (83), gilt für Radikale $(\operatorname{Rad} \mathfrak{a})^x \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \operatorname{Rad} \mathfrak{a}$, also für Primideale $(\operatorname{Rad} \mathfrak{p})^x \subseteq \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p} \subseteq \operatorname{Rad} \mathfrak{p}$. Wegen (6) gilt $(\operatorname{Rad} \mathfrak{p})^x \subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow \operatorname{Rad} \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}$, zusammen mit $\mathfrak{p} \subseteq \operatorname{Rad} \mathfrak{p}$ folgt

Satz 6. *Für Primideale gilt*

$$\operatorname{Rad} \mathfrak{p} = \mathfrak{p}. \tag{8}$$

Primideale sind also spezielle semiprime Ideale (vgl. Kap. 1, Definition 37); desgleichen Durchschnitte von Primidealen (vgl. Kap. 1, (113)).

2.3. Beispiele für Primideale

Beispiel 1. Wie nun schon mehrfach erwähnt, sind in $\mathbf{Z}$ alle Ideale $\mathfrak{p} = (p)$ Primideale, bei denen p eine Primzahl ist.

Beispiel 2. Ist R ein ZPE-Ring, so sind entsprechend alle Hauptideale $\mathfrak{p} = (p)$ Primideale, bei denen p ein Primelement ist. Insbesondere sind in Polynomringen alle diejenigen Hauptideale $\mathfrak{p} = (f(x_1, \ldots, x_n))$ bzw. $p = (F(x_0, x_1, \ldots, x_n))$ Primideale (genauer Primhauptideale), bei denen f ein irreduzibles Polynom bzw. F eine irreduzible Form ist.

Beispiel 3. *Primideale entstehen in Polynomringen durch Vorgabe von Nullstellen.* Dies haben wir für inhomogene Polynome schon im ersten Kapitel behandelt. Dort war $(y_1, \ldots, y_n)$ als Nullstelle vorgegeben, und es wurde gezeigt, daß alle Polynome $f(x_1, \ldots, x_n)$ mit $f(y_1, \ldots, y_n) = 0$ ein Ideal bildeten (vgl. Kap. 1, (4), (5)), welches wir dort bereits $\mathfrak{p}$ nannten. Wir haben also nur noch die Primidealeigenschaft nachzuweisen. Ist ein Polynom $c(x_1, \ldots, x_n)$ zerlegbar in

$$c(x_1, \ldots, x_n) = h(x_1, \ldots, x_n) \cdot f(x_1, \ldots, x_n),$$

gilt ferner $c(y_1, \ldots, y_n) = 0$, so ist also $h(y_1, \ldots, y_n) \cdot f(y_1, \ldots, y_n) = 0$, und hier muß wenigstens einer der beiden Faktoren verschwinden, was mit $h(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{p}$ oder $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{p}$ gleichwertig ist. Mithin ist $\mathfrak{p}$ nach (2) ein Primideal.

Wir werden bei den Anwendungen diese Aussage vornehmlich im homogenen Fall benutzen und deshalb dafür einen Satz formulieren.

Satz 7. *Die Gesamtheit der Formen in $x_0, x_1, \ldots, x_n$, welche an einer vorgegebenen Nullstelle $(y_0, \ldots, y_n)$ verschwinden (wobei die y_i im allgemeinen noch von Parametern abhängen), bildet ein homogenes Primideal $\mathfrak{p}$ oder primes H-Ideal $\mathfrak{p}$.*

Dieser Satz wird dadurch an Bedeutung gewinnen, daß auch seine Umkehrung gilt und auf diesem Wege bei einem vorgegebenen H-Ideal entschieden werden kann, ob es ein Primideal ist oder nicht.

Beispiel 4. Wir betrachten in $K[x_0, x_1, x_2, x_3]$ wieder einmal (vgl. Kap. 1, (96)ff.) die vier Formen

$$F_1 = x_0x_3 - x_1x_2, \qquad F_2 = x_0^2x_2 - x_1^3, \qquad F_3 = x_0x_2^2 - x_1^2x_3, \qquad F_4 = x_1x_3^2 - x_2^3$$

und behaupten, daß (F_1, F_2, F_3, F_4) ein Primideal ist. Zunächst möge der Leser selbst durch Einsetzen bestätigen, daß (F_1, F_2, F_3, F_4) die Nullstelle

$$y_0 = t_0^4, \qquad y_1 = t_0^3t_1, \qquad y_2 = t_0t_1^3, \qquad y_3 = t_1^4$$

hat. Schwieriger ist schon der Nachweis, daß jede Form $F(x_0, x_1, x_2, x_3)$ mit der obigen Nullstelle aus dem Ideal (F_1, F_2, F_3, F_4) ist. Dies kann mit Hilfe der Kongruenzrechnung für Ideale geschehen, wie sie in 1.2. entwickelt wurde. Die damit verbundene Rechnung ist unproblematisch, aber etwas langwierig. Um den Gedankengang nicht zu unterbrechen, wollen wir dies bis zum sechsten Kapitel zurückstellen.

Beispiel 5. Sind $l_1, \ldots, l_r$, $l_i = a_{i0} + a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$, linear unabhängige *lineare Polynome*, ist ferner $(l_1, \ldots, l_r) \neq (1)$, so ist $(l_1, \ldots, l_r)$ ein Primideal. Dies folgt aus der Existenz einer linearen Lösungsmannigfaltigkeit mit $n-r$ Parametern für das Gleichungssystem $l_i = 0$, wie in der linearen Algebra gezeigt wird (vgl. MfL Bd. 3, Kap. 5). Gehen wir von einer solchen „allgemeinen" Nullstelle mit $n-r$ Parametern aus, so gelangen wir wieder zum Ideal $(l_1, \ldots, l_r)$, welches mithin ein Primideal ist.

Beispiel 6. *Teilerlose Ideale.* Wir erinnern hierzu an Kap. 1, Definition 17: Dort gingen wir von einer Menge M aus, welche eine nichtleere Menge von Idealen sein sollte. Ein Ideal $\bar{\mathfrak{m}} \in M$ heißt maximal bezüglich M, wenn es kein Ideal $\mathfrak{a} \in M$ mit $\bar{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{a}$ gibt. Es sei nun $M \subseteqq R$ und R ein Noetherscher Ring. Wir betrachten jetzt den Spezialfall $M = R$ und maximale Ideale bezüglich R.

Definition 3. Bezüglich R maximale Ideale $\mathfrak{m}$ aus R heißen *teilerlos* oder schlechthin *maximal.*

Da wir im Anschluß an 2.15. den Begriff „maximal" für Mengen $M \subset R$ benötigen werden, soll zur Vermeidung von Verwechslungen im folgenden die Bezeichnung „teilerlos" verwendet werden.

Es gilt dann der

Satz 8. *Ist* $\mathfrak{m} \subset R$ *ein teilerloses Ideal eines Noetherschen Ringes* R, *so ist* $R/\mathfrak{m}$ *ein Körper.*

Beweis. Wegen $\mathfrak{m} \subset R$ existiert wenigstens ein Element $a \in R$ mit $a \notin \mathfrak{m}$; wegen der Teilerlosigkeit von $\mathfrak{m}$ muß dann $(\mathfrak{m}, a) = R$ sein. Insbesondere ist also $1 \in (\mathfrak{m}, a)$. Es existieren also Elemente $m \in \mathfrak{m}$ und $b \in R$ mit $1 = m + ba$. Dabei ist $b \notin \mathfrak{m}$, denn wäre $b \in \mathfrak{m}$, so auch $1 \in \mathfrak{m}$ und mithin $\mathfrak{m} = (1) = R$ im Widerspruch zur Voraussetzung $\mathfrak{m} \subset R$. In $R/\mathfrak{m}$ gilt also $[1] = [0] + [b] \cdot [a]$. In $R/\mathfrak{m}$ ist also die Gleichung $[b] \cdot [a] = [1]$ für alle $[a] \neq [0]$ und $[b] \neq [0]$ uneingeschränkt lösbar; $R/\mathfrak{m}$ ist mithin ein Körper, q.e.d.

Da ein Körper nullteilerfrei ist, folgt aus (3) unmittelbar der

Satz 9. *Teilerlose Ideale sind Primideale.*

Von Satz 8 gilt übrigens auch die Umkehrung; für einen Beweis sei auf O.-H. Keller [2], 3.2.2.1., Satz 10, verwiesen.

2.4. Prime Potenzproduktideale

Es sei $\mathfrak{p}_\pi$ ein primes Potenzproduktideal und $x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_{n-1}^{i_{n-1}} x_n^{i_n}$ irgendein Potenzprodukt aus $\mathfrak{p}_\pi$, auf welches wir das „Abbauprinzip" des Beweises von Satz 4, o.B.d.A. von rechts beginnend, anwenden wollen. Aus $x_n^{i_n} \notin \mathfrak{p}_\pi$ folgt $x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_{n-1}^{i_{n-1}} \in \mathfrak{p}_\pi$, ist $x_{n-1}^{i_{n-1}} \notin \mathfrak{p}_\pi$, so folgt $x_0^{i_0} \cdots x_{n-2}^{i_{n-2}} \in \mathfrak{p}_\pi$ usw. Irgendwann muß einmal der Fall $x_k^{i_k} \in \mathfrak{p}_\pi$ und damit $x_k \in \mathfrak{p}_\pi$ wegen (7) eintreten, ungünstigstenfalls für $k = 0$, d. h. $x_0 \in \mathfrak{p}_\pi$. Wir untersuchen dann alle in $\mathfrak{p}_\pi$ enthaltenen Potenzprodukte, welche x_0 *nicht* enthalten. Führen wir dort dasselbe Abbauprinzip durch, so gelangen wir zu $x_j \in \mathfrak{p}_\pi$ mit $j \geqq 1$ usw. Basiselemente von $\mathfrak{p}_\pi$ sind also gewisse der Variablen $x_0, x_1, \ldots, x_n$, etwa $\mathfrak{p}_\pi = (x_{k_0}, x_{k_1}, \ldots, x_{k_{r-1}})$ mit $0 \leqq k_0 < k_1 < \cdots < k_{r-1} \leqq n$. Wir können also o.B.d.A. $\mathfrak{p}_\pi = (x_0, x_1, \ldots, x_{r-1})$ annehmen:

Satz 10. *Ein Potenzproduktideal* $\mathfrak{p}_\pi \subset K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ist genau dann ein Primideal, wenn* $\mathfrak{p}_\pi$ *von der Bauart*

$$\mathfrak{p}_\pi = (x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}) \tag{9}$$

ist.

Die Beweisrichtung ($\Leftarrow$) folgt aus dem Beispiel 5 von 2.3.

2.5. Quasiprimäre Ideale

In Umkehrung von Satz 6 wollen wir nun solche Ideale betrachten, die zwar nicht prim zu sein brauchen, bei denen aber das Radikal ein Primideal ist. Diese Theorie wurde 1946 von dem ungarischen Mathematiker L. Fuchs [1] durch Einführung der „quasiprimären Ideale" begründet. Fuchs ging es darum, alle diejenigen Polynomideale zu charakterisieren, die zu irreduziblen algebraischen Varietäten führen. Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, ist dies gerade für zugehörige Polynomideale mit $\operatorname{Rad} \mathfrak{r} = \mathfrak{p}$ der Fall. Aber auch unabhängig von dieser Anwendung scheint es dem Verfasser gerechtfertigt, diesen Begriff erstmals in ein Lehrbuch aufzunehmen, nicht zuletzt deshalb, um dadurch die Unterschiede zu dem anschließend einzuführenden Begriff „Primärideal" klarer formulieren zu können, als dies ohne diesen Begriff möglich ist (vgl. Noether [1], van der Waerden [8, 9, 10], Gröbner [2, 8]). Wir benötigen dazu den Begriff „nilpotent", den wir vorab einführen wollen:

Definition 4. Ein Element a eines Ringes S heißt *nilpotent*, wenn ein ϱ existiert mit $a^\varrho = 0$. Ist $a \neq 0$, so heißt a ein *nilpotenter Nullteiler*.

Definition 5. Ein Ideal $\mathfrak{r}$ eines Noetherschen Ringes R heißt *quasiprimär*, wenn eine der folgenden fünf Eigenschaften gilt:

$\operatorname{Rad} \mathfrak{r} = \mathfrak{p}$ ist ein Primideal $\mathfrak{p}$. (10)

Es existiert ein Primideal $\mathfrak{p}$ und ein Exponent ϱ mit $\mathfrak{p}^\varrho \subseteqq \mathfrak{r} \subseteqq \mathfrak{p}$. (11)

Sind a und b Ringelemente und gilt für *alle* natürlichen Zahlen x, y stets $a^x \notin \mathfrak{r}$ und $b^y \notin \mathfrak{r}$, so ist $ab \notin \mathfrak{r}$. (12)

Aus $a \cdot b \in \mathfrak{r}$ folgt: Entweder ist a oder b Element von $\mathfrak{r}$. Ist aber $a \notin \mathfrak{r}$ und $b \notin \mathfrak{r}$, dann existiert ein ϱ mit $a^\varrho \in \mathfrak{r}$, oder es existiert ein σ mit $b^\sigma \in \mathfrak{r}$. (13)

Sind $[a] \neq [0]$, $[b] \neq [0]$ Elemente aus $R/\mathfrak{r}$ mit $[a] \cdot [b] = [0]$, so ist wenigstens einer der beiden Nullteiler $[a]$, $[b]$ nilpotent. (14)

Definition 6. $\mathfrak{p} = \operatorname{Rad} \mathfrak{r}$ heißt das zu $\mathfrak{r}$ gehörige Primideal; $\mathfrak{r}$ heißt $\mathfrak{p}$-*quasiprimär*.

Bevor wir die Äquivalenz der Bedingungen (10) bis (14) nachweisen, wollen wir (13) erläutern durch eine Aufzählung aller möglichen Fälle von (13):

$$a \in \mathfrak{r} \wedge b \in \mathfrak{r}, \tag{13a}$$

$$a \notin \mathfrak{r} \wedge b \in \mathfrak{r}, \tag{13b}$$

$$a \in \mathfrak{r} \wedge b \notin \mathfrak{r}, \tag{13c}$$

$$a \notin \mathfrak{r} \wedge b \notin \mathfrak{r} \wedge a^\varrho \in \mathfrak{r} \wedge b^\sigma \in \mathfrak{r}, \tag{13d}$$

$$a \notin \mathfrak{r} \wedge b \notin \mathfrak{r} \wedge a^x \notin \mathfrak{r} \wedge b^\sigma \in \mathfrak{r}, \tag{13e}$$

$$a \notin \mathfrak{r} \wedge b \notin \mathfrak{r} \wedge a^\varrho \in \mathfrak{r} \wedge b^y \notin \mathfrak{r}. \tag{13f}$$

Dabei bezeichnen ϱ, σ geeignete, x, y beliebige Exponenten aus $\mathbf{N}^*$.

Satz 11. *Die für quasiprimäre Ideale charakteristischen Eigenschaften* (10), (11), (12), (13), (14) *sind äquivalent.*

Beweis. Die Äquivalenz von (10) und (11) folgt wegen Kap. 1, Satz 40, (83). Die Aufstellung der sechs Fälle von (13) verdeutlicht die Äquivalenz von (10) und (13). (12) ist die Kontraposition von (13) und umgekehrt. Die Äquivalenz von (14) mit (10) ist ebenfalls unmittelbar einzusehen.

Aus (10) und Kap. 1, (100), folgt:

$$\mathfrak{r} \textit{ ist } \mathfrak{p}\textit{-quasiprimär} \Rightarrow \operatorname{Rad}(\mathfrak{r} + \mathfrak{b}) = \operatorname{Rad}(\mathfrak{p} + \mathfrak{b}). \tag{15}$$

2.6. Beispiele für quasiprimäre Ideale

Beispiel 1. *Primidealpotenzen.* Hier gilt wegen (11) offenbar

Satz 12. *Jede Primidealpotenz* $\mathfrak{p}^\varrho$ ist $\mathfrak{p}$-quasiprimär.

Beispiel 2. Wir betrachten in $K[x_0, x_1, x_2, x_3]$ wieder einmal die vier Formen

$$F_1 = x_0x_3 - x_1x_2, \quad F_2 = x_0{}^2x_2 - x_1{}^3, \quad F_3 = x_0x_2{}^2 - x_1{}^2x_3, \quad F_4 = x_1x_3{}^2 - x_2{}^3.$$

Gemäß dem Beispiel 4 von 2.3. war $\mathfrak{p} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$ ein Primideal. Im dritten Beispiel von 1.10. wurde daneben das H-Ideal (F_1, F_2, F_4) betrachtet und $\mathfrak{p}^2 \subset (F_1, F_2, F_4) \subset \mathfrak{p}$ nachgewiesen. Mithin ist $\mathfrak{r} = (F_1, F_2, F_4)$ gemäß (11) quasiprimär.

Beispiel 3. Entsprechendes gilt für das Beispiel 4 von 1.10. Hier ist wieder

$$R = K[x_0, x_1, x_2, x_3], \qquad \mathfrak{p} = (F_1, F_2, F_3), \qquad \mathfrak{r} = (F_1, F_4), \qquad \mathfrak{p}^2 \subset \mathfrak{r} \subset \mathfrak{p}$$

und

$$F_1 = x_0x_2 - x_1{}^2, \qquad F_2 = x_0x_3 - x_1x_2, \qquad F_3 = x_1x_3 - x_2{}^2,$$
$$F_4 = x_3F_2 - x_2F_3 = x_0x_3{}^2 - 2x_1x_2x_3 + x_2{}^3$$

(vgl. Kap. 1, (97)), und nach (11) ist $\mathfrak{r}$ mithin $\mathfrak{p}$-quasiprimär.

Beispiel 4. Es sei $R = K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ und $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus R. Dann ist $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \cdot \mathfrak{p}$ quasiprimär. Denn wegen Kap. 1, (113) und (106), ist

$$\operatorname{Rad}((x_0, x_1, \ldots, x_n) \cdot \mathfrak{p}) = \operatorname{Rad}((x_0, x_1, \ldots, x_n) \cap \mathfrak{p}) = \operatorname{Rad}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}.$$

Beispiel 5. Entsprechend folgt, daß alle Ideale $(x_0{}^{\varrho_0}, x_1{}^{\varrho_1}, \ldots, x_n{}^{\varrho_n}) \cdot \mathfrak{p}$ mit $\varrho_i \geqq 1$ quasiprimär sind.

Beispiel 6. Ganz analog folgt, daß alle Ideale $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{b}$ quasiprimär sind, sofern $\operatorname{Rad}\mathfrak{b} \supset \mathfrak{p}$ gilt.

Beispiel 7. Ebenso folgt die noch etwas allgemeinere Aussage:

$$\mathfrak{r} \textit{ ist } \mathfrak{p}\textit{-quasiprimär} \wedge \operatorname{Rad}\mathfrak{b} \supset \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{r} \cap \mathfrak{b} \textit{ ist } \mathfrak{p}\textit{-quasiprimär}. \tag{16}$$

Entsprechend für $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{b}$.

Die Beziehung (16) werden wir noch öfter aufgreifen.

2.7. Quasiprimäre Potenzproduktideale

Nach (9) nehmen wir wieder o.B.d.A. an, daß das zu $\mathfrak{r}_\pi$ gehörige Primideal Rad $\mathfrak{r}_\pi = \mathfrak{p}_\pi = (x_0, x_1, \ldots, x_{r-1})$ ist. Ist ϱ_0 der Exponent von x_0, also $x_0^{\varrho_0} \in \mathfrak{r}_\pi$, $x_0^{\varrho_0 - 1} \notin \mathfrak{r}_\pi$, so ist also $x_0^{\varrho_0}$ ein Basiselement von $\mathfrak{r}_\pi$, Entsprechendes gilt für $x_1^{\varrho_1}, x_2^{\varrho_2}, \ldots, x_{r-1}^{\varrho_{r-1}}$. Es ist also $\mathfrak{r}_\pi = (x_0^{\varrho_0}, x_1^{\varrho_1}, \ldots, x_{r-1}^{\varrho_{r-1}}, \ldots)$. Daneben kann die Minimalbasis noch Potenzprodukte in $x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}$ enthalten, also Potenzprodukte der Bauart

$$p_i := x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \cdots x_{r-1}^{\alpha_{r-1}}, \tag{17}$$

nicht aber Potenzprodukte der Bauart

$$\pi_j := x_r^{\alpha_r} \cdots x_n^{\alpha_n}, \tag{18}$$

die nur von $x_r, \ldots, x_n$ abhängen. Wohl aber kann die Minimalbasis von $\mathfrak{r}_\pi$ noch Potenzprodukte der Bauart

$$q_k := p_i \cdot \pi_j \quad \text{mit} \quad p_i \neq 1 \tag{19}$$

enthalten, bei denen also alle Variablen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ enthalten sein können, aber wenigstens eine der Variablen $x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}$ auftreten muß, denn es ist $\pi_j \notin \mathfrak{r}_\pi$ wegen $\mathfrak{p}_\pi = (x_0, x_1, \ldots, x_{r-1})$. Mithin gilt

Satz 13. *Quasiprimäre Potenzproduktideale haben die Basisdarstellung*

$$\mathfrak{r}_\pi = (x_0^{\varrho_0}, x_1^{\varrho_1}, \ldots, x_{r-1}^{\varrho_{r-1}}, p_1, \ldots, p_s, q_{s+1}, \ldots, q_t), \tag{20}$$

wobei die p_i, q_k *durch* die Bedingungen (17), (18) *und* (19) *eingeschränkt sind und* Rad $\mathfrak{r}_\pi = \mathfrak{p}_\pi = (x_0, x_1, \ldots, x_{r-1})$ *ist.*

Daß umgekehrt das durch (20) gegebene Ideal quasiprimär ist, folgt sofort nach (10) und (9).

2.8. Primärideale

Ein Spezialfall der quasiprimären Ideale sind solche, bei denen die Fälle (13e) und (13f) nicht auftreten; dies sind gerade die Primärideale. Wir haben also die

Definition 7. Ein Ideal $\mathfrak{q}$ eines Noetherschen Ringes R heißt *Primärideal,* wenn eine der folgenden beiden Eigenschaften gilt:

> Aus $ab \in \mathfrak{q}$ folgt: Entweder ist a oder b Element von $\mathfrak{q}$. Ist aber $a \notin \mathfrak{q}$ *und* $b \notin \mathfrak{q}$, dann existieren Exponenten ϱ, σ mit $a^\varrho \in \mathfrak{q}$ *und* $b^\sigma \in \mathfrak{q}$. (21)
>
> In $R/\mathfrak{q}$ ist jeder Nullteiler nilpotent. (22)

Völlig analog zur Äquivalenz von (13) und (14) ergibt sich

Satz 14. *Die für Primärideale charakteristischen Eigenschaften* (21) *und* (22) *sind äquivalent.*

Da Primärideale spezielle quasiprimäre Ideale sind, gelten alle Eigenschaften quasiprimärer Ideale auch für Primärideale; wir haben also gemäß (10), (11), (15) den

Satz 15. *Ist* $\mathfrak{q}$ *ein Primärideal, so ist*

$$\operatorname{Rad} \mathfrak{q} = \mathfrak{p} \text{ ein Primideal,} \tag{23}$$

$$\mathfrak{p}^{\varrho} \subseteqq \mathfrak{q} \subseteqq \mathfrak{p}, \tag{24}$$

$$\operatorname{Rad}(\mathfrak{q} + \mathfrak{b}) = \operatorname{Rad}(\mathfrak{p} + \mathfrak{b}). \tag{25}$$

Die Eigenschaften (23) und (24) sind zu (21) und (22) keineswegs äquivalent; es gibt also quasiprimäre Ideale, welche nicht primär sind. Dazu werden wir im folgenden Beispiele angeben.

Definition 8. $\mathfrak{p}$ mit $\operatorname{Rad} \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ heißt das *zu* $\mathfrak{q}$ *gehörige Primideal.* $\mathfrak{q}$ heißt $\mathfrak{p}$*-primär.* Ist $\mathfrak{p}^{\varrho} \subseteqq \mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}^{\varrho-1} \not\subseteqq \mathfrak{q}$, so heißt ϱ der *Exponent* von $\mathfrak{q}$ (vgl. Kap. 1, (76)).

Analog zu (13a) bis (13f) geben wir (wie bei den quasiprimären Idealen) auch für Primärideale eine Aufzählung aller möglichen Fälle von (21):

$$a \in \mathfrak{q} \wedge b \in \mathfrak{q}, \tag{21a}$$

$$a \notin \mathfrak{q} \wedge b \in \mathfrak{q}, \tag{21b}$$

$$a \in \mathfrak{q} \wedge b \notin \mathfrak{q}, \tag{21c}$$

$$a \notin \mathfrak{q} \wedge b \notin \mathfrak{q} \wedge a^{\varrho} \in \mathfrak{q} \wedge b^{\sigma} \in \mathfrak{q}. \tag{21d}$$

Die uninteressanten Fälle (21a), (21b), (21c) bleiben in der Literatur bei der Definition von Primäridealen zumeist unerwähnt, und (21d) wird nur für einen der beiden Faktoren beschrieben; die hier benutzte ausführlichere Formulierung kann dann aus der zumeist ebenfalls aufgeführten Eigenschaft (22) gewonnen werden. Zur unmißverständlichen Unterscheidung der Primärideale von den quasiprimären Idealen wurde hier die Formulierung (21) gewählt.

Wir wollen als nächstes den Durchschnitt zweier Primärideale untersuchen. Es sei also $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$. Ist $\mathfrak{q}_1 \subseteqq \mathfrak{q}_2$, so folgt $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1$, ist $\mathfrak{q}_2 \subseteqq \mathfrak{q}_1$, so folgt $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_2$. Um solche Fälle auszuschließen, geben wir die

Definition 9. $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$ heißt *unverkürzbarer Durchschnitt,* wenn $\mathfrak{b} \not\subseteqq \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c} \not\subseteqq \mathfrak{b}$ gilt.

Satz 16. *Ist* $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$ *ein unverkürzbarer Durchschnitt und sind* $\mathfrak{q}_1$ *und* $\mathfrak{q}_2$ *beide* $\mathfrak{p}$*-primäre Ideale, so ist auch* $\mathfrak{q}$ *ein* $\mathfrak{p}$*-primäres Ideal.*

Beweis. Zunächst ist $\operatorname{Rad}\mathfrak{q} = \operatorname{Rad}(\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2) = \operatorname{Rad}\mathfrak{q}_1 \cap \operatorname{Rad}\mathfrak{q}_2 = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$, also ist $\mathfrak{q}$ jedenfalls $\mathfrak{p}$-*quasiprimär*. Daß $\mathfrak{q}$ überdies *primär* ist, sehen wir so: Ist $ab \in \mathfrak{q}$ und $a \notin \mathfrak{q}$ und $b \notin \mathfrak{q}$, so ist $a \notin \mathfrak{q}_1$ oder $a \notin \mathfrak{q}_2$. Es sei $a \notin \mathfrak{q}_1$. Aus der Primäridealeigenschaft von $\mathfrak{q}_1$ folgt dann:

$$ab \in \mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}_1 \wedge a \notin \mathfrak{q}_1 \Rightarrow b^{\sigma_1} \in \mathfrak{q}_1 \Rightarrow b \in \operatorname{Rad}\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p} = \operatorname{Rad}\mathfrak{q}_2,$$

also existiert ein Exponent σ_2 mit $b^{\sigma_2} \in \mathfrak{q}_2$. Ist nun $\sigma := \operatorname{Max}\{\sigma_1, \sigma_2\}$, so gilt also $b^\sigma \in \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 = \mathfrak{q}$. Analog verläuft der Beweis für $a \notin \mathfrak{q}_2$ sowie für $b \notin \mathfrak{q}$ mit den Möglichkeiten $b \notin \mathfrak{q}_1$ oder $b \notin \mathfrak{q}_2$, was der Leser selbst zu Ende rechnen möge.

Satz 17. *Ist* $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$ *ein unverkürzbarer Durchschnitt zweier Primärideale* $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ *mit* $\operatorname{Rad}\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}_1$, $\operatorname{Rad}\mathfrak{q}_2 = \mathfrak{p}_2$ *und* $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$, *so ist* $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$ *nicht primär.*

Beweis. Zunächst ist nach Kap. 1, (113) und (23),

$$\operatorname{Rad}\mathfrak{a} = \operatorname{Rad}(\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2) = \operatorname{Rad}\mathfrak{q}_1 \cap \operatorname{Rad}\mathfrak{q}_2 = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2.$$

Ist dies ein unverkürzbarer Durchschnitt, so kann $\operatorname{Rad}\mathfrak{a}$ kein Primideal sein, nach (23) mithin $\mathfrak{a}$ kein Primärideal. Ist dagegen $\operatorname{Rad}\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ kein unverkürzbarer Durchschnitt, so gilt also (bei geeigneter Numerierung) $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_1$. Wegen der Voraussetzung $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$ muß dann $\mathfrak{p}_2 \supset \mathfrak{p}_1$ sein. Jedenfalls ist dann $\operatorname{Rad}\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1$; $\mathfrak{a}$ ist also quasiprimär, und wir haben zu zeigen, daß $\mathfrak{a}$ nicht primär ist. Es sei $a \in \mathfrak{q}_1$, aber $a \notin \mathfrak{q}_2$; solch ein Element existiert, da $\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$ als unverkürzbarer Durchschnitt vorausgesetzt worden war. Ferner sei $b \in \mathfrak{q}_2$, aber $b \notin \mathfrak{p}_1$ und folglich auch $b \notin \mathfrak{q}_1$; ein solches Element b existiert wegen $\mathfrak{p}_2 \supset \mathfrak{p}_1$. Dann ist $ab \in \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$ und $a \notin \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$ und $b \notin \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$. Nun ist $a \in \mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{p}_1 = \operatorname{Rad}(\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2)$, also existiert ein Exponent ϱ mit $a^\varrho \in \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$. Dagegen ergibt sich für b folgendes: Wegen $b \notin \mathfrak{p}_1$, also $b \notin \operatorname{Rad}(\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2)$ ist für alle x stets $b^x \notin \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$. Mithin ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$ zwar quasiprimär, aber nicht primär.

2.9. Beispiele zur Definition der Primärideale

Beispiel 1. *Beispiel für eine nichtprimäre Primidealpotenz.* Nach Satz 12 war jede Primidealpotenz quasiprimär. Mehr kann jedoch im allgemeinen nicht ausgesagt werden. Wir wollen dazu ein primes H-Ideal $\mathfrak{p}$ angeben, bei welchem $\mathfrak{p}^2$ zwar quasiprimär, aber nicht primär ist. Für den enthomogenisierten Fall wurde dieses Beispiel bereits von van der Waerden in [10], S. 168, Aufgabe 3, behandelt. Wir betrachten also das Primideal $\mathfrak{p}$, das gemäß Satz 7 durch die Nullstelle

$$y_0 = t_0^5, \qquad y_1 = t_0^2 t_1^3, \qquad y_2 = t_0 t_1^4, \qquad y_3 = t_1^5$$

vorgegeben ist. Dies ist eine algebraische Raumkurve fünfter Ordnung mit der Bezeichnung $V_{15}^{(1,2)}$, eine sogenannte zweifache Veronesesche Projektionsvarietät. Das zugehörige Ideal $\mathfrak{p}$ hat — wie wir später beweisen werden — die Basis $p = (F_1, F_2, F_3)$ mit

$$F_1 = x_1 x_3 - x_2^2, \qquad F_2 = x_0 x_2 x_3 - x_1^3, \qquad F_3 = x_0 x_3^2 - x_1^2 x_2.$$

Dann ist nach Kap. 1, (70), $\mathfrak{p}^2$ gegeben durch $\mathfrak{p}^2 = (F_1^2, F_1F_2, F_1F_3, F_2^2, F_2F_3, F_3^2)$, und es ist $F := F_2^2 + x_0F_1F_3 \in \mathfrak{p}^2$. Der Leser möge selbst ausrechnen, daß dann $F = x_1 \cdot B$ gilt mit $B := x_0^2x_3^3 - 3x_0x_1^2x_2x_3 + x_0x_1x_2^3 + x_1^5$, und wir wollen untersuchen, ob $B(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{p}^2$ gilt. In B kann der Summand $x_0^2x_3^3$ nur durch $x_0x_3F_3$, der Summand x_1^5 nur durch $-x_1^2F_2$ gewonnen werden, so daß für $B \in \mathfrak{p}$ die Darstellung

$$B = -x_0x_1x_2F_1 - x_1^2F_2 + x_0x_3F_3$$

(bis auf Passivitätsbedingungen) eindeutig ist. Wäre $B \in \mathfrak{p}^2$, so kämen aus Gradgründen nur Darstellungen der Bauart

$$B = k_1x_0F_1^2 + k_2x_1F_1^2 + k_3x_2F_1^2 + k_4x_3F_1^2 + k_5F_1F_2 + k_6F_1F_3$$

mit $k_i \in K$ in Frage, was mithin unmöglich ist. Wir haben also $F = x_1 \cdot B \in \mathfrak{p}^2$, $x_1 \notin \mathfrak{p}^2$, $B \notin \mathfrak{p}^2$, aber $B^2 \in \mathfrak{p}^2$ und $B \in \mathfrak{p} = \text{Rad}\,(\mathfrak{p}^2)$ und $x_1 \notin \mathfrak{p} = \text{Rad}\,(\mathfrak{p}^2)$, also ist $x_1^x \notin \mathfrak{p}^2$ für alle $x \in \mathbf{N}^*$. Mithin ist $\mathfrak{p}^2$ zwar quasiprimär, aber nicht primär.

Dieses Beispiel wirft zahlreiche Fragen auf, zu denen dem Verfasser die Antworten bislang nicht bekannt sind. Beispielsweise: Im vorigen Beispiel war $\mathfrak{p}^2$ nicht primär; kann es dann eine natürliche Zahl $m \geqq 3$ geben, so daß $\mathfrak{p}^m$ wieder primär ist? Oder gilt: Ist $\mathfrak{p}^m$ nicht primär, so auch $\mathfrak{p}^k$ für alle $k \geqq m$? Ist womöglich bereits das Verhalten von $\mathfrak{p}^2$ entscheidend für alle $\mathfrak{p}^m$ mit $m \geqq 3$? Das Rechnen von Beispielen wird durch die beim Potenzieren schnell wachsende Anzahl der Basisformen sehr erschwert.

Beispiel 2. *Zur effektiven Entscheidung über die Primäreigenschaft.* Abgesehen von den Potenzproduktidealen ergibt sich aus den Definitionen für Primärideale keine Möglichkeit, zu entscheiden, ob ein vorgegebenes Ideal primär ist. Lediglich negative Entscheidungen können damit getroffen werden, wie das vorige Beispiel zeigt. Damit haben wir dieselbe Situation wie bei der Definition für Primideale. Dort half uns für H-Ideale der Satz 7 weiter. Eine analoge Bedingung wollen wir nun für primäre H-Ideale angeben. Dazu spezialisieren wir in (16) das quasiprimäre Ideal $\mathfrak{r}$ zu einem Primärideal $\mathfrak{q}$ und haben

$$\mathfrak{q} \text{ ist } \mathfrak{p}\text{-}\textit{primär} \wedge \text{Rad}\,\mathfrak{b} \supset \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{q} \cap \mathfrak{b} \text{ ist } \textit{quasiprimär}. \tag{26}$$

Aus dem Lasker-Noetherschen Satz und den Eindeutigkeitssätzen wird nun folgen, daß auf diese Weise *jedes* quasiprimäre Ideal darstellbar ist. Ein quasiprimäres H-Ideal ist dann und nur dann primär, wenn eine solche „eingebettete Komponente" $\mathfrak{b}$ nicht auftritt, wenn also das quasiprimäre Ideal „ungemischt" ist; darüber mehr im vierten Kapitel. Auf diese Weise läßt sich zeigen, daß das Ideal $\mathfrak{q} = (F_1, F_4)$ mit

$$F_1 = x_0x_2 - x_1^2, \qquad F_4 = x_0x_3^2 - 2x_1x_2x_3 + x_2^3$$

ein Primärideal ist (vgl. Beispiel 3 von 2.6.).

2.10. Primäre Potenzproduktideale

Dazu gehen wir von der Basisdarstellung (20) für quasiprimäre Potenzproduktideale $\mathfrak{r}_n$ aus. Zur Basis gehörten auch Potenzprodukte $q_k(x_0, \ldots, x_n)$, für die gemäß der Bedingung (19) $q_k = p_i \cdot \pi_j$ mit $p_i \neq 1$ oder $p_i(x_0, \ldots, x_{r-1})$, $\pi_j(x_r, \ldots, x_n)$ galt. Wegen

Rad $\mathfrak{r}_\pi = (x_0, x_1, \ldots, x_{r-1})$ war dann $p_i \in$ Rad $\mathfrak{r}_\pi$, aber $\pi_j \notin$ Rad $\mathfrak{r}_\pi$; das war zwar mit der Eigenschaft „quasiprimär" verträglich, ist aber bei Primäridealen nicht zulässig. Mithin können Potenzprodukte q_j in einer Basis für primäre Potenzproduktideale nicht auftreten; analog zu Satz 13 haben wir also

Satz 18. *Primäre Potenzproduktideale haben die Basisdarstellung*

$$\mathfrak{q}_\pi = (x_0^{\varrho_0}, x_1^{\varrho_1}, \ldots, x_{r-1}^{\varrho_{r-1}}, p_1, \ldots, p_s) \tag{27}$$

mit Rad $\mathfrak{q}_\pi = \mathfrak{p}_\pi = (x_0, x_1, \ldots, x_{r-1})$ *und beliebigen Potenzprodukten* p_i, *welche nur von* $x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}$ *abhängen.*

Die Potenzprodukte $p_1, \ldots, p_s$ hängen zwar nur von $x_0, \ldots, x_{r-1}$ ab, sind aber ansonsten beliebig. Demzufolge werden primäre Potenzproduktideale $\mathfrak{q}_\pi$ im allgemeinen keine Primidealpotenzen sein; mithin gilt

Satz 19. *Primärideale sind im allgemeinen keine Primidealpotenzen.*

2.11. Der Idealquotient $\mathfrak{q} : \mathfrak{a}$

Dieser Quotient wird häufiger benötigt. Nach der Definition des Idealquotienten ist $\mathfrak{q} : \mathfrak{a}$ die Gesamtheit der c mit $c\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{q}$; diese Bildung wirft zunächst die Frage nach dem Zusammenhang zwischen den Beziehungen $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}$ auf. Hier ergeben sich formal die folgenden vier Möglichkeiten:

1. $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{q} \wedge \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}$. Dieser Fall ist möglich. Wegen (24) gilt $\mathfrak{p}^\varrho \subseteqq \mathfrak{q} \subseteqq \mathfrak{p}$; daraus folgt die Implikation $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{q} \Rightarrow \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}$; zur Kennzeichnung der Fallunterscheidung genügt also der Hinweis $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{q}$.

2. $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{q} \wedge \mathfrak{a} \not\subseteqq \mathfrak{p}$. Dieser Fall ist demzufolge sinnlos.

3. $\mathfrak{a} \not\subseteqq \mathfrak{q} \wedge \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}$. Dieser Fall ist dagegen sinnvoll, wenn (24) in der verschärften Form $\mathfrak{p}^\varrho \subseteqq \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ gilt.

4. $\mathfrak{a} \not\subseteqq \mathfrak{q} \wedge \mathfrak{a} \not\subseteqq \mathfrak{p}$. Dieser Fall ist sinnvoll, und wegen $\mathfrak{q} \subseteqq \mathfrak{p}$ gilt die Implikation: $\mathfrak{a} \not\subseteqq \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{a} \not\subseteqq \mathfrak{q}$; als Fallunterscheidung genügt mithin $\mathfrak{a} \not\subseteqq \mathfrak{p}$.

Wir haben also die drei Fallunterscheidungen

(A) $\quad \mathfrak{a} \not\subseteqq \mathfrak{p}$,

(B) $\quad \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p} \wedge \mathfrak{a} \not\subseteqq \mathfrak{q}$,

(C) $\quad \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{q}$

und untersuchen $\mathfrak{q} : \mathfrak{a}$ für diese drei Fälle.

Zu (C): Wegen Kap. 1, (141), gilt: $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{q} \Rightarrow \mathfrak{q} : \mathfrak{a} = (1)$.

Zu (A): $\mathfrak{q} : \mathfrak{a}$ ist die Gesamtheit der c mit $c\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{q}$, also $ca \in \mathfrak{q}$ für alle $a \in \mathfrak{a}$. Wir testen die vier Fälle von (21) für ca durch:

(21a) besagt: $c \in \mathfrak{q} \wedge a \in \mathfrak{q}$; nicht möglich wegen: $\mathfrak{a} \not\subseteqq \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{a} \not\subseteqq \mathfrak{q}$,

(21b) besagt: $c \notin \mathfrak{q} \wedge a \in \mathfrak{q}$; nicht möglich wegen: $\mathfrak{a} \not\subseteqq \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{a} \not\subseteqq \mathfrak{q}$,

(21d) besagt: $c \notin \mathfrak{q} \wedge a \notin \mathfrak{q} \wedge c^\varrho \in \mathfrak{q} \wedge a^\sigma \in \mathfrak{q} \Rightarrow c \in \mathfrak{p} \wedge a \in \mathfrak{p}$, nicht möglich wegen $\mathfrak{a} \not\subseteqq \mathfrak{p}$. Es bleibt also nur noch (21c): $c \in \mathfrak{q} \wedge a \notin \mathfrak{q}$ übrig. $c \in \mathfrak{q}$ bedeutet aber $\mathfrak{q} : \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{q}$; allgemein gilt (vgl. Kap. 1, (139)) $\mathfrak{q} : \mathfrak{a} \supseteqq \mathfrak{q}$; mithin muß in unserem Fall $\mathfrak{q} : \mathfrak{a} = \mathfrak{q}$ sein.

Zu (B): In (24), $\mathfrak{p}^\varrho \subseteqq \mathfrak{q} \subseteqq \mathfrak{p}$, sei ϱ der Exponent; es gilt also $\mathfrak{p}^\varrho \subseteqq \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}^{\varrho-1} \not\subseteqq \mathfrak{q}$; es existiert also wenigstens ein Element c^* mit $c^* \in \mathfrak{p}^{\varrho-1}$ und $c^* \notin \mathfrak{q}$. Aus $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}$ und $c^* \in \mathfrak{p}^{\varrho-1}$ folgt $c^* \cdot \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}^\varrho \subseteqq \mathfrak{q}$; mithin ist $c^* \in \mathfrak{q} : \mathfrak{a}$; wegen $c^* \notin \mathfrak{q}$ gilt also

$$\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p} \wedge \mathfrak{a} \not\subseteqq \mathfrak{q} \Rightarrow \mathfrak{q} : \mathfrak{a} \supset \mathfrak{q}. \tag{28}$$

Wir wollen zeigen, daß $\mathfrak{q} : \mathfrak{a}$ quasiprimär ist mit $\operatorname{Rad}(\mathfrak{q} : \mathfrak{a}) = \mathfrak{p}$ und einem kleineren Exponenten $\bar{\varrho}$. Wir zeigen dazu gemäß (11)

$$\mathfrak{p}^{\varrho-1} \subseteqq \mathfrak{q} : \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}. \tag{29}$$

Der Exponent $\bar{\varrho}$ ist definiert durch

$$\bar{\varrho} \text{ Exponent von } \mathfrak{q} : \mathfrak{a} :\Leftrightarrow \mathfrak{p}^{\bar{\varrho}} \subseteqq \mathfrak{q} : \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{p}^{\bar{\varrho}-1} \not\subseteqq \mathfrak{q} : \mathfrak{a}. \tag{30}$$

Unter Annahme von (29) gilt dann $\mathfrak{p}^\varrho \subset \mathfrak{p}^{\varrho-1} \subseteqq \mathfrak{p}^{\bar{\varrho}} \subseteqq \mathfrak{q} : \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}$, also $\varrho > \varrho - 1 \geqq \bar{\varrho} \geqq 1$, mithin — wie angekündigt —

$$\bar{\varrho} < \varrho. \tag{31}$$

Nun kommen wir zum Beweis von (29). Wegen (B) gilt $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}, \mathfrak{a} \not\subseteqq \mathfrak{q}$; daher ergibt die Durchmusterung der vier Fälle von (21) für $c\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{q}$ folgendes:

(21a) besagt: $c \in \mathfrak{q} \wedge a \in \mathfrak{q}$; nicht möglich wegen $\mathfrak{a} \not\subseteqq \mathfrak{q}$,

(21b) besagt: $c \notin \mathfrak{q} \wedge a \in \mathfrak{q}$; nicht möglich wegen $\mathfrak{a} \not\subseteqq \mathfrak{q}$,

(21c) besagt: $c \in \mathfrak{q} \wedge a \notin \mathfrak{q}$; dieser Fall ist möglich und liefert

$$c \in \mathfrak{q} \subseteqq \mathfrak{p}. \tag{32}$$

(21d) besagt: $c \notin \mathfrak{q} \wedge a \notin \mathfrak{q} \wedge c^\varrho \in \mathfrak{q} \wedge a^\sigma \in \mathfrak{q}$; daraus folgt $c \in \mathfrak{p}$ und $a \in \mathfrak{p}$. Dieser Fall ist wegen $\mathfrak{a} \not\subseteqq \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}$ möglich. Zusammen mit (32) folgt: Für alle $c \in \mathfrak{q} : \mathfrak{a}$ gilt $c \in \mathfrak{p}$, also

$$\mathfrak{q} : \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}, \tag{33}$$

womit der rechte Teil von (29) bewiesen ist. Für den noch fehlenden Nachweis von

$$\mathfrak{p}^{\varrho-1} \subseteqq \mathfrak{q} : \mathfrak{a} \tag{34}$$

schließen wir so: Nach Kap. 1, (64), gilt $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{c}$, also $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{c}\mathfrak{b}$; mit $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}$ gibt dies $\mathfrak{p}^{\varrho-1} \cdot \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}^{\varrho-1} \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{p}^\varrho \subseteqq \mathfrak{q}$, also $\mathfrak{p}^{\varrho-1} \subseteqq \mathfrak{q} : \mathfrak{a}$, womit (34) und (29) bewiesen ist.

Abschließend wollen wir zeigen, daß $\mathfrak{q} : \mathfrak{a}$ sogar primär ist. Wir gehen aus von $bc \in \mathfrak{q} : \mathfrak{a}$ und $b \notin \mathfrak{q} : \mathfrak{a}$ und $c \notin \mathfrak{q} : \mathfrak{a}$. Aus $bc \in \mathfrak{q} : \mathfrak{a}$ und $b \notin \mathfrak{q} : \mathfrak{a}$ folgt $\mathfrak{a}bc \subseteqq \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{a}b \nsubseteq \mathfrak{q}$; es existiert also ein Exponent τ mit $c^\tau \in \mathfrak{q}$ wegen der Primäridealeigenschaft von $\mathfrak{q}$. Wegen $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q} : \mathfrak{a}$ gemäß (28) folgt $c^\tau \in \mathfrak{q} : \mathfrak{a}$. Aus $bc \in \mathfrak{q} : \mathfrak{a}$ und $c \notin \mathfrak{q} : \mathfrak{a}$ folgt $\mathfrak{a}cb \subseteqq \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{a}c \nsubseteq \mathfrak{q}$; es existiert also ein Exponent σ mit $b^\sigma \in \mathfrak{q} \subset \mathfrak{q} : \mathfrak{a}$, mithin ist $\mathfrak{q} : \mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{p}$-primäres Ideal.

Zusammenfassend haben wir also den

Satz 20. *Ist in einem Noetherschen Ring R $\mathfrak{q}$ ein $\mathfrak{p}$-primäres Ideal und $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal, so gilt:*

$$\left.\begin{array}{ll}(\mathrm{A}) & \mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{p} \Leftrightarrow \mathfrak{q} : \mathfrak{a} = \mathfrak{q}, \\ (\mathrm{B}) & \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p} \wedge \mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{q} \Leftrightarrow \mathfrak{q} \subset \mathfrak{q} : \mathfrak{a} \subset (1), \\ (\mathrm{C}) & \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{q} \Leftrightarrow \mathfrak{q} : \mathfrak{a} = (1);\end{array}\right\} \tag{35}$$

im Fall (B) *ist* $\bar{\mathfrak{q}} := \mathfrak{q} : \mathfrak{a}$ *ebenfalls* $\mathfrak{p}$*-primär mit* $\bar{\varrho} < \varrho$.

Der Beweis der Gültigkeit von ($\Leftarrow$) folgt indirekt unmittelbar.

Die Bedeutung des Satzes 20 ergibt sich einmal daraus, daß wir ihn beim Beweis des Lasker-Noetherschen Satzes häufig benutzen werden, zum anderen ist durch (B) die Möglichkeit gegeben, Ketten von $\mathfrak{p}$-primären Idealen zu konstruieren,

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_{k-1} \subset \mathfrak{q}_k = \mathfrak{p},$$

die ihrerseits eine Bedeutung, u. a. in der Multiplizitätstheorie, haben. Auf diese, von W. Gröbner (vgl. [2] und [9]) entwickelte Theorie können wir hier leider nicht eingehen.

2.12. Reduzible und irreduzible Ideale, Zusammenhang mit Primäridealen und reinen Potenzproduktidealen

Definition 10. Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{c}$, so heißt $\mathfrak{a}$ *reduzibel*; andernfalls heißt $\mathfrak{a}$ ein *irreduzibles Ideal.*

Satz 21. *Jedes Primideal ist irreduzibel.*

Beweis (indirekt). Angenommen, es wäre $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{b}$. Nun gilt nach Kap. 1, (104), $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, also $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{p}$ und mithin $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{p}$ im Widerspruch zu $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{b}$.

Wir beweisen nun den wichtigen

Satz 22. *Jedes nicht primäre Ideal eines Noetherschen Ringes R ist reduzibel.*

Beweis. Da $\mathfrak{a}$ nicht primär ist, existieren zwei Ringelemente b, c mit $bc \in \mathfrak{a}$, $b \notin \mathfrak{a}$, $c \notin \mathfrak{a}$, $c^x \notin \mathfrak{a}$ für alle $x \in \mathbf{N}^*$. Wir bilden die Teilerkette

$$\mathfrak{a} : (c) \subseteqq \mathfrak{a} : (c^2) \subseteqq \mathfrak{a} : (c^3) \subseteqq \cdots \subset \mathfrak{a} : (c^k) = \mathfrak{a} : (c^{k+1}) = \cdots, \tag{36}$$

bei welcher nach der Teilerkettenbedingung von k an das Gleichheitszeichen gilt. Dann ist

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}, b) \cap (\mathfrak{a}, c^k). \tag{37}$$

Nach unseren Voraussetzungen stellt (37) jedenfalls einen unverkürzbaren Durchschnitt dar, und es gilt offenbar $\mathfrak{a} \subseteqq (\mathfrak{a}, b) \cap (\mathfrak{a}, c^k)$. Es bleibt zum Beweis von (37) zu zeigen, daß jedes Element u des Durchschnittes Element von $\mathfrak{a}$ ist. Für u gilt also

$$u = a_1 + r_1 \cdot b = a_2 + r_2 \cdot c^k \quad \text{mit} \quad a_1, a_2 \in \mathfrak{a} \quad \text{und} \quad r_1, r_2 \in R; \tag{38}$$

mit c multipliziert, folgt einerseits $cu = ca_1 + r_1bc$; dabei ist rechts $a_1 \in \mathfrak{a}$, $bc \in \mathfrak{a}$; mithin ist also

$$cu \in \mathfrak{a}. \tag{39}$$

Andererseits ist $cu = ca_2 + r_2 \cdot c^{k+1}$, mithin $r_2 \cdot c^{k+1} = cu - ca_2$. Wegen (39) und $a_2 \in \mathfrak{a}$ ist also $r_2 \cdot c^{k+1} \in \mathfrak{a}$, also $r_2 \in \mathfrak{a} : (c^{k+1})$; wegen (36) ist $\mathfrak{a} : (c^{k+1}) = \mathfrak{a} : (c^k)$, also $r_2 \in \mathfrak{a} : (c^k)$, folglich

$$r_2 \cdot c^k \in \mathfrak{a}. \tag{40}$$

Wegen $a_2 \in \mathfrak{a}$ folgt $u \in \mathfrak{a}$ aus (40) und (38), q.e.d.

Wichtig ist für uns vor allem die Kontraposition von Satz 22, also der

Satz 23. *Jedes irreduzible Ideal ist primär.*

Dadurch wird die Bedeutung der Primärideale für die von uns ins Auge gefaßten Durchschnittsdarstellungen erkennbar.

Wir wollen nun irreduzible Potenzproduktideale charakterisieren.

Definition 11. Ein Potenzproduktideal heißt ein *reines Potenzproduktideal*, wenn gilt:

$$\textit{Reines Potenzproduktideal} :\Leftrightarrow \mathfrak{q}_\pi = (x_0^{\varrho_0}, x_1^{\varrho_1}, \ldots, x_{r-1}^{\varrho_{r-1}}). \tag{41}$$

Da (41) ein Spezialfall von (27) ist, gilt der

Satz 24. *Jedes reine Potenzproduktideal* (41) *ist* $\mathfrak{p}_\pi$*-primär mit* $\mathfrak{p}_\pi = (x_0, x_1, \ldots, x_{r-1})$.

Von R. Kummer (vgl. Kummer und Renschuch [1], Satz 11) stammt nun der

Satz 25. $\mathfrak{q}_\pi$ *ist ein reines Potenzproduktideal* $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{q}_\pi$ *ist ein irreduzibles Potenzproduktideal.*

Beweis. ($\Leftarrow$): Es sei $\mathfrak{q}_\pi \neq (1)$, etwa $\mathfrak{q}_\pi = (p_1, p_2, \ldots, p_s)$, ein irreduzibles Potenzproduktideal, und wir nehmen indirekt an, $\mathfrak{q}_\pi$ wäre nicht rein. Dann wäre etwa

$$p_1 = x_0^{c_0} x_1^{c_1} \cdot p \quad \text{mit} \quad c_0 \geqq 1, \quad c_1 \geqq 1,$$
$$p \sqcap x_0 = p \sqcap x_1 = 1,$$
$$\mathfrak{q}_{\pi 1} := (x_0^{c_0} \cdot p, p_2, \ldots, p_s), \quad \mathfrak{q}_{\pi 2} := (x_1^{c_1} \cdot p, p_2, \ldots, p_s);$$

es ist also $\mathfrak{q}_\pi \subset \mathfrak{q}_{\pi 1}$ und $\mathfrak{q}_\pi \subset \mathfrak{q}_{\pi 2}$, mithin $\mathfrak{q}_{\pi 1} \cap \mathfrak{q}_{\pi 2}$ ein unverkürzbarer Durchschnitt, und nach Kap. 1, (137), ist $\mathfrak{q}_\pi = \mathfrak{q}_{\pi 1} \cap \mathfrak{q}_{\pi 2}$. Das aber ist ein Widerspruch zur vorausgesetzten Irreduzibilität von $\mathfrak{q}_\pi$.

($\Rightarrow$): Ist $\mathfrak{q}_\pi$ rein und nehmen wir indirekt an, $\mathfrak{q}_\pi$ wäre reduzibel, so müßte $\mathfrak{q}_\pi$ nach den Sätzen 16 und 17 Durchschnitt von $\mathfrak{p}_\pi$-primären Idealen sein, der sich gemäß Satz 16 auf den Durchschnitt $\mathfrak{q}_\pi = \mathfrak{q}_{\pi 1} \cap \mathfrak{q}_{\pi 2}$ zusammenziehen läßt; aus (27) und Kap. 1, (137), folgt aber durch Gradvergleich, daß dann $\mathfrak{q}_\pi$ kein reines Potenzproduktideal sein kann im Widerspruch zur Voraussetzung bei dieser Beweisrichtung.

Beispiel. $\mathfrak{q}_{\pi 1} = (x_0^3, x_1)$, $\mathfrak{q}_{\pi 2} = (x_0^2, x_1^4)$, $\mathfrak{q}_{\pi 1} \cap \mathfrak{q}_{\pi 2} = (x_0^3, x_1^4, x_0^2 x_1)$.

Wir haben damit als Nebenresultat den

Satz 26. *Es gibt reduzible Primärideale.*

2.13. Die beiden Zerlegungssätze

Satz 27 (Erster Zerlegungssatz oder sogenannter Laskerscher Satz). *Jedes Ideal $\mathfrak{a}$ aus einem Noetherschen Ring R ist als Durchschnitt endlich vieler irreduzibler Ideale darstellbar:*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{j}_1 \cap \mathfrak{j}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{j}_l \quad \textit{und} \quad \mathfrak{j}_\lambda \textit{ irreduzibel für } \lambda = 1, 2, \ldots, l. \tag{42}$$

Beweis. Ist $\mathfrak{a}$ irreduzibel, so sind wir fertig. Ist dagegen $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{11} \cap \mathfrak{a}_{12}$ und $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_{11}$ und $\mathfrak{a}_{11}$ reduzibel, also $\mathfrak{a}_{11} = \mathfrak{a}_{21} \cap \mathfrak{a}_{22}$ und $\mathfrak{a}_{11} \subset \mathfrak{a}_{21}$ und $\mathfrak{a}_{21}$ rezuzibel, also $\mathfrak{a}_{21} = \mathfrak{a}_{31} \cap \mathfrak{a}_{32}$ und $\mathfrak{a}_{21} \subset \mathfrak{a}_{31}$ usw. Es entsteht also eine echte Teilerkette $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_{11} \subset \mathfrak{a}_{21} \subset \mathfrak{a}_{31} \subset \cdots$, die nach endlich vielen Schritten abbrechen muß. Entsprechend schließt man für $\mathfrak{a}_{12}, \mathfrak{a}_{22}, \mathfrak{a}_{32}, \ldots$, woraus schließlich (42) folgt.

Dieser Satz ist ein ausgesprochener Existenzsatz; nur im Fall der Potenzproduktideale führt er zu einer konstruktiven Methode. Dort wird sich außerdem zeigen, daß die damit gewonnene Darstellung noch „verkürzbar" sein kann, d. h., es können mitunter noch ein oder mehrere der $\mathfrak{j}_\lambda$ gestrichen werden. Wir geben daher die

Definition 12. Die Darstellung (42) heißt *unverkürzbar*, wenn kein $\mathfrak{j}_\lambda$ gestrichen werden darf.

Es können aber immer noch verschiedene der $\mathfrak{j}_\lambda$ dasselbe zugehörige Primideal besitzen. Daher wollen wir die $\mathfrak{j}_\lambda$ nach diesen zugehörigen Primidealen ordnen und deshalb mit Doppelindizes versehen:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{j}_{11} \cap \cdots \cap \mathfrak{j}_{1l_1} \cap \mathfrak{j}_{21} \cap \cdots \cap \mathfrak{j}_{2l_2} \cap \cdots \cap \mathfrak{j}_{k1} \cap \cdots \cap \mathfrak{j}_{kl_k} \quad \text{mit} \quad \operatorname{Rad} \mathfrak{j}_{\varkappa\lambda} = \mathfrak{p}_\varkappa, \tag{43}$$

wobei die Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_k$ alle voneinander verschieden sind. Nach Satz 16 ist dann

$$\mathfrak{q}_1 := \mathfrak{j}_{11} \cap \cdots \cap \mathfrak{j}_{1l_1} \text{ ein } \mathfrak{p}_1\text{-primäres Ideal,}$$
$$\mathfrak{q}_2 := \mathfrak{j}_{21} \cap \cdots \cap \mathfrak{j}_{2l_2} \text{ ein } \mathfrak{p}_2\text{-primäres Ideal,}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathfrak{q}_k := \mathfrak{j}_{k1} \cap \cdots \cap \mathfrak{j}_{kl_k} \text{ ein } \mathfrak{p}_k\text{-primäres Ideal.}$$

Somit haben wir

Satz 28 (Zweiter Zerlegungssatz von Emmy Noether). *Zu jedem Ideal $\mathfrak{a}$ aus einem Noetherschen Ring R existiert eine unverkürzbare Darstellung durch größte Primärkomponenten*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k \quad \textit{mit} \quad \operatorname{Rad} \mathfrak{q}_\varkappa = \mathfrak{p}_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k); \tag{44}$$

dabei sind die „größten Primärkomponenten" $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k$ Primärideale derart, daß ihre zugehörigen Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ alle voneinander verschieden sind.

Wegen Kap. 1, (112), folgt aus (44)

$$\operatorname{Rad} \mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_k. \tag{45}$$

Dazu ist allerdings zu bemerken, daß aus der Unverkürzbarkeit der Darstellung (44) nicht auf die Unverkürzbarkeit der Darstellung (45) geschlossen werden kann; welche Primideale in (45) gestrichen werden können, wird sich aus Satz 31 ergeben.

Aus (45) folgt auch eine Erklärung für die Bezeichnung „semiprim" in Kap. 1, Definition 37.

2.14. Ein Kriterium für $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$

Aus dem zweiten Zerlegungssatz folgt der

Satz 29. *Besitzt $\mathfrak{a}$ die unverkürzbare Darstellung* (44), *so gilt*

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \Leftrightarrow \mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{p}_\varkappa \quad \textit{für alle } \varkappa = 1, 2, \ldots, k. \tag{46}$$

Beweis. ($\Leftarrow$): Nach Kap. 1, (160) und (35 A), folgt dann

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = (\mathfrak{q}_1 : \mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{q}_2 : \mathfrak{b}) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_k : \mathfrak{b}) = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k = \mathfrak{a}.$$

($\Rightarrow$): Wegen der vorausgesetzten Unverkürzbarkeit der Darstellung (44) ist

$$\mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k \supset \mathfrak{a}. \tag{47}$$

Wegen $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ gilt weiterhin

$$\mathfrak{c}\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{a}. \tag{48}$$

Wir nehmen nun indirekt an, die rechte Seite von (46) würde nicht gelten, es wäre also o.B.d.A.

$$\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{p}_1 \tag{49}$$

und mithin

$$\mathfrak{b}^\varrho \subseteqq \mathfrak{q}_1. \tag{50}$$

Aus (50) und Kap. 1, (104), folgt $\mathfrak{b}^\varrho(\mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k) \subseteqq \mathfrak{b}^\varrho \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k \subseteqq \mathfrak{a}$, also

$$\mathfrak{b}\big(\mathfrak{b}^{\varrho-1} \cdot (\mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k)\big) \subseteqq \mathfrak{a}.$$

Wegen (48) ist dann $\mathfrak{b}^{\varrho-1} \cdot (\mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k) \subseteqq \mathfrak{a}$. Setzen wir damit das Verfahren fort, so ergibt sich $\mathfrak{b}^{\varrho-2} \cdot (\mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k) \subseteqq \mathfrak{a}$ usw., schließlich $\mathfrak{b} \cdot (\mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k) \subseteqq \mathfrak{a}$ und daraus $\mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k \subseteqq \mathfrak{a}$ im Widerspruch zu (47). Also war die Annahme (49) falsch, q.e.d.

Dieser Satz wird sich im folgenden als außerordentlich wichtig erweisen. Die Bedingungen $\mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{p}_\varkappa$ für alle $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$ werfen die Frage nach der Eindeutigkeit von $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_k$ auf, die in den nächsten Abschnitten bewiesen werden wird.

Mitunter benötigen wir Satz 29 in der Kontraposition:

Satz 30. *Besitzt* $\mathfrak{a}$ *die unverkürzbare Darstellung* (44), *so gilt:*

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} \supset \mathfrak{a} \Leftrightarrow \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{p}_\varkappa \textit{ für wenigstens ein } \varkappa \in (1, 2, \ldots, k). \tag{51}$$

2.15. Isolierte und eingebettete Primärkomponenten, Hilfssätze

Definition 13. Besitzt $\mathfrak{a}$ die unverkürzbare Darstellung durch größte Primärkomponenten (44), so werden eingebettete und isolierte Primärkomponenten wie folgt definiert:

$$\mathfrak{q}_i \text{ heißt } \textit{in } \mathfrak{q}_j \textit{ eingebettet} :\Leftrightarrow \mathfrak{p}_i \supset \mathfrak{p}_j \wedge \mathfrak{q}_i \not\supset \mathfrak{q}_j. \tag{52}$$

Existiert in (44) kein solches $\mathfrak{q}_j$ für $\mathfrak{q}_i$, so heißt $\mathfrak{q}_i$ eine *isolierte Primärkomponente.*

Anstelle von (45) kann damit eine unverkürzbare Darstellung für Rad $\mathfrak{a}$ angegeben werden: Sind die in (44) auftretenden Primärideale so numeriert, daß die Primärkomponenten $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m$ *isoliert* und $\mathfrak{q}_{m+1}, \ldots, \mathfrak{q}_k$ *eingebettet* sind, so ist

$$\operatorname{Rad} \mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_m,$$

in Worten:

Satz 31. *Das Radikal eines Ideals* $\mathfrak{a}$ *ist der Durchschnitt derjenigen Primideale, die zu isolierten Primärkomponenten von* $\mathfrak{a}$ *gehören* (vgl. auch SZÁSZ [1] Satz 2.6.2, S. 132).

Wir knüpfen nun an die im Kapitel 1 gegebenen Definitionen 17 und 18 für maximale und minimale Ideale bezüglich einer Menge M an und wollen diese beiden Definitionen auf den Spezialfall der endlichen Menge

$$M_1 := \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_k, \bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\mathfrak{p}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_t\} \tag{53}$$

von Primidealen anwenden; dies gibt:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{p}_1 \textit{ maximal} \text{ bezüglich } M_1 :\Leftrightarrow \mathfrak{p}_1 \not\subseteq \mathfrak{p}_\varkappa \wedge \mathfrak{p}_1 \not\subseteq \bar{\mathfrak{p}}_\tau \\ \qquad\qquad (\varkappa = 2, \ldots, k; \quad \tau = 1, \ldots, t) \end{array}\right\} \tag{54}$$

und

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{p}_1 \textit{ minimal} \text{ bezüglich } M_1 :\Leftrightarrow \mathfrak{p}_\varkappa \not\subseteq \mathfrak{p}_1 \wedge \bar{\mathfrak{p}}_\tau \not\subseteq \mathfrak{p}_1 \\ \qquad\qquad (\varkappa = 2, \ldots, k; \quad \tau = 1, \ldots, t) \end{array}\right\}. \tag{55}$$

Hieraus folgt unmittelbar

Hilfssatz 1. *In* (44) *gilt:*

$$\mathfrak{p}_1 \textit{ ist minimal bezüglich } M_1 \Leftrightarrow \mathfrak{q}_1 \textit{ ist isolierte Primärkomponente von } (44). \tag{56}$$

Hilfssatz 2. *Es gilt:*

$$\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2 \wedge \mathfrak{p}_1^{\varrho_1} \subset \mathfrak{p}_2 \Rightarrow \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2. \tag{57}$$

Beweis. (57) folgt aus (6) für $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_2$ und wegen $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$.

Hilfssatz 3. *Sind* $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}$ *Primärideale mit den zugehörigen Primidealen* $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}$ *aus* M_1, *so gilt:*

$$\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p} \wedge \mathfrak{p}_1 \textit{ maximal bezüglich } M_1 \Rightarrow \mathfrak{q} : \mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}. \tag{58}$$

Beweis. Wir untersuchen $\mathfrak{q} : \mathfrak{q}_1$ gemäß Satz 20.

Fall (C): Wegen $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}$ müßte $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}$ sein; aus $\mathfrak{p}_1^{\varrho_1} \subseteqq \mathfrak{q}_1 \subseteqq \mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}^{\varrho} \subseteqq \mathfrak{q} \subseteqq \mathfrak{p}$ folgt daraus $\mathfrak{p}_1^{\varrho_1} \subseteqq \mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q} \subseteqq \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p}_1^{\varrho_1} \subset \mathfrak{p}$, und nach (57) ergibt sich mithin $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}$ im Widerspruch dazu, daß $\mathfrak{p}_1$ maximal bezüglich M_1 vorausgesetzt war. Fall (C) scheidet also aus.

Fall (B): Aus $\mathfrak{q}_1 \subseteqq \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}_1 \not\subseteqq \mathfrak{q}$ würde $\mathfrak{p}_1^{e_1} \subseteqq \mathfrak{p}$ und nach (57) wieder $\mathfrak{p}_1 \subseteqq \mathfrak{p}$ folgen; wegen $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}$ wäre dann sogar $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}$ im Widerspruch dazu, daß $\mathfrak{p}_1$ maximal bezüglich M_1 ist. Fall (B) scheidet also ebenfalls aus.

Es bleibt also Fall (A), und mithin gilt (58).

Schließlich erinnern wir nochmals an die im Kap. 1, (160), hergeleitete Beziehung

$$(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_k) : \mathfrak{b} = (\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{a}_2 : \mathfrak{b}) \cap \cdots \cap (\mathfrak{a}_k : \mathfrak{b}),$$

die wir gleich des öfteren anwenden werden.

2.16. Der erste Eindeutigkeitssatz

Satz 32 (Erster Eindeutigkeitssatz von Emmy Noether). *Besitzt $\mathfrak{a}$ die unverkürzbare Darstellung durch größte Primärkomponenten* (44), *so sind die zugehörigen Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_k$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Angenommen, $\mathfrak{a}$ besitzt zwei unverkürzbare Darstellungen

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k = \bar{\mathfrak{q}}_1 \cap \bar{\mathfrak{q}}_2 \cap \cdots \cap \bar{\mathfrak{q}}_t \tag{59}$$

mit den zugehörigen Primidealen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_k, \bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\mathfrak{p}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_t$. Zu zeigen ist $t = k$ und $\bar{\mathfrak{p}}_i = \mathfrak{p}_i$ bei geeigneter Numerierung.

Dazu sei o.B.d.A. $\mathfrak{p}_1$ maximal bezüglich M_1. Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, $\mathfrak{p}_1$ komme unter den Primidealen $\bar{\mathfrak{p}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_t$ nicht vor. Wegen der vorausgesetzten Unverkürzbarkeit beider Darstellungen (59) ist jedenfalls

$$\mathfrak{q}_2 \cap \mathfrak{q}_3 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k \supset \mathfrak{a}. \tag{60}$$

Wir berechnen nun $\mathfrak{a} : \mathfrak{q}_1$ auf zweierlei Weise. Einmal ist nach Kap. 1, (160), und ferner wegen $\bar{\mathfrak{p}}_\tau \neq \mathfrak{p}_1$ und $\bar{\mathfrak{q}}_\tau \neq \mathfrak{q}_1$ nach (58)

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} : \mathfrak{q}_1 &= (\bar{\mathfrak{q}}_1 \cap \bar{\mathfrak{q}}_2 \cap \cdots \cap \bar{\mathfrak{q}}_t) : \mathfrak{q}_1 = (\bar{\mathfrak{q}}_1 : \mathfrak{q}_1) \cap (\bar{\mathfrak{q}}_2 : \mathfrak{q}_1) \cap \cdots \cap (\bar{\mathfrak{q}}_t : \mathfrak{q}_1) \\ &= \bar{\mathfrak{q}}_1 \cap \bar{\mathfrak{q}}_2 \cap \cdots \cap \bar{\mathfrak{q}}_t = \mathfrak{a}, \end{aligned}$$

also

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{q}_1 = \mathfrak{a}. \tag{61}$$

Entsprechend folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} : \mathfrak{q}_1 &= (\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k) : \mathfrak{q}_1 = (\mathfrak{q}_1 : \mathfrak{q}_1) \cap (\mathfrak{q}_2 : \mathfrak{q}_1) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_k : \mathfrak{q}_1) \\ &= (1) \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k, \end{aligned}$$

mit (61) gibt dies $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k$ im Widerspruch zu (60).

Also war die Annahme, daß $\mathfrak{p}_1$ unter den Primidealen $\bar{\mathfrak{p}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_t$ nicht vorkommt, falsch. Bei geeigneter Numerierung ist also

$$\bar{\mathfrak{p}}_1 = \mathfrak{p}_1. \tag{62}$$

Wir beweisen nun

$$\mathfrak{q}_\varkappa : \mathfrak{q}_1\bar{\mathfrak{q}}_1 = \begin{cases} (1) & \text{für} \quad \varkappa = 1, \\ \mathfrak{q}_\varkappa & \text{für} \quad \varkappa \neq 1 \end{cases} \tag{63}$$

und

$$\bar{\mathfrak{q}}_\tau : \mathfrak{q}_1\bar{\mathfrak{q}}_1 = \begin{cases} (1) & \text{für} \quad \tau = 1, \\ \bar{\mathfrak{q}}_\tau & \text{für} \quad \tau \neq 1. \end{cases} \tag{64}$$

Aus Kap. 1, (171) und (58), folgt zunächst

$$\mathfrak{q}_\varkappa : \mathfrak{q}_1\bar{\mathfrak{q}}_1 = (\mathfrak{q}_\varkappa : \mathfrak{q}_1) : \bar{\mathfrak{q}}_1 = \begin{cases} (1) : \bar{\mathfrak{q}}_1 = (1) & \text{für} \quad \varkappa = 1, \\ \mathfrak{q}_\varkappa : \bar{\mathfrak{q}}_1 & \text{für} \quad \varkappa \neq 1 \end{cases}$$

und

$$\bar{\mathfrak{q}}_\tau : \mathfrak{q}_1\bar{\mathfrak{q}}_1 = (\bar{\mathfrak{q}}_\tau : \mathfrak{q}_1) : \bar{\mathfrak{q}}_1 = \begin{cases} (1) : \bar{\mathfrak{q}}_1 = (1) & \text{für} \quad \tau = 1, \\ \bar{\mathfrak{q}}_\tau : \bar{\mathfrak{q}}_1 & \text{für} \quad \tau \neq 1, \end{cases}$$

und hieraus folgen (63) und (64) aus (58), da $\bar{\mathfrak{q}}_1$ ein Primärideal mit dem zugehörigen bezüglich M_1 maximalen Primideal $\mathfrak{p}_1$ ist.

Wir berechnen nun $\mathfrak{a} : \mathfrak{q}_1\bar{\mathfrak{q}}_1$ auf zweierlei Weise. Einmal ist nach Kap. 1, (160) und (63),

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} : \mathfrak{q}_1\bar{\mathfrak{q}}_1 &= (\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k) : \mathfrak{q}_1\bar{\mathfrak{q}}_1 \\ &= (\mathfrak{q}_1 : \mathfrak{q}_1\bar{\mathfrak{q}}_1) \cap (\mathfrak{q}_2 : \mathfrak{q}_1\bar{\mathfrak{q}}_1) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_k : \mathfrak{q}_1\bar{\mathfrak{q}}_1) = (1) \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k, \end{aligned}$$

also

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{q}_1\bar{\mathfrak{q}}_1 = \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k, \tag{65}$$

zum anderen ist nach Kap. 1, (160) und (64),

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} : \mathfrak{q}_1\bar{\mathfrak{q}}_1 &= (\bar{\mathfrak{q}}_1 \cap \bar{\mathfrak{q}}_2 \cap \cdots \cap \bar{\mathfrak{q}}_t) : \mathfrak{q}_1\bar{\mathfrak{q}}_1 \\ &= (\bar{\mathfrak{q}}_1 : \mathfrak{q}_1\bar{\mathfrak{q}}_1) \cap (\bar{\mathfrak{q}}_2 : \mathfrak{q}_1\bar{\mathfrak{q}}_1) \cap \cdots \cap (\bar{\mathfrak{q}}_t : \mathfrak{q}_1\bar{\mathfrak{q}}_1) = (1) \cap \bar{\mathfrak{q}}_2 \cap \cdots \cap \bar{\mathfrak{q}}_t, \end{aligned}$$

also

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{q}_1\bar{\mathfrak{q}}_1 = \bar{\mathfrak{q}}_2 \cap \cdots \cap \bar{\mathfrak{q}}_t. \tag{66}$$

Aus (65) und (66) ergeben sich mithin zwei Darstellungen für $\mathfrak{a} : \mathfrak{q}_1\bar{\mathfrak{q}}_1$. Mit diesem Ideal führen wir nun dieselbe Schlußweise nochmals durch. Wir nehmen dazu o.B.d.A. an, $\mathfrak{p}_2$ (oder $\bar{\mathfrak{p}}_2$) ist *maximal* bezüglich $M_2 := \{\mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_k, \bar{\mathfrak{p}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_t\}$, und schließen dann auf $\bar{\mathfrak{p}}_2 = \mathfrak{p}_2$. Entsprechend folgt $\bar{\mathfrak{p}}_3 = \mathfrak{p}_3, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_t = \mathfrak{p}_k$ und $t = k$, q.e.d.

2.17. Der zweite Eindeutigkeitssatz

Satz 33 (Zweiter Eindeutigkeitssatz von EMMY NOETHER). *In der Darstellung* (44) *sind neben den zugehörigen Primidealen auch die isolierten Primärkomponenten eindeutig bestimmt, nicht aber die eingebetteten Primärkomponenten.*

Beweis. Angenommen, $\mathfrak{a}$ besitzt *zwei* unverkürzbare Darstellungen

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k = \bar{\mathfrak{q}}_1 \cap \bar{\mathfrak{q}}_2 \cap \cdots \cap \bar{\mathfrak{q}}_k \tag{67}$$

mit den zugehörigen Primidealen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_k$, also gemäß Satz 32 $\operatorname{Rad} \mathfrak{q}_1 = \operatorname{Rad} \bar{\mathfrak{q}}_1 = \mathfrak{p}_1, \ldots, \operatorname{Rad} \mathfrak{q}_k = \operatorname{Rad} \bar{\mathfrak{q}}_k = \mathfrak{p}_k$ und

$$\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j \quad \text{für} \quad i \neq j. \tag{68}$$

Wir denken uns die Darstellungen (67) jetzt so geordnet, daß $\mathfrak{q}_1$ und $\bar{\mathfrak{q}}_1$ isolierte Primärkomponenten sind; nach Hilfssatz 1, (56), ist dann $\mathfrak{p}_1$ ein minimales Primideal bezüglich M_1.

Wir setzen nun zur Abkürzung

$$\mathfrak{c} := \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k \tag{69}$$

und

$$\bar{\mathfrak{c}} := \bar{\mathfrak{q}}_2 \cap \cdots \cap \bar{\mathfrak{q}}_k. \tag{70}$$

Wäre für $\varkappa = 2, \ldots, k$ nun $\mathfrak{q}_\varkappa \subseteqq \mathfrak{p}_1$, so folgte $\mathfrak{p}_\varkappa^{\varrho_\varkappa} \subseteqq \mathfrak{q}_\varkappa \subseteqq \mathfrak{p}_1$, also $\mathfrak{p}_\varkappa^{\varrho_\varkappa} \subseteqq \mathfrak{p}_1$, mithin $\mathfrak{p}_\varkappa \subseteqq \mathfrak{p}_1$ nach (57). $\mathfrak{p}_\varkappa = \mathfrak{p}_1$ $(\varkappa = 2, \ldots, k)$ ist wegen (68) nicht möglich; $\mathfrak{p}_\varkappa \subset \mathfrak{p}_1$ ist nicht möglich, da $\mathfrak{p}_1$ als minimal vorausgesetzt worden war. Die Annahme $\mathfrak{q}_\varkappa \subseteqq \mathfrak{p}_1$ führt also auf einen Widerspruch; mithin ist $\mathfrak{q}_\varkappa \not\subseteqq \mathfrak{p}_1$ $(\varkappa = 2, \ldots, k)$. Es existieren also Elemente $q_\varkappa$ $(\varkappa = 2, \ldots, k)$ mit $q_\varkappa \in \mathfrak{q}_\varkappa$ und $q_\varkappa \notin \mathfrak{p}_1$. Nach Kap. 1, (104) und (69), ist dann $q_2 q_3 \cdots q_k \in \mathfrak{q}_2 \mathfrak{q}_3 \cdots \mathfrak{q}_k \subseteqq \mathfrak{c}$; wegen $q_\varkappa \notin \mathfrak{p}_1$ ist andererseits $q_2 q_3 \cdots q_k \notin \mathfrak{p}_1$, also gilt

$$\mathfrak{c} \not\subseteqq \mathfrak{p}_1. \tag{71}$$

Ganz analog folgt

$$\bar{\mathfrak{c}} \not\subseteqq \mathfrak{p}_1. \tag{72}$$

Damit und mit Kap. 1, (160), und Satz 20, Fall (A), berechnen wir $\mathfrak{a} : \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a} : \bar{\mathfrak{c}}$. Zunächst ist wegen (69) und (70) $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{c} = \bar{\mathfrak{q}}_1 \cap \bar{\mathfrak{c}}$, also

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} : \mathfrak{c} &= (\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{c}) : \mathfrak{c} = (\mathfrak{q}_1 : \mathfrak{c}) \cap (\mathfrak{c} : \mathfrak{c}) = \mathfrak{q}_1 \cap (1) = \mathfrak{q}_1 \\ &= (\bar{\mathfrak{q}}_1 \cap \bar{\mathfrak{c}}) : \mathfrak{c} = (\bar{\mathfrak{q}}_1 : \mathfrak{c}) \cap (\bar{\mathfrak{c}} : \mathfrak{c}) = \bar{\mathfrak{q}}_1 \cap (\bar{\mathfrak{c}} : \mathfrak{c}) \subseteqq \bar{\mathfrak{q}}_1, \end{aligned}$$

also

$$\mathfrak{q}_1 \subseteqq \bar{\mathfrak{q}}_1. \tag{73}$$

Entsprechend erhalten wir

$$\mathfrak{a} : \bar{\mathfrak{c}} = (\bar{\mathfrak{q}}_1 \cap \bar{\mathfrak{c}}) : \bar{\mathfrak{c}} = (\bar{\mathfrak{q}}_1 : \bar{\mathfrak{c}}) \cap (\bar{\mathfrak{c}} : \bar{\mathfrak{c}}) = \bar{\mathfrak{q}}_1 \cap (1) = \bar{\mathfrak{q}}_1$$
$$= (\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{c}) : \bar{\mathfrak{c}} = (\mathfrak{q}_1 : \bar{\mathfrak{c}}) \cap (\mathfrak{c} : \bar{\mathfrak{c}}) = \mathfrak{q}_1 \cap (\mathfrak{c} : \bar{\mathfrak{c}}) \subseteqq \mathfrak{q}_1,$$

also

$$\bar{\mathfrak{q}}_1 \subseteqq \mathfrak{q}_1. \tag{74}$$

Aus (73) und (74) folgt $\bar{\mathfrak{q}}_1 = \mathfrak{q}_1$. Entsprechend kann $\bar{\mathfrak{q}}_i = \mathfrak{q}_i$ für alle isolierten Primärkomponenten $\mathfrak{q}_i$, $\bar{\mathfrak{q}}_i$ bewiesen werden; die Beweisführung für $i = 1$ war nur eine Frage der Schreibtechnik, denn aus (56) folgt die Minimalität aus der vorausgesetzten Isoliertheit von $\mathfrak{q}_i$ und umgekehrt; statt $\mathfrak{c}$ bzw. $\bar{\mathfrak{c}}$ hätte man dann $\mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{i-1} \cap \mathfrak{q}_{i+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k$ bzw. $\bar{\mathfrak{q}}_1 \cap \cdots \cap \bar{\mathfrak{q}}_{i-1} \cap \bar{\mathfrak{q}}_{i+1} \cap \cdots \cap \bar{\mathfrak{q}}_k$ und $\varkappa = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k$ zu setzen.

Für den Beweis der restlichen Behauptung von Satz 33 vergleiche man 2.20.

2.18. Ein Kriterium für zugehörige Primideale

Satz 34. *Besitzt $\mathfrak{a}$ keine eingebetteten Komponenten, so gilt:*

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{p} \textit{ tritt in der Zerlegung von } \mathfrak{a} \\ \textit{als zugehöriges Primideal auf}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p} \wedge \mathfrak{a} : \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}.$$

Beweis. ($\Rightarrow$): Ist etwa $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$, so folgt $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k \subseteqq \mathfrak{q}_1 \subseteqq \mathfrak{p}_1$. Nach Kap. 1, (139), gilt allgemein $\mathfrak{a} : \mathfrak{p}_1 \supseteqq \mathfrak{a}$; der Fall $\mathfrak{a} : \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{a}$ scheidet aber wegen Satz 29, (46), aus, womit schon alles bewiesen ist. Bei dieser Beweisrichtung wurde die Isoliertheit der Primärkomponenten überhaupt nicht benötigt.

($\Leftarrow$): Aus $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}$ und (44) folgt $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2 \cdots \mathfrak{q}_k \subseteqq \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k \subseteqq \mathfrak{p}$, also nach Primidealeigenschaft $\mathfrak{q}_i \subseteqq \mathfrak{p}$ für wenigstens ein i, o.B.d.A. $\mathfrak{q}_1 \subseteqq \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p}_1^{\varrho_1} \subseteqq \mathfrak{q}_1 \subseteqq \mathfrak{p}$, mithin

$$\mathfrak{p}_1 \subseteqq \mathfrak{p} \tag{75}$$

nach (6). Wir benutzen nun die zweite Voraussetzung $\mathfrak{a} : \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$. Es ist

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{p} = (\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k) : \mathfrak{p} = (\mathfrak{q}_1 : \mathfrak{p}) \cap (\mathfrak{q}_2 : \mathfrak{p}) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_k : \mathfrak{p}) \supset \mathfrak{a}.$$

Wäre $\mathfrak{p} \not\subseteqq \mathfrak{p}_\varkappa$ für alle $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$, so würde $\mathfrak{q}_\varkappa : \mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ nach Satz 20, Fall (A), und daraus $\mathfrak{a} : \mathfrak{p} = \mathfrak{a}$ folgen im Widerspruch zur Voraussetzung $\mathfrak{a} : \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$. Also gilt für wenigstens ein $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$

$$\mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{p}_i. \tag{76}$$

Aus (75) und (76) folgt nun $\mathfrak{p}_1 \subseteqq \mathfrak{p}_i$. Wäre nun $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_i$ für wenigstens ein $i \in \{2, \ldots, k\}$, so wäre $\mathfrak{q}_i$ in $\mathfrak{q}_1$ eingebettet. Nach Voraussetzung sollten aber sämtliche Primärkomponenten isoliert sein; mithin ist $\mathfrak{p}_1 \subseteqq \mathfrak{p}_i$ nur für $i = 1$ erfüllbar, d. h. also $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_1$. Dieses in (76) eingesetzt, ergibt

$$\mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{p}_1. \tag{77}$$

Aus (75) und (77) folgt $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$, q.e.d.

2.19. Durchschnittsdarstellungen für quasiprimäre Ideale

Ein Ideal $\mathfrak{r}$ hieß nach (10) *quasiprimär*, wenn $\operatorname{Rad} \mathfrak{r} = \mathfrak{p}$ ein Primideal ist. Es sei nun $\mathfrak{r} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k$ die unverkürzbare Darstellung von $\mathfrak{r}$ durch größte Primärkomponenten. Gemäß Satz 31 nehmen wir an, daß darin $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m$ alle isolierten und $\mathfrak{q}_{m+1}, \ldots, \mathfrak{q}_k$ alle eingebetteten Komponenten sind; dann ist

$$\operatorname{Rad} \mathfrak{r} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_m. \tag{78}$$

Nach (10) ist aber andererseits $\operatorname{Rad} \mathfrak{r} = \mathfrak{p}$, also bleibt wegen der Verschiedenheit von $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ nur $m = 1$, also

$$\operatorname{Rad} \mathfrak{r} = \mathfrak{p}_1 \tag{79}$$

und

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{q}_1 \cap (\mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k), \tag{80}$$

wobei $\mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_k$ in $\mathfrak{q}_1$ eingebettet sind, d. h., es gilt $\mathfrak{p}_2 \supset \mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_3 \supset \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k \supset \mathfrak{p}_1$, also auch $\mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{p}_3 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_k \supset \mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{q}_2 \not\supset \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_3 \not\supset \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k \not\supset \mathfrak{q}_1$. Setzen wir nun $\mathfrak{b} := \mathfrak{q}_2 \cap \mathfrak{q}_3 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k$, so ist also $\operatorname{Rad} \mathfrak{b} = \mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{p}_3 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_k \supset \mathfrak{p}_1$, also

$$\operatorname{Rad} \mathfrak{b} \supset \mathfrak{p}_1; \tag{81}$$

weiter folgt durch Einsetzen in (80) die Darstellung

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{b}; \tag{82}$$

für quasiprimäre Ideale gelten also (82) und (81). Das ist aber gerade die angekündigte Verschärfung von (26), mithin gilt der

Satz 35. *Ein Ideal $\mathfrak{r}$ aus einem Noetherschen Ring R ist genau dann quasiprimär, wenn* (81) *und* (82) *gelten.*

Damit ergibt sich dann auch der nach (26) angekündigte

Satz 36. *Ein Ideal $\mathfrak{q}$ aus einem Noetherschen Ring R ist dann und nur dann primär, wenn es quasiprimär ist und keine eingebetteten Komponenten besitzt.*

2.20. Mehrdeutigkeit der eingebetteten Komponenten

Im folgenden soll an Beispielen gezeigt werden, daß *die eingebetteten Komponenten nicht eindeutig sind.* Die Methode von HENTZELT und G. HERMANN (vgl. HERMANN [1], Satz 12) liefert bereits unendlich viele Möglichkeiten für eingebettete Komponenten. Im folgenden zweiten Beispiel wird gezeigt, daß damit die Möglichkeiten für die eingebetteten Komponenten keineswegs ausgeschöpft sind; dies stellte erstmals R. KUMMER fest (vgl. KUMMER und RENSCHUCH [1], Beispiel 3). Eine Methode, welche alle möglichen eingebetteten Komponenten liefert, ist unbekannt.

Beispiel 1. Wir betrachten die nach Satz 18, (27), primären Potenzproduktideale

$$\mathfrak{q}_{\pi 1} = (x_0^2, x_1^2, x_0x_1), \qquad \mathfrak{q}_{\pi 21} = (x_0^2, x_1^2, x_2) \quad \text{und} \quad \mathfrak{q}_{\pi 22} = (x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_0x_1x_2)$$

mit den zugehörigen Primidealen $\mathfrak{p}_{\pi 1} = (x_0, x_1)$ und $\mathfrak{p}_{\pi 2} = (x_0, x_1, x_2)$. Nach Kap. 1, Satz 50, (137), ist, wie der Leser selbst nachrechnen möge,

$$\mathfrak{q}_{\pi 1} \cap \mathfrak{q}_{\pi 21} = \mathfrak{q}_{\pi 1} \cap \mathfrak{q}_{\pi 22} = \mathfrak{a}_\pi \quad \text{mit} \quad \mathfrak{a}_\pi = (x_0^2, x_1^2, x_0x_1x_2);$$

nach Satz 13, (20), ist $\mathfrak{a}_\pi$ quasiprimär. Dabei sind $\mathfrak{q}_{\pi 21}$ und $\mathfrak{q}_{\pi 22}$ in $\mathfrak{q}_{\pi 1}$ eingebettet wegen $\mathfrak{p}_{\pi 2} \supset \mathfrak{p}_{\pi 1}$, $\mathfrak{q}_{\pi 21} \not\supset \mathfrak{q}_{\pi 1}$, $\mathfrak{q}_{\pi 22} \not\supset \mathfrak{q}_{\pi 1}$. Wir vermerken noch, daß hier

$$\mathfrak{q}_{\pi 22} \subset \mathfrak{q}_{\pi 21} \tag{83}$$

gilt, worauf wir noch zurückkommen werden.

Beispiel 2.

$$\mathfrak{p}_{\pi 1} = (x_0, x_1), \quad \mathfrak{p}_{\pi 2} = (x_0, x_1, x_2) \supset \mathfrak{p}_{\pi 1},$$

$$\mathfrak{q}_{\pi 1} = (x_0^3, x_1^2, x_0x_1), \quad \mathfrak{q}_{\pi 21} = (x_0^2, x_1^4, x_2^2) \not\supset \mathfrak{q}_{\pi 1},$$

$$\mathfrak{q}_{\pi 22} = (x_0^3, x_0^2x_1, x_0^2x_2^2, x_0x_1x_2^2, x_0x_2^3, x_1^4, x_1^2x_2^2, x_1x_2^3, x_2^4) \not\supset \mathfrak{q}_{\pi 1}$$

und

$$\mathfrak{q}_{\pi 1} \cap \mathfrak{q}_{\pi 21} = \mathfrak{q}_{\pi 1} \cap \mathfrak{q}_{\pi 22} = \mathfrak{a}_\pi \quad \text{mit} \quad \mathfrak{a}_\pi = (x_0^3, x_0^2x_1, x_0x_1x_2^2, x_1^4, x_1^2x_2^2).$$

Nach der zitierten Theorie von HENTZELT und G. HERMANN folgt nun in unserem Fall, daß für genügend großes m die Ideale $\mathfrak{q}_{\pi 2m} := (\mathfrak{a}_\pi, \mathfrak{p}_{\pi 2}^m)$ Primärideale mit $\mathfrak{a}_\pi = \mathfrak{q}_{\pi 1} \cap \mathfrak{q}_{\pi 2m}$ sind. Für $m = 1, \ldots, 5$ ist das nicht richtig, sondern trifft erstmals für $m = 6$ zu; der Leser möge dies durch Nachrechnen bestätigen. Für $m \geqq 6$ gewinnen wir mit $\mathfrak{q}_{\pi 2m}$ unendlich viele mögliche eingebettete Komponenten, aber keineswegs alle, wie die möglichen eingebetteten Primärkomponenten $\mathfrak{q}_{\pi 22}$ und $\mathfrak{q}_{\pi 21}$ zeigen. Es gilt dann

$$\cdots \subset \mathfrak{q}_{\pi 2, m+1} \subset \mathfrak{q}_{\pi 2m} \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_{\pi 27} \subset \mathfrak{q}_{\pi 26} \subset \mathfrak{q}_{\pi 22} \subset \mathfrak{q}_{\pi 21}. \tag{84}$$

Dadurch wird unterstrichen, daß hier $\mathfrak{q}_{\pi 21}$ in einer noch zu präzisierenden Weise die einfachste Zerlegung liefert, also die „beste" eingebettete Primärkomponente ist. Und gerade diese wird durch die Theorie von HENTZELT und G. HERMANN nicht gewonnen.

Beispiel 3. Wir bestätigen die Durchschnittsdarstellung

$$\mathfrak{a} = (x_0^2, x_0x_1) = (x_0) \cap (x_0^2, ax_0 + x_1) \quad \textit{für alle} \quad a \in K. \tag{85}$$

Für alle Elemente des Durchschnittes gilt $G_1x_0 = G_2x_0^2 + G_3(ax_0 + x_1)$, also

$$x_0(G_1 - G_2x_0 - G_3a) = G_3x_1,$$

folglich $G_3 = Hx_0$, mithin $G_1 - G_2x_0 - Hax_0 = Hx_1$ und $G_1 = G_2x_0 + H(ax_0 + x_1)$. Dann wird

$$G_1x_0 = G_2x_0^2 + H(ax_0^2 + x_0x_1) \quad \text{mit} \quad G_2, H \text{ beliebig},$$

also

$$(x_0) \cap (x_0^2, ax_0 + x_1) = (x_0^2, ax_0^2 + x_0x_1) = (x_0^2, x_0x_1) = \mathfrak{a}.$$

Hier ist

$$\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}_1 = (x_0), \quad \mathfrak{q}_2 = (x_0^2, ax_0 + x_1) \not\supset \mathfrak{q}_1, \quad \mathfrak{p}_2 = (x_0, x_1) \supset \mathfrak{p}_1,$$

also ist $\mathfrak{a}$ quasiprimär. Im Gegensatz zu den beiden vorigen Beispielen ist es hier nicht möglich, die eingebettete Primärkomponente $\mathfrak{q}_2$ durch Oberideale zu ersetzen. Enthält K unendlich viele Elemente, die für a in Frage kommen können, so sind durch $\mathfrak{q}_2$ unendlich viele eingebettete Primärkomponenten gegeben.

Der Leser wird es als unbefriedigend empfunden haben, daß bei allen drei Beispielen Durchschnittsdarstellungen vorgegeben waren, die dann bestätigt wurden. Die Frage, wie man zu diesen Durchschnittsdarstellungen gekommen ist, blieb offen. Für Potenzproduktideale werden wir dazu im übernächsten Abschnitt ein brauchbares Verfahren angeben können. Auch für beliebige Polynomideale ist die Berechnung einer solchen Durchschnittsdarstellung grundsätzlich möglich; das ist gerade Aussage der Theorie von Hentzelt und G. Hermann. Sie liefert aber leider keine praktisch durchführbaren Methoden; dies liegt vor allem an der Schwierigkeit der Berechnung der Grundideale. Lediglich bei Potenzproduktidealen ist dies verhältnismäßig einfach, gibt dann aber — wie das zweite Beispiel zeigt — immer noch kompliziertere Darstellungen als mit der eigens für Potenzproduktideale entwickelten Methode.

Bei H-Idealen, welche keine Potenzproduktideale sind, ist daher ein gewisses „Probieren" derzeit wohl noch der günstigste Weg: Unter der Voraussetzung, daß die zugehörigen Primideale bekannt sind, werden für die Primärkomponenten verschiedene Ansätze ausprobiert und dann die Durchschnittsdarstellungen bestätigt — oder auch nicht.

2.21. Reduzierte Darstellungen

Definition 14 (von Emmy Noether). Die unverkürzbare Darstellung durch größte Primärkomponenten (44) heißt *reduziert*, wenn keine der eingebetteten Primärkomponenten durch ein Oberideal ersetzt werden kann.

So folgt im ersten Beispiel aus (83), daß die Darstellung $\mathfrak{a}_\pi = \mathfrak{q}_{\pi 1} \cap \mathfrak{q}_{\pi 22}$ nicht reduziert ist. Für das zweite Beispiel folgt aus (84), daß die Darstellungen $\mathfrak{a}_\pi = \mathfrak{q}_{\pi 1} \cap \mathfrak{q}_{\pi 2i}$ für $i = 2, 6, 7, 8, \dots$ nicht reduziert sind.

Man könnte nun hoffen, durch die zusätzliche Forderung der Reduziertheit die Eindeutigkeit der eingebetteten Primärkomponenten erzwingen zu können. Daß dies jedoch keineswegs zutrifft, zeigt das bereits von EMMY NOETHER angegebene dritte Beispiel mit den Darstellungen (85), welche für alle a reduziert sind.

Die Verwendung des Begriffes *„reduzierte Darstellung"* ist in der Literatur uneinheitlich; so verwendet GRÖBNER in [8] den Begriff „reduzierte Darstellung" als Abkürzung für „unverkürzbare Darstellung durch größte Primärkomponenten".

2.22. Primärkomponentenzerlegung für Potenzproduktideale

Nach Kap. 1, (109), galt $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} \subseteqq (\mathfrak{a} + \mathfrak{c}) \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$. Wir wollen zunächst zeigen, daß für Potenzproduktideale darin das Gleichheitszeichen gilt, also

$$(\mathfrak{a}_\pi \cap \mathfrak{b}_\pi, \mathfrak{c}_\pi) = (\mathfrak{a}_\pi, \mathfrak{c}_\pi) \cap (\mathfrak{b}_\pi, \mathfrak{c}_\pi). \tag{86}$$

Dies folgt durch Nachrechnen aus Kap. 1, (137). Aus

$$\mathfrak{a}_\pi = (p_1, \ldots, p_s), \quad \mathfrak{b}_\pi = (q_1, \ldots, q_t) \quad \text{und} \quad \mathfrak{c}_\pi = (r_1, \ldots, r_m)$$

folgt

$$(\mathfrak{a}_\pi \cap \mathfrak{b}_\pi, \mathfrak{c}_\pi) = (p_1 \sqcup q_1, \ldots, p_i \sqcup q_k, \ldots, p_s \sqcup q_t, r_1, \ldots, r_m). \tag{87}$$

In $(\mathfrak{a}_\pi, \mathfrak{c}_\pi) \cap (\mathfrak{b}_\pi, \mathfrak{c}_\pi)$ kommen zu den Basiselementen von (87) noch Potenzprodukte der Typen $r_i \sqcup r_k$, $p_i \sqcup r_k$ und $q_i \sqcup r_k$ hinzu, die aber alle durch $r_1, \ldots, r_m$ ausgedrückt und daher gestrichen werden können; mithin gilt (86). Durch mehrmalige Anwendung folgt aus (86)

$$(\mathfrak{a}_{\pi 1} \cap \mathfrak{a}_{\pi 2} \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_{\pi h}, \mathfrak{c}_\pi) = (\mathfrak{a}_{\pi 1}, \mathfrak{c}_\pi) \cap (\mathfrak{a}_{\pi 2}, \mathfrak{c}_\pi) \cap \cdots \cap (\mathfrak{a}_{\pi h}, \mathfrak{c}_\pi). \tag{88}$$

Es sei nun $p_1 = x_{11}^{c_{11}} x_{12}^{c_{12}} \cdots x_{1m_1}^{c_{1m_1}}$ (vgl. Kap. 1, (46)). Wir setzen

$$m_{1i} = x_{1i}^{c_{1i}} \qquad (i = 1, \ldots, m_1); \tag{89}$$

dann ist also

$$p_1 = m_{11} \cdot m_{12} \cdots m_{1m_1} \tag{90}$$

die Zerlegung von p_1 in teilerfremde *Monome* (89). Mithin ist $m_{1i} \sqcup m_{1j} = m_{1i} \cdot m_{1j}$; aus Kap. 1, (136), folgt somit

$$(m_{11}) \cap (m_{12}) \cap \cdots \cap (m_{1m_1}) = (m_{11} \cdot m_{12} \cdots m_{1m_1}) = (p_1). \tag{91}$$

Setzen wir nun in (88) jetzt $\mathfrak{a}_{\pi i} = (m_{1i})$ für $i = 1, \ldots, m_1$, also $h = m_1$, ferner $\mathfrak{c}_\pi = (p_2, \ldots, p_s)$, so folgt aus (91)

$$(p_1, p_2, \ldots, p_s) = (m_{11}, p_2, \ldots, p_s) \cap \cdots \cap (m_{1m_1}, p_2, \ldots, p_s). \tag{92}$$

Das ist eine sehr nützliche Formel. Wählt man nämlich p_1 geschickt genug (beispielsweise mit möglichst vielen Variablen und möglichst niedrigen Exponenten), so kann man in (92) sehr viele Basiselemente und möglicherweise sogar Ideale streichen, nämlich diejenigen Komponenten, welche doppelt auftreten oder Oberideale anderer Komponenten sind.

Jetzt wiederholen wir das Verfahren mit p_2 und $(m_{1i}, p_3, \ldots, p_s)$ usw. Als Ergebnis haben wir wegen Satz 24 den von R. KUMMER in KUMMER und RENSCHUCH [1], Satz 12, formulierten

Satz 37 (Zerlegungssatz von R. KUMMER). *Ist* $\mathfrak{a}_\varkappa = (p_1, \ldots, p_s)$ *ein Potenzproduktideal und sind*

$$p_\sigma = m_{\sigma 1} \cdot m_{\sigma 2} \cdots m_{\sigma m_\sigma} \qquad (\sigma = 1, \ldots, s) \tag{93}$$

die Zerlegungen der Basispotenzprodukte in teilerfremde Monome

$$m_{\sigma i} = x_{\sigma m_\sigma}^{c_{\sigma m_\sigma}} \qquad \big(x_{\sigma m_\sigma} \in (x_0, x_1, \ldots, x_n)\big), \tag{94}$$

so ist

$$\begin{aligned}(p_1, \ldots, p_s) = (m_{11}, m_{21}, \ldots, m_{s1}) \cap (m_{11}, m_{21}, \ldots, m_{s-1,1}, m_{s2}) \cap \cdots \\ \cap (m_{1m_1}, \ldots, m_{sm_s})\end{aligned} \tag{95}$$

eine im allgemeinen verkürzbare Darstellung von $(p_1, \ldots, p_s)$ *als Durchschnitt irreduzibler Potenzproduktideale gemäß dem ersten Zerlegungssatz.*

Beispiel 1. $\mathfrak{a}_\varkappa = (x_0^2, x_1^2, x_0x_1x_2)$. Hier ist

$$m_{11} = x_0^2, \quad m_{21} = x_1^2, \quad m_{31} = x_0, \quad m_{32} = x_1, \quad m_{33} = x_2,$$

und (95) liefert

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}_\varkappa &= (m_{11}, m_{21}, m_{31}) \cap (m_{11}, m_{21}, m_{32}) \cap (m_{11}, m_{21}, m_{33}) \\ &= (x_0^2, x_1^2, x_0) \cap (x_0^2, x_1^2, x_1) \cap (x_0^2, x_1^2, x_2) \\ &= (x_0, x_1^2) \cap (x_0^2, x_1) \cap (x_0^2, x_1^2, x_2).\end{aligned}$$

Hier haben die ersten beiden irreduziblen Primärideale dasselbe zugehörige Primideal (x_0, x_1); die unverkürzbare Darstellung durch größte Primärkomponenten ist also

$$\mathfrak{a}_\varkappa = (x_0^2, x_0x_1, x_1^2) \cap (x_0^2, x_1^2, x_2).$$

Beispiel 2. $\mathfrak{a}_\varkappa = (x_0x_1x_2^2, x_0^3, x_1^4, x_0^2x_1, x_1^2x_2^2)$. Hier ist

$$m_{11} = x_0, \quad m_{12} = x_1, \quad m_{13} = x_2^2, \quad m_{21} = x_0^3, \quad m_{31} = x_1^4,$$

$$m_{41} = x_0^2, \quad m_{42} = x_1, \quad m_{51} = x_1^2, \quad m_{52} = x_2^2,$$

und die Anwendung von Satz 37 liefert $3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ irreduzible Ideale, von denen neun gestrichen werden können. Hier ist es praktischer, (92) mehrmals anzuwenden. Dies liefert

$$\mathfrak{a}_\varkappa = (x_1^2x_2^2, x_0, x_1^4) \cap (x_0^3, x_1) \cap (x_0^2x_1, x_0^3, x_1^4, x_2^2).$$

Entsprechend ist

$$(x_1^2x_2^2, x_0, x_1^4) = (x_0, x_1^2) \cap (x_0, x_1^4, x_2^2)$$

und

$$(x_0^2x_1, x_0^3, x_1^4, x_2^2) = (x_0^2, x_1^4, x_2^2) \cap (x_1, x_0^3, x_2^2).$$

Dies in $\mathfrak{a}_\pi$ eingesetzt und Oberideale gestrichen, folgt — wie der Leser zur Übung selbst bestätigen möge —

$$\mathfrak{a}_\pi = (x_0^3, x_1) \cap (x_0, x_1^2) \cap (x_0^2, x_1^4, x_2^2);$$

werden die beiden ersten Ideale nach Satz 16 zusammengezogen, so folgt die unverkürzbare Darstellung durch größte Primärkomponenten

$$\mathfrak{a}_\pi = (x_0^3, x_0 x_1, x_1^2) \cap (x_0^2, x_1^4, x_2^2).$$

Daß bei dieser Methode die Primärkomponenten im Sinne von EMMY NOETHER *reduziert* sind, ist einleuchtend und wurde von R. KUMMER bewiesen (vgl. KUMMER und RENSCHUCH [1], Satz 13c). Zugleich wurden hiermit die Zerlegungen bei den beiden ersten Beispielen von 2.20. motiviert.

2.23. Ausblick auf weitere Zerlegungssätze

Die Schulbezogenheit der Zerlegungs- und Eindeutigkeitssätze zum Satz von der eindeutigen Primzahlzerlegung ist offenkundig; der Leser ersetze dazu Durchschnitte durch Produkte und alle Ideale durch Hauptideale und deute dann die einzelnen Beweisschritte. Eingebettete Komponenten gibt es nicht in $\mathbf{Z}$, da Primzahlen keine Teiler haben. Man vergleiche dies mit dem Eindeutigkeitsbeweis von ZERMELO gemäß MfL Bd. 1, 3.7., (51)ff.

Diese Betrachtungen liefern einen weiteren Aspekt zur Einschätzung der Schwierigkeiten, vor denen jeder Lehrer steht, der diese Probleme an zwölfjährige Schüler heranzutragen hat.

Daneben wird sich der Leser aber auch fragen, welche Axiome zu den Eigenschaften Noetherscher Ringe hinzukommen müssen, um zu Produktzerlegungen und schließlich zu Produkten von Primidealpotenzen zu kommen. Dies soll im folgenden kurz angedeutet werden, wobei wir von der Darstellung von VAN DER WAERDEN (vgl. [10], §§ 134—140, vor allem Schluß von § 140) ausgehen (vgl. auch GRÖBNER [8], Kap. V).

Mit Rücksicht auf die gewünschten Anwendungen müssen wir dazu jedenfalls voraussetzen, daß der Ring R, von dem wir ausgehen, ein Integritätsbereich I ist, also keine Nullteiler besitzt. In I werden also Ideale betrachtet. Wir betrachten dann folgendes Axiomensystem:

(A I) Teilerkettenbedingung, d. h., I ist ein Noetherscher Ring.

(A II) Jedes Primideal ist teilerlos, d. h., jedes Primideal besitzt keine echten Oberideale außer (1).

(A III) I ist *ganz-abgeschlossen* im Quotientenkörper Σ.

Zum ungefähren Verständnis von (A III) geben wir einige Erläuterungen. Ist R ein kommutativer Ring mit Einselement, T ein Körper, $R \subset T$, so heißt ein Element

$t \in T$ *ganz in bezug auf* R, wenn t einer algebraischen Gleichung

$$t^n + r_{n-1}t^{n-1} + r_{n-2}t^{n-2} + \cdots + r_1 t + r_0 = 0 \quad \text{mit} \quad r_i \in R$$

genügt, deren höchster Koeffizient also 1 ist.

Beispiel. $T = \mathbf{Q}$, $R = \mathbf{Z}$, alle Elemente $x = a/b$ aus $\mathbf{Q}$ genügen der Gleichung $bx - a = 0$ mit $a, b \in \mathbf{Z}$; wird o.B.d.A. von a und b noch die Teilerfremdheit gefordert, so ist $a/b \in \mathbf{Z}$ genau dann, wenn $b = 1$ ist.

Man zeigt dann verhältnismäßig leicht, daß die in bezug auf R ganzen Elemente in T einen Ring S bilden.

Ein Ring S heißt *ganz-abgeschlossen in einem Körper* T, wenn jedes in bezug auf S ganze Element von T zu S gehört.

Ein Integritätsbereich I heißt *ganz-abgeschlossen*, wenn er ganz-abgeschlossen in seinem Quotientenkörper Σ ist. Dies also wird in (A III) für I vorausgesetzt.

Nunmehr werde zusammengestellt, was aus der Gültigkeit von (A I) bis (A III) gefolgert werden kann:

Aus (A I) allein folgen, wie wir in diesem Kapitel gezeigt haben, der erste und zweite Zerlegungssatz und die beiden Eindeutigkeitssätze, in Stichworten: Darstellung als Durchschnitt von Primäridealen, zugehörige Primideale und isolierte Primärkomponenten sind eindeutig.

Aus (A I) und (A II) folgt, wie man bei VAN DER WAERDEN nachlesen kann, daß jedes Ideal als Produkt von Primäridealen darstellbar ist. Nach (A II) sind dann die zugehörigen Primideale dieser Primärideale teilerlos; solche Primärideale heißen nach DEDEKIND *einartige Ideale*. Jedes Ideal ist also Produkt einartiger Ideale, und diese Produktzerlegung ist eindeutig.

Diese Theorie geht auf DEDEKIND zurück und wurde von KRULL weiterentwickelt.

Aus (A I) bis (A III) folgt schließlich, daß *jedes Ideal eindeutig als Produkt von Primidealpotenzen darstellbar ist* (vgl. Kap. 1, (74)). Solche Integritätsbereiche heißen auch *Dedekindsche Ringe* oder *Dedekindsche Integritätsbereiche* oder *Dedekindsche Bereiche*. Hierzu sei auf GRÖBNER [8], Kap. V, § 6, und auf DEDEKIND selbst, etwa [1], verwiesen.

Ist schließlich I noch ein *Hauptidealring*, also auch jedes Primideal ein Primhauptideal und jede Primidealpotenz eine Primhauptidealpotenz, so haben wir wieder den ZPE-Satz.

Aus (A I) und (A III) folgt aber keineswegs (A II). Es ist daher sinnvoll, Integritätsbereiche zu betrachten, für die nur (A I) und (A III) gelten, vgl. VAN DER WAERDEN [10], § 140; die dort dargestellte Theorie geht auf E. ARTIN zurück.

3. Nullstellen von Polynomidealen

3.1. Einleitung, Definitionen

In diesem Kapitel wollen wir uns mit inhomogenen und homogenen nichtlinearen Gleichungssystemen befassen oder — in unserer Sprechweise — mit den Nullstellen von P-Idealen und H-Idealen. Es scheint dazu ratsam, die entsprechenden Überlegungen laufend mit der Theorie der linearen Gleichungssysteme in Verbindung zu bringen, sowohl zur Erläuterung als auch zur besseren Herausarbeitung der Unterschiede.

Der Leser möge aber bitte von vornherein nicht zu viel erwarten. Er möge bedenken, daß im nichtlinearen Fall von vornherein Grenzen gesetzt sind.

Einmal können wir schon deshalb im allgemeinen nicht mit geschlossenen Lösungsformeln aufwarten, weil Gleichungen fünften und höheren Grades nicht durch Radikale auflösbar sind (vgl. MfL Bd. 3, 14.8.).

Demgegenüber können wir für Gleichungen vierten, dritten und zweiten Grades Formeln derart angeben, daß beispielsweise für quadratische Gleichungen $x^2 + px + q = 0$ jede Lösung für speziell gewählte Koeffizienten p, q durch entsprechende Spezialisierung in der für unbestimmte p, q berechneten Lösung

$$y_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

gewonnen werden kann.

Auch das Vorgehen bei linearen Gleichungssystemen mit quadratischer Koeffizientenmatrix kann man unter diesem Aspekt sehen: Ein solches System ist lösbar, wenn die Koeffizienten Unbestimmte sind. Aus dieser durch die *Cramersche Regel* gegebenen Lösung bekommt man auch bei speziellen Koeffizienten die Lösung, hat dabei lediglich die Einschränkung zu beachten, daß die Spezialisierung so erfolgt sein muß, daß die Koeffizientendeterminante $\det A \neq 0$ bleibt (vgl. MfL Bd. 3, 8.3.).

Und damit kommen wir zu einem zweiten bemerkenswerten Unterschied im nichtlinearen Fall, der in der algebraischen Geometrie zu vielen Abhandlungen über „Spezialisierungsprobleme" Anlaß bot: Es gibt Fälle, wo man Lösungen im speziellen Fall *nicht* durch Spezialisierung der Lösungen im allgemeinen Fall gewinnen kann. Zur Theorie der Spezialisierungen sei auf das Buch von O.-H. KELLER [2] verwiesen. Wir geben dazu ein berühmtes Beispiel in der Darstellung von VAN DER WAERDEN an (vgl. [2]).

Es sei λ eine Unbestimmte und als Gleichungssystem in $K(\lambda)$

$$\left.\begin{aligned}(x_1 - x_0)\,(x_0^3 - x_1^2 x_2) &= 0,\\ x_2(x_0^3 - x_1^2 x_2) &= 0,\\ x_2 - \lambda x_1 &= 0\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

gegeben. Schließt man die triviale Lösung $y_0 = y_1 = y_2 = 0$ aus, so folgt

$$\begin{aligned}&y_2 = \lambda y_1,\\ &y_0^3 = \lambda y_1^3.\end{aligned}$$

Sind $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ die dritten Wurzeln aus λ im Körper $\Omega \supset K(\lambda)$, so hat (1) die Lösungen

$$h_1 \begin{pmatrix}\delta_1\\ 1\\ \lambda\end{pmatrix}, \quad h_2 \begin{pmatrix}\delta_2\\ 1\\ \lambda\end{pmatrix}, \quad h_3 \begin{pmatrix}\delta_3\\ 1\\ \lambda\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad h_1, h_2, h_3 \in \Omega,$$

die für $\lambda = 0$ in die eine Lösung $h \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ übergehen.

Dagegen geht (1) für $\lambda = 0$ über in

$$\left.\begin{aligned}(x_1 - x_0)\,(x_0^3 - x_1^2 x_2) &= 0,\\ x_2(x_0^3 - x_1^2 x_2) &= 0,\\ x_2 &= 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}(x_1 - x_0)\,x_0^3 &= 0,\\ x_2 &= 0;\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

also hat (2) die beiden Lösungen

$$k_1 \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \quad k_2 \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad k_1, k_2 \in \Omega,$$

von denen sich die zweite nicht durch Spezialisierung der Lösungen von (1) ergibt.

Dagegen schlägt sich der bei linearen Gleichungssystemen wesentliche Unterschied zwischen dem inhomogenen und dem homogenen Fall auch bei nichtlinearen Gleichungssystemen nieder (vgl. MfL Bd. 3, 5.1.): Auch hier gibt es im inhomogenen Fall wirklich unlösbare Gleichungssysteme.

Wir müssen daher zwischen inhomogenen P-Idealen und H-Idealen streng unterscheiden. Demgemäß werden Definitionen und Sätze im folgenden getrennt für P-Ideale und H-Ideale gegeben. Zur Vereinfachung wollen wir jetzt $\mathbf{K}$ als algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0 voraussetzen (vgl. Kap. 1, Definition 21, und MfL Bd. 3, 13.7.).

Definition 1. $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ mit $y_k \in \mathbf{K}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ heißt *Nullstelle des inhomogenen P-Ideals* $(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, wenn $f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$ gilt für jedes Polynom $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (\mathfrak{a})$.

Nach Kap. 1, Satz 12, ist $\mathbf{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ein Noetherscher Ring; mithin existiert eine Basisdarstellung $(\mathfrak{a}) = (f_1, f_2, \ldots, f_t)$. Dann ist also

$$\left.\begin{array}{l} f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \\ f_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \\ \dotfill \\ f_t(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Da nun $f \in (\mathfrak{a})$ und $(f_1, f_2, \ldots, f_t)$ eine Basis von $(\mathfrak{a})$ ist, existieren Polynome $g_1, g_2, \ldots, g_t$ mit

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g_1(x_1, \ldots, x_n) \cdot f_1(x_1, \ldots, x_n) + \cdots$$
$$+ g_t(x_1, \ldots, x_n) \cdot f_t(x_1, \ldots, x_n),$$

und es ist $f(y_1, \ldots, y_n) = 0$ wegen (3). Äquivalent zu Definition 1 ist also die

Definition 2. $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ mit $y_k \in \mathbf{K}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ heißt *Nullstelle des inhomogenen P-Ideals* $(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ mit $(\mathfrak{a}) = (f_1, \ldots, f_t)$, wenn (3) gilt; gleichzeitig heißt $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *Lösung des inhomogenen algebraischen Gleichungssystems*

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \dotfill \\ f_t(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0; \end{array}\right\} \tag{4}$$

dabei können $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ als Punkte im n-dimensionalen affinen Raum gedeutet werden; die Gesamtheit dieser Punkte heißt *Nullstellengebilde* von $(\mathfrak{a})$, kurz NG $\big((\mathfrak{a})\big)$, neuerdings auch *algebraisches System.*

Entsprechend hat man

Definition 3. $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ mit $y_k \in \mathbf{K}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ heißt *Nullstelle des homogenen H-Ideals* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ mit $\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_s)$, wenn

$$\left.\begin{array}{l} F_1(y_0, y_1, \ldots, y_n) = 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_s(y_0, y_1, \ldots, y_n) = 0 \end{array}\right\} \tag{5}$$

gilt; $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ heißt gleichzeitig *Lösung des homogenen algebraischen Gleichungssystems*

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0\,, \\ F_2(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_s(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0\,; \end{array}\right\} \tag{6}$$

dabei können $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ als Punkte im n-dimensionalen projektiven Raum gedeutet werden; die Gesamtheit dieser Punkte heißt *Nullstellengebilde* von $\mathfrak{a}$, kurz NG $(\mathfrak{a})$, neuerdings auch *algebraisches System.*

Die Bestimmung aller Lösungen eines algebraischen Gleichungssystems ist also gleichbedeutend mit der Bestimmung aller Nullstellen des entsprechenden Ideals. Ist das Nullstellengebilde die leere Menge, also NG $\big((\mathfrak{a})\big) = \emptyset$, so existiert keine Nullstelle und umgekehrt; NG $\big((\mathfrak{a})\big) = \emptyset$ bedeutet demnach, daß das Gleichungssystem unlösbar ist.

Sind in (4) die Polynome $f_1, f_2, \ldots, f_t$ linear, also $f_h = l_h$ mit

$$l_h = a_{h0} + a_{h1}x_1 + a_{h2}x_2 + \cdots + a_{hn}x_n \qquad (h = 1, 2, \ldots, t;\; a_{h0} = -b_h), \tag{7}$$

so geht (4) in ein lineares Gleichungssystem über, welches für den Fall, daß $a_{10}, \ldots, a_{t0}$ nicht alle gleich Null sind, inhomogen ist (Kap. 1, (50)). Wenn es lösbar ist, dann kann die „vollständige Lösung" derart angegeben werden, daß

$$d := n - r \tag{8}$$

der n Koordinaten des Lösungsvektors gleich beliebigen Parametern $t_1, \ldots, t_d$ gesetzt werden können, also etwa

$$y_{i_1} = t_1\,, \quad y_{i_2} = t_2\,, \quad \ldots, \quad y_{i_d} = t_d\,, \tag{9}$$

während die übrigen y_i lineare Funktionen in $t_1, \ldots, t_d$ sind. Diese vollständige Lösung gewinnt man am besten aus dem *Gaußschen Algorithmus* (vgl. MfL Bd. 3, Schluß von 5.4.). In der linearen Algebra setzt man vielfach für $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zusätzlich eine „geeignete Numerierung“ derart voraus, daß

$$\left.\begin{aligned}
y_1 &= c_{10} + t_1 c_{11} + \cdots + t_d c_{1d}, \\
y_2 &= c_{20} + t_1 c_{21} + \cdots + t_d c_{2d}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_r &= c_{r0} + t_1 c_{r1} + \cdots + t_d c_{rd}, \\
y_{r+1} &= t_1, \\
y_{r+2} &= t_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_n &= t_d
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

gilt. Das bedeutet, daß man beim Gaußschen Algorithmus nacheinander $x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}$ eliminiert und dadurch schließlich zu einer solchen „Trapezform“ gelangt, bei welcher das Trapez aus einem Rechteck durch Wegschneiden eines Dreiecks auf der linken Seite entstanden ist; aus dieser Trapezform folgt dann (10).

Setzt man beim Gaußschen Algorithmus jedoch das Eliminationsverfahren derart an, daß nacheinander $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-(r-2)} = x_{d+2}$ eliminiert werden, so folgt bei geeigneter Numerierung eine Trapezform mit einem Trapez, welches aus einem Rechteck durch Dreiecksabschneiden auf der rechten Seite entstanden ist. Wir haben dann

$$\left.\begin{aligned}
y_1 &= t_1, \\
y_2 &= t_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_d &= t_d, \\
y_{d+1} &= c_{d+1,0} + t_1 c_{d+1,1} + \cdots + t_d c_{d+1,d}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_n &= c_{n0} + t_1 c_{n1} + \cdots + t_d c_{nd}
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

als *vollständige Lösung*.

Entsprechend kann man aus (9) zu einer vollständigen Lösung gelangen. In allen diesen Fällen bedeutet der Begriff „vollständige Lösung“, daß sämtliche Lösungen von

$$\left.\begin{aligned}
l_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
l_t(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

durch *Parameterspezialisierung* aus (9) bzw. (10) bzw. (11) folgen.

Ersetzt man nun in (10) die Parameter $t_1, \ldots, t_d$ wieder durch $y_{r+1}, \ldots, y_n$ und $y_1, \ldots, y_r, y_{r+1}, \ldots, y_n$ durch $x_1, \ldots, x_n$, so gewinnt man das Gleichungssystem (12) oder ein zu (12) äquivalentes Gleichungssystem (vgl. MfL Bd. 3, 5.1., Definition 4), aus welchem sich $l_1, \ldots, l_t$ durch Linearkombinationen ergeben (vgl. MfL Bd. 3, 5.2., Satz 1). Setzen wir

$$(\mathfrak{l}) := (l_1, l_2, \ldots, l_t), \tag{13}$$

so können wir also sagen: Die vollständige Lösung ist auch dadurch charakterisiert, daß für lineare Polynome

$$l := l(x_1, \ldots, x_n) = a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \tag{14}$$

gilt:

$$l(y_1, \ldots, y_n) = 0 \Rightarrow l(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathfrak{l}). \tag{15}$$

Zum gleichen Ergebnis wären wir von (11) oder (9) aus gelangt; ganz entsprechend hätten wir im homogenen Fall mit Linearformen

$$L(x_0, x_1, \ldots, x_n) := a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$$

schließen können.

Die durch (15) gegebene Charakterisierung vollständiger Lösungen läßt sich auf den nichtlinearen Fall übertragen und führt uns zum Begriff der „allgemeinen Nullstelle", mit dem wir uns im folgenden Abschnitt 3.2. ausführlich befassen werden.

Beispiel.

$$(\mathfrak{l}) = (l_1, l_2, l_3)$$

mit

$$l_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 - 4, \quad l_2 = 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 8, \quad l_3 = 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 1.$$

Die vollständige Lösung des Gleichungssystems $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, $l_3 = 0$ ist dann

$$y_1 = -7 + 8t, \quad y_2 = t, \quad y_3 = 11 - 10t.$$

Aus ihr folgt $10y_2 + y_3 - 11 = 0$ id. in t, und daraus folgt $l_2^* := 10x_2 + x_3 - 11 \in (\mathfrak{l})$, was man durch $l_2^* = 3l_1 - l_3$ zusätzlich bestätigt. Aus der vollständigen Lösung folgt weiterhin $y_1 - 8y_2 + 7 = 0$ id. in t und daraus $l_1^* := x_1 - 8x_2 + 7 \in (\mathfrak{l})$ mit der Darstellung $l_1^* = -l_2 + l_3$. So kann man aber nur bei unbestimmt gelassenem t schließen. Setzen wir etwa $t = 1$, so wird $y_1(1) = y_2(1) = 1$, also $y_1(1) - y_2(1) = 0$, aber $x_1 - x_2 \notin (\mathfrak{l})$. Der Leser möge nachrechnen, daß

$$l_1 = l_1^* + l_2^*, \quad l_2 = 2l_1^* + 2l_2^*, \quad l_3 = 3l_1^* + 2l_2^*$$

gilt. Ist $(\mathfrak{l}^*) = (l_1^*, l_2^*)$, so gilt also $(\mathfrak{l}) = (\mathfrak{l}^*)$. Somit ist (l_1, l_2, l_3) keine Minimalbasis für $(\mathfrak{l})$, sondern (l_1^*, l_2^*). Hier ist also $t = 3$, $r = 2$, $n = 3$, $d = 1$ in Übereinstimmung mit einem Parameter t in der vollständigen Lösung.

Wir werden sehen, daß die Verhältnisse bei nichtlinearen Gleichungssystemen anders liegen. Wir geben daher abschließend noch Definitionen, welche auf die unterschiedliche Situation bei nichtlinearen Gleichungssystemen zugeschnitten sind.

Definition 4. Zwei nichtlineare inhomogene Gleichungssysteme

$$\left.\begin{array}{lcl} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, & & f_1{}^*(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{und} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_t(x_1, \ldots, x_n) = 0 & & f_{t^*}^*(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{array}\right\} \tag{16}$$

mit den zugehörigen P-Idealen $(\mathfrak{a}) = (f_1, \ldots, f_t)$ und $(\mathfrak{a}^*) = (f_1{}^*, \ldots, f_{t^*}^*)$ heißen *idealäquivalent*, wenn $(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}^*)$ ist.

Definition 5. Zwei nichtlineare inhomogene Gleichungssysteme (16) mit den zugehörigen P-Idealen $(\mathfrak{a}) = (f_1, \ldots, f_t)$ und $(\mathfrak{a}^*) = (f_1{}^*, \ldots, f_{t^*}^*)$ heißen *lösungsäquivalent*, wenn $\mathrm{NG}\left((\mathfrak{a})\right) = \mathrm{NG}\left((\mathfrak{a}^*)\right)$ ist.

Definition 6. Zwei nichtlineare homogene Gleichungssysteme

$$\left.\begin{array}{lcl} F_1(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0, & & F_1{}^*(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{und} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_s(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0 & & F_{s^*}^*(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{array}\right\} \tag{17}$$

mit den zugehörigen H-Idealen $\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_s)$ und $\mathfrak{a}^* = (F_1{}^*, \ldots, F_{s^*}^*)$ heißen *idealäquivalent*, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^*$ ist.

Definition 7. Zwei nichtlineare homogene Gleichungssysteme (17) mit den zugehörigen H-Idealen $\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_s)$ und $\mathfrak{a}^* = (F_1{}^*, \ldots, F_{s^*}^*)$ heißen *lösungsäquivalent*, wenn $\mathrm{NG}\,(\mathfrak{a}) = \mathrm{NG}\,(\mathfrak{a}^*)$ ist.

Die Definitionen 4 und 5 bzw. 6 und 7 sind jetzt keineswegs äquivalent. Das liegt daran, daß sich (15) nicht einfach übertragen läßt (vgl. 3.7., 3.11.).

3.2. Allgemeine Nullstellen

Definition 8. Ist $(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ ein inhomogenes P-Ideal und $(\mathfrak{a}) \neq (1)$, so heißt $(y_1, \ldots, y_n)$ eine *allgemeine Nullstelle* von $(\mathfrak{a})$, wenn gilt:

$$f(y_1, \ldots, y_n) = 0 \Leftrightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathfrak{a}). \tag{18}$$

Bemerkungen zu Definition 8:

1. Die Forderung $(\mathfrak{a}) \neq (1)$ ist offenbar notwendig für die Existenz einer Nullstelle des P-Ideals $(\mathfrak{a})$.

2. In der Richtung $(\Leftarrow)$ ist dies die übliche Definition der Nullstelle; die entscheidende Forderung ist die Gültigkeit von $(\Rightarrow)$.

3. In (18) bedeutet $f(y_1, \ldots, y_n) = 0$ das identische Verschwinden in gewissen Parametern $t_1, \ldots, t_d$, kurz id. in $t_1, \ldots, t_d$, von denen $y_1, \ldots, y_n$ noch abhängen; vgl. (10) und (11) für den linearen Fall.

Satz 1. *Besitzt das P-Ideal* $(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *eine allgemeine Nullstelle, so ist* $(\mathfrak{a})$ *ein Primideal.*

Beweis. Wir können hier ebenso schließen wie in Kap. 1, 2.2., Beispiel 3, wo der Satz 7 die entsprechende Aussage für H-Ideale darstellt.

Es ist also keine Einschränkung, wenn (18) nur für Primideale definiert wird:

Definition 9. Ist $(\mathfrak{p}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ ein inhomogenes Primideal und $(\mathfrak{p}) \neq (1)$, so heißt $(y_1, \ldots, y_n)$ eine *allgemeine Nullstelle* von $(\mathfrak{p})$, wenn gilt:

$$f(y_1, \ldots, y_n) = 0 \Leftrightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathfrak{p}). \tag{19}$$

Entsprechend schließen und definieren wir für H-Ideale:

Definition 10. Ist $\mathfrak{p} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ein homogenes Primideal, so heißt $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ eine *allgemeine Nullstelle* von $\mathfrak{p}$, wenn gilt:

$$F(y_0, y_1, \ldots, y_n) = 0 \Leftrightarrow F(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{p}. \tag{20}$$

Aus den Bemerkungen im Anschluß an (15) folgt dann

Satz 2. *Für lineare Gleichungssysteme gilt:*

1. *Die Begriffe „vollständige Lösung" und „allgemeine Nullstelle" stimmen überein.*
2. *Die zugehörigen Ideale* $(\mathfrak{l})$ *bzw.* $\mathfrak{l}$ *sind Primideale.*

In 3.4. werden wir sehen, daß 1. im nichtlinearen Fall nicht mehr zutrifft.

Bei Betrachtung von linearen Vektor-Parameterdarstellungen in der analytischen Geometrie geht man im allgemeinen weder von (10) noch von (11) aus, vielmehr von Darstellungen der Gestalt

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= c_{10} + t_1 c_{11} + \cdots + t_d c_{1d}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= c_{n0} + t_1 c_{n1} + \cdots + t_d c_{nd} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

und schließt von (21) auf „parameterfreie Gleichungen" (vgl. BREHMER und BELKNER [1], 1.3.1., 4.2.2.). Man fordert dann zweierlei:

(A) Die Vektoren $\begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} c_{1d} \\ \vdots \\ c_{nd} \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig.

(B) Die Parameter $t_1, \ldots, t_d$ können *beliebig* gesetzt werden; es existiert also keine Abhängigkeit $f(t_1, \ldots, t_d) = 0$ zwischen $t_1, \ldots, t_d$, wobei $f(u_1, \ldots, u_d) \in \mathbf{K}[u_1, \ldots, u_d]$ ist.

Aus (B) folgt, daß es dann *wenigstens eine* Kombination $i_1, \ldots, i_d$ derart gibt, daß $y_{i_1}, \ldots, y_{i_d}$ als Parameter gesetzt werden können, denn andernfalls würde aus der Abhängigkeit von $y_{i_1}, \ldots, y_{i_d}$ eine Abhängigkeit $f(t_1, \ldots, t_d) = 0$ folgen im Widerspruch zu (B). Bei geeigneter Numerierung der Variablen folgt dann wieder (10) bzw. (11).

Zusammenfassend ergibt sich also aus (A) und (B):

Satz 3. *Bei linearen Parameterdarstellungen* (21) *mit* (A) *und* (B) *sind die Parameter* $t_1, \ldots, t_d$ *in dieser Anzahl unbedingt erforderlich, um* (19) *zu sichern.*

Entsprechend müssen im nichtlinearen Fall die y_i in einer allgemeinen Nullstelle $(y_1, \ldots, y_n)$ bzw. $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ auch noch von Parametern $t_1, \ldots, t_d$ bzw. $t_0, t_1, \ldots, t_d$ abhängen, um (19) bzw. (20) zu sichern.

Definition 11. Die Parameter $t_1, \ldots, t_d$ in einer allgemeinen Nullstelle

$$\big(y_1(t_1, \ldots, t_d), \ldots, y_n(t_1, \ldots, t_d)\big)$$

eines inhomogenen Primideals $(\mathfrak{p}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ heißen *unbedingt erforderlich*, wenn es nicht möglich ist, mit einer kleineren Anzahl die Bedingung (19) zu erfüllen.

Definition 12. Die Parameter $t_0, t_1, \ldots, t_d$ in einer allgemeinen Nullstelle

$$\big(y_0(t_0, t_1, \ldots, t_d), \ldots, y_n(t_0, t_1, \ldots, t_d)\big)$$

eines homogenen Primideals $\mathfrak{p} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ heißen *unbedingt erforderlich*, wenn es nicht möglich ist, mit einer kleineren Anzahl die Bedingung (20) zu erfüllen.

Beispiel für den homogenen Fall.

$$y_0 = t_0^m,\ y_1 = t_0^{m-1}(\tau_1 + \tau_2),\ y_2 = t_0(\tau_1 + \tau_2)^{m-1},\ y_3 = (\tau_1 + \tau_2)^m.$$

Hier kann $\tau_1 + \tau_2 = t_1$ gesetzt werden, und es ist $d = 1$.

Ebenso wie im Fall linearer Parameterdarstellungen folgt dann

Satz 4. *Ist* $(\mathfrak{p})$ *ein inhomogenes Primideal aus* $\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *mit der allgemeinen Nullstelle* $(y_1, \ldots, y_n)$ *und*

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(t_1, \ldots, t_d), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= y_n(t_1, \ldots, t_d), \end{aligned}$$

worin $t_1, \ldots, t_d$ unbedingt erforderliche Parameter sind, so existiert wenigstens eine Kombination $i_1, \ldots, i_d$ derart, daß $y_{i_1}, \ldots, y_{i_d}$ als Parameter gesetzt werden können, also

$$\left.\begin{array}{l} y_{i_1} = t_1^*, \\ y_{i_2} = t_2^*, \\ \cdots\cdots \\ y_{i_d} = t_d^*, \end{array}\right\} \tag{22}$$

und die übrigen y_k algebraische Funktionen von $y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_d}$ sind, d. h.,

$$y_k \notin \{y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_d}\}$$

genügt einer algebraischen Gleichung

$$f(y_{i_1}, \ldots, y_{i_d}, y_k) = 0. \tag{23}$$

Definition 13. Ist $(\mathfrak{p})$ ein inhomogenes Primideal aus $\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ und gilt (22) und (23), so heißt $i_1, i_2, \ldots, i_d$ eine *geeignete Numerierung* für $(\mathfrak{p})$.

Satz 5. *Ist $\mathfrak{p}$ ein homogenes Primideal aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ mit der allgemeinen Nullstelle $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ und*

$$\begin{array}{l} y_0 = y_0(t_0, t_1, \ldots, t_d), \\ y_1 = y_1(t_0, t_1, \ldots, t_d), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = y_n(t_0, t_1, \ldots, t_d), \end{array}$$

worin $t_0, t_1, \ldots, t_d$ unbedingt erforderliche Parameter sind, so existiert wenigstens eine Kombination $i_0, i_1, \ldots, i_d$ derart, daß $y_{i_0}, y_{i_1}, \ldots, y_{i_d}$ als Parameter gesetzt werden können, also

$$\left.\begin{array}{l} y_{i_0} = t_0^*, \\ y_{i_1} = t_1^*, \\ \cdots\cdots \\ y_{i_d} = t_d^*, \end{array}\right\} \tag{24}$$

und die übrigen y_k algebraische Funktionen von $y_{i_0}, y_{i_1}, \ldots, y_{i_d}$ sind, d. h.,

$$y_k \notin \{y_{i_0}, y_{i_1}, \ldots, y_{i_d}\}$$

genügt einer homogenen algebraischen Gleichung $F(y_{i_0}, y_{i_1}, \ldots, y_{i_d}) = 0$.

Definition 14. Ist $\mathfrak{p}$ ein homogenes Primideal aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ und gilt (24) und $F(y_{i_0}, y_{i_1}, \ldots, y_{i_d}, y_k) = 0$ für alle $y_k \notin \{y_{i_0}, y_{i_1}, \ldots, y_{i_d}\}$, so heißt $i_0, i_1, \ldots, i_d$ eine *geeignete Numerierung* für $\mathfrak{p}$.

3.3. Eindeutigkeit von d, Austauschsatz, Dimension von $\mathfrak{p}$

Satz 6. *Die Anzahl d der unbedingt erforderlichen Parameter in den allgemeinen Nullstellen eines inhomogenen Primideals* $(\mathfrak{p}) \subset \mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Es seien

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = y_1(t_1, \ldots, t_d), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = y_n(t_1, \ldots, t_d) \end{array}\right\} \tag{25}$$

und

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = y_1(\tau_1, \ldots, \tau_\delta), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = y_n(\tau_1, \ldots, \tau_\delta) \end{array}\right\} \tag{26}$$

zwei verschiedene allgemeine Nullstellen von $(\mathfrak{p})$ *mit jeweils unbedingt erforderlichen Parametern*. Es sei o. B. d. A.

$$\delta \leqq d. \tag{27}$$

Aus (25) folgt dann eine „geeignete Numerierung"

$$\left.\begin{array}{l} y_{i_1} = t_1^*, \\ \ldots\ldots \\ y_{i_d} = t_d^*, \end{array}\right\} \tag{22}$$

wobei nach dem vorher Gesagten mit $t_1, \ldots, t_d$ auch $t_1^*, \ldots, t_d^*$ unbedingt erforderliche Parameter sind. Die Parameterdarstellung (26) beinhaltet für die Indizes $i_1, \ldots, i_d$

$$\left.\begin{array}{l} y_{i_1} = y_{i_1}(\tau_1, \ldots, \tau_\delta), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{i_d} = y_{i_d}(\tau_1, \ldots, \tau_\delta); \end{array}\right\} \tag{28}$$

aus (22) und (28) folgt

$$\left.\begin{array}{l} t_1^* = y_{i_1}(\tau_1, \ldots, \tau_\delta), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_d^* = y_{i_d}(\tau_1, \ldots, \tau_\delta); \end{array}\right\} \tag{29}$$

mithin gilt wegen (27) im Fall $\delta < d$ nicht, daß die Parameter $t_1^*, \ldots, t_d^*$ und damit $t_1, \ldots, t_d$ unbedingt erforderlich sind im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Es muß also $\delta = d$ sein, q. e. d.

Entsprechend folgt der Beweis für H-Ideale mit der „geeigneten Numerierung“

$$\left.\begin{aligned} y_{i_0} &= t_0^*, \\ y_{i_1} &= t_1^*, \\ &\cdots\cdots \\ y_{i_d} &= t_d^*, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

wobei $t_0^*, t_1^*, \ldots, t_d^*$ unbedingt erforderliche Parameter sind.

Wir zeigen nun, daß in (23), also in $f(y_{i_1}, \ldots, y_{i_d}, y_k) = 0$, die Nullstellenkoordinaten $y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_d}, y_k$ durch irgendwelche $d+1$ Nullstellenkoordinaten $y_{k_1}, \ldots, y_{k^d}, y_{k_{d+1}}$ ausgetauscht werden können; daher werden die beiden folgenden Sätze auch als *Austauschsatz* bezeichnet:

Satz 7. *Ist* $(y_1, \ldots, y_n)$ *die allgemeine Nullstelle eines inhomogenen Primideals* $(\mathfrak{p}) \subset \mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *mit* $y_i = y_i(t_1, \ldots, t_d)$ $(i = 1, \ldots, n)$ *und sind* $t_1, \ldots, t_d$ *unbedingt erforderliche Parameter, so existiert für jede Kombination* $k_1, \ldots, k_d, k_{d+1}, \ldots, k_{d+h}$ *von* $(1, 2, \ldots, n)$ *mit* $1 \leqq h \leqq n - d$ *wenigstens ein Polynom* $f \in (\mathfrak{p})$ *mit*

$$f(y_{k_1}, \ldots, y_{k_{d+h}}) = 0, \tag{31}$$

also speziell für $h = 1$:

$$f(y_{k_1}, \ldots, y_{k_{d+1}}) = 0. \tag{32}$$

Beweis. Andernfalls könnte man $y_{k_1} = t_1, \ldots, y_{k_{d+h}} = t_{d+h}$ setzen und hätte $d+h$ unbedingt erforderliche Parameter im Widerspruch zur Eindeutigkeit von d gemäß Satz 6.

Entsprechend folgt

Satz 8. *Ist* $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ *die allgemeine Nullstelle eines primen* H*-Ideals*

$$\mathfrak{p} \subset \mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

mit $y_i = y_i(t_0, t_1, \ldots, t_d)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ *und sind* $t_0, t_1, \ldots, t_d$ *unbedingt erforderliche Parameter, so existiert für jede Kombination* $k_0, \ldots, k_d, \ldots, k_{d+h}$ *von* $(0, 1, \ldots, n)$ *mit* $1 \leqq h \leqq n - d$ *wenigstens eine Form* $F \in \mathfrak{p}$ *mit*

$$F(y_{k_0}, y_{k_1}, \ldots, y_{k_{d+h}}) = 0, \tag{33}$$

also speziell für $h = 1$:

$$F(y_{k_0}, y_{k_1}, \ldots, y_{k_{d+1}}) = 0. \tag{34}$$

Definition 15. Ist $(\mathfrak{p}) \subset \mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ ein inhomogenes Primideal, so heißt die Anzahl d der unbedingt erforderlichen Parameter in jeder allgemeinen Nullstelle von $(\mathfrak{p})$ die *Dimension* von $(\mathfrak{p})$.

Dagegen setzen wir für H-Ideale fest:

Definition 16. Ist $\mathfrak{p} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ein primes H-Ideal, so heißt *die um 1 verminderte Anzahl* der unbedingt erforderlichen Parameter in jeder allgemeinen Nullstelle von $\mathfrak{p}$ die (*homogene*) *Dimension* von $\mathfrak{p}$.

Aus den Eigenschaften (22) und (32) für prime P-Ideale und (30) und (34) für prime H-Ideale werden wir in 4.5. eine axiomatische Definition der Dimension (die *Gröbnerschen Dimensionsaxiome*) für beliebige P-Ideale bzw. H-Ideale *ohne* Benutzung des Begriffes „allgemeine Nullstelle" herleiten und am Spezialfall der Ideale mit linearen Basispolynomen bzw. mit linearen Basisformen erläutern.

Zuvor noch einige ergänzende Bemerkungen zur Nullstellentheorie.

3.4. Allgemeine Nullstellen und vollständige Lösungen

Wir beweisen nun den in 3.2. angekündigten

Satz 9. *Die Begriffe „allgemeine Nullstelle" und „vollständige Lösung" fallen im nichtlinearen Fall nicht zusammen, d. h., es gibt spezielle Nullstellen, die aus der allgemeinen Nullstelle durch Spezialisierung der Parameter nicht gewonnen werden können.*

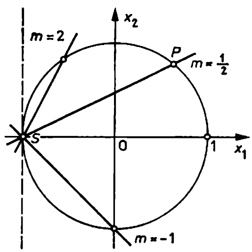


Abb. 1

Beweis. Dazu genügt ein Beispiel. Wir wählen dafür die rationale Parameterdarstellung des Einheitskreises, der durch $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ gegeben ist (vgl. Abb. 1). Die Geradenschar durch den Punkt $S(-1,0)$ ist durch $x_2 = m(x_1 + 1)$ gegeben; jede Gerade dieser Schar hat außer S noch einen weiteren Schnittpunkt

$P(y_1, y_2)$ mit

$$y_1 = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}, \qquad y_2 = \frac{2m}{1 + m^2}.$$

Hieraus folgt $y_1^2 + y_2^2 - 1 = 0$ und $x_1^2 + x_2^2 - 1 \in (x_1^2 + x_2^2 - 1)$; die obige rationale Parameterdarstellung des Einheitskreises ist also eine allgemeine Nullstelle des zugehörigen Ideals $(x_1^2 + x_2^2 - 1) \subset \mathbf{C}[x_1, x_2]$, bei welcher m (anstelle von t) der Parameter ist. Lediglich der Punkt S kann dabei durch Spezialisierung von m nicht gewonnen werden, denn aus $\dfrac{1 - m^2}{1 + m^2} = -1$ würde die widersprüchliche Beziehung $1 - m^2 = -1 - m^2$ folgen.

In diesem Beispiel war die allgemeine Nullstelle rational.

3.5. Existenz allgemeiner Nullstellen

Wir übertragen hierzu den Existenzbeweis für Nullstellen ϑ irreduzibler Polynome $p(x) \in K[x]$ aus MfL Bd. 3, 14.5.2. Dort also wurden das Primideal $\big(p(x)\big) \subset K[x]$ und gemäß der Kongruenzrechnung (vgl. 1.2.) Restklassen mod $\big(p(x)\big)$ betrachtet. Es galt dann

$$\left.\begin{aligned} [f(x)] &= \big[f([x])\big], \\ [p(x)] &= [0], \\ \big[p([x])\big] &= [0]. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Der Restklassenkörper $K[x]/\big(p(x)\big)$ enthielt einen vermöge $a \mapsto \bar{a} = [a]$ zu K isomorphen Teilkörper $\bar{K}$:

$$\begin{array}{cc} & K[x]/\big(p(x)\big) \\ & \updownarrow \\ K \leftrightarrows & \bar{K} \end{array}$$

Das in MfL Bd. 3, 14.5.2., im Anschluß an (9) beschriebene *Ersetzungsverfahren* sicherte dann die Existenz eines Erweiterungskörpers $K^* = K(\vartheta)$ von K mit

$$\begin{array}{ccc} K^* & \leftrightarrows & K[x]/\big(p(x)\big) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ K & \leftrightarrows & \bar{K} \end{array}$$

Dafür galt $f([x]) \mapsto \big[f([x])\big]$ und mithin wegen (35)

$$f([x]) = 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv 0 \bmod \big(p(x)\big)$$

oder

$$f([x]) = 0 \Leftrightarrow f(x) \in \big(p(x)\big), \tag{36}$$

insbesondere also

$$p([x]) = 0. \tag{37}$$

In MfL Bd. 3, 14.5.2., wurde dann das Element $\bar{x} = [x]$ des Körpers K^* mit ϑ und der Körper K^* selbst mit $K(\vartheta)$ bezeichnet; dann geht (37) über in $p(\vartheta) = 0$ und (36) in

$$f(\vartheta) = 0 \Leftrightarrow f(x) \in \big(p(x)\big). \tag{38}$$

Mit (38) war dann also die Existenz der Nullstelle ϑ nachgewiesen. Bei diesem Verfahren wurde benutzt, daß $K[x]/\big(p(x)\big)$ ein Körper ist; dies war durch die Primidealeigenschaft von $p(x)$ und diese durch die Irreduzibilität von $p(x)$ gesichert. Ferner wurde mit Restklassen nach Idealen gerechnet.

Letzteres ist gemäß 1.2. auf inhomogene Primideale $(\mathfrak{p}) \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ mit $(\mathfrak{p}) \neq (1)$ sofort übertragbar. Dagegen ist $K[x_1, \ldots, x_n]/(\mathfrak{p})$ im allgemeinen kein Körper, sondern gemäß Kap. 2, (3), ein Integritätsbereich, zu welchem wir einen Quotientenkörper $Q\big(K[x_1, \ldots, x_n]/(\mathfrak{p})\big)$ gemäß MfL Bd. 3, 13.6., bilden können.

Alle weiteren Überlegungen lassen sich fast wörtlich übertragen; die Restklassenbildung erfolgt gemäß der Basisdarstellung $(\mathfrak{p}) = (f_1, \ldots, f_t)$ und führt zur Existenz eines Körpers K^* mit

$$\begin{array}{ccc} K^* & \leftrightarrows & Q\big(K[x_1, \ldots, x_n]/(\mathfrak{p})\big) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ K & \leftrightarrows & \bar{K} \end{array}$$

Analog zu (38) existieren in K^* Elemente $y_1, y_2, \ldots, y_n$ mit:

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \Leftrightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathfrak{p}). \tag{39}$$

Nach (19) bedeutet nun aber (39), daß $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ eine allgemeine Nullstelle ist; wir haben also den

Satz 10. *Jedes inhomogene Primideal* $(\mathfrak{p}) \in K[x_1, \ldots, x_n]$ *mit* $(\mathfrak{p}) \neq (1)$ *besitzt in einem Erweiterungskörper* $K^* \supseteq K$ *eine allgemeine Nullstelle.*

Entsprechend gilt

Satz 11. *Jedes homogene Primideal* $\mathfrak{p} \subset K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *mit* $\mathfrak{p} \neq (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *besitzt in einem Erweiterungskörper* $K^* \supset K$ *eine nichttriviale allgemeine Nullstelle.*

Die Beziehung (39) ist dann zu ersetzen durch:

$$F(y_0, y_1, \ldots, y_n) = 0 \Leftrightarrow F(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{p} \tag{40}$$

und beweist gemäß (20) wiederum, daß die Nullstelle allgemein ist.

Bemerkung. Setzen wir $K = \mathbf{K}$ als algebraisch abgeschlossen voraus, so folgt im Fall $K^* \supset \mathbf{K}$ die Existenz von Parametern in K^*, die keiner über $\mathbf{K}$ algebraischen Gleichung genügen; K^* heißt dann eine *transzendente Erweiterung* von $\mathbf{K}$ (vgl. MfL Bd. 3, 14.5. und 14.1.).

Satz 12 (vgl. VAN DER WAERDEN [8], § 99, Aufgabe 4). *Ist* $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *eine allgemeine Nullstelle des inhomogenen Primideals* $(\mathfrak{p}) \subset K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, *so ist eine allgemeine Nullstelle des äquivalenten H-Ideals* $\mathfrak{p} \subset K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *durch*

$$(y_0, y_0 z_1, y_0 z_2, \ldots, y_0 z_n) \tag{40}$$

gegeben.

Beweis. Aus Kap. 1, (38), folgt

$$\begin{aligned}F(y_0, y_1, \ldots, y_n) &= F(y_0, y_0 z_1, \ldots, y_0 z_n)\\ &= y_0^{h(f)} \cdot f\left(\frac{y_1}{y_0}, \frac{y_2}{y_0}, \ldots, \frac{y_n}{y_0}\right)\\ &= y_0^{h(f)} \cdot f\left(\frac{y_0 z_1}{y_0}, \frac{y_0 z_2}{y_0}, \ldots, \frac{y_0 z_n}{y_0}\right)\\ &= y_0^{h(f)} \cdot f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = y_0^{h(f)} \cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

und entsprechend folgt $F(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{p}$ aus $f(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathfrak{p})$. (40) erfüllt also die Bedingungen (20), mithin ist durch (40) eine allgemeine Nullstelle gegeben.

Die Nullstelle (40) ist jedoch nicht immer am günstigsten. Dafür geben wir ein Beispiel an.

Beispiel. Wir betrachten wieder einmal in $\mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ das Primideal

$$\mathfrak{p} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$$

mit

$$F_1 = x_0 x_3 - x_1 x_2, \quad F_2 = x_0^2 x_2 - x_1^3, \quad F_3 = x_0 x_2^2 - x_1^2 x_3, \quad F_4 = x_1 x_3^2 - x_2^3$$

und der allgemeinen Nullstelle

$$(y_0, y_1, y_2, y_3) = (t_0^4, t_0^3 t_1, t_0 t_1^3, t_1^4).$$

Setzen wir jetzt $x_0 = 1$, also auch $t_0 = 1$, so geht $\mathfrak{p}$ in $(\mathfrak{p}) = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ über. Das ist eine H-Basis, aber keine Minimalbasis; f_3 und f_4 können gestrichen werden. Es ist also $(\mathfrak{p}) = (f_1, f_2)$ mit $f_1 = x_3 - x_1 x_2$, $f_2 = x_2 - x_1^3$ mit der allgemeinen Nullstelle $(z_1, z_2, z_3) = (\tau_1, \tau_1^3, \tau_1^4)$. Das äquivalente H-Ideal ist gerade wieder $\mathfrak{p} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$; nach (40) ergibt sich jedoch die allgemeine Nullstelle

$$y_0 = \tau_0, \quad y_1 = \tau_0 \tau_1, \quad y_2 = \tau_0 \tau_1^3, \quad y_3 = \tau_0 \tau_1^4.$$

Ersetzen wir hierin $\tau_0 = t_0^4$, $\tau_1 = \dfrac{t_1}{t_0}$, so erhalten wir wieder die eingangs genannte allgemeine Nullstelle $(t_0^4, t_0^3 t_1, t_0 t_1^3, t_1^4)$.

3.6. Eigenschaften von Nullstellengebilden

Satz 13. *Ist* $(\mathfrak{p}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *ein inhomogenes Primideal mit* $(\mathfrak{p}) \neq (1)$, *so ist* $\mathrm{NG}\big((\mathfrak{p}^x)\big) \neq \emptyset$ *für jedes* $x \in \mathbf{N}^*$, *und es gilt*

$$\mathrm{NG}\big((\mathfrak{p}^x)\big) = \mathrm{NG}\big((\mathfrak{p})\big). \tag{41}$$

Beweis. Die Existenz von $\mathrm{NG}\big((\mathfrak{p})\big)$ folgt aus Satz 10. Ist $(\mathfrak{p}) = (f_1, \ldots, f_t)$, so hat $\big((\mathfrak{p}^x)\big)$ nach Kap. 1, (72), die Basis

$$\big((\mathfrak{p}^x)\big) = (f_1^x, f_1^{x-1}f_2, \ldots, f_t^x).$$

Ist $(y_1, \ldots, y_n)$ die allgemeine Nullstelle von $(\mathfrak{p})$, so ist $(y_1, \ldots, y_n)$ Lösung des inhomogenen Gleichungssystems

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_t(x_1, \ldots, x_n) = 0, \end{array}\right\} \tag{42}$$

aber auch von

$$\left.\begin{array}{l} f_1^x(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ f_1^{x-1}f_2(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_t^x(x_1, \ldots, x_n) = 0; \end{array}\right\} \tag{43}$$

also ist $\mathrm{NG}\big((\mathfrak{p})\big) \subseteqq \mathrm{NG}\big((\mathfrak{p}^x)\big)$. Aber auch umgekehrt ist jede Lösung von (43) zugleich Lösung von (42), also $\mathrm{NG}\big((\mathfrak{p}^x)\big) \subseteqq \mathrm{NG}\big((\mathfrak{p})\big)$, woraus insgesamt (41) folgt.

Entsprechend schließt man für H-Ideale und hat den

Satz 14. *Ist* $\mathfrak{p} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein primes H-Ideal, so gilt für jedes* $x \in \mathbf{N}^*$

$$\mathrm{NG}(\mathfrak{p}^x) = \mathrm{NG}(\mathfrak{p}). \tag{44}$$

Die Sätze 13 und 14 zeigen wegen (41) und (44), daß das Nullstellengebilde weder für ein P-Ideal noch für ein H-Ideal charakteristisch ist.

Satz 15. *Sind* $(\mathfrak{a})$ *und* $(\mathfrak{b})$ *vom Einheitsideal verschiedene P-Ideale aus* $\mathbf{K}[x_1,\ldots,x_n]$ *mit*

$$(\mathfrak{a}) \subseteqq (\mathfrak{b}) \tag{45}$$

und existiert $\mathrm{NG}\big((\mathfrak{b})\big)$, *so existiert auch* $\mathrm{NG}\big((\mathfrak{a})\big)$, *und es gilt*

$$\mathrm{NG}\big((\mathfrak{a})\big) \supseteqq \mathrm{NG}\big((\mathfrak{b})\big). \tag{46}$$

Beweis. Ist $(\mathfrak{a}) = (f_1, \ldots, f_t)$ und $(\mathfrak{b}) = (g_1, \ldots, g_h)$, so gilt wegen (45)

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= c_{11} g_1 + \cdots + c_{1h} g_h, \\ f_2 &= c_{21} g_1 + \cdots + c_{2h} g_h, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_t &= c_{t1} g_1 + \cdots + c_{th} g_h; \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

die vorausgesetzte Existenz von NG $\big((\mathfrak{b})\big)$ bedeutet die Existenz von Nullstellen $(y_1, \ldots, y_n)$ für $g_1, \ldots, g_h$; diese sind wegen (47) dann auch Nullstellen von $f_1, \ldots, f_t$, mithin existiert NG $\big((\mathfrak{a})\big)$. Aus (47) folgt aber auch, daß nicht jede Nullstelle von $(\mathfrak{a})$ eine Nullstelle von $(\mathfrak{b})$ zu sein braucht; es gilt also nur (46).

Entsprechend folgt

Satz 16. *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zwei H-Ideale aus* $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *mit*

$$\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{b} \tag{48}$$

und existiert NG $(\mathfrak{b})$, *so existiert auch* NG $(\mathfrak{a})$, *und es gilt*

$$\text{NG}\,(\mathfrak{a}) \supseteqq \text{NG}\,(\mathfrak{b}). \tag{49}$$

Zusatz. Aus $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ folgt natürlich NG $(\mathfrak{a}) =$ NG $(\mathfrak{b})$; aus $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ kann jedoch NG $(\mathfrak{a}) =$ NG $(\mathfrak{b})$ folgen (vgl. (44) (bzw. (41)) für $x \geqq 2$).

Satz 17. *Sind* $(\mathfrak{a}), (\mathfrak{b}), (\mathfrak{c})$ *vom Einheitsideal verschiedene P-Ideale aus* $\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *mit*

$$(\mathfrak{a}) \subseteqq (\mathfrak{b}) \subseteqq (\mathfrak{c}), \tag{50}$$

existieren NG $\big((\mathfrak{a})\big)$ *und* NG $\big((\mathfrak{c})\big)$ *und ist ferner*

$$\text{NG}\,\big((\mathfrak{a})\big) = \text{NG}\,\big((\mathfrak{c})\big), \tag{51}$$

so existiert auch NG $\big((\mathfrak{b})\big)$, *und es gilt auch*

$$\text{NG}\,\big((\mathfrak{a})\big) = \text{NG}\,\big((\mathfrak{b})\big) = \text{NG}\,\big((\mathfrak{c})\big). \tag{52}$$

Beweis. Die Existenz von NG $\big((\mathfrak{b})\big)$ folgt gemäß Satz 15. Aus $(\mathfrak{a}) \subseteqq (\mathfrak{b})$ erhalten wir NG $\big((\mathfrak{a})\big) \supseteqq$ NG $\big((\mathfrak{b})\big)$ nach (46), aus $(\mathfrak{b}) \subseteqq (\mathfrak{c})$ folgt NG $\big((\mathfrak{b})\big) \supseteqq$ NG $\big((\mathfrak{c})\big)$ ebenfalls nach (46), also NG $\big((\mathfrak{a})\big) \supseteqq$ NG $\big((\mathfrak{b})\big) \supseteqq$ NG $\big((\mathfrak{c})\big)$; wegen (51) folgt daraus

$$\text{NG}\,\big((\mathfrak{a})\big) \supseteqq \text{NG}\,\big((\mathfrak{b})\big) \supseteqq \text{NG}\,\big((\mathfrak{a})\big),$$

woraus NG $\big((\mathfrak{a})\big) =$ NG $\big((\mathfrak{b})\big)$ folgt. Wegen (51) folgt daraus schließlich (52).

Entsprechend folgt

Satz 18. *Sind* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *und* $\mathfrak{c}$ *drei H-Ideale aus* $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *mit*

$$\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{c}, \tag{53}$$

existieren NG $(\mathfrak{a})$ *und* NG $(\mathfrak{c})$ *und ist ferner*

$$\mathrm{NG}\,(\mathfrak{a}) = \mathrm{NG}\,(\mathfrak{c}), \tag{54}$$

so existiert auch NG $(\mathfrak{b})$, *und es gilt*

$$\mathrm{NG}\,(\mathfrak{a}) = \mathrm{NG}\,(\mathfrak{b}) = \mathrm{NG}\,(\mathfrak{c}). \tag{55}$$

Satz 19. *Ist* $(\mathfrak{r}) \neq (1)$ *ein* $(\mathfrak{p})$*-quasiprimäres P-Ideal aus* $\mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$, *so existiert* NG $\big((\mathfrak{r})\big)$, *und es ist*

$$\mathrm{NG}\,\big((\mathfrak{r})\big) = \mathrm{NG}\,\big((\mathfrak{p})\big). \tag{56}$$

Beweis. Dies folgt aus $(\mathfrak{p}^\varrho) \subseteqq (\mathfrak{r}) \subseteqq (\mathfrak{p})$ nach Kap. 2, (11), ferner aus (41) und Satz 17.

Wieder gilt entsprechend:

Satz 20. *Ist* $\mathfrak{r}$ *ein* $\mathfrak{p}$*-quasiprimäres H-Ideal aus* $\mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, *so existiert* NG $(\mathfrak{r})$, *und es ist*

$$\mathrm{NG}\,(\mathfrak{r}) = \mathrm{NG}\,(\mathfrak{p}). \tag{57}$$

Da Primärideale spezielle quasiprimäre Ideale sind, gilt auch der

Satz 21. *Ist* $(\mathfrak{q}) \neq (1)$ *ein* $(\mathfrak{p})$*-primäres P-Ideal aus* $\mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$, *so existiert* NG $\big((\mathfrak{q})\big)$, *und es ist*

$$\mathrm{NG}\,\big((\mathfrak{q})\big) = \mathrm{NG}\,\big((\mathfrak{p})\big). \tag{58}$$

Satz 22. *Ist* $\mathfrak{q}$ *ein* $\mathfrak{p}$*-primäres H-Ideal aus* $\mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, *so existiert* NG $(\mathfrak{q})$, *und es ist*

$$\mathrm{NG}\,(\mathfrak{q}) = \mathrm{NG}\,(\mathfrak{p}). \tag{59}$$

Satz 23. *Sind* $(\mathfrak{a}), (\mathfrak{b}), (\mathfrak{c})$ *vom Einheitsideal verschiedene P-Ideale aus* $\mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$, *gilt*

$$(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{c}) \tag{60}$$

und existieren NG $\big((\mathfrak{b})\big)$ *und* NG $\big((\mathfrak{c})\big)$, *so existiert auch* NG $\big((\mathfrak{a})\big)$, *und es ist*

$$\mathrm{NG}\,\big((\mathfrak{a})\big) = \mathrm{NG}\,\big((\mathfrak{b})\big) \cup \mathrm{NG}\,\big((\mathfrak{c})\big). \tag{61}$$

Beweis. Aus (60) folgt $(\mathfrak{a}) \subseteqq (\mathfrak{b})$ und $(\mathfrak{a}) \subseteqq (\mathfrak{c})$; nach (46) existiert dann NG $\big((\mathfrak{a})\big)$ mit NG $\big((\mathfrak{a})\big) \supseteqq$ NG $\big((\mathfrak{b})\big)$ und NG $\big((\mathfrak{a})\big) \supseteqq$ NG $\big((\mathfrak{c})\big)$; mithin gilt

$$\mathrm{NG}\,\big((\mathfrak{a})\big) \supseteqq \mathrm{NG}\,\big((\mathfrak{b})\big) \cup \mathrm{NG}\,\big((\mathfrak{c})\big). \tag{62}$$

Wäre nun

$$\mathrm{NG}\,\big((\mathfrak{a})\big) \supset \mathrm{NG}\,\big((\mathfrak{b})\big) \cup \mathrm{NG}\,\big((\mathfrak{c})\big), \tag{63}$$

so existiert eine Nullstelle $(y_1, \ldots, y_n)$ von $(\mathfrak{a})$, welche nicht Nullstelle von $(\mathfrak{b})$ oder $(\mathfrak{c})$ ist, also weder Nullstelle von $(\mathfrak{b})$ noch von $(\mathfrak{c})$ ist. Es existiert also wenigstens ein Polynom $f_1(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathfrak{b})$ mit $f_1(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$, und es existiert wenigstens ein $f_2(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathfrak{c})$ mit $f_2(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$. Dann ist das Polynom

$$g(x_1, \ldots, x_n) := f_1(x_1, \ldots, x_n) \cdot f_2(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c}) \subseteqq (\mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a})$$

wegen Kap. 1, (104) und (60); es wird dann $g(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung, daß $(y_1, \ldots, y_n)$ eine Nullstelle von $(\mathfrak{a})$ ist, also alle Polynome aus $(\mathfrak{a})$ annulliert. Also war die Annahme (63) falsch; aus (62) folgt damit (61), q. e. d.

Satz 24. *Sind* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *und* $\mathfrak{c}$ *drei verschiedene H-Ideale aus* $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, *gilt*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c} \tag{64}$$

und existieren NG $(\mathfrak{b})$ *und* NG $(\mathfrak{c})$, *so existiert auch* NG $(\mathfrak{a})$, *und es ist*

$$\mathrm{NG}\,(\mathfrak{a}) = \mathrm{NG}\,(\mathfrak{b}) \cup \mathrm{NG}\,(\mathfrak{c}). \tag{65}$$

Durch mehrfache Anwendung folgt

Satz 25. *Sind* $(\mathfrak{a}), (\mathfrak{a}_1), \ldots, (\mathfrak{a}_k)$ *vom Einheitsideal verschiedene P-Ideale* aus $\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$, *gilt*

$$(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}_1) \cap \cdots \cap (\mathfrak{a}_k) \tag{66}$$

und existieren NG $((\mathfrak{a}_1)), \ldots,$ NG $((\mathfrak{a}_k))$, *so existiert auch* NG $((\mathfrak{a}))$, *und es ist*

$$\mathrm{NG}\,((\mathfrak{a})) = \mathrm{NG}\,((\mathfrak{a}_1)) \cup \cdots \cup \mathrm{NG}\,((\mathfrak{a}_k)). \tag{67}$$

Satz 26. *Sind* $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k$ *verschiedene H-Ideale aus* $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, *gilt*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_k \tag{68}$$

und existieren NG $(\mathfrak{a}_1), \ldots,$ NG $(\mathfrak{a}_k)$, *so existiert auch* NG $(\mathfrak{a})$, *und es ist*

$$\mathrm{NG}\,(\mathfrak{a}) = \mathrm{NG}\,(\mathfrak{a}_1) \cup \cdots \cup \mathrm{NG}\,(\mathfrak{a}_k). \tag{69}$$

3.7. Der Hilbertsche Nullstellensatz für quasiprimäre und primäre *P*- und *H*-Ideale, *T*-Ideale

Es sei $(\mathfrak{r}) \neq (1)$ ein quasiprimäres P-Ideal aus $\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ mit Rad $(\mathfrak{r}) = (\mathfrak{p})$. Von einem Polynom $f(x_1, \ldots, x_n)$ sei bekannt, daß es an allen Nullstellen $(y_1^*, \ldots, y_n^*)$ von $(\mathfrak{r})$ — welche wegen (56) auch alle Nullstellen von $(\mathfrak{p})$ sind — verschwindet. Dann gilt dies insbesondere für die allgemeine Nullstelle $(y_1, \ldots, y_n)$ von $(\mathfrak{p})$, also $f(y_1, \ldots, y_n) = 0$. Nach Definition 9 der allgemeinen Nullstelle folgt daraus aber

$f(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathfrak{p})$. Wegen $(\mathfrak{p}^\varrho) \subseteqq (\mathfrak{r}) \subseteqq (\mathfrak{p})$ gemäß Kap. 1, (11), gilt dann $f^\varrho(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathfrak{r})$; damit haben wir den

Satz 27 (Spezieller Hilbertscher Nullstellensatz für P-Ideale). *Verschwindet ein Polynom* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *an sämtlichen Nullstellen eines quasiprimären P-Ideals* $(\mathfrak{r}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *mit* $(\mathfrak{r}) \neq (1)$, *so existiert ein Exponent* ϱ *mit* $f^\varrho(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathfrak{r})$.

Entsprechend gilt

Satz 28 (Spezieller Hilbertscher Nullstellensatz für H-Ideale). *Verschwindet eine Form* $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *an sämtlichen Nullstellen eines quasiprimären H-Ideals* $\mathfrak{r} \subset \mathbf{K}[x_0, \ldots, x_n]$, *so existiert ein Exponent* ϱ *mit* $F^\varrho(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{r}$.

Da Primärideale spezielle quasiprimäre Ideale sind, gelten die Sätze 27 und 28 insbesondere für Primärideale.

Definition 17. Ein H-Ideal $\mathfrak{q}_T \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, dessen Nullstellengebilde nur aus der trivialen Nullstelle $y_0 = 0,\ y_1 = 0, \ldots, y_n = 0$ besteht, heißt ein *triviales Ideal* oder kurz *T-Ideal.*

Wir werden uns in 3.12. weiter mit T-Idealen beschäftigen.

3.8. Zur Lösbarkeit inhomogener Gleichungssysteme: Existenz von Nullstellen für P-Ideale bei $(\mathfrak{a}) \neq (1)$

Es sei $(\mathfrak{a}) = (f_1, \ldots, f_t)$ mit $(\mathfrak{a}) \neq (1)$ ein inhomogenes P-Ideal aus $\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ und

$$(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{q}_1) \cap (\mathfrak{q}_2) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_k) \tag{70}$$

eine unverkürzbare Darstellung durch größte Primärkomponenten gemäß Kap. 2, (44), also insbesondere $(\mathfrak{q}_1) \neq (1), \ldots, (\mathfrak{q}_k) \neq (1)$, so existieren nach dem zuvor Gesagten $\mathrm{NG}\big((\mathfrak{q}_1)\big)$, $\mathrm{NG}\big((\mathfrak{q}_2)\big), \ldots, \mathrm{NG}\big((\mathfrak{q}_k)\big)$, und nach (58) gilt

$$\mathrm{NG}\big((\mathfrak{q}_1)\big) = \mathrm{NG}\big((\mathfrak{p}_1)\big),\ \ldots,\ \mathrm{NG}\big((\mathfrak{q}_k)\big) = \mathrm{NG}\big((\mathfrak{p}_k)\big).$$

Dann existiert nach (66) und (67) auch $\mathrm{NG}\big((\mathfrak{a})\big)$. Mithin gilt der

Satz 29. *Jedes vom Einheitsideal verschiedene inhomogene P-Ideal* $(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *besitzt wenigstens eine Nullstelle. Ist* (70) *eine unverkürzbare Darstellung für* $(\mathfrak{a})$, *so ist*

$$\mathrm{NG}\big((\mathfrak{a})\big) = \mathrm{NG}\big((\mathfrak{q}_1) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_k)\big) = \mathrm{NG}\big((\mathfrak{p}_1)\big) \cup \cdots \cup \mathrm{NG}\big((\mathfrak{p}_k)\big). \tag{71}$$

Gehen wir von der Basisdarstellung $(\mathfrak{a}) = (f_1, \ldots, f_t)$ aus, so haben wir als äquivalente Aussage zu Satz 29 den

Satz 30 (Satz von KRONECKER). *Jedes nichtlineare inhomogene algebraische Gleichungssystem*

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_t(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{array}\right\} \tag{72}$$

mit $(f_1, \ldots, f_t) \neq (1)$ *besitzt wenigstens eine Lösung.*

Damit können wir nachträglich die Existenzvoraussetzungen bei den Sätzen von 3.6. fortlassen.

Wir haben hier zum Nachweis der Existenz von Nullstellen die *Lasker-Noetherschen Sätze* benutzt und dadurch den Nachweis auf den irreduziblen Fall (Primärideale bzw. Primideale) zurückgeführt. Das geschah in Analogie zum entsprechenden Nachweis bei Polynomen in einer Variablen.

Demgegenüber beweist jedoch KRONECKER die Existenz von Nullstellen im Fall $(f_1, \ldots, f_t) \neq (1)$ durch Zurückführung auf den Fall *einer* Variablen vermöge sukzessiver Elimination von Variablen; diese *Kroneckersche Eliminationsmethode* steht mithin in Analogie zum Eliminieren von Variablen bei der Lösung linearer Gleichungssysteme. Die Durchführung der Kroneckerschen Eliminationsmethode erfordert indessen komplizierte Variablentransformationen zur Sicherung der Möglichkeit der sukzessiven Ergänzung von Nullstellen, macht jedoch andererseits keinen Gebrauch von den Lasker-Noetherschen Sätzen, die bei unseren Schlüssen wesentlich benutzt wurden.

3.9. Zur nichttrivialen Lösbarkeit homogener Gleichungssysteme: Existenz nichttrivialer Nullstellen für nichttriviale H-Ideale

Für H-Ideale gilt entsprechend der

Satz 31. *Jedes H-Ideal* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *besitzt wenigstens eine Nullstelle.* $\mathfrak{a}$ *besitzt genau dann eine nichttriviale Nullstelle, wenn* $\mathfrak{a}$ *kein T-Ideal ist. Ist* $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k$ *eine unverkürzbare Darstellung, so ist*

$$\mathrm{NG}\,(\mathfrak{a}) = \mathrm{NG}\,(\mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k) = \mathrm{NG}\,(\mathfrak{p}_1) \cup \cdots \cup \mathrm{NG}\,(\mathfrak{p}_k). \tag{73}$$

Gehen wir von der Basisdarstellung $\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_s)$ aus, so haben wir als äquivalente Aussage zu Satz 31 den

Satz 32. *Jedes lineare oder nichtlineare homogene algebraische Gleichungssystem*

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_s(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{array}\right\} \tag{74}$$

besitzt wenigstens eine Lösung. (74) *besitzt genau dann wenigstens eine nichttriviale Lösung, wenn* $(F_1, \ldots, F_s)$ *kein T-Ideal ist.*

Bemerkung. Bezüglich der T-Ideale werden die Sätze 31 und 32 erst dadurch einen Aussagewert bekommen, daß wir T-Ideale auf andere Weise (vor allem als H-Ideale mit der *Hilbertfunktion* Null für genügend große Gradzahlen) werden charakterisieren können.

3.10. Schnitte von Nullstellengebilden

Die Sätze dieses Abschnittes gelten sowohl für homogene als auch für inhomogene Polynomideale. Da wir sie später jedoch vorwiegend für H-Ideale aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ benötigen werden, sollen sie hier auch nur für H-Ideale formuliert werden.

Satz 33. *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zwei H-Ideale aus* $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, *so gilt*

$$\mathrm{NG}\,(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \mathrm{NG}\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathrm{NG}\,(\mathfrak{a}) \cap \mathrm{NG}\,(\mathfrak{b}). \tag{75}$$

Beweis. Es sei $\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_s)$, $\mathfrak{b} = (G_1, \ldots, G_t)$ und

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_s(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ G_1(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_t(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0, \end{array}\right\} \tag{76}$$

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_s(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0, \end{array}\right\} \tag{77}$$

$$\left.\begin{array}{l} G_1(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_t(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{array}\right\} \tag{78}$$

Ist $(y_0, y_1, \ldots, y_n) \in \mathrm{NG}\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, so erfüllt $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ die Gleichungen (76), ferner sowohl (77) als auch (78), mithin $(y_0, y_1, \ldots, y_n) \in \mathrm{NG}\,(\mathfrak{a}) \cap \mathrm{NG}\,(\mathfrak{b})$, also $\mathrm{NG}\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \subseteqq \mathrm{NG}\,(\mathfrak{a}) \cap \mathrm{NG}\,(\mathfrak{b})$. Ist umgekehrt $(y_0, y_1, \ldots, y_n) \in \mathrm{NG}\,(\mathfrak{a}) \cap \mathrm{NG}\,(\mathfrak{b})$, so sind sowohl (77) als auch (78) und mithin auch (76) erfüllt, also

$$(y_0, y_1, \ldots, y_n) \in \mathrm{NG}\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}),$$

und somit $\mathrm{NG}\,(\mathfrak{a}) \cap \mathrm{NG}\,(\mathfrak{b}) \subseteqq \mathrm{NG}\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$; insgesamt gilt also (75).

Durch mehrmalige Anwendung folgt für endlich viele Schnitte

$$\mathrm{NG}\,(\mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_k) = \mathrm{NG}\,(\mathfrak{a}_1) \cap \cdots \cap \mathrm{NG}\,(\mathfrak{a}_k), \tag{79}$$

insbesondere

$$\mathrm{NG}\,(F_1, \ldots, F_s) = \mathrm{NG}\,(F_1) \cap \cdots \cap \mathrm{NG}\,(F_s). \tag{80}$$

Definition 18. Nullstellengebilde von Hauptidealen heißen *Hyperflächen*, für $n = 3$ *Flächen*.

Damit kann (80) folgendermaßen formuliert werden:

Satz 34. *Jedes Nullstellengebilde ist als Schnitt endlich vieler Hyperflächen darstellbar.*

Beispiele im dreidimensionalen Raum: Jede Gerade ist Schnitt zweier Ebenen, jeder Punkt ist Schnitt dreier Ebenen.

3.11. Nullstellengebilde und Radikale

Auch in diesem Abschnitt wollen wir die Sätze nur für H-Ideale formulieren, obwohl sie auch für P-Ideale gültig sind.

Wir wollen zeigen, daß die Klasse aller H-Ideale mit dem gleichen Nullstellengebilde und die Klasse aller Ideale mit dem gleichen Radikal übereinstimmen und daraus einige Folgerungen ziehen. Als erstes beweisen wir

Satz 35. *Sind $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ zwei in $\mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ prime H-Ideale mit gleichen Nullstellengebilden, so stimmen $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ überein:*

$$\mathrm{NG}\,(\mathfrak{p}_1) = \mathrm{NG}\,(\mathfrak{p}_2) \Leftrightarrow \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2. \tag{81}$$

Beweis. Die Richtung ($\Leftarrow$) ist trivial; zum Beweis von ($\Rightarrow$) benutzen wir, daß aus $\mathrm{NG}\,(\mathfrak{p}_1) = \mathrm{NG}\,(\mathfrak{p}_2)$ die Existenz einer gemeinsamen allgemeinen Nullstelle (20) folgt, durch welche aber das Primideal wegen der eineindeutigen Zuordnung gemäß (20) eindeutig bestimmt ist.

Definition 19. Das Nullstellengebilde NG $(\mathfrak{p})$ eines primen Polynomideals heißt eine *irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit* oder *Varietät.*

Wir erinnern an Kap. 2, Satz 31 und (78): Ist

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_m \cap \mathfrak{q}_{m+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k \tag{82}$$

die unverkürzbare Darstellung von $\mathfrak{a}$ durch größte Primärkomponenten derart, daß $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m$ isolierte, hingegen $\mathfrak{q}_{m+1}, \ldots, \mathfrak{q}_k$ eingebettete Primärkomponenten sind, so ist

$$\mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_m \cap \mathfrak{p}_{m+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_k = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_m$$

und nach den beiden Zerlegungssätzen

$$\begin{aligned}&\text{Rad}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_m \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p}_i = \text{Rad}\,\mathfrak{q}_i,\ \mathfrak{q}_i \text{ isolierte Komponenten}\\ &(i = 1, \ldots, m)\end{aligned} \tag{83}$$

die eindeutige und unverkürzbare Darstellung von Rad $\mathfrak{a}$ als Durchschnitt von Primidealen. Aus (82), (66), (67) folgt

$$\begin{aligned}\text{NG}\,(\mathfrak{a}) &= \text{NG}\,(\mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_m \cap \mathfrak{q}_{m+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k)\\ &= \text{NG}\,(\mathfrak{p}_1) \cup \text{NG}\,(\mathfrak{p}_2) \cup \cdots \cup \text{NG}\,(\mathfrak{p}_m) \cup \text{NG}\,(\mathfrak{p}_{m+1}) \cup \cdots \cup \text{NG}\,(\mathfrak{p}_k)\\ &= \text{NG}\,(\mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_m \cap \mathfrak{p}_{m+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_k) = \text{NG}\,(\text{Rad}\,\mathfrak{a})\\ &= \text{NG}\,(\mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_m)\\ &= \text{NG}\,(\mathfrak{p}_1) \cup \cdots \cup \text{NG}\,(\mathfrak{p}_m);\end{aligned}$$

mithin gilt

Satz 36. *Für H-Ideale* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *gilt*

$$\text{NG}\,(\mathfrak{a}) = \text{NG}\,(\text{Rad}\,\mathfrak{a}), \tag{84}$$

sowie

Satz 37. *Die Darstellung von*

$$\text{NG}\,(\mathfrak{a}) = \text{NG}\,(\text{Rad}\,\mathfrak{a}) = \text{NG}\,(\mathfrak{p}_1) \cup \cdots \cup \text{NG}\,(\mathfrak{p}_m) \tag{85}$$

als Vereinigungsmenge endlich vieler Varietäten, worin $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ *die zugehörigen Primideale der isolierten Primärkomponenten von* $\mathfrak{a}$ *sind, ist eindeutig.*

Daraus folgt insbesondere unter Benutzung von Kap. 1, Definition 38, der

Satz 38. *Zwei H-Ideale* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *aus* $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *sind genau dann äquivalent, wenn sie dasselbe Nullstellengebilde haben:*

$$\text{Rad}\,\mathfrak{a} = \text{Rad}\,\mathfrak{b} \Leftrightarrow \text{NG}\,(\mathfrak{a}) = \text{NG}\,(\mathfrak{b}). \tag{86}$$

Unter Verwendung von Definition 7 können wir Satz 38 auch wie folgt formulieren:

Satz 39. *Äquivalente H-Ideale bestimmen lösungsäquivalente homogene Gleichungssysteme und umgekehrt.*

Vermöge (86) können wir nun alle Beziehungen für Radikale auf solche für Nullstellengebilde umschreiben (vgl. Kap. 1). Wir wollen hier nur die wichtigsten vermerken:

Kap. 1, (100), geht über in

$$\mathrm{NG}\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathrm{NG}\,(\mathrm{Rad}\,\mathfrak{a}, \mathrm{Rad}\,\mathfrak{b}), \tag{87}$$

Kap. 1, (102), geht über in

$$\mathrm{NG}\,(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = \mathrm{NG}\,\big((\mathrm{Rad}\,\mathfrak{a}) \cdot (\mathrm{Rad}\,\mathfrak{b})\big), \tag{88}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{NG}\,(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) &= \mathrm{NG}\,(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \mathrm{NG}\,(\mathfrak{a}) \cup \mathrm{NG}\,(\mathfrak{b}) \\ &= \mathrm{NG}\,(\mathrm{Rad}\,\mathfrak{a}) \cup \mathrm{NG}\,(\mathrm{Rad}\,\mathfrak{b}) = \mathrm{NG}\,(\mathrm{Rad}\,\mathfrak{a} \cap \mathrm{Rad}\,\mathfrak{b});\end{aligned} \tag{89}$$

schließlich gehen alle distributiven Gleichungen für Ideale oder Radikale von 1.15. in solche für NG über; wir wollen hier nur die beiden wichtigsten Beziehungen vermerken:

Aus Kap. 1, (118), folgt

$$\mathrm{NG}\,\big((\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \cap \mathfrak{c}\big) = \mathrm{NG}\,(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}, \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) = \mathrm{NG}\,\big((\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c}\big), \tag{90}$$

entsprechend aus Kap. 1, (114),

$$\mathrm{NG}\,(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = \mathrm{NG}\,\big((\mathfrak{a}, \mathfrak{c}) \cap (\mathfrak{b}, \mathfrak{c})\big) = \mathrm{NG}\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}) \cup \mathrm{NG}\,(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = \mathrm{NG}\,(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}, \mathfrak{c}). \tag{91}$$

Sowohl in (90) als auch in (91) tritt jedoch, wie in Kapitel 1 gezeigt wurde, die Gleichheit erst bei der Radikalbildung ein, die wir hier durch die NG-Bildung ersetzen konnten. Für die Ideale galten diese Beziehungen nicht. Dadurch lassen sich viele Unterschiede in der Literatur erklären, wenn vorwiegend geometrisch geschlossen wird.

Dem Leser wird empfohlen, auch alle weiteren distributiven Beziehungen aus Kapitel 1 auf Nullstellengebilde umzuschreiben.

3.12. Der Hilbertsche Nullstellensatz für beliebige *P*-Ideale, *H*-Ideale und *T*-Ideale, triviale Komponenten

Wir haben nun alle notwendigen Hilfsmittel, um diesen wichtigen Satz der Idealtheorie und der algebraischen Geometrie für alle Polynomideale beweisen zu können.

Satz 40 (Hilbertscher Nullstellensatz für P-Ideale). *Ist* $(\mathfrak{a}) \neq (1)$ *ein P-Ideal und* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *ein Polynom aus* $\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$, *so sind folgende Aussagen äquivalent*:

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } f(x_1, \ldots, x_n) \textit{ verschwindet an allen Nullstellen} \\ \quad \textit{von } (\mathfrak{a}), \textit{ also } \mathrm{NG}\,\big((\mathfrak{a})\big) \subseteqq \mathrm{NG}\,\big((f)\big), \\ \text{b) } f(x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{Rad}\,(\mathfrak{a}), \\ \text{c) } \bigvee\limits_{x \in \mathbf{N}^*} f^x(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathfrak{a}). \end{array}\right\} \tag{92}$$

Wir wollen auf einen gesonderten Beweis verzichten, da er völlig analog zu dem für H-Ideale erfolgt. Dazu formulieren wir

Satz 41 (Hilbertscher Nullstellensatz für H-Ideale). *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein H-Ideal und F eine Form aus* $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, *so sind folgende Aussagen äquivalent*:

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } \mathrm{NG}\,(\mathfrak{a}) \subseteqq \mathrm{NG}\,(F), \\ \text{b) } F(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{Rad}\,\mathfrak{a}, \\ \text{c) } \bigvee\limits_{x \in \mathbf{N}^*} F^x(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{a}. \end{array}\right\} \tag{93}$$

Beweis. Die Äquivalenz von b) und c) ist durch die Definition des Begriffes „Radikal“ evident (vgl. Kap. 1, Definition 35). Aus b) folgt nach (49)

$$(F) \subseteqq \operatorname{Rad}\,\mathfrak{a} \Rightarrow \mathrm{NG}\,(\operatorname{Rad}\,\mathfrak{a}) \subseteqq \mathrm{NG}\,(F),$$

also gilt a) nach (85). Aus a) folgt

$$\mathrm{NG}\,(\operatorname{Rad}\,\mathfrak{a}) = \mathrm{NG}\,(\mathfrak{p}_1) \cup \cdots \cup \mathrm{NG}\,(\mathfrak{p}_m) \subseteqq \mathrm{NG}\,(F)$$

wegen (85), also gilt $\mathrm{NG}\,(\mathfrak{p}_i) \subseteqq \mathrm{NG}\,(F)$ für alle $i = 1, \ldots, m$; also verschwindet F an jeder allgemeinen Nullstelle von $\mathfrak{p}_i$, und es gilt $F \in \mathfrak{p}_i$ für alle $i = 1, \ldots, m$, also $F \in \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_m$ und somit b) wegen (83).

Zum Beweis haben wir hier die Lasker-Noetherschen Sätze wesentlich benutzt; der Beweis kann jedoch auch auf andere Weise geführt werden.

Ist nun das H-Ideal speziell ein T-Ideal $\mathfrak{q}_T \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, so haben (vgl. Definition 17) alle Formen nur die triviale Nullstelle $y_0 = 0$, $y_1 = 0, \ldots, y_n = 0$ gemeinsam. Die „Formen“ $x_0, x_1, \ldots, x_n$ verschwinden aber an dieser Nullstelle, welche die einzige Nullstelle von $\mathfrak{q}_T$ ist, also gilt formal: $x_0, x_1, \ldots, x_n$ verschwinden an allen Nullstellen von $\mathfrak{q}_T$. Also gilt nach Satz 41 $x_0 \in \operatorname{Rad}\,\mathfrak{q}_T$, $x_1 \in \operatorname{Rad}\,\mathfrak{q}_T$, $\ldots$, $x_n \in \operatorname{Rad}\,\mathfrak{q}_T$; folglich ist $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \subseteqq \operatorname{Rad}\,\mathfrak{q}_T$. Da nun $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ das umfassendste von (1) verschiedene H-Ideal aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ist, folgt

$$\operatorname{Rad}\,\mathfrak{q}_T = \mathfrak{p}_T := (x_0, x_1, \ldots, x_n), \tag{94}$$

wobei $\mathfrak{p}_T$ ein Primideal ist, weil es die allgemeine Nullstelle $(0, 0, \ldots, 0)$ besitzt.

Nach Satz 41 existieren dann Exponenten $\varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_n$ mit

$$x_0^{\varrho_0} \in \mathfrak{q}_T, \quad x_1^{\varrho_1} \in \mathfrak{q}_T, \quad \ldots, \quad x_n^{\varrho_n} \in \mathfrak{q}_T. \tag{95}$$

Analog zu den Überlegungen in Kap. 1, (78)ff., sind dann alle Potenzprodukte $x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$ vom Grad $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \geqq \tau$ mit $\tau = \varrho_0 + \varrho_1 + \cdots + \varrho_n - n + 1$ (vgl. Kap. 1, (81)) in $\mathfrak{q}_T$ enthalten; die tatsächliche Gradschranke ϱ kann dann wiederum kleiner als τ sein.

Sind umgekehrt von einem Grad ϱ an alle Potenzprodukte in einem H-Ideal $\mathfrak{q}_T$ enthalten, so gilt insbesondere $x_0^\varrho \in \mathfrak{q}_T, x_1^\varrho \in \mathfrak{q}_T, \ldots, x_n^\varrho \in \mathfrak{q}_T$; folglich besitzt dieses H-Ideal $\mathfrak{q}_T$ nur die triviale Nullstelle, ist also ein T-Ideal. Mithin gilt

Satz 42. *Ein H-Ideal $\mathfrak{q}_T \subset \mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ist dann und nur dann ein triviales Ideal (T-Ideal), wenn von einem gewissen Grad ϱ an alle Potenzprodukte in $\mathfrak{q}_T$ enthalten sind.*

Beispiel. Es sei $n = 2$ und $\mathfrak{q}_T = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$ mit

$$F_1 = x_0^2 + x_2^2, \quad F_2 = x_0 x_1, \quad F_3 = x_0 x_2, \quad F_4 = x_1^2 + x_2^2, \quad F_5 = x_1 x_2.$$

Dann sind bereits alle zehn Potenzprodukte dritten Grades in $\mathfrak{q}_T$ enthalten wegen

$$\begin{aligned} x_0^3 &= x_0 F_1 - x_2 F_3, & x_0 x_2^2 &= x_2 F_3, \\ x_0^2 x_1 &= x_0 F_2, & x_1^3 &= x_1 F_4 - x_2 F_5, \\ x_0^2 x_2 &= x_0 F_3, & x_1^2 x_2 &= x_1 F_5, \\ x_0 x_1^2 &= x_1 F_2, & x_1 x_2^2 &= x_2 F_5, \\ x_0 x_1 x_2 &= x_0 F_5, & x_2^3 &= x_2 F_4 - x_1 F_5; \end{aligned}$$

außerdem ergibt sich

$$\begin{aligned} &x_2 F_2 - x_0 F_5 = 0, \\ &x_1 F_3 - x_0 F_5 = 0, \\ &x_1 F_1 - x_0 F_2 - x_2 F_5 = 0, \\ &x_2 F_1 - x_0 F_3 - x_2 F_4 + x_1 F_5 = 0, \\ &x_1 F_2 + x_2 F_3 - x_0 F_4 = 0, \end{aligned}$$

was der Leser selbst nachrechnen oder herleiten möge: Es wurde dazu der Modul der im Ideal enthaltenen Formen dritten Grades aufgestellt und bezüglich der lexikographischen Anordnung der Potenzprodukte der Gaußsche Algorithmus durchgeführt. Hier ist also $\varrho = 3$, $n = 2$, also

$$\mathfrak{p}_T = (x_0, x_1, x_2)$$

und

$$\mathfrak{p}_T^3 \subset \mathfrak{q}_T \subset \mathfrak{p}_T.$$

Entsprechend gilt allgemein: Ist ϱ der genaue Grad, von dem an ein T-Ideal $\mathfrak{q}_T \subset \mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ alle Potenzprodukte ϱ-ten Grades enthält, so gilt wegen (94)

$$\mathfrak{p}_T^\varrho \subseteqq \mathfrak{q}_T \subseteqq \mathfrak{p}_T \tag{96}$$

mit

$$\mathfrak{p}_T = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \tag{97}$$

weil die Basis von $\mathfrak{p}_T{}^\varrho$ gemäß Kap. 1, (72), gerade aus allen Potenzprodukten ϱ-ten Grades in $x_0, x_1, \ldots, x_n$ besteht.

Aus (96) folgt nach der Definition von Kap. 2, (11), zunächst, daß $\mathfrak{q}_T$ ein quasiprimäres Ideal ist. Mithin existiert nach Kap. 2, (82), eine Darstellung

$$\mathfrak{q}_T = \mathfrak{q} \cap \mathfrak{b}, \tag{98}$$

worin Rad $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_T$ und nach Kap. 2, (81), Rad $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{p}_T$ ist, also

$$\operatorname{Rad} \mathfrak{b} \supset (x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

Nun ist aber $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ das umfassendste vom Einheitsideal verschiedene H-Ideal in $\mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, also ist nur der Fall Rad $\mathfrak{b} = (1)$, also $\mathfrak{b} = (1)$ möglich. Mithin kann in (98) $\mathfrak{b}$ gestrichen werden; jedes T-Ideal $\mathfrak{q}_T$ ist also ein Primärideal, wodurch die Bezeichnung $\mathfrak{q}_T$ endlich gerechtfertigt ist. Dies hätte man auch aus Satz 42 durch Nachweis der Primäridealeigenschaften (vgl. Kap. 2, (21)) folgern können.

Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen zu dem

Satz 43. *Jedes triviale H-Ideal* $\mathfrak{q}_T \subset \mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ist primär mit dem zugehörigen Primideal* $\mathfrak{p}_T = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

Definition 20. Tritt in der unverkürzbaren Darstellung durch größte Primärkomponenten eines H-Ideals $\mathfrak{a} \subset \mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$,

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_m \cap \mathfrak{q}_{m+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k \cap \mathfrak{q}_T, \tag{99}$$

ein T-Ideal $\mathfrak{q}_T$ als Primärkomponente auf, so heißt $\mathfrak{q}_T$ eine *triviale Komponente.*

Bemerkung. Da es sich um eine Darstellung durch größte Primärkomponenten handelt, kann es nach Kap. 2, Satz 16 und Satz 28, in jeder solchen Darstellung nur höchstens eine triviale Komponente geben.

Satz 44. *Eine triviale Komponente ist in jeder anderen eingebettet* (vgl. Kap. 2, (52)).

Beweis. Für jedes vom Einheitsideal und von $\mathfrak{p}_T$ verschiedene prime H-Ideal $\mathfrak{p} \subset \mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ gilt offenbar $\mathfrak{p}_T \supset \mathfrak{p}$.

Aus Satz 44 und dem zweiten Eindeutigkeitssatz (Kap. 2, Satz 33) ergibt sich, daß die triviale Komponente im allgemeinen mehrdeutig ist.

Die Existenz einer trivialen Komponente ist in vielen Fällen von Bedeutung, weshalb es wünschenswert ist, dafür den Nachweis ohne Herstellung der Primärkomponentenzerlegung führen zu können. Dazu geben wir im folgenden drei Sätze von Dubreil und Gröbner an.

Der erste Satz knüpft an Kap. 2, (46), Satz 29, an. Danach galt: $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \Leftrightarrow \mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{p}_\varkappa$ für alle zugehörigen Primideale $\mathfrak{p}_\varkappa$. Ist nun $\mathfrak{b} = (F)$ ein Hauptideal, also F eine Form aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, so gilt:

$$\mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a} \Leftrightarrow F \notin \mathfrak{p}_\varkappa \text{ für alle zugehörigen Primideale } \mathfrak{p}_\varkappa.$$

Besitzt nun $\mathfrak{a}$ eine triviale Komponente, tritt also $\mathfrak{p}_T = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ als zugehöriges Primideal auf, so ist diese Bedingung nicht realisierbar, denn es ist $F \in \mathfrak{p}_T$ für alle $F \in \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. Existiert also eine Form F mit $\mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a}$, so kann $\mathfrak{a}$ keine triviale Komponente besitzen. Insbesondere kann dann F als geeignete Linearform

$$L = a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \tag{100}$$

gewählt werden. Besitzt umgekehrt $\mathfrak{a}$ keine triviale Komponente, so sind die Bedingungen $F \notin \mathfrak{p}_\varkappa$ beispielsweise dadurch realisierbar, daß man F als Linearform (100) so wählt, daß L an keiner der allgemeinen Nullstellen der $\mathfrak{p}_\varkappa$ verschwindet. Ist $\mathfrak{p}_T$ nicht unter den $\mathfrak{p}_\varkappa$ und hat $\mathbf{K}$ unendlich viele Elemente, so ist dies durch geeignete Wahl von $a_0, a_1, \ldots, a_n$ stets möglich. Mithin gilt (vgl. Dubreil [1], Abschnitt 5, S. 275) der

Satz 45 (Dubreilsches Lemma). *Ein H-Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ besitzt dann und nur dann keine triviale Komponente, wenn es wenigstens eine Form $F \in \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ mit $\mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a}$ gibt.*

Nach Kap. 2, (51), Satz 30, galt: $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} \supset \mathfrak{a} \Leftrightarrow \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{p}_\varkappa$ für wenigstens ein zugehöriges Primideal $\mathfrak{p}_\varkappa$. Ist $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}_T = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, so kann $\mathfrak{p}_T \subset \mathfrak{p}_\varkappa$ nur für $\mathfrak{p}_\varkappa = (1)$ eintreten; da dann die Darstellung (99) verkürzbar wäre, ist also $\mathfrak{p}_\varkappa = \mathfrak{p}_T$, also besitzt $\mathfrak{a}$ eine triviale Komponente. Gehen wir umgekehrt davon aus, daß $\mathfrak{a}$ eine triviale Komponente besitzt, so tritt $\mathfrak{p}_T$ als zugehöriges Primideal auf, und nach Kap. 2, Satz 30 ($\Leftarrow$), folgt für $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}_T$ unmittelbar $\mathfrak{a} : \mathfrak{p}_T \supset \mathfrak{a}$. Dieser Satz stammt von Gröbner (vgl. [9], 4.9., S. 28):

Satz 46 (Satz von Gröbner). *Ein H-Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ besitzt dann und nur dann eine triviale Komponente, wenn*

$$\mathfrak{a} : (x_0, x_1, \ldots, x_n) \supset \mathfrak{a} \tag{101}$$

gilt.

Wir wollen nun (101) zu einem handlicheren Kriterium umschreiben, welches dem Verfasser erstmals schriftlich von Herrn Prof. Gröbner mitgeteilt wurde (siehe auch Gröbner [7], S. 262, 12. Zeile v. u.):

Satz 47 (Gröbnersches Kriterium). *Ein H-Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ besitzt eine triviale Komponente $\Leftrightarrow$*

$$\bigvee_F (F \notin \mathfrak{a} \wedge x_0F \in \mathfrak{a} \wedge x_1F \in \mathfrak{a} \wedge \cdots \wedge x_nF \in \mathfrak{a}). \tag{102}$$

Beweis. ($\Leftarrow$): Aus (102) folgt $F \in \mathfrak{a} : (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ und wegen $F \notin \mathfrak{a}$ mithin (101) und damit die Existenz einer trivialen Komponente.

($\Rightarrow$): $\mathfrak{a} : (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ ist nach Definition des Idealquotienten (vgl. Kap. 1, Definition 40) die Gesamtheit der F mit $FB \in \mathfrak{a}$ für alle $B \in (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, also gilt insbesondere $Fx_0 \in \mathfrak{a}$, $Fx_1 \in \mathfrak{a}$, ..., $Fx_n \in \mathfrak{a}$. Besitzt $\mathfrak{a}$ eine triviale Komponente, so gilt (101), und es kann überdies $F \notin \mathfrak{a}$ gewählt werden. Damit sind alle Bedingungen (102) erfüllt.

T-Ideale haben insofern keine geometrische Bedeutung, als der trivialen Nullstelle, der einzigen Nullstelle eines T-Ideals, kein Punkt im projektiven Raum entspricht.

Andererseits kann durch Hinzunahme einer trivialen Komponente die Anzahl der Basiselemente verringert werden.

Wir greifen dazu das Beispiel 2 von 2.6. wieder einmal auf. Dort war $\mathfrak{p} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$ ein Primideal und $\mathfrak{r} = (F_1, F_2, F_4)$ ein $\mathfrak{p}$-quasiprimäres Ideal und

$$F_1 = x_0x_3 - x_1x_2, \quad F_2 = x_0^2x_2 - x_1^3, \quad F_3 = x_0x_2^2 - x_1^2x_3, \quad F_4 = x_1x_3^2 - x_2^3,$$

und $F_3 \notin \mathfrak{r}$ ist evident. Weiterhin gilt (was der Leser selbst nachprüfen möge)

$$\left.\begin{aligned} x_0F_3 &= -x_1^2F_1 + x_2F_2 \in \mathfrak{r}, \\ x_1F_3 &= -x_0x_2F_1 + x_3F_2 \in \mathfrak{r}, \\ x_2F_3 &= x_1x_3F_1 - x_0F_4 \in \mathfrak{r}, \\ x_3F_3 &= x_2^2F_1 - x_1F_4 \in \mathfrak{r}, \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

also $F_3 \in \mathfrak{r} : (x_0, x_1, x_2, x_3)$; mit $F_3 \notin \mathfrak{r}$ folgt $\mathfrak{r} : (x_0, x_1, x_2, x_3) \supset \mathfrak{r}$. Mithin sind (101) und (102) erfüllt, und $\mathfrak{r}$ besitzt also eine triviale Komponente. Wir geben hier noch zwei mögliche Primärkomponentenzerlegungen für $\mathfrak{r}$ an:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{p} \cap (x_0^2, x_1, x_2^3, x_3) = \mathfrak{p} \cap (x_0, x_1^3, x_2, x_3^2)$$

und haben damit zugleich ein Beispiel für die Mehrdeutigkeit trivialer Komponenten.

Die Basis von $\mathfrak{r}$ bestand nur aus drei Elementen, hingegen die Basis von $\mathfrak{p}$ aus vier Elementen; durch die Hinzunahme einer trivialen Komponente konnte also die Anzahl der Basiselemente verringert werden, wie eingangs behauptet wurde.

Die trivialen Komponenten in den Darstellungen (99) kann man aber auch dadurch „sichtbar" machen, daß man $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ als Ideal in $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}]$ betrachtet. Dann hat $\mathfrak{a}$ die Nullstelle $y_0 = 0, \ldots, y_n = 0, y_{n+1} = t_0$. Führen wir zuvor die vielfach in der Literatur übliche Indexverschiebung $x_i \mapsto x_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ durch, so gewinnen wir die Nullstelle $y_0 = t_0, y_1 = 0, \ldots, y_{n+1} = 0$.

Wir haben damit durch Betrachtung in einem um 1 höherdimensionalen Raum eine geometrische Deutung der trivialen Komponenten erreicht; dieses von W. Vogel (Halle) häufig benutzte Prinzip geht auf Gröbner zurück, findet sich aber schon bei Macaulay. Der mit der Geometrie vertraute Leser wird dabei auch an den Beweis des Satzes von Desargues denken, der „geometrisch" erst durch den Übergang vom zweidimensionalen in den dreidimensionalen projektiven Raum möglich wird. Als weitere Analogie bieten sich Projektionsverfahren der darstellenden Geometrie an, wo etwa in der Grundrißebene Punkte zusammenfallen, die im dreidimensionalen Modell verschoben sind.

4. Dimensionstheorie der Polynomideale

4.1. Einleitung

Eines der wesentlichsten Ergebnisse in der Theorie der linearen Gleichungssysteme ist doch, über die Anzahl der Parameter in jeder vollständigen Lösung Aussagen machen zu können, ohne daß man diese Lösung kennen muß. Die Übertragung dieser Ergebnisse auf den nichtlinearen Fall ist mit einigen Schwierigkeiten verbunden; allerdings sind dafür die Folgerungen teilweise interessanter, auch in geometrischer Hinsicht. Damit wollen wir uns in dem nun folgenden Kapitel beschäftigen.

Dazu haben wir im vorigen Kapitel bereits Vorarbeiten geleistet. In Satz 6 von 3.3. bewiesen wir die Eindeutigkeit der Anzahl der unbedingt erforderlichen Parameter in jeder allgemeinen Nullstelle eines vorgegebenen primen Polynomideals. Wir konnten ferner nachweisen, daß man gewisse Koordinaten der allgemeinen Nullstelle als Parameter wählen konnte (Kap. 3, (22)), und wir sprachen dann von einer „geeigneten Numerierung" der entsprechenden Variablen. Daraus konnten wir dann weiter folgern, daß es Polynome $f \in (\mathfrak{p})$ gab mit $f(y_{k_1}, \ldots, y_{k_d}, y_{k_{d+1}}) = 0$ für jede Kombination $(k_1, \ldots, k_d, k_{d+1}) \in (1, \ldots, n)$; Entsprechendes gilt für homogene Primideale. Damit war es sinnvoll, die Anzahl der unbedingt erforderlichen Parameter in irgendeiner allgemeinen Nullstelle eines primen P-Ideals $(\mathfrak{p}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ als Dimension von $(\mathfrak{p})$ zu definieren (Kap. 3, Definition 15).

In Definition 16 von Kapitel 3 hatten wir für homogene Primideale $\mathfrak{p} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ wie folgt definiert: $\operatorname{Dim} \mathfrak{p} = -1 +$ Anzahl der unbedingt erforderlichen Parameter in einer allgemeinen Nullstelle von $\mathfrak{p}$.

Aus der letzten Definition ergibt sich für $\mathfrak{p}_T = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$

$$\operatorname{Dim} \mathfrak{p}_T = \operatorname{Dim}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = -1, \tag{1}$$

und daher ist es sinnvoll, im inhomogenen Fall

$$\operatorname{Dim}(1) := -1 \tag{2}$$

zu definieren.

Es liegt nun nahe, den Begriff „Dimension“ für beliebige P-Ideale und H-Ideale so zu definieren, daß er in sinnvoller Weise auf diese Dimensionsdefinitionen für Primideale zurückgeführt wird. Dazu werden uns die Beziehungen

$$\mathrm{NG}\left((\mathfrak{q})\right) = \mathrm{NG}\left((\mathfrak{p})\right), \qquad \text{(Kap. 3, (58))}$$

$$\mathrm{NG}(\mathfrak{q}) = \mathrm{NG}(\mathfrak{p}), \qquad \text{(Kap. 3, (59))}$$

$$\mathrm{NG}(\mathfrak{a}) = \mathrm{NG}(\operatorname{Rad}\mathfrak{a}) = \mathrm{NG}(\mathfrak{p}_1) \cup \mathrm{NG}(\mathfrak{p}_2) \cup \cdots \cup \mathrm{NG}(\mathfrak{p}_m) \qquad \text{(Kap. 3, (85))}$$

weiterhelfen; die letzte Beziehung gilt analog für P-Ideale.

4.2. Vorbereitende Bemerkungen zur Dimensionsdefinition von van der Waerden

Die bisher gegebene Dimensionsdefinition steht in Einklang mit der analytischen Geometrie und linearen Algebra; wir betrachten hierzu zwei Beispiele, bei denen wir die Bezeichnung der MfL Bd. 3 angepaßt haben:

Beispiel 1. Gemäß Brehmer und Belkner [1], 4.2.2. (vgl. auch Lehrbuch der Klasse 12, A 3), ist die Parameterdarstellung oder allgemeine Nullstelle der Ebene $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t_1\boldsymbol{a}_1 + t_2\boldsymbol{a}_2$ mit der Dimension 2; im dreidimensionalen affinen Raum wird diese Ebene durch eine lineare Gleichung gegeben.

Beispiel 2. Gemäß Brehmer und Belkner [1], 4.2.1. (vgl. auch Lehrbuch der Klasse 12, A 3), ist die Parameterdarstellung oder allgemeine Nullstelle der Geraden $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t_1\boldsymbol{a}_1$ mit der Dimension 1; im dreidimensionalen affinen Raum werden jetzt zwei lineare Gleichungen zur Darstellung dieser Geraden benötigt.

Der Dimensionsbegriff ist also eine Eigenschaft der Nullstellengebilde; nach den soeben nochmals zitierten Formeln (58) und (59) von Kapitel 3 ist es also sinnvoll, für primäre Polynomideale

$$\operatorname{Dim}(\mathfrak{q}) = \operatorname{Dim}(\mathfrak{p}) \quad \text{für} \quad (\mathfrak{p})\text{-primäre } P\text{-Ideale} \tag{3}$$

und

$$\operatorname{Dim}\mathfrak{q} = \operatorname{Dim}\mathfrak{p} \quad \text{für} \quad \mathfrak{p}\text{-primäre } H\text{-Ideale} \tag{4}$$

zu definieren.

Um den Dimensionsbegriff für beliebige Polynomideale zu definieren, betrachten wir drei weitere Beispiele:

Beispiel 3. Im dreidimensionalen affinen Raum seien gegeben: die Ebene E mit der Gleichung $x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5 = 0$ und der allgemeinen Nullstelle

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= -3t_1 - 4t_2 + 5, \\ y_2 &= t_1, \\ y_3 &= t_2 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

und die Gerade G mit den Gleichungen

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 6 = 0,$$
$$x_1 - x_2 + 2 = 0$$

und der allgemeinen Nullstelle

$$y_1 = \tau_1,$$
$$y_2 = 2 + \tau_1,$$
$$y_3 = -\tau_1.$$

Dann wird man $E \cup G$ die Dimension 2 zuordnen, da $E \cup G$ die zweidimensionale Nullstelle (5) hat. Wegen Kap. 5, (60), ist nun $E \cup G = \mathrm{NG}\,((\mathfrak{a}))$ mit

$$(\mathfrak{a}) = (x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5) \cap (x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 6,\ x_1 - x_2 + 2),$$

und das gibt hier zufällig

$$\begin{aligned} (\mathfrak{a}) &= (x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5) \cdot (x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 6,\ x_1 - x_2 + 2) \\ &= (x_1^2 + 6x_1x_2 + 8x_1x_3 + 9x_2^2 + 24x_2x_3 + 16x_3^2 - 11x_1 - 33x_2 - 44x_3 + 30, \\ &\qquad x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2^2 - 4x_2x_3 - 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 10); \end{aligned}$$

die Vereinigungsmenge „linearer Gebilde" ist also nicht mehr linear.

Beispiel 4. Im zweidimensionalen affinen Raum seien gegeben: die Gerade G mit der Gleichung $x_1 + 4x_2 - 3 = 0$ und der allgemeinen Nullstelle

$$y_1 = -4t_1 + 3,$$
$$y_2 = t_1$$

und der Punkt P mit den Gleichungen $x_1 - 2 = 0$, $x_2 - 3 = 0$ und der allgemeinen Nullstelle $y_1 = 2$, $y_2 = 3$. Dann ist $G \cup P = \mathrm{NG}\,((\mathfrak{a}))$ mit

$$\begin{aligned} (\mathfrak{a}) &= (x_1 + 4x_2 - 3) \cap (x_1 - 2,\ x_2 - 3) \\ &= ((x_1 + 4x_2 - 3)(x_1 - 2),\ (x_1 + 4x_2 - 3)(x_2 - 3)) \\ &= (x_1^2 + 4x_1x_2 - 5x_1 - 8x_2 + 6,\ x_1x_2 + 4x_2^2 - 3x_1 - 15x_2 + 9). \end{aligned}$$

Hier wird man sinngemäß die Dimension 1 zuordnen.

Die erforderliche Durchschnittsberechnung war einfach, da in diesem und dem vorigen Beispiel eines der Ideale ein Hauptideal war.

Beispiel 5. Wir betrachten jetzt dieselbe Ausgangssituation wie im vorigen Beispiel, nämlich eine Gerade und einen nicht auf ihr liegenden Punkt, jetzt aber im dreidimensionalen affinen Raum. Jetzt wird die Berechnung bereits erheblich schwieriger, da nun beide Komponenten keine Hauptideale mehr sind. Es seien also gegeben: die Gerade G mit den Gleichungen

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 6 = 0,$$
$$x_1 + x_2 - 2 = 0$$

und der Punkt P mit den Gleichungen

$$x_1 - 2 = 0,$$
$$x_2 - 3 = 0,$$
$$x_3 - 1 = 0.$$

Anwendung des Gaußschen Algorithmus liefert für G die vereinfachten Gleichungen

$$x_1 - x_3 = 0,$$
$$x_2 + x_3 - 2 = 0.$$

Es ist also $G \cup P = \mathrm{NG}\,((\mathfrak{a}))$ mit

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a}) &= (x_1 - x_3,\ x_2 + x_3 - 2) \cap (x_1 - 2,\ x_2 - 3,\ x_3 - 1)\\ &= \big(2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2,\ (3x_1 - 2x_2)(x_1 - x_3),\ (x_1 - 2x_3)(x_1 - x_3)\big),\end{aligned}$$

wobei die Berechnung des Durchschnittes schon einige Schwierigkeiten (Übergang zu äquivalenten H-Idealen, Anwendung der Syzygientheorie) bereitet. Die Übereinstimmung der Nullstellengebilde und damit der Radikale ist leicht nachzuweisen und sei dem Leser überlassen, der auch nachrechnen möge, daß $2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2 = 0$ die Gleichung der von G und P aufgespannten Ebene ist. Auch hier ist es wieder sinnvoll, $G \cup P$ die Dimension 1 zuzuordnen, also dem Ideal $((\mathfrak{a}))$ die größere der beiden auftretenden Dimensionszahlen als Dimension zuzuschreiben.

Zusammen mit (3) und (4) ist es also sinnvoll, für P-Ideale

$$\mathrm{Dim}\,\big((\mathfrak{q}_1) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_k)\big) := \mathrm{Max}\,\{\mathrm{Dim}\,(\mathfrak{q}_\varkappa)\} = \mathrm{Max}\,\{\mathrm{Dim}\,(\mathfrak{p}_\varkappa)\} \tag{6}$$

und für H-Ideale

$$\mathrm{Dim}\,(\mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k) := \mathrm{Max}\,\{\mathrm{Dim}\,\mathfrak{q}_\varkappa\} = \mathrm{Max}\,\{\mathrm{Dim}\,\mathfrak{p}_\varkappa\} \tag{7}$$

zu definieren. Dies zusammen sind die Dimensionsaxiome von VAN DER WAERDEN.

4.3. Die Dimensionsaxiome von van der Waerden

Wir wollen auch hier die Axiome getrennt für P-Ideale und für H-Ideale formulieren. Für P-Ideale werden die Axiome und einige Folgerungen in runde Klammern „( )“ gesetzt, für H-Ideale zur Unterscheidung nicht.

Aus dem Vorhergesagten ergibt sich für P-Ideale folgendes Axiomensystem:

(W 1) Die Dimension eines inhomogenen Primideals $(\mathfrak{p}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ ist die Anzahl der unbedingt erforderlichen Parameter in jeder allgemeinen Nullstelle.

(W 2) Die Dimension eines inhomogenen Primärideals $(\mathfrak{q}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ ist gleich der Dimension des zugehörigen Primideals, $\operatorname{Dim}(\mathfrak{q}) := \operatorname{Dim}(\mathfrak{p})$.

(W 3) Die Dimension eines inhomogenen P-Ideals $(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ ist gleich dem Maximum der Dimensionszahlen ihrer Primärkomponenten (vgl. (6)).

Für H-Ideale haben wir folgendes Axiomensystem:

W 1 Die Dimension eines homogenen Primideals $\mathfrak{p} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ist die um 1 verminderte Anzahl der unbedingt erforderlichen Parameter in jeder allgemeinen Nullstelle.

W 2 Die Dimension eines homogenen Primärideals $\mathfrak{q} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ist gleich der Dimension des zugehörigen Primideals, $\operatorname{Dim} \mathfrak{q} := \operatorname{Dim} \mathfrak{p}$.

W 3 Die Dimension eines homogenen H-Ideals $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ist gleich dem Maximum der Dimensionszahlen ihrer Primärkomponenten (vgl. (7)).

4.4. Folgerungen aus den van-der-Waerdenschen Axiomen

Definition 1. Die Größe

$$r := n - d \tag{8}$$

heißt *Kodimension* oder *Rang* des homogenen oder inhomogenen Polynomideals $\mathfrak{a}$ bzw. $(\mathfrak{a})$.

Bemerkung. Im Gegensatz zur linearen Algebra kann die Kodimension im allgemeinen nicht durch die Anzahl s bzw. t der Elemente einer Minimalbasis definiert werden; es gilt vielmehr $s \geqq r$ bzw. $t \geqq r$ (vgl. 4.17. bzw. 4.26.).

Aus W 1 und W 2 sowie (1) und (2) folgen

Satz 1. *Für T-Ideale $\mathfrak{q}_T \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ist*

$$\operatorname{Dim} \mathfrak{q}_T = -1 \tag{9}$$

und

$$\operatorname{Kodim} \mathfrak{q}_T = n + 1. \tag{10}$$

Definition 2. Für das Einheitsideal in $\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ setzen wir

$$\operatorname{Dim}(1) := -1. \tag{2}$$

Aus (W 2) und (W 3) folgt der

Satz 2. *Für P-Ideale* $(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *ist*

$$\text{Dim}\,(\mathfrak{a}) = \text{Dim Rad}\,(\mathfrak{a}). \tag{11}$$

Entsprechend folgt aus W 2 und W 3

Satz 3. *Für H-Ideale* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ist*

$$\text{Dim}\,\mathfrak{a} = \text{Dim Rad}\,\mathfrak{a}. \tag{12}$$

Der folgende Satz wird sich als außerordentlich wichtig erweisen.

Satz 4. *Für prime P-Ideale* $(\mathfrak{p}_1), (\mathfrak{p}_2)$ *bzw. primäre P-Ideale* $(\mathfrak{q}_1), (\mathfrak{q}_2)$ *aus* $\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *gilt:*

$$(\mathfrak{p}_1) \subset (\mathfrak{p}_2) \Rightarrow \text{Dim}\,(\mathfrak{p}_1) > \text{Dim}\,(\mathfrak{p}_2) \tag{13}$$

und

$$\text{Rad}\,(\mathfrak{q}_1) \subset \text{Rad}\,(\mathfrak{q}_2) \Rightarrow \text{Dim}\,(\mathfrak{q}_1) > \text{Dim}\,(\mathfrak{q}_2). \tag{14}$$

Bemerkungen. Von (13) gilt die Umkehrung keineswegs; als ein Gegenbeispiel betrachte man in $\mathbf{K}[x_1, x_2, x_3]$ etwa die Ideale (x_1, x_2) und (x_3) mit den Dimensionszahlen 1 bzw. 2. (14) gilt auch noch für quasiprimäre Ideale; allgemein kann jedoch aus $\text{Rad}\,(\mathfrak{a}) \subset \text{Rad}\,(\mathfrak{b})$ nur auf $\text{Dim}\,(\mathfrak{a}) \geqq \text{Dim}\,(\mathfrak{b})$ geschlossen werden; das Gleichheitszeichen gilt beispielsweise für $\text{Rad}\,(\mathfrak{a}) = (x_1) \cap (x_2)$, $\text{Rad}\,(\mathfrak{b}) = (x_1) \cap (x_2, x_3)$.

Beweis. Aus Kap. 3, (45), (46) und (86), folgt zunächst:

$$(\mathfrak{p}_1) \subset (\mathfrak{p}_2) \Leftrightarrow \text{NG}\left((\mathfrak{p}_1)\right) \supset \text{NG}\left((\mathfrak{p}_2)\right); \tag{15}$$

jeder Punkt von $\text{NG}\left((\mathfrak{p}_2)\right)$ — bis auf Ausnahmewerte — kann also aus jeder allgemeinen Nullstelle von $(\mathfrak{p}_1)$ mit den Parametern t_i gewonnen werden, und zwar durch Einsetzen spezieller Werte für die t_i (vgl. 3.4.); mithin wird auch eine allgemeine Nullstelle von $(\mathfrak{p}_2)$ mit den unbedingt erforderlichen Parametern τ_k durch Setzen von $t_i = \varphi_i(\ldots, \tau_k, \ldots)$ gewonnen. Hierbei muß aber die Anzahl der τ_k kleiner als die Anzahl der t_i sein, da man andernfalls wegen der Eindeutigkeit der Dimension (vgl. 3.3.) wieder eine allgemeine Nullstelle von $(\mathfrak{p}_1)$ erhalten würde. Damit ist (13) bewiesen.

Der Beweis von (14) folgt aus (13) unmittelbar wegen $\text{Rad}\,\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$, (W 2) und (11).

Entsprechend verläuft der Beweis für H-Ideale:

Satz 5. *Für prime H-Ideale* $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ *bzw. primäre H-Ideale* $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ *aus* $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *gilt:*

$$\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \Rightarrow \text{Dim}\,\mathfrak{p}_1 > \text{Dim}\,\mathfrak{p}_2 \tag{16}$$

und

$$\text{Rad}\,\mathfrak{q}_1 \subset \text{Rad}\,\mathfrak{q}_2 \Rightarrow \text{Dim}\,\mathfrak{q}_1 > \text{Dim}\,\mathfrak{q}_2. \tag{17}$$

Aus (W 1), (W 2) und (W 3) folgt unmittelbar der

Satz 6 oder (W 4). *Ein inhomogenes Polynomideal hat genau dann die Dimension d, wenn wenigstens eine Nullstelle mit d unbedingt erforderlichen Parametern, aber keine Nullstelle mit $d+1$ unbedingt erforderlichen Parametern existiert.*

Für H-Ideale folgt entsprechend aus W 1, W 2 und W 3 der

Satz 7 oder W 4. *Ein H-Ideal hat genau dann die Dimension d, wenn wenigstens eine Nullstelle mit $d+1$ unbedingt erforderlichen Parametern, aber keine Nullstelle mit $d+2$ unbedingt erforderlichen Parametern existiert.*

Praktisch ist mit (W 4) bzw. W 4 nur in einfachen Fällen etwas anzufangen, da die zweite Aussage die Übersicht über sämtliche Nullstellen erfordert. In Zusammenhang mit den Gröbnerschen Axiomen wird sich jedoch die alleinige Kenntnis der ersten Aussage als nützlich erweisen, also der

Satz 8 oder (W 5). *Ist zu einem inhomogenen P-Ideal* $(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *wenigstens eine Nullstelle mit d unbedingt erforderlichen Parametern bekannt, so ist* $\operatorname{Dim}(\mathfrak{a}) \geqq d$.

Satz 9 oder W 5. *Ist zu einem H-Ideal* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *wenigstens eine Nullstelle mit $d+1$ unbedingt erforderlichen Parametern bekannt, so ist* $\operatorname{Dim} \mathfrak{a} \geqq d$.

Wir werden mit (W 5) bzw. W 5 und dem Gröbnerschen Axiom (G 2) bzw. G 2 ein Axiomensystem haben, welches in vielen Fällen ein brauchbares Verfahren zur effektiven Bestimmung der Dimension liefert.

Wie schon vorher gesagt, ist es nachteilig, daß die Dimensionsbestimmung gemäß VAN DER WAERDEN die Kenntnis allgemeiner Nullstellen voraussetzt. Daher erscheint es wünschenswert, eine Dimensionsdefinition zu geben, welche die Kenntnis von Nullstellen nicht erfordert. Dies leisten die Dimensionsaxiome von GRÖBNER.

4.5. Die Dimensionsaxiome von Gröbner

Auch hier formulieren wir die Axiome getrennt für P-Ideale und für H-Ideale.

Ist $(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ ein inhomogenes P-Ideal, so ist die Dimension d von $(\mathfrak{a})$ festgelegt durch:

(G 1) Es existiert wenigstens eine Kombination $x_{i_1}, \ldots, x_{i_d}$ mit

$$(\mathfrak{a}) \cap \mathbf{K}[x_{i_1}, \ldots, x_{i_d}] = (0), \tag{18}$$

eine „geeignete Numerierung" (vgl. Kap. 3, (22)).

(G 2) Für alle Kombinationen $x_{k_1}, \ldots, x_{k_{d+1}}$ gilt

$$(\mathfrak{a}) \cap \mathbf{K}[x_{k_1}, \ldots, x_{k_d}, x_{k_{d+1}}] \neq (0). \tag{19}$$

Ist $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ein H-Ideal, so ist die Dimension d von $\mathfrak{a}$ festgelegt durch:

G 1 Es existiert wenigstens eine Kombination $x_{i_0}, \ldots, x_{i_d}$ mit

$$\mathfrak{a} \cap \mathbf{K}[x_{i_0}, \ldots, x_{i_d}] = (0), \tag{20}$$

eine „geeignete Numerierung" (vgl. Kap. 3, (24)).

G 2 Für *alle* Kombinationen $x_{k_0}, \ldots, x_{k_d}, x_{k_{d+1}}$ gilt

$$\mathfrak{a} \cap \mathbf{K}[x_{k_0}, \ldots, x_{k_d}, x_{k_{d+1}}] \neq (0). \tag{21}$$

4.6. Äquivalenz der Axiomensysteme

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit führen wir die Äquivalenzbeweise nur für H-Ideale durch; für P-Ideale verlaufen die Beweise entsprechend.

Satz 10. *Für H-Ideale gilt:*

$$\text{W } 1 \wedge \text{W } 2 \wedge \text{W } 3 \Rightarrow \text{G } 1 \wedge \text{G } 2.$$

Beweis. Aus W 1 folgen G 1 und G 2 zunächst für Primideale wegen (30) und (32) von Kapitel 3.

Ist $\mathfrak{q}$ ein $\mathfrak{p}$-primäres H-Ideal, so gelten weiterhin:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{p} \cap \mathbf{K}[x_{i_0}, \ldots, x_{i_d}] = (0) \Leftrightarrow \mathfrak{q} \cap \mathbf{K}[x_{i_0}, \ldots, x_{i_d}] = (0), \\ &\mathfrak{p} \cap \mathbf{K}[x_{k_0}, \ldots, x_{k_d}, x_{k_{d+1}}] \neq (0) \Leftrightarrow \mathfrak{q} \cap \mathbf{K}[x_{k_0}, \ldots, x_{k_d}, x_{k_{d+1}}] \neq (0). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Dies folgt unmittelbar aus $\mathfrak{p}^\varrho \subseteqq \mathfrak{q} \subseteqq \mathfrak{p}$ (Kap. 2, (24)). Also gelten G 1 und G 2 für Primärideale.

Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k$ mit $\operatorname{Dim} \mathfrak{q}_\varkappa = d_\varkappa$, so gilt also:

für alle Kombinationen $k_0, \ldots, k_{d_1+1}$ ist $\mathfrak{q}_1 \cap \mathbf{K}[x_{k_0}, \ldots, x_{k_{d_1+1}}] \neq (0)$,

für alle Kombinationen $k_0, \ldots, k_{d_2+1}$ ist $\mathfrak{q}_2 \cap \mathbf{K}[x_{k_0}, \ldots, x_{k_{d_2+1}}] \neq (0)$,

....

für alle Kombinationen $k_0, \ldots, k_{d_k+1}$ ist $\mathfrak{q}_k \cap \mathbf{K}\left[x_{k_0}, \ldots, x_{k_{d_k+1}}\right] \neq (0)$.

Ist nun gemäß W 3 $d = \operatorname{Max}\{d_1, \ldots, d_k\}$, so gilt auch:

Für alle Kombinationen $k_0, \ldots, k_{d+1}$ ist

$\mathfrak{q}_1 \cap \mathbf{K}[x_{k_0}, \ldots, x_{k_{d+1}}] \neq (0)$, es existiert also $F_1(x_{k_0}, \ldots, x_{k_{d+1}}) \in \mathfrak{q}_1$,

$\mathfrak{q}_2 \cap \mathbf{K}[x_{k_0}, \ldots, x_{k_{d+1}}] \neq (0)$, es existiert also $F_2(x_{k_0}, \ldots, x_{k_{d+1}}) \in \mathfrak{q}_2$,

....

$\mathfrak{q}_k \cap \mathbf{K}\, x_{k_0}, \ldots, x_{k_{d+1}}] \neq (0)$, es existiert also $F_k(x_{k_0}, \ldots, x_{k_{d+1}}) \in \mathfrak{q}_k$.

Dann ist $F_1 \cdot F_2 \cdots F_k \in \mathfrak{a}$, also $\mathfrak{a} \cap \mathbf{K}[x_{k_0}, \ldots, x_{k_{d+1}}] \neq (0)$; mithin ist G 2 für beliebige H-Ideale $\mathfrak{a}$ erfüllt. Entsprechend gilt:

Es existiert wenigstens eine Kombination $i_0, \ldots, i_d$ mit $\mathfrak{a} \cap \mathbf{K}[x_{i_0}, \ldots, x_{i_d}] = (0)$, denn andernfalls könnte d nicht die Maximaldimension von $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k$ sein, mithin gilt auch G 1.

Satz 11. *Für H-Ideale gilt:*

$$\mathrm{G}\,1 \wedge \mathrm{G}\,2 \Rightarrow \mathrm{W}\,1 \wedge \mathrm{W}\,2 \wedge \mathrm{W}\,3.$$

Beweis. Ist $\mathfrak{p}$ ein primes H-Ideal, so folgt aus G 1, daß $y_{i_0} = t_0$, $y_{i_1} = t_1, \ldots$, $y_{i_d} = t_d$ gesetzt werden kann; daß die Parameter in dieser Anzahl unbedingt erforderlich sind, folgt aus G 2. Damit ist W 1 bewiesen.

Aus G 1 und G 2 folgt W 2 unmittelbar wegen (22).

Aus G 2: $\mathfrak{a} \cap \mathbf{K}[x_{k_0}, x_{k_1}, \ldots, x_{k_{d+1}}] \neq (0)$ folgt wegen $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k$

$$\mathfrak{q}_\varkappa \cap \mathbf{K}[x_{k_0}, x_{k_1}, \ldots, x_{k_{d+1}}] \neq (0) \quad \text{für} \quad \varkappa = 1, 2, \ldots, k, \tag{23}$$

also

$$\operatorname{Dim} \mathfrak{q}_\varkappa \leqq d \quad \text{für} \quad \varkappa = 1, 2, \ldots, k. \tag{24}$$

Aus G 1: $\mathfrak{a} \cap \mathbf{K}[x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_d}] = (0)$ folgt: Für wenigstens eine Primärkomponente $\mathfrak{q}_\varkappa$, o. B. d. A. für $\mathfrak{q}_1$, gilt $\mathfrak{q}_1 \cap \mathbf{K}[x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_d}] = (0)$ und wegen (23) weiterhin

$$\mathfrak{q}_1 \cap \mathbf{K}[x_{k_0}, x_{k_1}, \ldots, x_{k_d}, x_{k_{d+1}}] \neq (0),$$

also $\operatorname{Dim} \mathfrak{q}_1 = d = \operatorname{Dim} \mathfrak{a}$. Zusammen mit (24) folgt also W 3.

4.7. Folgerungen aus den Gröbnerschen Axiomen

Aus den soeben geführten Äquivalenzbeweisen folgt unmittelbar

Satz 12. *Für P-Ideale* $(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *gilt: Allein aus* (G 1) *folgt* $\operatorname{Dim}(\mathfrak{a}) \geqq d$, *allein aus* (G 2) *folgt* $\operatorname{Dim}(\mathfrak{a}) \leqq d$.

Satz 13. *Für H-Ideale* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *gilt: Allein aus* G 1 *folgt* $\operatorname{Dim} \mathfrak{a} \geqq d$, *allein aus* G 2 *folgt* $\operatorname{Dim} \mathfrak{a} \leqq d$.

Hieraus folgt der angekündigte

Satz 14. *Durch* (W 5) *und* (G 2) *ist die Dimension eines inhomogenen P-Ideals* $(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *eindeutig bestimmt.*

Satz 15. *Durch* W 5 *und* G 2 *ist die Dimension eines H-Ideals* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *eindeutig bestimmt.*

Hierzu werden wir in 4.9. zwei Beispiele durchrechnen.

Unmittelbar einleuchtend ist fernerhin der

Satz 16. *Für Potenzproduktideale* $\mathfrak{a}_\pi \subset \mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *kann die Dimension gemäß* G 1, G 2 *unmittelbar aus der Basis abgelesen werden.*

Abschließend beweisen wir noch den

Satz 17. *Hauptideale aus* $\mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *bzw.* $\mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *haben die Dimension* $n - 1$.

Beweis. Wir zeigen dies o. B. d. A. für H-Ideale. Es sei also

$$\mathfrak{a} = (F), \quad \mathfrak{a} \subset \mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n], \quad F = F(x_0, x_1, \ldots, x_n),$$

und o. B. d. A. trete x_n in F wirklich auf. Dann ist $(F) \cap \mathsf{K}[x_0, \ldots, x_{n-1}] = (0)$, aber $(F) \cap \mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n] = (F) \neq (0)$; nach G 1 und G 2 ist also $\operatorname{Dim}(F) = n - 1$, q. e. d.

4.8. Erläuterung der Gröbnerschen Dimensionsaxiome für inhomogene lineare Gleichungssysteme

Wir führen diese Erläuterung an einem Beispiel durch, welches alles Wesentliche beinhaltet. Es sei $(\mathfrak{l}) \subset \mathsf{K}[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ mit $(\mathfrak{l}) = (l_1, l_2, l_3)$ und

$$\begin{aligned} l_1 &= x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 - 2x_5 - 7, \\ l_2 &= x_1 + x_3 - 5x_4 + 2x_5 + 2, \\ l_3 &= 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 12x_4 + 8x_5 + 17. \end{aligned}$$

Anwendung des Gaußschen Algorithmus liefert die übliche „Trapezform"

$$\begin{aligned} l_1 &= x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 - 2x_5 - 7, \\ -l_1 + l_2 &= \phantom{x_1 - {}} x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 4x_5 + 9, \\ -\frac{3}{8}\,l_1 + \frac{1}{8}\,l_2 + \frac{1}{8}\,l_3 &= \phantom{x_1 - x_2 + 2{}} x_3 - x_4 + 2x_5 + 5. \end{aligned}$$

Eliminieren wir nun x_3 aus dem zweiten Polynom und dann x_3 und x_2 aus dem ersten Polynom l_1, so erhalten wir die „Diagonal-Trapezform"

$$\begin{aligned} l_1^* &:= \frac{3}{8}\,l_1 + \frac{7}{8}\,l_2 - \frac{1}{8}\,l_3 = x_1 - 4x_4 - 3, \\ l_2^* &:= -\frac{1}{4}\,l_1 + \frac{3}{4}\,l_2 - \frac{1}{4}\,l_3 = x_2 - 1, \\ l_3^* &:= -\frac{3}{8}\,l_1 + \frac{1}{8}\,l_2 + \frac{1}{8}\,l_3 = x_3 - x_4 + 2x_5 + 5. \end{aligned}$$

Dann hat

$$(\mathfrak{l}) = (l_1, l_2, l_3) = (l_1^*, l_2^*, l_3^*)$$

die allgemeine Nullstelle

$$y_4 = t_1, \quad y_5 = t_2, \quad y_1 = 3 + 4t_1, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = -5 + t_1 - 2t_2;$$

nach (W 1) ist die Dimension von (I) also gleich 2.

Wir prüfen nun (G 2) nach, indem wir *alle* $\binom{5}{3} = 10$ Kombinationen $(x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3})$ untersuchen:

1. $(I) \cap \mathbf{K}[x_1, x_2, x_3] \neq (0)$ wegen $x_2 - 1 \in (I)$,
2. $(I) \cap \mathbf{K}[x_1, x_2, x_4] \neq (0)$ wegen $x_2 - 1 \in (I)$,
3. $(I) \cap \mathbf{K}[x_1, x_2, x_5] \neq (0)$ wegen $x_2 - 1 \in (I)$,
4. $(I) \cap \mathbf{K}[x_1, x_3, x_4] \neq (0)$ wegen $x_1 - 4x_4 - 3 \in (I)$,
5. $(I) \cap \mathbf{K}[x_1, x_3, x_5] \neq (0)$ wegen $x_1 - 4x_3 - 8x_5 - 23 \in (I)$,
6. $(I) \cap \mathbf{K}[x_1, x_4, x_5] \neq (0)$ wegen $x_1 - 4x_4 - 3 \in (I)$,
7. $(I) \cap \mathbf{K}[x_2, x_3, x_4] \neq (0)$ wegen $x_2 - 1 \in (I)$,
8. $(I) \cap \mathbf{K}[x_2, x_3, x_5] \neq (0)$ wegen $x_2 - 1 \in (I)$,
9. $(I) \cap \mathbf{K}[x_2, x_4, x_5] \neq (0)$ wegen $x_2 - 1 \in (I)$,
10. $(I) \cap \mathbf{K}[x_3, x_4, x_5] \neq (0)$ wegen $x_3 - x_4 + 2x_5 + 5 \in (I)$.

Wir wollen nun untersuchen, für welche Kombinationen (G 1) erfüllt ist; obwohl wir nur eine solche Kombination (x_{i_1}, x_{i_2}) anzugeben brauchten, seien hier einmal alle $\binom{5}{2} = 10$ untersucht:

1. $(I) \cap \mathbf{K}[x_1, x_2] \neq (0)$ wegen $x_2 - 1 \in (I)$, Numerierung ungeeignet,
2. $(I) \cap \mathbf{K}[x_1, x_3] = (0)$, also Numerierung geeignet,
3. $(I) \cap \mathbf{K}[x_1, x_4] \neq (0)$ wegen $x_1 - 4x_4 - 3 \in (I)$, Numerierung ungeeignet,
4. $(I) \cap \mathbf{K}[x_1, x_5] = (0)$, also Numerierung geeignet,
5. $(I) \cap \mathbf{K}[x_2, x_3] \neq (0)$ wegen $x_2 - 1 \in (I)$, Numerierung ungeeignet,
6. $(I) \cap \mathbf{K}[x_2, x_4] \neq (0)$ wegen $x_2 - 1 \in (I)$, Numerierung ungeeignet,
7. $(I) \cap \mathbf{K}[x_2, x_5] \neq (0)$ wegen $x_2 - 1 \in (I)$, Numerierung ungeeignet,
8. $(I) \cap \mathbf{K}[x_3, x_4] = (0)$, also Numerierung geeignet,
9. $(I) \cap \mathbf{K}[x_3, x_5] = (0)$, also Numerierung geeignet,
10. $(I) \cap \mathbf{K}[x_4, x_5] = (0)$, also Numerierung geeignet.

Mithin ist (G 1) erfüllt für die Kombinationen 2, 4, 8, 9 und 10. Als Parameter in allgemeinen Nullstellen können folglich gewählt werden (y_1, y_3), (y_1, y_5), (y_3, y_4), (y_3, y_5) und (y_4, y_5), jedoch keine anderen Paare. Setzt man für diese Parameter den Wert Null ein, so erhält man die sogenannten *Basislösungen*, aus welchen die Lösungen für die *allgemeine Aufgabe der linearen Optimierung* gewonnen werden (vgl. Piehler [1], Satz 4, ferner Tschernikow [1], Kap. I, § 2, und Krekó [1], Kap. X, § 2).

4.9. Beispiele für die Dimensionsbestimmung mit Hilfe von W 5 und G 2

Wie wir in 4.10. zeigen werden, ist die Dimensionsbestimmung nach G 1 und G 2 oft recht mühevoll, da der Nachweis von G 1 nicht so einfach wie im linearen Fall ist. Der Nachweis gemäß Satz 15 führt daher oftmals schneller zu einem Ergebnis. Dies soll an zwei Beispielen demonstriert werden.

Beispiel 1. Wir betrachten das bereits mehrmals untersuchte prime H-Ideal

$$(F_1, F_2, F_3, F_4) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$$

mit

$$F_1 = x_0x_3 - x_1x_2, \quad F_2 = x_0{}^2x_2 - x_1{}^3, \quad F_3 = x_0x_2{}^2 - x_1{}^2x_3, \quad F_4 = x_1x_3{}^2 - x_2{}^3$$

und der allgemeinen Nullstelle $(t_0{}^4, t_0{}^3t_1, t_0t_1{}^3, t_1{}^4)$. Man nennt dies auch das Veronesesche Projektionsideal $\mathfrak{v}_{14}^{(2)}$. Diese Bezeichnung besagt folgendes: Der Index 1 gibt die Dimension, also die um 1 verminderte Anzahl der Parameter, an. Der Index 4 bezeichnet den Grad der Potenzprodukte. Und der obere Index 2 besagt, daß das Potenzprodukt fehlt, welches bei lexikographischer Anordnung — von 0 an zählend — die Nummer 2 bekommen würde, also unter

$$z_0 = t_0{}^4, \quad z_1 = t_0{}^3t_1, \quad z_2 = t_0{}^2t_1{}^2, \quad z_3 = t_0t_1{}^3, \quad z_4 = t_1{}^4$$

fehlt gerade z_2. Soviel zu dieser Bezeichnung.

Wir beginnen nun mit der Untersuchung von G 2 und haben $\binom{4}{3} = 4$ Kombinationen zu berücksichtigen:

1. $\mathfrak{v}_{14}^{(2)} \cap \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2] \neq (0)$ wegen $F_2 \in \mathfrak{v}_{14}^{(2)}$,
2. $\mathfrak{v}_{14}^{(2)} \cap \mathbf{K}[x_0, x_1, x_3] \neq (0)$ wegen $x_0{}^2F_1 + x_1F_2 = x_0{}^3x_3 - x_1{}^4 \in \mathfrak{v}_{14}^{(2)}$,
3. $\mathfrak{v}_{14}^{(2)} \cap \mathbf{K}[x_0, x_2, x_3] \neq (0)$ wegen $x_3{}^2F_1 - x_2F_4 = x_0x_3{}^3 - x_2{}^4 \in \mathfrak{v}_{14}^{(2)}$,
4. $\mathfrak{v}_{14}^{(2)} \cap \mathbf{K}[x_1, x_2, x_3] \neq (0)$ wegen $F_4 \in \mathfrak{v}_{14}^{(2)}$;

nach G 2 ist also

$$\operatorname{Dim} \mathfrak{v}_{14}^{(2)} \leqq 1. \tag{25}$$

Nehmen wir an, uns wäre die allgemeine Nullstelle nicht bekannt, sondern nur die Basisformen F_1, F_2, F_3, F_4. Die unter 2. und 3. gewonnenen Formen führen schnell zu einer Nullstelle, bei der y_0 und y_3 als Parameter gesetzt werden. Damit hat man dann schon nach W 5

$$\operatorname{Dim} \mathfrak{v}_{14}^{(2)} \geqq 1. \tag{26}$$

Aus (25) und (26) folgt $\mathfrak{v}_{14}^{(2)} = 1$.

Beispiel 2. Dieses Beispiel wurde von W. Vogel (Halle) angeregt. In dem soeben untersuchten Ideal $\mathfrak{v}_{14}^{(2)} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ ersetzen wir x_i durch x_{i+1} $(i = 0, 1, 2, 3)$ und fassen dies als ein H-Ideal in $\mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ auf. Es ist also

$$\mathfrak{w}_{14}^{(2)} = (G_1, G_2, G_3, G_4) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \tag{27}$$

mit

$$G_1 = x_1x_4 - x_2x_3, \quad G_2 = x_1{}^2x_3 - x_2{}^3, \quad G_3 = x_1x_3{}^2 - x_2{}^2x_4, \quad G_4 = x_2x_4{}^2 - x_3{}^3. \tag{28}$$

Jetzt ist $\operatorname{Dim} \mathfrak{w}_{14}^{(2)} = 2$, denn als Parameter können neben y_1 und y_4 auch noch y_0 gesetzt werden, da x_0 wegen der Koordinatenumindizierung in G_1, G_2, G_3, G_4 überhaupt nicht mehr auftritt.

Daneben betrachten wir das prime H-Ideal $\mathfrak{v}_{22}^{(1)} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ mit der allgemeinen Nullstelle

$$y_0 = t_0{}^2, \quad y_1 = t_0t_2, \quad y_2 = t_1{}^2, \quad y_3 = t_1t_2, \quad y_4 = t_2{}^2$$

und der Basisdarstellung

$$\mathfrak{v}_{22}^{(1)} = (x_0x_4 - x_1{}^2, \; x_2x_4 - x_3{}^2). \tag{29}$$

Aus der Anzahl der Parameter in der allgemeinen Nullstelle folgt nach W 1 $\operatorname{Dim} \mathfrak{v}_{22}^{(1)} = 2$.

Es soll nun die Dimension von $\operatorname{NG}(\mathfrak{w}_{14}^{(2)}) \cap \operatorname{NG}(\mathfrak{v}_{22}^{(1)})$, kurz *Schnittdimension* genannt, bestimmt werden. Darunter ist gemäß Kap. 3, (75), die Dimension der Idealsumme zu verstehen.

Zu bestimmen ist also $d = \operatorname{Dim} \mathfrak{a}$ mit

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{w}_{14}^{(2)}, \mathfrak{v}_{22}^{(1)}). \tag{30}$$

Aus der Kenntnis der Dimensionszahlen von $\mathfrak{w}_{14}^{(2)}$ und $\mathfrak{v}_{22}^{(1)}$ kann leider nur auf $d \geqq 2 + 2 - 4$ geschlossen werden (vgl. 4.16.). Wir müssen also d ohne Benutzung von 4.16. vermöge W 5 und G 2 berechnen.

Dazu ordnen wir die sechs Basisformen von $\mathfrak{a}$ nach steigenden Gradzahlen und ersten Potenzprodukten und erhalten

$$\mathfrak{a} = (x_0x_4 - x_1^2,\ x_1x_4 - x_2x_3,\ x_2x_4 - x_3^2,\ x_1^2x_3 - x_2^3,\ x_1x_3^2 - x_2^2x_4,\ x_2x_4^2 - x_3^3).$$

Multiplizieren wir die dritte Basisform mit x_2 bzw. $-x_3$ und addieren dies zu den beiden letzten Basisformen, so erhalten wir

$$\mathfrak{a} = (x_0x_4 - x_1^2,\ x_1x_4 - x_2x_3,\ x_2x_4 - x_3^2,\ x_1^2x_3 - x_2^3,\ x_1x_3^2 - x_2x_3^2,\ x_3^3 - x_3^2x_4); \tag{31}$$

dafür können wir auch schreiben

$$\mathfrak{a} = \left(x_0x_4 - x_1^2,\ x_1x_4 - x_2x_3,\ x_2x_4 - x_3^2,\ x_1^2x_3 - x_2^3,\ (x_1 - x_2)\, x_3^2,\ (x_3 - x_4)\, x_3^2\right). \tag{32}$$

Setzen wir die Basisformen von (32) gleich Null, so lassen sich drei Nullstellen wie folgt angeben: Aus $y_3 = 0$ ergeben sich, wie der Leser nachrechnen möge, die beiden nulldimensionalen Nullstellen $y_0 = 0,\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0,\ y_4 = t_0$ und $y_0 = t_0,\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0,\ y_4 = 0$. Der ebenfalls naheliegende Ansatz $y_1 = y_2 = t_0$ und $y_3 = y_4 = t_1$ führt zu $t_1 = t_0$ und zu der ebenfalls nulldimensionalen Nullstelle $y_0 = t_0,\ y_1 = t_0,\ y_2 = t_0,\ y_3 = t_0,\ y_4 = t_0$. Nach W 5 ist also

$$\operatorname{Dim} \mathfrak{a} \geqq 0. \tag{33}$$

Wir wollen zeigen, daß in (33) das Gleichheitszeichen gilt. Dazu haben wir gemäß G 2

$$\mathfrak{a} \cap \mathbf{K}[x_{k_0}, x_{k_1}] \neq (0) \tag{34}$$

für alle Kombinationen k_0, k_1 durchzumustern. Es empfiehlt sich, diese $\binom{5}{2} = 10$ Kombinationen in der Reihenfolge

$$(k_0, k_1) = \{(3, 4), (2, 4), (2, 3), (1, 4), (1, 3), (1, 2), (0, 4), (0, 3), (0, 2), (0, 1)\}$$

zu bearbeiten und dabei die in Kap. 1, Definition 9ff., eingeführte Kongruenzrechnung für Ideale zu benutzen. Diese liefert zunächst für die Basiselemente gemäß (31) mod $\mathfrak{a}$

$$x_0x_4 \equiv x_1^2, \tag{35}$$

$$x_1x_4 \equiv x_2x_3, \tag{36}$$

$$x_2x_4 \equiv x_3^2, \tag{37}$$

$$x_1^2x_3 \equiv x_2^3, \tag{38}$$

$$x_1x_3^2 \equiv x_2x_3^2, \tag{39}$$

$$x_3^3 \equiv x_3^2x_4. \tag{40}$$

Nunmehr untersuchen wir die zehn Kombinationen in der angekündigten Reihenfolge.

(3, 4): Aus (40) folgt $x_3^3 - x_3^2x_4 \in \mathfrak{a}$.

(2, 4): Aus (40) und (37) folgt $x_3^3 \equiv x_3^2x_4 \equiv x_2x_4^2$ und daraus $x_3^6 \equiv x_2^2x_4^4$. Aus (37) folgt $x_3^6 \equiv x_2^3x_4^3$ und mithin $x_2^2x_4^4 \equiv x_2^3x_4^3$, also $x_2^2x_4^3(x_2 - x_4) \in \mathfrak{a}$.

(2, 3): Aus (37) folgt $x_2x_4^2 \equiv x_3^2x_4$; mit (40) folgt $x_2x_4^2 \equiv x_3^3$, also $x_2^2x_4^2 \equiv x_2x_3^3$; mit (37) folgt $x_2^2x_4^2 \equiv x_3^4$, also $x_2x_3^3 \equiv x_3^4$, mithin $x_3^3(x_2 - x_3) \in \mathfrak{a}$.

(1, 4): Aus (37) und (40) folgt $x_2x_3x_4 \equiv x_3^3 \equiv x_3^2x_4$, also $x_2x_3^2x_4 \equiv x_3^3x_4 \equiv x_3^2x_4^2$ wegen (40), also

$$x_2x_3^2x_4 \equiv x_3^2x_4. \tag{41}$$

Aus (36) und (41) folgt $x_1x_3x_4^2 \equiv x_2x_3^2x_4 \equiv x_3^2x_4^2$, also

$$x_1x_3x_4^2 \equiv x_3^2x_4^2. \tag{42}$$

Aus (42) folgt mit (40) $x_1x_3^2x_4^2 \equiv x_3^3x_4^2 \equiv x_3^2x_4^3$, also $x_1x_2^2x_3^2x_4^2 \equiv x_2^2x_3^2x_4^3$, mit (36) folgt $x_2^2x_3^2 \equiv x_1^2x_4^2$, also $x_1^3x_4^4 \equiv x_1^2x_4^5$ und damit endlich $x_1^2x_4^4(x_1 - x_4) \in \mathfrak{a}$.

(1, 3): Aus (42) folgt $x_1x_3^4x_4^2 \equiv x_3^5x_4^2$, aus (40) folgt $x_1x_3^4x_4^2 \equiv x_1x_3^6$, zusammen ergibt sich also $x_1x_3^6 \equiv x_3^5x_4^2$; nach (40) ist $x_3^4x_4^2 \equiv x_3^6$, folglich

$$x_1x_3^6 \equiv x_3^7. \tag{43}$$

Aus (43) folgt $x_1x_3^6 - x_3^7 \in \mathfrak{a}$.

(1, 2): Aus (38) folgt zunächst

$$x_1^{12}x_3^6 \equiv x_2^{18} \tag{44}$$

und

$$x_1^{14}x_3^7 \equiv x_2^{21}. \tag{45}$$

Aus (43) folgt $x_1^{15}x_3^6 \equiv x_1^{14}x_3^7$; mit (44) und (45) folgt daraus $x_1^3x_2^{18} \equiv x_2^{21}$, also $x_2^{18}(x_1^3 - x_2^3) \in \mathfrak{a}$.

(0, 4): Der Fall (1, 4) führte auf $x_1^2x_4^4(x_1 - x_4) \equiv 0$; also gilt auch $x_1^2x_4^2(x_1^2 - x_4^2) \equiv 0$; aus (35) folgt daraus

$$x_0^2x_4^4 \equiv x_0x_4^5 \tag{46}$$

und mithin $x_0x_4^4(x_0 - x_4) \in \mathfrak{a}$.

(0, 3): Aus (46) folgt $x_0^2x_3^{10}x_4^4 \equiv x_0x_3^{10}x_4^5$; aus (40) folgt $x_3^8x_4^4 \equiv x_3^{12}$ und $x_3^{10}x_4^5 \equiv x_3^{15}$; dies eingesetzt, gibt $x_0^2x_3^{14} \equiv x_0x_3^{15}$, also $x_0x_3^{14}(x_0 - x_3) \in \mathfrak{a}$.

(0, 2): Durch Multiplikation mit x_2 folgt aus der letzten Kongruenz $x_0^2x_2x_3^{14} \equiv x_0x_2x_3^{15}$; mit den Ergebnissen von (2, 3) folgt $x_0x_2^2x_3^{14} \equiv x_0x_2x_3^{15}$, also $x_0x_2x_3^{14}(x_0 - x_2) \equiv 0$. Mit x_1^{28} multipliziert und x_1^{28} vermittels der 14ten Potenz von (38) wieder eliminiert, folgt $x_0x_2^{43}(x_0 - x_2) \in \mathfrak{a}$.

(0, 1): Die Untersuchung von (0, 4) ergab $x_0^2x_4^4 - x_0x_4^5 \equiv 0$; mit x_1^3 multipliziert, folgt $x_0^2x_1^3x_4^4 - x_0x_1^3x_4^5 \equiv 0$. Gemäß (1, 4) war

$$x_1^3x_4^4 \equiv x_1^2x_4^5, \qquad \text{folglich} \qquad x_0^2x_1^3x_4^4 \equiv x_0^2x_1^2x_4^5,$$

also

$$x_0^2x_1^2x_4^5 - x_0x_1^3x_4^5 = x_4^5x_0x_1^2(x_0 - x_1) \equiv 0,$$

mit x_0^4 multipliziert, folgt nach (35) endlich $x_1^{12}(x_0 - x_1) \equiv 0$, also $x_1^{12}(x_0 - x_1) \in \mathfrak{a}$. Mithin ist G 2 erfüllt, und wir haben

$$\operatorname{Dim} \mathfrak{a} \leqq 0. \tag{47}$$

Aus (33) und (47) ergibt sich die Schnittdimension $\operatorname{Dim} \mathfrak{a} = 0$.

4.10. Eliminationsideale

Bei den folgenden Betrachtungen setzen wir voraus, daß $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ein H-Ideal ist. Für $m \leqq n$ ist dann $\mathfrak{a} \cap \mathbf{K}[x_{j_0}, \ldots, x_{j_m}]$ in $\mathbf{K}[x_{j_0}, \ldots, x_{j_m}]$ ebenfalls ein H-Ideal.

Definition 3. Ist $\mathfrak{a} \subset \mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ein H-Ideal, so heißt jedes H-Ideal $(\mathfrak{a} \cap \mathsf{K}[x_{j_0}, \ldots, x_{j_m}]) \subset \mathsf{K}[x_{j_0}, \ldots, x_{j_m}]$ ein $(n-m)$*-tes Eliminationsideal* ($m = n-1$, $n-2, \ldots, 2, 1, 0$). Man schreibt dafür

$$\mathfrak{d}_{n-m,\varkappa_m} := \mathfrak{a} \cap \mathsf{K}[x_{j_0}, \ldots, x_{j_m}]. \tag{48}$$

Dabei gibt $\varkappa_m$ die Nummer der jeweiligen Kombination $j_0, \ldots, j_m$ an.

Faßt man $\mathfrak{d}_{n-m,\varkappa_m}$ wieder als H-Ideal in $\mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ auf, so ist offenbar $\mathfrak{d}_{n-m,\varkappa_m} \subseteqq \mathfrak{a}$, nach Kap. 3, Satz 16, also NG $(\mathfrak{d}_{n-m,\varkappa_m}) \supseteqq$ NG $(\mathfrak{a})$; speziell für $m = d+1$, $n - m = n - (d+1) = r - 1$ folgt

$$\mathrm{NG}\,(\mathfrak{d}_{r-1,\varkappa_{d+1}}] \supseteqq \mathrm{NG}\,(\mathfrak{a}). \tag{49}$$

Aus (49) folgt

Satz 18. *Sämtliche Nullstellen eines H-Ideals* $\mathfrak{a} \subset \mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *lassen sich wegen* (49) *aus den Nullstellen eines geeignet gewählten* $(r-1)$*-ten Eliminationsideals bestimmen; dabei ist* $d = n - r$ *die Dimension des H-Ideals* $\mathfrak{a}$.

Beweis. Kennt man sämtliche Nullstellen von $\mathfrak{d}_{r-1,\varkappa_{d+1}}$, so kann man durch Einsetzen in die Basisformen von $\mathfrak{a}$ entscheiden, welche davon zugleich Nullstellen von $\mathfrak{a}$ sind. Wegen (49) gewinnt man auf diese Weise sämtliche Nullstellen von $\mathfrak{a}$.

Geometrisch kann jedes NG $(\mathfrak{d}_{n-m,\varkappa_m})$ als *m-fache Projektion* von NG $(\mathfrak{a})$ gedeutet werden (vgl. Gröbner [2], Abschnitt 123).

Schließlich ist die Berechnung von Eliminationsidealen bei der Dimensionsbestimmung nach den Gröbnerschen Axiomen G 1 und G 2 erforderlich. Zwar benötigt man zum Nachweis von G 2 nur jeweils eine von Null verschiedene Form der gewünschten Art (man vergleiche dazu das Beispiel des vorigen Abschnitts), jedoch macht der Nachweis von G 1 die genaue Kenntnis von $\mathfrak{a} \cap \mathsf{K}[x_{i_0}, \ldots, x_{i_d}]$ notwendig.

Bei linearen Gleichungssystemen liefert die Herstellung der sogenannten „Trapezform" für das durch die linken Seiten der Gleichungen des Gleichungssystems erzeugte Ideal $\mathfrak{l}$ zugleich ein Verfahren zur Berechnung der Eliminationsideale (vgl. 4.8.).

Die Herstellung der Trapezform vermittels des Gaußschen Algorithmus erfolgt bekanntlich durch sukzessive Elimination der Variablen: Erst wird x_1 aus der zweiten, dritten, $\ldots$, m-ten Gleichung eliminiert, dann wird x_2 aus der neuen dritten, vierten, $\ldots$, m-ten Gleichung eliminiert usw. Entsprechend gilt allgemein der

Satz 19. *Die Berechnung von Eliminationsidealen kann durch sukzessive Elimination von jeweils einer Variablen erfolgen.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus

$$\mathfrak{d}_{n-m,\varkappa_m} = \mathfrak{d}_{n-m-1,\varkappa_{m+1}} \cap \mathsf{K}[x_{j_0}, \ldots, x_{j_m}] \tag{50}$$

wegen

$$\mathfrak{a} \cap \mathbf{K}[x_{j_0}, \ldots, x_{j_m}, x_{j_{m+1}}] \cap \mathbf{K}[x_{j_0}, \ldots, x_{j_m}] = \mathfrak{a} \cap \mathbf{K}[x_{j_0}, \ldots, x_{j_m}].$$

Wegen

$$\mathbf{K}[\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots] = \mathbf{K}[\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots]$$

gilt ferner der auch in der linearen Algebra gültige

Satz 20. *Bei der Berechnung von Eliminationsidealen kann die Reihenfolge der zu eliminierenden Variablen vertauscht werden.*

Damit kann der Eliminationsprozeß insofern vereinfacht werden, als man sich im konkreten Fall eine möglichst einfache Reihenfolge aussuchen kann.

Da man zum Eliminieren einer Variablen mindestens zwei Formen benötigt, gilt fernerhin der

Satz 21. *Führt die sukzessive Elimination auf ein Hauptideal, so ist eine weitere Elimination von Variablen nicht möglich.*

Soll die Variable x_i eliminiert werden, so enthält die Basis des Eliminationsideals jedenfalls alle diejenigen Basiselemente von $\mathfrak{a}$, welche x_i nicht enthalten. In Analogie zu den linearen Gleichungssystemen könnte man nun annehmen, daß für die Berechnung neuer von x_i freier Formen nur noch mit den Basisformen von $\mathfrak{a}$ gerechnet werden muß, welche x_i enthalten. Man könnte in Analogie zu den linearen Gleichungssystemen hoffen, daß es mit Rechnungen der folgenden Art getan wäre: Es sei etwa $F_1 = x_0x_3 - x_1x_i$, $F_2 = x_0^2x_i - x_1^3$ und i von $0, 1, 2, 3$ verschieden. Die Elimination von x_i wird dann durch $x_0^2F_1 + x_1F_2 = x_0^3x_3 - x_1^4$ bewerkstelligt. Die auf diese Weise gewonnenen und nicht durch die schon bekannten von x_i freien Formen reduzierbaren Formen bilden zusammen mit den x_i nicht enthaltenen Basisformen von $\mathfrak{a}$ im allgemeinen nicht das volle Eliminationsideal.

Wir geben dazu ein einfaches Beispiel an:

Es sei

$$\mathfrak{a} = (F_1, F_2, F_3) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8]$$

mit

$$F_1 = x_0x_1 - x_2x_8, \quad F_2 = x_2x_3 - x_4x_5, \quad F_3 = x_5x_8 - x_6x_7,$$

und es soll die Variable x_8 eliminiert werden. Es ist dann jedenfalls

$$\mathfrak{a} \cap \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7] = (F_2, \ldots).$$

Berücksichtigen wir nur die x_8 enthaltenden Formen F_1 und F_3, so gewinnen wir eine neue Form F_4 mit $F_4 := x_0x_1x_5 - x_2x_6x_7$, und F_4 ist kein Vielfaches von F_2. Jedoch ist (F_2, F_4) noch nicht das volle Eliminationsideal, weil x_8F_2 unberücksichtigt geblieben ist. Nun ist $x_8F_2 = x_2x_3x_8 - x_4x_5x_8$, und diese beiden Terme treten auch in x_3F_1 bzw. x_4F_3 auf, wodurch sich x_8 wiederum eliminieren läßt und zu einer von x_8 freien Form F_5 führt mit

$$F_5 := x_3F_1 + x_8F_2 + x_4F_3 = x_0x_1x_3 - x_4x_6x_7.$$

Offenbar ist $F_5 \notin (F_2, F_4)$. Mit Methoden, die im folgenden erläutert werden, kann man nachweisen, daß man damit das volle Eliminationsideal hat, daß also

$$\mathfrak{a} \cap \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7] = (F_2, F_4, F_5)$$

gilt.

Wir haben jedenfalls als Konsequenz den

Satz 22. *Bei der Berechnung von Eliminationsidealen sind diejenigen Basisformen, die die zu eliminierenden Variablen nicht enthalten, in den Eliminationsprozeß grundsätzlich mit einzubeziehen.*

Um alle Möglichkeiten zu erfassen, gehen wir folgendermaßen vor: Es sei x_i die zu eliminierende Variable. Dann vertauschen wir x_i und x_0, so daß wir im folgenden immer annehmen können, daß x_0 die zu eliminierende Variable ist. Gemäß Kap. 1, Satz 17 und 18, stellen wir nun die $\mathbf{K}$-Moduln $\mathfrak{M}(t; \mathfrak{a})$ für bestimmte Gradzahlen t auf. Wie in Kap. 1, Satz 18, kann nun auf die Potenzprodukte des Moduls $\mathfrak{M}(t; \mathfrak{a})$ für festes t gemäß der lexikographischen Anordnung der Potenzprodukte der Gaußsche Algorithmus angewandt werden. Ist m_0 der Minimalgrad der Basisformen von $\mathfrak{a}$, so führt man dieses Verfahren nacheinander für $t = m_0, m_0 + 1, m_0 + 2, \ldots$ durch (vgl. Kap. 1, Satz 20). Für genügend großes t erhält man schließlich Formen aus $\mathfrak{a}$, welche die Variable x_0 nicht enthalten, wobei sich auch die Form 0 ergeben kann. Ist M der Maximalgrad der Basisformen von $\mathfrak{a}$, so wird $2M$ als obere Schranke für t vermutet.

Jedenfalls haben wir damit den

Satz 23. *Ist $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ein H-Ideal, so kann $\mathfrak{a} \cap \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ durch Bildung der Moduln $\mathfrak{M}(t; \mathfrak{a})$ und Anwendung des Gaußschen Algorithmus in endlich vielen Schritten berechnet werden.*

Für P-Ideale ist dazu der vorherige Übergang zum äquivalenten H-Ideal unerläßlich (vgl. Kap. 1, Definition 30 und 1.16.).

Beispiel. Wir betrachten wieder einmal das homogene Primideal $\mathfrak{v}_{14}^{(2)} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ mit den vier Basisformen

$$F_1 = x_0x_3 - x_1x_2, \quad F_2 = x_0^2x_2 - x_1^3, \quad F_3 = x_0x_2^2 - x_1^2x_3, \quad F_4 = x_1x_3^2 - x_2^3,$$

also $m_0 = 2$, $M = 3$, $2M = 6$. Gesucht ist $\mathfrak{v}_{14}^{(2)} \cap \mathbf{K}[x_0, x_1, x_3]$; mithin ist x_2 zu eliminieren. Wir haben also als erstes x_2 und x_0 zu vertauschen; das gibt

$$F_1 \mapsto x_2x_3 - x_0x_1, \quad F_2 \mapsto x_0x_2^2 - x_1^3, \quad F_3 \mapsto x_0^2x_2 - x_1^2x_3, \quad F_4 \mapsto x_1x_3^2 - x_0^3;$$

wir betrachten also das Ideal $\bar{\mathfrak{p}} := (G_1, G_2, G_3, G_4)$ mit

$$G_1 = x_0x_1 - x_2x_3, \quad G_2 = x_0^3 - x_1x_3^2, \quad G_3 = x_0^2x_2 - x_1^2x_3, \quad G_4 = x_0x_2^2 - x_1^3.$$

Der Modul $\mathfrak{M}(2; \bar{\mathfrak{p}})$ besteht nur aus G_1.

Der Modul $\mathfrak{M}(3; \bar{\mathfrak{p}})$ besteht aus den sieben linear unabhängigen Formen

$$\begin{array}{lll}
H_1 = G_2 = x_0^3 - x_1x_3^2, & H_4 = x_1G_1 = x_0x_1^2 - x_1x_2x_3, & H_6 = x_3G_1 = x_0x_1x_3 - x_2x_3^2, \\
H_2 = x_0G_1 = x_0^2x_1 - x_0x_2x_3, & H_5 = x_2G_1 = x_0x_1x_2 - x_2^2x_3, & H_7 = G_4 = x_0x_2^2 - x_1^3. \\
H_3 = G_3 = x_0^2x_2 - x_1^2x_3, & &
\end{array}$$

Der Modul $\mathfrak{M}(4;\bar{\mathfrak{p}})$ entsteht etwa durch Bildung der 28 Formen x_iH_k ($i = 0,1,2,3$; $k = 1, \ldots, 7$) welche jedoch nicht mehr linear unabhängig sind:

$$
\begin{array}{lll}
x_0H_1 = x_0^4 - x_0x_1x_3^2, & x_2H_2 = x_0^2x_1x_2 - x_0x_2^2x_3, & x_3H_4 = x_0x_1^2x_3 - x_1x_2x_3^2, \\
x_1H_1 = x_0^3x_1 - x_1^2x_3^2, & x_3H_2 = x_0^2x_1x_3 - x_0x_2x_3^2, & x_1H_6 = x_0x_1^2x_3 - x_1x_2x_3^2, \\
x_0H_2 = x_0^3x_1 - x_0^2x_2x_3, & x_0H_6 = x_0^2x_1x_3 - x_0x_2x_3^2, & \left.\left\{\begin{array}{l} x_2H_5 = x_0x_1x_2^2 - x_2^3x_3, \\ x_1H_7 = x_0x_1x_2^2 - x_1^4, \end{array}\right.\right\} \ (51) \\
x_2H_1 = x_0^3x_2 - x_1x_2x_3^2, & x_2H_3 = x_0^2x_2^2 - x_1^2x_2x_3, & \\
x_0H_3 = x_0^3x_2 - x_0x_1^2x_3, & & \\
x_3H_1 = x_0^3x_3 - x_1x_3^2, & x_0H_7 = x_0^2x_2^2 - x_0x_1^3, & x_3H_5 = x_0x_1x_2x_3 - x_2^2x_3^2, \\
x_1H_2 = x_0^2x_1^2 - x_0x_1x_2x_3, & x_3H_3 = x_0^2x_2x_3 - x_1^2x_3^2, & x_2H_6 = x_0x_1x_2x_3 - x_2^2x_3^2, \\
x_0H_4 = x_0^2x_1^2 - x_0x_1x_2x_3, & x_1H_4 = x_0x_1^3 - x_1^2x_2x_3, & x_3H_6 = x_0x_1x_3^2 - x_2x_3^3, \\
x_1H_3 = x_0^2x_1x_2 - x_1^3x_3, & x_2H_4 = x_0x_1^2x_2 - x_1x_2^2x_3, & x_2H_7 = x_0x_2^3 - x_1^3x_2, \\
x_0H_5 = x_0^2x_1x_2 - x_0x_2^2x_3, & x_1H_5 = x_0x_1^2x_2 - x_1x_2^2x_3, & x_3H_7 = x_0x_2^2x_3 - x_1^3x_3.
\end{array}
$$

Es bestehen die Abhängigkeitsrelationen

$$
\begin{array}{lll}
x_1H_1 - x_0H_2 - x_3H_3 = 0, & x_0H_5 - x_2H_2 \qquad\qquad = 0, & x_2H_4 - x_1H_5 = 0, \\
x_2H_1 - x_0H_3 - x_3H_4 = 0, & x_3H_2 - x_0H_6 \qquad\qquad = 0, & x_3H_4 - x_1H_6 = 0, \\
x_1H_2 - x_0H_4 \qquad\qquad = 0, & x_2H_3 - x_0H_7 - x_1H_4 = 0, & x_3H_5 - x_2H_6 = 0. \\
x_1H_3 - x_0H_5 - x_3H_7 = 0, & &
\end{array}
$$

Uns interessiert hier die aus (51) sich ergebende, von x_0 freie Form

$$x_2H_5 - x_1H_7 = x_1^4 - x_2^3x_3 = x_2^2G_1 - x_1G_4.$$

Vertauschen wir hierin wieder x_0 und x_2, so erhalten wir

$$x_0^2F_1 + x_1F_2 = x_0^3x_3 - x_1^4 \in \mathfrak{v}_{14}^{(2)} \cap \mathsf{K}[x_0, x_1, x_3].$$

Nun kann man zeigen (was wir an dieser Stelle nicht beweisen können), daß für d-dimensionale Primideale $\mathfrak{p}$ die Eliminationsideale $\mathfrak{p} \cap \mathsf{K}[x_{k_0}, \ldots, x_{k_d}, x_{k_{d+1}}]$ Hauptideale sind, sofern durch Weglassen eines Elementes aus $x_{k_0}, \ldots, x_{k_{d+1}}$ auf wenigstens eine Weise eine geeignete Numerierung $x_{i_0}, \ldots, x_{i_d}$ entsteht. Das ist nun in unserem Beispiel, dem H-Ideal $\mathfrak{v}_{14}^{(2)}$, der Fall, so daß wir nicht bis $t = 2M = 6$ zu rechnen brauchen, sondern bereits bei $t = 4$ abbrechen können. Wir haben somit

$$\mathfrak{v}_{14}^{(2)} \cap \mathsf{K}[x_0, x_1, x_3] = (x_0^3x_3 - x_1^4)$$

und mithin nach Satz 21

$$\mathfrak{v}_{14}^{(2)} \cap \mathsf{K}[x_0, x_1] = (0), \quad \mathfrak{v}_{14}^{(2)} \cap \mathsf{K}[x_0, x_3] = (0), \quad \mathfrak{v}_{14}^{(2)} \cap \mathsf{K}[x_1, x_3] = (0).$$

Entsprechend folgt $\mathfrak{v}_{14}^{(2)} \cap \mathsf{K}[x_0, x_2, x_3] = (x_0x_3^3 - x_2^4)$ und daraus

$$\mathfrak{v}_{14}^{(2)} \cap \mathsf{K}[x_0, x_2] = (0), \quad \mathfrak{v}_{14}^{(2)} \cap \mathsf{K}[x_2, x_3] = (0),$$

ferner

$$\mathfrak{v}_{14}^{(2)} \cap \mathsf{K}[x_0, x_1, x_2] = (F_2) = (x_0^2x_2 - x_1^3)$$

und daraus $\mathfrak{v}_{14}^{(2)} \cap \mathsf{K}[x_1, x_2] = (0)$. Schließlich vermerken wir noch

$$\mathfrak{v}_{14}^{(2)} \cap \mathsf{K}[x_1, x_2, x_3] = (F_4) = (x_1x_3^2 - x_2^3).$$

Mithin ist in diesem Beispiel — über die Forderung G 1 hinausgehend — $\mathfrak{v}_{14}^{(2)} \cap \mathsf{K}[x_i, x_j] = (0)$ für alle $(i, j) \in (0, 1, 2, 3)$; alle (i, j) sind also geeignete Numerierungen.

Für die Berechnung der Nullstellen nach Satz 18 erweist sich die geeignete Numerierung x_0, x_3 als besonders günstig. Aus den Eliminationsidealen $\mathfrak{v}_{14}^{(2)} \cap \mathsf{K}[x_0, x_1, x_3] = (x_0^3x_3 - x_1^4)$ und

$\mathfrak{v}_{14}^{(2)} \cap \mathbf{K}[x_0, x_2, x_3] = (x_0x_3^3 - x_2^4)$ ergeben sich für x_1 und x_2 die reinen Gleichungen vierten Grades (vgl. MfL Bd. 3, 14.8.) in x_1 bzw. x_2

$$\left.\begin{aligned} x_0^3x_3 - x_1^4 &= 0, \\ x_0x_3^3 - x_2^4 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

und (52) legt nahe, für y_0 und y_3 Parameter zu setzen. Da wir in einem algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbf{K}$ rechnen, können wir diese Parameter der Einfachheit halber als vierte Potenzen ansetzen: $y_0 = t_0^4$, $y_3 = t_1^4$. Aus (52) folgt dann $y_1 = t_0^3t_1$ und drei konjugierte Werte bzw. $y_2 = t_0t_1^3$ und drei konjugierte Werte, wobei sich die konjugierten Werte jeweils durch Multiplikation mit den von 1 verschiedenen vierten Einheitswurzeln -1, i, $-i$ ergeben (vgl. MfL Bd. 2, 7.4.). Das ergibt 16 Lösungen, die in F_1, F_2, F_3, F_4 einzusetzen sind. Dabei stellt sich heraus, daß nur $(t_0^4, t_0^3t_1, t_0t_1^3, t_1^4)$ als Nullstelle in Frage kommt, was der Leser selbst bestätigen kann. Damit haben wir $(t_0^4, t_0^3t_1, t_0t_1^3, t_1^4)$ als sogar allgemeine Nullstelle von $\mathfrak{v}_{14}^{(2)}$ und damit dessen Primidealeigenschaft (vgl. dazu 6.7.).

4.11. Grundideale, ungemischte, gemischte und pseudogemischte Ideale

Es sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k$ die unverkürzbare Darstellung durch größte Primärkomponenten für ein H-Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ der Dimension d. Nach W 3 besitzt dann wenigstens eines der Primärideale $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k$ die höchstmögliche Dimension d; daneben können noch die Dimensionszahlen $d-1, d-2, \ldots, 0, -1$ auftreten. Dem entsprechen die aufsteigenden Kodimensionszahlen (oder Rangzahlen) $r = n - d$, $r+1, r+2, \ldots, n, n+1$. Demgemäß wollen wir die Primärkomponenten $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k$ nach aufsteigenden Kodimensionszahlen ordnen und verwenden zur Kennzeichnung Doppelindizes, wobei der erste Index die Kodimension angibt:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n], \quad \operatorname{Dim} \mathfrak{a} = d = n - r, \\ \text{und} \\ &\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_{r1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{rs_r} \cap \mathfrak{q}_{r+1,1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{r+1,s_{r+1}} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{n1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{ns_n} \cap \mathfrak{q}_T. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Da nicht alle Kodimensionszahlen von r bis $n+1$ aufzutreten brauchen, ist die Darstellung (53) nicht notwendig unverkürzbar, d. h., im konkreten Fall ist für nicht auftretende Kodimensionszahlen $r + \delta$ zu setzen: $s_{r+\delta} = 1$ und $\mathfrak{q}_{r+\delta,1} = (1)$.

Definition 4. Das *i-te Grundideal* $\mathfrak{g}_i(\mathfrak{a})$ eines H-Ideals $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ist definiert durch

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{g}_i(\mathfrak{a}) := \mathfrak{q}_{r1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{rs_r} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{i1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{is_i} \quad \text{für} \quad i = r, \ldots, n, \\ &\mathfrak{g}_{n+1}(\mathfrak{a}) := \mathfrak{a}. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Entsprechend gilt für P-Ideale die

Definition 5. Das *i-te Grundideal* $\mathfrak{g}_i\big((\mathfrak{a})\big)$ eines P-Ideals $(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ ist definiert durch

$$\mathfrak{g}_i\big((\mathfrak{a})\big) := (\mathfrak{q}_{r1}) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_{rs_r}) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_{i1}) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_{is_i}) \quad \text{für} \quad i = r, \ldots, n. \tag{55}$$

Diese Definitionen der Grundideale stammen von EMMY NOETHER; weitere Definitionen wurden von HENTZELT, G. HERMANN, KRULL und dem Verfasser gegeben (vgl. RENSCHUCH [5], dort auch eine Zusammenstellung aller Definitionen).

Zum Nachweis der Eindeutigkeit der Grundideale machen wir folgende Feststellungen, die wir o. B. d. A. für H-Ideale formulieren:

1. Nach dem ersten Eindeutigkeitssatz (Kap. 2, Satz 37) sind alle zugehörigen Primideale eindeutig bestimmt; wegen $\operatorname{Dim} \mathfrak{q}_i = \operatorname{Dim} \mathfrak{p}_i$ nach W 2 gilt also: In jeder unverkürzbaren Darstellung $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k$ sind die Dimensionszahlen der Primärkomponenten eindeutig bestimmt.

2. Zweifel bezüglich der Eindeutigkeit der Grundideale können indessen wegen der Mehrdeutigkeit der eingebetteten Komponenten in der Darstellung $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k$ aufkommen (vgl. 2.20.). Nach 2.15. heißt $\mathfrak{q}_i$ eingebettet in $\mathfrak{q}_j$ genau dann, wenn $\mathfrak{p}_i \supset \mathfrak{p}_j$ und $\mathfrak{q}_i \not\supset \mathfrak{q}_j$ gilt. Weiter folgt nach (16): $\mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{p}_i \Rightarrow \operatorname{Dim} \mathfrak{p}_j > \operatorname{Dim} \mathfrak{p}_i$. Mit W 2 gibt dies

Satz 24. *Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k$ ein H-Ideal aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ mit $\operatorname{Dim} \mathfrak{a} = d$ und ist die Primärkomponente $\mathfrak{q}_i$ in der Primärkomponente $\mathfrak{q}_j$ eingebettet, so gilt:*

$$\mathfrak{q}_i \textit{ in } \mathfrak{q}_j \textit{ eingebettet} \Rightarrow \operatorname{Dim} \mathfrak{q}_i < \operatorname{Dim} \mathfrak{q}_j \leqq d \tag{56}$$

und mithin:

$$\mathfrak{q}_i \textit{ eingebettet} \Rightarrow \operatorname{Dim} \mathfrak{q}_i \leqq d - 1. \tag{57}$$

Entsprechendes gilt für P-Ideale $(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

Als Kontraposition von (57) folgt der

Satz 25. ***Bei einem d-dimensionalen H-Ideal oder P-Ideal sind alle d-dimensionalen Primärkomponenten isoliert.***

3. Wenn trotz der Mehrdeutigkeit der eingebetteten Primärkomponente $\mathfrak{q}_i$ die Durchschnittsdarstellung $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_j \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_i \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k$ wieder eindeutig ist, so liegt das an dem Auftreten der Primärkomponente $\mathfrak{q}_j$, in welche $\mathfrak{q}_i$ eingebettet ist. Nach (56) haben aber alle diese $\mathfrak{q}_j$ mit $\mathfrak{p}_i \supset \mathfrak{p}_j$ eine größere Dimension als $\mathfrak{q}_i$; mithin gilt der

Satz 26. *Ist $\mathfrak{q}_i$ eine eingebettete Komponente des d-dimensionalen H-Ideals $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ und $\operatorname{Dim} \mathfrak{q}_i = \delta < d$, so ist $\mathfrak{q}_i$ auch eingebettete Komponente der Grundideale $\mathfrak{g}_n(\mathfrak{a}), \mathfrak{g}_{n-1}(\mathfrak{a}), \ldots, \mathfrak{g}_{n-\delta}(\mathfrak{a})$. Entsprechendes gilt für P-Ideale.*

Aus Satz 26 folgt unmittelbar

Satz 27. *Für alle Primärkomponentenzerlegungen eines H-Ideals oder P-Ideals sind die Grundideale eindeutig bestimmt.*

Definition 6. Ein H-Ideal $\mathfrak{a}$ oder P-Ideal $(\mathfrak{a})$ heißt *ungemischt*, wenn alle Primärkomponenten dieselbe Dimension haben.

Aus (54) und (55) folgen unmittelbar zwei weitere Sätze.

Satz 28. *Für H-Ideale* $\mathfrak{a} \subset \mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *bzw. P-Ideale* $(\mathfrak{a}) \subset \mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ gilt

$$\mathfrak{a} \textit{ ungemischt} \Leftrightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{g}_r(\mathfrak{a}), \tag{58}$$

$$(\mathfrak{a}) \textit{ ungemischt} \Leftrightarrow (\mathfrak{a}) = \mathfrak{g}_r\big((\mathfrak{a})\big). \tag{59}$$

Insbesondere sind also Primärideale und Primideale ungemischt.

Satz 29. *Für H-Ideale* $\mathfrak{a} \subset \mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *gilt:*

$$\mathfrak{a} \textit{ besitzt keine triviale Komponente} \Leftrightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{g}_n(\mathfrak{a}), \tag{60}$$

$$\mathfrak{a} \textit{ besitzt eine triviale Komponente} \Leftrightarrow \mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}_n(\mathfrak{a}). \tag{61}$$

Definition 7. Ein H-Ideal $\mathfrak{a}$ oder P-Ideal $(\mathfrak{a})$ heißt *gemischt*, wenn es nicht ungemischt ist.

Aus (53) und (54) folgt unmittelbar

Satz 30. *Für H-Ideale* $\mathfrak{a} \subset \mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *bzw. P-Ideale* $(\mathfrak{a}) \subset \mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *gilt:*

$$\mathfrak{a} \textit{ gemischt} \Leftrightarrow \mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}_r(\mathfrak{a}), \tag{62}$$

$$(\mathfrak{a}) \textit{ gemischt} \Leftrightarrow (\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{g}_r\big((\mathfrak{a})\big). \tag{63}$$

Definition 8. Ist $\mathfrak{a}$ bzw. $(\mathfrak{a})$ ein d-dimensionales gemischtes H-Ideal bzw. P-Ideal, dessen Primärkomponenten mit kleinerer Dimension als d sämtlich eingebettet sind, so heißt $\mathfrak{a}$ bzw. $(\mathfrak{a})$ *pseudogemischt.*

Der Begriff „pseudogemischt" wurde von Gröbner eingeführt (vgl. [2], 137.10). Die hier und da von anderen Mathematikern aufgeworfene Frage, ob im Hinblick auf die Anwendungen die Bezeichnung „pseudoungemischt" nicht günstiger wäre, bleibt zu bedenken. Vielleicht wäre die Bezeichnung „radikalungemischt" am günstigsten, und dies aus folgendem Grunde:

Bei Radikalbildung können wegen $\mathfrak{p}_i \supset \mathfrak{p}_j$ alle eingebetteten Primideale $\mathfrak{p}_i$ gestrichen werden (Kap. 2, Satz 21), so daß in der unverkürzbaren Darstellung für das Radikal im Fall der Pseudogemischtheit nur noch d-dimensionale Primideale stehen; mithin gilt

Satz 31. *Ein H-Ideal* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *bzw. P-Ideal* $(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *ist pseudogemischt genau dann, wenn* Rad $\mathfrak{a}$ *bzw.* Rad $(\mathfrak{a})$ *ungemischt ist.*

Mit Satz 28 folgt für Satz 31 die formelmäßige Darstellung:

$$\mathfrak{a} \textit{ ist pseudogemischt} \Leftrightarrow \operatorname{Rad} \mathfrak{a} = \mathfrak{g}_r(\operatorname{Rad} \mathfrak{a}) = \operatorname{Rad} \mathfrak{g}_r(\mathfrak{a}), \tag{64}$$

bzw. für P-Ideale:

$$(\mathfrak{a}) \textit{ ist pseudogemischt} \Leftrightarrow \operatorname{Rad}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{g}_r\big(\operatorname{Rad}(\mathfrak{a})\big) = \operatorname{Rad} \mathfrak{g}_r\big((\mathfrak{a})\big). \tag{65}$$

In Kap. 3, (84), hatten wir NG $(\mathfrak{a})$ = NG (Rad $\mathfrak{a}$) bewiesen. Demzufolge kann aus der Aussage „NG $(\mathfrak{a})$ ist ungemischt" bzw. „NG $\big((\mathfrak{a})\big)$ ist ungemischt" nur auf „$\mathfrak{a}$ bzw. $(\mathfrak{a})$ ist pseudogemischt" geschlossen werden. Die Nichtbeachtung dieses Tatbestandes hat in der algebraischen Geometrie zu Differenzen geführt.

4.12. Dimension von $((\mathfrak{p}), f)$ und $(\mathfrak{p}, F)$

Die folgenden Sätze und die von 4.21. werden von S. Lang in [56], II, 7., als *Dimensionstheorem* bezeichnet.

Satz 32. *Ist* $(\mathfrak{p}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *ein d-dimensionales Primideal und* $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *ein Polynom, so gilt:*

$$\operatorname{Dim}\big((\mathfrak{p}), f\big) = \begin{cases} d \Leftrightarrow f \in (\mathfrak{p}), \\ d - 1 \quad \textit{oder} \quad -1 \Leftrightarrow f \notin (\mathfrak{p}); \end{cases} \tag{66}$$

der Fall Dim $\big((\mathfrak{p}), f\big) = -1$ *ist nach* (2) *mit* $\big((\mathfrak{p}), f\big) = (1)$ *gleichbedeutend.*

Beweis. Aus $f \in (\mathfrak{p})$ folgt $\big((\mathfrak{p}), f\big) = (\mathfrak{p})$ und folglich auch

$$\operatorname{Dim}\big((\mathfrak{p}), f\big) = \operatorname{Dim}(\mathfrak{p}) = d.$$

Das Primideal $(\mathfrak{p})$ habe die allgemeine Nullstelle

$$\big(y_1(t_1, \ldots, t_d), \ldots, y_n(t_1, \ldots, t_d)\big).$$

Wenn Dim $\big((\mathfrak{p}), f\big) = d$ ist, muß $f(y_1, \ldots, y_n) = 0$ sein; da nun aber $(y_1, \ldots, y_n)$ als allgemeine Nullstelle von $(\mathfrak{p})$ vorausgesetzt worden war, folgt $f(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathfrak{p})$ nach Kap. 3, (19).

Wenn Dim $\big((\mathfrak{p}), f\big) = d - 1$ oder $\big((\mathfrak{p}), f\big) = (1)$ gilt, ist $f \notin (\mathfrak{p})$, denn im Fall $f \in (\mathfrak{p})$ würde Dim $\big((\mathfrak{p}), f\big) = d$ nach dem oben Bewiesenen folgen.

Wenn $f \notin (\mathfrak{p})$ ist, ist

$$f\big(y_1(t_1, \ldots, t_d), \ldots, y_n(t_1, \ldots, t_d)\big) = f(t_1, \ldots, t_d) \neq 0 \text{ id. in } t_1, \ldots, t_d.$$

Jetzt sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: Nach Durchführung aller möglichen Vereinfachungen komme in $f(t_1, \ldots, t_d)$ wenigstens ein Parameter, o. B. d. A. t_d, wirklich vor. Für jede Nullstelle von $\big((\mathfrak{p}), f\big)$ muß dann

$$f(t_1, \ldots, t_d) = 0 \tag{67}$$

gelten.

Aus (67) folgt im Fall des Auftretens von $t_1, \ldots, t_{d-1}$, daß sich t_d durch $t_1, \ldots, t_{d-1}$ ausdrücken läßt. Hängt jedoch die linke Seite von (67) von t_d allein ab, so folgt $t_d = \text{const}$ aus (67). In beiden Fällen ergibt sich $\text{Dim}\,\big((\mathfrak{p}), f\big) = d - 1$ nach (W 4) (vgl. Satz 6).

Fall 2: Nach Durchführung aller möglichen Vereinfachungen komme in $f(t_1, \ldots, t_d)$ keiner der Parameter $t_1, \ldots, t_d$ vor, also ist $f(t_1, \ldots, t_d) = \text{const} = C$, und wegen $f(t_1, \ldots, t_d) \neq 0$ id. in $t_1, \ldots, t_d$ ist $C \neq 0$. Dann hat $\big((\mathfrak{p}), f\big)$ keine Nullstelle und muß nach 3.8. das Einheitsideal sein; dies folgt auch so: Ist

$$g(x_1, \ldots, x_n) := f(x_1, \ldots, x_n) - C,$$

dann ist

$$g(y_1, \ldots, y_n) = f(y_1, \ldots, y_n) - C = C - C = 0,$$

mithin $g(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathfrak{p})$, also

$$\big((\mathfrak{p}), f\big) = \big((\mathfrak{p}), g + C\big) = \big((\mathfrak{p}), C\big) = \left((\mathfrak{p}), \frac{1}{C} \cdot C\right) = (1)$$

wegen $C \neq 0$. Damit ist der Satz 32 vollständig bewiesen.

Ist dagegen $\mathfrak{p}$ ein H-Ideal, so kann der zweite Fall nicht eintreten; wir haben also den

Satz 33. *Ist $\mathfrak{p} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ein d-dimensionales homogenes Primideal und $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ eine Form, so gilt:*

$$\text{Dim}\,(\mathfrak{p}, F) = \begin{cases} d \Leftrightarrow F \in \mathfrak{p}, \\ d - 1 \Leftrightarrow F \notin \mathfrak{p}. \end{cases} \tag{68}$$

4.13. Dimension von $((\mathfrak{a}), f)$ und $(\mathfrak{a}, F)$

Um den Fall $\big((\mathfrak{a}), f\big)$ auf $\big((\mathfrak{p}), f\big)$ zurückführen zu können, müssen wir die Rechenregeln für Radikale und die Beziehung

$$\text{Dim}\,(\mathfrak{a}) = \text{Dim Rad}\,(\mathfrak{a}) \tag{11}$$

wesentlich benutzen.

Aus der im Kap. 1, (100), bewiesenen Beziehung

$$\text{Rad}\,\big((\mathfrak{a}) + (\mathfrak{b})\big) = \text{Rad}\,\big((\text{Rad}\,(\mathfrak{a})) + (\mathfrak{b})\big)$$

folgt für Primärideale $(\mathfrak{q})$ mit $\text{Rad}\,(\mathfrak{q}) = (\mathfrak{p})$ unmittelbar

$$\text{Rad}\,\big((\mathfrak{q}), f\big) = \text{Rad}\,\big((\mathfrak{p}), f\big). \tag{69}$$

Weiterhin galt nach Kap. 1, (114),

$$\text{Rad}\,\big(((\mathfrak{a}) \cap (\mathfrak{b})) + (\mathfrak{c})\big) = \big(\text{Rad}\,((\mathfrak{a}) + (\mathfrak{c}))\big) \cap \big(\text{Rad}\,((\mathfrak{b}) + (\mathfrak{c}))\big),$$

wobei die Radikalbildung wesentlich für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens war. Hieraus folgt für $(\mathfrak{c}) = (f)$ unmittelbar

$$\text{Rad}\,\big((\mathfrak{a}) \cap (\mathfrak{b}), f\big) = \text{Rad}\,\big((\mathfrak{a}), f\big) \cap \text{Rad}\,\big((\mathfrak{b}), f\big),$$

mithin

$$\text{Rad}\,\big((\mathfrak{q}_1) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_k), f\big) = \text{Rad}\,\big((\mathfrak{q}_1), f\big) \cap \text{Rad}\,\big((\mathfrak{q}_2), f\big) \cap \cdots \cap \text{Rad}\,\big((\mathfrak{q}_k), f\big),$$

und mit (69) folgt

$$\text{Rad}\,\big((\mathfrak{q}_1) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_k), f\big) = \text{Rad}\,\big((\mathfrak{p}_1), f\big) \cap \text{Rad}\,\big((\mathfrak{p}_2), f\big) \cap \cdots \cap \text{Rad}\,\big((\mathfrak{p}_k), f\big). \tag{70}$$

Aus (W 3) folgt unmittelbar

$$\text{Dim}\,\big((\mathfrak{a}) \cap (\mathfrak{b})\big) = \text{Max}\,\{\text{Dim}\,(\mathfrak{a}), \text{Dim}\,(\mathfrak{b})\} \tag{71}$$

und mithin wegen (11)

$$\text{Dim}\,\big((\mathfrak{q}_1) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_k), f\big) = \text{Max}\,\big\{\text{Dim Rad}\,\big((\mathfrak{p}_\varkappa), f\big)\big\} \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k). \tag{72}$$

Wir setzen jetzt $\text{Dim}\,(\mathfrak{a}) = d$, $r = n - d$, voraus und benutzen die Darstellung (53) für inhomogene P-Ideale $(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$:

$$(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{q}_{r1}) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_{rs_r}) \cap (\mathfrak{q}_{r+1,1}) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_{r+1,s_{r+1}}) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_{n1}) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_{ns_n}); \tag{73}$$

aus (73) folgt wegen (70)

$$\begin{aligned} \text{Rad}\,\big((\mathfrak{a}), f\big) = {} & \text{Rad}\,\big((\mathfrak{p}_{r1}), f\big) \cap \cdots \cap \text{Rad}\,\big((\mathfrak{p}_{rs_r}), f\big) \\ & \cap \text{Rad}\,\big((\mathfrak{p}_{r+1,1}), f\big) \cap \cdots \cap \text{Rad}\,\big((\mathfrak{p}_{r+1,s_{r+1}}), f\big) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \cap \text{Rad}\,\big((\mathfrak{p}_{n1}), f\big) \cap \cdots \cap \text{Rad}\,\big((p_{ns_n}), f\big). \end{aligned} \tag{74}$$

Mit (66) und (11) folgt aus (74): Es ist $\text{Dim}\,\big((\mathfrak{a}), f\big) = d$ genau dann, wenn $f \in (\mathfrak{p}_{r\sigma})$ für wenigstens ein $\sigma \in (1, \ldots, s_r)$ gilt. Ist hingegen $f \notin (\mathfrak{p}_{r\sigma})$ für alle $\sigma = 1, \ldots, s_r$, so ist $\text{Dim}\,\big((\mathfrak{a}), f\big) \leqq d - 1$. Sind alle $\big((\mathfrak{p}_{r\sigma}), f\big) = (1)$ und gilt $f \notin (\mathfrak{p}_{r+1,\sigma})$ für alle $\sigma = 1, \ldots, s_{r+1}$, so ist $\text{Dim}\,\big((\mathfrak{a}), f\big) \leqq d - 2$ usw.; auf diese Weise kann auch der Fall $\big((\mathfrak{a}), f\big) = (1)$ eintreten. Wir haben also als Ergebnis den

Satz 34. *Ist* $(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *ein d-dimensionales P-Ideal und* $f \in \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *ein Polynom, so ist* $\operatorname{Dim}\big((\mathfrak{a}), f\big) = d$, *wenn f in wenigstens einem zugehörigen d-dimensionalen Primideal aufgeht, andernfalls ist* $\operatorname{Dim}(\mathfrak{a}) \leqq d - 1$.

Nach Kap. 1, Satz 29, galt:

$$(\mathfrak{a}) : (\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}) \Leftrightarrow (\mathfrak{b}) \not\subseteq (\mathfrak{p}_\varkappa) \text{ für alle } \varkappa = 1, \ldots, k;$$

also speziell für $(\mathfrak{b}) = (f)$:

$$\begin{aligned} & f \notin (\mathfrak{p}_{r\sigma}) \text{ für alle } \sigma = 1, \ldots, s_r \\ & \Leftrightarrow \big((\mathfrak{p}_{r1}) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_{rs_r})\big) : (f) = (\mathfrak{q}_{r1}) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_{rs_r}). \end{aligned}$$

Nach (55) ist aber $(\mathfrak{q}_{r1}) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_{rs_r}) = \mathfrak{g}_r\big((\mathfrak{a})\big)$; mithin gilt:

$$f \notin (\mathfrak{p}_{r\sigma}) \text{ für alle } \sigma = 1, \ldots, s_r \Leftrightarrow \mathfrak{g}_r\big((\mathfrak{a})\big) : (f) = \mathfrak{g}_r\big((\mathfrak{a})\big),$$

und dementsprechend gilt auch die Kontraposition:

$$f \in (\mathfrak{p}_{r_\sigma}) \text{ für } \textit{wenigstens ein } \sigma \in (1, \ldots, s_r) \Leftrightarrow \mathfrak{g}_r\big((\mathfrak{a})\big) : (f) \supset \mathfrak{g}_r\big((\mathfrak{a})\big);$$

wir haben also für Satz 34 die formelmäßige Darstellung:

$$\operatorname{Dim}\big((\mathfrak{a}), f\big) \left\{ \begin{array}{ll} = d & \Leftrightarrow \mathfrak{g}_r\big((\mathfrak{a})\big) : (f) \supset \mathfrak{g}_r\big((\mathfrak{a})\big), \\ \leqq d - 1 & \Leftrightarrow \mathfrak{g}_r\big((\mathfrak{a})\big) : (f) = \mathfrak{g}_r\big((\mathfrak{a})\big). \end{array} \right\} \tag{75}$$

Beispiel. Es sei

$$(\mathfrak{a}) = (x_1^2 + x_1, x_1x_2, \ldots, x_1x_r), \qquad (\mathfrak{a}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n].$$

Wir wollen zeigen, daß $\operatorname{Dim}(\mathfrak{a}) = n - 1$ und $\operatorname{Dim}((\mathfrak{a}), x_1 + 1) = n - r$ gilt. Ersteres folgt nach (W 4) aus der Nullstelle

$$y_1 = 0, \quad y_2 = t_1, \quad \ldots, \quad y_r = t_{r-1}, \quad \ldots, \quad y_n = t_{n-1}$$

oder aus der Durchschnittsdarstellung

$$(\mathfrak{a}) = (x_1) \cdot (x_1 + 1, x_2, \ldots, x_r) = (x_1) \cap (x_1 + 1, x_2, \ldots, x_r).$$

Weiter ist hier $\mathfrak{g}_1((\mathfrak{a})) = (x_1)$; wegen $x_1 + 1 \notin (x_1)$ ist

$$\mathfrak{g}_1((\mathfrak{a})) : (x_1 + 1) = \mathfrak{g}_1((\mathfrak{a}));$$

wegen

$$x_i = x_i(x_1 + 1) - x_1x_i \qquad (i = 2, \ldots, r)$$

ist

$$((\mathfrak{a}), x_1 + 1) = (x_1 + 1, x_2, \ldots, x_r),$$

und nach (W 1) ist $\operatorname{Dim}((\mathfrak{a}), x_1 + 1) = n - r$. Man beachte auch hier bei der Darstellung von x_i die nur bei inhomogenen P-Idealen mögliche Gradüberschreitung auf der rechten Seite.

Dieses Beispiel von GRÖBNER zeigt, daß bei inhomogenen P-Idealen durch die Hinzunahme eines Polynoms die Dimension beliebig stark verkleinert werden kann (wenn r und n nur genügend groß sind).

Um zu einer geometrischen Formulierung unserer Sätze zu gelangen, erinnern wir an Definition 18 von Kapitel 3, wonach Nullstellengebilde von Hauptidealen Hyperflächen genannt werden. Unter Benutzung von NG $\big((\mathfrak{a}) + (\mathfrak{b})\big) = \text{NG}\big((\mathfrak{a})\big) \cap \text{NG}\big((\mathfrak{b})\big)$ gewinnen wir dann folgende geometrische Interpretationen:

für (66): Im n-dimensionalen affinen Raum ist der Schnitt eines irreduziblen algebraischen d-dimensionalen Nullstellengebildes (kurz: einer d-dimensionalen Varietät) mit einer Hyperfläche d-dimensional oder $(d-1)$-dimensional, falls er existiert;

für (75): Im n-dimensionalen affinen Raum ist der Schnitt eines d-dimensionalen algebraischen Nullstellengebildes (oder: eines d-dimensionalen algebraischen Systems) mit einer Hyperfläche höchstens d-dimensional, falls er existiert, kann aber beliebig kleiner als $d - 1$ sein.

Einfacher liegen die Dinge im projektiven Raum. Hier können wir sagen: Im n-dimensionalen projektiven Raum existiert für $d \geqq 1$ stets der Schnitt eines d-dimensionalen algebraischen Nullstellengebildes mit einer Hyperfläche und hat die Dimension d oder $d - 1$ (vgl. (68) und die noch folgende Formel (72)).

Wir setzen jetzt $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ als H-Ideal mit Dim $\mathfrak{a} = d$ und Kodim $\mathfrak{a} = r = n - d$ voraus und benutzen die Darstellung (53) für H-Ideale, also in der Gestalt

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_{r1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{rs_r} \cap \mathfrak{q}_{r+1,1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{r+1,s_{r+1}} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{n1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{ns_n} \cap \mathfrak{q}_T$$

und gewinnen analog dem inhomogenen Fall

$$\begin{aligned}\text{Rad}\,(\mathfrak{a}, F) = {} & \text{Rad}\,(\mathfrak{p}_{r1}, F) \cap \cdots \cap \text{Rad}\,(\mathfrak{p}_{rs_r}, F)\\ & \cap \text{Rad}\,(\mathfrak{p}_{r+1,1}, F) \cap \cdots \cap \text{Rad}\,(\mathfrak{p}_{r+1,s_{r+1}}, F)\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ & \cap \text{Rad}\,(\mathfrak{p}_{n1}, F) \cap \cdots \cap \text{Rad}\,(\mathfrak{p}_{ns_n}, F) \cap \text{Rad}\,(\mathfrak{p}_T, F).\end{aligned}$$

Wegen $\mathfrak{p}_T = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ ist nun aber $(\mathfrak{p}_T, F) = \mathfrak{p}_T$ und Rad $\mathfrak{p}_T = \mathfrak{p}_T$, also auch Rad $(\mathfrak{p}_T, F) = \mathfrak{p}_T$; in obiger Durchschnittsdarstellung kann also diese letzte Primärkomponente gestrichen werden, und es bleibt

$$\begin{aligned}\text{Rad}\,(\mathfrak{a}, F) = {} & \text{Rad}\,(\mathfrak{p}_{r1}, F) \cap \cdots \cap \text{Rad}\,(\mathfrak{p}_{rs_r}, F)\\ & \cap \text{Rad}\,(\mathfrak{p}_{r+1,1}, F) \cap \cdots \cap \text{Rad}\,(\mathfrak{p}_{r+1,s_{r+1}}, F)\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ & \cap \text{Rad}\,(\mathfrak{p}_{n1}, F) \cap \cdots \cap \text{Rad}\,(\mathfrak{p}_{ns_n}, F).\end{aligned} \tag{76}$$

Mit (68) und (12) folgt aus (76) der

Satz 35. *Ist* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein d-dimensionales H-Ideal und* $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *eine Form, so ist* Dim $(\mathfrak{a}, F) = d$, *wenn F in wenigstens einem zugehörigen d-dimensionalen Primideal aufgeht; wenn dagegen F in keinem zugehörigen d-dimensionalen Primideal aufgeht, ist* Dim $(\mathfrak{a}, F) = d - 1$.

Analog zum Satz 34 haben wir dafür die formelmäßige Darstellung:

$$\operatorname{Dim}(\mathfrak{a}, F) = \begin{cases} d & \Leftrightarrow \mathfrak{g}_r(\mathfrak{a}) : (F) \supset \mathfrak{g}_r(\mathfrak{a}), \\ d - 1 & \Leftrightarrow \mathfrak{g}_r(\mathfrak{a}) : (F) = \mathfrak{g}_r(\mathfrak{a}). \end{cases} \tag{77}$$

Als besonders wichtig wird sich der Spezialfall $\mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a}$ erweisen. Aus $\mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a}$ folgt $\mathfrak{g}_r(\mathfrak{a}) : (F) = \mathfrak{g}_r(\mathfrak{a})$; mithin gilt der

Satz 36. *Ist* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein d-dimensionales H-Ideal ohne triviale Komponente und ist* $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *eine Form mit* $\mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a}$, *so ist* $\operatorname{Dim}(\mathfrak{a}, F) = d - 1$, *kurz:*

$$\bigl(\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_n(\mathfrak{a}) \wedge \operatorname{Dim} \mathfrak{a} = d \wedge \mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a}\bigr) \Rightarrow \operatorname{Dim}(\mathfrak{a}, F) = d - 1. \tag{78}$$

Nach (60) bedeutet $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_n(\mathfrak{a})$, daß $\mathfrak{a}$ keine triviale Komponente besitzt und umgekehrt; diese Voraussetzung ist nach dem Dubreilschen Lemma (Kap. 3, Satz 45) für die Existenz von Formen F mit $\mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a}$ notwendig und hinreichend.

Die Umkehrung von (78) gilt wegen (58) und (77) nur im Fall der Ungemischtheit von $\mathfrak{a}$:

$$\bigl(\mathfrak{a} \textit{ ungemischt} \wedge \operatorname{Dim} \mathfrak{a} = d \wedge \operatorname{Dim}(\mathfrak{a}, F) = d - 1\bigr) \Rightarrow \mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a}. \tag{79}$$

4.14. Dimension von $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$

Wir formulieren dies zunächst für H-Ideale $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. Ersetzen wir in Satz 20 von 2.11. das Ideal $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$, so folgt

$$\begin{aligned} &\mathfrak{q} : \mathfrak{b} = \mathfrak{q} && \Leftrightarrow \mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{p}, \\ &\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q} : \mathfrak{b} \subset (1) && \Leftrightarrow \mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{q} \wedge \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{p}. \\ &\mathfrak{q} : \mathfrak{b} = (1) && \Leftrightarrow \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{q}; \end{aligned}$$

dabei ist im zweiten Fall $\operatorname{Rad}(\mathfrak{q} : \mathfrak{b}) = \mathfrak{p}$. Wegen $\operatorname{Dim} \mathfrak{a} = \operatorname{Dim} \operatorname{Rad} \mathfrak{a}$ gemäß (12) folgt mithin:

$$\mathfrak{q} : \mathfrak{b} \neq (1) \Leftrightarrow \operatorname{Dim} \mathfrak{q} : \mathfrak{b} = \operatorname{Dim} \mathfrak{q}. \tag{80}$$

Für $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k$ folgt unter Benutzung von Kap. 1, (160), $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = (\mathfrak{q}_1 : \mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{q}_2 : \mathfrak{b}) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_k : \mathfrak{b})$ mit (53) und (54) sofort:

Satz 37. *Für H-Ideale* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *aus* $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *mit* $\operatorname{Dim} \mathfrak{a} = d = n - r$ *gilt:*

$$\operatorname{Dim} \mathfrak{a} : \mathfrak{b} \begin{cases} = \operatorname{Dim} \mathfrak{a} & \textit{für} \quad \mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{g}_r(\mathfrak{a}), \\ < \operatorname{Dim} \mathfrak{a} & \textit{für} \quad \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{g}_r(\mathfrak{a}). \end{cases} \tag{81}$$

Für P-Ideale lassen sich dieselben Schlüsse in gleicher Weise durchführen; es gilt also

Satz 38. *Für P-Ideale* $(\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{b})$ *aus* $\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *mit* $\operatorname{Dim}(\mathfrak{a}) = d = n - r$ *gilt:*

$$\operatorname{Dim}(\mathfrak{a}) : (\mathfrak{b}) \begin{cases} = \operatorname{Dim}(\mathfrak{a}) & \textit{für} \quad (\mathfrak{b}) \nsubseteq \mathfrak{g}_r\big((\mathfrak{a})\big), \\ < \operatorname{Dim}(\mathfrak{a}) & \textit{für} \quad (\mathfrak{b}) \subseteqq \mathfrak{g}_r\big((\mathfrak{a})\big). \end{cases} \tag{82}$$

4.15. Ungemischtheit von Hauptidealen

Wir wollen auch hier die Überlegungen für H-Ideale durchführen und beweisen (unter Benutzung einer Mitteilung von D. Nesselmann) den wichtigen

Satz 39. $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *sei ein H-Ideal. Dann gilt:*

$$\mathfrak{a} \textit{ ist Hauptideal} \Leftrightarrow \mathfrak{a} \textit{ ist ungemischt} \wedge \operatorname{Dim} \mathfrak{a} = n - 1. \tag{83}$$

Beweis. ($\Leftarrow$): Es sei zunächst $\mathfrak{p} = (P_1, \ldots, P_s)$ ein Primideal und $\operatorname{Dim} \mathfrak{p} = n - 1$. Ist $(P_1, \ldots, P_s)$ eine Minimalbasis von $\mathfrak{p}$, so sind $P_1, \ldots, P_s$ nach Primidealdefinition (vgl. Kap. 2, (2)) irreduzibel. Ist $P \in \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ irreduzibel und $P \in \mathfrak{p}$, dann ist (P) ein Primideal mit $(P) \subseteqq \mathfrak{p}$, wegen Satz 17 und (16) gilt also $n - 1 = \operatorname{Dim}(P) \geqq \operatorname{Dim} \mathfrak{p} = n - 1$; wir haben mithin $(P) \subseteqq \mathfrak{p}$ und $\operatorname{Dim}(P) = \operatorname{Dim} \mathfrak{p}$. Aus (16) folgt indirekt:

$$\mathfrak{p}_1 \subseteqq \mathfrak{p}_2 \wedge \operatorname{Dim} \mathfrak{p}_1 = \operatorname{Dim} \mathfrak{p}_2 \Rightarrow \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2; \tag{84}$$

aus (84) folgt $\mathfrak{p} = (P)$.

Aus $(\mathfrak{p}^\varrho) \subseteqq \mathfrak{q} \subset (P)$, $(\mathfrak{p}^{\varrho-1}) \nsubseteq \mathfrak{q}$, $\varrho \geqq 2$, folgt für $F = H_1 P \in \mathfrak{q}$ nacheinander $H_1 \in (P)$, $H_1 = H_2 P$, $H_2 \in (P)$, $F = H_2 P^2$ usw. bis $F = H_\varrho P^\varrho$; mithin sind die Hauptideale $(P^\varrho) = \mathfrak{p}^\varrho$ für $\varrho = 2, 3, 4, \ldots$ die einzigen Primärideale mit $\mathfrak{p} = (P)$ als Radikal.

Ist nun $\mathfrak{q}$ ein $(n-1)$-dimensionales Primärideal, so ist wegen $\operatorname{Dim} \mathfrak{a} = \operatorname{Dim} \operatorname{Rad} \mathfrak{a}$ gemäß (12) das Ideal $\operatorname{Rad} \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ ebenfalls $(n-1)$-dimensional und nach dem soeben Bewiesenen $\operatorname{Rad} \mathfrak{q} = \mathfrak{p} = (P)$ und $\mathfrak{q} = (P^\varrho)$ ein Hauptideal.

Ist schließlich $\mathfrak{a}$ ein ungemischtes $(n-1)$-dimensionales reduzibles H-Ideal, so ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k$, und demgemäß sind wegen der vorausgesetzten Ungemischtheit alle Primärkomponenten $(n-1)$-dimensional. Mithin gilt $\mathfrak{q}_1 = (P_1^{\varrho_1})$, $\mathfrak{q}_2 = (P_2^{\varrho_2})$, $\ldots$, $\mathfrak{q}_k = (P_k^{\varrho_k})$; wegen der paarweisen Teilerfremdheit von $P_1, P_2, \ldots, P_k$ ist mithin

$$\mathfrak{a} = (P_1^{\varrho_1} \cdot P_2^{\varrho_2} \cdots P_k^{\varrho_k}), \tag{85}$$

also ein Hauptideal.

($\Rightarrow$): Ist umgekehrt $\mathfrak{a} = (F)$ ein Hauptideal, so ist zunächst $\operatorname{Dim} \mathfrak{a} = n - 1$ nach Satz 17. Jetzt ist F eine Form aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. Nun ist $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ zwar kein euklidischer Ring, aber dennoch ein ZPE-Ring. Mithin existiert für (F) eine Darstellung der Gestalt (85), aus welcher $\mathfrak{a} = (P_1^{\varrho_1}) \cap (P_2^{\varrho_2}) \cap \cdots \cap (P_k^{\varrho_k})$ mit Rad $(P_i^{\varrho_i}) = (P_i)$ folgt. Wegen der Irreduzibilität sind die (P_i) Primideale und also die $(P_i^{\varrho_i})$ Primärideale, welche als Hauptideale nach Satz 17 sämtlich die gleiche Dimension $n - 1$ haben; mithin ist $\mathfrak{a}$ ungemischt, q. e. d.

Ganz entsprechend verlaufen die Beweise für P-Ideale; mithin gilt

Satz 40. $(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *sei ein P-Ideal. Dann gilt:*

$$(\mathfrak{a}) \text{ ist Hauptideal} \Leftrightarrow (\mathfrak{a}) \text{ ist ungemischt} \wedge \operatorname{Dim}(\mathfrak{a}) = n - 1. \tag{86}$$

Wir stellten im zweiten Kapitel fest, daß die effektive Durchführung der Primärkomponentenzerlegung und mithin auch die daraus folgende Entscheidung über Gemischtheit und Ungemischtheit des betreffenden P-Ideals oder H-Ideals nur in besonderen Fällen möglich ist. Daher ist es von Bedeutung, *hinreichende* Bedingungen für die Ungemischtheit von P-Idealen und H-Idealen angeben zu können. Die Sätze 39 und 40 stellen eine erste derartige Bedingung dar, die wir durch die Begriffe „Ideal der Hauptklasse" und „perfektes Ideal" im folgenden abschwächen werden.

4.16. Dimension von $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ für H-Ideale

Der folgende Satz 41 wurde erstmals von VAN DER WAERDEN bewiesen (vgl. [5], Satz II); für weitere Beweise sei auf ZARISKI und SAMUEL [1], p. 207, Theorem 27, S. LANG [1], p. 38, Corollary, O.-H. KELLER [2], S. 153, Satz 44, und die Dissertation von RENSCHUCH [1], S. 10, Satz 3, verwiesen.

Satz 41 (Allgemeiner Dimensionssatz). *Sind* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *H-Ideale aus* $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *mit* $\operatorname{Dim} \mathfrak{a} = d$, $\operatorname{Dim} \mathfrak{b} = \delta := n - \varrho$, *so ist*

$$\operatorname{Dim}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \geqq d - \varrho. \tag{87}$$

Beweis. Auf den vollständigen Beweis soll hier verzichtet werden; wir wollen immerhin zeigen, wie (87) auf den Fall zurückgeführt werden kann, daß $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ prime H-Ideale sind. Dazu wenden wir wieder

$$\operatorname{Rad}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \operatorname{Rad}\big((\operatorname{Rad} \mathfrak{a}) + (\operatorname{Rad} \mathfrak{b})\big)$$

aus Kap. 1, (100), und

$$\operatorname{Rad}\big((\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2), \mathfrak{a}_3\big) = \big(\operatorname{Rad}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_3)\big) \cap \big(\operatorname{Rad}(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)\big)$$

aus Kap. 1, (114), mehrmals auf $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k$ und $\mathfrak{b} = \bar{\mathfrak{q}}_1 \cap \cdots \cap \bar{\mathfrak{q}}_h$ an und haben damit

$$\begin{aligned}\operatorname{Rad}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \operatorname{Rad}(\mathfrak{p}_1, \bar{\mathfrak{p}}_1) &\cap \cdots \cap \operatorname{Rad}(\mathfrak{p}_1, \bar{\mathfrak{p}}_h)\\ &\cap \operatorname{Rad}(\mathfrak{p}_2, \bar{\mathfrak{p}}_1) \cap \cdots \cap \operatorname{Rad}(\mathfrak{p}_2, \bar{\mathfrak{p}}_h)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\cap \operatorname{Rad}(\mathfrak{p}_k, \bar{\mathfrak{p}}_1) \cap \cdots \cap \operatorname{Rad}(\mathfrak{p}_k, \bar{\mathfrak{p}}_h).\end{aligned} \tag{88}$$

Aus (88) und wegen $\operatorname{Dim} \mathfrak{a} = \operatorname{Dim} \operatorname{Rad} \mathfrak{a}$ nach (12) folgt, daß es also genügt, (87) für zwei homogene Primideale $\mathfrak{p}$, $\bar{\mathfrak{p}}$ zu beweisen. Dann gilt sogar der etwas schärfere

Satz 42. *Sind $\mathfrak{p}$ und $\bar{\mathfrak{p}}$ zwei homogene Primideale aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ mit* $\operatorname{Dim} \mathfrak{p} = d$, $\operatorname{Dim} \bar{\mathfrak{p}} = \delta := n - \varrho$, *so gilt*

$$\operatorname{Dim}(\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}}) \geqq d - \varrho \wedge (\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}}) \textit{ pseudogemischt für } \operatorname{Dim}(\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}}) = d - \varrho. \tag{89}$$

Zum Beweis verweisen wir auf die anfangs genannten Autoren; insbesondere die Aussage der Pseudogemischtheit ist schwieriger zu beweisen; für den Spezialfall $\bar{\mathfrak{p}} = (F)$ führen wir den Beweis in 4.21. Allgemein gilt $\operatorname{Rad}(\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{g}_{r+\varrho}(\operatorname{Rad}(\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}}))$.

In geometrischer Sprechweise lautet Satz 42 — wenn wir die kürzere Bezeichnung „Varietät" anstelle von „Nullstellengebilde eines Primideals" benutzen und $\operatorname{NG}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \operatorname{NG}(\mathfrak{a}) \cap \operatorname{NG}(\mathfrak{b})$ gemäß Kap. 5, (75), beachten — folgendermaßen:

Im n-dimensionalen projektiven Raum ist der Schnitt zweier Varietäten der Dimensionszahlen d und δ, falls er existiert, mindestens von der Dimension $d + \delta - n$ und enthält keine Komponenten von kleinerer Dimension als $d + \delta - n$.

Denn die Beziehung $\operatorname{Rad}(\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{g}_{r+\varrho}(\operatorname{Rad}(\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}}))$ besagt, daß die isolierten Primärkomponenten von $(\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}})$ mindestens die Dimension $d - \varrho = d - (n - \delta) = d + \delta - n$ haben.

4.17. $s \geqq r$ für H-Ideale, H-Ideale der Hauptklasse

Es sei $(F_1, \ldots, F_s)$ die *Minimalbasis* eines H-Ideals $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ der Dimension $d = n - r$, also der Kodimension r. Nach Satz 17 ist $\operatorname{Dim}(F_1) = n - 1$; aus (77) folgt nacheinander $\operatorname{Dim}(F_1, F_2) \geqq n - 2$, $\operatorname{Dim}(F_1, F_2, F_3) \geqq n - 3$, ..., $\operatorname{Dim}(F_1, \ldots, F_i) \geqq n - i$, ..., schließlich

$$d = n - r = \operatorname{Dim} \mathfrak{a} = \operatorname{Dim}(F_1, \ldots, F_s) \geqq n - s,$$

also $n - r \geqq n - s$, mithin $-r \geqq -s$, also gilt der

Satz 43. *Ist* $\mathfrak{a} \subset \mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein H-Ideal der Kodimension r mit der Minimalbasis* $\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_s)$, *so gilt*

$$s \geqq r. \tag{90}$$

Mit (90) ist ein wesentlicher Unterschied zur linearen Algebra zu verzeichnen, bei welcher stets $s = r$ gilt und der Rang r oftmals durch $r = s$ sogar definiert wird. Daß der Fall $s > r$ auftritt, ist am schnellsten wohl durch Bildung von Idealpotenzen (vgl. Kap. 1, (72)) einzusehen; aber selbst bei Primidealen kann der Fall $s > r$ auftreten; wir betrachten wieder einmal unser laufend als Beispiel benutztes primes H-Ideal $\mathfrak{p} = (F_1, F_2, F_3, F_4) \subset \mathsf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ mit

$$F_1 = x_0x_3 - x_1x_2,\ \ F_2 = x_0^2x_2 - x_1^3,\ \ F_3 = x_0x_2^2 - x_1^2x_3,\ \ F_4 = x_1x_3^2 - x_2^3$$

mit $n = 3$, $d = 1$, $r = 2$, $s = 4$. Wir werden in 4.27. noch ausführlicher hierauf eingehen und zeigen, daß selbst bei Primidealen s beliebig groß werden kann. Jedenfalls ist das Auftreten des Gleichheitszeichens in (90) eine Ausnahme, die eine Definition rechtfertigt.

Definition 9. Ein homogenes oder inhomogenes Polynomideal $\mathfrak{a}$ bzw. $(\mathfrak{a})$ heißt ein *Ideal der Hauptklasse* r oder kurz *Hauptklassenideal*, wenn es die Kodimension r und eine r-gliedrige Basis besitzt. Ideale der Hauptklasse 1 heißen *Hauptideale*.

Theoretisch läßt Definition 9 die Möglichkeit offen, daß eine Basis minimaler Länge des vorgelegten Ideals aus weniger als r Elementen besteht. Aus (90) folgt, daß dies für H-Ideale nicht eintreten kann (für P-Ideale vgl. 4.25.); wir haben also den

Satz 44. *Ein H-Ideal* $\mathfrak{a} \subset \mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *der Kodimension r ist genau dann ein H-Ideal der Hauptklasse r, wenn jede Basis minimaler Länge aus genau r Elementen besteht:*

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_s) \textit{ ist H-Ideal der Hauptklasse } r \\ \wedge\ F_1, \ldots, F_s \textit{ ist Basis minimaler Länge.} \end{array}\right\} \Rightarrow s = r. \tag{91}$$

Von Wichtigkeit erweist sich ferner

Satz 45. *Ist* $\mathfrak{a} = (F_1, F_2, F_3, \ldots, F_r) \subset \mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein H-Ideal der Hauptklasse r, so gilt:*

(F_1) *ist Hauptideal,*

(F_1, F_2) *ist H-Ideal der Hauptklasse* 2,

(F_1, F_2, F_3) *ist H-Ideal der Hauptklasse* 3,

....

$(F_1, F_2, \ldots, F_{r-1})$ *ist H-Ideal der Hauptklasse* $r - 1$, kurz:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_r) \textit{ ist H-Ideal der Hauptklasse } r \\ \Rightarrow \mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_i) \textit{ ist H-Ideal der Hauptklasse } i \\ \qquad\qquad \textit{für} \quad i = 1, 2, \ldots, r-1. \end{array}\right\} \tag{92}$$

Beweis. Tritt in der Folge der Ungleichungen

$$\mathrm{Dim}\,(F_1) = n - 1\,, \quad \mathrm{Dim}\,(F_1, F_2) \geqq n - 2\,, \quad \mathrm{Dim}\,(F_1, F_2, F_3) \geqq n - 3\,, \ldots$$

an irgendeiner Stelle das $>$-Zeichen auf, so nach (77) auch an allen folgenden. Damit also

$$\mathrm{Kodim}\,\mathfrak{a} = \mathrm{Kodim}\,(F_1, \ldots, F_r) = r\text{, also } \mathrm{Dim}\,(F_1, \ldots, F_r) = n - r$$

ist, muß (92) gelten, q. e. d.

Für inhomogene P-Ideale der Hauptklasse ist (92) nicht immer erfüllt, vgl. 4.25.

4.18. Schnellbasen von H-Idealen

Definition 10. Ist $\mathfrak{a}$ ein H-Ideal aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ mit $\mathrm{Dim}\,\mathfrak{a} = d = n - r$, so heißt eine Basis von $\mathfrak{a}$ der Gestalt

$$\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_r, F_{r+1}, \ldots, F_s) \text{ mit } \mathrm{Dim}\,(F_1, \ldots, F_r) = \mathrm{Dim}\,\mathfrak{a} = n - r \tag{93}$$

eine $\mathfrak{a}$-*Schnellbasis.*

Wir beweisen nun den

Satz 46. *Zu jedem H-Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ mit der Minimalbasis $(\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_s)$ und* $\mathrm{Dim}\,\mathfrak{a} = d = n - r$ *gibt es mindestens eine $\mathfrak{a}$-Schnellbasis $(F_1, \ldots, F_r, F_{r+1}, \ldots, F_s)$, die also wiederum Minimalbasis ist und bei welcher $F_1, \ldots, F_r$ von möglichst geringem Grad sind.*

Beweis. Die Elemente der Minimalbasis seien so geordnet, daß (vgl. Kap. 1, (33))

$$h(\bar{F}_1) \leqq h(\bar{F}_2) \leqq \cdots \leqq h(\bar{F}_s) \tag{94}$$

gilt. Wir setzen dann

$$F_1 := \bar{F}_1; \tag{95}$$

dann ist $\mathrm{Dim}\,(F_1) = n - 1$. Ist nun $\mathrm{Dim}\,(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = n - 2$, so setzen wir $F_2 = \bar{F}_2$. Andernfalls existiert ein Index j_2 mit

$$\mathrm{Dim}\,(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_{j_2}) = n - 1 \text{ und } \mathrm{Dim}\,(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_{j_2}, \bar{F}_{j_2+1}) = n - 2\,, \tag{96}$$

und wir machen den Ansatz

$$F_2 = G_{21}\bar{F}_1 + G_{22}\bar{F}_2 + \cdots + G_{2j_2}\bar{F}_{j_2} + \lambda_{2,j_2+1}\bar{F}_{j_2+1} \quad \text{mit} \quad \lambda_{2,j_2+1} \in \mathbf{K} \tag{97}$$

und bestimmen $G_{21}, G_{22}, \ldots, G_{2j_2}, \lambda_{2,j_2+1}$ so, daß F_2 eine Form wird und $\mathrm{Dim}\,(F_1, F_2) = n - 2$ ist. Dies ist nach (77) stets möglich, da $\mathbf{K}$ unendlich viele Elemente hat. Damit F_2 Element eines der Primideale von (F_1) ist, müssen seine Koeffizienten endlich vielen Gleichungen genügen (das sind die „Hilbertschen Gleichungen", auf die in Kapitel 6 eingegangen wird); man braucht also die Koeffizienten von $G_{21}, \ldots, G_{2j_2}$ und den Wert λ_{2,j_2+1} nur so zu wählen, daß keine dieser Gleichungen erfüllt ist, was bei endlich vielen Elementen stets möglich ist.

Ist nun $\mathrm{Dim}\,(F_1, F_2, \bar{F}_3) = n - 3$, so setzen wir $F_3 = \bar{F}_3$. Andernfalls existiert ein Index $j_3 > j_2$ mit

$$\mathrm{Dim}\,(\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_{j_3}) = n - 2 \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Dim}\,(\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_{j_3}, \bar{F}_{j_3+1}) = n - 3; \tag{98}$$

wir machen den Ansatz

$$F_3 = G_{31}\bar{F}_1 + G_{32}\bar{F}_2 + \cdots + G_{3,j_3}\bar{F}_{j_3} + \lambda_{3,j_3+1}\bar{F}_{j_3+1} \quad \text{mit} \quad \lambda_{\cdot,j_3+1} \in \mathbf{K} \tag{99}$$

und bestimmen $G_{31}, G_{32}, \ldots, G_{3j_3}, \lambda_{3,j_3+1}$ so, daß F_3 eine Form wird und die Beziehung $\mathrm{Dim}(F_1, F_2, F_3) = n - 3$ gilt. Jetzt sind die G_{3i} und λ_{3,j_3+1} gemäß (77) so zu bestimmen, daß F_3 in keinem $(n-2)$-dimensionalen Primideal von (F_1, F_2) aufgeht, was wiederum auf die Vermeidung von Werten hinausläuft, die endlich vielen Bedingungsgleichungen genügen; dies ist wiederum möglich, da $\mathbf{K}$ unendlich viele Elemente hat.

So fahren wir fort bis

$$\mathrm{Dim}\,(\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_{j_r}) = n - r + 1 \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Dim}\,(\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_{j_r}, \bar{F}_{j_r+1}) = n - r \tag{100}$$

und setzen

$$F_r = G_{r1}\bar{F}_1 + \cdots + G_{rj_r}\bar{F}_{j_r} + \lambda_{r,j_r+1}\bar{F}_{j_r+1} \quad \text{mit} \quad \lambda_{r,j_r+1} \in \mathbf{K}. \tag{101}$$

Dann können wir $G_{r1}, \ldots, G_{rj_r}, \lambda_{r,j_r+1}$ so bestimmen, daß $\mathrm{Dim}\,(F_1, \ldots, F_r) = n - r = \mathrm{Dim}\,\mathfrak{a}$ ist. Somit haben wir die Schnellbasis

$$(F_1, \ldots, F_r; \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_{j_2+2}, \ldots, \bar{F}_{j_3}, \bar{F}_{j_3+2}, \ldots, \bar{F}_{j_r}, \bar{F}_{j_r+2}, \ldots, \bar{F}_s), \tag{102}$$

welche wegen (95), (97), (99), ..., (101) zur Ausgangsbasis $(\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_s)$ idealäquivalent ist. Da $(\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_s)$ als Minimalbasis vorausgesetzt war und (102) ebenfalls aus s Elementen besteht, ist auch (102) eine Minimalbasis, q. e. d.

Wir werden im folgenden Schnellbasen bei der Abschätzung der Länge der Syzygienkette nach unten benötigen (vgl. Kap. 5); sie wurden von Renschuch zu Berechnungen bei Verallgemeinerungen des Bezoutschen Satzes eingeführt (vgl. [1]). Die Bezeichnung „Schnellbasis" wurde von O.-H. Keller vorgeschlagen.

So vorteilhaft Schnellbasen für diese Beweise auch sein mögen, so zeigen bereits die Ansätze (97), (99), ..., (101), daß die Elemente der Schnellbasen von komplizierterer Bauart sein können. So sind die nach Anwendung des Gaußschen Algorithmus gewonnenen Minimalbasen, u. a. von Eliminationsidealen, im allgemeinen keine Schnellbasen. Bei Potenzproduktidealen bedeutet der Übergang zu Schnellbasen, daß man nicht nur Potenzprodukte, sondern mehrgliedrige Polynome in die Basis aufnehmen muß; als Beispiel betrachte man (x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2).

4.19. Gemischtheit von $(\mathfrak{a}, F)$ bei $\mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a}$ und Gemischtheit von $\mathfrak{a}$

Der folgende wichtige Satz stammt von GRÖBNER (vgl. [2], 135.8).

Satz 47. *Ist* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein d-dimensionales* $(d \geqq 1)$ *gemischtes H-Ideal, bei dessen Primärkomponenten die Dimension* δ *mit* $0 \leqq \delta < d$ *als kleinstmögliche Dimension auftritt, und ist F eine Form mit* $\mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a}$, *so ist* $(\mathfrak{a}, F)$ *von der Dimension* $d - 1$ *und ebenfalls gemischt, und zwar ist die kleinstmögliche Dimension der Primärkomponenten höchstens* $\delta - 1$.

Setzen wir $r = n - d$, so bedeutet dies formelmäßig:

$$\left.\begin{array}{l} r < \varrho \leqq n \wedge \mathfrak{a} = \mathfrak{g}_\varrho(\mathfrak{a}) \wedge \mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}_{\varrho-1}(\mathfrak{a}) \wedge \mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a} \\ \Rightarrow \bigvee\limits_{i \geqq 1} \big((\mathfrak{a}, F) = \mathfrak{g}_{\varrho+i}(\mathfrak{a}, F) \wedge (\mathfrak{a}, F) \subset \mathfrak{g}_{\varrho+i-1}(\mathfrak{a}, F)\big) \end{array}\right\} \tag{103}$$

und damit gleichwertig:

$$\left.\begin{array}{l} r < \varrho \leqq n \wedge \mathfrak{a} = \mathfrak{g}_\varrho(\mathfrak{a}) \wedge \mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}_{\varrho-1}(\mathfrak{a}) \wedge \mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a} \\ \Rightarrow (\mathfrak{a}, F) \subset \mathfrak{g}_\varrho(\mathfrak{a}, F) \wedge (\mathfrak{a}, F) \subseteqq \mathfrak{g}_{\varrho+1}(\mathfrak{a}, F). \end{array}\right\} \tag{104}$$

Beweis. Wegen $d \geqq 1$ ist $\delta \geqq 0$, also $\varrho \leqq n$ und damit $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_n(\mathfrak{a})$, mithin besitzt $\mathfrak{a}$ nach (60) keine triviale Komponente, so daß Formen F mit $\mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a}$ existieren; nach (78) ist dann

$$\operatorname{Dim}(\mathfrak{a}, F) = d - 1. \tag{105}$$

Es ist nachzuweisen, daß $(\mathfrak{a}, F)$ eine Primärkomponente besitzt, deren Kodimension mindestens gleich $\varrho + 1$ ist. Die Radikalbildung $\operatorname{Rad}(\mathfrak{a}, F) = \cap \operatorname{Rad}(\mathfrak{p}_{ik}, F)$ gemäß (76) hilft uns dabei nicht weiter, da die Gemischtheit durch eingebettete Komponenten verursacht werden kann. — Nach Kap. 2, (51), galt doch:

$$\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{p}_\varkappa \text{ für wenigstens ein } \varkappa \in (1, 2, \ldots, k) \Leftrightarrow \mathfrak{a} : \mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}. \tag{106}$$

Wir wollen aus (106) eine Beziehung für die Dimensionszahlen von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{b}$ herleiten. Ist $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}_\varkappa$, so ist $\operatorname{Dim} \mathfrak{b} = \operatorname{Dim} \mathfrak{p}_\varkappa$. Ist $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}_\varkappa$, so auch $\operatorname{Rad} \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{p}_\varkappa$. Ist $\operatorname{Rad} \mathfrak{b} = \mathfrak{p}_\varkappa$, so ist wiederum $\operatorname{Dim} \mathfrak{b} = \operatorname{Dim} \mathfrak{p}_\varkappa$. Ist $\operatorname{Rad} \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}_\varkappa$, so ist $\operatorname{Dim} \mathfrak{b} \geqq \operatorname{Dim} \mathfrak{p}_\varkappa$, also $\operatorname{Kodim} \mathfrak{b} \leq \operatorname{Kodim} \mathfrak{p}_\varkappa$. Insgesamt folgt also aus (106):

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} \supset \mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{p}_\varkappa \Rightarrow \operatorname{Kodim} \mathfrak{b} \leq \operatorname{Kodim} \mathfrak{p}_\varkappa. \tag{107}$$

Nach Voraussetzung existiert nun ein zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal $\mathfrak{p}$ der Dimension $\delta = n - \varrho$, also der Kodimension ϱ; wegen $\mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a}$ ist dann $F \notin \mathfrak{p}$; mithin hat $(\mathfrak{p}, F)$ nach (68) die Dimension $\delta - 1$, also die Kodimension $\varrho + 1$.

Es ist zu zeigen, daß es wenigstens eine Primärkomponente $\mathfrak{q}_*$ mit dem zugehörigen Primideal $\mathfrak{p}_*$ von $(\mathfrak{a}, F)$ mit $\operatorname{Kodim}(\mathfrak{p}, F) = \varrho + 1 \leqq \operatorname{Kodim} \mathfrak{p}_*$ gibt. Nach (107) genügt hierzu der Nachweis von

$$(\mathfrak{a}, F) : (\mathfrak{p}, F) \supset (\mathfrak{a}, F). \tag{108}$$

Wegen Kap. 1, (139), genügt es zum Nachweis von (108), die Alternative

$$(\mathfrak{a}, F) : (\mathfrak{p}, F) = (\mathfrak{a}, F) \tag{109}$$

zum Widerspruch zu führen.

Nach Kap. 1, (168), galt $\mathfrak{a} : (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{a} : \mathfrak{c})$, also

$$(\mathfrak{a}, F) : (\mathfrak{p}, F) = \big((\mathfrak{a}, F) : \mathfrak{p}\big) \cap \big((\mathfrak{a}, F) : (F)\big) = (\mathfrak{a}, F) : \mathfrak{p}$$

wegen $(\mathfrak{a}, F) : (F) = (1)$ nach Definition des Idealquotienten. Zusammen mit (109) gibt dies

$$(\mathfrak{a}, F) : \mathfrak{p} = (\mathfrak{a}, F). \tag{110}$$

Nach Kap. 1, (148), galt nun: $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{a} : \mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{b} : \mathfrak{c}$, also $\mathfrak{a} : \mathfrak{p} \subseteqq (\mathfrak{a}, F) : \mathfrak{p}$; mit (110) folgt daraus

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{p} \subseteqq (\mathfrak{a}, F). \tag{111}$$

Andererseits ist (vgl. Kap. 2, (51))

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}. \tag{112}$$

Also existiert eine Form F_1 mit $F_1 \in \mathfrak{a} : \mathfrak{p}$ und $F_1 \notin \mathfrak{a}$; wegen (111) ist $F_1 \in (\mathfrak{a}, F)$, also $F_1 = A + F_2 F$ oder in Kongruenzschreibweise $F_1 \equiv F_2 F(\mathfrak{a})$. $F_1 \in \mathfrak{a} : \mathfrak{p}$ bedeutet $F_1 \mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{a}$, mithin $F_2 F \mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{a}$, also $F_2 \mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{a} : (F)$; nach Voraussetzung war aber $\mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a}$, also ist $F_2 \mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{a}$ und damit $F_2 \in \mathfrak{a} : \mathfrak{p}$. Weiter ist $F_2 \notin \mathfrak{a}$, denn wegen $F_1 = A + F_2 F$ würde andernfalls $F_1 \in \mathfrak{a}$ im Widerspruch zu $F_1 \notin \mathfrak{a}$ folgen. Wir haben also:

$$\begin{aligned} &\big(F_1 \in \mathfrak{a} : \mathfrak{p} \wedge F_1 \notin \mathfrak{a} \wedge F_1 \in (\mathfrak{a}, F) \Rightarrow F_1 \equiv F_2 F(\mathfrak{a})\big) \\ \Rightarrow &\big(F_2 \in \mathfrak{a} : \mathfrak{p} \wedge F_2 \notin \mathfrak{a} \wedge F_2 \in (\mathfrak{a}, F) \Rightarrow F_2 \equiv F_3 F(\mathfrak{a})\big) \Rightarrow \cdots \end{aligned}$$

mit monoton fallenden Gradzahlen $h(F_1) > h(F_2) > h(F_3) > \cdots$, so daß wir schließlich nach endlich vielen Schritten zu $F_t = c$ mit $c \in \mathbf{K}$ und $c \neq 0$ und $c \in (\mathfrak{a}, F)$ gelangen. Wegen $c \neq 0$ ist, dann auch $\frac{1}{c} \cdot c = 1 \in (\mathfrak{a}, F)$, also $(\mathfrak{a}, F) = (1)$ im Widerspruch zu (105) und $d \geqq 1$.

Also war die Annahme (109) falsch; mithin gelten (108) und (103), q. e. d.

4.20. Ungemischtheit von H-Idealen der Hauptklasse

In diesem Abschnitt wollen wir schrittweise den angekündigten Satz von MACAULAY beweisen, daß jedes H-Ideal der Hauptklasse ungemischt ist. Wir beweisen den Satz zunächst für $n = 1$.

Satz 48. *In $\mathbf{K}[x_0, x_1]$ ist jedes H-Ideal $\mathfrak{a}$ der Hauptklasse ungemischt.*

Beweis. Entweder ist $\mathfrak{a} = (F)$ ein Hauptideal der Dimension 0; nach Satz 39 ist $\mathfrak{a}$ dann ungemischt. Oder es ist $\mathfrak{a} = (F_1, F_2) = \mathfrak{q}_T$ ein T-Ideal, welches ebenfalls ungemischt ist, da kleinere Dimensionszahlen als -1 nicht erklärt sind, q. e. d.

Nunmehr erinnern wir an das Dubreilsche Lemma von Kap. 3, Satz 45, und wollen — wie im Kap. 3, (100) — mit Linearformen arbeiten. Dann gilt also:

$$\mathfrak{a} \textit{ besitzt keine triviale Komponente} \Leftrightarrow \bigvee_L \mathfrak{a} : (L) = \mathfrak{a}. \tag{113}$$

Wir machen nun für L den Ansatz

$$L = u_0 x_0 + u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n \tag{114}$$

mit zunächst unbestimmten Koeffizienten $u_0, u_1, \ldots, u_n$.

Besitzt $\mathfrak{a}$ eine triviale Komponente, so gehen wir gemäß (53) zum Grundideal $\mathfrak{g}_n(\mathfrak{a})$ über, welches keine triviale Komponente mehr besitzt, ebenso wie die Grundideale

$$\mathfrak{g}_{n-1}(\mathfrak{a}), \mathfrak{g}_{n-2}(\mathfrak{a}), \ldots, \mathfrak{g}_{n-(d-1)}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{g}_{r+1}(\mathfrak{a}), \mathfrak{g}_{n-d}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{g}_r(\mathfrak{a});$$

wir haben also

Satz 49 (Verallgemeinertes Dubreilsches Lemma). *Für jedes H-Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ existiert wenigstens eine Linearform L mit*

$$\mathfrak{g}_{r+i}(\mathfrak{a}) : (L) = \mathfrak{g}_{r+i}(\mathfrak{a}) \quad \textit{für} \quad i = 0, 1, \ldots, d. \tag{115}$$

Wir benötigen diese Überlegungen zum Beweis von

Satz 50. *In $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ besitzt jedes H-Ideal $\mathfrak{a}$ der Hauptklasse r für $1 \leqq r \leqq n$ keine triviale Komponente.*

Beweis. Zur Einschränkung für r bemerken wir, daß $r \geqq 1$ generell wegen $d \leqq n - 1$ gilt; $r \leqq n$ muß gefordert werden, weil $r = n + 1$ gerade $d = -1$ bedeutet, d. h., $\mathfrak{a}$ wäre ein T-Ideal.

Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig nach Satz 48.

Wir benötigen jetzt das Gröbnersche Kriterium für triviale Komponenten von Kap. 3, (102), Satz 47: Ist $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ein H-Ideal, so gilt:

$\mathfrak{a}$ besitzt eine triviale Komponente $\Leftrightarrow$ Es existiert wenigstens eine Form

$F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ mit $F \notin \mathfrak{a} \wedge x_0 F \in \mathfrak{a} \wedge x_1 F \in \mathfrak{a} \wedge \ldots \wedge x_n F \in \mathfrak{a};$

für F gilt auch

$$(u_0x_0 + u_1x_1 + \cdots + u_nx_n)\, F \in \mathfrak{a} \text{ und } F \notin \mathfrak{a}\,, \tag{116}$$

sogar mit unbestimmten Koeffizienten $u_0, u_1, \ldots, u_n$.

Wir nehmen jetzt indirekt an, $\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_{r-1}, F_r)$ besäße doch eine triviale Komponente. Wir können dann in (114) die $u_0, u_1, \ldots, u_n$ so wählen, daß (115) gilt. Besonders günstig wäre die Gültigkeit von (115) für $L = x_n$. Ist diese nicht gegeben, so nehmen wir die lineare Variablentransformation

$$\left.\begin{aligned} X_0 &= x_0\,, \\ X_1 &= x_1\,, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_n &= u_0x_0 + u_1x_1 + \cdots + u_nx_n \end{aligned}\right\} \tag{117}$$

vor, durch welche

$$\mathfrak{a} \text{ in } \mathfrak{b} \subset \mathbf{K}[X_0, X_1, \ldots, X_n] \text{ mit } \mathfrak{b} = (G_1, \ldots, G_{r-1}, G_r)\,,$$

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_n) \text{ in } G(X_0, X_1, \ldots, X_n)$$

und

$$L = u_0x_0 + u_1x_1 + \cdots + u_nx_n \text{ in } X_n$$

übergehe. Mit $\mathfrak{a}$ bezüglich $x_0, x_1, \ldots, x_n$ hat dann auch $\mathfrak{b}$ bezüglich $X_0, X_1, \ldots, X_n$ eine triviale Komponente und umgekehrt; mit $\operatorname{Dim} \mathfrak{a} = d = n - r$ ist auch $\operatorname{Dim} \mathfrak{b} = d = n - r$ und umgekehrt; mit $\mathfrak{a}$ ist auch $\mathfrak{b}$ ein H-Ideal der Hauptklasse und umgekehrt; $F \notin \mathfrak{a}$ ist mit $G \notin \mathfrak{b}$ gleichwertig. In $\mathbf{K}[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ haben wir also:

$$G \notin \mathfrak{b}\,, \tag{118}$$

$$X_nG \in \mathfrak{b}\,; \tag{119}$$

ferner folgt aus (115) für $i = 0$

$$\mathfrak{g}_r(\mathfrak{b}) : (X_n) = \mathfrak{g}_r(\mathfrak{b})\,. \tag{120}$$

Aus (120) folgt wegen (77)

$$\operatorname{Dim}(\mathfrak{b}, X_n) = d - 1\,. \tag{121}$$

Wegen $\mathfrak{b} = (G_1, \ldots, G_{r-1}, G_r)$ lautet (119) ausführlich

$$X_nG = H_1G_1 + H_2G_2 + \cdots + H_{r-1}G_{r-1} + H_rG_r\,. \tag{122}$$

In (122) wollen wir nun auf beiden Seiten $X_n = 0$ setzen; wir führen dann folgende Abkürzungen ein:

$$\bar{H}_i(X_0, \ldots, X_{n-1}) := H_i(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, 0) \text{ für } i = 1, \ldots, r \tag{123}$$

und

$$\bar{G}_i(X_0, \ldots, X_{n-1}) := G_i(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, 0) \text{ für } i = 1, \ldots, r. \tag{124}$$

Damit folgt aus (122)

$$0 = \bar{H}_1\bar{G}_1 + \bar{H}_2\bar{G}_2 + \cdots + \bar{H}_{r-1}\bar{G}_{r-1} + \bar{H}_r\bar{G}_r. \tag{125}$$

Es sei nun

$$\bar{\mathfrak{b}} := (\bar{G}_1, \ldots, \bar{G}_{r-1}, \bar{G}_r) \subset \mathbf{K}[X_0, \ldots, X_{n-1}]; \tag{126}$$

dann ist $\bar{\mathfrak{b}}$ in $\mathbf{K}[X_0, \ldots, X_{n-1}]$ ein H-Ideal, und wegen (124) ist $(\bar{\mathfrak{b}}, X_n) = (\mathfrak{b}, X_n)$ in $\mathbf{K}[X_0, \ldots, X_{n-1}, X_n]$, also

$$\bar{\mathfrak{b}} = (\mathfrak{b}, X_n) \cap \mathbf{K}[X_0, \ldots, X_{n-1}]; \tag{127}$$

wegen (121) folgt daraus $\operatorname{Dim} \bar{\mathfrak{b}} = d - 1$, also $\operatorname{Kodim} \bar{\mathfrak{b}} = (n-1) - (d-1) = r$, mithin $\operatorname{Kodim} \bar{\mathfrak{b}} = \operatorname{Kodim} \mathfrak{b}$, also ist $\bar{\mathfrak{b}}$ in $\mathbf{K}[X_0, \ldots, X_{n-1}]$ ein H-Ideal der Hauptklasse r.

Alle diese Überlegungen dienen dem Beweis des Satzes von MACAULAY, daß jedes H-Ideal der Hauptklasse ungemischt ist. Der Beweis dieses Satzes wird durch vollständige Induktion nach n erfolgen, wobei der Induktionsanfang für $n = 1$ durch Satz 48 gegeben ist. Wir wollen an dieser Stelle von der Induktionsannahme Gebrauch machen. Dies besagt also, daß Ideale der Hauptklasse in $x_0, \ldots, x_{n-1}$, also auch in den transformierten Variablen $X_0, \ldots, X_{n-1}$, ungemischt sind.

Mithin ist also $\bar{\mathfrak{b}} = (\bar{G}_1, \ldots, \bar{G}_{r-1}, \bar{G}_r)$ ungemischt mit $\operatorname{Dim} \bar{\mathfrak{b}} = d - 1$. Nach (92) ist auch $(\bar{G}_1, \ldots, \bar{G}_{r-1})$ ein H-Ideal der Hauptklasse aus $\mathbf{K}[X_0, \ldots, X_{n-1}]$ und mithin nach Induktionsannahme ebenfalls ungemischt mit der Dimension

$$(n-1) - (r-1) = n - r = d.$$

Aus (79) folgt damit

$$(\bar{G}_1, \ldots, \bar{G}_{r-1}) : (\bar{G}_r) = (\bar{G}_1, \ldots, \bar{G}_{r-1}). \tag{128}$$

Aus (125) folgt nun $\bar{H}_r\bar{G}_r = -\bar{H}_1\bar{G}_1 - \cdots - \bar{H}_{r-1}\bar{G}_{r-1}$, also $\bar{H}_r \in (\bar{G}_1, \ldots, \bar{G}_{r-1}) : (\bar{G}_r)$ und mit (128)

$$\bar{H}_r \in (\bar{G}_1, \ldots, \bar{G}_{r-1}), \tag{129}$$

also

$$\bar{H}_r = A_{r1}\bar{G}_1 + \cdots + A_{r,r-1}\bar{G}_{r-1} \quad \text{mit} \quad A_{ri} \in \mathbf{K}[X_0, \ldots, X_{n-1}], \tag{130}$$

folglich

$$H_r = A_{r1}G_1 + \cdots + A_{r,r-1}G_{r-1} + B_rX_n \quad \text{mit} \quad B_r \in \mathbf{K}[X_0, \ldots, X_{n-1}].$$

In (122) eingesetzt, gibt dies (131)

$$X_nG = (H_1 + G_rA_{r1})\,G_1 + \cdots + (H_{r-1} + G_rA_{r,r-1})\,G_{r-1} + G_rB_rX_n,$$

also.

$$X_n(G - B_rG_r) \in (G_1, G_2, \ldots, G_{r-1}). \tag{132}$$

Jetzt können wir mit (132) dieselben Überlegungen anstellen wie mit (122) und erhalten entsprechend

$$X_n(G - B_r G_r - B_{r-1} G_{r-1}) \in (G_1, G_2, \ldots, G_{r-2})$$

schließlich

$$X_n(G - B_r G_r - B_{r-1} G_{r-1} - \cdots - B_2 G_2) \in (G_1), \tag{133}$$

genauer

$$X_n(G - B_r G_r - \cdots - B_2 G_2) = H_1 G_1. \tag{134}$$

Aus (134) folgt, wenn wir $X_n = 0$ setzen, $0 = \overline{H}_1 \overline{G}_1$. Folglich muß einer der beiden Faktoren 0 sein. Wegen (117) ist $G_1 = P X_n$ und $\overline{G}_1 = 0$ unmöglich, also ist $\overline{H}_1 = 0$ und $H_1 = B_1 X_n$, folglich $X_n(G - B_r G_r - \cdots - B_2 G_2) = B_1 G_1 X_n$, folglich $X_n(G - B_r G_r - \cdots - B_2 G_2 - B_1 G_1) = 0$. Wegen (117) folgt $X_n \neq 0$ und also $G = B_1 G_1 + \cdots + B_r G_r$, mithin wegen $\mathfrak{b} = (G_1, \ldots, G_r)$ also $G \in \mathfrak{b}$ im Widerspruch zu (118).

Also war die Annahme, daß $\mathfrak{a}$ eine triviale Komponente besitzt, falsch, und Satz 50 ist damit endlich bewiesen.

Wir kommen nun zum eigentlichen ,,unmixnedness theorem" von Macaulay.

Satz 51 (Satz von Macaulay). *In* $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ist jedes* H*-Ideal* $\mathfrak{a}$ *der Hauptklasse ungemischt.*

Beweis. Ist $r = n - d$ die Kodimension von $\mathfrak{a}$, so ist die Behauptung jedenfalls richtig für $r = n + 1$, denn das sind gerade T-Ideale $\mathfrak{q}_T$. Ferner ist der Satz nach (83) Satz 39, richtig für Hauptideale, also für $r = 1$.

Wir beweisen nun den Satz — wie angekündigt — durch vollständige Induktion nach n.

Für $n = 1$ ist die Behauptung nach Satz 48 richtig.

Induktionsannahme: Der Satz ist für $\mathbf{K}[x_0, \ldots, x_{n-1}]$ richtig. Daraus konnte nach Satz 50 bewiesen werden, daß $\mathfrak{a}$ keine triviale Komponente besitzt, womit (neben den anfangs diskutierten Fällen $r = 1$ und $r = n + 1$) der Beweis auch für $r = n$ (also $d = 0$) bereits erbracht ist.

Wir können also $2 \leqq r \leqq n - 1$ voraussetzen. Angenommen, $\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_r)$ mit $\operatorname{Dim} \mathfrak{a} = d = n - r$ wäre gemischt mit einer Primärkomponente der Dimension $\delta < d$ und der Kodimension $\varrho = n - \delta > n - d = r$, also $\varrho > r$; nach Satz 50 besitzt $\mathfrak{a}$ keine triviale Komponente, und mithin existiert eine Form F_{r+1} mit $\mathfrak{a} : (F_{r+1}) = \mathfrak{a}$, und nach (103) hat $(\mathfrak{a}, F_{r+1})$ eine Primärkomponente der Dimension $\delta - 1$, also der Kodimension $\varrho + 1$. Wegen $\mathfrak{a} : (F_{r+1}) = \mathfrak{a}$ ist $\operatorname{Dim}(\mathfrak{a}, F_{r+1}) = d - 1$ nach Satz 36 und mithin wiederum ein H-Ideal der Hauptklasse und nach Satz 50 ebenfalls ohne triviale Komponente, mithin können wir das Verfahren mit einer Form F_{r+2} mit $(\mathfrak{a}, F_{r+1}) : (F_{r+2}) = (\mathfrak{a}, F_{r+1})$ fortsetzen. So finden wir schließlich eine Form

$F_{r+\delta+1}$ mit

$$(\mathfrak{a}, F_{r+1}, \ldots, F_{r+\delta}) : (F_{r+\delta+1}) = (\mathfrak{a}, F_{r+1}, \ldots, F_{r+\delta})$$

und

$$\begin{aligned}\operatorname{Dim}(\mathfrak{a}, F_{r+1}, \ldots, F_{r+\delta}, F_{r+\delta+1}) &= \operatorname{Dim}(F_1, \ldots, F_r, F_{r+1}, \ldots, F_{r+\delta+1})\\ &= d - (\delta + 1) = d - \delta - 1 \geqq 0\end{aligned}$$

wegen $\delta < d$, also $\delta \leqq d - 1$. Mithin gilt

$$\operatorname{Kodim}(F_1, \ldots, F_{r+\delta+1}) = n - (d - \delta - 1) = r + \delta + 1. \tag{135}$$

Nach (103) hat dann $(F_1, \ldots, F_{r+\delta+1})$ eine Primärkomponente der Dimension $\delta - \delta - 1$, also der Kodimension $\varrho + \delta + 1$, also eine triviale Komponente. Dies ist aber nach Satz 50 unmöglich, da $(F_1, \ldots, F_{r+\delta+1})$ wegen (135) ein H-Ideal der Hauptklasse $r + \delta + 1$ ist.

Also war die Annahme, daß $\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_r)$ gemischt ist, falsch, womit der Satz 51 von Macaulay endlich bewiesen ist.

Aus Satz 51 folgt unmittelbar

Satz 52. *Ist $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ein H-Ideal und $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ eine Form, so gilt:*

$$\begin{aligned}&\mathfrak{a} \textit{ ist H-Ideal der Hauptklasse } r \wedge \mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a}\\ &\Rightarrow (\mathfrak{a}, F) \textit{ ist H-Ideal der Hauptklasse } r + 1.\end{aligned} \tag{136}$$

Von Satz 52 gilt auch die Umkehrung:

Satz 53. *Ist $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ein H-Ideal und $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ eine Form, so gilt:*

$$\begin{aligned}&\mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a} \wedge (\mathfrak{a}, F) \textit{ ist H-Ideal der Hauptklasse } r + 1\\ &\Rightarrow \mathfrak{a} \textit{ ist H-Ideal der Hauptklasse } r.\end{aligned} \tag{137}$$

Der Beweis soll hier nicht ausgeführt werden; für einen Beweis des Verfassers unter Benutzung der Syzygientheorie sei auf Renschuch [4] verwiesen.

Aus dem Beweis von Satz 51 ergab sich ferner

Satz 54. *Es sei $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ein H-Ideal der Hauptklasse $r = n - d$, ferner seien $F_1, \ldots, F_d$ Formen aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ mit*

$$\left.\begin{aligned}&\mathfrak{a} : (F_1) = \mathfrak{a},\\ &(\mathfrak{a}, F_1) : (F_2) = (\mathfrak{a}, F_1),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &(\mathfrak{a}, F_1, \ldots, F_{d-1}) : (F_d) = (\mathfrak{a}, F_1, \ldots, F_{d-1}).\end{aligned}\right\} \tag{138}$$

Dann gilt: Für alle Formen $F_1, \ldots, F_d$, für welche (138) *gilt, besitzt* $(\mathfrak{a}, F_1, \ldots, F_d)$ keine *triviale Komponente.*

Von Satz 54 gilt keineswegs die Umkehrung: Wenn $(\mathfrak{a}, F_1, \ldots, F_d)$ keine triviale Komponente besitzt und (138) erfüllt ist, braucht $\mathfrak{a}$ kein H-Ideal der Hauptklasse zu sein; vielmehr ist dadurch eine umfassendere Klasse von H-Idealen gegeben, die wir als *perfekte Ideale* bezeichnen werden.

4.21. Pseudogemischtheit von $((\mathfrak{p}), f)$ und $(\mathfrak{p}, F)$

Wir wollen in diesem und dem folgenden Abschnitt Sätze der Art von Satz 52 verallgemeinern.

Satz 55. *Ist* $(\mathfrak{p}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *ein inhomogenes Primideal und* $f \in \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *ein Polynom, so gilt*

$$\big((\mathfrak{p}), f\big) \textit{ ist stets pseudogemischt.} \tag{139}$$

Beweis. Die Behauptung ist richtig für $f \in (\mathfrak{p})$ und $\big((\mathfrak{p}), f\big) = (1)$; von den beiden Fällen beim Beweis von Satz 32 für $f \notin (\mathfrak{p})$ bleibt also nur der erste Fall mit den zwei Möglichkeiten zu untersuchen. Bei der ersten Möglichkeit ließ sich aus $f(t_1, \ldots, t_d) = 0$ gemäß (67) o. B. d. A. t_d durch $t_1, \ldots, t_{d-1}$ ausdrücken; alle auftretenden allgemeinen Nullstellen sind also $(d-1)$-dimensional bei $\operatorname{Dim}(\mathfrak{p}) = d$; mithin ist $\operatorname{Rad}\big((\mathfrak{p}), f\big)$ ungemischt $(d-1)$-dimensional, also $\big((\mathfrak{p}), f\big)$ pseudogemischt. Bei der zweiten Möglichkeit war $f(t_1, \ldots, t_d) = f(t_d) = 0$, also $t_d = \text{const} = \{c_1, c_2, \ldots, c_h\}$; mithin sind wiederum *alle* auftretenden allgemeinen Nullstellen $(d-1)$-dimensional, also ist $\operatorname{Rad}\big((\mathfrak{p}), f\big)$ ungemischt und $\big((\mathfrak{p}), f\big)$ pseudogemischt.

Entsprechend verläuft der Beweisgedanke im homogenen Fall, nur daß bei der zweiten Möglichkeit wegen der Homogenität nur der Fall $t_d = 0$ in Frage kommt. Es gilt also der

Satz 56. *Ist* $\mathfrak{p} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein primes H-Ideal und* $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *eine Form, so gilt:*

$$(\mathfrak{p}, F) \textit{ ist stets pseudogemischt.} \tag{140}$$

Satz 56 kann leider *nicht* dahingehend verschärft werden, daß $(\mathfrak{p}, F)$ *ungemischt* ist.

Um ein Gegenbeispiel zu konstruieren, gehen wir wieder einmal von dem Primideal

$$\mathfrak{v}_{14}^{(2)} = (F_1, F_2, F_3, F_4) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$$

aus mit $F_1 = x_0x_3 - x_1x_2$, $F_2 = x_0^2x_2 - x_1^3$, $F_3 = x_0x_2^2 - x_1^2x_3$, $F_4 = x_1x_3^2 - x_2^3$ und wählen $F = x_1$. Nach Kap. 1, Satz 37, wird dann — wie der Leser nachrechnen möge —

$$(\mathfrak{v}_{14}^{(2)}, x_1) = (x_1, x_0x_3, x_0^2x_2, x_0x_2^2, x_2^3) = (x_0, x_1, x_2^3) \cap (x_1, x_2, x_3) \cap (x_0^2, x_0x_2^2, x_1, x_2^3, x_3),$$

enthält also eine triviale Komponente und ist mithin zwar pseudogemischt, aber nicht ungemischt. Auf die Existenz einer trivialen Komponente kann auch gemäß Kap. 3, (102), Satz 47, mit $F = x_0x_2$ geschlossen werden wegen $x_0x_2 \notin (\mathfrak{v}_{14}^{(2)}, x_1)$ und $x_ix_0x_2 \in (\mathfrak{v}_{14}^{(2)}, x_1)$ für $i = 0, 1, 2, 3$.

4.22. Pseudogemischtheit von $(\mathfrak{a}, F)$ bei $\mathfrak{a}:(F) = \mathfrak{a}$ und Pseudogemischtheit von $\mathfrak{a}$

Hierfür gilt der

Satz 57. *Ist* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein d-dimensionales pseudogemischtes H-Ideal und* $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *eine Form mit* $\mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a}$, *so ist* $(\mathfrak{a}, F)$ *ein* $(d-1)$*-dimensionales pseudogemischtes H-Ideal.*

Beweis. Die Dimensionsaussage folgt aus (78). Gemäß Kap. 3, (82) und (83), sei nun

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_m \cap \mathfrak{q}_{m+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k,$$

$\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m$ isoliert, $\mathfrak{q}_{m+1}, \ldots, \mathfrak{q}_k$ eingebettet, also $\operatorname{Rad} \mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_m$; somit ist

$$\operatorname{Rad}(\mathfrak{a}, F) = \operatorname{Rad}(\mathfrak{p}_1, F) \cap \cdots \cap \operatorname{Rad}(\mathfrak{p}_m, F). \tag{141}$$

Aus $\mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a}$ folgt $F \notin \mathfrak{p}_1, \ldots, F \notin \mathfrak{p}_m$; nach (140) sind $\operatorname{Rad}(\mathfrak{p}_1, F), \ldots, \operatorname{Rad}(\mathfrak{p}_m, F)$ alle $(d-1)$-dimensional ungemischt, also auch $\operatorname{Rad}(\mathfrak{a}, F)$; mithin ist $(\mathfrak{a}, F)$ pseudogemischt, q. e. d.

Bei diesem Beweis wurde nur $F \notin \mathfrak{p}_1, \ldots, F \notin \mathfrak{p}_m$ benutzt, was nach Kap. 3, (83), und Kap. 2, (46), mit $(\operatorname{Rad} \mathfrak{a}) : (F) = \operatorname{Rad} \mathfrak{a}$ gleichwertig ist; es gilt also sogar der

Satz 58. *Ist* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein d-dimensionales pseudogemischtes H-Ideal und* $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *eine Form mit* $(\operatorname{Rad} \mathfrak{a}) : (F) = \operatorname{Rad} \mathfrak{a}$, *so ist* $(\mathfrak{a}, F)$ *ein* $(d-1)$*-dimensionales pseudogemischtes H-Ideal.*

Die geometrische Interpretation von Satz 58 möchten wir dem Leser überlassen.

Daß aus der Ungemischtheit von $\mathfrak{a}$ bei $\mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a}$ nicht auf die Ungemischtheit von $(\mathfrak{a}, F)$ geschlossen werden kann, zeigte bereits das Beispiel im Anschluß an Satz 56. H-Ideale $\mathfrak{a}$ mit dieser Eigenschaft werden die schon einmal angekündigten „perfekten Ideale" sein. Es ist jedoch nicht möglich, daß folgender Fall eintritt: $\mathfrak{a}$ pseudogemischt, aber nicht ungemischt, ferner $\mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a}$ und daraus $(\mathfrak{a}, F)$ ungemischt folgt. Dies nämlich stünde im Widerspruch zu Satz 47.

4.23. Zur Übertragbarkeit auf P-Ideale

Da in (75) der Fall $\operatorname{Dim}\big((\mathfrak{a}), f\big) < d - 1$ eintreten kann, können die Sätze 47, 57 und 58 im Gegensatz zu Satz 55. nicht auf inhomogene P-Ideale übertragen werden

Daher sind zu den Beweisen der auch im inhomogenen Fall gültigen Sätze 51 und 43 in 4.25. andere Methoden erforderlich.

Am naheliegendsten möchte es scheinen, von P-Idealen zu äquivalenten H-Idealen überzugehen, mit letzteren zu rechnen, schließlich $x_0 = 1$ zu setzen und somit zum inhomogenen Fall zurückzukehren. Der letzte Schritt ist dabei gewiß unproblematisch, denn ein H-Ideal $\mathfrak{h}$ der Hauptklasse r aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ mit $x_0^x \notin \mathfrak{h}$ für alle $x \in \mathbf{N}^*$ geht nach Setzen von $x_0 = 1$ in ein P-Ideal der Hauptklasse r in $\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ über.

Anders liegen die Dinge beim Übergang von P-Idealen zu äquivalenten H-Idealen. Hier gilt der

Satz 59. *Beim Homogenisieren von inhomogenen P-Idealen aus $\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ in äquivalente H-Ideale aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ gehen über:*
- *Durchschnittsdarstellungen von P-Idealen in Durchschnittsdarstellungen für H-Ideale,*
- *inhomogene Primideale in homogene Primideale,*
- *inhomogene Primärideale in homogene Primärideale,*
- *inhomogene quasiprimäre Ideale in homogene quasiprimäre Ideale,*
- *d-dimensionale P-Ideale in d-dimensionale H-Ideale,*
- *ungemischte P-Ideale in ungemischte H-Ideale,*
- *pseudogemischte P-Ideale in pseudogemischte H-Ideale,*
- *gemischte P-Ideale in gemischte H-Ideale,*
- *inhomogene Hauptideale in homogene Hauptideale.*

Jedoch gehen P-Ideale der Hauptklasse $r \geqq 2$ im allgemeinen nicht in H-Ideale der Hauptklasse über.

Beweis. Die positiven Aussagen folgen unmittelbar aus der Definition des äquivalenten H-Ideals gemäß Kap. 1, Definition 30. Für die letzte Aussage geben wir zwei Beispiele.

Das erste Beispiel hatten wir bereits an zwei Stellen des ersten Kapitels herangezogen. Im Anschluß an Kap. 1, Definition 26, betrachteten wir als zweites Beispiel das P-Ideal $(\mathfrak{a}) = (f_1, f_2)$ aus $\mathbf{K}[x_1, x_2, x_3]$ mit $f_1 = x_1^2$, $f_2 = x_2 + x_1x_3$. Der Leser möge schnell nachprüfen, daß hier $d = 1$ ist. Wegen $n = 3$ ist also $r = n - d = 2$, also $(\mathfrak{a})$ ein P-Ideal der Hauptklasse 2. Wie in 1.16. festgestellt wurde, ist jedoch das äquivalente H-Ideal aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ durch $\mathfrak{a} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$ gegeben mit $F_1 = x_1^2$, $F_2 = x_0x_2 + x_1x_3$, $F_3 = x_1x_2$, $F_4 = x_2^2$.

Als zweites Beispiel zeigen wir, daß das von uns wiederholt betrachtete homogene Primideal $\mathfrak{b}_{14}^{(2)} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$ aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ mit

$$F_1 = x_0x_3 - x_1x_2, \quad F_2 = x_0^2x_2 - x_1^3, \quad F_3 = x_0x_2^2 - x_1^2x_3, \quad F_4 = x_1x_3^2 - x_2^3$$

das äquivalente H-Ideal eines P-Ideals der Hauptklasse ist. Setzen wir nämlich $x_0 = 1$, so erhalten wir

$$f_1 = x_3 - x_1x_2, \quad f_2 = x_2 - x_1^3, \quad f_3 = x_2^2 - x_1^2x_3, \quad f_4 = x_1x_3^2 - x_2^3,$$

und f_3 und f_4 lassen sich durch f_1 und f_2 ausdrücken mit

$$f_3 = x_2f_2 - x_1^2f_1 \quad \text{und} \quad f_4 = x_1(x_3 + x_1x_2)\, f_1 - x_2^2f_2;$$

$\mathfrak{b}_{14}^{(2)}$ ist also das äquivalente H-Ideal zum inhomogenen primen Hauptklassenideal (f_1, f_2). Wir werden in 4.27. zeigen, daß es für die Anzahl der Elemente der Minimalbasis eines zu einem Hauptklassenideal äquivalenten H-Ideals keine obere Schranke gibt.

Die Minimalbasis des äquivalenten H-Ideals kann also beliebig mehr Elemente enthalten als die Basis des inhomogenen Ausgangsideals. Aber auch der umgekehrte Fall kann durchaus eintreten, nämlich dann, wenn vom inhomogenen Ausgangsideal $(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ zwar eine Minimalbasis, jedoch keine Basis minimaler Länge vorgegeben ist. Man betrachte hierzu die durch Kap. 1, (21) und (22), gegebenen P-Ideale mit dem äquivalenten H-Ideal $\mathfrak{a} = (x_1, x_2, x_3) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$, welches bei Enthomogenisierung $(x_0 = 1)$ in $(x_1, x_2, x_3) \subset \mathbf{K}[x_1, x_2, x_3]$ übergeht und mit (21) und (22) übereinstimmt, wie im Anschluß an (21) und (22) im Kapitel 1 gezeigt wurde. Die Bildung des äquivalenten H-Ideals diente hier überdies zur Feststellung, daß es sich bei Kap. 1, (21) und (22), um P-Ideale der Hauptklasse handelte.

Schließlich wollen wir noch erwähnen, daß P-Ideale der Hauptklasse bei Bildung des äquivalenten H-Ideals durchaus auch in H-Ideale der Hauptklasse übergehen können. Das geometrisch einfachste Beispiel sind nulldimensionale inhomogene Primideale $(\mathfrak{p}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$, deren Nullstellengebilde nur aus einem Punkt $(y_1, \ldots, y_n)$ besteht; mithin gilt

Satz 60. *Nulldimensionale inhomogene Primideale* $(\mathfrak{p})$ *aus* $\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *haben die Basisdarstellung*

$$(\mathfrak{p}) = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n), \tag{142}$$

sind also P-Ideale der Hauptklasse n.

Durch Homogenisierung folgt aus (142) gemäß Kap. 1, (38), (176), zunächst $\mathfrak{p}_1 = (y_0x_1 - y_1x_0, \ldots, y_0x_n - y_nx_0)$ und $\mathfrak{p}_1 : (x_0) = \mathfrak{p}_1$ wegen $x_0 \notin \mathfrak{p}_1$; es ist also $\mathfrak{p}_1$ das zu $(\mathfrak{p})$ äquivalente H-Ideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, und wir haben überdies den

Satz 61. *Nulldimensionale homogene Primideale* $\mathfrak{p}$ *aus* $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *haben die Basisdarstellung*

$$\mathfrak{p} = (y_0x_1 - y_1x_0, \ldots, y_0x_n - y_nx_0), \tag{143}$$

ind also H-Ideale der Hauptklasse n.

Aus (143) folgt, daß dann NG $(\mathfrak{p})$ nur aus dem Punkt $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ mit $y_0 = t_0$ besteht.

Abschließend verweisen wir nochmals auf die im Kapitel 1 im Anschluß an Satz 57 getroffene Feststellung, daß es H-Ideale gibt, welche zu keinem inhomogenen P-Ideal äquivalent sind. Solche H-Ideale sind beispielsweise H-Ideale mit einer trivialen Komponente, weil dann die Bedingung (178) von Kap. 1, Satz 58, wegen des Gröbnerschen Kriteriums (Satz 47, (102) in diesem Kapitel) nicht erfüllt ist.

4.24. P-Ideale der Hauptklasse

In Satz 45, (92), hatten wir bewiesen: Ist $\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_r)$ ein H-Ideal der Hauptklasse r, so ist auch jedes der H-Ideale $(F_1, \ldots, F_i)$ für $i = 1, 2, \ldots, r-1$ ein H-Ideal der Hauptklasse i. Für inhomogene P-Ideale der Hauptklasse ist dies nun leider nicht mehr bei allen Basisdarstellungen richtig, wie das folgende Beispiel zeigt: Es sei

$$(\mathfrak{a}) = (x_1x_3 + x_1, x_2x_3 + x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$$

aus $\mathbf{K}[x_1, x_2, x_3]$. Dann ist $(\mathfrak{a})$ ein P-Ideal der Hauptklasse 3, jedoch hat

$$(x_1x_3 + x_1, x_2x_3 + x_2) = \big(x_1(x_3 + 1), x_2(x_3 + 1)\big) = (x_3 + 1) \cap (x_1, x_2)$$

die Kodimension $3 - 2 = 1$, ist also kein P-Ideal der Hauptklasse.

Es gilt jedoch der

Satz 62. *Ist* $(\mathfrak{a}) = (f_1, \ldots, f_r) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *ein P-Ideal der Hauptklasse r, so existiert eine Basis* $(f_1^*, \ldots, f_r^*)$ *derart, daß*

$$(f_1^*), (f_1^*, f_2^*), \ldots, (f_1^*, \ldots, f_i^*), \ldots, (f_1^*, \ldots, f_{r-1}^*)$$

sämtlich P-Ideale der Hauptklasse sind.

Beweis. Dazu machen wir den Ansatz

$$f_i^* = a_{i1}f_1 + a_{i2}f_2 + \cdots + a_{ir}f_r \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, r. \tag{144}$$

Wir haben zu zeigen, daß wir die Koeffizienten $a_{ik} \in \mathbf{K}$ so wählen können, daß gilt:

1. $f_1^*, \ldots, f_i^*$ sind linear unabhängig für $i = 1, 2, \ldots, r$, also

$$\det(a_{ik}) \neq 0 \tag{145}$$

und

2. $(f_1^*, \ldots, f_i^*)$ sind für $i = 1, 2, \ldots, r$ P-Ideale der Hauptklasse i. Nach Definition 9 hieß ein P-Ideal (oder H-Ideal) ein Ideal der Hauptklasse r, wenn es die Kodimension r und eine r-gliedrige Basis besitzt. Bei H-Idealen fanden wir für die Anzahl s der Elemente einer Minimalbasis in Satz 43, (90), die Ungleichung $s \geqq r$; für H-Ideale der Hauptklasse galt also $s = r$. Da wir für P-Ideale $(\mathfrak{a}) = (f_1, \ldots, f_t)$ die Ungleichung $t \geqq r$ erst in 4.25. zusammen mit dem Ungemischtheitssatz werden beweisen können, haben wir vorerst die Möglichkeit des Auftretens von inhomogenen P-Idealen $(f_1, \ldots, f_t)$ mit der Kodimension r und $t < r$ mit zu berücksichtigen. Wir können dann den t Basiselementen $f_1, \ldots, f_t$ noch $r - t \geqq 1$ überflüssige Basiselemente (beispielsweise Linearkombinationen von $f_1, \ldots, f_t$) beifügen und hätten dann wieder r Basiselemente. Damit wäre die Definition 9 erfüllt; wir können also feststellen: Ein inhomogenes P-Ideal $(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ mit der Minimalbasis $(\mathfrak{a}) = (f_1, \ldots, f_t)$ ist genau dann ein P-Ideal der Hauptklasse r, wenn $\operatorname{Kodim}(f_1, \ldots, f_t) \geqq t$

gilt. Zum Beweis von 2. haben wir demnach

$$\text{Kodim}\,(f_1^*, \ldots, f_i^*) \geqq i \tag{146}$$

zu zeigen.

Für $i = 1$ ist das richtig. Wir führen vollständige Induktion nach i durch; es gelte also Kodim $(f_1^*, \ldots, f_{i-1}^*) \geqq i - 1$. Gilt nun Kodim $(f_1^*, \ldots, f_{i-1}^*) > i - 1$, also Kodim $(f_1^*, \ldots, f_i^*) \geqq i$, so wählen wir f_i^* linear unabhängig zu $f_1^*, \ldots, f_{i-1}^*$ und haben damit 1. erfüllt. Ist hingegen Kodim $(f_1^*, \ldots, f_{i-1}^*) = i - 1$, so wählen wir f_i^* so, daß es in keinem $(n - i + 1)$-dimensionalen Primideal liegt; nach (75) ist dies mit

$$\big(\mathfrak{g}_{i-1}(f_1^*, \ldots, f_{i-1}^*)\big) : (f_i^*) = \mathfrak{g}_{i-1}(f_1^*, \ldots, f_{i-1}^*)$$

gleichwertig und ergibt (146) und zugleich die lineare Unabhängigkeit von $f_1^*, \ldots, f_i^*$, also schließlich die lineare Unabhängigkeit von $f_1^*, \ldots, f_r^*$, q. e. d.

Bemerkung. Wegen (145) ist $(\mathfrak{a}) = (f_1, \ldots, f_r) = (f_1^*, \ldots, f_r^*)$, und es sind auch $f_1, \ldots, f_r$ linear unabhängig. Damit ist aber weder die Beziehung $t \geqq r$ noch die Minimalbasiseigenschaft von $(f_1, \ldots, f_r)$ bewiesen. Aus der linearen Abhängigkeit von Basispolynomen folgt zwar, daß diese keine Minimalbasis bilden können; umgekehrt können jedoch überflüssige Basiselemente linear unabhängig sein; beispielsweise sind (vgl. 4.23. und 1.7.)

$$f_1 = x_1^2, \quad f_2 = x_2 + x_1 x_3, \quad f_3 = x_1 x_2, \quad f_4 = x_2^2$$

linear unabhängig, aber es war $f_3 = (-x_3) f_1 + x_1 f_2$ und $f_4 = x_3^2 f_1 + (x_2 - x_1 x_3) f_2$, also $(\mathfrak{a}) = (f_1, f_2, f_3, f_4) = (f_1, f_2)$.

Bei H-Idealen ist die Anwendung der Begriffe „linear unabhängig" bzw. „linear abhängig" auf Formen gleichen Grades beschränkt und daher von vornherein eingeschränkt. Wir werden uns damit in den beiden nächsten Kapiteln über Syzygientheorie und die Hilbertfunktion beschäftigen.

4.25. Ungemischtheit von P-Idealen der Hauptklasse und der Beweis von $t \geqq r$ für P-Ideale

Satz 63 (Satz von Macaulay). *In* $\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *ist jedes P-Ideal* $(\mathfrak{a})$ *der Hauptklasse ungemischt.*

Satz 64. *Ist* $(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *ein P-Ideal der Hauptklasse r, so ist in jeder Basisdarstellung* $(\mathfrak{a}) = (f_1, \ldots, f_r)$ *kein Basiselement überflüssig, d. h., alle Basen minimaler Länge bestehen aus genau r Elementen.*

Zusatz. Der Leser möge hier die Formulierung der Voraussetzung besonders beachten. Wäre $(\mathfrak{a}) = (f_1, \ldots, f_t)$ mit $t < r$ eine Basis minimaler Länge für $(\mathfrak{a})$, so könnte man nach dem Muster von Kap. 1, (21), (22), für $(\mathfrak{a})$ durchaus eine andere Minimalbasis $(\mathfrak{a}) = (g_1, \ldots, g_r)$ angeben, bei der also kein Basiselement überflüssig ist, welche jedoch wegen $t < r$ keine Basis minimaler Länge ist. Daneben würde aber auch die Basisdarstellung $(\mathfrak{a}) = (f_1, \ldots, f_t, f_{t+1}, \ldots, f_r)$ mit überflüssigen Basiselementen $f_{t+1}, \ldots, f_r$ existieren im Widerspruch zur hier ausgesprochenen Behauptung, daß in *jeder* Basisdarstellung $(f_1, \ldots, f_r)$ kein Element überflüssig ist. Mithin bestehen alle Basen minimaler Länge eines inhomogenen Hauptklassenideals der Kodimension r aus genau r Elementen.

Nach den Ausführungen in 4.24. bedeutet dies, daß der Fall $t < r$ bei P-Idealen niemals auftreten kann, d. h., auch für P-Ideale $(\mathfrak{a}) = (f_1, \ldots, f_t) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ haben wir den

Satz 65. Ist $(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *ein P-Ideal mit* Kodim $(\mathfrak{a}) = r$, *so gilt für jede Basisdarstellung* $(\mathfrak{a}) = (f_1, \ldots, f_t)$

$$t \geqq r. \tag{147}$$

Beweis. Wir beweisen nun die Sätze 63 und 64 simultan durch vollständige Induktion nach n; im Verlauf dieses Beweises werden wir hier noch nicht angegebene Hilfsmittel und Ergebnisse aus der Literatur benötigen. Leser, die daran weniger interessiert sind, können diesen Beweis übergehen.

Vorerst betrachten wir dazu einige Sonderfälle.

a) $r = n$. Ist $(\mathfrak{a}) = (f_1, \ldots, f_n)$ ein P-Ideal der Hauptklasse n, so ist Dim $(\mathfrak{a}) = n - n = 0$; da aber im inhomogenen Fall Null die kleinstmögliche Dimension ist, sind alle nulldimensionalen P-Ideale ungemischt. Zum Beweis der zweiten Behauptung ist zu zeigen, daß der Fall Dim $(\mathfrak{a})$ = Dim $(f_1, \ldots, f_t) = 0$, also der Fall Kodim $(\mathfrak{a})$ = Kodim $(f_1, \ldots, f_t) = n$ mit $t < n$ unmöglich ist. Dies trifft zu, wenn $t \geqq r$ für alle $r < n$ bewiesen worden ist, weil dann der Fall Dim $(f_1, \ldots, f_{n-1}) = 0$, also Kodim $(f_1, \ldots, f_{n-1}) = n$, ausgeschlossen werden kann. Damit ist der Beweis unserer Behauptung auf den Beweis für den Fall $r < n$ zurückgeführt worden.

b) $n = 1$. Hier ist nur $r = 1$ und $d = 0$ möglich; das sind durchweg Hauptideale, welche nach Satz 40, (86), ungemischt sind und nach Definition nur ein Basiselement haben, also keine verkürzbare Basis besitzen können. Wir hätten dies auch als Spezialfall von a) ansehen können.

c) $n = 2$. Für $r = 1$ und $d = 1$ entstehen wieder Hauptideale. Für $r = 2$ und $d = 0$ liegt wieder der unter a) behandelte Fall $r = n$ vor, der schnell gesondert erledigt werden kann: Die Ungemischtheit folgt wegen $d = 0$; die Basisverkürzung ist unmöglich, weil dann Hauptideale entstehen würden, welche nach Satz 17 die Dimension $n - 1 = 1$ haben müßten.

Wir nehmen jetzt an, unsere Behauptungen seien für $n - 1$ Variable richtig; daraus wollen wir die Gültigkeit für n Variable ableiten. Dazu nehmen wir indirekt an, $(\mathfrak{a})$ wäre gemischt, genauer: $(\mathfrak{a})$ habe eine Primärkomponente von der höchstmöglichen Kodimension $\varrho > r$, also der Dimension $\delta = n - \varrho < d = n - r$; dabei ist $\varrho \leqq n$, also

$$r < \varrho \leqq n. \tag{148}$$

Wir untersuchen zunächst den Fall

d) $\varrho < n$. Dann ist $\delta > 0$, also $\delta \geqq 1$. Für jedes δ-dimensionale zu $(\mathfrak{a})$ gehörige Primärideal $(\mathfrak{q}_{\varrho\sigma})$ $(\sigma = 1, \ldots, s_\varrho)$ gibt es dann eine geeignete Numerierung $i_1, \ldots, i_\delta$ mit $(\mathfrak{q}_{\varrho\sigma}) \cap \mathbf{K}[x_{i1}, \ldots, x_{i\delta}] = (0)$. Wir benötigen jedoch, daß es eine *für alle* $(\mathfrak{q}_{\varrho\sigma})$ geeignete Numerierung gibt. Um dies zu sichern, unterwerfen wir $x_1, \ldots, x_n$ einer linearen Transformation mit unbestimmten Koeffizienten. Bei diesem Übergang zu „transformierten Idealen" im Sinne von E. NOETHER (vgl. [2], § 1) gehen u. a. gemischte Ideale in gemischte Ideale und ungemischte Ideale in ungemischte Ideale über; auch ändert sich die Anzahl der Basiselemente nicht (vgl. NOETHER [2], § 2, Hilfssatz 1,2). Wie E. NOETHER weiter gezeigt hat (vgl. [2], S. 232, letzte Zeile) sind *bei transformierten Idealen alle Numerierungen gleich geeignet*; wir können also o. B. d. A.

$$(\mathfrak{a}) \cap \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_\delta] = (0) \tag{149}$$

annehmen. Dann ist wegen $\delta \geqq 1$

$$\mathbf{K}(x_1, \ldots, x_\delta)\,[x_{\delta+1}, \ldots, x_n] \supset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n], \tag{150}$$

und wir betrachten das Ideal

$$(\mathfrak{a}^*) := (\mathfrak{a}) \cdot \mathbf{K}(x_1, \ldots, x_\delta)\,[x_{\delta+1}, \ldots, x_n] \tag{151}$$

im Oberring $\mathbf{K}(x_1, \ldots, x_\delta)\,[x_{\delta+1}, \ldots, x_n]$. $(\mathfrak{a}^*)$ hat dieselbe Basis wie $(\mathfrak{a})$. Aus $\mathrm{Dim}\,(\mathfrak{a}) = d$ und also $\mathrm{Kodim}\,(\mathfrak{a}) = n - d = r$ folgt $\mathrm{Dim}\,(\mathfrak{a}^*) = d - \delta$ und folglich $\mathrm{Kodim}\,(\mathfrak{a}^*) = (n - \delta) - (d - \delta) = n - d = r$; mithin ist $(\mathfrak{a}^*)$ ein P-Ideal der Hauptklasse r in $n - \delta \leqq n - 1$ Variablen. Für $(\mathfrak{a}^*)$ gilt die Induktionsannahme, also ist $(\mathfrak{a}^*)$ ungemischt, und keines der Basiselemente ist überflüssig. Hieraus folgt, daß auch $(\mathfrak{a})$ ungemischt ist (im Widerspruch zu unserer Annahme) und ferner — wegen der Übereinstimmung der Basen — kein Basiselement von $(\mathfrak{a})$ überflüssig ist, q. e. d.

Der Leser wird sich die berechtigte Frage stellen, warum wir mit diesem grundsätzlich einfachen Prinzip der Bildung von $(\mathfrak{a}^*)$ nicht auch schon bei den früheren Beweisen im Fall der H-Ideale gearbeitet haben. Das hat seinen einfachen Grund darin, daß $\mathfrak{a}^*$ bei einem H-Ideal $\mathfrak{a}$ kein H-Ideal mehr ist. Um zu solchen zu gelangen, muß man nach dem Vorbild von G. HERMANN äquivalente H-Ideale bezüglich der verbliebenen Variablen (hier $x_{\delta+1}, \ldots, x_n$) bilden, wobei sich im allgemeinen die Anzahl der Basiselemente erhöhen wird (vgl. HERMANN [1], Satz 4).

e) $\varrho = n$. Wir haben also die Annahme, daß das Hauptklassenideal $(\mathfrak{a}) = (f_1, \ldots, f_r)$ eine nulldimensionale Primärkomponente besitzt, zum Widerspruch zu führen. Wir nehmen dazu o. B. d. A. an, daß die Nullstelle dieser Primärkomponente in den Koordinatenursprung fällt; dann ist nach Satz 60, (142), $(\mathfrak{p}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ das zugehörige Primideal. Jetzt können wir den Beweisgedanken von Satz 50 (*jedes H-Ideal der Hauptklasse r besitzt für $1 \leqq r \leqq n$ keine triviale Komponente*) formal übertragen, indem wir ersetzen:

$$\begin{array}{lcl}
\mathfrak{p}_T = (x_0, x_1, \ldots, x_n) & \text{durch} & (\mathfrak{p}) = (x_1, \ldots, x_n), \\
L = u_0x_0 + u_1x_1 + \cdots + u_nx_n & \text{durch} & l = u_1x_1 + \cdots + u_nx_n, \\
\left.\begin{array}{l} X_0 \;\; = x_0, \\ X_1 \;\; = x_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ X_{n-1} = x_{n-1}, \\ X_n \;\; = u_0x_0 + \cdots + u_nx_n \end{array}\right\} & \text{durch} & \left\{\begin{array}{l} X_1 \;\; = x_1, \\ X_2 \;\; = x_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ X_{n-1} = x_{n-1} \\ X_n \;\; = u_1x_1 + \cdots + u_nx_n, \end{array}\right. \\
\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{b} \subset \mathbf{K}[X_0, \ldots, X_n] & \text{durch} & (\mathfrak{a}) \mapsto (\mathfrak{b}) \subset \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n], \\
\mathfrak{b} = (G_1, \ldots, G_r) & \text{durch} & (\mathfrak{b}) = (g_1, \ldots, g_r), \\
L \mapsto X_n & \text{durch} & l \mapsto X_n, \\
F \notin \mathfrak{a} \mapsto G \notin \mathfrak{b} & \text{durch} & f \notin (\mathfrak{a}) \mapsto g \notin (\mathfrak{b}), \\
X_nG \in \mathfrak{b} & \text{durch} & X_ng \in (\mathfrak{b}), \\
X_nG = H_1G_1 + \cdots + H_rG_r & \text{durch} & X_ng = h_1g_1 + \cdots + h_rg_r,
\end{array}$$

$\bar{H}_i$	durch	$\bar{h}_i$,
$\bar{G}_i$	durch	$\bar{g}_i$,
$\bar{\mathfrak{b}} \subset \mathbf{K}[X_0, \ldots, X_{n-1}]$	durch	$(\bar{\mathfrak{b}}) \subset \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_{n-1}]$,
B_i	durch	b_i.

Außerdem müssen wir von den $\bar{g}_i$ die Gültigkeit der Eigenschaften der f_i^* von 4.24. voraussetzen. Dann erhalten wir den Widerspruch $g \in (\mathfrak{b})$.

Die Annahme der Existenz überflüssiger Basispolynome in $(\mathfrak{a})$ führt zur gleichen Eigenschaft im Hauptklassenideal $(\bar{\mathfrak{b}}) \subset \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_{n-1}]$ im Widerspruch zur Induktionsannahme, daß bei Hauptklassenidealen in $n - 1$ Variablen kein Basiselement überflüssig sein kann. Mithin war die Annahme der Existenz überflüssiger Basispolynome für $(\mathfrak{a})$ falsch, q. e. d.

Zum Schluß werde nochmals das im Anschluß an (75) gegebene Beispiel betrachtet. Dort war $(\mathfrak{a}) = (x_1^2 + x_1, x_1x_2, \ldots, x_1x_r)$ mit $\operatorname{Dim}(\mathfrak{a}) = n - 1$, also $\operatorname{Kodim}(\mathfrak{a}) = 1$, aber $\operatorname{Dim}\big((\mathfrak{a}), x_1 + 1)\big) = n - r$, also $\operatorname{Kodim}\big((\mathfrak{a}), x_{r+1})\big) = r$; die Dimension erniedrigte sich also um $r - 1$, während sich die Kodimension um $r - 1$ erhöhte. Und dennoch steht dies in Einklang mit $t \geqq r$: Die schlagartige Erniedrigung war nur möglich, weil wegen

$$\begin{aligned}\operatorname{Dim}(x_1^2 + x_1) &= \operatorname{Dim}(x_1^2 + x_1, x_1x_2) = \cdots\\ &= \operatorname{Dim}(x_1^2 + x_1, x_1x_2, \ldots, x_1x_r) = n - 1\end{aligned}$$

zuvor ein genügend langer Dimensionsstillstand eingetreten war. *Mithin ist Satz* 52 *für P-Ideale keineswegs allgemein gültig.*

4.26. Gemischtheit und Ungemischtheit von Idealpotenzen, Kriterien für Primärideale

Satz 66. *Ist* $(\mathfrak{a})$ *bzw.* $\mathfrak{a}$ *eingemischtes P-Ideal oder H-Ideal, dessen Radikal ebenfalls gemischt ist, so hat jede Potenz* $(\mathfrak{a}^k)$ *bzw.* $\mathfrak{a}^k$ *dieselbe Eigenschaft.*

Beweis. Dies folgt sofort wegen $\operatorname{Rad}(\mathfrak{a}^k) = \operatorname{Rad}\mathfrak{a}$ nach Kap. 1, (87). Aus dem gleichen Grunde folgt der

Satz 67. *Jede Potenz eines pseudogemischten P-Ideals oder H-Ideals ist pseudogemischt.*

Jedoch gilt der

Satz 68. *Potenzen ungemischter Ideale können gemischt (genauer: pseudogemischt, aber nicht ungemischt) sein.*

Beweis. Dazu verweisen wir auf das zweite Beispiel von 2.6. und das erste Beispiel von 2.9. Die Ideale $\mathfrak{p}^2$ waren jeweils quasiprimär, aber nicht primär. Da die eingebetteten Komponenten eine geringere Dimension haben, ergibt sich als Nebenergebnis der wichtige

Satz 69. *Ein P-Ideal oder H-Ideal ist primär genau dann, wenn es quasiprimär und ungemischt ist.*

Es ist mithin eine Ausnahme, wenn aus der Ungemischtheit von $(\mathfrak{a})$ bzw. $\mathfrak{a}$ die Ungemischtheit von $(\mathfrak{a}^k)$ bzw. $\mathfrak{a}^k$ folgt; dies gilt nicht einmal für die noch zu behandelnden *perfekten H-Ideale*; das erste Beispiel von 2.9. liefert dafür ein Beispiel. Für Ideale der Hauptklasse ist dies jedoch richtig; wir beweisen dazu den ebenfalls von Macaulay stammenden

Satz 70. *Jede Potenz eines P-Ideals* $(\mathfrak{a})$ *oder H-Ideals* $\mathfrak{a}$ *der Hauptklasse ist ungemischt.*

Beweis. Wir führen den Beweis für P-Ideale $(\mathfrak{a})$; der Beweis für H-Ideale veräuft entsprechend. Das vorgegebene Hauptklassenideal sei

$$(\mathfrak{a}) = (f_1, \ldots, f_r), \tag{152}$$

und gemäß Satz 62 sei o. B. d. A. auch

$$(f_2, \ldots, f_r) \text{ Ideal der Hauptklasse.} \tag{153}$$

Ferner sei $(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{q}_1) \cap (\mathfrak{q}_2) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_m)$; wegen der Ungemischtheit von $(\mathfrak{a})$ ist dann $\operatorname{Rad}(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{p}_1) \cap (\mathfrak{p}_2) \cap \cdots \cap (\mathfrak{p}_m)$ eine unverkürzbare Darstellung für $\operatorname{Rad}(\mathfrak{a})$. Wegen $\operatorname{Rad}(\mathfrak{a}^k) = \operatorname{Rad}(\mathfrak{a})$ gemäß Kap. 1, (87), sind $(\mathfrak{p}_1), (\mathfrak{p}_2), \ldots, (\mathfrak{p}_m)$ auch alle Primärkomponenten der Kodimension r von $(\mathfrak{a}^k)$, dasselbe gilt für $(\mathfrak{a}^{k-1})$.

Angenommen, $(\mathfrak{a}^k)$ wäre gemischt; dann müßte wenigstens ein Polynom a existieren mit

$$(\mathfrak{a}) : (a) = (\mathfrak{a}) \tag{154}$$

und

$$(\mathfrak{a}^k) : (a) \supset (\mathfrak{a}^k). \tag{155}$$

Wir führen den Beweis nun durch vollständige Induktion nach k. Für $k = 1$ ist die Behauptung richtig und stimmt mit dem Satz von Macaulay (Satz 51 bzw. Satz 63) überein. Als Induktionsannahme setzen wir die Ungemischtheit von $(\mathfrak{a}^{k-1})$ voraus; aus (154) folgt daraus

$$(\mathfrak{a}^{k-1}) : (a) = (\mathfrak{a}^{k-1}). \tag{156}$$

Wir wollen nun (155) zum Widerspruch führen, indem wir von einem Polynom g mit

$$g \in (\mathfrak{a}^k) : (a) \qquad \text{und} \qquad g \notin (\mathfrak{a}^k) \tag{157}$$

ausgehen und auf $g \in (\mathfrak{a}^k)$ im Widerspruch zu (155) schließen. Wegen (157) ist also $ga \in (\mathfrak{a}^k)$ und wegen $(\mathfrak{a}^k) \subset (\mathfrak{a}^{k-1})$ mithin $ga \in (\mathfrak{a}^{k-1})$, also $g \in (\mathfrak{a}^{k-1}) : (a)$ und wegen

(156) folglich $g \in (\mathfrak{a}^{k-1})$. Aus (152) folgt nun

$$(\mathfrak{a}^{k-1}) = (f_1^{k-1}, f_1^{k-2}f_2, \ldots, f_1 f_r^{k-2}; f_2^{k-1}, f_2^{k-2}f_3, \ldots, f_r^{k-1}) \\ = (f_1) \cdot (\mathfrak{a}^{k-2}) + (f_2, \ldots, f_r)^{k-1};$$

jedes $g \in (\mathfrak{a}^{k-1})$ ist also darstellbar durch

$$g = g_1 f_1 + b_1 \tag{158}$$

mit $g_1 \in (\mathfrak{a}^{k-2})$ und $b_1 \in (f_2, \ldots, f_r)^{k-1}$; mithin ist

$$ag = ag_1 f_1 + ab_1. \tag{159}$$

Andererseits ist $ag \in (\mathfrak{a}^k)$, und für $(\mathfrak{a}^k)$ gilt $(\mathfrak{a}^k) = (f_1) \cdot (\mathfrak{a}^{k-1}) + (f_2, \ldots, f_r)^k$; also existiert eine Darstellung

$$ag = h_1 f_1 + c_1 \tag{160}$$

mit $h_1 \in (\mathfrak{a}^{k-1})$ und $c_1 \in (f_2, \ldots, f_r)^k$; aus (159) und (160) folgt

$$f_1(ag_1 - h_1) = -ab_1 + c_1 \in (f_2, \ldots, f_r)^{k-1},$$

also $ag_1 - h_1 \in (f_2, \ldots, f_r)^{k-1} : (f_1)$; wegen (153) ist

$$(f_2, \ldots, f_r)^{k-1} : (f_1) = (f_2, \ldots, f_r)^{k-1},$$

also $ag_1 - h_1 \in (f_2, \ldots, f_r)^{k-1} \subset (\mathfrak{a}^{k-1})$; wegen $h_1 \in (\mathfrak{a}^{k-1})$ ist also $ag_1 \in (\mathfrak{a}^{k-1})$ und mithin wegen (156) $g_1 \in (\mathfrak{a}^{k-1})$, also $g_1 f_1 \in (\mathfrak{a}^k)$ und wegen $ag \in (\mathfrak{a}^k)$ nach (158) auch $b_1 a \in (\mathfrak{a}^k)$. Jetzt können wir daraus analog wie oben weiterschließen auf $b_1 a \in (\mathfrak{a}^{k-1})$, $b_1 \in (\mathfrak{a}^{k-1})$ und $b_1 = g_2 f_2 + b_2$ mit $g_2 \in (\mathfrak{a}^{k-2})$ und $b_2 \in (f_3, \ldots, f_r)^{k-1}$ sowie $g_2 \in (\mathfrak{a}^{k-1})$ usw. bis $b_{r-2} = g_{r-1} f_{r-1} + b_{r-1}$ mit $b_{r-1} \in (f_r^{k-1})$; wir hätten also

$$g = g_1 f_1 + g_2 f_2 + \cdots + g_{r-1} f_{r-1} + b_{r-1} \tag{161}$$

mit $g_i \in (\mathfrak{a}^{k-1})$ für $i = 1, 2, \ldots, r-1$ und $b_{r-1} \in (f_r^{k-1})$. Die folgenden Überlegungen vervollständigen den Macaulayschen Beweis: Es ist also

$$b_{r-1} = t \cdot f_r^{k-1} \tag{162}$$

und mithin

$$ab_{r-1} = at f_r^{k-1}. \tag{163}$$

Andererseits ist wegen (157) und (161) $ab_{r-1} = b_{r-1} a \in (\mathfrak{a}^k)$, also existiert eine Darstellung

$$b_{r-1} a = ab_{r-1} = g_1 f_1^k + g_2 f_1^{k-1} f_2 + \cdots + g_h f_{r-1}^k \\ + f_r^{k-1}(d_1 f_1 + d_2 f_2 + \cdots + d_{r-1} f_{r-1} + d_r f_r), \tag{164}$$

welche wegen (163) so gewählt werden kann, daß $g_1 = 0, \ldots, g_h = 0$ werden; es ist also nach (163) und (164) $atf_r^{k-1} = f_r^{k-1}(d_1f_1 + \cdots + d_rf_r)$ mit $at \in (\mathfrak{a})$, also $t \in (\mathfrak{a}) : (a)$, und wegen $(\mathfrak{a}) : (a) = (\mathfrak{a})$ gemäß (154) ist $t \in (\mathfrak{a})$; aus (162) folgt $b_{r-1} \in (\mathfrak{a}) \cdot (f_r^{k-1}) \subset (\mathfrak{a}) \cdot (\mathfrak{a}^{k-1}) = (\mathfrak{a}^k)$; in (161) gilt also neben $g_if_i \in (\mathfrak{a}^{k-1}) \cdot (\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}^k)$ auch $b_{r-1} \in (\mathfrak{a}^k)$, also schließlich $g \in (\mathfrak{a}^k)$ im Widerspruch zu (157). Also war die Annahme (155), welche aus der angenommenen Gemischtheit von $(\mathfrak{a}^k)$ folgte, falsch.

Mithin ist $(\mathfrak{a}^k)$ ungemischt, q. e. d.

Auf die Macaulayschen Ungemischtheitssätze 51 bzw. 63 stützt sich die Theorie der *Cohen-Macaulayschen Ringe*, welche zur Zeit von vielen Autoren untersucht werden. Der Leser beachte dazu, daß wir zum Beweis von Satz 70 den Ungemischtheitssatz 51 bzw. 63 sowie Satz 62, nicht aber die Polynomeigenschaft der betreffenden Elemente benötigt haben.

Für H-Ideale kann man Satz 70 noch etwas verschärfen, nämlich dahingehend, daß Idealpotenzen von H-Idealen der Hauptklasse perfekt sind, woraus die Ungemischtheit folgt, wie wir im kommenden Kapitel sehen werden. Idealpotenzen perfekter H-Ideale sind jedoch im allgemeinen nicht mehr perfekt, ja gegebenenfalls nicht einmal ungemischt; dies kann man aus dem ersten Beispiel von 2.9. folgern.

Wir fassen unsere bisherigen Ergebnisse betreffend die Ungemischtheit zusammen:

Satz 71. *Für P-Ideale und H-Ideale gilt: Primideale, Primärideale, Ideale der Hauptklasse und Potenzen von Idealen der Hauptklasse sind ungemischt.*

Zusammen mit Satz 69 folgt weiter

Satz 72. *Ein quasiprimäres P-Ideal oder H-Ideal, welches Ideal der Hauptklasse oder Idealpotenz eines Ideals der Hauptklasse ist, ist primär.*

Jetzt endlich haben wir bewiesen, daß es sich bei dem zweiten Beispiel von 2.9. tatsächlich um ein Primärideal handelt, weil hier ein H-Ideal der Hauptklasse 2 vorliegt.

4.27. Schranken für s und t, Kronecker-Perronsches Problem

Mit $s \geqq r$ und $t \geqq r$ gemäß (90) bzw. (147) sind untere Schranken für die Anzahl der Basiselemente von d-dimensionalen H-Idealen aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ bzw. P-Idealen aus $\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ mit fest vorgegebenen n und d $(r = n - d)$ gegeben worden, und zwar scharfe Schranken in dem Sinne, daß diese Schranken bei Idealen der Hauptklasse (und nur bei diesen) tatsächlich angenommen werden.

Wir wollen uns im folgenden Gedanken machen, inwieweit die Frage nach oberen Schranken für s bzw. t bei vorgegebenen n und d überhaupt sinnvoll ist. Zunächst folgt aus der Basisdarstellung für Idealpotenzen gemäß Kap. 1, (72), daß es H-Ideale mit beliebig großer Anzahl von Basiselementen gibt. Betrachten wir das d-dimensionale prime Potenzproduktideal $\mathfrak{p}_\pi = (x_0, x_1, \ldots, x_{r-1})$ gemäß Kap. 2, (9), dann ist die Basis offenbar Minimalbasis, und $\mathfrak{p}_\pi$ ist in $\mathbf{K}[x_0, \ldots, x_{r-1}, x_r, \ldots, x_n]$ ein d-dimensionales H-Ideal der Hauptklasse $r = n - d$. Nach Kap. 2, (27), ist dann jede Idealpotenz $\mathfrak{p}_\pi{}^m = (x_0{}^m, x_0{}^{m-1}x_1, \ldots, x_{r-1}^m)$ ein Primärideal, und $(x_0{}^m, x_0{}^{m-1}x_1, \ldots, x_{r-1}^m)$ ist offenbar eine Minimalbasis aus $\binom{m+r-1}{r-1}$ Elementen (diese Hurwitzsche Formel werden wir in 5.14. beweisen); wegen $\binom{m+r-1}{r-1} > m$ kann also die Anzahl der Basisformen einer Minimalbasis für ein homogenes Primärideal bei fest vorgegebenen d, r, n immer noch beliebig groß werden. Dasselbe gilt für P-Ideale.

Die Frage nach oberen Schranken für s und t ist also *nur für Primideale sinnvoll.* Bei P-Idealen müssen wir dabei wegen Kap. 1, (21), (22)ff., zusätzlich fordern, daß *eine Basis minimaler Länge vorliegt.*

Wir behandeln zunächst den Fall $n = 2$. Für das triviale Primideal $\mathfrak{p}_T = (x_0, x_1, x_2.$ ist dann $s = n + 1 = 3$. Ist $d = 0$, so gilt $\mathfrak{p} = (y_0x_1 - y_1x_0, y_0x_2 - y_2x_0)$ bzw) $(\mathfrak{p}) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2)$ nach (143) bzw. (142); wir erhalten also in jedem Fall Ideale der Hauptklasse 2; also ist $s = 2$ bzw. $t = 2$. Ist schließlich $d = 1$, so folgt aus der Ungemischtheit von Primidealen mit Hilfe von Satz 39 bzw. Satz 40 (Formeln (83) bzw. (86)) die Hauptidealeigenschaft, also $s = 1$ bzw. $t = 1$. Insgesamt ist also für $n = 2$ stets $s \leqq 3$ und bei Basen minimaler Länge auch $t \leqq 3$.

Wenn wir nun im folgenden für prime H-Ideale zeigen wollen, daß für s keine obere Schranke existiert, so muß jedenfalls $n \geqq 3$ sein. Wir wollen den kleinstmöglichen Wert, also $n = 3$, wählen. Für $d = 2$ gibt das wieder Hauptideale, für $d = 0$ Ideale der Hauptklasse 3, für $d = -1$ das T-Ideal der Hauptklasse 4. Interessant ist also der Fall $n = 3$, $d = 1$, $r = 2$. Enthält unser Primideal eine Linearform, so können wir diese durch eine Variablentransformation in x_3 transformieren und damit x_3 aus den anderen Basisformen eliminieren, welche mithin nur von x_0, x_1, x_2 abhängen. Und für diese gelten die Abschätzungen im Fall $n = 2$; unter Hinzunahme von x_3 haben wir also die Abschätzung $s \leqq 4$.

In unserem Gegenbeispiel müßte also $n = 3$, $d = 1$, $r = 2$ sein, und für den Minimalgrad m_0 der Basisformen muß $m_0 \geqq 2$ gelten. Die Nullstellengebilde solcher eindimensionalen primen H-Ideale sind *irreduzible algebraische Raumkurven.* Wir haben also

Definition 11. Unter dem *idealtheoretischen Kurvenproblem* für H-Ideale versteht man die Frage nach oberen Schranken für die Anzahl s der Elemente von Minimalbasen für eindimensionale prime H-Ideale aus $\mathsf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$, welche keine Linearform enthalten.

Hierzu gilt der

Satz 73. *Für die Anzahl s der Elemente von Minimalbasen eindimensionaler primer H-Ideale aus* $\mathsf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$, *welche keine Linearform enthalten, existiert keine obere Schranke.*

Beweis. Hierzu wird in der Literatur gewöhnlich auf ein Gegenbeispiel von MACAULAY (vgl. [2], p. 36) verwiesen, welches von GRÖBNER in [2], S. 115, Fußnote 2, erläutert wird. MACAULAY gibt *keine explizite Basisdarstellung* an, sagt auch nicht, ob er P-Ideale oder H-Ideale betrachtet, sondern zeigt durch abzählende Methoden, welche nur bei H-Idealen anwendbar sind, daß eine solche Gradschranke nicht existieren kann. Stattdessen geben wir hier als Beispiele für die Richtigkeit von Satz 73 zwei homogene Primideale aus $\mathsf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ explizit an.

Beispiel 1. Wir betrachten die Primideale

$$\mathfrak{v}_{1m}^{*} := \mathfrak{v}_{1m}^{(2,3,\ldots,m-2)} \subset \mathsf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$$

für $m \geqq 4$ mit der allgemeinen Nullstelle

$$y_0 = t_0^{m}, \quad y_1 = t_0^{m-1}t_1, \quad y_2 = t_0 t_1^{m-1}, \quad y_3 = t_1^{m}.$$

Vom Verfasser und Diplomanden wurde die Basis berechnet zu

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{v}_{1m}^{*} = (F_1, F_2, \ldots, F_m) \quad \text{mit} \quad F_1 = x_0x_3 - x_1x_2 \quad \text{und} \\ &F_i = x_0^{m-i}x_2^{i-1} - x_1^{m-i+1}x_3^{i-2} \quad \text{für} \quad i = 2, \ldots, m \quad \text{und} \quad m \geqq 4. \end{aligned}\right\} \tag{165}$$

Daß $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ eine Minimalbasis bilden, ist unmittelbar einzusehen. Daß dadurch die volle Basis des Primideals mit der angegebenen allgemeinen Nullstelle gegeben ist, läßt sich mit den in 6.8. im Anschluß an Kap. 6, (195), angegebenen Methoden beweisen; man vgl. hierzu RENSCHUCH [6, 8] und [14], (12). Dies ist aber hier von geringerem Interesse, da durch $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ jedenfalls bereits m unbedingt erforderliche Basiselemente gegeben sind, und diese Anzahl wird mit wachsendem m beliebig groß, was zu zeigen war.

Beispiel 2 (vgl. RENSCHUCH [14], (13)). Wir betrachten ganz entsprechend die Primideale $\mathfrak{v}_{1m}^{**} := \mathfrak{v}_{1m}^{(1,3,4,\ldots,m-3,m-1)} \subset \mathsf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ für ungerades m und $m \geqq 7$ mit der allgemeinen Nullstelle

$$y_0 = t_0^{m}, \quad y_1 = t_0^{m-2}t_1^{2}, \quad y_2 = t_0^{2}t_1^{m-2}, \quad y_2 = t_1^{m}.$$

Hierfür berechneten wir die Minimalbasis zu

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{v}_{1m}^{**} = (G_1, G_2, \ldots, G_{m-2}) \quad \text{mit} \quad G_1 = x_0x_3 - x_1x_2 \quad \text{und} \\ &G_i = x_0^{m-2-i}x_2^{i} - x_1^{m-i}x_3^{i-2} \quad \text{für} \quad i = 2, \ldots, m-2, \ m \geqq 7, \ m \text{ ungerade}; \end{aligned}\right\} \tag{166}$$

hier besteht die Basis aus $m - 2$ Basisformen; die Anzahl der Basisformen wird also mit wachsendem m wiederum beliebig groß.

Als Folgerung aus (165) und (166) ergibt sich der

Satz 74. *Bei primen H-Idealen kann der Maximalgrad M der Basisformen einer Minimalbasis beliebig groß sein; genauer: Die Differenz $M - m_0$ zwischen Maximalgrad und Minimalgrad der Basisformen einer Minimalbasis kann beliebig groß werden.*

Wir werden in Kapitel 6 sehen, daß auch der Minimalgrad der Basisformen von primen H-Idealen beliebig groß werden kann.

Das idealtheoretische Kurvenproblem ist mithin für H-Ideale negativ zu beantworten. Bei P-Idealen kann man bis zur Formulierung des Kurvenproblems analog schließen, muß allerdings Basen minimaler Länge heranziehen.

Definition 12. Unter dem *idealtheoretischen Kurvenproblem* für P-Ideale versteht man die Frage nach oberen Schranken für die Anzahl t der Elemente von Basen minimaler Länge für eindimensionale prime P-Ideale aus $\mathbf{K}[x_1, x_2, x_3]$, welche keine linearen Polynome enthalten, sowie die Frage, wann Ideale der Hauptklasse 2 vorliegen und wann nicht.

Zu diesem Problemkreis sind in letzter Zeit von verschiedenen Mathematikern Untersuchungen angestellt worden; eine abschließende Beantwortung steht jedoch noch aus; insbesondere kann der Verfasser auch kein Verfahren zur Berechnung oder Bestimmung von Basen minimaler Länge angeben; in durchgerechneten Beispielen von Hauptklassenidealen verhalf jeweils das äquivalente H-Ideal zur Auffindung von Basen minimaler Länge (vgl. 5.13.).

Im Gegensatz zu manchen Zitaten in der Literatur konnte daher auch das Macaulaysche Gegenbeispiel nicht zu einer analogen Aussage für P-Ideale führen, selbst wenn das enthomogenisierte Ideal eine Minimalbasis beliebiger Länge gehabt haben würde, weil dann immer noch die Frage zu klären war, ob es sich bei dieser Minimalbasis zugleich um eine Basis minimaler Länge handelt. Man vergleiche hierzu Abhyankar und Sathaye [1].

Die Beispiele (165) und (166) helfen uns da nicht weiter; sie ergeben nämlich bei Enthomogenisierung P-Ideale der Hauptklasse 2, was wir für (165) kurz zeigen wollen. Es ist, wie der Leser selbst nachrechnen möge,

$$x_0 F_{i+1} = x_2 F_i - x_1^{m-i} x_3^{i-2} F_1 .$$

Setzen wir

$$f_i(x_1, x_2, x_3) := F_i(1, x_1, x_2, x_3),$$

so folgt daraus

$$f_{i+1} = x_2 f_i - x_1^{m-i} x_3^{i-2} f_1 ;$$

mithin läßt sich f_3 durch f_2, f_1 ausdrücken; ferner läßt sich f_4 durch f_3, f_1, also auch durch f_2, f_1 ausdrücken usw. Durch Auflösung der Rekursion lassen sich also $f_3, \ldots, f_m$

durch f_1, f_2 ausdrücken; das enthomogenisierte P-Ideal ist also ein P-Ideal der Hauptklasse 2.

In Definition 12 kann die Voraussetzung „Basis minimaler Länge" nicht durch „Minimalbasis" ersetzt werden; man vergleiche dazu Kap. 1, (21), (22). Für beliebige P-Ideale aus $\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ bewiesen H. Bresinsky und M. J. Fuller, daß es zu jedem P-Ideal $(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ Minimalbasen beliebiger Länge gibt; vgl. Bresinsky und Fuller [1].

Der Grundgedanke des Beweises von Bresinsky und Fuller ist folgender: Ist $(f_1, \ldots, f_t)$ mit $t \geqq 1$ irgendeine Minimalbasis von $(\mathfrak{a})$, so wird aus $f_1, \ldots, f_t$ eine Minimalbasis $(g_1, \ldots, g_{t+1})$ von $(\mathfrak{a})$ konstruiert. Dabei werden im Gegensatz zu Kap. 1, (21), (22), alle Basispolynome f_i verändert.

Insbesondere gibt es also zu jedem Primideal Minimalbasen beliebiger Länge. Daß es schon für $n = 3$, $d = 1$ auch inhomogene Primideale gibt, bei denen auch die Anzahl der Elemente jeder Basis minimaler Länge größer als irgendeine vorgegebene natürliche Zahl ist, wurde von T. T. Moh bewiesen, vgl. Moh [1].

Diese — irrtümlich längst erledigt geglaubten — Probleme sind durch die Notwendigkeit der Unterscheidung zwischen „Minimalbasen" und „Basen minimaler Länge" bei P-Idealen wieder aktuell geworden. Es liegt hier eine ähnliche Situation vor wie in den Jahren 1940 bis 1943, als Perron die Ungültigkeit des Vahlenschen Beispiels zum Satz von Kronecker nachwies. Damit wollen wir uns im folgenden beschäftigen.

Wir betrachten Ideale aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ bzw. $\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Der erwähnte Satz von Kronecker und Perron besagt nun, daß es unter den unendlich vielen Idealen mit gleichem Nullstellengebilde wenigstens eines gibt, das eine Basis von höchstens $n + 1$ Polynomen hat. Gelingt der Beweis für H-Ideale, so gilt die Behauptung auch für P-Ideale, da sich bei der Enthomogenisierung die Anzahl der Elemente einer Basis minimaler Länge nicht vergrößern kann. Wir können uns daher im folgenden auf eine *idealtheoretische Formulierung für H-Ideale* beschränken.

Gemäß Kap. 3, Satz 36, (84), galt:

$$\mathrm{NG}\,(\mathfrak{a}) = \mathrm{NG}\,(\mathfrak{b}) \Leftrightarrow \mathrm{Rad}\,\mathfrak{a} = \mathrm{Rad}\,\mathfrak{b};$$

daraus folgt, daß hier die Klasse derjenigen H-Ideale zu betrachten ist, deren Radikale mit dem Radikal eines vorgegebenen H-Ideals $\mathfrak{a}$ übereinstimmen. Nach Kap. 1, Definition 38, (95), nannten wir solche Ideale *äquivalent*. Zu beweisen ist also der

Satz 75 (Satz von Kronecker und Perron). *Ist* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein H-Ideal mit* $\mathfrak{a} = (F_1, F_2, \ldots, F_s)$, $s > n + 1$, $(F_1, \ldots, F_s)$ *Minimalbasis, so existiert wenigstens ein H-Ideal* $\mathfrak{b} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *mit* $\mathfrak{b} = (G_1, G_2, \ldots, G_k)$, $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{a} = \mathrm{Rad}\,\mathfrak{b}$ *und* $k \leqq n + 1$. Anders formuliert: *In der Klasse aller Ideale mit demselben Radikal existiert wenigstens eines, das eine Minimalbasis aus höchstens* $n + 1$ *Formen besitzt.*

Beweis. Wir geben hier eine idealtheoretische Formulierung und Ausfüllung eines Beweisgedankens von VAN DER WAERDEN aus dem Zentralblatt für Mathematik, Band 24 (1941), S. 276.

Zunächst sei vermerkt, daß das Radikal $\mathfrak{r} = \mathrm{Rad}\,\mathfrak{a} = \mathrm{Rad}\,\mathfrak{b}$ zwar selbst der genannten Klasse angehört, aber im allgemeinen nicht das Gewünschte leistet. Da Primideale mit ihrem Radikal übereinstimmen, liefern die soeben betrachteten Primideale (165) und (166) mit Minimalbasen beliebiger Länge bereits Gegenbeispiele. Es sei also $\mathfrak{a} = (\overline{\overline{F}}_1, \ldots, \overline{\overline{F}}_s) \subset \mathsf{K}[x_0, \ldots, x_n]$, $s > n+1$, $\mathrm{Dim}\,\mathfrak{a} = d = n - r$ und $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_{r1} \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_{rs_r} \cap \mathfrak{p}_{r+1,1} \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_{ns_n}$ mit $\mathrm{Dim}\,\mathfrak{p}_{ik} = n - i$ und den Grundidealen (vgl. (54) und Kap. 3, (83))

$$\mathfrak{g}_{r+i}(\mathrm{Rad}\,\mathfrak{a}) = \mathfrak{p}_{r1} \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_{rs_r} \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_{r+i,1} \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_{r+i,s_{r+i}} \quad \text{für} \quad i = 0, \ldots, d.$$

Für $\mathfrak{a}$ existiert nach Satz 46 eine $\mathfrak{a}$-Schnellbasis

$$\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_r, \overline{F}_{r+1}, \ldots, \overline{F}_s) := (\mathfrak{h}, \overline{F}_{r+1}, \ldots, \overline{F}_s)$$

mit $\mathfrak{h} = (F_1, \ldots, F_r)$ und $\mathrm{Dim}\,\mathfrak{h} = n - r = d$; $\mathfrak{h}$ ist also ein H-Ideal der Hauptklasse r. Dann ist $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{h} \subseteqq \mathrm{Rad}\,\mathfrak{a}$; gilt das Gleichheitszeichen, so kann $\mathfrak{b} = \mathfrak{h}$ mit $k = r$ gesetzt werden, und wir sind fertig. Ist dagegen $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{h} \subset \mathrm{Rad}\,\mathfrak{a}$, so gilt $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{h} = \mathfrak{p}_{r1} \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_{rs_r} \cap \mathfrak{b}_r = \mathfrak{g}_r(\mathrm{Rad}\,\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{b}_r$ mit $\mathfrak{b}_r \neq (1)$, $\mathfrak{b}_r = \mathrm{Rad}\,\mathfrak{b}_r$ (d. h., $\mathfrak{b}_r$ ist semiprim, vgl. Kap. 1, Definition 37), $\mathfrak{b}_r$ ungemischt und $\mathrm{Dim}\,\mathfrak{b}_r = n - r = d$. Wir wählen nun eine Form $F_{r+1} \in \mathrm{Rad}\,\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{g}_r(\mathrm{Rad}\,\mathfrak{a})$ mit $\mathfrak{b}_r : (F_{r+1}) = \mathfrak{b}_r$. Dann wird

$$\begin{aligned}\mathrm{Rad}\,(\mathfrak{h}, F_{r+1}) &= \mathrm{Rad}\,(\mathfrak{p}_{r1}, F_{r+1}) \cap \cdots \cap \mathrm{Rad}\,(\mathfrak{p}_{rs_r}, F_{r+1}) \cap \mathrm{Rad}\,(\mathfrak{b}_r, F_{r+1}) \\ &= \mathfrak{p}_{r1} \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_{rs_r} \cap \mathrm{Rad}\,(\mathfrak{b}_r, F_{r+1}).\end{aligned}$$

Nach Satz 56 ist dann $\mathrm{Rad}\,(\mathfrak{b}_r, F_{r+1})$ ungemischt und $\mathrm{Dim}\,(\mathfrak{b}_r, F_{r+1}) = d - 1$. Weiter ist $\mathrm{Rad}\,(\mathfrak{h}, F_{r+1}) \subseteqq \mathrm{Rad}\,\mathfrak{a}$, und im Fall des Gleichheitszeichens sind wir wieder fertig und können $\mathfrak{b} = (\mathfrak{h}, F_{r+1})$ setzen. Ist dagegen $\mathrm{Rad}\,(\mathfrak{h}, F_{r+1}) \subset \mathrm{Rad}\,\mathfrak{a}$, so gilt $\mathrm{Rad}\,(\mathfrak{h}, F_{r+1}) = \mathfrak{g}_{r+1}(\mathrm{Rad}\,\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{b}_{r+1}$ mit $\mathfrak{b}_{r+1} \neq (1)$, $\mathfrak{b}_{r+1} = \mathrm{Rad}\,\mathfrak{b}_{r+1}$, $\mathfrak{b}_{r+1}$ ungemischt und $\mathrm{Dim}\,\mathfrak{b}_{r+1} = d - 1$. So fortfahrend, erhalten wir im ungünstigsten Fall

$$\mathrm{Rad}\,(\mathfrak{h}, F_{r+1}, F_{r+2}, \ldots, F_n) = \mathfrak{g}_n(\mathrm{Rad}\,\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{b}_n = \mathrm{Rad}\,\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}_n$$

mit $n = r + d$, $\mathfrak{b}_n \neq (1)$, $\mathfrak{b}_n = \mathrm{Rad}\,\mathfrak{b}_n$, $\mathfrak{b}_n$ ohne triviale Komponente und $\mathrm{Dim}\,\mathfrak{b}_n = 0$. Für den Fall $\mathrm{Rad}\,(\mathfrak{h}, F_{r+1}, F_{r+2}, \ldots, F_n) \subset \mathrm{Rad}\,\mathfrak{a}$ wählen wir dann abschließend F_{n+1} mit $F_{n+1} \in \mathrm{Rad}\,\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_n : (F_{n+1}) = \mathfrak{b}_n$, dann folgt

$$\mathrm{Rad}\,(\mathfrak{h}, F_{r+1}, F_{r+2}, \ldots, F_n, F_{n+1}) = \mathrm{Rad}\,\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}_{n+1}$$

mit $\mathfrak{b}_{n+1} \neq (1)$, $\mathfrak{b}_{n+1} = \mathrm{Rad}\,\mathfrak{b}_{n+1}$ und $\mathrm{Dim}\,\mathfrak{b}_{n+1} = -1$. Dann aber muß $\mathfrak{b}_{n+1} = \mathfrak{p}_T = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ sein und kann in der Durchschnittsdarstellung weggelassen werden. Mithin ist $\mathrm{Rad}\,(\mathfrak{h}, F_{r+1}, F_{r+2}, \ldots, F_n, F_{n+1}) = \mathrm{Rad}\,\mathfrak{a}$, also

$$\mathfrak{b} = (\mathfrak{h}, F_{r+1}, \ldots, F_{n+1}) = (F_1, \ldots, F_r, F_{r+1}, \ldots, F_{n+1}),$$

q. e. d.

Damit ist jedoch nichts darüber gesagt, wie man ein solches H-Ideal $\mathfrak{b}$ berechnen kann; wir geben dieses und andere offene Probleme als

Definition 13 (Kronecker-Perronsche Probleme). Vorgegeben sei ein H-Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$; dann versteht man unter den *Kronecker-Perronschen Problemen* die Aufgaben, ein H-Ideal $\mathfrak{b}$ mit $\operatorname{Rad} \mathfrak{b} = \operatorname{Rad} \mathfrak{a}$ und einer Basis von kleinstmöglicher Länge zu berechnen sowie allgemeine Aussagen über eine Verbesserung der Schranke $n + 1$ zu machen.

Die zweite Aufgabe ist dahingehend beantwortet worden, daß die Schranke generell auf n herabgedrückt werden konnte.

Für $n = 3$ wird nun $n + 1 = 4$ und Satz 75 besagt für $d = 1$, daß die Punktmenge einer algebraischen Raumkurve als Nullstellengebilde eines Ideals gewonnen werden kann, dessen Basis aus höchstens vier Basisformen besteht.

Definition 14. Unter dem *mengentheoretischen Kurvenproblem* für H-Ideale versteht man die Frage nach Aussagen zur Verschärfung der Schranke 4 für die minimale Anzahl von Basisformen in H-Idealen $\mathfrak{b} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ mit $\operatorname{Rad} \mathfrak{a} = \operatorname{Rad} \mathfrak{b}$, worin $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ ein vorgegebenes eindimensionales H-Ideal ist.

Hier folgt aus dem Vorhergesagten, daß die Schranke auf 3 herabgedrückt werden kann. Von Budach wurde in [1], S. 189, Korollar 7.5.3, gezeigt, daß diese Schranke 3 für nicht prime ungemischte H-Ideale nicht verbessert werden kann. Offen ist also die Frage, ob es zu jedem eindimensionalen Primideal $\mathfrak{p} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ ein $\mathfrak{p}$-primäres H-Ideal $\mathfrak{q}$ der Hauptklasse 2 gibt.

Als positives Beispiel hierfür verweisen wir auf das vierte Beispiel von 1.10. Aber bereits für das von uns öfter behandelte H-Ideal $\mathfrak{v}_{14}^{(2)}$, welches aus (165) für $m = 4$ folgt, ist diese Frage derzeit noch offen.

Zu diesem Problemkreis sei auf Renschuch [18] verwiesen; dort findet der Leser auch weitere Literaturhinweise, u. a. auf den Begriffsstreit, der durch die Verwechslung des idealtheoretischen und mengentheoretischen Kurvenproblems entstanden war.

4.28. Beziehungen zu linearen Gleichungssystemen

Wir wollen hier die bereits in MfL Bd. 3 gegebenen Ergebnisse für lineare Gleichungssysteme vom Standpunkt der im dritten und vierten Kapitel entwickelten Theorie der Polynomideale aus betrachten.

Sehen wir den Stoff des dritten Kapitels unter einem solchen Aspekt, so sei zunächst auf das Beispiel von 3.1. bezüglich der Koeffizientenspezialisierung verwiesen. In den weiteren Ausführungen von 3.1. wurde dann ausführlich auf lineare Gleichungssysteme Bezug genommen. Vom hier gewonnenen Aspekt wäre die Schreibweise (12) für lineare Gleichungssysteme zu bevorzugen; der Begriff „homogen" müßte dann wie hier eingeführt und das Minuszeichen bei der Cramerschen Regel in Kauf genommen werden; die Schreibweise (12) wäre auch der Formulierung von Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades angepaßt (vgl. MfL Bd. 2, 7.5. und 7.6.). Die Beziehung (15) kann hinterher so gedeutet werden, daß bei linearen Gleichungssystemen für den Exponenten ϱ im Hilbertschen Nullstellensatz stets $\varrho = 1$ gewählt werden kann, weshalb im linearen Fall die Begriffe „idealäquivalent" und „lösungsäquivalent" zusammenfallen.

Zu 3.2. verweisen wir auf den Satz 2. Die Problematik von 3.3. bezüglich der Wahl der Parameter und der geeigneten Numerierungen haben wir im Fall der linearen Gleichungssysteme in 4.8. erläutert. Da wir in 3.5. direkt an die Darstellung von MfL Bd. 3 angeknüpft haben, bleibt hier nur noch 3.8. für inhomogene lineare Gleichungssysteme zu erläutern.

Vorgegeben sei ein lineares inhomogenes Gleichungssystem in $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Beim Gaußschen Algorithmus oder Gaußschen Eliminierungsverfahren wird — eine „geeignete Numerierung" vorausgesetzt — nacheinander

x_1 aus der 2., 3., 4., 5., …, m-ten Gleichung eliminiert,

x_2 aus der 3., 4., 5., …, m-ten Gleichung eliminiert,

x_3 aus der 4., 5., …, m-ten Gleichung eliminiert usw.,

wodurch die Trapezform mit einem Trapez entsteht, welches aus einem Rechteck durch Abschneiden eines Dreiecks unten links vorzustellen ist. Mit dieser sukzessiven Elimination von Variablen wird folgendes erreicht:

1. Entscheidung über Lösbarkeit oder Unlösbarkeit des inhomogenen Gleichungssystems.

2. Im Fall der Lösbarkeit Entscheidung über die Anzahl der Parameter der vollständigen Lösung.

3. Bestimmung der vollständigen Lösung durch Übergang zur Diagonal-Trapezform:

$$\begin{array}{llll}
x_1 & + a_{10} + a_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}x_n = 0 & & (a_{10} = -b_1), \\
\quad x_2 & + a_{20} + a_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{2n}x_n = 0 & & (a_{20} = -b_2), \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
\qquad\quad x_r & + a_{r0} + a_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}x_n = 0 & & (a_{r0} = -b_r).
\end{array}$$

4. Herstellung eines Gleichungssystems mit möglichst geringer Anzahl von Gleichungen, d. h. Herstellung einer Minimalbasis für das von den linearen Polynomen erzeugte P-Ideal (I).

Dabei ist 4. nicht so wesentlich, denn beim Lösen der Gleichungen macht man keinen Fehler, wenn man die überflüssigen Gleichungen nicht berücksichtigt.

Bei nichtlinearen Gleichungssystemen bzw. den dadurch bestimmten Polynomdealen kann nun die Elimination von Variablen nicht allein durch Multiplikation mit Elementen aus $\mathbf{K}$ und Addition bzw. Subtraktion bewerkstelligt werden.

Bei H-Idealen $\mathfrak{a}$ mit Basisformen *gleichen* Grades führt der Gaußsche Algorithmus zwar zum Entscheid über das Vorliegen einer Minimalbasis, zur Elimination von Variablen gelangt man jedoch erst durch Anwendung des Verfahrens auf die Moduln der in $\mathfrak{a}$ enthaltenen Formen höheren Grades, vgl. 4.10. Damit konnte man dann auch bei H-Idealen die Probleme 2. und 3. lösen. Zur Behandlung von 1. haben wir nun in 3.8. im nichtlinearen Fall einen anderen Weg eingeschlagen. Im folgenden soll an zwei Beispielen illustriert werden, daß dies bei inhomogenen linearen Gleichungssystemen ebenfalls ein gangbarer Weg ist:

Beispiel 1. Vorgegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - 4 &= 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 8 &= 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 1 &= 0; \end{aligned}$$

nach Durchführung des Gaußschen Algorithmus haben wir

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - 4 &= 0, \\ 0 &= 0, \\ 10x_2 + x_3 - 11 &= 0. \end{aligned}$$

Idealtheoretisch formuliert haben wir das Primideal $(\mathfrak{l}) = (l_1, l_2, l_3)$ mit

$$\begin{aligned} l_1 &= x_1 + 2x_2 + x_3 - 4, \\ l_2 &= 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 8, \\ l_3 &= 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 1, \end{aligned}$$

und der Gaußsche Algorithmus führt zu

$$\begin{aligned} l_1 &= x_1 + 2x_2 + x_3 - 4, \\ 2l_1 - l_2 &= 0; \end{aligned}$$

also kann l_2 in der Basis gestrichen werden;

$$3l_1 - l_3 = 10x_2 + x_3 - 11;$$

es ist also

$$(\mathfrak{l}) = (l_1, l_3) = (l_1, 3l_1 - l_3).$$

Beispiel 2. Vorgegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - 4 &= 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 11 &= 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 1 &= 0; \end{aligned}$$

nach Durchführung des Gaußschen Algorithmus haben wir

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - 4 &= 0, \\ 3 &= 0 \quad \text{(Widerspruch, also unlösbar)}, \\ 10x_2 + x_3 - 11 &= 0. \end{aligned}$$

Idealtheoretisch formuliert haben wir $(\mathfrak{l}) = (l_1, l_2, l_3)$ mit

$$\begin{aligned} l_1 &= x_1 + 2x_2 + x_3 - 4, \\ l_2 &= 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 11, \\ l_3 &= 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 1, \end{aligned}$$

und der Gaußsche Algorithmus führt zu

$$\begin{aligned} l_1 \quad &= x_1 + 2x_2 + x_3 - 4, \\ 3l_1 - l_3 &= \quad 10x_2 + x_3 - 11, \\ 2l_1 - l_2 &= 3, \end{aligned}$$

mithin $2l_1/3 - l_2/3 = 1$, also $1 \in (\mathfrak{l})$ und folglich $(\mathfrak{l}) = (1)$. Entsprechend folgt $(\mathfrak{l}) = (1)$ in allen anderen unlösbaren Fällen und umgekehrt in Einklang mit Satz 30, (72).

Für die Beziehungen des vierten Kapitels zu linearen Gleichungssystemen sei zunächst auf 4.8. hingewiesen. Dort wurde der Dimensionsbegriff auf lineare Gleichungssysteme angewandt. Die in **4.9.** erläuterte Methode führt zwar auch bei linearen Gleichungssystemen zur Bestimmung der Dimension, doch ist dies wenig effektiv, da man durch die Beziehung

$$d = n - s = (\text{Anzahl der Variablen}) - (\text{Anzahl der linear unabhängigen Gleichungen})$$

die Zahl d wesentlich bequemer bestimmen kann (vgl. MfL Bd. 3, Kap. 5, Satz 4). Die Beziehung $d = n - s$, die man wohl auch als *Satz von Frobenius* bezeichnet, läßt sich auf die Kurzform $s = r$ bringen; sie erscheint in der linearen Algebra fast als selbstverständlich. Ihre Bedeutung wird durch die Komplikationen im nichtlinearen Fall ($s \geqq r$ bzw. $t \geqq r$, Ideale der Hauptklasse, Schnellbasen, vgl. **4.17.**, **4.18.**, **4.25.**, **4.27.**) herausgestellt. Die Bildung der Eliminationsideale in 4.10. läuft bei linearen Gleichungssystemen auf den Gaußschen Algorithmus hinaus. Der Leser mache sich jedoch den Unterschied klar: Bei linearen Gleichungssystemen werden durch die *einmalige* Anwendung des Gaußschen Algorithmus auf $x_0, x_1, \ldots, x_n$ gleichzeitig Minimalbasen und Lösungen bestimmt, während im nichtlinearen Fall zur Bestimmung von Eliminationsidealen über den Maximalgrad der Basisformen des Ausgangsideals hinausgegangen werden muß (Satz 23). Daher ist es erforderlich, den Gaußschen Algorithmus *mehrmals* anzusetzen, und zwar in jedem Fall für die Potenzprodukte t-ten Grades mit $t = m_0 + 1, \ldots, 2M$, wobei m_0 der Minimalgrad und M der Maximalgrad der Basisformen des Ausgangsideals ist.

Angesichts der Tatsache, daß bei Gegenüberstellung der linearen und nichtlinearen Gleichungssysteme der Gaußsche Algorithmus sich als das wesentliche gemeinsame Element erweist, ist es bedauerlich, daß diese grundsätzliche Methode im Schulunterricht nicht behandelt wird, selbst nicht in der Abiturstufe.

Bei linearen Gleichungssystemen definieren die dadurch gegebenen Linearformen bzw. linearen Polynome gerade Primideale; ein Bezug von den Sätzen über die Dimensionserniedrigung zur linearen Algebra ist daher allein aus 4.12. gegeben. Die „Erweiterung des Gleichungssystems“ durch eine zusätzliche lineare Gleichung bedeutet bei linearen Gleichungen im Fall der linearen Abhängigkeit der zusätzlichen Gleichung den Erhalt der Lösung, im Fall der linearen Unabhängigkeit eine um 1 verringerte Dimension in Einklang mit Satz 33, während bei inhomogenen linearen Gleichungssystemen das System auch unlösbar werden kann (vgl. Satz 32).

5. Syzygientheorie der *H*-Ideale

5.1. Einleitung

Wir haben bereits bei der Berechnung von Idealdurchschnitten und Idealquotienten Vorgriffe auf die Syzygientheorie gemacht, so daß ihre Behandlung allein durch diesen Nachholbedarf gerechtfertigt ist. Sie wird uns jedoch noch zu weiteren Anwendungen verhelfen.

L. Budach schreibt in dem Vortrag [2], „*daß die Syzygientheorie gerade aus dem Bedürfnis entstanden ist, die Methoden der linearen Algebra soweit als möglich auf Polynomringe zu übertragen*". In der gleichen Arbeit [2], S. 7–10, 1.2., betrachtet Budach den Zusammenhang zwischen Syzygienketten und exakten Folgen und schreibt dazu (vgl. [2], S. 7): „*Dieses Beispiel, das auf Hilbert zurückgeht, stellt zugleich einen der klassischen Ausgangspunkte der homologischen Algebra dar.*" — Interessierten Lesern kann die Lektüre der Budachschen Arbeit nur wärmstens empfohlen werden; vgl. auch Kleinert [1], II. Zugleich wird dadurch eine Verbindung zu den Begriffsbildungen und zur Terminologie in MfL Bd. 3, 3.4.ff., gegeben.

Die Syzygientheorie wurde 1890 von David Hilbert in der berühmten Arbeit [1] „Über die Theorie der algebraischen Formen" begründet, also während der ersten schöpferischen Periode von Hilbert (vgl. das Vorwort von H. Bernhardt und H. Wussing zu Hilbert [2]). Weiterentwickelt wurde die Syzygientheorie durch Ostrowski [1] und N. M. Günter [1]. Diese wenig bekannte Arbeit von Günter, auf welche der Verfasser auch nur durch einen Zufall stieß, stellt anscheinend eine nachträgliche Wiedergabe von Vorlesungen aus dem Jahre 1904 dar, vgl. die „Kurze Biographie" am Schluß von Günter [2].

Eine moderne Darstellung der Syzygientheorie, insbesondere unter Verwendung der Matrizenschreibweise, wurde 1949 in Gröbner [2] gegeben, ferner in der Arbeit [1] von Gröbner. Wir folgen hier im wesentlichen der Gröbnerschen Darstellung, welche von grundsätzlicher Bedeutung für die Entwicklung der modernen Richtung in der algebraischen Geometrie und der Homologietheorie geworden ist.

In der Vektorrechnung bzw. beim Rechnen mit n-Tupeln (in der Terminologie von MfL Bd. 3) schließt man bei vorausgesetzter linearer Unabhängigkeit der Basisvektoren $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ aus der Gleichheit

$$\boldsymbol{b} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = \mu_1 \boldsymbol{a}_1 + \mu_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mu_n \boldsymbol{a}_n$$

über

$$(\lambda_1 - \mu_1)\, \boldsymbol{a}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\, \boldsymbol{a}_2 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)\, \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

auf $\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \ldots, \lambda_n = \mu_n$ (vgl. MfL Bd. 3, (21)). Entsprechend schließt man bei Polynomen in einer oder mehreren Variablen auf die Eindeutigkeit der Koeffizienten (vgl. MfL Bd. 3, 14.1., (1)). Ist dagegen $(\mathfrak{a})$ bzw. $\mathfrak{a}$ mit der Minimalbasis $(f_1, f_2, \ldots, f_t)$ bzw. $(F_1, F_2, \ldots, F_s)$ ein inhomogenes oder homogenes Polynomideal, so kann man diesen Schluß nicht mehr machen; wir zeigen dies für P-Ideale: Aus

$$f = g_1 f_1 + g_2 f_2 + \cdots + g_t f_t = h_1 f_1 + h_2 f_2 + \cdots + h_t f_t \text{ id. in } x_1, \ldots, x_n$$

folgt natürlich wieder

$$(g_1 - h_1)\, f_1 + (g_2 - h_2)\, f_2 + \cdots + (g_t - h_t)\, f_t = 0 \text{ id. in } x_1, \ldots, x_n; \tag{1}$$

aus (1) folgt aber keineswegs $g_i = h_i$ für alle $i = 1, 2, \ldots, t$; man betrachte dazu beispielsweise Identitäten der Gestalt $f_k f_i + (-f_i)\, f_k = 0$.

Um nun einen Überblick über alle derartigen Identitäten zu gewinnen, ist es sinnvoll, nach steigenden Gradzahlen vorzugehen.

Wir können uns dann auf H-Ideale $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ mit $\mathfrak{a} = (F_1, F_2, \ldots, F_s)$ und $(F_1, F_2, \ldots, F_s)$ Minimalbasis beschränken. Dies hat überdies den Vorteil, daß aus

$$F := G_1 F_1 + G_2 F_2 + \cdots + G_s F_s \in \mathfrak{a} \tag{2}$$

stets

$$h(F) = h(G_i) + h(F_i) \quad \text{für alle} \quad i = 1, 2, \ldots, s \tag{3}$$

folgt (vgl. Kap. 1, (45)), während bei P-Idealen nur $h(f) \leqq h(g_i) + h(f_i)$ gilt (vgl. Kap. 1, (44)). Die Beziehung (3) bedeutete gerade, daß die in $\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_s) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ enthaltenen Formen eines festen Grades t einen $\mathbf{K}$-Modul $\mathfrak{M}(t; \mathfrak{a})$ bilden; $\mathfrak{a}$ ist dann die Vereinigungsmenge aller dieser $\mathbf{K}$-Moduln; wir erinnern hierzu an die Sätze 15 bis 18 von Kapitel 1 und an Satz 22 von Kapitel 4.

Ausgangspunkt für die Syzygientheorie war bei Hilbert 1890 die Frage nach der Bestimmung der Anzahl der linear unabhängigen Formen aus $\mathfrak{M}(t; \mathfrak{a})$ für festes, aber beliebiges t. Gehen wir dazu von (2) aus, so müssen wir — analog zu (1) — die Identitäten

$$\Phi_1 F_1 + \Phi_2 F_2 + \cdots + \Phi_s F_s = 0 \text{ id. in } x_0, x_1, \ldots, x_n \tag{4}$$

mit berücksichtigen; die Berücksichtigung der Identitäten (4) reicht jedoch — wie wir in 5.14. sehen werden — zu der gewünschten Anzahlbestimmung allein noch nicht aus. Die Identität (4) läßt sich auch als Skalarprodukt

$$(F_1, F_2, \ldots, F_s) \cdot \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_s \end{pmatrix} = 0 \text{ id. in } x_0, \ldots, x_n \tag{5}$$

schreiben; der Vektor $\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_s \end{pmatrix}$ heißt dann eine *Syzygie* von $\mathfrak{a} = (F_1, F_2, \ldots, F_s)$.

Sind $\begin{pmatrix} \Phi_{11} \\ \vdots \\ \Phi_{1s} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \Phi_{21} \\ \vdots \\ \Phi_{2s} \end{pmatrix}$ zwei Syzygien von $\mathfrak{a}$, so ist

$$\Psi_1 \begin{pmatrix} \Phi_{11} \\ \vdots \\ \Phi_{1s} \end{pmatrix} + \Psi_2 \begin{pmatrix} \Phi_{21} \\ \vdots \\ \Phi_{2s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_1\Phi_{11} + \Psi_2\Phi_{21} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Psi_1\Phi_{1s} + \Psi_2\Phi_{2s} \end{pmatrix}$$

wiederum eine Syzygie von $\mathfrak{a}$. Dabei sind Ψ_1, Ψ_2 Formen aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ mit

$$h(\Psi_1) + h(\Phi_{1i}) = h(\Psi_2) + h(\Phi_{2i}). \tag{6}$$

Die Syzygien bilden unter Beachtung der Gradbedingung (6) einen $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$-Vektormodul, den sogenannten *zweiten Syzygienmodul* von $\mathfrak{a}$. Wie wir beweisen werden, besitzt nun jeder $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$-Vektormodul $\mathfrak{V}$ eine endliche Basis. Da nun jedes Basiselement von $\mathfrak{V}$ ein Spaltenvektor ist, wird eine Minimalbasis von $\mathfrak{V}$ durch eine Matrix von Formen repräsentiert; für die Gradzahlen dieser Formen müssen jedoch zur Sicherstellung der Homogenität gewisse Einschränkungen gelten, die als erstes näher zu untersuchen sind.

5.2. Homogene Matrizen

Vorgegeben sei eine einzeilige Matrix von Formen aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, die als Basis eines H-Ideals $\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_s)$ gedeutet werden kann:

$$U_{1s} = (F_1, \ldots, F_s). \tag{7}$$

Wir betrachten neben U_{1s} eine damit verkettete Matrix

$$V_{st} := \begin{pmatrix} G_{11} & \dots & G_{1t} \\ \dots & \dots & \dots \\ G_{s1} & \dots & G_{st} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad h(G_{ik}) := g_{ik}. \tag{8}$$

Definition 1. Die zu (8) gehörige Matrix der Gradzahlen heißt die zu (8) zugehörige *Gradmatrix*:

$$\big(h(G_{ik})\big) := \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1t} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{s1} & \dots & g_{st} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Für $t = 1$ oder $s = 1$ ergeben sich die bereits in Kap. 1, Definition 31, eingeführten *Gradvektoren*.

Unsere Aufgabe besteht also darin, Bedingungsgleichungen für die Gradzahlen g_{ik} anzugeben. Durch diese Bedingungsgleichungen soll erreicht werden, daß bei der Matrizenmultiplikation $U_{1s}V_{st}$ nur Formen entstehen, ausführlich:

$$(F_1, \dots, F_s) \cdot \begin{pmatrix} G_{11} & \dots & G_{1t} \\ \dots & \dots & \dots \\ G_{s1} & \dots & G_{st} \end{pmatrix} := (H_1, H_2, \dots, H_t),$$

also

$$H_1 := F_1G_{11} + F_2G_{21} + \cdots + F_sG_{s1} \tag{10}$$

und

$$H_k := F_1G_{1k} + F_2G_{2k} + \cdots + F_sG_{sk} \qquad (k = 2, \dots, t); \tag{11}$$

aus (10) folgt

$$h(F_1) + g_{11} = h(F_2) + g_{21} = \cdots = h(F_s) + g_{s1},$$

also

$$h(F_1) + g_{11} = h(F_i) + g_{i1} \qquad (i = 2, \dots, s),$$

also

$$h(F_1) - h(F_i) = g_{i1} - g_{11}; \tag{12}$$

aus (11) folgt

$$h(F_1) + g_{1k} = h(F_2) + g_{2k} = \cdots = h(F_s) + g_{sk},$$

also

$$h(F_1) + g_{1k} = h(F_i) + g_{ik},$$

also

$$g_{ik} = h(F_1) - h(F_i) + g_{1k}; \tag{13}$$

(12) in (13) eingesetzt, liefert die entscheidende Gradbedingung

$$g_{ik} = g_{i1} + g_{1k} - g_{11}. \tag{14}$$

Definition 2. Matrizen mit Elementen aus $\mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ (Formen) und Gültigkeit von (14) heißen *H-Matrizen.* Auftretenden Nullformen wird dabei derjenige Grad zugeschrieben, der mit (14) verträglich ist.

Das geschieht in Einklang mit Kap. 1, (35), jedoch in Abweichung zu MfL Bd. 3, 14.1. und 14.6.

Aus (14) folgt unmittelbar der

Satz 1. *Bei H-Matrizen sind die Graddifferenzen verschiedener Zeilen und Spalten konstant.*

Beweis. Für Zeilen folgt aus (14) sofort

$$g_{ik} - g_{1k} = g_{i1} - g_{11}, \tag{15}$$

also

$$g_{ik} - g_{jk} = (g_{ik} - g_{1k}) - (g_{jk} - g_{1k}) = (g_{i1} - g_{11}) - (g_{j1} - g_{11}) = g_{i1} - g_{j1};$$

für Spalten folgt entsprechend mit Hilfe von (14) die Behauptung aus

$$g_{ik} - g_{i1} = g_{1k} - g_{11}. \tag{16}$$

Aus (15) und (16) ergibt sich unmittelbar

Satz 2. *Die Gradzahlen einer H-Matrix, also die zugehörige Gradmatrix, sind bereits vollkommen festgelegt, wenn die Gradzahlen für eine Zeile und für eine Spalte, o.B.d.A. für die erste Zeile und die erste Spalte, vorgegeben sind.*
Jede Gradmatrix (9) *hat dann die Bauart*

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{11} + c_1 & \ldots & g_{11} + c_{t-1} \\ g_{11} + d_1 & g_{11} + c_1 + d_1 & \ldots & g_{11} + c_{t-1} + d_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{11} + d_{s-1} & g_{11} + c_1 + d_{s-1} & \ldots & g_{11} + c_{t-1} + d_{s-1} \end{pmatrix},$$

und es gilt $g_{ik} = g_{11} + c_{k-1} + d_{i-1}$, *wobei* $c_0 = d_0 = 0$ *zu setzen ist.*

Beispiel.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & & & & & \\ 4 & & & & & \\ 5 & & & & & \\ 8 & & & & & \end{pmatrix} \quad \text{ergänzt sich zu} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 \\ 4 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ 5 & 5 & 6 & 7 & 8 & 10 \\ 8 & 8 & 9 & 10 & 11 & 13 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen nun untersuchen, welchen Gradbedingungen die Elemente von

$$\boldsymbol{W}_{tu} := \begin{pmatrix} H_{11} & \dots & H_{1u} \\ \dots & \dots & \dots \\ H_{t1} & \dots & H_{tu} \end{pmatrix} \tag{17}$$

neben (14) genügen müssen, wenn

$$\boldsymbol{V}_{st}\boldsymbol{W}_{tu} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & \dots & G_{1t} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & \dots & G_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{s1} & G_{s2} & G_{s3} & \dots & G_{st} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1u} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2u} \\ H_{31} & H_{32} & \dots & H_{3u} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{t1} & H_{t2} & \dots & H_{tu} \end{pmatrix}$$

wieder eine H-Matrix sein soll. Dazu müssen sich beim Ausmultiplizieren ausschließlich Formen ergeben; die Gradmatrix ist mithin gegeben durch

$$\left(h(\boldsymbol{V}_{st}\boldsymbol{W}_{tu})\right) = \begin{pmatrix} g_{11} + h_{11} & g_{11} + h_{12} & \dots & g_{11} + h_{1u} \\ g_{21} + h_{11} & g_{21} + h_{12} & \dots & g_{21} + h_{1u} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{s1} + h_{11} & g_{s1} + h_{12} & \dots & g_{s1} + h_{1u} \end{pmatrix},$$

und aus der Matrizenmultiplikation ergibt sich für die Elemente der ersten Zeile

$$\begin{aligned} g_{11} + h_{11} &= g_{1k} + h_{k1}, \\ g_{11} + h_{12} &= g_{1k} + h_{k2}, \\ &\dots\dots\dots \\ g_{11} + h_{1u} &= g_{1k} + h_{ku}, \end{aligned}$$

also allgemein

$$g_{11} + h_{1l} = g_{1k} + h_{kl} \quad \text{für} \quad k = 1, \dots, t \quad \text{und} \quad l = 1, \dots, u.$$

Mithin gilt

Satz 3. *Ist $\boldsymbol{V}_{st}$ eine vorgegebene H-Matrix mit der zugehörigen Gradmatrix (g_{ik}), so gilt für alle mit $\boldsymbol{V}_{st}$ verketteten H-Matrizen $\boldsymbol{W}_{tu}$ mit den Gradmatrizen (h_{kl}), die zu H-Matrizen $\boldsymbol{V}_{st}\boldsymbol{W}_{tu}$ führen, daß die Gradzahlen h_{kl} durch Vorgabe einer Zeile, o. B. d. A. der ersten Zeile mit den Elementen h_{1l}, vollkommen festgelegt sind durch*

$$h_{kl} = g_{11} - g_{1k} + h_{1l} \qquad (k = 1, \dots, t \quad \textit{und} \quad l = 1, \dots, u). \tag{18}$$

$\boldsymbol{V}_{st}\boldsymbol{W}_{tu}$ ist dann eine H-Matrix.

Beweis. Wir haben nur noch die letzte Behauptung, also die Gültigkeit von (14) für die h_{kl}, nachzuweisen, d. h.

$$h_{kl} = h_{k1} + h_{1l} - h_{11}. \tag{19}$$

Wir bestätigen die Gültigkeit von (19), indem wir beiderseits (18) einsetzen:

$$g_{11} - g_{1k} + h_{1l} = g_{11} - g_{1k} + h_{11} + g_{11} - g_{11} + h_{1l} - h_{11}.$$

Wir geben noch ein Beispiel zu Satz 3. Es sei

$$(h(V)) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 6 & 7 \end{pmatrix},$$

und es sei $W = W_{42}$ und $h_{11} = 5$, $h_{12} = 6$ vorgegeben. Dann ergänzt sich $(h(W))$ zu

$$(h(W)) = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \\ 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Zum Schluß dieses Abschnittes noch eine ergänzende Bemerkung.

Durch die Bedingung (14) bzw. (19) können negative Gradzahlen auftreten. Man vermeidet dies, wenn man die g_{ik} so wählt, daß

$$g_{11} \leqq g_{12} \leqq \cdots \leqq g_{1t} \tag{20}$$

und

$$g_{11} \leqq g_{21} \leqq \cdots \leqq g_{s1} \tag{21}$$

gilt. Nach Satz 3 ist für die h_{kl} nur (20) noch realisierbar; das Nichtauftreten negativer Exponenten ist bei den von der Matrizenmultiplikation betroffenen Elementen evident; lediglich bei Nullen können sich formal negative Werte ergeben.

Im übrigen gelten die üblichen Regeln und Gesetzmäßigkeiten für das Rechnen mit Matrizen; wir heben hier nur eine hervor: Für die Multiplikation einer H-Matrix mit einer Form $A(x_0, x_1, \ldots, x_n) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ bzw. mit einer Konstanten aus $\mathbf{K}$ gilt ohne Zusatzbedingungen

$$A \begin{pmatrix} G_{11} & \ldots & G_{1t} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ G_{s1} & \ldots & G_{st} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} AG_{11} & \ldots & AG_{1t} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ AG_{s1} & \ldots & AG_{st} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

5.3. Homogenität der Unterdeterminanten von H-Matrizen

Wir gehen nun wieder aus von der Matrix

$$V_{st} := \begin{pmatrix} G_{11} & \dots & G_{1t} \\ \dots & \dots & \dots \\ G_{s1} & \dots & G_{st} \end{pmatrix} \tag{8}$$

mit $h(G_{ik}) := g_{ik}$ und

$$g_{ik} = g_{i1} + g_{1k} - g_{11}. \tag{14}$$

Dann gilt der

Satz 4. *Alle r-reihigen ($r \leqq \operatorname{Min}\{s, t\}$) Unterdeterminanten von V_{st} sind Formen.*

Beweis. Wir führen den Beweis o. B. d. A. für die aus den ersten r Zeilen und den ersten r Spalten gebildete r-reihige Unterdeterminante; nach der Leibnizschen Definition der Determinante (vgl. MfL Bd. 3, 8.2.) ist dann

$$\begin{vmatrix} G_{11} & \dots & G_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ G_{r1} & \dots & G_{rr} \end{vmatrix} = \sum (-1)^I \cdot G_{1i_1} G_{2i_2} \cdots G_{ri_r},$$

wobei die Summe über alle Permutationen $(i_1, \dots, i_r)$ von $(1, \dots, r)$ zu bilden ist und $I(i_1, \dots, i_r)$ die Anzahl der Inversionen der jeweiligen Permutation $(i_1, \dots, i_r)$ ist. Es sei g der Grad des allgemeinen Gliedes unserer Determinante, also

$$g := h(G_{1i_1} G_{2i_2} \cdots G_{ri_r}) = g_{1i_1} + g_{2i_2} + \dots + g_{ri_r}.$$

Es ist zu zeigen, daß g unabhängig von der Permutation $(i_1, \dots, i_r)$ ist. Setzen wir (14) in den Ausdruck für g ein, so wird (untereinandergeschrieben)

$$\begin{aligned} g = g_{11} &+ g_{21} + \dots + g_{r1} \\ &+ g_{1i_1} + g_{1i_2} + \dots + g_{1i_r} \\ &- g_{11} - g_{11} - \dots - g_{11}, \end{aligned}$$

und wegen

$$g_{1i_1} + g_{1i_2} + \dots + g_{1i_r} = g_{11} + g_{12} + \dots + g_{1r}$$

ist also g in der Tat unabhängig von der jeweiligen Permutation $(i_1, \dots, i_r)$.

Gröbner geht in [2] von Satz 4 als Forderung aus und gelangt von da aus zur Bedingung (14). Der Verfasser wählte hier mit Rücksicht auf die in 5.1. dargelegten Zusammenhänge bewußt einen etwas weniger eleganten Weg.

5.4. Homogene Vektormoduln

Die Zeilen- oder Spaltenvektoren homogener Matrizen bilden einen Vektormodul, den wir als „homogenen Vektormodul" bezeichnen wollen:

Definition 3. Ein *homogener Vektormodul* des H-Ringes $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ist eine Menge $\mathfrak{B}$ von Vektoren mit gleicher Koordinatenzahl, für die folgendes gilt:

1. Die Koordinaten G_{ik} sind Formen aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, für deren Gradzahlen (14), (15) und (16) gelten.

2. Aus $U = \begin{pmatrix} G_{11} \\ \vdots \\ G_{s1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{B}$, $V = \begin{pmatrix} G_{12} \\ \vdots \\ G_{s2} \end{pmatrix} \in \mathfrak{B}$, $A \in \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, $B \in \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$

wobei die Beziehung

$$h(A) + h(G_{i1}) = h(B) + h(G_{i2}) \tag{23}$$

gilt, folgt $AU + BV \in \mathfrak{B}$.

Es gilt dann der

Satz 5 (Hilbertscher Basissatz für homogene Vektormoduln). *Jeder homogene Vektormodul $\mathfrak{B}$ besitzt eine endliche Basis.*

Beweis. Dazu nehmen wir in $\mathfrak{B}$ eine Klasseneinteilung der Spaltenvektoren vor.

Die erste Klasse besteht aus allen Spaltenvektoren, bei denen die erste Koordinate $\neq 0$ ist,

— die zweite Klasse besteht aus allen Spaltenvektoren, bei denen die erste Koordinate $= 0$ und die zweite Koordinate $\neq 0$ ist,

— die dritte Klasse besteht aus allen Spaltenvektoren, bei denen die erste und die zweite Koordinate $= 0$ und die dritte Koordinate $\neq 0$ ist, usw.

Dies ist offenbar eine vollständige Klasseneinteilung, wobei in Einzelfällen allerdings eine oder mehrere Klassen auch leer sein können. Jedenfalls erhalten wir dadurch eine treppenförmige Anordnung der Spaltenvektoren.

Die ersten Koordinaten der Spaltenvektoren der ersten Klasse bilden wegen (23) ein H-Ideal, welches nach Kap. 1, Satz 12, eine endliche Basis besitzt, und wir können diese als Minimalbasis wählen. Jeder Spaltenvektor der ersten Klasse kann dann durch die Basisvektoren dieser Minimalbasis und einen Spaltenvektor einer Klasse mit höherer Nummer dargestellt werden.

Jetzt werde derselbe Prozeß mit den zweiten Koordinaten der Spaltenvektoren der zweiten Klasse durchgeführt usw.

Auf diese Weise entsteht sogar eine Minimalbasis unseres Vektormoduls.

Nebeneinander geschrieben, bilden diese Spaltenvektoren eine Matrix endlicher Spaltenzahl. Wegen der ersten Eigenschaft, die für homogene Vektormoduln in Definition 3 gefordert wurde, ist diese Matrix gemäß 5.2. eine homogene Matrix, für die also die Gradbedingungen (14), (15) und (16) erfüllt sind.

Ganz analog verlaufen die Überlegungen für Zeilenvektoren, was uns hier aber weniger interessieren wird.

Wir vermerken nochmals als wichtiges Nebenergebnis den

Satz 6. *Durch sukzessive Bestimmung von Minimalbasen für endlich viele H-Ideale kann zu jedem homogenen Vektormodul eine Minimalbasis berechnet werden.*

Wir kehren nun zu den Überlegungen von 5.1. zurück.

5.5. Syzygien

Definition 4. Ist $\boldsymbol{U}_{1s} = (F_1, \ldots, F_s)$ ein H-Ideal aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, so heißt jeder Vektor $\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_s \end{pmatrix}$ mit

$$\Phi_1 F_1 + \Phi_2 F_2 + \cdots + \Phi_s F_s = 0 \text{ id. in } x_0, \ldots, x_n \tag{4}$$

bzw.

$$(F_1, F_2, \ldots, F_s) \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_s \end{pmatrix} = 0 \tag{5}$$

eine *Syzygie* des H-Ideals $(F_1, \ldots, F_s)$.

Definition 5. Ist

$$\boldsymbol{V}_{st} = \begin{pmatrix} G_{11} & \ldots & G_{1t} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ G_{s1} & \ldots & G_{st} \end{pmatrix}$$

eine homogene Matrix, so heißt jeder Vektor $\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_t \end{pmatrix}$ mit

$$\begin{pmatrix} G_{11} & \ldots & G_{1t} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ G_{s1} & \ldots & G_{st} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ id. in } x_0, \ldots, x_n \tag{24}$$

eine *Syzygie* der H-Matrix $\boldsymbol{V}_{st}$ bzw. des durch $\boldsymbol{V}_{st}$ definierten homogenen Vektormoduls.

Aus dem zuvor Bewiesenen folgt unmittelbar

Satz 7. *Die Gesamtheit der Syzygien eines H-Ideals bzw. eines homogenen Vektormoduls bildet einen homogenen Vektormodul.*

Definition 6. Der Modul der Syzygien eines H-Ideals $\mathfrak{a}$ oder eines homogenen Vektormoduls V_{st} heißt der *Syzygienmodul* von $\mathfrak{a}$ bzw. von V_{st}.

Satz 8. *Jeder Syzygienmodul besitzt eine endliche Basis.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 5 und Satz 7.

Satz 9. *Ist W_{tu} der Syzygienmodul von V_{st}, so braucht V_{st}^{T} nicht der volle Syzygienmodul von W_{tu}^{T} zu sein.*

Beweis. Zunächst folgt aus $V_{st}W_{tu} = 0$ sofort $W_{tu}^{\mathsf{T}} V_{st}^{\mathsf{T}} = 0$, jedoch zeigt das Beispiel $(x_0x_1, x_0x_2)\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = 0$ mit $(x_2, -x_1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} x_0x_1 \\ x_0x_2 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ die Richtigkeit der Behauptung von Satz 9.

Definition 7. Ist $\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_s)$ ein H-Ideal aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, so heißt der Syzygienmodul von $\mathfrak{a}$ der *zweite Syzygienmodul* von $\mathfrak{a}$; der Syzygienmodul dieses zweiten Syzygienmoduls (falls er existiert) heißt der *dritte Syzygienmodul* von $\mathfrak{a}$; ..., usw. $\mathfrak{a}$ selbst wird als *erster Syzygienmodul* gezählt.

Man beachte, daß mitunter in der Literatur $\mathfrak{a}$ nicht als Syzygienmodul mitgerechnet wird; dann ist der Syzygienmodul von $\mathfrak{a}$ der erste Syzygienmodul usw. Wir wollen im folgenden bei der durch Definition 7 festgelegten Zählung verbleiben.

Wir wollen nun ein Beispiel für den zweiten und den dritten Syzygienmodul eines H-Ideals geben und betrachten dazu das bereits in Kap. 1, (130), (131), in diesem Zusammenhang betrachtete H-Ideal $\mathfrak{v}_{14}^{(2)} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ mit der Minimalbasis (F_1, F_2, F_3, F_4) und $F_1 = x_0x_3 - x_1x_2$, $F_2 = x_0{}^2x_2 - x_1{}^3$, $F_3 = x_0x_2{}^2 - x_1{}^2x_3$, $F_4 = x_1x_3{}^2 - x_2{}^3$. Die Formen eines festen Grades t aus $\mathfrak{v}_{14}^{(2)}$ $(t \geqq 2)$ bilden dann nach Kap. 1, Satz 17, den Modul $\mathfrak{M}(t; \mathfrak{v}_{14}^{(2)})$; die Beziehungen

$$\Phi_1F_1 + \Phi_2F_2 + \Phi_3F_3 + \Phi_4F_4 = 0 \text{ id. in } x_0, x_1, x_2, x_3$$

stellen dann für festen Grad t lineare Abhängigkeitsrelationen zwischen den Formen des Moduls $\mathfrak{M}(t; \mathfrak{v}_{14}^{(2)})$ dar. Für $t = 2$ existieren keine solchen Abhängigkeitsrelationen, da F_1 die einzige quadratische Basisform in $\mathfrak{v}_{14}^{(2)}$ ist. Für $t = 3$ haben wir die linearen Abhängigkeitsrelationen zwischen x_0F_1, x_1F_1, x_2F_1, x_3F_1, F_2, F_3 und F_4 zu berücksichtigen; solche existieren aber nicht. Für $t = 4$ sind demgemäß die linearen Abhängigkeitsrelationen zwischen den 22 Formen $x_0{}^2F_1$, $x_0x_1F_1$, $x_0x_2F_1$, $x_0x_3F_1$, $x_1{}^2F_1$, $x_1x_2F_1$, $x_1x_3F_1$, $x_2{}^2F_1$, $x_2x_3F_1$, $x_3{}^2F_1$, x_0F_2, x_1F_2, x_2F_2, x_3F_2, x_0F_3, x_1F_3, x_2F_3, x_3F_3, x_0F_4, x_1F_4, x_2F_4, x_3F_4 zu bestimmen, was mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus geschehen kann (vgl. 5.6.). Dies gibt vier Abhängigkeitsrelationen, nämlich

$$\left.\begin{aligned} x_1{}^2F_1 - x_2F_2 + x_0F_3 &= 0, \\ x_0x_2F_1 - x_3F_2 + x_1F_3 &= 0, \\ x_1x_3F_1 - x_2F_3 - x_0F_4 &= 0, \\ x_2{}^2F_1 - x_3F_3 - x_1F_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ id. in } x_0, x_1, x_2, x_3. \tag{25}$$

Daraus ergibt sich — was noch zu beweisen ist — bereits der volle Syzygienmodul

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_0x_2 & x_1x_3 & x_2^2 \\ -x_2 & -x_3 & 0 & 0 \\ x_0 & x_1 & -x_2 & -x_3 \\ 0 & 0 & -x_0 & -x_1 \end{pmatrix} \tag{26}$$

mit der Gradmatrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

„Voller" Syzygienmodul heißt, daß sich *jede* Syzygie $\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{pmatrix}$ auf mindestens eine Weise mit geeigneten Formen A_1, A_2, A_3, A_4 aus den Syzygien von (26) kombinieren läßt:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} x_1^2 \\ -x_2 \\ x_0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} x_0x_2 \\ -x_3 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + A_3 \begin{pmatrix} x_1x_3 \\ 0 \\ -x_2 \\ -x_0 \end{pmatrix} + A_4 \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \\ -x_3 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

Wegen (22) — angewandt auf Spaltenvektoren — läßt sich dies matrizenmäßig schreiben:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_0x_2 & x_1x_3 & x_2^2 \\ -x_2 & -x_3 & 0 & 0 \\ x_0 & x_1 & -x_2 & -x_3 \\ 0 & 0 & -x_0 & -x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} := U_{44} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Gilt außerdem für *dieselbe* Syzygie $\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_0x_2 & x_1x_3 & x_2^2 \\ -x_2 & -x_3 & 0 & 0 \\ x_0 & x_1 & -x_2 & -x_3 \\ 0 & 0 & -x_0 & -x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} = U_{44} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} \tag{28}$$

mit

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix},$$

so folgt aus (27) und (28)

$$U_{44}\begin{pmatrix} B_1 - A_1 \\ B_2 - A_2 \\ B_3 - A_3 \\ B_4 - A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Es ist also $\begin{pmatrix} B_1 - A_1 \\ B_2 - A_2 \\ B_3 - A_3 \\ B_4 - A_4 \end{pmatrix}$ eine Syzygie von U_{44}, also eine Syzygie des zweiten Syzygienmoduls von $\mathfrak{v}_{14}^{(2)} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$; nach Definition 7 ist also $\begin{pmatrix} B_1 - A_1 \\ B_2 - A_2 \\ B_3 - A_3 \\ B_4 - A_4 \end{pmatrix}$ ein Element des dritten Syzygienmoduls; setzen wir

$$\begin{pmatrix} B_1 - A_1 \\ B_2 - A_2 \\ B_3 - A_3 \\ B_4 - A_4 \end{pmatrix} := \Psi \begin{pmatrix} \Phi_1{}^3 \\ \Phi_2{}^3 \\ \Phi_3{}^3 \\ \Phi_4{}^3 \end{pmatrix} \tag{30}$$

mit einer geeigneten Form $\Psi = \Psi(x_0, x_1, x_2, x_3)$, so folgt also

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} + \Psi \begin{pmatrix} \Phi_1{}^3 \\ \Phi_2{}^3 \\ \Phi_3{}^3 \\ \Phi_4{}^3 \end{pmatrix},$$

wobei die Koordinaten $\Phi_1{}^3, \Phi_2{}^3, \Phi_3{}^3, \Phi_4{}^3$ gemäß (29) und (30) aus

$$U_{44}\begin{pmatrix} \Phi_1{}^3 \\ \Phi_2{}^3 \\ \Phi_3{}^3 \\ \Phi_4{}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1{}^2 & x_0x_2 & x_1x_3 & x_2{}^2 \\ -x_2 & -x_3 & 0 & 0 \\ x_0 & x_1 & -x_2 & -x_3 \\ 0 & 0 & -x_0 & -x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_1{}^3 \\ \Phi_2{}^3 \\ \Phi_3{}^3 \\ \Phi_4{}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{31}$$

zu berechnen sind. Aus (31) folgt nach Ausführung der Matrizenmultiplikation

$$\begin{aligned} x_1{}^2\Phi_1{}^3 + x_0x_2\Phi_2{}^3 + x_1x_3\Phi_3{}^3 + x_2{}^2\Phi_4{}^3 &= 0, \\ -x_2\,\Phi_1{}^3 - \quad x_3\Phi_2{}^3 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 0, \\ x_0\,\Phi_1{}^3 + \quad x_1\Phi_2{}^3 \quad - x_2\Phi_3{}^3 - x_3\Phi_4{}^3 &= 0, \\ - x_0\Phi_3{}^3 - x_1\Phi_4{}^3 &= 0. \end{aligned}$$

Bei der Lösung derartiger Gleichungssysteme empfiehlt es sich, mit den einfachsten Gleichungen zu beginnen; in unserem Fall sind das die zweite und die vierte Gleichung.

Aus der zweiten Gleichung folgt $\Phi_1{}^3 = x_3A$, $\Phi_2{}^3 = -x_2A$, aus der vierten Gleichung folgt $\Phi_3{}^3 = x_1B$, $\Phi_4{}^3 = -x_0B$; dies in die dritte Gleichung eingesetzt, gibt $(x_0x_3 - x_1x_2)(A + B) = 0$, also $B = -A$, mithin

$$\begin{pmatrix} \Phi_1{}^3 \\ \Phi_2{}^3 \\ \Phi_3{}^3 \\ \Phi_4{}^3 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_3 \\ -x_2 \\ -x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen in die erste Gleichung gibt schließlich $A(x_1^2x_3 - x_0x_2^2 - x_1^2x_3 + x_0x_2^2) = 0$; die erste Gleichung ist also ebenfalls erfüllt. Mithin stellt der Vektor $V_{41} := \begin{pmatrix} x_3 \\ -x_2 \\ -x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$ bereits den vollen dritten Syzygienmodul dar.

Die Berechnung des dritten Syzygienmoduls gestaltete sich hier — und ähnlich ist es in anderen Beispielen — wesentlich einfacher als die des zweiten Syzygienmoduls. Dies rührte von den in U_{44} auftretenden Nullen her. Daher wird im folgenden der Berechnung des zweiten Syzygienmoduls unser besonderes Augenmerk dienen, zumal dies auch für die Anwendungen von besonderer Bedeutung ist.

Ein eventueller vierter Syzygienmodul wäre durch $\begin{pmatrix} x_3 \\ -x_2 \\ -x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} \Phi^4 = 0$ gegeben, also durch

$$\begin{aligned} x_3\Phi^4 &= 0, \\ -x_2\Phi^4 &= 0, \\ -x_1\Phi^4 &= 0, \\ x_0\Phi^4 &= 0 \end{aligned}$$

mit der einzig möglichen Lösung $\Phi^4 = 0$. Weitere Syzygienmoduln können also nicht existieren, wenn der Ausgangsmodul nur aus einem Spaltenvektor besteht; wir formulieren dies noch als Satz 10. Diese Bedingung ist aber keineswegs notwendig; man betrachte dazu das Potenzproduktideal (x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2) mit dem zweiten Syzygienmodul $\begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ -x_1 & x_1 \\ 0 & -x_0 \end{pmatrix}$; für die Koordinaten Φ_1^3, Φ_2^3 eines dritten Syzygienmoduls müßte dann

$$\begin{aligned} x_2\Phi_1^3 &= 0, \\ -x_1\Phi_1^3 + x_1\Phi_2^3 &= 0, \\ -x_0\Phi_2^3 &= 0 \end{aligned}$$

gelten, und hieraus folgt $\begin{pmatrix} \Phi_1^3 \\ \Phi_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; der Nullvektor ist also die einzig mögliche Syzygie. Wie das vorletzte Beispiel zeigte, kann dabei der Fall auftreten, daß der Nullvektor nur aus einer Koordinate, also der Zahl Null allein, besteht. Sobald der Nullvektor als einzig mögliche Syzygie auftritt, sprechen wir vom Abbrechen der Syzygienkette. Dazu geben wir die

Definition 8. Geht man von einem H-Ideal aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ oder einem homogenen Vektormodul aus, so heißt die aus dem H-Ideal bzw. homogenen Vektormodul,

— dem zweiten Syzygienmodul,
— dem dritten Syzygienmodul,
— ... usw.

bestehende Folge von Vektormoduln bzw. die sie repräsentierende Folge von homogenen Matrizen die *Syzygienkette* des H-Ideals bzw. des Ausgangsmoduls.

Wir sprechen vom *Abbrechen der Syzygienkette* nach dem k-ten Glied, wenn der $(k+1)$-te Syzygienmodul der Nullvektor (bzw. gleich der Zahl Null) ist, nicht aber der k-te Syzygienmodul, in Zeichen:

$$U^1_{s_0 s_1},\ U^2_{s_1 s_2},\ \ldots,\ U^k_{s_{k-1} s_k} \wedge U^i U^{i+1} = 0 \wedge U^k \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \wedge U^{k+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Bei H-Idealen $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ wird die Zahl k als *Länge* $L(\mathfrak{a})$ *der Syzygienkette* bezeichnet, in Zeichen

$$L(\mathfrak{a}) := k. \tag{33}$$

$L(\mathfrak{a})$ darf nicht mit der hier nicht eingeführten Ideallänge μ von Primäridealen verwechselt werden.

Wir werden sehen, daß $L(\mathfrak{a})$ wichtige Aussagen über das H-Ideal $\mathfrak{a}$ liefert.

Wir können nunmehr den angekündigten Satz formulieren:

Satz 10. *Besteht ein Syzygienmodul nur aus einem Spaltenvektor, so bricht die Syzygienkette mit diesem Syzygienmodul ab.*

Aus Satz 9 folgt: Ist U^{i+1} der volle Syzygienmodul von U^i, so braucht $(U^i)^\mathsf{T}$ nicht der volle Syzygienmodul zu $(U^{i+1})^\mathsf{T}$ zu sein. Ist dies für alle i dennoch der Fall, so definieren wir:

Definition 9. Ist (32) die Syzygienkette von $U^1_{s_0 s_1}$ und ist die Folge der transponierten Matrizen

$$(U^k_{s_{k-1} s_k})^\mathsf{T},\ (U^{k-1}_{s_{k-2} s_{k-1}})^\mathsf{T},\ \ldots,\ (U^2_{s_1 s_2})^\mathsf{T},\ (U^1_{s_0 s_1})^\mathsf{T} \tag{34}$$

die Syzygienkette von $(U^k)^\mathsf{T}$, so heißt (32) eine *reversible Syzygienkette.*

Die Bezeichnung „reversible Syzygienkette" wurde von Gröbner in [9] geprägt, während G. Eisenreich in [3] die Bezeichnung „umkehrbare Syzygienkette" benutzt. Von Gröbner und dem Verfasser wurde vermutet, daß H-Ideale mit reversibler Syzygienkette die bereits mehrmals vorangekündigten „perfekten Ideale" sind; dies wurde unabhängig von G. Eisenreich in [3] erstmals bewiesen, vgl. auch die daran anknüpfende Darstellung bei Gröbner ([9], Kap. IV, § 5, Sätze IV und V).

5.6. Praktische Berechnung von Syzygienketten

Es sei $\mathfrak{a} = (F_1, F_2, \ldots, F_s) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ein H-Ideal mit

$$m_0 = h(F_1) \leqq h(F_2) \leqq \cdots \leqq h(F_{i-1}) \leqq h(F_i) \leqq \cdots \leqq h(F_{s-1}) \leqq h(F_s) = M$$

und $(F_1, \ldots, F_s)$ eine Minimalbasis. Es seien $\Phi_i = \Phi_i(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ vollständige Formen in unbestimmten Koeffizienten u_{ik} vom Grad $m_0 + 1 - h(F_i)$; „vollständig" soll heißen, daß alle möglichen Potenzprodukte des geforderten Grades mit von Null verschiedenen Koeffizienten wirklich auftreten. Dann wird $\Phi_1 F_1 + \Phi_2 F_2 + \cdots + \Phi_s F_s$ vom Gesamtgrad $m_0 + 1$ bei $\Phi_i = 0$ für $h(F_i) > m_0$. Soll nun

$$\Phi_1 F_1 + \Phi_2 F_2 + \cdots + \Phi_s F_s = 0 \text{ id. in } x_0, x_1, \ldots, x_n$$

werden, so müssen die unbestimmt angesetzten Koeffizienten u_{ik} gewissen linearen Gleichungen genügen, aus deren Lösungen sich die Syzygien ergeben. In analoger Weise kann man bei Vektormoduln $\begin{pmatrix} G_{11} & \ldots & G_{1t} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ G_{s1} & \ldots & G_{st} \end{pmatrix}$ mit $m_0 = h(G_{11}) \leqq \cdots \leqq h(G_{1t}) = M$ ansetzen.

Im nächsten Schritt werden die Φ_i vom Grad $m_0 + 2 - h(F_i)$ angesetzt. Auf diese Weise muß man wegen Satz 5 nach endlich vielen Schritten einmal den vollen Syzygienmodul berechnet haben. Auf dieses Verfahren wurde von Ostrowski in [1], S. 314, hingewiesen (Ostrowski verwendet die Bezeichnung „Dimension" an Stelle von „Grad"). Jedoch erhebt sich die Frage, wie man merkt, daß man den vollen Syzygienmodul erreicht hat. Derartige Algorithmen sind von grundsätzlicher Bedeutung; bei ihnen ist also die Frage nach Abschätzungen für die Anzahl der durchzuführenden Schritte zu stellen.

In unserem Fall würde dazu genügen, Abschätzungen für den höchsten erforderlichen Gesamtgrad $M + K$ anzugeben. Dies ist in der Arbeit [1] von G. Hermann geschehen, aber die dort angegebenen Gradschranken sind einmal für den praktischen Gebrauch viel zu hoch und zum anderen auch noch falsch. Es wird $2M$ als scharfe Gradschranke (also $1 \leqq K \leqq M$) vermutet.

Wie bereits im vorigen Abschnitt dargelegt wurde, wollen wir stattdessen bei der Berechnung des zweiten Syzygienmoduls die Ausgangsbeziehung

$$\Phi_1 F_1 + \Phi_2 F_2 + \cdots + \Phi_s F_s = 0 \quad \text{mit} \quad h(\Phi_1 F_1 + \cdots + \Phi_s F_s) = t$$

als lineare Abhängigkeitsrelation zwischen den $p_i F_i$ mit $h(p_i) = t - h(F_i)$ deuten. Diese linearen Abhängigkeitsrelationen bestimmen wir mit dem *Gaußschen Algorithmus.*

Als Hilfsmittel numerieren wir die Potenzprodukte des jeweiligen Grades t in lexikographischer Anordnung, vgl. 7.3.

Wir rechnen dazu das bisher betrachtete Beispiel $\mathfrak{v}_{14}^{(2)} = (F_1, F_2, F_3, F_4) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ mit

$$F_1 = x_0 x_3 - x_1 x_2, \quad F_2 = x_0^2 x_2 - x_1^3, \quad F_3 = x_0 x_2^2 - x_1^2 x_3, \quad F_4 = x_1 x_3^2 - x_2^3.$$

Wir betrachten als erstes den Grad $t = 4 = M + 1$, haben also $x_i x_k F_1$, $x_j F_2$, $x_j F_3$, $x_j F_4$ auf lineare Abhängigkeiten zu untersuchen. Wir benutzen dazu 7.3. Dies gibt zunächst

$$\begin{aligned} x_0^2 F_1 &= x_0^3 x_3 - x_0^2 x_1 x_2 = (4) - (6), \\ x_0 x_1 F_1 &= x_0^2 x_1 x_3 - x_0 x_1^2 x_2 = (7) - (12), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_0x_2F_1 &= x_0^2x_2x_3 - x_0x_1x_2^2 = (9) - (14),\\
x_0x_3F_1 &= x_0^2x_3^2 - x_0x_1x_2x_3 = (10) - (15),\\
x_1^2F_1 &= x_0x_1^2x_3 - x_1^3x_2 = (13) - (22),\\
x_1x_2F_1 &= x_0x_1x_2x_3 - x_1^2x_2^2 = (15) - (24),\\
x_1x_3F_1 &= x_0x_1x_3^2 - x_1^2x_2x_3 = (16) - (25),\\
x_2^2F_1 &= x_0x_2^2x_3 - x_1x_2^3 = (18) - (27),\\
x_2x_3F_1 &= x_0x_2x_3^2 - x_1x_2^2x_3 = (19) - (28),\\
x_3^2F_1 &= x_0x_3^3 - x_1x_2x_3^2 = (20) - (29),\\
x_0F_2 &= x_0^3x_2 - x_0x_1^3 = (3) - (11),\\
x_1F_2 &= x_0^2x_1x_2 - x_1^4 = (6) - (21),\\
x_2F_2 &= x_0^2x_2^2 - x_1^3x_2 = (8) - (22),\\
x_3F_2 &= x_0^2x_2x_3 - x_1^3x_3 = (9) - (23),\\
x_0F_3 &= x_0^2x_2^2 - x_0x_1^2x_3 = (8) - (13),\\
x_1F_3 &= x_0x_1x_2^2 - x_1^3x_3 = (14) - (23),\\
x_2F_3 &= x_0x_2^3 - x_1^2x_2x_3 = (17) - (25),\\
x_3F_3 &= x_0x_2^2x_3 - x_1^2x_3^2 = (18) - (26),\\
x_0F_4 &= x_0x_1x_3^2 - x_0x_2^3 = (16) - (17),\\
x_1F_4 &= x_1^2x_3^2 - x_1x_2^3 = (26) - (27),\\
x_2F_4 &= x_1x_2x_3^2 - x_2^4 = (29) - (31),\\
x_3F_4 &= x_1x_3^3 - x_2^3x_3 = (30) - (32).
\end{aligned}
$$

Wir ordnen nach den ersten Potenzprodukten und erhalten

$$
\begin{aligned}
x_0F_2 &= (3) - (11),\\
x_0^2F_1 &= (4) - (6),\\
x_1F_2 &= (6) - (21),\\
x_0x_1F_1 &= (7) - (12),\\
&\left.\begin{aligned} x_2F_2 &= (8) - (22),\\ x_0F_3 &= (8) - (13),\end{aligned}\right\}\\
&\left.\begin{aligned} x_3F_2 &= (9) - (23),\\ x_0x_2F_1 &= (9) - (14),\end{aligned}\right\}\\
x_0x_3F_1 &= (10) - (15),\\
x_1^2F_1 &= (13) - (22),\\
x_1F_3 &= (14) - (23),
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
x_1x_2F_1 &= (15) - (24),\\
&\left.\begin{aligned} x_1x_3F_1 &= (16) - (25),\\ x_0F_4 &= (16) - (17),\end{aligned}\right\}\\
x_2F_3 &= (17) - (25),\\
&\left.\begin{aligned} x_2^2F_1 &= (18) - (27),\\ x_3F_3 &= (18) - (26),\end{aligned}\right\}\\
x_0x_3F_1 &= (19) - (28),\\
x_3^2F_1 &= (20) - (29),\\
x_1F_4 &= (26) - (27),\\
x_2F_4 &= (29) - (31),\\
x_3F_4 &= (30) - (32).
\end{aligned}
$$

Wenn Syzygien — also Abhängigkeitsrelationen — entstehen sollen, müssen die ersten Potenzprodukte gleich sein.

Die Umkehrung kann natürlich keineswegs gelten, denn sonst könnte es beispielsweise keine Eliminationsideale geben. Es kann also durchaus sein, daß man bei gleichen ersten Potenzprodukten durch Subtraktion zu neuen ersten Potenzprodukten gelangt. Da wir dies im nächsten Kapitel noch benötigen werden, wollen wir dafür eine formelmäßige Fassung geben:

Definition 10. Es sei $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ein H-Ideal. Dann werde unter $\mathfrak{a}_\pi(t)$ dasjenige Potenzproduktideal verstanden, dessen Basis aus genau den Potenzprodukten t-ten Grades in $x_0, x_1, \ldots, x_n$ besteht, die bei lexikographischer Anordnung und nach Anwendung des Gaußschen Algorithmus als erste Potenzprodukte in $\mathfrak{M}(t; \mathfrak{a})$ auftreten. $\mathfrak{a}_\pi(t)$ heißt das *zugeordnete Potenzproduktideal t-ten Grades* des H-Ideals $\mathfrak{a}$.

Dann gilt offenbar

Satz 11. *Ist* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein H-Ideal und sind* $\mathfrak{a}_\pi(t)$ *und* $\mathfrak{a}_\pi(t+1)$ *die zugeordneten Potenzproduktideale t-ten bzw.* $(t+1)$*-ten Grades, so gilt*

$$\mathfrak{M}\big(t+1; \mathfrak{a}_\pi(t)\big) \subseteqq \mathfrak{M}\big(t+1; \mathfrak{a}_\pi(t+1)\big). \tag{35}$$

Auf diese Beziehung werden wir im nächsten Kapitel zurückkommen.

Wir kehren nun zu unserem Beispiel zurück. Hier treten an vier Stellen gleiche erste Potenzprodukte auf. Es sind also maximal vier Syzygien zu erwarten, die hier auch tatsächlich auftreten. Um das einzusehen, ersetzen wir die zweiten Potenzprodukte durch solche mit möglichst großer Nummer. Dies gibt, wie in (25) angekündigt:

$$\left.\begin{aligned} x_2F_2 &= (8)-(22),\\ x_0F_3 + x_1^2F_1 &= (8)-(22) \end{aligned}\right\}\quad x_1^2F_1 - x_2F_2 + x_0F_3 = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_3F_2 &= (9)-(23),\\ x_0x_2F_1 + x_1F_3 &= (9)-(23) \end{aligned}\right\}\quad x_0x_2F_1 - x_3F_2 + x_1F_3 = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_1x_3F_1 &= (16)-(25),\\ x_0F_4 + x_2F_3 &= (16)-(25) \end{aligned}\right\}\quad x_1x_3F_1 - x_2F_3 - x_0F_4 = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_2^2F_1 &= (18)-(27),\\ x_3F_3 + x_1F_4 &= (18)-(27) \end{aligned}\right\}\quad x_2^2F_1 - x_3F_3 - x_1F_4 = 0.$$

Für spätere Rechnungen setzen wir zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} F_{21} &:= x_0x_2F_1 - x_3F_2 + x_1F_3,\\ F_{22} &:= x_1^2F_1 - x_2F_2 + x_0F_3,\\ F_{23} &:= x_1x_3F_1 - x_2F_3 - x_0F_4,\\ F_{24} &:= x_2^2F_1 - x_3F_3 - x_1F_4. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Wir haben also vier Syzygien $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \mathfrak{s}_3, \mathfrak{s}_4$ gefunden mit

$$\mathfrak{s}_1 := \begin{pmatrix} x_0x_2 \\ -x_3 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{s}_2 := \begin{pmatrix} x_1^2 \\ -x_2 \\ x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{s}_3 := \begin{pmatrix} x_1x_3 \\ 0 \\ -x_2 \\ -x_0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{s}_4 := \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \\ -x_3 \\ -x_1 \end{pmatrix},$$

und der Leser mache die Probe, daß tatsächlich

$$(x_0x_3 - x_1x_2,\ x_0^2x_2 - x_1^3,\ x_0x_2^2 - x_1^2x_3,\ x_1x_3^2 - x_2^3)\,(\boldsymbol{s}_1,\ \boldsymbol{s}_2,\ \boldsymbol{s}_3,\ \boldsymbol{s}_4) = (0, 0, 0, 0)$$

erfüllt ist.

Eine Hauptschwierigkeit besteht nun darin, nachzuweisen, daß

$$\boldsymbol{U}_{44}^2 = \begin{pmatrix} x_0x_2 & x_1^2 & x_1x_3 & x_2^2 \\ -x_3 & -x_2 & 0 & 0 \\ x_1 & x_0 & -x_2 & -x_3 \\ 0 & 0 & -x_0 & -x_1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3, \boldsymbol{s}_4) \tag{37}$$

der volle zweite Syzygienmodul ist. Wir haben dafür keine hinreichende, wohl aber eine notwendige Bedingung. Dazu geben wir die

Definition 11. Ist $\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_s) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ein H-Ideal, so bezeichnen wir als *Hauptklassensyzygien* diejenigen Syzygien, die sich aus den Identitäten $F_kF_i + (-F_i)\,F_k = 0$ ergeben.

Der Grund für die Bezeichnung ,,Hauptklassensyzygien" wird sich in 5.7. ergeben. Sie sind offenbar stets vorhanden. Daraus resultiert als notwendige Bedingung der

Satz 12. *Wenn ein Syzygienmodul der volle Syzygienmodul sein soll, müssen die Hauptklassensyzygien daraus kombinierbar sein.*

In unserem Fall sind dies

$$\boldsymbol{h}_1 := \begin{pmatrix} F_2 \\ -F_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{h}_2 := \begin{pmatrix} F_3 \\ 0 \\ -F_1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{h}_3 := \begin{pmatrix} F_4 \\ 0 \\ 0 \\ -F_1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{h}_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ F_3 \\ -F_2 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{h}_5 := \begin{pmatrix} 0 \\ F_4 \\ 0 \\ -F_2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{h}_6 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_4 \\ -F_3 \end{pmatrix},$$

und es ist — was der Leser selbst nachprüfen möge —

$$\boldsymbol{h}_1 = x_0\boldsymbol{s}_1 - x_1\boldsymbol{s}_2,\quad \boldsymbol{h}_2 = x_0\boldsymbol{s}_1 - x_3\boldsymbol{s}_2,\quad \boldsymbol{h}_3 = x_3\boldsymbol{s}_3 - x_2\boldsymbol{s}_4,$$
$$\boldsymbol{h}_4 = x_1^2\boldsymbol{s}_1 - x_0x_2\boldsymbol{s}_2,\quad \boldsymbol{h}_5 = -x_1x_3\boldsymbol{s}_1 + x_2^2\boldsymbol{s}_2 + x_0x_2\boldsymbol{s}_3 - x_1^2\boldsymbol{s}_4,\quad \boldsymbol{h}_6 := x_2^2\boldsymbol{s}_3 - x_1x_3\boldsymbol{s}_4.$$

Mithin könnten die vier Syzygien $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3, \boldsymbol{s}_4$ bereits den vollen Syzygienmodul bilden.

Die Umkehrung von Satz 12, ob aus der Kombinierbarkeit der Hauptklassensyzygien durch ein berechnetes System von Syzygien auf die Vollständigkeit des Syzygienmoduls geschlossen werden kann, konnte bislang weder bewiesen noch widerlegt werden.

Wir wollen daher im folgenden immerhin zeigen, daß für $t = 5$ und $t = 6$ keine neuen Syzygien entstehen.

Für $t = 5$ folgt nach 7.4. — gleich nach den ersten Potenzprodukten geordnet —

$$
\begin{aligned}
x_0^2F_2 &= (3) - (11),\\
x_0^3F_1 &= (4) - (6),\\
x_0x_1F_2 &= (6) - (21),\\
x_0^2x_1F_1 &= (7) - (12),
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
x_0x_2F_2 &= (8) - (22),\\
x_0^2F_3 &= (8) - (13),
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
x_0x_3F_2 &= (9) - (23),\\
x_0^2x_2F_1 &= (9) - (14),
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\begin{aligned}
x_0^2x_3F_1 &= (10) - (15),\\
x_1^2F_2 &= (12) - (36),\\
x_0x_1^2F_1 &= (13) - (22),
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
x_1x_2F_2 &= (14) - (37),\\
x_0x_1F_3 &= (14) - (23),
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
x_1x_3F_2 &= (15) - (38),\\
x_0x_1x_2F_1 &= (15) - (24),
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
x_0x_1x_3F_1 &= (16) - (25),\\
x_0^2F_4 &= (16) - (17),
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
x_2^2F_2 &= (17) - (39),\\
x_0x_2F_3 &= (17) - (25),
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
x_2x_3F_2 &= (18) - (40),\\
x_0x_2^2F_1 &= (18) - (27),\\
x_0x_3F_3 &= (18) - (26),
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
x_3^2F_2 &= (19) - (41),\\
x_0x_2x_3F_1 &= (19) - (28),
\end{aligned}\right\}
$$

$$
x_0x_3^2F_1 = (20) - (29),
$$

$$
\begin{aligned}
x_1^3F_1 &= (23) - (37),\\
x_1^2F_3 &= (24) - (38),\\
x_1^2x_2F_1 &= (25) - (39),
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
x_1^2x_3F_1 &= (26) - (40),\\
x_0x_1F_4 &= (26) - (27),
\end{aligned}\right\}
$$

$$
x_1x_2F_3 = (27) - (40),
$$

$$
\left.\begin{aligned}
x_1x_2^2F_1 &= (28) - (42),\\
x_1x_3F_3 &= (28) - (41),
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
x_1x_2x_3F_1 &= (29) - (43),\\
x_0x_2F_4 &= (29) - (31),
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
x_1x_3^2F_1 &= (30) - (44),\\
x_0x_3F_4 &= (30) - (32),
\end{aligned}\right\}
$$

$$
x_2^2F_3 = (31) - (43),
$$

$$
\left.\begin{aligned}
x_2^3F_1 &= (32) - (46),\\
x_2x_3F_3 &= (32) - (44),
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
x_2^2x_3F_1 &= (33) - (47),\\
x_3^2F_3 &= (33) - (45),
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2x_3^2F_1 &= (34) - (48),\\
x_3^3F_1 &= (35) - (49),\\
x_1^2F_4 &= (41) - (42),\\
x_1x_2F_4 &= (44) - (46),\\
x_1x_3F_4 &= (45) - (47),\\
x_2^2F_4 &= (48) - (51),\\
x_2x_3F_4 &= (49) - (52),\\
x_3^2F_4 &= (50) - (53).
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt

$$
\left.\begin{aligned}
x_0x_2F_2 &= (8) - (22),\\
x_0x_1^2F_1 + x_0^2F_3 &= (8) - (22)
\end{aligned}\right\} \quad x_0F_{22} = 0,
$$

$$
\left.\begin{aligned}
x_0x_3F_2 &= (9) - (23),\\
x_0^2x_2F_1 + x_0x_1F_3 &= (9) - (23)
\end{aligned}\right\} \quad x_0F_{21} = 0,
$$

$$
\left.\begin{aligned}
x_1x_2F_2 &= (14) - (37),\\
x_1^3F_1 + x_0x_1F_3 &= (14) - (37)
\end{aligned}\right\} \quad x_1F_{22} = 0,
$$

$$
\left.\begin{aligned}
x_1x_3F_2 &= (15) - (38),\\
x_0x_1x_2F_1 + x_1^2F_3 &= (15) - (38)
\end{aligned}\right\} \quad x_1F_{21} = 0,
$$

$$\left.\begin{aligned} x_0x_1x_3F_1 &= (16) - (25), \\ x_0x_2F_3 + x_0^2F_4 &= (16) - (25) \end{aligned}\right\} \quad x_0F_{23} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_2^2F_2 &= (17) - (39), \\ x_1^2x_2F_1 + x_0x_2F_3 &= (17) - (39) \end{aligned}\right\} \quad x_2F_{22} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_2x_3F_2 &= (18) - (40), \\ x_0x_2^2F_1 + x_1x_2F_3 &= (18) - (40), \\ x_1^2x_3F_1 + x_0x_3F_3 &= (18) - (40) \end{aligned}\right\} \quad x_2F_{21} = 0, \quad x_3F_{22} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_3^2F_2 &= (19) - (41), \\ x_0x_2x_3F_1 + x_1x_3F_3 &= (19) - (41) \end{aligned}\right\} \quad x_3F_{21} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_1^2x_3F_1 &= (26) - (40), \\ x_1x_2F_3 + x_0x_1F_4 &= (26) - (40) \end{aligned}\right\} \quad x_1F_{23} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_1x_2^2F_1 &= (28) - (42), \\ x_1x_3F_3 + x_1^2F_4 &= (28) - (42) \end{aligned}\right\} \quad x_1F_{24} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_1x_2x_3F_1 &= (29) - (43), \\ x_2^2F_3 + x_0x_2F_4 &= (29) - (43) \end{aligned}\right\} \quad x_2F_{23} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_1x_3^2F_1 &= (30) - (44), \\ x_2x_3F_3 + x_0x_3F_4 &= (30) - (44) \end{aligned}\right\} \quad x_3F_{23} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_2^3F_1 &= (32) - (46), \\ x_2x_3F_3 + x_1x_2F_4 &= (32) - (46) \end{aligned}\right\} \quad x_2F_{24} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_2^2x_3F_1 &= (33) - (47), \\ x_3^2F_3 + x_1x_3F_4 &= (33) - (47) \end{aligned}\right\} \quad x_3F_{24} = 0.$$

Für $t = 6$ ergeben sich bereits 95 Binome, die gemäß 7.5. nach den ersten Potenzprodukten zu ordnen sind. Wir wollen diese Schritte hier übergehen und stellen im folgenden die Fälle mit gleichem ersten Potenzprodukt zusammen. Auch hier ergeben sich dabei durchweg Syzygien, deren Reduktion auf die vier Basissyzygien nur in einem Fall etwas komplizierter ist:

$$\left.\begin{aligned} x_0^2x_2F_2 &= (8) - (22), \\ x_0^2x_1^2F_1 + x_0^3F_3 &= (8) - (22) \end{aligned}\right\} \quad x_0^2F_{22} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_0^2x_3F_2 &= (9) - (23), \\ x_0^3x_2F_1 + x_0^2x_1F_3 &= (9) - (23) \end{aligned}\right\} \quad x_0^2F_{21} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_0x_1x_2F_2 &= (14) - (37), \\ x_0x_1^2F_1 + x_0^2x_1F_3 &= (14) - (37) \end{aligned}\right\} \quad x_0x_1F_{22} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_0x_1x_3F_2 &= (15) - (38), \\ x_0^2x_1x_2F_1 + x_0x_1^2F_3 &= (15) - (38) \end{aligned}\right\} \quad x_0x_1F_{21} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_0^2x_1x_3F_1 &= (16) - (25), \\ x_0^2x_2F_3 + x_0^3F_4 &= (16) - (25) \end{aligned}\right\} \quad x_0^2F_{23} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_0x_2^2F_2 &= (17) - (39), \\ x_0x_1^2x_2F_1 + x_0^2x_2F_3 &= (17) - (39) \end{aligned}\right\} \quad x_0x_2F_{22} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_0x_2x_3F_2 &= (18)-(40),\\ x_0{}^2x_2{}^2F_1 + x_0x_1x_2F_3 &= (18)-(40),\\ x_0x_1{}^2x_3F_1 + x_0{}^2x_3F_3 &= (18)-(40) \end{aligned}\right\}\quad x_0x_2F_{21}=0,\quad x_0x_3F_{22}=0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_0x_3{}^2F_2 &= (19)-(41),\\ x_0{}^2x_2x_3F_1 + x_0x_1x_3F_3 &= (19)-(41) \end{aligned}\right\}\quad x_0x_3F_{21}=0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_1{}^2x_2F_2 &= (24)-(58),\\ x_1{}^4F_1 + x_0x_1{}^2F_3 &= (24)-(58) \end{aligned}\right\}\quad x_1{}^2F_{22}=0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_1{}^2x_3F_2 &= (25)-(59),\\ x_0x_1{}^2x_2F_1 + x_1{}^3F_3 &= (25)-(59) \end{aligned}\right\}\quad x_1{}^2F_{21}=0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_0x_1{}^2x_3F_1 &= (26)-(40),\\ x_0x_1x_2F_3 + x_0{}^2x_1F_4 &= (26)-(40) \end{aligned}\right\}\quad x_0x_1F_{23}=0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_1x_2{}^2F_2 &= (27)-(60),\\ x_1{}^3x_2F_1 + x_0x_1x_2F_3 &= (27)-(60) \end{aligned}\right\}\quad x_1x_2F_{22}=0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_1x_2x_3F_2 &= (28)-(61),\\ x_0x_1x_2{}^2F_1 + x_1{}^2x_2F_3 &= (28)-(61),\\ x_1{}^3x_3F_1 + x_0x_1x_3F_3 &= (28)-(61) \end{aligned}\right\}\quad x_1x_2F_{21}=0,\quad x_1x_3F_{22}=0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_1x_3{}^2F_2 + x_1{}^3F_4 &= (29)-(63),\\ x_0x_1x_2x_3F_1 + x_1{}^2x_2{}^2F_1 &= (29)-(63),\\ x_2{}^3F_2 + x_0{}^2x_2F_4 &= (29)-(63) \end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} &x_1x_3F_{21} + x_1{}^2F_{24} = 0,\\ &-x_1x_3F_{21} + x_2{}^2F_{22} + x_0x_2F_{23} - x_1{}^2F_{24} = 0, \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} x_0x_1x_3{}^2F_1 &= (30)-(44),\\ x_0x_2x_3F_3 + x_0{}^2x_3F_4 &= (30)-(44) \end{aligned}\right\}\quad x_0x_3F_{23}=0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_2{}^3F_2 &= (31)-(63),\\ x_1{}^2x_2{}^2F_1 + x_0x_2{}^2F_3 &= (31)-(63) \end{aligned}\right\}\quad x_2{}^2F_{22}=0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_2{}^2x_3F_2 &= (32)-(64),\\ x_0x_2{}^3F_1 + x_1x_2{}^2F_3 &= (32)-(64),\\ x_1{}^2x_2x_3F_1 + x_0x_2x_3F_3 &= (32)-(64) \end{aligned}\right\}\quad x_2{}^2F_{21}=0,\quad x_2x_3F_{22}=0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_2x_3{}^2F_2 &= (33)-(65),\\ x_0x_2{}^2x_3F_1 + x_1x_2x_3F_3 &= (33)-(65),\\ x_1{}^2x_3{}^2F_1 + x_0x_3{}^2F_3 &= (33)-(65) \end{aligned}\right\}\quad x_2x_3F_{21}=0,\quad x_3{}^2F_{22}=0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_3{}^3F_2 &= (34)-(66),\\ x_0x_2x_3{}^2F_1 + x_1x_3{}^2F_3 &= (34)-(66) \end{aligned}\right\}\quad x_3{}^2F_{21}=0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_1{}^3x_3F_1 &= (41)-(61),\\ x_1{}^2x_2F_3 + x_0x_1{}^2F_4 &= (41)-(61) \end{aligned}\right\}\quad x_1{}^2F_{23}=0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_1{}^2x_2{}^2F_1 &= (43)-(63),\\ x_1{}^2x_3F_3 + x_1{}^3F_4 &= (43)-(63) \end{aligned}\right\}\quad x_1{}^2F_{24}=0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_1{}^2x_2x_3F_1 &= (44)-(64),\\ x_1x_2{}^2F_3 + x_0x_1x_2F_4 &= (44)-(64) \end{aligned}\right\}\quad x_1x_2F_{23}=0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_1{}^2x_3{}^2F_1 &= (45)-(65),\\ x_1x_2x_3F_3 + x_0x_1x_3F_4 &= (45)-(65) \end{aligned}\right\}\quad x_1x_3F_{23}=0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_1x_2^3F_1 &= (47) - (67), \\ x_1x_2x_3F_3 + x_1^2x_2F_4 &= (47) - (67) \end{aligned}\right\} \quad x_1x_2F_{24} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_1x_2^2x_3F_1 &= (48) - (68), \\ x_1x_3^2F_3 + x_1^2x_3F_4 &= (48) - (68), \\ x_2^3F_3 + x_0x_2^2F_4 &= (48) - (68) \end{aligned}\right\} \quad x_1x_3F_{24} = 0, \quad x_2^2F_{23} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_1x_2x_3^2F_1 &= (49) - (69), \\ x_2^2x_3F_3 + x_0x_2x_3F_4 &= (49) - (69) \end{aligned}\right\} \quad x_2x_3F_{23} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_1x_3^3F_1 &= (50) - (70), \\ x_2x_3^2F_3 + x_0x_3^2F_4 &= (50) - (70) \end{aligned}\right\} \quad x_3^2F_{23} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_2^4F_1 &= (52) - (72), \\ x_2^2x_3F_3 + x_1x_2^2F_4 &= (52) - (72) \end{aligned}\right\} \quad x_2^2F_{24} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_2^3x_3F_1 &= (53) - (73), \\ x_2x_3^2F_3 + x_1x_2x_3F_4 &= (53) - (73) \end{aligned}\right\} \quad x_2x_3F_{24} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_2^2x_3^2F_1 &= (54) - (74), \\ x_3^3F_3 + x_1x_3^2F_4 &= (54) - (74) \end{aligned}\right\} \quad x_3^2F_{24} = 0.$$

Mit diesen Rechnungen wollen wir es bewenden lassen; jedenfalls sind wir hier bis zum Grad $2M = 6$ gegangen. Wie schon einmal erwähnt, bleibt zu wünschen, daß dieser Wert als Gradschranke nachgewiesen werden kann.

Das hier benutzte Verfahren führte deshalb so schnell zu Syzygien, weil die betrachteten Formen durchweg Binome waren. Bei Formen mit mehreren Termen ist dasselbe Verfahren anwendbar, jedoch ergeben sich Syzygien dann meist erst zum Schluß des in konkreten Fällen in einer Vielzahl von Schritten durchzuführenden Gaußschen Algorithmus. Daran interessierte Leser mögen die im Anhang mitgeteilten Ergebnisse für verschiedene Beispiele nachrechnen. Der starke Rechenaufwand läßt den Einsatz moderner Rechengeräte wünschenswert erscheinen.

5.7. Syzygienketten von $(\mathfrak{a}, F)$

Wir beweisen als erstes den

Satz 13 (Satz von Gröbner, vgl. [2], 152.6,7 und [9], Kap. IV, § 4, 4.13., Satz 4). *Ist* $\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_s) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein H-Ideal und* $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *eine Form mit* $\mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a}$, *so kann die Syzygienkette von* $(\mathfrak{a}, F)$ *aus der Syzygienkette von* $\mathfrak{a}$ *durch Ergänzung der Syzygienmatrizen berechnet werden, und es gilt*

$$L(\mathfrak{a}) = k \wedge \mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a} \Rightarrow L(\mathfrak{a}, F) = k + 1. \tag{38}$$

Beweis. Es sei $(F_1, \ldots, F_s)$, $U^2_{ss_2}$, $U^3_{s_2s_3}$, $\ldots$, $U^k_{s_{k-1}s_k}$ die Syzygienkette von $\mathfrak{a}$ und

$$U^2_{ss_2} = \begin{pmatrix} \Phi^2_{11} & \ldots & \Phi^2_{1s_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Phi^2_{s1} & \ldots & \Phi^2_{ss_2} \end{pmatrix}, \tag{39}$$

ferner

$$U^3_{s_2s_3} = \begin{pmatrix} \Phi^3_{11} & \ldots & \Phi^3_{1s_3} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Phi^3_{s_21} & \ldots & \Phi^3_{s_2s_3} \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Aus $\Phi_1{}^2F_1 + \cdots + \Phi_s{}^2F_s + \Phi^2F = 0$ folgt:

$$\Phi^2F \in \mathfrak{a} \Rightarrow \Phi^2 \in \mathfrak{a} : (F) \Rightarrow \Phi^2 \in \mathfrak{a}$$

wegen $\mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_s)$, und demzufolge sind bei $\Phi^2 \neq 0$ die Syzygien

$$\begin{pmatrix} \Phi_1{}^2 \\ \Phi_2{}^2 \\ \vdots \\ \Phi_s{}^2 \\ \Phi^2 \end{pmatrix} \quad \text{kombinierbar aus} \quad \begin{pmatrix} -F \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ F_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -F \\ \vdots \\ 0 \\ F_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -F \\ F_s \end{pmatrix}.$$

Ist dagegen $\Phi^2 = 0$, so erhalten wir Syzygien von $\mathfrak{a}$. Der volle zweite Syzygienmodul $V^2_{t_1t_2}$ von $(\mathfrak{a}, F)$ ist also gegeben durch

$$V^2_{t_1t_2} = \left(\begin{array}{c:cccc} & -F & 0 & \ldots & 0 \\ U^2_{ss_2} & 0 & -F & \ldots & 0 \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & 0 & 0 & \ldots & -F \\ \hdashline 0 \ \ldots \ 0 & F_1 & F_2 & \ldots & F_s \end{array}\right) \tag{41}$$

mit $t_1 = s + 1$, $t_2 = s + s_2$.

Nun ist wegen der Kombinierbarkeit der Hauptklassensyzygien

$$(\Phi^2_{11}, \ldots, \Phi^2_{1s_2}, \ldots, \Phi^2_{s1}, \ldots, \Phi^2_{ss_2}) \supseteqq (F_1, \ldots, F_s) = \mathfrak{a},$$

allgemein

$$(\Phi^{i+1}_{11}, \ldots, \Phi^{i+1}_{s_is_{i+1}}) \supseteqq (\Phi^i_{11}, \ldots, \Phi^i_{s_{i-1}s_i}) \supseteqq \mathfrak{a}. \tag{42}$$

Der Ansatz für den dritten Syzygienmodul ist dann

$$\Phi_1{}^3\Phi_1{}^2 + \cdots + \Phi^3_{s_2}\Phi^2_{s_2} + \Phi^3F = 0;$$

wegen (42) folgt daraus entsprechend:

$$\Phi^3 F \in (\Phi_1{}^3, \dots, \Phi^3_{s_2}) \Rightarrow F \in \mathfrak{a} \subseteqq (\Phi_1{}^2, \dots, \Phi^2_{s_2}),$$

allgemein

$$\Phi^{i+1} F \in (\Phi_1{}^{i+1}, \dots, \Phi^{i+1}_{s_i}) \Rightarrow F \in (\Phi_1{}^i, \dots, \Phi^i_{s_{i-1}}).$$

Der volle dritte Syzygienmodul $V^3_{t_2 t_3}$ von $(\mathfrak{a}, F)$ ist also gegeben durch

$$V^3_{t_2 t_3} = \left(\begin{array}{c:cccc} & F & 0 & \dots & 0 \\ U^3_{s_2 s_3} & 0 & F & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & 0 & 0 & \dots & F \\ \hdashline 0 \ \dots \ 0 & & & & \\ \dots\dots & & U^2_{s s_2} & & \\ 0 \ \dots \ 0 & & & & \end{array}\right) \tag{43}$$

mit $t_2 = s_2 + s$, $t_3 = s_3 + s_2$.

Das Vorzeichen von F muß jetzt gewechselt werden; um dies einzusehen, setze der Leser (39) in (41) und (40) in (43) ein und prüfe $V^2 V^3 = 0$ nach.

So können wir für die nächsten Syzygienmoduln weiterschließen und haben dann

$$V^4_{t_3 t_4} = \left(\begin{array}{c:cccc} & -F & 0 & \dots & 0 \\ U^4_{s_3 s_4} & 0 & -F & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & 0 & 0 & \dots & -F \\ \hdashline 0 \ \dots \ 0 & & & & \\ \dots\dots & & U^3_{s_2 s_3} & & \\ 0 \ \dots \ 0 & & & & \end{array}\right)$$

mit $t_3 = s_3 + s_2$, $t_4 = s_4 + s_3$ und allgemein für $i \geqq 3$

$$V^{i+1}_{t_i t_{i+1}} = \left(\begin{array}{c:cccc} & (-1)^i F & 0 & \dots & 0 \\ U^{i+1}_{s_i s_{i+1}} & 0 & (-1)^i F & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & 0 & 0 & \dots & (-1)^i F \\ \hdashline 0 \ \dots \ 0 & & & & \\ \dots\dots & & U^i_{s_{i-1} s_i} & & \\ 0 \ \dots \ 0 & & & & \end{array}\right) \tag{44}$$

mit $t_i = s_i + s_{i-1}$, $t_{i+1} = s_{i+1} + s_i$.

Ist nun $L(\mathfrak{a}) = k$, so ist nach Definition 8

$$U^{k+1}_{s_k 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix};$$

wegen (44) entsteht dann aber ein vom Nullvektor verschiedener $(k+1)$-ter Syzygienmodul von $(\mathfrak{a}, F)$, und zwar

$$V^{k+1}_{t_k t_{k+1}} = \begin{pmatrix} (-1)^k F & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (-1)^k F & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (-1)^k F \\ \hdashline & U^k_{s_{k-1} s_k} & & \end{pmatrix} \tag{45}$$

mit $t_k = s_k + s_{k-1}$, $t_{k+1} = 0 + s_k = s_k$. Daß

$$V^{k+2}_{s_k 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist, ergibt sich aus (45) wegen:

$$(-1)^k \Phi_j^{k+2} F = 0 \Rightarrow \Phi_j^{k+2} = 0$$

für $j = 1, 2, \dots, s_k$. Es ist also $L(\mathfrak{a}, F) = k + 1$, womit Satz 13 vollständig bewiesen ist.

Satz 13 ist von großer theoretischer Bedeutung, wie wir im folgenden sehen werden. Seine Wirksamkeit für die effektive Berechnung von Syzygien ist jedoch nicht so stark; es ist also im allgemeinen nicht möglich, daraus Syzygien rekursiv berechnen zu wollen, da bei vorgegebenem $\mathfrak{a} = (F_1, \dots, F_s)$ unter den Basiselementen ein F_i mit

$$(F_1, \dots, F_{i-1}, F_{i+1}, \dots, F_s) : (F_i) = (F_1, \dots, F_{i-1}, F_{i+1}, \dots, F_s) \tag{46}$$

in vielen Fällen nicht existiert.

So wird man fragen, ob sich in (38) die Voraussetzung $\mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a}$ zur Forderung, daß $(F_1, \dots, F_s, F)$ eine Minimalbasis ist, abschwächen läßt, auch wenn dadurch nur die Aussage über die Länge der Syzygienkette (nicht aber deren Bauart) folgen sollte. Dazu gilt leider (vgl. Renschuch [10]):

Satz 14. *Ist* $\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_s) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein H-Ideal und* $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *eine Form mit* $F \notin \mathfrak{a}$ *derart, daß gilt:*

$$(F_1, \ldots, F_s, F) \text{ ist Minimalbasis von } (\mathfrak{a}, F) \text{ und } \mathfrak{a} : (F) \supset \mathfrak{a}, \tag{47}$$

so ist über $L(\mathfrak{a}, F)$ *keine Aussage möglich.*

Beweis. Wir geben dazu Beispiele an für
a) $L(\mathfrak{a}, F) < L(\mathfrak{a})$,
b) $L(\mathfrak{a}, F) = L(\mathfrak{a})$,
c) $L(\mathfrak{a}, F) = L(\mathfrak{a}) + 1$,
d) $L(\mathfrak{a}, F) > L(\mathfrak{a}) + 1$;
daß in allen diesen Beispielen $\mathfrak{a} : (F) \supset \mathfrak{a}$ erfüllt ist, wird nicht einzeln gezeigt, sondern kann aus der Bauart des jeweiligen zweiten Syzygienmoduls V^2 von $(\mathfrak{a}, F)$ abgelesen werden; ebenso ist die Voraussetzung $(F_1, \ldots, F_s, F)$ Minimalbasis von $(\mathfrak{a}, F)$ bei allen vier Beispielen evident. Bei den Beispielen werden wir ferner wieder einmal unsere vier Formen

$$F_1 = x_0x_3 - x_1x_2, \quad F_2 = x_0^2x_2 - x_1^3, \quad F_3 = x_0x_2^2 - x_1^2x_3, \quad F_4 = x_1x_3^2 - x_2^3 \tag{48}$$

verwenden.

Zu a). $\mathfrak{a} = (F_1, F_2, F_4) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ hat die viergliedrige Syzygienkette (F_1, F_2, F_4), $U^2_{35}, U^3_{54}, U^4_{41}$ mit $L(\mathfrak{a}) = 4$ und

$$U^2 = \begin{pmatrix} x_0^2x_2 - x_1^3 & x_1(x_0x_3 + x_1x_2) & x_0x_2^2 + x_1^2x_3 & x_2(x_0x_3 + x_1x_2) & x_1x_3^2 - x_2^3 \\ -x_0x_3 + x_1x_2 & -x_2^2 & -x_2x_3 & -x_3^2 & 0 \\ 0 & -x_0^2 & -x_0x_1 & -x_1^2 & -x_0x_3 + x_1x_2 \end{pmatrix},$$

$$U^3 = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & x_3 & 0 \\ -x_0 & x_1 & -x_2 & x_3 \\ 0 & -x_0 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & -x_0 & -x_1 \end{pmatrix}, \quad U^4 = \begin{pmatrix} x_3 \\ -x_2 \\ -x_1 \\ x_0 \end{pmatrix};$$

ist $F = F_3$, so ist $(\mathfrak{a}, F) = (F_1, F_2, F_3, F_4) = \mathfrak{v}^{(2)}_{14}$, wofür wir im vorigen Abschnitt eine dreigliedrige Syzygienkette berechnet haben, also $L(\mathfrak{a}, F) = 3$.

Zu b). $\mathfrak{a} = (x_0x_2 - x_1^2, x_0x_3 - x_1x_2) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$,

$$U^2_{21} = \begin{pmatrix} x_0x_3 - x_1x_2 \\ -x_0x_2 + x_1^2 \end{pmatrix}, \quad L(\mathfrak{a}) = 2.$$

$F = x_1x_3 - x_2^2$; für $(\mathfrak{a}, F)$ gilt

$$V^2_{32} = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ -x_1 & -x_2 \\ x_0 & x_1 \end{pmatrix}, \quad V^3_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also $L(\mathfrak{a}, F) = 2$.

Zu c). $\mathfrak{a} = (x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$,

$$U_{32}^2 = \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ -x_0 & x_3 \\ 0 & -x_1 \end{pmatrix}, \qquad L(\mathfrak{a}) = 2.$$

$F = x_3x_4$; für $(\mathfrak{a}, F)$ gilt (der Leser beachte den Unterschied gegenüber (41), (44), (45))

$$V_{44}^2 = \left(\begin{array}{cc:cc} x_2 & 0 & -x_3x_4 & 0 \\ -x_0 & x_3 & 0 & 0 \\ 0 & -x_1 & 0 & -x_4 \\ \hdashline 0 & 0 & x_0x_1 & x_2 \end{array}\right), \quad V_{41}^3 = \begin{pmatrix} x_3x_4 \\ x_0x_4 \\ x_2 \\ -x_0x_1 \end{pmatrix},$$

also $L(\mathfrak{a}, F) = 3$.

Zu d). Gemäß (48) sei $\mathfrak{a} = (F_2, F_4) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$; dann ist

$$U_{21}^2 = \begin{pmatrix} -F_4 \\ F_2 \end{pmatrix}, \quad L(\mathfrak{a}) = 2.$$

Setzen wir $F = F_1$, dann ist $(\mathfrak{a}, F) = (F_1, F_2, F_4)$ gleich dem Ausgangsideal im Fall a), für welches wir eine viergliedrige Syzygienkette angegeben haben. Hier ist also $4 = L(\mathfrak{a}, F) > L(\mathfrak{a}) + 1 = 3$.

Damit ist Satz 14 vollständig bewiesen.

5.8. Syzygienketten von H-Idealen der Hauptklasse

Für H-Ideale der Hauptklasse r gilt nach Kap. 4, Satz 45, (92), die Hauptklasseneigenschaft von $(F_1, \ldots, F_j)$ für $j = 1, 2, \ldots, r-1$, und damit ist (46) erfüllt. Wir können also die Syzygienketten von H-Idealen der Hauptklasse gemäß Satz 13 rekursiv bestimmen.

Satz 15. *Ist $\mathfrak{h} := (F_1, \ldots, F_r) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ein H-Ideal der Hauptklasse $r = n - d$, so ist*

$$L(\mathfrak{h}) = r = n - d, \tag{49}$$

und die Syzygienkette ist durch $\mathfrak{h} = V_{1r}^1, V_{rt_2}^2, V_{t_2t_3}^3, \ldots, V_{t_{r-1}t_r}^r$ *mit*

$$t_i = \binom{r}{i} \quad \textit{für} \quad i = 2, \ldots, r \tag{50}$$

und

$$V_{rt_2}^2 = \begin{pmatrix} F_2 & F_3 & \ldots & F_r & 0 & \ldots & 0 \\ -F_1 & 0 & \ldots & 0 & F_3 & \ldots & 0 \\ 0 & -F_1 & \ldots & 0 & -F_2 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & F_r \\ 0 & 0 & \ldots & -F_1 & 0 & \ldots & -F_{r-1} \end{pmatrix} \tag{51}$$

sowie

$$V^{i+1}_{t_i t_{i+1}} = \left(\begin{array}{c:cccc} & (-1)^i F_r & 0 & \dots & 0 \\ U^{i+1}(F_1, \dots, F_{r-1}) & 0 & (-1)^i F_r & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & 0 & 0 & \dots & (-1)^i F_r \\ \hdashline 0 \;\dots\dots\; 0 & & & & \\ \dots\dots\dots & & U^i(F_1, \dots, F_{r-1}) & & \\ 0 \;\dots\dots\; 0 & & & & \end{array}\right) \tag{52}$$

rekursiv gegeben.

Beweis. Wie zu Anfang dieses Abschnittes gesagt, ist (46) jetzt anwendbar, und damit ergibt sich (52) und (49). Wegen

$$\binom{r-1}{i-1} + \binom{r-1}{i} = \binom{r}{i}$$

folgt (50). Schließlich folgt (51) aus (41) durch Umordnung und Multiplikation jeder Syzygie mit -1, was wegen der Moduleigenschaft erlaubt ist. Damit ist Satz 15 bewiesen und zugleich die Bezeichnung „Hauptklassensyzygien" von Definition 11 gerechtfertigt.

Da jedes H-Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ der Dimension $d = n - r$ wenigstens diese Hauptklassensyzygien besitzt, gilt der

Satz 16. *Ist* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ *ein H-Ideal, so gilt*

$$\operatorname{Kodim} \mathfrak{a} = r \Rightarrow r \leqq L(\mathfrak{a}). \tag{53}$$

Diese Abschätzung werden wir in 5.16. noch verschärfen können. Immerhin ist durch (53) eine scharfe untere Schranke für $L(\mathfrak{a})$ gegeben.

Wir wollen nun für $r = 1, 2, 3, 4$ die Syzygienketten von H-Idealen der Hauptklasse explizit angeben.

Für $r = 1$ entsteht ein Hauptideal $\mathfrak{h} = (F)$ mit $V^2(F) = 0$, also $L(\mathfrak{h}) = 1$.

Für $r = 2$ ist die Syzygienkette durch

$$(F_1, F_2), \quad \begin{pmatrix} F_2 \\ -F_1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Für $r = 3$ folgt daraus nach (52)

$$(F_1, F_2, F_3), \quad \left(\begin{array}{c:cc} F_2 & -F_3 & 0 \\ -F_1 & 0 & -F_3 \\ \hdashline 0 & F_1 & F_2 \end{array}\right), \quad \begin{pmatrix} F_3 \\ -F_2 \\ F_1 \end{pmatrix}$$

und in der Bezeichnung (51)

$$(F_1, F_2, F_3), \quad \begin{pmatrix} F_2 & F_3 & 0 \\ -F_1 & 0 & F_3 \\ 0 & -F_1 & -F_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} F_3 \\ -F_2 \\ F_1 \end{pmatrix}; \tag{54}$$

entsprechend für $r = 4$ gemäß (52)

$$(F_1, F_2, F_3, F_4), \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} F_2 & -F_3 & 0 & -F_4 & 0 & 0 \\ -F_1 & 0 & -F_3 & 0 & -F_4 & 0 \\ 0 & F_1 & F_2 & 0 & 0 & -F_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & F_1 & F_2 & F_3 \end{array}\right),$$

$$\left[\begin{array}{c|ccc} F_3 & F_4 & 0 & 0 \\ -F_2 & 0 & F_4 & 0 \\ F_1 & 0 & 0 & F_4 \\ \hline 0 & -F_2 & -F_3 & 0 \\ 0 & F_1 & 0 & -F_3 \\ 0 & 0 & F_1 & F_2 \end{array}\right], \quad \begin{pmatrix} -F_4 \\ F_3 \\ -F_2 \\ F_1 \end{pmatrix}$$

und in umgeordneter Weise

$$\left.\begin{aligned} &(F_1, F_2, F_3, F_4), \quad \begin{pmatrix} F_2 & F_3 & F_4 & 0 & 0 & 0 \\ -F_1 & 0 & 0 & F_3 & F_4 & 0 \\ 0 & -F_1 & 0 & -F_2 & 0 & F_4 \\ 0 & 0 & -F_1 & 0 & -F_2 & -F_3 \end{pmatrix}, \\ &\begin{bmatrix} F_3 & F_4 & 0 & 0 \\ -F_2 & 0 & F_4 & 0 \\ 0 & -F_2 & -F_3 & 0 \\ F_1 & 0 & 0 & F_4 \\ 0 & F_1 & 0 & -F_3 \\ 0 & 0 & F_1 & F_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} F_4 \\ -F_3 \\ F_2 \\ -F_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Die Bauart von (54) und (55) läßt bereits erkennen (vgl. Definition 9):

Satz 17. *Die Syzygienketten von H-Idealen der Hauptklasse sind reversible Syzygienketten.*

Wir wollen uns nun speziell mit dem zweiten Syzygienmodul beschäftigen. Dann besagte Satz 15: Ist $\mathfrak{h}$ ein H-Ideal der Hauptklasse r, so besitzt es nur die Hauptklassensyzygien (51). Die Kontraposition lautet:

Satz 18. *Besitzt ein H-Ideal $\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_s) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ wenigstens eine Syzygie, die nicht aus den Hauptklassensyzygien kombinierbar ist, so ist $\mathfrak{a}$ kein H-Ideal* *der Hauptklasse, also:*

$$s \geqq n - d + 1 \Leftrightarrow d \geqq n + 1 - s.$$

Dieser Satz ist besonders für den Fall $s = n + 1$ interessant:

Satz 19. *Es sei* $\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_s) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein H-Ideal. Ist* $s \leqq n$, *so ist* $\operatorname{Dim} \mathfrak{a} \geqq 0$. *Ist* $s = n + 1$, *so ist* $\operatorname{Dim} \mathfrak{a} \geqq 0$ *genau dann, wenn wenigstens eine Syzygie von* $\mathfrak{a}$ *existiert, welche nicht aus den Hauptklassensyzygien kombinierbar ist.* Anders formuliert: *Ein homogenes nichtlineares Gleichungssystem*

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_s(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{array}\right\} \tag{56}$$

ist für $s \leqq n$ *stets nichttrivial lösbar. Ein homogenes nichtlineares Gleichungssystem*

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_{n+1}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{array}\right\} \tag{57}$$

ist genau dann nichttrivial lösbar, wenn wenigstens eine Syzygie des zugehörigen H-Ideals $\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_{n+1})$ *existiert, welche nicht aus den Hauptklassensyzygien kombinierbar ist.*

Beweis. Wegen $r = n - d$ folgt die erste Aussage aus $s \geqq r$ (vgl. 4.17.). Für $\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_{n+1})$ schließen wir so: Wenn eine nicht aus den Hauptklassensyzygien kombinierbare Syzygie existiert, kann $\mathfrak{a}$ kein H-Ideal der Hauptklasse $n + 1$ sein, welches die Dimension $d = n - r = n - (n + 1) = -1$ haben müßte; es ist also $\operatorname{Dim} \mathfrak{a} \geqq 0$. Ist umgekehrt $\operatorname{Dim} \mathfrak{a} = \operatorname{Dim} (F_1, \ldots, F_{n+1}) \geqq 0$, so ist $\mathfrak{a}$ kein H-Ideal der Hauptklasse, besitzt also nicht nur Hauptklassensyzygien. Hierbei haben wir benutzt, daß es sich bei $(F_1, \ldots, F_s)$ bzw. $(F_1, \ldots, F_{n+1})$ nach Definition von s um Minimalbasen handelt, daß also keines der Basiselemente überflüssig ist. Schließlich ist nach Definition der Dimension gemäß W 1 (vgl. 4.3.) die Aussage $d \geqq 0$ mit der nichttrivialen Lösbarkeit von (56) gleichwertig. Damit ist Satz 19 bewiesen.

Haben nun beispielsweise $F_1, \ldots, F_s$ alle denselben Grad $h(F_1) = \cdots = h(F_{n+1}) := m$, so auch die Koordinaten aller Hauptklassensyzygien; aus der Existenz einer Syzygie mit Koordinaten von kleinerem als dem m-ten Grad kann dann nach Satz 19 auf $\operatorname{Dim} (F_1, \ldots, F_{n+1}) \geqq 0$ geschlossen werden. Auf diese Weise kann man noch zu weiteren hinreichenden Bedingungen für $\operatorname{Dim} \mathfrak{a} \geqq 0$ gelangen, vgl. Renschuch [2].

Aus dem Beweis von Satz 13 folgt, daß beim Vorliegen von Syzygienketten der Gestalt (54) und (55) auf die Hauptklasseneigenschaft des betreffenden Ideals geschlossen werden kann. Daß hierzu bereits die Kenntnis der entsprechenden Bauart des zweiten Syzygienmoduls genügt, besagt

Satz 20 (Satz von EISENREICH, vgl. [1]). *Besitzt ein H-Ideal* $\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_s) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *nur die Hauptklassensyzygien* (51), *so ist* $\mathfrak{a}$ *ein H-Ideal der Hauptklasse* s, *hat also die Dimension* $\operatorname{Dim} \mathfrak{a} = d = n - s$ *und mithin die Kodimension* $\operatorname{Kodim} \mathfrak{a} = r = s$.

Beweis. Dazu sei auf EISENREICH [1] verwiesen.

Satz 20 könnte dazu ermuntern, noch einen Schritt weiter zu gehen und die Bedingung (49), also $L(\mathfrak{h}) = r = n - d$ als charakteristisch für H-Ideale der Hauptklasse r zu erhoffen. Das ist nun aber nicht mehr richtig, wie am einfachsten das im Fall c) beim Beweis von Satz 14 verwendete H-Ideal

$$\mathfrak{a} = (x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3) = (x_0, x_2) \cap (x_1, x_2) \cap (x_1, x_3)$$

mit $L(\mathfrak{a}) = 2$ zeigt; aus der angegebenen und gemäß Kap. 2, Satz 37, (95), berechneten Zerlegung sowie aus W 3 folgt $r = \operatorname{Kodim} \mathfrak{a} = 2 = L(\mathfrak{a})$, obwohl $\mathfrak{a}$ kein H-Ideal der Hauptklasse 2 ist. Wir werden in 5.18. durch $L(\mathfrak{a}) = r$ gerade die bereits öfter angekündigten „perfekten Ideale" definieren.

5.9. Syzygien von Potenzproduktidealen

Hier können wir für den zweiten Syzygienmodul eine zu (51) analoge Darstellung angeben:

Satz 21. *Ist* $\mathfrak{a}_\pi = (p_1, p_2, \ldots, p_s) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein Potenzproduktideal, so bilden die Spalten der Matrix* W^2_{st} *mit* $t = \binom{s}{2}$

$$W^2_{st} = \begin{pmatrix} \dfrac{p_2}{p_1 \sqcap p_2} & \dfrac{p_3}{p_1 \sqcap p_3} & \cdots & 0 \\ -\dfrac{p_1}{p_1 \sqcap p_2} & 0 & & 0 \\ 0 & -\dfrac{p_1}{p_1 \sqcap p_3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & \dfrac{p_s}{p_{s-1} \sqcap p_s} \\ 0 & 0 & & -\dfrac{p_{s-1}}{p_{s-1} \sqcap p_s} \end{pmatrix} \tag{58}$$

*eine **Basis** für den zweiten Syzygienmodul. Durch Streichen der überflüssigen Spalten erhält man aus W_{st}^2 eine Minimalbasis U^2.*

Beweis (vgl. KUMMER und RENSCHUCH [2], § 8, Satz 21). Zunächst ist unmittelbar einzusehen, daß durch die Spalten von (58) Syzygien gegeben sind. Ist

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_s \end{pmatrix} \tag{59}$$

eine beliebige Syzygie von $\mathfrak{a}_x = (p_1, p_2, \ldots, p_s)$, so gilt also

$$\Phi_1 p_1 + \Phi_2 p_2 + \cdots + \Phi_s p_s = 0 \tag{60}$$

mit $h(\Phi_1 p_1 + \cdots + \Phi_s p_s) = t$. Jedes in $\Phi_i p_i$ auftretende Potenzprodukt tritt dort nur einmal auf, muß also noch in wenigstens einem anderen Produkt $\Phi_j p_j$ $(j \neq i)$ auftreten und sich insgesamt wegheben. Das lexikographisch kleinste Potenzprodukt t-ten Grades, welches in (60) auftritt, kann mit Hilfe von Syzygien aus (58) ausgedrückt werden. Auf diese Weise gelangen wir von (60) zu einer Syzygie

$$\begin{pmatrix} \Phi_1' \\ \vdots \\ \Phi_s' \end{pmatrix} \text{ mit } \Phi_1' p_1 + \Phi_2' p_2 + \cdots + \Phi_s' p_s = 0 \text{ und } h(\Phi_1' p_1 + \cdots + \Phi_s' p_s) = t,$$

bei welcher das lexikographisch kleinste Potenzprodukt eine höhere Nummer als in (60) hat. Dieses Potenzprodukt wird entsprechend behandelt usw. Da es nur endlich viele Potenzprodukte t-ten Grades in $x_0, x_1, \ldots, x_n$ gibt, gelangen wir so nach endlich vielen Schritten zu einer Beziehung $\Phi_1^* p_1 + \Phi_2^* p_2 + \cdots + \Phi_s^* p_s = 0$, bei der nur noch zwei Potenzprodukte auftreten, also

$$\Phi_1^* p_1 + \Phi_2^* p_2 + \cdots + \Phi_s^* p_s = q_i p_i + (-q_j p_j) = 0,$$

also zu einer Syzygie aus (58), womit die Reduktion von (59) mit Hilfe der Syzygien von (58) gelungen ist, q. e. d.

Ist $m_0 = h(p_1) \leqq h(p_2) \leqq \cdots \leqq h(p_s) = M$, so ist

$$h\left(\frac{p_j}{p_i \sqcap p_j}\, p_i - \frac{p_i}{p_i \sqcap p_j}\, p_j\right) \leqq h(p_i p_j) \leqq 2M;$$

damit ist für Potenzproduktideale die von uns generell vermutete scharfe Gradschranke $2M$ bestätigt.

Beispiel. $\mathfrak{a} = (x_0 x_2, x_0 x_3, x_1 x_2, x_1 x_3)$,

$$W_{46}^2 = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 & x_1 x_3 & 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & 0 & x_1 x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & -x_0 & 0 & -x_0 x_3 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & -x_0 x_2 & 0 & -x_0 & -x_2 \end{pmatrix}$$

und

$$U_{44}^2 = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & -x_0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & -x_0 & -x_2 \end{pmatrix}.$$

Der dritte Syzygienmodul ergibt sich aus

$$\begin{aligned} x_3\Phi_1 + x_1\Phi_2 &= 0, \\ -x_2\Phi_1 + x_1\Phi_3 &= 0, \\ -x_0\Phi_2 + x_3\Phi_4 &= 0, \\ -x_0\Phi_3 - x_2\Phi_4 &= 0; \end{aligned}$$

aus der ersten Gleichung folgt $\Phi_1 = x_1A$, $\Phi_2 = -x_3A$, aus der vierten Gleichung folgt $\Phi_3 = x_2B$, $\Phi_4 = -x_0B$, aus den übrigen Gleichungen folgt $B = A$, also als dritter Syzygienmodul

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ -x_3 \\ x_2 \\ -x_0 \end{pmatrix}.$$

5.10. Syzygienketten von Idealpotenzen

Satz 22. *Für H-Ideale* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *gilt*

$$L(\mathfrak{a}^m) \geqq L(\mathfrak{a}). \tag{61}$$

Beweis (vgl. Renschuch [3]). Ist $\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_s)$ und sind $\pi_1, \ldots, \pi_N$ alle Potenzprodukte vom Grad $m - 1$ in $F_1, \ldots, F_s$, so ist durch

$$(\pi_1F_1, \ldots, \pi_NF_1, \ldots, \pi_1F_s, \ldots, \pi_NF_s)$$

eine Basis von $\mathfrak{a}^m$ gegeben, aus der eine Minimalbasis gewonnen werden kann (vgl. auch Kap. 1, (72)). Ist $(F_1, \ldots, F_s) = U_{1s}^1, U_{ss_2}^2, U_{s_2s_3}^3, \ldots, U_{s_{k-1}s_k}^k$ die Syzygienkette von $\mathfrak{a}$ und

$$(F_{21}, \ldots, F_{2s_2}) := (F_1, \ldots, F_s)U_{ss_2}^2, \tag{62}$$

$$(F_{i1}, \ldots, F_{is_i}) := (F_{i-1,1}, \ldots, F_{i-1,s_{i-1}})U_{s_{i-1}s_i}^i \quad \text{für} \quad i = 3, \ldots, k, \tag{63}$$

wobei $F_1, \ldots, F_s$ bzw. $F_{i-1,1}, \ldots, F_{i-1,s_{i-1}}$ zunächst als Unbestimmte aufgefaßt werden, so gelangt man durch sukzessive Multiplikation von $F_1, \ldots, F_s$, dann von $F_{21}, \ldots, F_{2s_2}$, allgemein von $F_{i-1,1}, \ldots, F_{i-1,s_{i-1}}$ mit $\pi_1, \ldots, \pi_N$ zu Syzygien von $\mathfrak{a}^m$; mithin gilt (61), q. e. d.

Es sei noch bemerkt, daß man nur für $i = 2$ auf die beschriebene Weise sogar den vollen (zweiten) Syzygienmodul gewinnt, vgl. RENSCHUCH [3]. Ersetzt man in den U^i die Variablen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ durch $x_{i0}, x_{i1}, \ldots, x_{in}$, so werden für $i = 1, 2, \ldots, k$ durch (63) die sogenannten *Ostrowskischen Formen i-ter Klasse* definiert, vgl. GAETA [1]; gegenüber GAETA spricht OSTROWSKI in [1] von *abgeleiteten Formen* $(i-1)$*-ter Stufe.*

Beispiel.

$$\mathfrak{a} = (x_0x_2, x_0x_3, x_1x_3), \quad \begin{pmatrix} x_3 & 0 \\ -x_2 & x_1 \\ 0 & -x_0 \end{pmatrix}, \quad L(\mathfrak{a}) = 2,$$

$$\mathfrak{a}^2 = (x_0{}^2x_2{}^2, x_0{}^2x_2x_3, x_0x_1x_2x_3, x_0{}^2x_3{}^2, x_0x_1x_3{}^2, x_1{}^2x_3{}^2),$$

$$\begin{pmatrix} x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_0 & 0 & x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_2 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_2 & -x_0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ -x_1 \\ x_0 \\ -x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L(\mathfrak{a}) = 3.$$

Wir vermerken noch ohne Beweis den

Satz 23 (Satz von MACAULAY, vgl. [2], § 93, p. 100). *Ist*

$$\mathfrak{h} = (F_1, \ldots, F_r) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

ein H-Ideal der Hauptklasse r, so gilt $L(\mathfrak{h}^m) = L(\mathfrak{h}) = r$ *für jede Idealpotenz* $\mathfrak{h}^m$.

Dabei kann die Voraussetzung, daß $\mathfrak{a} = \mathfrak{h}$ ein H-Ideal der Hauptklasse ist, im allgemeinen nicht abgeschwächt werden, vgl. RENSCHUCH [3]; Satz 23 gilt insbesondere auch nicht für alle perfekten H-Ideale $\mathfrak{a}$.

In den folgenden vier Abschnitten geben wir nun einige wichtige Anwendungen der Syzygientheorie, die an früheren Stellen bereits angekündigt worden sind; dies sind die Bestimmung von Minimalbasen für P-Ideale, die Berechnung von Idealdurchschnitten und Idealquotienten, die Berechnung des äquivalenten H-Ideals und der Anzahl der linear unabhängigen Elemente der schon benutzten Moduln $\mathfrak{M}(t; \mathfrak{a})$.

5.11. Bestimmung von Minimalbasen für P-Ideale

Da bei inhomogenen P-Idealen Polynome eines festen Grades t keinen Modul bilden, müssen alle Berechnungen für P-Ideale in jeweils geeigneter Weise auf H-Ideale zurückgeführt werden. Auf diese Weise gelangen wir zu dem zu Kap. 1, Satz 20, analogen

Satz 24 (vgl. RENSCHUCH [14]). *Ist* $(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *ein P-Ideal und* $(f_1, f_2, \ldots, f_t)$ *eine vorgegebene Basis, so kann in endlich vielen Schritten entschieden werden, ob eine Minimalbasis vorliegt oder welche Elemente gestrichen werden können.*

Beweis. Durch Homogenisierung (vgl. Kap. 1, (38)) gehe $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ in $F_i(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ über; aus

$$(\mathfrak{a}) = (f_1, f_2, \ldots, f_t) \tag{64}$$

gewinnt man zunächst (vgl. Kap. 1, (176))

$$\mathfrak{a}_1 := (F_1, F_2, \ldots, F_t). \tag{65}$$

Ist nun (65) keine Minimalbasis für $\mathfrak{a}_1$, was nach Kap. 1, Satz 20, in endlich vielen Schritten entscheidbar ist, so ist auch (64) keine Minimalbasis; ist nämlich o. B. d. A. $F_t = G_1F_1 + \cdots + G_{t-1}F_{t-1}$, so folgt daraus für $x_0 = 1$ sofort

$$f_t = g_1f_1 + \cdots + g_{t-1}f_{t-1}$$

mit $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = G_i(1, x_1, \ldots, x_n)$ und $h(f_t) = \operatorname{Max}\{h(g_if_i)\}$. Ist hingegen (65) eine Minimalbasis, so braucht (64) keine Minimalbasis zu sein. Dies tritt genau dann ein, wenn o. B. d. A. $f_t = g_1f_1 + \cdots + g_{t-1}f_{t-1}$ mit $h(f_t) < \operatorname{Max}\{h(g_if_i)\}$ gilt, was nach Kap. 1, (44), eintreten kann. Ist dann $g := \operatorname{Max}\{h(g_if_i)\} - h(f_t)$, so ergibt sich durch Homogenisierung

$$x_0^gF_t = G_1F_1 + \cdots + G_{t-1}F_{t-1}. \tag{66}$$

Wir erläutern dies am Beispiel 1. Dazu knüpfen wir an das Beispiel zu Anfang von 1.16. an und setzen $(\mathfrak{a}) = (f_1, f_2, f_3)$ mit

$$f_1 = x_1^2, \quad f_2 = x_2 + x_1x_3, \quad f_3 = x_2^2$$

und

$$f_3 = x_3^2f_1 + (x_2 - x_1x_3)\, f_2,$$

also $g = 4 - 2 = 2$; dann wird $\mathfrak{a}_1 = (F_1, F_2, F_3)$ mit

$$F_1 = x_1^2, \quad F_2 = x_0x_2 + x_1x_3, \quad F_3 = x_2^2$$

und

$$x_0^2F_3 = x_3^2F_1 + (x_0x_2 - x_1x_3)\, F_2.$$

Wir setzen nun die allgemeine Beweisführung fort. Existiert eine Darstellung (66) nicht, so kann f_t nicht gestrichen werden. Entsprechend schließt man für $f_1, \ldots, f_{t-1}$.

Nun ist (66) mit $G_1F_1 + \cdots + G_{t-1}F_{t-1} + (-x_0^g)F_t = 0$ id. in $x_0, \ldots, x_n$ gleichwertig, und dies bedeutet, daß

$$\begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_{t-1} \\ -x_0^g \end{pmatrix}$$

eine Syzygie von $\mathfrak{a}_1$ ist. Die Frage, ob (64) eine Minimalbasis von $(\mathfrak{a})$ ist, kann also dadurch entschieden werden, ob der zweite Syzygienmodul von $\mathfrak{a}_1$ Koordinaten mit $c \cdot x_0^{\varrho}$ mit $c \in \mathbf{K}$ enthält oder nicht. Da der zweite Syzygienmodul in endlich vielen Schritten berechnet werden kann, ist Satz 24 damit bewiesen.

Für die praktische Anwendung von Satz 24 ist allerdings die Berechnung des vollen zweiten Syzygienmoduls unerläßlich; in Spezialfällen führen andere Methoden schneller zum Nachweis der Minimaleigenschaft, so bei Bresinsky und Fuller [1]. Für weitere Überlegungen siehe Renschuch [14].

Beispiel 2. Wir betrachten das Beispiel von Kap. 1, (21); dort war $(\mathfrak{a}) = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ mit

$$f_1 = x_1 + x_3, \quad f_2 = x_1^2 + x_2, \quad f_3 = x_1x_2, \quad f_4 = x_1^3 + x_1,$$

und wir wollen die dort angekündigte Minimalbasiseigenschaft nachweisen. Hier wird zunächst $\mathfrak{a}_1 = (F_1, F_2, F_3, F_4)$ mit

$$F_1 = x_1 + x_3, \quad F_2 = x_0x_2 + x_1^2, \quad F_3 = x_1x_2, \quad F_4 = x_0^2x_1 + x_1^3,$$

und für den zweiten Syzygienmodul ergibt sich

$$U_{46}^2 = \begin{pmatrix} F_2 & F_3 & F_4 & 0 & 0 & 0 \\ -F_1 & 0 & 0 & F_3 & F_4 & 0 \\ 0 & -F_1 & 0 & -F_2 & 0 & x_0^2 + x_1^2 \\ 0 & 0 & -F_1 & 0 & -F_2 & -x_2 \end{pmatrix},$$

und daraus läßt sich keine Syzygie mit einer Koordinate der Bauart $c \cdot x_0^{\varrho}$ gewinnen.

Beispiel 3. Wir greifen jetzt das zweite Beispiel von 4.23. auf; dort war $(\mathfrak{p}) = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ mit

$$f_1 = x_3 - x_1x_2, \quad f_2 = x_2 - x_1^3, \quad f_3 = x_2^2 - x_1^2x_3, \quad f_4 = x_1x_3^2 - x_2^3,$$

und es ist dann $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{v}_{14}^{(2)} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$ mit

$$F_1 = x_0x_3 - x_1x_2, \quad F_2 = x_0^2x_2 - x_1^3, \quad F_3 = x_0x_2^2 - x_1^2x_3, \quad F_4 = x_1x_3^2 - x_2^3.$$

Der zweite Syzygienmodul von $\mathfrak{p}_1$ ist nach (26)

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_0x_2 & x_1x_3 & x_2^2 \\ -x_2 & -x_3 & 0 & 0 \\ x_0 & x_1 & -x_2 & -x_3 \\ 0 & 0 & x_0 & x_1 \end{pmatrix};$$

aus der ersten und dritten Spalte folgt, daß f_4 und f_3 gestrichen werden können, ausführlich:

$$\begin{aligned} x_0F_3 &= -x_1^2F_1 + x_2F_2 \Rightarrow f_3 = -x_1^2f_1 + x_2f_2, \\ x_0F_4 &= -x_1x_3F_1 + x_2F_3 \Rightarrow x_0^2F_4 = -x_0x_1x_3F_1 + x_0x_2F_3 \\ &\qquad\qquad = -x_0x_1x_3F_1 - x_1^2x_2F_1 + x_2^2F_2 \\ &\qquad\qquad \Rightarrow f_4 = -x_1(x_3 + x_1x_2)\, f_1 + x_2^2f_2; \end{aligned}$$

die Minimalbasis von $(\mathfrak{p})$ ist also (f_1, f_2). Daß hier f_3 und f_4 gestrichen werden konnten, lag daran, daß in der ersten Spalte in der vierten Zeile eine 0 steht. Anders liegen die Verhältnisse im folgenden Beispiel.

Beispiel 4. Die Abhyankarsche Kurve (vgl. RENSCHUCH [13, 14]) ist im dreidimensionalen affinen Raum Nullstellengebilde des primen P-Ideals mit der allgemeinen Nullstelle $y_1 = t + t^5$, $y_2 = t^3$, $y_3 = t^4$. Dem entspricht nach Kap. 3, Satz 12, (40) ff., das H-Ideal $\mathfrak{p}_A$ mit der allgemeinen Nullstelle

$$y_0(1, t + t^5, t^3, t^4) = y_0 \left(1, \frac{t_1}{t_0} + \frac{t_1^5}{t_0^5}, \frac{t_1^3}{t_0^3}, \frac{t_1^4}{t_0^4}\right) = t_0^5 \left(1, \frac{t_1}{t_0} + \frac{t_1^5}{t_0^5}, \frac{t_1^3}{t_0^3}, \frac{t_1^4}{t_0^4}\right)$$
$$= (t_0^5, t_0^4 t_1 + t_1^5, t_0^2 t_1^3, t_0 t_1^4)$$

und der Minimalbasis $\mathfrak{p}_A = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$ mit

$$F_1 = x_0 x_3 - x_1 x_2 + x_3^2, \quad F_2 = x_0^3 x_2 - x_0 x_1^3 + 3x_0 x_1 x_2^2 + x_2 x_3^3,$$
$$F_3 = x_0^2 x_3^2 - x_1^3 x_2 + x_1^2 x_3^2 + 2x_1 x_2^3 - x_2^2 x_3^2, \quad F_4 = x_0 x_2^3 - x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_3^3 + x_2^3 x_3,$$
$$F_5 = x_1 x_2 x_3^2 - x_2^4 - x_3^4.$$

Es sei nun $f_i(x_1, x_2, x_3) := F_i(1, x_1, x_2, x_3)$ und $(\mathfrak{p}_A) := (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ das durch Enthomogenisierung entstehende P-Ideal aus $\mathbf{K}[x_1, x_2, x_3]$. Es soll entschieden werden, ob $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ eine Minimalbasis ist.

Zur abkürzenden Schreibweise für den zweiten Syzygienmodul U^2 von $\mathfrak{p}_A = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$, den wir hier ohne Beweis angeben, setzen wir

$$H_1 := x_0^2 x_2 - x_0 x_2 x_3 - x_1^3 + 2x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2, \quad H_2 := x_0 x_2^2 - x_2^2 x_3,$$
$$H_3 := x_1^2 x_2 - x_1 x_3^2 - x_2^3, \quad H_4 := x_1^2 x_3 - x_2^2 x_3, \quad H_5 := x_1 x_2 x_3 - x_3^3$$

und haben dann

$$U_{56}^2 = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & H_4 & H_5 & x_2^3 \\ -x_3 & 0 & 0 & x_2 & 0 & 0 \\ x_1 & -x_3 & -x_2 & -x_0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ 0 & 0 & -x_1 & 0 & -x_0 - x_3 & -x_1 \end{pmatrix}.$$

Aus der dritten und vierten Spalte (wo das Element x_0 auftritt) folgt, daß in $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ das Basispolynom f_3 oder das Basispolynom f_4 gestrichen werden kann; es ist also $(f_1, f_2, f_4, f_5) = (f_1, f_2, f_3, f_5) = (\mathfrak{p}_A)$. Da hier an den dafür erforderlichen Stellen in der dritten und vierten Spalte keine Nullen stehen, können f_3 und f_4 nicht beide gestrichen werden; Nullen entstehen an den betreffenden Stellen zwar durch Addition der zweiten und vierten bzw. Subtraktion der dritten und sechsten Spalte, aber dann geht $-x_0$ in $-x_0 - x_3$ bzw. x_0 in $x_0 + x_3$ über.

5.12. Berechnung der Basen äquivalenter H-Ideale, Gleichheit von P-Idealen

Anknüpfend an Kap. 1, Definition 30 und Formel (47), wollen wir eine Basis des zu einem P-Ideal $(\mathfrak{a}) = (f_1, \ldots, f_t) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ äquivalenten H-Ideals $\mathfrak{a}$ berechnen; gemäß Kap. 1, (48), enthält $\mathfrak{a}$ alle Formen, die nach Enthomogenisierung ($x_0 = 1$) in Polynome aus $(\mathfrak{a})$ übergehen. Wie wir in Kap. 1, Satz 14, vermerkten, war dadurch zugleich eine H-Basis für $(\mathfrak{a})$ gegeben.

Gemäß dem Satz von van der Waerden (Kap. 1, Satz 57, (177), (178)) wollen wir das zu $(\mathfrak{a})$ äquivalente H-Ideal $\mathfrak{a}$ als Schlußglied der durch

$$\mathfrak{a}_1 := (F_1, \ldots, F_t), \quad \mathfrak{a}_{i+1} := \mathfrak{a}_i : (x_0) \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{67}$$

gegebenen Teilerkette bestimmen.

$\mathfrak{a}_1$ entsteht durch Homogenisierung (Kap. 1, (38)) der Basisformen $f_1, \ldots, f_t$ von $(\mathfrak{a})$. Gemäß dem vorigen Abschnitt können wir annehmen, daß $(F_1, \ldots, F_t)$ eine Minimalbasis von $\mathfrak{a}_1$ ist. (Ist dies für $(f_1, \ldots, f_t)$ nicht bekannt, so muß es für $(F_1, \ldots, F_t)$ entschieden werden.) Nunmehr werde $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1 : (x_0) = (F_1, \ldots, F_t) : (x_0)$ berechnet, also nach Kap. 1, 1.14., die Gesamtheit der c mit $cx_0 = G_1F_1 + \cdots + G_tF_t$. Hieraus folgt

$$G_1F_1 + \cdots + G_tF_t + (-c)x_0 = 0. \tag{68}$$

Dies besagt, daß

$$\begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_t \\ -c \end{pmatrix} \tag{69}$$

eine Syzygie von $(\mathfrak{a}_1, x_0) = (F_1, \ldots, F_t, x_0)$ ist. Dazu müssen wir noch zeigen, daß $(F_1, \ldots, F_t, x_0)$ eine Minimalbasis von $(\mathfrak{a}_1, x_0)$ ist. Wäre $x_0 \in (F_1, \ldots, F_t)$, so ergäbe sich $1 \in (f_1, \ldots, f_t)$, also $(\mathfrak{a}) = (1)$. Ferner kann keine der Formen F_i gestrichen werden, denn dann müßte $x_0 | F_i$ sein, was unmöglich ist, weil die F_i durch Homogenisierung (Kap. 1, (38)) entstanden sind. Mithin ist $(F_1, \ldots, F_t, x_0)$ eine Minimalbasis, da $(F_1, \ldots, F_t)$ als solche vorausgesetzt worden war.

Wir haben nun den zweiten Syzygienmodul von $(\mathfrak{a}_1, x_0)$ gemäß 5.6. zu berechnen.

Hierzu weisen wir noch auf folgendes hin (vgl. Renschuch [9]). Die Berechnung von (69) kann dadurch wesentlich erleichtert werden, daß wir jede der Basisformen in der Art

$$F_i = x_0R_i + F_i^* \quad \text{mit} \quad R_i = R_i(x_0, x_1, \ldots, x_n) \quad \text{und} \quad F_i^* = F_i^*(x_1, \ldots, x_n) \tag{70}$$

aufspalten, wobei also x_0 in F_i^* nicht mehr auftritt. Dann ist offenbar

$$(\mathfrak{a}_1, x_0) = (F_1, \ldots, F_t, x_0) = (F_1^*, \ldots, F_t^*, x_0),$$

also ist Satz 13 von 5.7. anwendbar. F_i^* berechnet sich durch

$$F_i^*(x_1, \ldots, x_n) = F_i(0, x_1, \ldots, x_n),$$

also dadurch, daß $x_0 = 0$ in F_i gesetzt wird. Aus (68) und (70) folgt dann

$$G_1F_1^* + \cdots + G_tF_t^* + (-c + G_1R_1 + \cdots + G_tR_t)x_0 = 0 \text{ id. in } x_0, x_1, \ldots, x_n. \tag{71}$$

Schreiben wir dafür

$$\Phi_1F_1^* + \cdots + \Phi_tF_t^* + \Phi_{t+1}x_0 = 0 \text{ id. in } x_0, x_1, \ldots, x_n, \tag{72}$$

so ergibt sich aus einer Syzygie

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_t \\ \Phi_{t+1} \end{pmatrix} \tag{73}$$

von (72) die Gesamtheit der c zu

$$c = R_1\Phi_1 + R_2\Phi_2 + \cdots + R_t\Phi_t - \Phi_{t+1}. \tag{74}$$

Hierzu geben wir noch zwei Beispiele. Mit (74) ist dann jedenfalls $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1 : (x_0)$ berechnet. Ist dabei $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1$, so sind wir fertig. Andernfalls wird $\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}_2 : (x_0)$ in analoger Weise berechnet usw. Wir haben also

Satz 25. *Das zu einem P-Ideal* $(\mathfrak{a}) = (f_1, \ldots, f_t) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *äquivalente H-Ideal* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *kann in endlich vielen Schritten durch mehrfache Quotientenbildungen* (67) *berechnet werden.*

Beispiel 1. Wir erläutern das zu Anfang von 1.16. behandelte Beispiel

$$(\mathfrak{a}) = (f_1, f_2) \subset \mathbf{K}[x_1, x_2, x_3] \quad \text{mit} \quad f_1 = x_1^2, \quad f_2 = x_2 + x_1x_3.$$

Hier ist $\mathfrak{a}_1 = (F_1, F_2)$ mit

$$F_1 = x_1^2, \quad F_2 = x_0x_2 + x_1x_3, \quad R_1 = 0, \quad F_1^* = x_1^2, \quad R_2 = x_2, \quad F_2^* = x_1x_3,$$

und $\Phi_1F_1^* + \Phi_2F_2^* + \Phi_3x_0 = 0$ lautet hier

$$\Phi_1x_1^2 + \Phi_2x_1x_3 + \Phi_3x_0 = 0;$$

nach (58) folgt

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 & x_0 & 0 \\ -x_1 & 0 & x_0 \\ 0 & -x_1^2 & -x_1x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix},$$

und nach (73) und (74) wird

$$c = 0 + x_2(-Ax_1 + Cx_0) + Bx_1^2 + Cx_1x_3 = -Ax_1x_2 + Bx_1^2 + C(x_0x_2 + x_1x_3),$$

also ist $\mathfrak{a}_2 = (F_1, F_2, F_3)$ mit $F_3 = x_1x_2$.

Es ist $R_3 = 0$, $F_3^* = x_1x_2$. Zur Berechnung von $\mathfrak{a}_3$ setzen wir

$$\Phi_1F_1^* + \Phi_2F_2^* + \Phi_3F_3^* + \Phi_4x_0 = 0,$$

also

$$\Phi_1x_1^2 + \Phi_2x_1x_3 + \Phi_3x_1x_2 + \Phi_4x_0 = 0;$$

nach (58) folgt

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 & x_2 & x_0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & 0 & x_2 & x_0 & 0 \\ 0 & -x_1 & 0 & -x_3 & 0 & x_0 \\ 0 & 0 & -x_1^2 & 0 & -x_1x_3 & -x_1x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix},$$

und nach (73) und (74) wird

$$\begin{aligned} c &= 0 + x_2(-Ax_1 + Dx_2 + Ex_0) + 0 + Cx_1^2 + Ex_1x_3 + Fx_1x_2 \\ &= (-A + F)\, x_1x_2 + Cx_1^2 + Dx_2^2 + E(x_0x_2 + x_1x_3), \end{aligned}$$

also ist $\mathfrak{a}_3 = (F_1, F_2, F_3, F_4)$ mit $F_4 = x_2^2$.

Es ist $R_4 = 0$, $F_4^* = x_2^2$. Zur Berechnung von $\mathfrak{a}_4$ setzen wir

$$\Phi_1 F_1^* + \Phi_2 F_2^* + \Phi_3 F_3^* + \Phi_4 F_4^* + \Phi_5 x_0 = 0,$$

also

$$\Phi_1 x_1^2 + \Phi_2 x_1 x_3 + \Phi_3 x_1 x_2 + \Phi_4 x_2^2 + \Phi_5 x_0 = 0;$$

nach (58) folgt

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 & x_2 & x_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & 0 & x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_1 & 0 & -x_3 & 0 & x_2 & x_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 & 0 & x_0 \\ 0 & 0 & -x_1^2 & 0 & -x_1x_3 & 0 & -x_1x_2 & -x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \\ A_8 \end{pmatrix},$$

und nach (73) und (74) wird

$$\begin{aligned} c &= 0 + x_2(-A_1x_1 + A_4x_2 + A_5x_0) + 0 + 0 + A_3x_1^2 + A_5x_1x_3 + A_7x_1x_2 + A_8x_2^2 \\ &= (-A_1 + A_4 + A_7)\, x_1x_2 + A_3x_1^2 + A_5(x_0x_2 + x_1x_3) + A_8x_2^2, \end{aligned}$$

also ist $\mathfrak{a}_4 = \mathfrak{a}_3 = (F_1, F_2, F_3, F_4)$ und mithin das äquivalente H-Ideal $\mathfrak{a} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, und dies ist offenbar eine Minimalbasis für $\mathfrak{a}$.

In diesem Fall bestand die Minimalbasis des äquivalenten H-Ideals $\mathfrak{a}$ aus mehr Elementen als die des Ausgangsideals $(\mathfrak{a})$; dies ist jedoch nicht zwangsläufig, wie bereits im Kapitel 1 im Anschluß an Definition 27 erwähnt wurde.

Beispiel 2. Es sei $Q = Q(x_3, \ldots, x_n)$ eine quadratische Form, und in $\mathbf{K}[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n]$ sei $(\mathfrak{a}) = (Q + x_1^3x_2, x_1x_2)$. Natürlich könnte man die Basis sofort durch (Q, x_1x_2) ersetzen; wir wollen jedoch mit der ungünstigeren Basis arbeiten. Dann wird nämlich

$$\mathfrak{a}_1 = (x_0^2Q + x_1^3x_2, x_1x_2) = (x_0^2Q, x_1x_2)$$

und

$$\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1 : (x_0) = (x_0^2Q, x_1x_2, x_0Q)$$

und

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_4 = \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}_2 : (x_0) = (x_0^2Q, x_1x_2, x_0Q, Q),$$

und dies ist offenbar keine Minimalbasis von $\mathfrak{a}$; eine solche ist $\mathfrak{a} = (Q, x_1x_2)$.

Beispiel 3. Wir betrachten die Ideale von Kap. 1, (20), (21), (22), und wollen hier nur die Ergebnisse mitteilen: Es sei

$$(\mathfrak{a}) = (x_1, x_2, x_3), \quad (\mathfrak{b}) = (x_1 + x_3, x_1^2 + x_2, x_1x_2, x_1^3 + x_1),$$

$$(\mathfrak{c}) = \left(x_1 + x_3, x_1^2 + x_2, x_1x_2, (x_3 + 1)(x_1^3 + x_1), x_3(x_1^3 + x_1)\right).$$

Dann wird

$$\mathfrak{b}_1 = (x_1 + x_3, x_0x_2 + x_1^2, x_1x_2, x_0^2x_1 + x_1^3),$$

$$\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{b}_1 : (x_0) = (x_1 + x_3, x_0x_2 + x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_0x_1),$$

$$\mathfrak{b}_3 = \mathfrak{b}_2 : (x_0) = (x_1 + x_3, x_0x_2 + x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_2(x_1 + x_3), x_2^2, x_1) = (x_1, x_3, x_2^2, x_0x_2),$$

$$\mathfrak{b}_4 = \mathfrak{b}_3 : (x_0) = (x_1, x_2, x_3),$$

$$\mathfrak{b}_5 = \mathfrak{b}_4 : (x_0) = \mathfrak{b}_4 = (x_1, x_2, x_3);$$

mithin ist $\mathfrak{b} = (x_1, x_2, x_3)$ das äquivalente H-Ideal und $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$. Durch die Bildung der Idealquotienten und nachträgliche Enthomogenisierung ergeben sich dann gerade die in Kapitel 1 im Anschluß an (20), (21) und (22) gegebenen Umrechnungen. Somit haben wir hier von $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ auf $(\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a})$ schließen können.

Beim Ideal $(\mathfrak{c})$ haben wir

$$\mathfrak{c}_1 = (x_1 + x_3, x_0x_2 + x_1^2, x_1x_2, (x_0 + x_3)(x_0^2x_1 + x_1^3), x_3(x_0^2x_1 + x_1^3)),$$

und es wird erst $\mathfrak{c}_5 = \mathfrak{c}_1 : (x_0^4) = (x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{c}$, also $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ und also $(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{b}) = (\mathfrak{c})$.

Wir haben mithin

Satz 25. *Zwei P-Ideale aus $\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ sind genau dann gleich, wenn ihre äquivalenten H-Ideale gleich sind.*

Dieser Satz ist natürlich von keinerlei theoretischer, wohl aber — wie diese Beispiele gezeigt haben — von praktischer Bedeutung (der umgekehrte Sachverhalt tritt in der Mathematik häufiger auf!). Das liegt daran, daß mit der üblichen Gleichheitsdefinition für Mengen, dem Extensionalitätsprinzip (vgl. MfL Bd. 1, 1.3., (1)), zwar für H-Ideale, nicht aber für P-Ideale vermöge der Basiselemente eine Entscheidung möglich ist; vgl. Kap. 1, Sätze 18, 19, 20.

Bei den hier betrachteten Beispielen gelang es ferner, mit Hilfe der äquivalenten H-Ideale $\mathfrak{b} = \mathfrak{c} = \mathfrak{a} = (x_1, x_2, x_3) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ und der daraus resultierenden Gleichheiten $(\mathfrak{b}) = (\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a})$ zu Basen minimaler Länge für $(\mathfrak{b})$ und $(\mathfrak{c})$ zu gelangen. Ob die Bildung äquivalenter H-Ideale stets zur Gewinnung von Basen minimaler Länge für P-Ideale führt, konnte noch nicht entschieden werden.

5.13. Bestimmung der Basis von Idealquotienten $\mathfrak{a} : (F)$ und $(\mathfrak{a}) : (f)$

Bei der Berechnung von $\mathfrak{a}_1 : (x_0)$ im vorigen Abschnitt konnten wir davon ausgehen, daß $(F_1, \ldots, F_t)$ und auch $(F_1, \ldots, F_t, x_0)$ eine Minimalbasis war. Letzteres ist bei der Berechnung von Idealquotienten $\mathfrak{a} : (F)$ mit $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ und $F = F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ nicht immer der Fall. Dennoch gilt

Satz 26. *Ist $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ein H-Ideal und $F = F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ eine Form, so kann der Idealquotient $\mathfrak{a} : (F)$ in endlich vielen Schritten vermöge der Syzygientheorie berechnet werden.*

Beweis. Ist $\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_s)$ eine Minimalbasis, so kann zunächst (wie in 1.17.) $F \notin \mathfrak{a}$ angenommen werden, andernfalls wäre $\mathfrak{a} : (F) = (1)$. Dann ist $\mathfrak{a} : (F)$ die Gesamtheit der c mit $cF = G_1F_1 + \cdots + G_sF_s$, also

$$G_1F_1 + G_2F_2 + \cdots + G_sF_s + (-c)F = 0 \text{ id. in } x_0, x_1, \ldots, x_n. \tag{75}$$

Fall 1: $(F_1, \ldots, F_s, F)$ ist eine Minimalbasis von $(\mathfrak{a}, F)$. Dann berechnen wir die Syzygien aus

$$\Phi_1F_1 + \Phi_2F_2 + \cdots + \Phi_sF_s + \Phi_{s+1}F = 0 \text{ id. in } x_0, x_1, \ldots, x_n \tag{76}$$

und bestimmen $\mathfrak{a} : (F)$ als Gesamtheit der

$$c = -\Phi_{s+1}. \tag{77}$$

Als Beispiel hierfür verweisen wir auf das Beispiel von 1.17.

Fall 2: $(F_1, \ldots, F_s, F)$ ist keine Minimalbasis von $(\mathfrak{a}, F)$. Wegen $F \notin \mathfrak{a}$ ist dann eine Minimalbasis von $(\mathfrak{a}, F)$ durch Streichung gewisser Formen $F_1, \ldots, F_s$ gegeben; die übrig bleibenden Formen seien $F_{i_1}, \ldots, F_{i_k}$, so daß $(\mathfrak{a}, F) = (F_{i_1}, \ldots, F_{i_k}, F)$ die Minimalbasis von $(\mathfrak{a}, F)$ ist. Dann ist

$$F_j = K_{j1}F_{i_1} + \cdots + K_{jk}F_{i_k} + K_{j,k+1}F \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, s, \tag{78}$$

wobei die K_{ji} auch Konstante sein können, nämlich für $j = i_1$ wird $K_{j1} = 1$, $K_{j2} = \cdots = K_{jk} = K_{j,k+1} = 0$, entsprechend für $j = i_2, \ldots, i_k$.

Mit (78) geht (75) über in

$$\Phi_1F_{i_1} + \cdots + \Phi_kF_{i_k} + \Phi_{k+1}F = 0 \text{ id. in } x_0, x_1, \ldots, x_n \tag{79}$$

mit

$$K_{1i}G_1 + K_{2i}G_2 + \cdots + K_{si}G_s = \Phi_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{80}$$

und

$$c = K_{1,k+1}G_1 + K_{2,k+1}G_2 + \cdots + K_{s,k+1}G_s - \Phi_{k+1}, \tag{81}$$

was der Leser nachrechnen möge.

Mit (81) kann c berechnet werden, denn $G_1, \ldots, G_s$ sind aus (80) bestimmbar. Dabei werden die G_j mit $j \neq i_1, \ldots, i_k$ beliebig gesetzt und nach den übrigen G_i (für welche $K_{ji} = 1$ ist) aufgelöst.

Damit ist Satz 26 bewiesen.

Beispiel. Es sei $\mathfrak{a} = (F_1, F_2, F_3, F_4) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ mit

$$F_1 = x_0x_2 - x_1^2, \quad F_2 = x_0x_3 - x_1x_2, \quad F_3 = x_1^2 - x_2^2, \quad F_4 = x_1x_3 - x_2^2,$$

und es sei ferner $F = x_1 + x_2$. Zu berechnen ist $\mathfrak{a} : (F)$, also die Gesamtheit der c mit

$$G_1F_1 + G_2F_2 + G_3F_3 + G_4F_4 + (-c)\,F = 0 \text{ id. in } x_0, x_1, x_2, x_3. \tag{82}$$

Jetzt ist zwar $F \notin \mathfrak{a}$, aber (F_1, F_2, F_3, F_4, F) ist wegen

$$F_3 = (x_1 - x_2)\,F \tag{83}$$

keine Minimalbasis von $(\mathfrak{a}, F)$; diese ist $(\mathfrak{a}, F) = (F_1, F_2, F_4, F)$. Mit (82) geht (83) über in

$$G_1F_1 + G_2F_2 + G_4F_4 + (-c + G_3(x_1 - x_2))\, F = 0, \tag{84}$$

also in

$$\Phi_1F_1 + \Phi_2F_2 + \Phi_3F_4 + \Phi_4F = 0, \tag{85}$$

mit $G_1 = \Phi_1$, $G_2 = \Phi_2$, $G_4 = \Phi_3$ und

$$c = G_3(x_1 - x_2) - \Phi_4. \tag{86}$$

Für $\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\\ \Phi_3\\ \Phi_4\end{pmatrix}$ ergibt sich mit 5.6. und Satz 13

$$\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\\ \Phi_3\\ \Phi_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_1 - x_2 & 0 & 0 \\ -x_1 & -x_2 & 0 & x_1 - x_2 & 0 \\ x_0 & x_1 & 0 & 0 & x_1 - x_2 \\ 0 & 0 & -F_1 & -F_2 & -F_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A\\ B\\ C\\ D\\ E\end{pmatrix};$$

dies in (86) eingesetzt, folgt $c = G_3(x_1 - x_2) + CF_1 + DF_2 + EF_4$ mit beliebigen G_3, C, D, E; also ist

$$\mathfrak{a} : (F) = (x_1 - x_2, F_1, F_2, F_4).$$

Ist nun $(\mathfrak{a})$ ein inhomogenes P-Ideal und f ein inhomogenes Polynom in $x_1, \ldots, x_n$, F die dazu äquivalente Form und $\mathfrak{a}$ das zu $(\mathfrak{a})$ äquivalente H-Ideal (vgl. Kap. 1, Definition 25 und Definition 30), dann ist $\mathfrak{a} : (F)$ die Gesamtheit der Formen $H(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ mit $HF \in \mathfrak{a}$; aus H entstehen bei der Enthomogenisierung $x_0 = 1$ inhomogene Polynome $h(x_1, \ldots, x_n)$ mit $hf \in (\mathfrak{a})$, und nach Definition des äquivalenten H-Ideals ist dadurch die Gesamtheit der h mit $hf \in (\mathfrak{a})$, also $(\mathfrak{a}) : (f)$ gegeben; wir haben also

Satz 27. *Die Berechnung von* $(\mathfrak{a}) : (f)$ *mit einem P-Ideal* $(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *und einem inhomogenen Polynom* $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ *kann durch Übergang zum äquivalenten H-Ideal* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *und zur äquivalenten Form* $F = F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *vermöge*

$$(\mathfrak{a}) : (f) = \mathfrak{a} : (F)|_{x_0=1} \tag{87}$$

auf den homogenen Fall (Satz 26) *zurückgeführt werden.*

5.14. Bestimmung der Basis von Idealdurchschnitten und beliebigen Idealquotienten

Wir wollen nun die Überlegungen von 1.12. zunächst für Idealdurchschnitte von H-Idealen präzisieren. Wir können uns auf Durchschnitte von zwei Idealen beschränken; dann gilt

Satz 28. *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zwei H-Ideale aus* $\mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, *so kann der Idealdurchschnitt* $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ *in endlich vielen Schritten vermöge der Syzygientheorie berechnet werden.*

Beweis. Sind $\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_s)$ und $\mathfrak{b} = (F_{s+1}, \ldots, F_{s+h})$ Minimalbasen von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$, so ist $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ die Gesamtheit der Formen G mit

$$G = G_1F_1 + \cdots + G_sF_s = G_{s+1}F_{s+1} + \cdots + G_{s+h}F_{s+h}, \tag{88}$$

also

$$G_1F_1 + \cdots + G_sF_s + (-G_{s+1})\,F_{s+1} + \cdots + (-G_{s+h})\,F_{s+h} = 0 \text{ id. in } x_0, x_1, \ldots, x_n. \tag{89}$$

Nun schließen wir weiter wie beim Beweis von Satz 26 und haben als Fall 1, daß $(F_1, \ldots, F_s, F_{s+1}, \ldots, F_{s+h})$ eine Minimalbasis von $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ist, vgl. hierzu das erste Beispiel von 1.12.

Im Fall 2, bei dem $(F_1, \ldots, F_s, F_{s+1}, \ldots, F_{s+h})$ keine Minimalbasis von $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ist, schließen wir wie bei (78), (79), (80) und setzen die Ergebnisse in (88) ein. Wir verweisen auf das zweite Beispiel von 1.12.

Sind $(\mathfrak{a})$ und $(\mathfrak{b})$ zwei inhomogene P-Ideale aus $\mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$, so gilt offenbar der

Satz 29. *Die Berechnung des Idealdurchschnittes* $(\mathfrak{a}) \cap (\mathfrak{b})$ *zweier P-Ideale aus* $\mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *kann durch Übergang zu den äquivalenten H-Idealen* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *vermöge*

$$(\mathfrak{a}) \cap (\mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}|_{x_0=1} \tag{90}$$

auf den homogenen Fall (Satz 28) *zurückgeführt werden.*

Nach Kap. 1, (170) galt

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a} : (G_1, \ldots, G_k) = \big(\mathfrak{a} : (G_1)\big) \cap \cdots \cap \big(\mathfrak{a} : (G_k)\big) \tag{91}$$

für H-Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b} = (G_1, \ldots, G_k)$, und danach kann — wie bereits in Kap. 1, Satz 56, allgemein gefolgert — der Idealquotient $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ vermöge Satz 26 und 28 in endlich vielen Schritten berechnet werden; Entsprechendes gilt für den Idealdurchschnitt zweier P-Ideale $(\mathfrak{a}) : (\mathfrak{b})$ wegen

$$(\mathfrak{a}) : (g_1, \ldots, g_t) = \big((\mathfrak{a}) : (g_1)\big) \cap \cdots \cap \big((\mathfrak{a}) : (g_t)\big); \tag{92}$$

mithin gilt

Satz 30. *Idealdurchschnitte von H-Idealen bzw. P-Idealen lassen sich in endlich vielen Schritten vermöge* (91) *bzw.* (92) *berechnen.*

5.15. Berechnung der Volumfunktion

Wir geben nun eine Anwendung der Syzygientheorie, die bei HILBERT in [1] Ausgangspunkt für die Entwicklung der Syzygientheorie war. Dazu greifen wir auf Kap. 1, Sätze 15 bis 19, zurück. Dort führten wir den Modul $\mathfrak{M}(t; \mathfrak{a})$ der Formen t-ten Grades aus einem H-Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ein und wiesen die Existenz einer linear unabhängigen Modulbasis von $\mathfrak{M}(t; \mathfrak{a})$ nach.

Definition 12. Die Anzahl der linear unabhängigen Formen aus $\mathfrak{M}(t; \mathfrak{a})$, also die Anzahl der Elemente einer linear unabhängigen Modulbasis von $\mathfrak{M}(t; \mathfrak{a})$, wird mit $V(t; \mathfrak{a})$ bezeichnet und heißt die *Volumfunktion* von $\mathfrak{a}$.

Die Anzahlfunktion $V(t; \mathfrak{a})$ wird auch als Dimension von $\mathfrak{M}(t; \mathfrak{a})$ bezeichnet; um Verwechslungen mit der Dimension des Ideals $\mathfrak{a}$ zu vermeiden, übernehmen wir hier die von GRÖBNER in [9], S. 159, und [8], S. 151, geprägte Bezeichnung „Volumfunktion“; in [2] wird noch die Bezeichnung „Volumen“ verwendet.

Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_T = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, so ist $\mathfrak{M}\big(t; (x_0, x_1, \ldots, x_n)\big)$ die Gesamtheit aller Formen t-ten Grades aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. Jede dieser Formen ist Linearform in den Potenzprodukten t-ten Grades in $x_0, x_1, \ldots, x_n$; wir geben dazu die

Definition 13. Die *Anzahl der verschiedenen Potenzprodukte* t-ten Grades in x_0, $x_1, \ldots, x_n$ werde mit $\Delta(t; n)$ bezeichnet.

Dann gilt wegen Kap. 1, Satz 16, sofort

Satz 31. *Die Anzahl der Elemente jeder linear unabhängigen Modulbasis von* $\mathfrak{M}\big(t; (x_0, x_1, \ldots, x_n)\big)$ *ist* $\Delta(t; n)$, *also*

$$V\big(t; (x_0, x_1, \ldots, x_n)\big) = \Delta(t; n). \tag{93}$$

Wir beweisen nun den wichtigen

Satz 32. *Für* $\Delta(t; n)$ *gilt die Hurwitzsche Formel*

$$\Delta(t; n) = \binom{t+n}{n}. \tag{94}$$

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß wir unter $\binom{m}{k}$ eine Abkürzung für

$$\binom{m}{k} := \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} \quad \text{mit} \quad m \in \mathbf{Z}, \quad k \in \mathbf{N}^* \tag{95}$$

verstehen wollen, lassen für m also auch negative ganze Zahlen zu, während in MfL Bd. 1, 3.5., (32′), einschränkend $0 < k \leqq m$ gefordert wird. Auch HURWITZ arbeitet mit dieser Einschränkung, wenn er in [1], Formel (6), für den Wert $\Delta(\mu; n-1)$ das Symbol $k = [\mu; n]$ einführt und dann $k = [\mu; n] = \dfrac{(\mu+n-1)!}{\mu!\,(n-1)!}$ notiert; dies ist gleich $\Delta(\mu; n-1)$, weil HURWITZ (wie auch HILBERT in [1]) mit Formen in $x_1, \ldots, x_n$ arbeitet, wir dagegen mit Formen in $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Man beachte dies grundsätzlich beim Arbeiten mit älterer Literatur!

Wir fassen also bei festem n und variablem t (94) als Polynom n-ten Grades in der Variablen t auf.

Schließlich wollen wir noch bemerken, daß die Hurwitzsche Formel bereits von HILBERT in [1] in Abschnitt IV benutzt wird.

Wir beweisen nun (94) für beliebige t bei festem n ($t, n \in \mathbf{N}^*$) durch vollständige Induktion nach t und formulieren zunächst eine Rekursionsformel für $\Delta(t; n)$. Man vergleiche hierzu die Überlegungen in MfL Bd. 1, 3.5.

Die Potenzprodukte t-ten Grades in $x_0, x_1, \ldots, x_n$ lassen sich einteilen in zwei Klassen:

- zur ersten Klasse gehören alle Potenzprodukte t-ten Grades, in denen x_0 wirklich auftritt; ihre Anzahl sei A_1,
- zur zweiten Klasse gehören alle Potenzprodukte t-ten Grades, in denen x_0 nicht auftritt, die also nur von $x_1, \ldots, x_n$ abhängen; ihre Anzahl sei A_2.

Das ist offenbar eine vollständige Klasseneinteilung aller Potenzprodukte t-ten Grades in $x_0, x_1, \ldots, x_n$, also

$$\Delta(t; n) = A_1 + A_2. \tag{96}$$

Nun kann von jedem Potenzprodukt der ersten Klasse der Faktor x_0 abgespalten werden; es ist also A_1 gleich der Anzahl aller Potenzprodukte $(t-1)$-ten Grades in $x_0, x_1, \ldots, x_n$, also

$$A_1 = \Delta(t-1; n). \tag{97}$$

Ersetzen wir in den Potenzprodukten der zweiten Klasse, die nur von $x_1, \ldots, x_n$ abhängen, jeweils x_i durch x_{i-1} ($i = 1, \ldots, n$), so erhalten wir die Gesamtheit der Potenzprodukte t-ten Grades in $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, also ist

$$A_2 = \Delta(t; n-1). \tag{98}$$

Setzen wir (97) und (98) in (96) ein, so haben wir

$$\Delta(t; n) = \Delta(t-1; n) + \Delta(t; n-1). \tag{99}$$

Ersetzen wir in (99) n nacheinander durch $n-1, n-2, \ldots, 3, 2$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Delta(t; n-1) &= \Delta(t-1; n-1) + \Delta(t; n-2),\\
\Delta(t; n-2) &= \Delta(t-1; n-2) + \Delta(t; n-3),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Delta(t; 3) &= \Delta(t-1; 3) + \Delta(t; 2),\\
\Delta(t; 2) &= \Delta(t-1; 2) + \Delta(t; 1).
\end{aligned}$$

Als Induktionsanfang berechnen wir $\Delta(t; 1)$. Dies ist die Anzahl der Potenzprodukte $x_0{}^t, x_0{}^{t-1}x_1, \ldots, x_1{}^t$; es ist also

$$\Delta(t; 1) = t + 1 = \binom{t+1}{1}.$$

Setzen wir nun in obigem Gleichungssystem die letzte Gleichung in die vorletzte ein usw., so geht durch dieses sukzessive Einsetzen (99) schließlich über in

$$\Delta(t;n) = \Delta(t-1;n) + \Delta(t-1;n-1) + \cdots + \Delta(t-1;3) + \Delta(t-1;2) + t + 1. \tag{100}$$

Wir treffen nunmehr die Induktionsannahme, daß (94) für beliebige, aber feste $n = k$ und bis $t-1$ richtig ist, also

$$\Delta(t-1; k) = \binom{t+k-1}{k}. \tag{101}$$

Nun gilt allgemein

$$\binom{m+n+1}{n} = 1 + (m+1) + \binom{m+2}{2} + \binom{m+3}{3} + \cdots + \binom{m+n-1}{n-1} + \binom{m+n}{n} \tag{102}$$

(vgl. MfL Bd. 1, 3.5., (28)), und für $m = t-1$ gibt dies mit (100) und (101) für $k = 2, \ldots, n$ die gewünschte Beziehung (94), q. e. d.

Nunmehr können wir zur Bestimmung von $V(t; \mathfrak{a})$ übergehen. Wir erinnern an (39) und (40) und beweisen den

Satz 33. *Es sei* $\mathfrak{a} = U^1_{1s} = (F_1, \ldots, F_s) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein H-Ideal mit der abbrechenden Syzygienkette*

$$U^1_{1s},\ U^2_{ss_2},\ U^3_{s_2s_3},\ \ldots,\ U^k_{s_{k-1}s_k}$$

und

$$\left.\begin{array}{lll} U^1_{1s} = (F_1, \ldots, F_s) & \textit{und} & \tau_{1i} := h(F_i), \\ U^2_{ss_2} = (\Phi^2_{hi}) & \textit{und} & \tau_{2i} := h(\Phi^2_{1i}), \\ U^3_{s_2s_3} = (\Phi^3_{hi}) & \textit{und} & \tau_{3i} := h(\Phi^3_{1i}), \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ U^k_{s_{k-1}s_k} = (\Phi^k_{hi}) & \textit{und} & \tau_{ki} := h(\Phi^k_{1i}), \end{array}\right\} \tag{103}$$

so ist

$$\begin{aligned} V(t; \mathfrak{a}) = {} & \sum_{i=1}^{s} \binom{t+n-\tau_{1i}}{n} - \sum_{i=1}^{s_2} \binom{t+n-\tau_{11}-\tau_{2i}}{n} \\ & + \sum_{i=1}^{s_3} \binom{t+n-\tau_{11}-\tau_{21}-\tau_{3i}}{n} - + \cdots \\ & + (-1)^{k-1} \sum_{i=1}^{s_k} \binom{t+n-\tau_{11}-\cdots-\tau_{k-1,1}-\tau_{ki}}{n}, \end{aligned} \tag{104}$$

wobei im Fall $t + n - \tau_{11} - \cdots - \tau_{j-1,1} - \tau_{ji} < 0$ *der entsprechende Binomialkoeffizient gleich Null zu setzen ist.*

Beweis. Formen t-ten Grades aus $\mathfrak{a}$ entstehen, wenn wir
F_1 mit allen linear unabhängigen Formen vom Grad $t - h(F_1)$ multiplizieren,
F_2 mit allen linear unabhängigen Formen vom Grad $t - h(F_2)$ multiplizieren,
....
F_s mit allen linear unabhängigen Formen vom Grad $t - h(F_s)$ multiplizieren;
dadurch erhalten wir insgesamt $\sum\limits_{i=1}^{s} \Delta(t - \tau_{1i}; n)$ Formen t-ten Grades aus $\mathfrak{a}$. Durch diese Anzahl ist aber $V(t; \mathfrak{a})$ noch nicht gegeben, da wir noch die Syzygien berücksichtigen müssen. Dazu formulieren wir das soeben Gesagte noch einmal matrizenmäßig. Ist

$$\boldsymbol{W}_{s1}^1 := \begin{pmatrix} F_1{}^1 \\ \vdots \\ F_s{}^1 \end{pmatrix},$$

dann können obige Multiplikationen durch $\boldsymbol{U}_{1s}^1 \boldsymbol{W}_{s1}^1$ mit

$$t = h(\boldsymbol{U}_{1s}^1 \boldsymbol{W}_{s1}^1) = h(F_i) + h(F_i{}^1),$$

also

$$h(F_i{}^1) = t - \tau_{1i}$$

beschrieben werden.

Wir müssen nun noch den Fall berücksichtigen, daß $\boldsymbol{W}_{s1}^1$ eine zweite Syzygie wird, also — wegen der Moduleigenschaft von $\boldsymbol{U}_{ss_2}^2$ — von der Bauart $\boldsymbol{U}_{ss_2}^2 \boldsymbol{W}_{s_21}^2$ mit

$$\boldsymbol{W}_{s_21}^2 := \begin{pmatrix} F_1{}^2 \\ \vdots \\ F_{s_2}^2 \end{pmatrix}$$

ist. Dabei muß $\boldsymbol{U}_{1s}^1 \boldsymbol{U}_{ss_2}^2 \boldsymbol{W}_{s_21}^2$ wieder vom Gesamtgrad t sein; wegen (103) haben wir also

$$V(t; \mathfrak{a}) = \sum_{i=1}^{s} \Delta(t - \tau_{1i}; n) - \Delta_1 \tag{105}$$

mit

$\Delta_1 :=$ Anzahl der linear unabhängigen Lösungen von $\boldsymbol{U}_{1s}^1 \boldsymbol{U}_{ss_2}^2 \boldsymbol{W}_{s_21}^2 = 0$ vom Grad t.

Nun ist

$$h(\boldsymbol{U}_{1s}^1 \boldsymbol{U}_{ss_2}^2 \boldsymbol{W}_{s_21}^2) = h(F_\sigma) + h(\Phi_{\sigma i}^2) + h(F_i{}^2) = t,$$

also

$$h(F_i{}^2) = t - h(F_\sigma) - h(\Phi_{\sigma i}^2).$$

Wir können hier den Zeilenindex σ beliebig wählen. Analog zu den Überlegungen von Satz 3 wollen wir die erste Zeile bevorzugen, setzen also $\sigma = 1$; mit (103) haben wir dann

$$h(F_i^2) = t - h(F_1) - h(\Phi_{1i}^2) = t - \tau_{11} - \tau_{2i}$$

und folglich

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{s_2} \Delta(t - \tau_{11} - \tau_{2i}; n) - \Delta_2, \tag{106}$$

$\Delta_2 :=$ Anzahl der linear unabhängigen Lösungen von $U_{1s}^1 U_{ss_2}^2 U_{s_2 s_3}^3 W_{s_3 1}^3 = 0$ vom Grad t

und

$$W_{s_3 1}^3 := \begin{pmatrix} F_1{}^3 \\ \vdots \\ F_{s_3}^3 \end{pmatrix}.$$

Entsprechend finden wir

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^{s_3} \Delta(t - \tau_{11} - \tau_{21} - \tau_{3i}; n) - \Delta_3 \tag{107}$$

usw. Wegen des vorausgesetzten Abbrechens der Syzygienkette ist schließlich $\Delta_{k+1} = 0$. Setzen wir (106), (107), ... in (105) ein, so folgt (104) wegen (94), q. e. d.

Diese Überlegungen werfen die Frage auf, ob denn das Abbrechen der Syzygienkette wirklich als Voraussetzung formuliert werden muß oder immer eintritt. Dazu werden wir im nächsten Abschnitt zeigen, daß jede Syzygienkette abbricht, genauer: Ist $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, so gilt

$$L(\mathfrak{a}) \leqq n + 1. \tag{108}$$

Keineswegs kann (108) aus (104) — etwa aus der Anzahl der verschiedenen Binomialkoeffizienten — gefolgert werden; hierzu sei auf das folgende zweite Beispiel hingewiesen.

Beispiel 1. Wir betrachten wieder einmal unser Primideal

$$\mathfrak{p}_{14}^{(2)} = (F_1, F_2, F_3, F_4) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3],$$

dessen Syzygienkette wir im Anschluß an Definition 7 angegeben haben; wir notieren daher hier nur die Gradmatrizen:

$$(2, 3, 3, 3), \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und erhalten für $t \geqq 2$

$$V(t; \mathfrak{p}_{14}^{(2)}) = \binom{t+3-2}{3} + 3\binom{t+3-3}{3} - 4\binom{t+3-2-2}{3} + \binom{t+3-2-2-1}{3}$$
$$= \binom{t+1}{3} + 3\binom{t}{3} - 4\binom{t-1}{3} + \binom{t-2}{3} = \binom{t+3}{3} - (4t+1),$$

was der Leser mit Hilfe von 7.6. selbst nachrechnen möge.

Beispiel 2. Wir betrachten das eindimensionale Primideal

$$\mathfrak{p}_{17}^{(1,3,4,5)} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$$

mit der allgemeinen Nullstelle $(t_0^7, t_0^5 t_1^2, t_0 t_1^6, t_1^7)$ und der Syzygienkette U_{14}^1, U_{44}^2, U_{41}^3 mit

$$U_{14}^1 = (x_0^2 x_2 - x_1^3, x_0 x_3^2 - x_1 x_2^2, x_0 x_2^3 - x_1^2 x_3^2, x_1 x_3^4 - x_2^5),$$

$$U_{44}^2 = \begin{pmatrix} x_2^2 & x_3^2 & 0 & 0 \\ -x_1^2 & -x_0 x_2 & x_1 x_3^2 & x_2^3 \\ -x_0 & -x_1 & -x_2^2 & -x_3^2 \\ 0 & 0 & -x_0 & -x_1 \end{pmatrix}, \qquad U_{41}^3 = \begin{pmatrix} -x_3^2 \\ x_2^2 \\ -x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

und den Gradmatrizen

$$(3, 3, 4, 5), \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei die Gradzahlen der Nullen gemäß (14) bestimmt wurden. Dann wird für $t \geqq 4$ gemäß 7.6.

$$V(t; \mathfrak{p}_{17}^{(1,3,4,5)}) = 2\binom{t}{3} + \binom{t-1}{3} + \binom{t-2}{3} - 2\binom{t-2}{3} - 2\binom{t-3}{3} + \binom{t-4}{3}$$
$$= 2\binom{t}{3} + \binom{t-1}{3} - \binom{t-2}{3} - 2\binom{t-3}{3} + \binom{t-4}{3} = \binom{t+3}{3} - (7t-2);$$

auch diese Rechnung überlassen wir dem Leser, dem sicher aufgefallen sein wird, daß in beiden Beispielen die Differenzen $\binom{t+3}{3} - V(t; \mathfrak{a})$ wesentlich einfachere Ausdrücke liefern. Dies legt nahe, von $V(t; \mathfrak{a})$ zu $\Delta(t; n) - V(t; \mathfrak{a})$ überzugehen. Dies ist die Hilbertfunktion $H(t; \mathfrak{a})$, mit welcher wir uns im nächsten Kapitel beschäftigen werden.

5.16. Obere Schranke für $L(\mathfrak{a})$, Abbrechen der Syzygienkette

Wir erinnern an die Bemerkung zu Anfang von 5.8.: Ist $\mathfrak{h} = (F_1, \ldots, F_r)$ ein H-Ideal der Hauptklasse, so ist $(F_1, \ldots, F_{r-1})$ ebenfalls ein H-Ideal der Hauptklasse, und es gilt

$$(F_1, \ldots, F_{r-1}) : (F_r) = (F_1, \ldots, F_{r-1}). \tag{109}$$

Dies benötigen wir zum Beweis von

Satz 34 (vgl. GRÖBNER [2], 152.10, [1], S. 5, HILBERT [1], S. 504). *Ist* $\mathfrak{s}$ *eine Syzygie aus dem k-ten Syzygienmodul* U^k, *für welche eine Darstellung der Gestalt*

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{s} = F_1\mathfrak{s}_1 + \cdots + F_j\mathfrak{s}_j \quad \textit{mit} \quad j < k \\ \textit{und } (F_1, \ldots, F_j) \textit{ H-Ideal der Hauptklasse } j \end{array}\right\} \tag{110}$$

existiert, so können $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_j$ *so gewählt werden, daß auch sie bereits Syzygien von* U^k *sind.*

Beweis. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach j. Induktionsanfang: Für $j = 1$ ist die Behauptung richtig wegen $\mathfrak{s} = F_1\mathfrak{s}_1$ und weiterhin

$$U^{k-1}\mathfrak{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow U^{k-1}(F_1\mathfrak{s}_1) = F_1(U^{k-1}\mathfrak{s}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow U^{k-1}\mathfrak{s}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Induktionsannahme: Unser Satz ist bis $j - 1$ richtig. Wir wollen damit die Gültigkeit für j beweisen. Multiplizieren wir (110) von links mit U^{k-1} und setzen

$$\mathfrak{s}_i' := U^{k-1}\mathfrak{s}_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, j-1, j, \tag{111}$$

so folgt wegen $U^{k-1}\mathfrak{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = F_1\mathfrak{s}_1' + \cdots + F_j\mathfrak{s}_j',$$

und wegen (109) existiert für $\mathfrak{s}_j'$ eine Darstellung

$$\mathfrak{s}_j' = F_1\mathfrak{s}_1'' + \cdots + F_{j-1}\mathfrak{s}_{j-1}''. \tag{112}$$

Wegen (111) gehört $\mathfrak{s}_j'$ dem Syzygienmodul U^{k-1} an, und es ist $j - 1 < k - 1$ wegen $j < k$ erfüllt; auf (112) kann also die Induktionsannahme angewendet werden, wonach $\mathfrak{s}_1'', \ldots, \mathfrak{s}_{j-1}''$ dem Syzygienmodul U^{k-1} angehören, d. h., es existieren Vektoren $\mathfrak{w}_i$ mit

$$\mathfrak{s}_i'' = U^{k-1}\mathfrak{w}_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, j-1. \tag{113}$$

Es sei nun

$$\bar{\mathfrak{s}}_j := \mathfrak{s}_j - F_1\mathfrak{w}_1 - \cdots - F_{j-1}\mathfrak{w}_{j-1} \tag{114}$$

und

$$\bar{\mathfrak{s}}_i := \mathfrak{s}_i + F_j\mathfrak{w}_i \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, j-1, \tag{115}$$

also

$$\mathfrak{s}_j = \bar{\mathfrak{s}}_j + F_1\mathfrak{w}_1 + \cdots + F_{j-1}\mathfrak{w}_{j-1}$$

und

$$\mathfrak{s}_i = \bar{\mathfrak{s}}_i - F_j\mathfrak{w}_i \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, j-1;$$

dann geht (110) über in

$$\mathfrak{s} = F_1\bar{\mathfrak{s}}_1 + F_2\bar{\mathfrak{s}}_2 + \cdots + F_{j-1}\bar{\mathfrak{s}}_{j-1} + F_j\bar{\mathfrak{s}}_j. \tag{116}$$

Wir wollen zeigen, daß $\bar{\mathfrak{s}}_1, \bar{\mathfrak{s}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{s}}_{j-1}, \bar{\mathfrak{s}}_j$ Syzygien des Moduls $\boldsymbol{U}^k$ sind. Wir zeigen dies zunächst für $\bar{\mathfrak{s}}_j$: Es wird wegen (114)

$$\boldsymbol{U}^{k-1}\bar{\mathfrak{s}}_j = \boldsymbol{U}^{k-1}\mathfrak{s}_j - F_1\boldsymbol{U}^{k-1}\mathfrak{w}_1 - \cdots - F_{j-1}\boldsymbol{U}^{k-1}\mathfrak{w}_{j-1}$$

und wegen (111) und (113)

$$\boldsymbol{U}^{k-1}\bar{\mathfrak{s}}_j = \mathfrak{s}_j' - F_1\mathfrak{s}_1'' - \cdots - F_{j-1}\mathfrak{s}_{j-1}'',$$

und wegen (112) ist folglich

$$\boldsymbol{U}^{k-1}\bar{\mathfrak{s}}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

also $\mathfrak{s}_j$ aus dem Modul $\boldsymbol{U}^k$. Nach Voraussetzung ist auch $\mathfrak{s}$ aus $\boldsymbol{U}^k$, also auch $\mathfrak{s} - F_j\bar{\mathfrak{s}}_j$; nach (116) ist dies aber gerade

$$\mathfrak{s} - F_j\bar{\mathfrak{s}}_j = F_1\bar{\mathfrak{s}}_1 + F_2\bar{\mathfrak{s}}_2 + \cdots + F_{j-1}\bar{\mathfrak{s}}_{j-1}. \tag{117}$$

Wenden wir auf (117) die Induktionsannahme nochmals an, so ergibt sich, daß auch $\bar{\mathfrak{s}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{s}}_{j-1}$ Elemente von $\boldsymbol{U}^k$ sind. Mithin ist die Darstellung (116) von der verlangten Art, q. e. d.

Mit Hilfe von Satz 34 beweisen wir nun

Satz 35 (Hilbertscher Satz vom Abbrechen der Syzygienkette). *Jede Syzygienkette von H-Matrizen mit Elementen aus $\mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ bricht spätestens beim $(n+1)$-ten Glied ab; ist der erste Syzygienmodul ein H-Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, so gilt also*

$$L(\mathfrak{a}) \leqq n + 1. \tag{108}$$

Beweis. In Satz 34 wählen wir $k = n + 2$, $j = n + 1$ und $F_1 = x_0, \ldots, F_{n+1} = x_n$; dann ist $(F_1, \ldots, F_{n+1}) = \mathfrak{p}_T = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ ein H-Ideal der Hauptklasse $n + 1$. Für eine Syzygie $\mathfrak{s}$ aus $\boldsymbol{U}^{n+2}$ gibt es gewiß wenigstens eine Darstellung

$$\mathfrak{s} = x_0\mathfrak{s}_1 + \cdots + x_n\mathfrak{s}_{n+1}. \tag{118}$$

Wegen $n + 1 < n + 2$ ist $j < k$ erfüllt, und wir können Satz 34 anwenden, wonach wir $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_{n+1}$ so wählen können, daß sie ebenfalls Syzygien aus $\boldsymbol{U}^{n+2}$ sind. Mit ihnen könnten wir wiederum eine Aufspaltung gemäß (118) vornehmen usw. Bei jedem dieser Schritte werden die Gradzahlen der Koordinaten der Syzygien um 1 erniedrigt. Wir gelangen dadurch schließlich entweder zum Nullvektor oder zu einer Syzygie mit wenigstens einer von Null verschiedenen Konstanten als Koordinate;

das würde bedeuten, daß im Syzygienmodul U^{n+1} keine Minimalbasis vorgelegen hat im Widerspruch dazu, daß wir stets von Minimalbasen ausgingen (vgl. 5.1.).

Mithin muß $U^{n+2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ sein, q. e. d.

Durch (108) ist zunächst eine obere Schranke für $L(\mathfrak{a})$ gegeben. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß der Fall $L(\mathfrak{a}) = n + 1$ dabei tatsächlich eintreten kann.

5.17. Untere Schranken für $L(\mathfrak{a})$, Folgerungen

Wir knüpfen dazu an die Definition der Grundideale an (Kap. 4, Definition 4, (54)) Dann gilt der

Satz 36 (Satz von GRÖBNER, vgl. [2], 152.8, 9, [1], Satz 4). *Ist* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein H-Ideal der Kodimension* $r = n - d$ *mit*

$$\mathfrak{g}_{\varrho-1}(\mathfrak{a}) \supset \mathfrak{a} \quad \textit{und} \quad \mathfrak{g}_{\varrho}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}, \tag{119}$$

so ist

$$r \leqq \varrho \leqq L(\mathfrak{a}). \tag{120}$$

In Worten besagt Satz 36: Besitzt $\mathfrak{a}$ eine Primärkomponente der Dimension $\delta = n - \varrho$, so besteht die Syzygienkette von $\mathfrak{a}$ aus wenigstens ϱ Gliedern, wobei es gleichgültig ist, ob die δ-dimensionale Primärkomponente isoliert oder eingebettet ist. Damit ist eine wesentliche Verschärfung von Satz 16, (53), gegeben.

Beweis. Wir ändern den Gröbnerschen Beweis in [2] und [1] zu Anfang etwas ab. Es sei

$$\mathfrak{a} = (G_1, \ldots, G_s) := V^1_{1s}, \tag{121}$$

und die nach Voraussetzung existierende Primärkomponente der Dimension $\delta = n - \varrho$ sei $\mathfrak{q}$ mit dem zugehörigen Primideal $\mathfrak{p}$. Gemäß Kap. 4, Definition 10, (93), sei

$$\mathfrak{p} = (\mathfrak{h}, F_{\varrho+1}, \ldots, F_k) \quad \text{und} \quad \mathfrak{h} = (F_1, \ldots, F_\varrho) := U^1_{1\varrho} \tag{122}$$

eine $\mathfrak{p}$-*Schnellbasis*, d. h. $\operatorname{Dim} \mathfrak{p} = \operatorname{Dim} \mathfrak{h} = n - \varrho$; dann ist $\mathfrak{h} \subseteqq \mathfrak{p}$, und wegen Kap. 2, Satz 30, (51), gilt also

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{h} \supset \mathfrak{a}; \tag{123}$$

es gibt also eine Form G mit

$$G \notin \mathfrak{a} \tag{124}$$

und $G\mathfrak{h} \subseteqq \mathfrak{a}$, matrizenmäßig

$$GU^1_{1\varrho} = V^1_{1s} A^1_{s\varrho} \tag{125}$$

mit einer geeigneten homogenen Matrix $A^1_{s\varrho}$.

Die Syzygienkette des H-Ideals $\mathfrak{h}$ der Hauptklasse ϱ ist gemäß Satz 15 von der Bauart

$$U^1_{1\varrho},\ U^2_{\varrho\varrho_1},\ U^3_{\varrho_1\varrho_2},\ \ldots,\ U^\varrho_{\varrho 1}; \tag{126}$$

die Syzygienkette von $\mathfrak{a}$ sei

$$V^1_{1s},\ V^2_{ss_1},\ \ldots,\ V^\sigma_{s_{\sigma-1}s_\sigma},$$

und wir haben zum Beweis von (120) noch

$$\sigma \geqq \varrho \tag{127}$$

zu zeigen, was nun in mehreren Schritten geschehen soll.

Wir multiplizieren (125) von rechts mit $U^2_{\varrho\varrho_1}$. Dies gibt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = V^1_{1s} A^1_{s\varrho} U^2_{\varrho\varrho_1};$$

mithin ist $A^1_{s\varrho} U^2_{\varrho\varrho_1}$ aus $V^2_{ss_1}$; mit einer geeigneten Matrix $A^2_{s_1\varrho_1}$ ist also

$$A^1_{s\varrho} U^2_{\varrho\varrho_1} = V^2_{ss_1} A^2_{s_1\varrho_1}; \tag{128}$$

wird (128) von rechts mit $U^3_{\varrho_1\varrho_2}$ multipliziert, so folgt entsprechend

$$A^2_{s_1\varrho_1} U^3_{\varrho_1\varrho_2} = V^3_{s_1s_2} A^3_{s_2\varrho_2}, \tag{129}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A^{\sigma-2} U^{\sigma-1} = V^{\sigma-1} A^{\sigma-1}, \tag{130}$$

$$A^{\sigma-1} U^{\sigma} = V^{\sigma} A^{\sigma}, \tag{131}$$

$$A^{\sigma} U^{\sigma+1} = V^{\sigma+1} A^{\sigma+1}.$$

Zum Beweis von (127) nehmen wir nun indirekt an, es wäre $\sigma < \varrho$; dann wäre $V^{\sigma+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, aber $U^{\sigma+1} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, also

$$A^{\sigma} U^{\sigma+1} = 0 \quad \text{und} \quad U^{\sigma+1} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{132}$$

Da (126) die Syzygienkette eines H-Ideals der Hauptklasse ist, ist sie nach Satz 17 reversibel, und aus (132) folgt mithin, daß eine Matrix $B^\sigma_{s_\sigma\varrho_{\sigma-1}}$ existiert mit $A^\sigma = B^\sigma U^\sigma$;

dies in (131) eingesetzt, folgt $(A^{\sigma-1} - V^\sigma B^\sigma) U^\sigma = 0$, und wegen der Reversibilität der Syzygienkette (126) folgt weiter

$$A^{\sigma-1} - V^\sigma B^\sigma = B^{\sigma-1} U^{\sigma-1},$$

also

$$A^{\sigma-1} = V^\sigma B^\sigma + B^{\sigma-1} U^{\sigma-1}.$$

Setzen wir dies in (130) ein und berücksichtigen $V^{\sigma-1} V^\sigma = 0$, so folgt

$$A^{\sigma-2} = V^{\sigma-1} B^{\sigma-1} + B^{\sigma-2} U^{\sigma-2}.$$

Diese Schlußweise wenden wir weiterhin an und gewinnen mit (129) und (128) schließlich

$$A^2 = V^3 B^3 + B^2 U^2$$

und

$$A^1 = V^2 B^2 + B^1 U^1. \tag{133}$$

Aus (133) folgt durch linksseitige Multiplikation mit V^1

$$V^1 A^1 = V^1 V^2 B^2 + V^1 B^1 U^1 = V^1 B^1 U^1$$

wegen $V^1 V^2 = 0$ und wegen (125) also

$$G U^1_{1\varrho} = V^1_{1s} B^1_{s1} U^1_{1\varrho}. \tag{134}$$

In (134) ist $V^1_{1s} B^1_{s1}$ eine „Matrix" vom Format $(1, 1)$, also eine Form, es muß also $G = V^1_{1s} B^1_{s1}$ sein, d. h. aber $G \in \mathfrak{a}$ wegen (121), und dies ist ein Widerspruch zu (124). Also war die Annahme $\sigma < \varrho$ falsch, und es gilt (127), q. e. d.

Zur Frage der Umkehrung von Satz 36 beweisen wir zunächst

Satz 37. *Ist $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ein H-Ideal der Kodimension r, so kann von* (120) *nicht auf* (119) *geschlossen werden.*

Beweis. Wir verweisen hierzu auf die beiden letzten Beispiele von 5.15; in beiden Fällen handelte es sich um Primideale mit $n = 3$, $d = 1$, $r = \varrho = 2$, jedoch $L(\mathfrak{v}^{(2)}_{14}) = 3$ und $L(\mathfrak{v}^{(1,3,4,5)}_{17}) = 3$.

Mehr läßt sich hingegen für den Fall $\varrho = n + 1$ aussagen, was nach Kap. 4, Satz 1, (10), und Satz 29, (61), bedeutet, daß das betreffende H-Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ eine triviale Komponente besitzt. Zuvor notieren wir noch

Satz 38. *Für die Länge $L(\mathfrak{a})$ der Syzygienkette eines H-Ideals $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ gilt*

$$r \leqq \varrho \leqq L(\mathfrak{a}) \leqq n + 1. \tag{135}$$

Beweis. (135) ist eine Zusammenfassung von (108) und (120).

Wir kommen nun zum angekündigten

Satz 39. *Ist* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein H-Ideal, so gilt:*

$$\mathfrak{a} \textit{ besitzt eine triviale Komponente} \Leftrightarrow L(\mathfrak{a}) = n + 1. \tag{136}$$

Beweis. ($\Rightarrow$): Besitzt $\mathfrak{a}$ eine triviale Komponente, so ist nach Kap. 4, Satz 29, (61), $\varrho = n + 1$; aus (135) folgt mithin $L(\mathfrak{a}) = n + 1$.

($\Leftarrow$): Es sei $L(\mathfrak{a}) = n + 1$. Angenommen, $\mathfrak{a}$ besitzt keine triviale Komponente, dann existiert nach dem Dubreilschen Lemma (Kap. 3, Satz 45) eine Form F mit $\mathfrak{a}: (F) = \mathfrak{a}$, und nach Satz 13, (38), müßte $L(\mathfrak{a}, F) = n + 1 + 1 = n + 2$ sein, was nach Satz 35, (108), unmöglich ist. Mithin muß $\mathfrak{a}$ eine triviale Komponente besitzen, q. e. d.

Gleichwertig mit Satz 39 sind

Satz 40. *Für H-Ideale* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *gilt:*

$$\mathfrak{a} \textit{ besitzt keine triviale Komponente} \Leftrightarrow L(\mathfrak{a}) \leqq n. \tag{137}$$

und nach dem Dubreilschen Lemma (Kap. 3, Satz 45)

Satz 41. *Für H-Ideale* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *gilt:*

$$\textit{Es existiert wenigstens eine Form } F \textit{ mit } \mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a} \Leftrightarrow L(\mathfrak{a}) \leqq n. \tag{138}$$

Aus Satz 40 und Satz 41 folgt für ungemischte H-Ideale:

Satz 42. *Für H-Ideale* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *gilt:*

$$\operatorname{Dim} \mathfrak{a} \geqq 0 \wedge \mathfrak{a} \textit{ ungemischt} \Rightarrow L(\mathfrak{a}) \leqq n. \tag{139}$$

Ist nun $\operatorname{Dim} \mathfrak{a} = 0$, also $\operatorname{Kodim} \mathfrak{a} = n$, so gilt wegen (120) und (137):

Satz 43. *Für H-Ideale* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *gilt:*

$$\left.\begin{array}{r}\operatorname{Dim} \mathfrak{a} = 0 \wedge \mathfrak{a} \textit{ besitzt keine} \\ \textit{triviale Komponente}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \operatorname{Dim} \mathfrak{a} = 0 \wedge L(\mathfrak{a}) = n. \tag{140}$$

5.18. Zusammenstellung der Eigenschaften von $L(\mathfrak{a})$, perfekte Ideale

Wir geben eine Übersicht über die bisherigen Ergebnisse für $L(\mathfrak{a})$:

Satz 13. $L(\mathfrak{a}) = k \wedge \mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a} \Rightarrow L(\mathfrak{a}, F) = k + 1.$ (38)

Satz 15. $\mathfrak{h}$ *Ideal der Hauptklasse* $r \Rightarrow L(\mathfrak{h}) = r.$ (49)

Satz 16. $r \leqq L(\mathfrak{a}).$ (53)

Satz 22. $L(\mathfrak{a}^m) \geqq L(\mathfrak{a}).$ (61)

Satz 23. $L(\mathfrak{h}^m) = L(\mathfrak{h}) = r$.

Satz 35. $L(\mathfrak{a}) \leqq n + 1$. (108)

Satz 36. $r \leqq \varrho \leqq L(\mathfrak{a})$. (120)

Satz 38. $r \leqq \varrho \leqq L(\mathfrak{a}) \leqq n + 1$. (135)

Satz 39. $\mathfrak{a}$ *besitzt eine triviale Komponente* $\Leftrightarrow L(\mathfrak{a}) = n + 1$. (136)

Satz 40. $\mathfrak{a}$ *besitzt keine triviale Komponente* $\Leftrightarrow L(\mathfrak{a}) \leqq n$. (137)

Satz 41. F *existiert mit* $\mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a} \Leftrightarrow L(\mathfrak{a}) \leqq n$. (138)

Satz 42. $\operatorname{Dim} \mathfrak{a} \geqq 0 \wedge \mathfrak{a}$ *ungemischt* $\Rightarrow L(\mathfrak{a}) \leqq n$. (139)

Satz 43. $\left.\begin{array}{r}\operatorname{Dim} \mathfrak{a} = 0 \wedge \mathfrak{a} \textit{ besitzt keine tri-}\\ \textit{viale Komponente}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \operatorname{Dim} \mathfrak{a} = 0 \wedge L(\mathfrak{a}) = n$. (140)

Wir wollen uns nun mit denjenigen H-Idealen $\mathfrak{a}$ beschäftigen, bei denen $L(\mathfrak{a}) = r$ wird, also die Syzygienkette von kleinstmöglicher Länge ist. Zu dieser Klasse gehören nach Satz 15 die H-Ideale der Hauptklasse r und nach Satz 23 deren Potenzen, außerdem aber noch weitere Ideale, wie das Beispiel im Anschluß an Satz 20 zeigte: Dort war $\mathfrak{a} = (x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3)$, $\operatorname{Dim} \mathfrak{a} = 1$, Kodim $\mathfrak{a} = 3 - 1 = 2$, $L(\mathfrak{a}) = 2$, und dieses Ideal ist offensichtlich weder ein Hauptklassenideal noch eine Potenz eines Hauptklassenideals. Daher ist es sinnvoll, für diese Klasse von Idealen eine besondere Bezeichnung einzuführen:

Definition 14. H-Ideale $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ der Kodimension r mit $L(\mathfrak{a}) = r$ heißen *perfekte Ideale*, andernfalls $\big(L(\mathfrak{a}) \geqq r + 1\big)$ *imperfekte Ideale*.

Aus (53), (136), (140) folgt

Satz 44. *T-Ideale und nulldimensionale H-Ideale ohne triviale Komponente sind perfekt.*

Aus Satz 15, (49) und Satz 23 folgt:

Satz 45. *H-Ideale der Hauptklasse und Potenzen von H-Idealen der Hauptklasse sind perfekt.*

Ist $\mathfrak{a}$ ein gemischtes H-Ideal, so gilt in (120) also $r < \varrho \leqq L(\mathfrak{a})$; wir haben also: Jedes gemischte H-Ideal ist imperfekt. Daraus folgt als Kontraposition

Satz 46. *Jedes perfekte H-Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ist ungemischt.*

Neben den H-Idealen der Hauptklasse und deren Potenzen haben wir damit eine weitere Klasse von H-Idealen, bei der wir von vornherein wissen, daß sie die wichtige Eigenschaft der Ungemischtheit haben, so daß deren Nachprüfung durch die zumeist komplizierte Primärkomponentenzerlegung entfällt (vgl. Kap. 4, Definition 6 und (58)).

Mit Satz 45 folgen aus Satz 46 unmittelbar der Satz von Macaulay (Kap. 4, Satz 51), daß jedes H-Ideal der Hauptklasse ungemischt ist, und die entsprechende

Aussage für Potenzen von H-Idealen der Hauptklasse (Kap. 4, Satz 70), nicht jedoch die entsprechenden Sätze für P-Ideale (Kap. 4, Sätze 63 und 70). Wie in Kap. 4, Satz 59, gezeigt wurde, geht beim Übergang zum äquivalenten H-Ideal die Hauptklasseneigenschaft im allgemeinen verloren; eine Definition der Perfektheit für P-Ideale $(\mathfrak{a})$ durch die Perfektheit des äquivalenten H-Ideals $\mathfrak{a}$ bringt daher nicht viel ein, worauf schon KRULL in [2], Abschnitt 24, hinweist. Dazu machen wir noch ergänzende Bemerkungen zum zweiten Beispiel von Kapitel 4 im Anschluß an Satz 59: Wir betrachteten dort das P-Ideal (f_1, f_2) der Hauptklasse 2 aus $\mathbf{K}[x_1, x_2, x_3]$ mit

$$f_1 = x_3 - x_1 x_2, \quad f_2 = x_2 - x_1^3,$$

dessen äquivalentes H-Ideal aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ das Primideal $\mathfrak{v}_{14}^{(2)} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$ mit

$$F_1 = x_0 x_3 - x_1 x_2, \quad F_2 = x_0^2 x_2 - x_1^3, \quad F_3 = x_0 x_2^2 - x_1^2 x_3, \quad F_4 = x_1 x_3^2 - x_2^3$$

war. Hierzu hatten wir in 5.6. die Syzygienkette

$$(F_1, F_2, F_3, F_4)\begin{pmatrix} x_1^2 & x_0 x_2 & x_1 x_3 & x_2^2 \\ -x_2 & -x_3 & 0 & 0 \\ x_0 & x_1 & -x_2 & -x_3 \\ 0 & 0 & -x_0 & -x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ -x_2 \\ -x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} \tag{141}$$

berechnet. Hier ist $d = 1$, also $r = n - d = 3 - 1 = 2$, aber $L(\mathfrak{v}_{14}^{(2)}) = 3$, mithin ist das zum inhomogenen Hauptklassenideal (f_1, f_2) äquivalente H-Ideal $\mathfrak{v}_{14}^{(2)}$ nicht einmal perfekt. Da $\mathfrak{v}_{14}^{(2)}$ ein Primideal ist, haben wir überdies in Ergänzung zu Satz 37 den

Satz 37′. *Aus der Ungemischtheit eines H-Ideals $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ kann nicht auf seine Perfektheit geschlossen werden; es gibt imperfekte Primideale.*

Die hier gegebene Definition 14 des Perfektheitsbegriffes stammt von GRÖBNER aus dem Jahre 1949 (vgl. [1] und [2]) und hat sich für die Weiterentwicklung der Algebra und algebraischen Geometrie als außerordentlich fruchtbar erwiesen; vgl. die Einleitung der Dissertation von KLEINERT [1]. Der Begriff „perfektes Ideal" wurde jedoch erstmals von MACAULAY geprägt; die Macaulayschen Definitionen erfordern jedoch eine Präzisierung; hierzu und für die Äquivalenzbeweise untereinander und mit Definition 14 vgl. MATUTAT und RENSCHUCH [1]. Wenn MACAULAY dennoch — auch bei seinen Beispielen — zu richtigen Folgerungen gelangt, so deshalb, weil er durchweg Gegenbeispiele betrachtet; so wurde auch das imperfekte eindimensionale homogene Primideal $\mathfrak{v}_{14}^{(2)} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ mit der Syzygienkette (141) erstmals von MACAULAY in [2], Sect. 88, p. 98, angegeben. Von GRÖBNER wurde 1965 in [7], Abschnitt 6, dieses — bis dahin „*ziemlich vereinzelt dastehende*" (Zitat nach [7]) — imperfekte Primideal $\mathfrak{v}_{14}^{(2)}$ als Spezialfall einer ganzen Klasse imperfekter Primideale, der $\mathfrak{v}_{dm}^{(d+1)}$, gedeutet. Wir werden überdies im Anschluß an Satz 50 mit dem dritten und vierten Beispiel zwei Klassen eindimensionaler homogener Primideale in $\mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ geben, welche imperfekt sind; es ist sogar anzunehmen, daß die meisten Primideale mit rationalen allgemeinen Nullstellen imperfekt sind; hierauf werden wir im nächsten Kapitel eingehen.

Wir wollen nun eine Verallgemeinerung des für H-Ideale der Hauptklasse in Kap. 4, Satz 54, (128), gegebenen Satzes für perfekte Ideale beweisen, die auch von MACAULAY aus dessen Definitionen gefolgert wird:

Satz 47. *Ist* $\mathfrak{a} \subset \mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein perfektes* H*-Ideal der Kodimension* $r = n - d$ *und sind* $F_1, \ldots, F_d$ *irgendwelche Formen aus* $\mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *mit*

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{a} : (F_1) = \mathfrak{a}, \\ &(\mathfrak{a}, F_1) : (F_2) = (\mathfrak{a}, F_1), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &(\mathfrak{a}, F_1, \ldots, F_{d-1}) : (F_d) = (\mathfrak{a}, F_1, \ldots, F_{d-1}), \end{aligned}\right\} \tag{142}$$

so besitzt $(\mathfrak{a}, F_1, \ldots, F_{d-1}, F_d)$ *für alle derartigen* $F_1, \ldots, F_d$ *keine triviale Komponente.*

Beweis. Aus $L(\mathfrak{a}) = r$ folgt $L(\mathfrak{a}, F_1, \ldots, F_d) = r + d = n$ wegen (142) und durch d-malige Anwendung von Satz 13, (38). Wegen Kap. 4, Satz 36, (78), ist ferner $\operatorname{Dim}(\mathfrak{a}, F_1, \ldots, F_d) = d - d = 0$. Aus Satz 43, (140), in der Richtung ($\Leftarrow$) folgt dann, daß $(\mathfrak{a}, F_1, \ldots, F_d)$ keine triviale Komponente besitzt, q. e. d.

Wie im Anschluß an Satz 54 in Kapitel 4 angekündigt wurde, gilt für perfekte Ideale auch die Umkehrung von Satz 47, nämlich

Satz 48. *Ist* $\mathfrak{a} \subset \mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein* H*-Ideal der Kodimension* $r = n - d$, *sind* $F_1, \ldots, F_d$ *irgendwelche* d *Formen mit* (142) *und besitzt* $(\mathfrak{a}, F_1, \ldots, F_d)$ *für eben diese Formen* $F_1, \ldots, F_d$ *keine triviale Komponente, so ist* $\mathfrak{a}$ *perfekt.*

Beweis. Nach Kap. 4, Satz 36, (78), ist $\operatorname{Dim}(\mathfrak{a}, F_1, \ldots, F_d) = 0$ wegen (142). Nach Satz 43 in der Beweisrichtung ($\Rightarrow$) ist dann $L(\mathfrak{a}, F_1, \ldots, F_d) = n$. Ist $L(\mathfrak{a}) = k$, so ist nach Satz 13, (38), andererseits $L(\mathfrak{a}, F_1, \ldots, F_d) = k + d$, also $k + d = n$, mithin $k = n - d = r$ und somit $L(\mathfrak{a}) = r$, q. e. d.

Nach dem Dubreilschen Lemma (Kap. 3, Satz 45) ist das Nichtauftreten einer trivialen Komponente in $(\mathfrak{a}, F_1, \ldots, F_d)$ damit gleichwertig, daß eine Form F_{d+1} mit

$$(\mathfrak{a}, F_1, \ldots, F_d) : (F_{d+1}) = (\mathfrak{a}, F_1, \ldots, F_d)$$

existiert; mithin gilt

Satz 49. *Ein* H*-Ideal* $\mathfrak{a} \subset \mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *der Kodimension* $r = n - d$ *ist dann und nur dann perfekt, wenn es* $d + 1$ *Formen* $F_1, \ldots, F_d, F_{d+1}$ *gibt mit*

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{a} : (F_1) = \mathfrak{a}, \\ &(\mathfrak{a}, F_1) : (F_2) = (\mathfrak{a}, F_1), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &(\mathfrak{a}, F_1, \ldots, F_{d-1}) : (F_d) = (\mathfrak{a}, F_1, \ldots, F_{d-1}), \\ &(\mathfrak{a}, F_1, \ldots, F_{d-1}, F_d) : (F_{d+1}) = (\mathfrak{a}, F_1, \ldots, F_{d-1}, F_d). \end{aligned}\right\} \tag{143}$$

Für $F_1, \ldots, F_d, F_{d+1}$ können insbesondere geeignete Linearformen $L_1, \ldots, L_d, L_{d+1}$ gewählt werden.

Letzteres folgt aus dem verallgemeinerten Dubreilschen Lemma (Kap. 4, Satz 49, (115) bzw. (113)).

Aber selbst für spezielle Linearformen $L_1, \ldots, L_{d-1}, L_d, L_{d+1}$ ist die Nachprüfung von (142) und (143) mühevoll; lediglich für eindimensionale H-Ideale, insbesondere für eindimensionale homogene Primideale, ergibt sich daraus wegen $\mathfrak{p}:(F)=\mathfrak{p} \Leftrightarrow F \notin \mathfrak{p}$ ein brauchbares Verfahren zur Entscheidung über Perfektheit oder Imperfektheit:

Satz 50. *Ist* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein H-Ideal mit* $\operatorname{Dim} \mathfrak{a} = 1$, *also* $\operatorname{Kodim} \mathfrak{a} = n-1$, *so ist $\mathfrak{a}$ perfekt dann und nur dann, wenn eine Form F mit $\mathfrak{a}:(F) = \mathfrak{a}$ existiert und $(\mathfrak{a}, F)$ keine triviale Komponente besitzt. Ein eindimensionales homogenes Primideal $\mathfrak{p} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ist perfekt dann und nur dann, wenn für $F \notin \mathfrak{p}$ das nulldimensionale H-Ideal $(\mathfrak{p}, F)$ keine triviale Komponente besitzt.*

Beispiel 1. Wir betrachten das Primideal $\mathfrak{v}_{17}^{(1,2,4,5)}$ mit der vorgegebenen allgemeinen Nullstelle $(t_0^7, t_0^4t_1^3, t_0t_1^6, t_1^7)$ und

$$\mathfrak{v}_{17}^{(1,2,4,5)} = (x_0x_2 - x_1^2,\ x_0x_3^3 - x_1x_2^3,\ x_1x_3^3 - x_2^4);$$

dann ist $F = x_2 \notin \mathfrak{v}_{17}^{(1,2,4,5)}$, und

$$(\mathfrak{v}_{17}^{(1,2,4,5)}, x_2) = (x_2, x_1^2, x_0x_3^3, x_1x_3^3)$$

ist ein Potenzproduktideal, dessen Primärkomponentenzerlegung wir nach dem Zerlegungssatz von R. KUMMER (Kap. 2, 2.22, Satz 37, (95)) sofort angeben können:

$$(\mathfrak{v}_{17}^{(1,2,4,5)}, x_2) = (x_0, x_1, x_2) \cap (x_1^2, x_2, x_3^3);$$

da hier keine triviale Komponente auftritt, ist $\mathfrak{v}_{17}^{(1,2,4,5)}$ perfekt.

Beispiel 2. Es sei

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{v}_{17}^{(1,3,4,5)} = (x_0^2x_2 - x_1^3,\ x_0x_3^2 - x_1x_2^2,\ x_0x_2^3 - x_1^2x_3^2,\ x_1x_3^4 - x_2^5)$$

mit der allgemeinen Nullstelle $(t_0^7, t_0^5t_1^2, t_0t_1^6, t_1^7)$. Dieses Ideal hatten wir in 5.15. als zweites Beispiel betrachtet und dort die dreigliedrige Syzygienkette angegeben. In diesem Beispiel ist also $d = 1$, $r = 2$, $L(\mathfrak{a}) = 3$ und mithin $\mathfrak{v}_{17}^{(1,3,4,5)}$ imperfekt. Mit Satz 50 folgt dies so:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{v}_{17}^{(1,3,4,5)}, x_1) &= (x_1, x_0^2x_2, x_0x_3^2, x_0x_2^3, x_2^5)\\ &= (x_0, x_1, x_2^5) \cap (x_1, x_2, x_3^2) \cap (x_1, x_0^2, x_3^2, x_2^3),\end{aligned}$$

und die dritte Primärkomponente ist eine triviale Komponente, womit die Imperfektheit folgt.

Beispiel 3. Wir betrachten die Klasse von Primidealen

$$\mathfrak{v}_{1m}^* := \mathfrak{v}_{1m}^{(2,3,\ldots,m-2)} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$$

von Kap. 4, 4.27, Beispiel 1, (165), mit den allgemeinen Nullstellen $(t_0^m, t_0^{m-1}t_1, t_0t_1^{m-1}, t_1^m)$ und

$$\mathfrak{v}_{1m}^* = (x_0x_3 - x_1x_2,\ x_0^{m-2}x_2 - x_1^{m-1},\ x_0^{m-3}x_2^2 - x_1^{m-2}x_3, \ldots, x_0x_2^{m-2} - x_1^2x_3^{m-3}, x_2^{m-1} - x_1x_3^{m-2}).$$

Zwar läßt sich auch hierfür die dreigliedrige Syzygienkette angeben (vgl. RENSCHUCH [8]), doch ist es wesentlich einfacher, die Imperfektheit der Ideale $\mathfrak{v}_{1m}^*$ mit Hilfe von Satz 50 zu beweisen;

wir finden nämlich

$$\begin{aligned}(\mathfrak{v}_{1m}^{*}, x_1) &= (x_1, x_0 x_3, x_0^{m-2}x_2, x_0^{m-3}x_2^2, \ldots, x_0x_2^{m-2}, x_2^{m-1})\\ &= (x_0, x_1, x_2^{m-1}) \cap (x_1, x_2, x_3)\\ &\quad \cap (x_0^{m-2}, x_1, x_2^{m-1}, x_3, x_0^{m-3}x_2^2, \ldots, x_0x_2^{m-2}),\end{aligned}$$

und die dritte Primärkomponente ist eine triviale Komponente, womit die Imperfektheit folgt. Für $m = 4$ folgt hieraus übrigens wieder das von uns laufend untersuchte Primideal $\mathfrak{v}_{14}^{(2)}$. Für weitere Beispiele siehe Renschuch [11].

Beispiel 4. Wir betrachten die Klasse von Primidealen

$$\mathfrak{v}_{1m}^{**} := \mathfrak{v}_{1m}^{(1,3,4,\ldots,m-3,m-1)} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$$

von Kap. 4, 4.27., Beispiel 2, (166), mit den allgemeinen Nullstellen $(t_0^m, t_0^{m-2}t_1^2, t_0^2t_1^{m-2}, t_1^m)$ für $m \geqq 7$, m ungerade und

$$\begin{aligned}\mathfrak{v}_{1m}^{**} = (&x_0x_3 - x_1x_2, x_0^{m-4}x_2^2 - x_1^{m-2}, x_0^{m-5}x_2^3 - x_1^{m-3}x_3, \ldots,\\ &x_0x_2^{m-3} - x_1^3x_3^{m-5}, x_2^{m-2} - x_1^2x_3^{m-4})\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(\mathfrak{v}_{1m}^{**}, x_1) &= (x_1, x_0x_3, x_0^{m-4}x_2^2, x_0^{m-5}x_2^3, \ldots, x_0x_2^{m-3}, x_2^{m-2})\\ &= (x_0, x_1, x_2^{m-2}) \cap (x_1, x_2^2, x_3) \cap (x_0^{m-4}, x_1, x_2^{m-2}, x_3, x_0^{m-5}x_2^3, \ldots, x_0x_2^{m-3}),\end{aligned}$$

und die dritte Primärkomponente ist eine triviale Komponente; mithin sind alle Primideale $\mathfrak{v}_{dm}^{**}$ imperfekt.

Aus den Sätzen 47 bis 50 folgt

Satz 51. *Für H-Ideale* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *gilt:*

(A) *Nulldimensionale H-Ideale sind dann und nur dann perfekt, wenn sie keine triviale Komponente besitzen.*

(B) $\mathfrak{a}$ *ist perfekt* $\Leftrightarrow \begin{cases}\text{Es existiert wenigstens eine Form } F \text{ mit } \mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a}, \text{ und}\\ (\mathfrak{a}, F) \text{ ist perfekt.}\end{cases}$

(C) $\mathfrak{a}$ *ist perfekt* $\wedge\ \mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a} \Rightarrow (\mathfrak{a}, F)$ *ist ungemischt.*

Durch (A) und (B) ist die Möglichkeit einer rekursiven Definition für perfekte Ideale gegeben in Analogie zur entsprechenden Definition für H-Ideale der Hauptklasse (Kap. 4, Satz 53); dabei ist die Perfektheit von T-Idealen zusätzlich festzusetzen.

Mit (C) ist schließlich eine Verschärfung von Kap. 4, Satz 58, gegeben; dort wurde gezeigt:

$\mathfrak{a}$ ist pseudogemischt $\wedge\ \mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a} \Rightarrow (\mathfrak{a}, F)$ ist pseudogemischt.

Wie in Kapitel 4 im Anschluß an Satz 58 angekündigt wurde, sind die perfekten H-Ideale gerade solche ungemischten H-Ideale, für welche bei $\mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a}$ die Idealsumme $(\mathfrak{a}, F)$ stets ungemischt ist. Die Frage, inwieweit man umgekehrt von (C) unter Abschwächung von (B) auf die Perfektheit schließen kann, wurde von Gröbner in [1], Fußnote 24, aufgegriffen:

Für alle F mit $\mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a}$ *sei* $(\mathfrak{a}, F)$ *ungemischt; folgt daraus:* $\mathfrak{a}$ *ist perfekt?*

Diese Frage wurde von Eisenreich in [2] negativ beantwortet; wir haben also

Satz 52. *Ist* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein H-Ideal und gilt für alle Formen F mit* $\mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a}$, *daß* $(\mathfrak{a}, F)$ *ungemischt ist, so braucht* $\mathfrak{a}$ *nicht perfekt zu sein.*

Daß $\mathfrak{a}$ dann immerhin ungemischt ist, folgt aus 4.19., Satz 47.

Die Tatsache, daß es möglich war, verschiedene für H-Ideale der Hauptklasse gültige Sätze auf perfekte Ideale zu übertragen, läßt die Frage sinnvoll erscheinen, ob dies auch bei Satz 17 der Fall ist, wonach die Syzygienketten von H-Idealen der Hauptklasse reversible Syzygienketten sind (vgl. Definition 9, (34)). Hierzu gilt in der Tat der

Satz 53. *Ein H-Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ist dann und nur dann perfekt, wenn seine Syzygienkette eine reversible Syzygienkette ist.*

Wir können den von Eisenreich stammenden Beweis hier nicht führen; wir verweisen dazu auf die lehrbuchmäßige Darstellung bei Gröbner in [9], Kap. 4, § 5, IV, die Habilitationsschrift [3] von Eisenreich und die weiterführende Dissertation [1] von Kleinert. Mit diesen Arbeiten dürfte die Klärung des so wichtigen — ursprünglich bei Macaulay noch etwas nebulösen — Perfektheitsbegriffes zu einem befriedigenden Abschluß gebracht worden sein.

Durch die Arbeit von Reisner [1] erhebt sich die Frage, inwieweit die Äquivalenz dieser Perfektheitsdefinitionen auch bei Körpern K endlicher Charakteristik (vgl. MfL Bd. 3, 13.7.) gegeben ist. Wir beweisen dazu

Satz 54. *Die Länge der Syzygienkette und damit die Perfektheit oder Imperfektheit eines H-Ideals $\mathfrak{a} \subset K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ist von der Charakteristik des Körpers K abhängig.*

Beweis. Dazu rechnen wir die Syzygienkette des Beispiels von Reisner [1] aus.

Beispiel 5. Es handelt sich um das Potenzproduktideal $\mathfrak{a}_\pi \subset K[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ mit

$$\mathfrak{a}_\pi = (x_0x_1x_2,\ x_0x_1x_3,\ x_0x_2x_4,\ x_0x_3x_5,\ x_0x_4x_5,\ x_1x_2x_5,\ x_1x_3x_4,\ x_1x_4x_5,\ x_2x_3x_4,\ x_2x_3x_5)$$

und

$$\operatorname{Dim} \mathfrak{a}_\pi = 2, \quad \operatorname{Kodim} \mathfrak{a}_\pi = 3.$$

Nach Satz 21, (58), ergeben sich für den zweiten Syzygienmodul 45 Syzygien, davon 15 lineare und 30 quadratische, die aus den ersten 15 kombinierbar sind; der zweite Syzygienmodul wird mithin

$$U^2_{10,15} = \begin{pmatrix}
x_3 & x_4 & x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-x_2 & 0 & 0 & x_4 & x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -x_1 & 0 & 0 & 0 & x_3 & x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 & 0 & 0 & x_2 & x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 & 0 & -x_3 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -x_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 & x_4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -x_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & x_5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_0 & 0 & -x_2 & 0 & -x_3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 & 0 & x_5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_0 & 0 & 0 & -x_1 & 0 & 0 & 0 & -x_4
\end{pmatrix}$$

Zur Berechnung des dritten Syzygienmoduls haben wir das nichtlineare Gleichungssystem

$$U^2_{10,15} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{10,1}$$

von 10 Gleichungen in 15 Unbekannten zu lösen. Aus der ersten Gleichung folgt

$$\Phi_1 = x_4A + x_5B, \quad \Phi_2 = -x_3A + x_5C, \quad \Phi_3 = -x_3B - x_4C,$$

aus der zweiten Gleichung folgt

$$\Phi_4 = x_2A + x_5D, \quad \Phi_5 = x_2B - x_4D,$$

aus der dritten Gleichung folgt

$$\Phi_6 = -x_1A + x_5E, \quad \Phi_7 = x_1C - x_3E,$$

aus der vierten Gleichung folgt zunächst

$$\Phi_8 = x_1B + x_4J, \quad \Phi_9 = -x_1D - x_2J,$$

aus der fünften Gleichung folgt $J = -E - x_1F$ und mithin

$$\Phi_8 = x_1B - x_4E - x_1x_4F, \quad \Phi_9 = -x_1D + x_2E + x_1x_2F,$$

ferner

$$\Phi_{10} = x_2C - x_3D + x_2x_3F,$$

aus der sechsten Gleichung folgt

$$\Phi_{11} = -x_0B + x_4G, \quad \Phi_{12} = -x_0C - x_3G,$$

aus der siebenten Gleichung folgt zunächst

$$\Phi_{13} = x_0A + x_5H, \quad \Phi_{14} = x_0D - x_2H,$$

aus der achten Gleichung folgt $x_2x_3(G + H - x_0F) = 0$, also $H = x_0F - G$ und mithin

$$\Phi_{13} = x_0A + x_0x_5F - x_5G, \quad \Phi_{14} = x_0D - x_0x_2F + x_2G,$$

aus der neunten Gleichung folgt

$$\Phi_{15} = x_0E + x_0x_1F - x_1G;$$

die zehnte Gleichung ist dann identisch in den Parametern A, B, C, D, E, F, G erfüllt.

Nach A, B, C, D, E, G, F geordnet, gibt dies sieben Syzygien $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \mathfrak{s}_3, \mathfrak{s}_4, \mathfrak{s}_5, \mathfrak{s}_6, \mathfrak{s}_7$, die den dritten Syzygienmodul aufspannen:

$$U^3_{15\ 7} = (\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \mathfrak{s}_3, \mathfrak{s}_4, \mathfrak{s}_5, \mathfrak{s}_6, \mathfrak{s}_7) = \left(\begin{array}{cccccc|c}
x_4 & x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-x_3 & 0 & x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -x_3 & -x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_2 & 0 & 0 & x_5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x_2 & 0 & -x_4 & 0 & 0 & 0 \\
-x_1 & 0 & 0 & 0 & x_5 & 0 & 0 \\
0 & 0 & x_1 & 0 & -x_3 & 0 & 0 \\
0 & x_1 & 0 & 0 & -x_4 & 0 & -x_1x_4 \\
0 & 0 & 0 & -x_1 & x_2 & 0 & x_1x_2 \\
0 & 0 & x_2 & -x_3 & 0 & 0 & x_2x_3 \\
0 & -x_0 & 0 & 0 & 0 & x_4 & 0 \\
0 & 0 & -x_0 & 0 & 0 & -x_3 & 0 \\
x_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_5 & x_0x_5 \\
0 & 0 & 0 & x_0 & 0 & x_2 & -x_0x_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & x_0 & -x_1 & x_0x_1
\end{array}\right).$$

Hier erhebt sich die Frage, ob $\boldsymbol{s}_7$ von $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3, \boldsymbol{s}_4, \boldsymbol{s}_5, \boldsymbol{s}_6$ abhängt. Eine entsprechende Rechnung liefert

$$2\boldsymbol{s}_7 = x_5\boldsymbol{s}_1 - x_4\boldsymbol{s}_2 + x_3\boldsymbol{s}_3 - x_2\boldsymbol{s}_4 + x_1\boldsymbol{s}_5 - x_0\boldsymbol{s}_6. \tag{144}$$

Ist nun Char $(K) \neq 2$, so kann in (144) durch 2 dividiert werden, und $\boldsymbol{s}_7$ kann gestrichen werden. Die Syzygienkette von $\mathfrak{a}_\pi$ ist dann

$$\mathfrak{a}_\pi,\quad \boldsymbol{U}^2_{10,15},\quad \boldsymbol{U}^3_{15,6} = (\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3, \boldsymbol{s}_4, \boldsymbol{s}_5, \boldsymbol{s}_6);$$

es ist $L(\mathfrak{a}_\pi) = 3 = \text{Kodim}\ \mathfrak{a}_\pi$, und $\mathfrak{a}_\pi$ ist nach Definition 14 perfekt.

Ist hingegen Char $(K) = 2$, so muß $\boldsymbol{s}_7$ im dritten Syzygienmodul bleiben, und aus (144) ergibt sich der vierte Syzygienmodul

$$\boldsymbol{U}^4_{71} = \begin{pmatrix} x_5 \\ -x_4 \\ x_3 \\ -x_2 \\ x_1 \\ -x_0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_5 \\ -x_4 \\ x_3 \\ -x_2 \\ x_1 \\ -x_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und bei Char $(K) = 2$ ist die Syzygienkette mithin

$$\mathfrak{a}_\pi,\quad \boldsymbol{U}^2_{10,15},\ \boldsymbol{U}^3_{15,7} = (\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3, \boldsymbol{s}_4, \boldsymbol{s}_5, \boldsymbol{s}_6, \boldsymbol{s}_7),\ \boldsymbol{U}^4_{71},$$

also $L(\mathfrak{a}_\pi) = 4 > \text{Kodim}\ \mathfrak{a}_\pi$, und $\mathfrak{a}_\pi$ ist nach Definition 14 imperfekt.

Mit diesem Beispiel wird zugleich gezeigt, daß für den Satz 35 vom Abbrechen der Syzygienkette der dort gegebene Beweis bei Char $(K) \neq 0$ versagt.

6. Die Hilbertfunktion

6.1. Einleitung, Definitionen, Grundeigenschaften

Die einfachste Motivierung für die Einführung der Hilbertfunktion ist durch die beiden Beispiele am Schluß von 5.15. gegeben: Dort ergaben sich für die Differenz

$$\Delta(t; n) - V(t; \mathfrak{a}) = \binom{t + n}{n} - V(t; \mathfrak{a})$$

erheblich einfachere Ausdrücke als für die Volumfunktion $V(t; \mathfrak{a})$; in den genannten Beispielen waren dies die Polynome $4t + 1$ bzw. $7t - 2$. Bei diesen beiden Beispielen handelte es sich um Primideale mit den allgemeinen Nullstellen $(t_0^4, t_0^3 t_1, t_0 t_1^3, t_1^4)$ bzw. $(t_0^7, t_0^5 t_1^2, t_0 t_1^6, t_1^7)$, und die Gleichheit der Gradzahlen der Koordinaten der allgemeinen Nullstellen mit den Koeffizienten von t (nämlich 4 bzw. 7) läßt einen Zusammenhang erahnen, den HILBERT bereits in seiner Arbeit [1] erkannt hat. Die vielseitige Anwendbarkeit dieser Anzahlfunktion $\Delta(t; n) - V(t; \mathfrak{a})$ beruht darauf, daß sie — ähnlich wie das charakteristische Polynom in der analytischen Geometrie — eine geometrische Invariante ist. Die Auffindung derartiger Invarianten ist in verschiedenen mathematischen Theorien von grundsätzlicher Bedeutung und hat zu einer eigenen Theorie, der Invariantentheorie, geführt.

Am Schluß dieses Kapitels werden wir außerdem über die Hilbertschen Gleichungen einen Zusammenhang mit der Frage nach der Berechnung eines Primideals bei vorgegebener rationaler allgemeiner Nullstelle herstellen.

Die oft so unbequemen Studentenfragen: „*Wie kommt man darauf?*" und „*Wozu ist das gut?*" lassen sich also im Fall der Hilbertfunktion besonders überzeugend und schnell beantworten. Für den oft weitaus komplizierteren Erkenntnisprozeß in der Mathematik kann jedoch dieses Musterbeispiel keineswegs repräsentativ sein. Insbesondere dürfte es eine beglückende Ausnahme sein, wenn es — wie in der Hilbertschen Arbeit [1] von 1890 — gelingt, die mathematische Abstraktion mit der Anwendbarkeit in ein und derselben Arbeit zu koppeln. Dieser Idealzustand dürfte bei der überwiegenden Mehrheit der mathematischen Erkenntnisprozesse unerreichbar sein.

Die geniale Leistung von HILBERT wird nur wenig durch die Tatsache geschmälert, daß er einige wesentliche Beweise nicht ausgeführt hat, vor allem den für das charakteristische Polynom, der erstmals 1928 von VAN DER WAERDEN in [3] geführt wurde. Wir wollen hier im wesentlichen der Darstellung von GRÖBNER in [2] folgen und geben zunächst die

Definition 1. Ist $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ein H-Ideal, so versteht man unter der *Hilbertfunktion* $H(t; \mathfrak{a})$ die Anzahlfunktion

$$H(t; \mathfrak{a}) = \Delta(t; n) - V(t; \mathfrak{a}) = \binom{t+n}{n} - V(t; \mathfrak{a}). \tag{1}$$

Nach Kap. 5, Definition 12, ist dabei $V(t; \mathfrak{a})$ die Volumfunktion, welche als Anzahl der in $\mathfrak{a}$ enthaltenen linear unabhängigen Formen t-ten Grades definiert war. Mit $\Delta(t; n)$ bezeichneten wir die Anzahl der verschiedenen Potenzprodukte t-ten Grades in $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (Kap. 5, Definition 13) und bewiesen dafür in Kap. 5, Satz 32, (94), die in (1) benutzte *Hurwitzsche Formel*

$$\Delta(t; n) = \binom{t+n}{n}.$$

Dann gilt offenbar

Satz 1. *Für Potenzproduktideale* $\mathfrak{a}_\pi \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ist*

$$\left.\begin{aligned} V(t; \mathfrak{a}_\pi) = {} & \textit{Anzahl der in } \mathfrak{a}_\pi \textit{ enthaltenen verschiedenen Potenzprodukte} \\ & t\textit{-ten Grades in } x_0, x_1, \ldots, x_n, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} H(t; \mathfrak{a}_\pi) = {} & \textit{Anzahl der in } \mathfrak{a}_\pi \textit{ nicht enthaltenen Potenzprodukte} \\ & t\textit{-ten Grades in } x_0, x_1, \ldots, x_n. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Eine Menge von V linear unabhängigen Formen t-ten Grades geht bei Anwendung einer umkehrbaren linearen homogenen Variablentransformation von $x_0, x_1, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten aus $\mathbf{K}$ (vgl. MfL Bd. 7, 3.5.2.) in V linear unabhängige Formen t-ten Grades in den transformierten Variablen $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ über; denn im Fall einer linearen Abhängigkeit müßte diese wegen der vorausgesetzten Umkehrbarkeit der linearen homogenen Transformation auch schon für die V Ausgangsformen in $x_0, x_1, \ldots, x_n$ vorliegen. Wir haben also den

Satz 2. $V(t; \mathfrak{a})$ *und* $H(t; \mathfrak{a})$ *sind invariant gegenüber umkehrbaren linearen homogenen Transformationen der Variablen* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *mit Koeffizienten aus* $\mathbf{K}$.

Aus der projektiven Geometrie wird verständlich, daß man die vorerwähnten umkehrbaren linearen homogenen Transformationen als *projektive Transformationen* bezeichnet (vgl. MfL Bd. 7, 3.5.); Satz 2 würde damit lauten: „$V(t; \mathfrak{a})$ *und* $H(t; \mathfrak{a})$ *sind invariant gegenüber projektiven Transformationen*“, wofür man noch kürzer sagt: „$V(t; \mathfrak{a})$ *und* $H(t; \mathfrak{a})$ *sind projektive Invarianten.*“

Nun sind $V(t; \mathfrak{a})$ und $H(t; \mathfrak{a})$ Funktionen von t, und ihre Invarianz bedeutet die Invarianz aller auftretenden Koeffizienten. Wie wir gleich sehen werden, sind $V(t; \mathfrak{a})$ und $H(t; \mathfrak{a})$ Polynome in t, deren Gradzahlen also ebenfalls Invarianten sind. Satz 2 rechtfertigt die Annahme, daß diese invarianten Größen geometrische Deutungen zulassen. Daß $V(t; \mathfrak{a})$ für genügend großes t ein Polynom (höchstens vom Grad n) ist, folgt unmittelbar aus Kap. 5, Satz 33, (104). Wegen (1) folgt dieselbe Aussage für die Hilbertfunktion $H(t; \mathfrak{a})$; wir haben also nach (1) und Kap. 5, Satz 33, den

Satz 3. *Ist* $\mathfrak{a} = U^1_{1s} = (F_1, \ldots, F_s) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein H-Ideal mit der abbrechenden Syzygienkette*

$$U^1_{1s}, U^2_{ss_2}, U^3_{s_2s_3}, \ldots, U^k_{s_{k-1}s_k}$$

sowie

$$\left.\begin{array}{lll} U^1_{1s} = (F_1, \ldots, F_s) & \textit{und} & \tau_{1i} := h(F_i), \\ U^2_{ss_2} = (\Phi^2_{hi}) & \textit{und} & \tau_{2i} := h(\Phi^2_{1i}), \\ U^3_{s_2s_3} = (\Phi^3_{hi}) & \textit{und} & \tau_{3i} := h(\Phi^3_{1i}), \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ U^k_{s_{k-1}s_k} = (\Phi^k_{hi}) & \textit{und} & \tau_{ki} := h(\Phi^k_{1i}), \end{array}\right\} \qquad \text{(Kap. 5, (103))}$$

so ist

$$\left.\begin{aligned} H(t; \mathfrak{a}) = \binom{t+n}{n} &- \sum_{i=1}^{s} \binom{t+n-\tau_{1i}}{n} + \sum_{i=1}^{s_2} \binom{t+n-\tau_{11}-\tau_{2i}}{n} \\ &- \sum_{i=1}^{s_3} \binom{t+n-\tau_{11}-\tau_{21}-\tau_{3i}}{n} + - \cdots \\ &+ (-1)^k \sum_{i=1}^{s_k} \binom{t+n-\tau_{11}-\cdots-\tau_{k-1,1}-\tau_{ki}}{n}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

wobei im Fall $t + n - \tau_{11} - \cdots - \tau_{j-1,1} - \tau_{ji} < 0$ *der entsprechende Binomialkoeffizient gleich Null zu setzen ist.*

Auf diese Weise kann $H(t; \mathfrak{a})$ in endlich vielen Schritten berechnet werden.
Aus (4) folgt

Satz 4. *Die Hilbertfunktion* $H(t; \mathfrak{a})$ *ist für genügend großes* t *ein Polynom mit* $h\big(H(t; \mathfrak{a})\big) \leqq n$.

Ziel der folgenden Ausführungen ist es nun, Satz 4 zu präzisieren. Hilbert hatte in [1] bereits $h\big(H(t; \mathfrak{a})\big) = d = \operatorname{Dim} \mathfrak{a}$ angegeben, jedoch (was vielfach nicht bekannt ist) keinen generellen Beweis geführt. Dazu müssen wir nun etwas weiter ausholen und beweisen einige Grundeigenschaften für $V(t;\mathfrak{a})$ und $H(t;\mathfrak{a})$ unter Vermeidung von (4). Zunächst beweisen wir den

Satz 5. *Für die Volumfunktion* $V(t;\mathfrak{a})$ *eines H-Ideals* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *gilt*

$$V(t;\mathfrak{a}) \leqq \binom{t+n}{n}, \tag{5}$$

$$V\big(t;(0)\big) = 0, \tag{6}$$

$$V(t;\mathfrak{p}_T) = V\big(t;(x_0, x_1, \ldots, x_n)\big) = \binom{t+n}{n}, \tag{7}$$

$$V(t;\mathfrak{q}_T) = \binom{t+n}{n} \quad \textit{für genügend großes } t, \tag{8}$$

$$V(t;\mathfrak{a}) = \binom{t+n}{n} \quad \textit{für genügend großes } t \Rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{q}_T, \tag{9}$$

$$h(F) = \tau \Rightarrow V\big(t;(F)\big) = \binom{t+n-\tau}{n} \quad \textit{für} \quad t \geqq \tau, \tag{10}$$

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \Rightarrow V(t;\mathfrak{a}) = V(t;\mathfrak{b}), \tag{11}$$

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \Rightarrow V(t;\mathfrak{a}) \leqq V(t;\mathfrak{b}), \tag{12}$$

$$V(t;\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = V(t;\mathfrak{a}) + V(t;\mathfrak{b}) - V(t;\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}), \tag{13}$$

$$V(t;\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}) = V(t;\mathfrak{a}) + V(t;\mathfrak{b}) - V(t;\mathfrak{a}+\mathfrak{b}), \tag{14}$$

$$h(F) = \tau \Rightarrow V\big(t;\mathfrak{a}\cap(F)\big) = V\big(t-\tau;\mathfrak{a}:(F)\big), \tag{15}$$

$$\mathfrak{a}:(F) = \mathfrak{a} \wedge h(F) = \tau \Rightarrow V\big(t;\mathfrak{a}\cap(F)\big) = V(t-\tau;\mathfrak{a}), \tag{16}$$

$$\mathfrak{a}:(L) = \mathfrak{a} \wedge h(L) = 1 \Rightarrow V\big(t;\mathfrak{a}\cap(L)\big) = V(t-1;\mathfrak{a}), \tag{17}$$

$$h(F) = \tau \Rightarrow V\big(t;(\mathfrak{a},F)\big) = V(t;\mathfrak{a}) + \binom{t+n-\tau}{n} - V\big(t-\tau;\mathfrak{a}:(F)\big), \tag{18}$$

$$\mathfrak{a}:(F) = \mathfrak{a} \wedge h(F) = \tau \Rightarrow V\big(t;(\mathfrak{a},F)\big) = V(t;\mathfrak{a}) + \binom{t+n-\tau}{n} - V(t-\tau;\mathfrak{a}), \tag{19}$$

$$\mathfrak{a}:(L) = \mathfrak{a} \wedge h(L) = 1 \Rightarrow V\big(t;(\mathfrak{a},L)\big) = V(t;\mathfrak{a}) + \binom{t+n-1}{n} - V(t-1;\mathfrak{a}), \tag{20}$$

$$V(t;\mathfrak{a}) = V\big(t;\mathfrak{g}_n(\mathfrak{a})\big) \quad \textit{für genügend großes } t. \tag{21}$$

Beweis. (5), (6), (7), (8), (9) sind evident.

Ist $\mathfrak{a} = (F)$ ein Hauptideal, so ist eine linear unabhängige Modulbasis von $\mathfrak{M}(t; (F))$ bei $h(F) = \tau$ und $t \geqq \tau$ durch alle Formen $p_i F$ gegeben, wobei die p_i alle Potenzprodukte vom Grad $t - \tau$ in $x_0, x_1, \ldots, x_n$ durchlaufen; dies sind aber gerade $\binom{t+n-\tau}{n}$, mithin gilt (10).

(11) ist trivial, (12) ist evident; für das Auftreten des Gleichheitszeichens sei als Beispiel $\mathfrak{a}_\pi = (x_0^2, x_0 x_1, x_1^2)$, $\mathfrak{b}_\pi = (x_0, x_1)$ genannt.

Zum Beweis von (13) haben wir die Anzahl der linear unabhängigen Elemente der $\mathbf{K}$-Moduln $\mathfrak{M}(t; \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$, $\mathfrak{M}(t; \mathfrak{a})$, $\mathfrak{M}(t; \mathfrak{b})$ und $\mathfrak{M}(t; \mathfrak{a} + \mathfrak{b})$ zu bestimmen. Alle diese Moduln sind Untermoduln von $\mathfrak{M}(t; (x_0, x_1, \ldots, x_n))$; alle Elemente dieser Moduln, also auch die jeweiligen Basisformen, sind folglich von der Gestalt $k_1 p_1 + k_2 p_2 + k_3 p_3 + \cdots$, worin $p_1, p_2, p_3, \ldots$ Potenzprodukte t-ten Grades in $x_0, x_1, \ldots, x_n$ und $k_1, k_2, k_3, \ldots$ Elemente aus $\mathbf{K}$ sind. Minimalbasen der genannten Moduln bestehen also aus linear unabhängigen Formen; wir denken uns jeweils den Gaußschen Algorithmus durchgeführt; dann ist die lineare Unabhängigkeit der Basisformen mit der Verschiedenheit der ersten Potenzprodukte gleichbedeutend. Wie in der linearen Algebra (MfL Bd. 3, 4.2, Satz 2) gilt dann auch hier das *Steinitzsche Austauschverfahren*, d. h.: Irgendwelche linear unabhängigen Formen können zu einer Minimalbasis ergänzt werden. Wir können also o.B.d.A. von folgenden Basisdarstellungen ausgehen:

$$\mathfrak{M}(t; \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = (F_1, \ldots, F_s),$$

$$\mathfrak{M}(t; \mathfrak{a}) = (F_1, \ldots, F_s, G_1, \ldots, G_j)$$

und

$$\mathfrak{M}(t; \mathfrak{b}) = (F_1, \ldots, F_s, H_1, \ldots, H_k).$$

Dabei können wir dann also jede dieser drei Basisdarstellungen als Minimalbasis annehmen. Nach dem Vorhergesagten können wir weiterhin voraussetzen, daß die ersten Potenzprodukte von $F_1, \ldots, F_s$ alle verschieden sind und daß in $G_1, \ldots, G_j$ keines dieser ersten Potenzprodukte von $F_1, \ldots, F_s$ auftritt, entsprechend bei $H_1, \ldots, H_k$. Nach Kap. 1, Satz 24, (57), hat dann $\mathfrak{M}(t; \mathfrak{a} + \mathfrak{b})$ die Basis

$$\mathfrak{M}(t; \mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = (F_1, \ldots, F_s, G_1, \ldots, G_j, H_1, \ldots, H_k), \tag{22}$$

und (13) besagt gerade, daß (22) eine Minimalbasis ist, daß also keines der Elemente $F_1, \ldots, F_s, G_1, \ldots, G_j, H_1, \ldots, H_k$ gestrichen werden kann. Dies ist zunächst für $F_1, \ldots, F_s$ einzusehen, da deren erste Potenzprodukte in $G_1, \ldots, G_j, H_1, \ldots, H_k$ nicht auftreten. Eine lineare Abhängigkeit könnte also allenfalls zwischen $G_1, \ldots, G_j$, $H_1, \ldots, H_k$ existieren. Dies werde zum Widerspruch geführt: Wäre etwa

$$H_k = \lambda_1 G_1 + \cdots + \lambda_j G_j + \mu_1 H_1 + \cdots + \mu_{k-1} H_{k-1},$$

so wäre

$$F := \lambda_1 G_1 + \cdots + \lambda_j G_j = -\mu_1 H_1 - \cdots - \mu_{k-1} H_{k-1} + H_k$$

ein Element aus $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, müßte also aus $F_1, \ldots, F_s$ linear kombinierbar sein, was wegen des Nichtauftretens der ersten Potenzprodukte von $F_1, \ldots, F_s$ in $G_1, \ldots, G_f, H_1, \ldots, H_k$ unmöglich ist. Mithin ist (22) eine Minimalbasis, und es gilt (13). Durch Umstellung folgt (14) aus (13).

Nach Kap. 1, Satz 52, (146), gilt $\big(\mathfrak{a} : (F)\big) \cdot (F) = \mathfrak{a} \cap (F)$, und für $h(F) = \tau$ folgt daraus (15). (16) folgt unmittelbar aus (15), (17) entsprechend aus (16).

Zum Beweis von (18) gehen wir von (13) aus und setzen $\mathfrak{b} = (F)$; dies gibt

$$V\big(t; (\mathfrak{a}, F)\big) = V(t; \mathfrak{a}) + V\big(t; (F)\big) - V\big(t; \mathfrak{a} \cap (F)\big);$$

darin (15) und (16) eingesetzt, folgt (18). (19) und (20) folgen unmittelbar aus (18).

Zum Beweis von (21) schließen wir so: Gemäß Kap. 4, (53), (54), sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_n(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{q}_T$, worin $\mathfrak{g}_n(\mathfrak{a})$ das n-te Grundideal und $\mathfrak{q}_T$ eine triviale Komponente ist. Nach (14) ist dann

$$V(t; \mathfrak{a}) = V\big(t; \mathfrak{g}_n(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{q}_T\big) = V\big(t; \mathfrak{g}_n(\mathfrak{a})\big) + V(t; \mathfrak{q}_T) - V\big(t; \mathfrak{g}_n(\mathfrak{a}) + \mathfrak{q}_T\big).$$

Nach Kap. 3, Definition 17, ist dann mit $\mathfrak{q}_T$ auch $\mathfrak{g}_n(\mathfrak{a}) + \mathfrak{q}_T$ ein T-Ideal; nach (8) ist also für genügend großes t

$$V(t; \mathfrak{q}_T) = V\big(t; \mathfrak{g}_n(\mathfrak{a}) + \mathfrak{q}_T\big) = \binom{t + n}{n},$$

und mithin gilt (21).

Damit ist Satz 5 vollständig bewiesen.

Wir schreiben nun die Ergebnisse von Satz 5 auf die Hilbertfunktion $H(t; \mathfrak{a})$ um. Dazu benötigen wir neben (1) noch

$$H\big(t - \tau; \mathfrak{a} : (F)\big) = \binom{t + n - \tau}{n} - V\big(t - \tau; \mathfrak{a} : (F)\big),$$

$$H\big(t - 1; \mathfrak{a} : (L)\big) = \binom{t + n - 1}{n} - V\big(t - 1; \mathfrak{a} : (L)\big),$$

$$H(t - \tau; \mathfrak{a}) = \binom{t + n - \tau}{n} - V(t - \tau, \mathfrak{a}),$$

$$H(t - 1; \mathfrak{a}) = \binom{t + n - 1}{n} - V(t - 1; \mathfrak{a})$$

und gewinnen damit

Satz 6. *Für die Hilbertfunktion* $H(t; \mathfrak{a})$ *eines H-Ideals* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *gilt*

$$H(t; \mathfrak{a}) \geqq 0, \tag{23}$$

$$H\big(t; (0)\big) = \binom{t + n}{n}, \tag{24}$$

$$H(t;\mathfrak{p}_T) = H\big(t;(x_0, x_1, \ldots, x_n)\big) = 0, \tag{25}$$

$$H(t;\mathfrak{q}_T) = 0 \quad \textit{für genügend großes } t, \tag{26}$$

$$H(t;\mathfrak{a}) = 0 \quad \textit{für genügend großes } t \Rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{q}_T, \tag{27}$$

$$h(F) = \tau \Rightarrow H\big(t;(F)\big) = \binom{t+n}{n} - \binom{t+n-\tau}{n} \quad \textit{für} \quad t \geqq \tau, \tag{28}$$

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \Rightarrow H(t;\mathfrak{a}) = H(t;\mathfrak{b}), \tag{29}$$

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \Rightarrow H(t;\mathfrak{a}) \geqq H(t;\mathfrak{b}), \tag{30}$$

$$H(t;\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = H(t;\mathfrak{a}) + H(t;\mathfrak{b}) - H(t;\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}), \tag{31}$$

$$H(t;\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}) = H(t;\mathfrak{a}) + H(t;\mathfrak{b}) - H(t;\mathfrak{a}+\mathfrak{b}), \tag{32}$$

$$h(F) = \tau \Rightarrow H\big(t;\mathfrak{a}\cap(F)\big) = \binom{t+n}{n} - \binom{t+n-\tau}{n} + H\big(t-\tau;\mathfrak{a}:(F)\big), \tag{33}$$

$$\mathfrak{a}:(F) = \mathfrak{a} \wedge h(F) = \tau$$
$$\Rightarrow H\big(t;\mathfrak{a}\cap(F)\big) = \binom{t+n}{n} - \binom{t+n-\tau}{n} + H(t-\tau,\mathfrak{a}), \tag{34}$$

$$\mathfrak{a}:(L) = \mathfrak{a} \wedge h(L) = 1$$
$$\Rightarrow H\big(t;\mathfrak{a}\cap(L)\big) = \binom{t+n}{n} - \binom{t+n-1}{n} + H(t-1;\mathfrak{a})$$
$$= \binom{t+n-1}{n-1} + H(t-1;\mathfrak{a}), \tag{35}$$

$$h(F) = \tau \Rightarrow H\big(t;(\mathfrak{a},F)\big) = H(t;\mathfrak{a}) - H\big(t-\tau;\mathfrak{a}:(F)\big), \tag{36}$$

$$\mathfrak{a}:(F) = \mathfrak{a} \wedge h(F) = \tau \Rightarrow H\big(t;(\mathfrak{a},F)\big) = H(t;\mathfrak{a}) - H(t-\tau;\mathfrak{a}), \tag{37}$$

$$\mathfrak{a}:(L) = \mathfrak{a} \wedge h(L) = 1 \Rightarrow H\big(t;(\mathfrak{a},L)\big) = H(t;\mathfrak{a}) - H(t-1;\mathfrak{a}), \tag{38}$$

$$H(t;\mathfrak{a}) = H\big(t;\mathfrak{g}_n(\mathfrak{a})\big) \quad \textit{für genügend großes } t. \tag{39}$$

Wir haben in (26), (27) und (39) den Zusatz „für genügend großes t“ machen müssen, ohne eine Schranke angegeben zu haben. Im Fall von (26) und (27) ergibt sich diese Schranke durch Idealexponenten. Weiterhin werden wir jedoch in Zusammenhang mit der Darstellung (4) noch öfter die Voraussetzung „für genügend großes t“ machen müssen, wobei eine Schranke durch $t + n - \tau_{11} - \cdots - \tau_{k-1,1} - \tau_{kl} \geqq 0$ gegeben ist. Bei manchen Betrachtungen sind beide Schranken miteinander auf mitunter komplizierte Weise verzahnt, so daß über derartige Schranken keine Aussagen mehr gemacht werden können.

Wir wollen (25), (26), (27) und auch (39) noch als Sätze formulieren:

Satz 7. *Ein H-Ideal* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ist genau dann ein T-Ideal, wenn* $H(t; \mathfrak{a}) = 0$ *für genügend großes t gilt.*

Satz 8. *Für genügend großes t hat eine triviale Komponente keinen Einfluß auf den Wert der Hilbertfunktion.*

Satz 8 ist von großer beweistechnischer Bedeutung; daraufhin kann nämlich bei allen Aussagen über die Hilbertfunktion $H(t; \mathfrak{a})$ das H-Ideal als ohne triviale Komponente vorausgesetzt werden. Davon werden wir im folgenden Gebrauch machen. Wenn nun aber $\mathfrak{a}$ keine triviale Komponente hat, existiert nach Kap. 4, (113), eine Linearform L mit $\mathfrak{a} : (L) = \mathfrak{a}$. Ist Dim $\mathfrak{a} = d$, so ist dann Dim $(\mathfrak{a}, L) = d - 1$ nach Kap. 4, Satz 36, (78). Für die nachzuweisende Darstellung der Hilbertfunktion als Polynom $P(t; \mathfrak{a})$ haben wir mit (38) eine Rekursionsformel zu einem Induktionsbeweis nach der Dimension d; die im folgenden Abschnitt durchgeführten Betrachtungen für nulldimensionale H-Ideale stellen für diesen Induktionsbeweis den Induktionsanfang dar.

6.2. Die Hilbertfunktion nulldimensionaler *H*-Ideale

Wir beweisen nun in mehreren Etappen den

Satz 9. *Ist* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein H-Ideal mit* Dim $\mathfrak{a} = 0$, *so ist*

$$H(t; \mathfrak{a}) = h_0(\mathfrak{a}) \in \mathbf{N}^*. \tag{40}$$

Als erstes untersuchen wir den Spezialfall, daß $\mathfrak{a}$ ein nulldimensionales Primideal ist:

Satz 10. *Ist* $\mathfrak{p} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein primes H-Ideal mit* Dim $\mathfrak{p} = 0$, *so ist*

$$H(t; \mathfrak{p}) = h_0(\mathfrak{p}) = 1. \tag{41}$$

Beweis. Nach Kap. 4, Satz 61, (143), hat $\mathfrak{p}$ die Basisdarstellung

$$\mathfrak{p} = (y_0x_1 - y_1x_0, \ldots, y_0x_n - y_nx_0),$$

welches nach der umkehrbaren linearen Transformation $z_0 = x_0$, $z_i = y_0x_i - y_ix_0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ in $\mathfrak{p}_\pi = (z_1, \ldots, z_n) \subset \mathbf{K}[z_0, z_1, \ldots, z_n]$ übergeht. In $\mathfrak{p}_\pi$ sind alle Potenzprodukte t-ten Grades enthalten, ausgenommen $z_0{}^t$, also ist $H(t; \mathfrak{p}_\pi) = 1$, q.e.d.

Satz 11. *Ist* $\mathfrak{p} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein primes H-Ideal mit* Dim $\mathfrak{p} = 0$, *so gilt für die Primidealpotenz* $\mathfrak{p}^\varrho$

$$H(t; \mathfrak{p}^\varrho) = h_0(\mathfrak{p}^\varrho) = \binom{n + \varrho - 1}{\varrho - 1} \in \mathbf{N}^* \quad \text{für} \quad t \geqq \varrho - 1. \tag{42}$$

Beweis. Es ist nach dem vorigen Beweis $H(t;\mathfrak{p}^\varrho) = H(t;\mathfrak{p}_\pi{}^\varrho)$ mit

$$\mathfrak{p}_\pi{}^\varrho = (z_1{}^\varrho, z_1{}^{\varrho-1}z_2, \ldots, z_n{}^\varrho) \subset \mathbf{K}[z_0, z_1, \ldots, z_n].$$

In $\mathfrak{p}_\pi{}^\varrho$ sind die folgenden Potenzprodukte t-ten Grades nicht enthalten:

$$\begin{array}{l}
z_0{}^t, \\
z_0{}^{t-1}z_1, \ldots, z_0{}^{t-1}z_n, \\
z_0{}^{t-2}z_1{}^2, z_0{}^{t-2}z_1z_2, \ldots, z_0{}^{t-2}z_n{}^2, \\
z_0{}^{t-3}z_1{}^3, z_0{}^{t-3}z_1{}^2z_2, \ldots, z_0{}^{t-3}z_n{}^3, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
z_0{}^{t-\varrho+1}z_1{}^{\varrho-1}, z_0{}^{t-\varrho+1}z_1{}^{\varrho-2}z_2, \ldots, z_0{}^{t-\varrho+1}z_n{}^{\varrho-1}.
\end{array}$$

Die Anzahl der Potenzprodukte k-ten Grades in $z_1, \ldots, z_n$ ist nun gleich der Anzahl der Potenzprodukte k-ten Grades in $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$; nach der Hurwitzschen Formel Kap. 4, Satz 32, (94), ist diese gleich $\binom{k+n-1}{n-1}$; in obiger Aufstellung muß dann $t - \varrho + 1 \geqq 0$ sein; für $t \geqq \varrho - 1$ gilt also

$$\begin{aligned}
H(t;\mathfrak{p}_\pi{}^\varrho) &= 1 + n + \binom{2+n-1}{n-1} + \binom{3+n-1}{n-1} + \cdots \\
&\quad + \binom{\varrho-1+n-1}{n-1} \\
&= 1 + n + \binom{n+1}{n-1} + \binom{n+2}{n-1} + \cdots + \binom{n+\varrho-2}{n-1}.
\end{aligned}$$

Nun gilt (vgl. MfL Bd. 1, 3.5., (25)):

$$n_1 \geqq k \Rightarrow \binom{n_1}{k} = \binom{n_1}{n_1-k}, \tag{43}$$

also wird

$$H(t;\mathfrak{p}_\pi{}^\varrho) = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n+1}{2} + \binom{n+2}{3} + \cdots + \binom{n+\varrho-2}{\varrho-1},$$

und nach Kap. 5, (102), für $n = \varrho - 1$, $m = n - 1$ ist also

$$H(t;\mathfrak{p}_\pi{}^\varrho) = \binom{n+\varrho-1}{\varrho-1};$$

also gilt (42), q.e.d.

Satz 12. *Ist* $\mathfrak{q} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein* $\mathfrak{p}$*-primäres* H*-Ideal mit* $\operatorname{Dim} \mathfrak{q} = 0$, *so gilt*

$$H(t;\mathfrak{q}) = h_0(\mathfrak{q}) := \mu \in \mathbf{N}^*. \tag{44}$$

Beweis. Analog Satz 1 ist $H(t;\mathfrak{q})$ wiederum von t unabhängig; nach Kap. 2, (24), ist $\mathfrak{p}^\varrho \subseteqq \mathfrak{q} \subseteqq \mathfrak{p}$, und nach (30) und (42) folgt daraus

$$\binom{n+\varrho-1}{\varrho-1} \geqq h_0(\mathfrak{q}) \geqq 1\,,$$

also gilt (44), denn $h_0(\mathfrak{q}) \in \mathbf{N}^*$ folgt damit aus (4), q.e.d.

Nach Kap. 3, Satz 21, (58), ist $\mathrm{NG}\,(\mathfrak{q}) = \mathrm{NG}\,(\mathfrak{p})$; für $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ ist also $h_0(\mathfrak{q}) = \mu > h_0(\mathfrak{p}) = 1$. Geometrisch kann also der Punkt $\mathrm{NG}\,(\mathfrak{q})$ als μ-facher Punkt $\mathrm{NG}\,(\mathfrak{p})$ aufgefaßt werden; wir geben daher die

Definition 2. Ist $\mathfrak{q} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ein $\mathfrak{p}$-primäres H-Ideal mit $\mathrm{Dim}\,\mathfrak{q} = 0$, so heißt

$$h_0(\mathfrak{q}) = \mu \tag{45}$$

die *Multiplizität* des Primärideals $\mathfrak{q}$ bzw. des Punktes $\mathrm{NG}\,(\mathfrak{p})$.

Zum Beweis von Satz 9 benötigen wir nun noch einen Hilfssatz, nämlich

Satz 13. *Ist* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein nicht-primäres H-Ideal mit* $\mathrm{Dim}\,\mathfrak{a} = 0$ *und ohne triviale Komponente, ist ferner* $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k$ *die unverkürzbare Darstellung von* $\mathfrak{a}$ *durch größte Primärkomponenten und* $\mathfrak{b} := \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k$, *so ist*

$$\mathrm{Dim}\,(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{b}) = -1\,, \tag{46}$$

also $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{b}) = \mathfrak{q}_1 + \mathfrak{b}$ *ein T-Ideal.*

Beweis. Nach Kap. 1, (100), ist $\mathrm{Rad}\,(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{b}) = \mathrm{Rad}\,(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{b})$; nach Kap. 4, Satz 3, (12), ist

$$\mathrm{Dim}\,(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{b}) = \mathrm{Dim}\,\mathrm{Rad}\,(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{b}) = \mathrm{Dim}\,\mathrm{Rad}\,(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{b}) = \mathrm{Dim}\,(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{b})\,. \tag{47}$$

Nach Voraussetzung hat $\mathfrak{a}$ keine triviale Komponente; aus $\mathrm{Dim}\,\mathfrak{a} = 0$ folgt also $\mathrm{Dim}\,\mathfrak{q}_1 = 0$ und $\mathrm{Dim}\,\mathfrak{p}_1 = 0$ nach Kap. 4, Satz 3, (12). Ist nun $\mathfrak{b} = (G_1, \ldots, G_h)$ und wäre $\mathrm{Dim}\,(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{b}) = \mathrm{Dim}\,(\mathfrak{p}_1, G_1, \ldots, G_h) = 0$, so müßte $G_1 \in \mathfrak{p}_1, \ldots, G_h \in \mathfrak{p}_1$ sein nach Kap. 4, Satz 33, (68), im Widerspruch zur Annahme, daß $\mathfrak{a}$ nicht primär ist. Nach Kap. 4, Satz 33, (68), ist also $\mathrm{Dim}\,(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{b}) = -1$, und nach (47) gilt mithin (46), q.e.d.

Wir beweisen nun Satz 9 in der etwas detaillierteren Fassung von

Satz 14. *Ist* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein H-Ideal mit* $\mathrm{Dim}\,\mathfrak{a} = 0$ *und der unverkürzbaren Darstellung* $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k$ *ohne triviale Komponente, so ist*

$$H(t;\mathfrak{a}) = h_0(\mathfrak{q}_1) + h_0(\mathfrak{q}_2) + \cdots + h_0(\mathfrak{q}_k) \in \mathbf{N}^*. \tag{48}$$

Beweis. Wie in Satz 13 setzen wir $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k$. Nach (32) ist

$$H(t;\mathfrak{a}) = H(t;\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{b}) = H(t;\mathfrak{q}_1) + H(t;\mathfrak{b}) - H(t;\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{b})\,.$$

Wegen (46) und (26) ist $H(t; (\mathfrak{q}_1, \mathfrak{b})) = H(t; \mathfrak{q}_1 + \mathfrak{b}) = 0$, also

$$H(t; \mathfrak{a}) = H(t; \mathfrak{q}_1) + H(t; \mathfrak{b});$$

entsprechend folgt

$$H(t; \mathfrak{b}) = H(t; \mathfrak{q}_2) + H(t; \mathfrak{q}_3 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k),$$

$$H(t; \mathfrak{q}_3 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k) = H(t; \mathfrak{q}_3) + H(t; \mathfrak{q}_4 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k)$$

usw., also

$$H(t; \mathfrak{a}) = H(t; \mathfrak{q}_1) + H(t; \mathfrak{q}_2) + \cdots + H(t; \mathfrak{q}_k),$$

q.e.d.

6.3. Das charakteristische Polynom

Satz 15. *Ist* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein H-Ideal mit* Dim $\mathfrak{a} = d$, *so ist für genügend großes* t

$$H(t; \mathfrak{a}) = P(t; \mathfrak{a}) := h_0 \binom{t}{d} + h_1 \binom{t}{d-1} + h_2 \binom{t}{d-2} + \cdots + h_{d-2} \binom{t}{2} + h_{d-1} \binom{t}{1} + h_d, \tag{49}$$

also ein Polynom $P(t; \mathfrak{a})$ *in* t *vom Grad*

$$h(P(t; \mathfrak{a})) = d = \operatorname{Dim} \mathfrak{a} \tag{50}$$

mit

$$h_0(\mathfrak{a}) \in \mathbf{N}^* \tag{51}$$

und

$$h_\delta(\mathfrak{a}) \in \mathbf{Z} \quad \textit{für} \quad \delta = 1, 2, \ldots, d. \tag{52}$$

Definition 3. $P(t; \mathfrak{a})$ heißt das *charakteristische Polynom* oder *Postulationspolynom* des H-Ideals $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$.

Definition 4. Die Koeffizienten $h_0(\mathfrak{a}), h_1(\mathfrak{a}), \ldots, h_{d-1}(\mathfrak{a}), h_d(\mathfrak{a})$ des charakteristischen Polynoms $P(t; \mathfrak{a})$ heißen die *Hilbertschen Koeffizienten*. $h_0(\mathfrak{a})$ heißt die *Ordnung* oder der *Grad* des H-Ideals $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$.

Aus Satz 2 folgt

Satz 16. *Die Hilbertschen Koeffizienten sind invariant gegenüber umkehrbaren linearen homogenen Transformationen, also gegenüber projektiven Transformationen; kurz: Die Hilbertschen Koeffizienten sind projektive Invarianten.*

Zur Frage der Invarianz gegenüber allgemeineren Transformationen verweisen wir auf GRÖBNER [4, 5] und [6].

Da die Hilbertfunktion $H(t; \mathfrak{a})$ eine Anzahlfunktion ist, muß bei ihrer Darstellung als Polynom $P(t; \mathfrak{a})$ dieses Polynom für ganzzahlige t wieder ganzzahlige Funktionswerte ergeben; diese Eigenschaft ist aus der Darstellung (49) sofort abzulesen. Einfacher wäre es, wenn stets

$$P(t; \mathfrak{a}) = b_0 t^d + b_1 t^{d-1} + \cdots + b_d \quad \text{mit} \quad b_0, b_1, \ldots, b_d \text{ aus } \mathbf{Z}$$

gelten würde, was aber nicht durchweg zutrifft, beispielsweise nicht für

$$P(t; \mathfrak{a}) = 3\binom{t}{2} + \cdots.$$

Dennoch ist die Darstellung (49) nicht die einzig mögliche; oft benutzt wird auch

$$P(t; \mathfrak{a}) = k_0\binom{t+d}{d} + k_1\binom{t+d-1}{d-1} + \cdots + k_d\binom{t}{0}. \tag{53}$$

Für die Umrechnung von (49) auf (53) und umgekehrt sei auf RENSCHUCH [1], § 6, verwiesen. Die dabei benutzten Additionstheoreme für Binomialkoeffizienten werden uns jedoch im folgenden leider nicht ganz erspart bleiben, weshalb sie hier zusammengestellt werden sollen. Zunächst erinnern wir an

$$\binom{n_1+n_2}{k} = \sum_{\varkappa=0}^{k}\binom{n_1}{\varkappa}\binom{n_2}{k-\varkappa} \tag{54}$$

aus MfL Bd. 1, 3.5., (31). Aus (54) folgt für $n_2 = 1$

$$\binom{n_1+1}{k} = \binom{n_1}{k} + \binom{n_1}{k-1}, \tag{55}$$

insbesondere für $n_1 = t - 1$

$$\binom{t}{k} = \binom{t-1}{k} + \binom{t-1}{k-1}. \tag{56}$$

In ähnlicher Weise wie (54) beweist man

$$\binom{n_1-n_2}{k} = \sum_{\varkappa=0}^{k}(-1)^{\varkappa}\binom{n_1}{k-\varkappa}\binom{n_2+\varkappa-1}{\varkappa}. \tag{57}$$

Wir werden (57) insbesondere für $n_1 = t + n$ benötigen, wie aus (4) zu entnehmen ist.

An dieser Stelle sei jedoch vermerkt, daß wir hier die Binomialkoeffizienten in Verallgemeinerung von MfL Bd. 1, 3.5., (22)ff., jetzt durch

$$\binom{a}{k} := \frac{a\cdot(a-1)\cdots(a-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} \quad \text{mit} \quad a \in \mathbf{R},\ k \in \mathbf{N}^*,\ \binom{a}{0} = 1 \tag{58}$$

definieren, also insbesondere die jetzt auftretenden Möglichkeiten mit $a \in \mathbf{Z}$, $a \notin \mathbf{N}$ zulassen.

Dies hat zur Folge, daß der Fall $P(t; \mathfrak{a}) < 0$ für solche $t \in \mathbf{N}^*$, die nicht „genügend groß" sind, durchaus eintreten kann, aber auch nur für solche t; denn für diejenigen t mit $P(t; \mathfrak{a}) = H(t; \mathfrak{a})$ ist $P(t; \mathfrak{a}) \geqq 0$ wegen $H(t; \mathfrak{a}) \geqq 0$.

Hierfür geben wir ein Beispiel an. In $\mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ betrachten wir die eindimensionalen H-Ideale

$$\mathfrak{a}_m := (x_0^m, x_0^{m-1}x_1, x_0^{m-1}x_2, x_0^{m-1}x_3, x_0^{m-2}x_1^2, \ldots, x_0x_1^{m-1}, x_1^m), \quad m \in \mathbf{N}^*. \tag{59}$$

Nach Satz 1 ist $H(t; \mathfrak{a}_m)$ gleich der Anzahl der in $\mathfrak{a}_m$ nicht enthaltenen Potenzprodukte t-ten Grades in x_0, x_1, x_2, x_3; diese sind

$x_2^t, x_2^{t-1}x_3, \ldots, x_3^t,$	Anzahl: $t + 1$,
$x_1x_2^{t-1}, x_1x_2^{t-2}x_3, \ldots, x_1x_3^{t-1},$	Anzahl: t,
$x_1^2x_2^{t-2}, x_1^2x_2^{t-3}x_3, \ldots, x_1^2x_3^{t-2},$	Anzahl: $t - 1$,
....	
$x_1^{m-1}x_2^{t-m+1}, x_1^{m-1}x_2^{t-m}x_3, \ldots, x_1^{m-1}x_3^{t-m+1},$	Anzahl: $t - (m - 2)$;

für genügend großes t ist also die Gesamtanzahl

$$mt + 1 - (1 + 2 + \cdots + (m-2)) = mt + 1 - \frac{(m-1)(m-2)}{2} = mt + 1 - \binom{m-1}{2},$$

also ist

$$P(t; \mathfrak{a}_m) = mt + 1 - \binom{m-1}{2}, \tag{60}$$

und aus (60) folgt

m	$P(t; \mathfrak{a}_m)$
3	$3t$
4	$4t - 2$
5	$5t - 5$
6	$6t - 9 < 0$ für $t = 1$
7	$7t - 14 < 0$ für $t = 1$
8	$8t - 20 < 0$ für $t = 1, 2$
9	$9t - 27 < 0$ für $t = 1, 2$
10	$10t - 35 < 0$ für $t = 1, 2, 3$

usw.

Wir haben also den

Satz 17. *Ist $H(t; \mathfrak{a}) = P(t; \mathfrak{a})$ für $t \geqq T$, so kann für $t \leqq T - 1$ der Fall $P(t; \mathfrak{a}) < 0$ eintreten.*

Hieran kann man die Frage knüpfen, welche Bedingungen an ein Polynom zu stellen sind, damit es für genügend großes t das charakteristische Polynom eines

H-Ideals ist. Wir werden auf diese Frage noch kurz eingehen, führen aber erst den

Beweis von Satz 15. Wir gehen dazu von (4) aus und können mit Hilfe von (54) und (57) $H(t;\mathfrak{a})$ für $t + n - \tau_{11} - \cdots - \tau_{k-1,1} - \tau_{ki} > 0$ auf die Gestalt

$$H(t;\mathfrak{a}) = c_n\binom{t}{n} + c_{n-1}\binom{t}{n-1} + \cdots + c_{d+1}\binom{t}{d+1} + c_d\binom{t}{d} + c_{d-1}\binom{t}{d-1}$$
$$+ c_{d-2}\binom{t}{d-2} + \cdots + c_2\binom{t}{2} + c_1\binom{t}{1} + c_0 \quad \text{mit} \quad c_\nu \in \mathbf{Z} \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, \ldots, n \tag{61}$$

bringen. Für $t + n - \tau_{11} - \cdots - \tau_{k-1,1} - \tau_{ki} - 1 > 0$ ist dann auch

$$H(t-1;\mathfrak{a}) = c_n\binom{t-1}{n} + c_{n-1}\binom{t-1}{n-1} + \cdots + c_{d+1}\binom{t-1}{d+1} + c_d\binom{t-1}{d-1}$$
$$+ c_{d-1}\binom{t-1}{d-1} + c_{d-2}\binom{t-1}{d-2} + \cdots + c_2\binom{t-1}{2} + c_1\binom{t-1}{1} + c_0, \tag{62}$$

und aus (61) und (62) folgt mit (56)

$$H(t;\mathfrak{a}) - H(t-1;\mathfrak{a}) = c_n\binom{t-1}{n-1} + c_{n-1}\binom{t-1}{n-2} + \cdots + c_{d+1}\binom{t-1}{d}$$
$$+ c_d\binom{t-1}{d-1} + c_{d-1}\binom{t-1}{d-2} + c_{d-2}\binom{t-1}{d-3} + \cdots + c_2\binom{t-1}{1} + c_1. \tag{63}$$

Wir führen nun den angekündigten Beweis von Satz 15 durch vollständige Induktion nach der Dimension d. Für $d = 0$ ist Satz 15 richtig wegen Satz 14. Wir nehmen nun an, Satz 15 trifft für $(d-1)$-dimensionale H-Ideale zu, also insbesondere für $(\mathfrak{a}, L)$ mit $\mathfrak{a} : (L) = \mathfrak{a}$. Solch eine Linearform L gibt es, da wir $\mathfrak{a}$ nach Satz 8 als ohne triviale Komponente annehmen können. Nach Induktionsannahme gilt dann

$$H\big(t;(\mathfrak{a}, L)\big) = h_0^*\binom{t}{d-1} + h_1^*\binom{t}{d-2} + h_2^*\binom{t}{d-3}$$
$$+ \cdots + h_{d-2}^*\binom{t}{1} + h_{d-1}^* \quad \text{mit} \quad h_0^* \in \mathbf{N}^*. \tag{64}$$

Wegen (38) ist die linke Seite gleich $H(t;\mathfrak{a}) - H(t-1;\mathfrak{a})$; formen wir außerdem die rechte Seite gemäß (56) um, so folgt

$$H(t;\mathfrak{a}) - H(t-1;\mathfrak{a}) = h_0^*\binom{t-1}{d-1} + (h_0^* + h_1^*)\binom{t-1}{d-2} + (h_1^* + h_2^*)\binom{t-1}{d-3}$$
$$+ \cdots + (h_{d-3}^* + h_{d-2}^*)\binom{t-1}{1} + (h_{d-2}^* + h_{d-1}^*). \tag{65}$$

Koeffizientenvergleich mit (63) liefert

$$\begin{aligned}
&c_n = 0, \\
&c_{n-1} = 0, \\
&\dots\dots\dots \\
&c_{d+1} = 0, \\
&h_0 := c_d = h_0{}^* \in \mathbf{N}^*, \text{ (vgl. (64))}, \\
&h_1 := c_{d-1} = h_0{}^* + h_1{}^* \in \mathbf{Z}, \\
&h_2 := c_{d-2} = h_1{}^* + h_2{}^* \in \mathbf{Z}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&h_{d-2} := c_2 = h_{d-3}^* + h_{d-2}^* \in \mathbf{Z}, \\
&h_{d-1} := c_1 = h_{d-2}^* + h_{d-1}^* \in \mathbf{Z}, \\
&h_d := c_0 \in \mathbf{Z},
\end{aligned}$$

womit (49), (50), (51), (52) bewiesen sind.

Gröbner schließt zum Beweis von Satz 15 in [2] folgendermaßen: (65) ist jedenfalls erfüllt für

$$H(t; \mathfrak{a}) = h_0 \binom{t}{d} + h_1 \binom{t}{d-1} + \cdots + h_{d-1} \binom{t}{1} + F(t) \tag{66}$$

und

$$H(t-1; \mathfrak{a}) = h_0 \binom{t-1}{d} + h_1 \binom{t-1}{d-1} + \cdots + h_{d-1} \binom{t-1}{1} + F(t). \tag{67}$$

Wird in (66) t durch $t - 1$ ersetzt, so folgt

$$H(t-1; \mathfrak{a}) = h_0 \binom{t-1}{d} + h_1 \binom{t-1}{d-1} + \cdots + h_{d-1} \binom{t-1}{1} + F(t-1). \tag{68}$$

Vergleich von (67) und (68) liefert $F(t) = F(t-1)$; da hier nur $t \in \mathbf{N}^*$ interessieren, kann $F(t) = \text{const} := h_d \in \mathbf{Z}$ gesetzt werden.

In Gröbner [9], Kap. IV, § 1, IV, wird Satz 15 indirekt bewiesen, während van der Waerden in [3], § 4, den Induktionsbeweis mit $t = 0$ beginnt, dann aber die Gültigkeit von (51) gesondert beweisen muß.

Damit ist Satz 15 vollständig bewiesen.

Durch (50) ist die Dimension d eines H-Ideals $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ eindeutig bestimmt, so daß d mit Hilfe von (50) definiert werden könnte, was sich jedoch als nicht zweckmäßig erweist. Immerhin kann in Einzelfällen die Dimension auf diese Weise berechnet werden. Wir vermerken hierzu

Satz 18. *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zwei H-Ideale aus* $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, *so gilt*

$$P(t; \mathfrak{a}) = P(t; \mathfrak{b}) \Rightarrow \operatorname{Dim} \mathfrak{a} = \operatorname{Dim} \mathfrak{b}. \tag{69}$$

Nun ist $P(t; \mathfrak{a}) = P(t; \mathfrak{b})$ sicherlich erfüllt, wenn sogar $H(t; \mathfrak{a}) = H(t; \mathfrak{b})$ ist, und dies ist nach Satz 3 erfüllt, wenn die Gradmatrizen der Matrizen der jeweiligen Syzygienmoduln von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ übereinstimmen (vgl. 5.2., Definition 1, (9)):

Satz 19. *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zwei H-Ideale aus* $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *und stimmen bei den Syzygienketten beider H-Ideale die jeweiligen Gradmatrizen überein, so ist durchweg* $H(t; \mathfrak{a}) = H(t; \mathfrak{b})$ *und* $\operatorname{Dim} \mathfrak{a} = \operatorname{Dim} \mathfrak{b}$.

Beispiel 1. Wir betrachten wieder einmal das eindimensionale Primideal $\mathfrak{v}_{13} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ mit der allgemeinen Nullstelle $(t_0^3, t_0^2t_1, t_0t_1^2, t_1^3)$ und der Syzygienkette

$$(x_0x_2 - x_1^2, x_0x_3 - x_1x_2, x_1x_3 - x_2^2), \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ -x_1 & -x_2 \\ x_0 & x_1 \end{pmatrix}, \tag{70}$$

woraus sich nach (4) und 7.6. das charakteristische Polynom zu

$$P(t; \mathfrak{v}_{13}) = \binom{t+3}{3} - 3\binom{t+1}{3} + 2\binom{t}{3} = 3t + 1$$

ergibt.

Wir betrachten daneben in $\mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ das nicht prime Potenzproduktideal

$$\mathfrak{a}_\pi = (x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3) = (x_0, x_2) \cap (x_1, x_2) \cap (x_1, x_3)$$

mit der Syzygienkette

$$(x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3), \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ -x_0 & x_3 \\ 0 & -x_1 \end{pmatrix}, \tag{71}$$

woraus sich nach (4) das charakteristische Polynom wiederum zu

$$P(t; \mathfrak{a}_\pi) = \binom{t+3}{3} - 3\binom{t+1}{3} + 2\binom{t}{3} = 3t + 1$$

berechnen läßt. Hier stimmen die Gradmatrizen mit (70) überein.

Beispiel 2. Dazu gehen wir von dem laufend betrachteten eindimensionalen Primideal $\mathfrak{v}_{14}^{(2)} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ mit der allgemeinen Nullstelle $(t_0^4, t_0^3t_1, t_0t_1^4)$ aus, für welches wir in 5.6. die Syzygienkette berechnet hatten, die wir im Hinblick auf das nächste Beispiel etwas abändern:

$$(x_0x_3 - x_1x_2, x_0^2x_2 - x_1^3, x_0x_2^2 - x_1^2x_3, x_2^3 - x_1x_3^2), \begin{pmatrix} x_1^2 & x_0x_2 & x_1x_3 & x_2^2 \\ -x_2 & -x_3 & 0 & 0 \\ x_0 & x_1 & -x_2 & -x_3 \\ 0 & 0 & x_0 & x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ -x_2 \\ -x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}; \tag{72}$$

aus (72) folgt nach (4) und 7.6.

$$P(t; \mathfrak{v}_{14}^{(2)}) = \binom{t+3}{3} - \binom{t+1}{3} - 3\binom{t}{3} + 4\binom{t-1}{3} - \binom{t-2}{3} = 4t + 1.$$

Vergleichsobjekt ist diesmal das nicht prime Potenzproduktideal

$$\mathfrak{b}_\pi = (x_0x_3, x_0^2x_2, x_0x_2^2, x_1x_3^2) = (x_0, x_1) \cap (x_0, x_3^2) \cap (x_2, x_3) \cap (x_0^2, x_2^2, x_3)$$

mit der Syzygienkette

$$(x_0x_3, x_0^2x_2, x_0x_2^2, x_1x_3^2), \begin{pmatrix} x_0x_2 & x_2^2 & x_1x_3 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & -x_3 & 0 & -x_0 \\ 0 & 0 & -x_0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{73}$$

und denselben Gradmatrizen wie in (72), also

$$P(t; \mathfrak{b}_\pi) = \binom{t+3}{3} - \binom{t+1}{3} - 3\binom{t}{3} + 4\binom{t-1}{3} - \binom{t-2}{3} = 4t + 1.$$

Diese Beispiele werfen die Frage auf, inwieweit das charakteristische Polynom für ein H-Ideal denn nun tatsächlich charakteristisch ist. Zunächst ist diese Frage für zwei H-Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nur bei gleichem n sinnvoll; was also kann aus $P(t; \mathfrak{a}) = P(t; \mathfrak{b})$ gefolgert werden, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ beide H-Ideale aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ sind?

Die beiden soeben gerechneten Beispiele zeigen, daß daraus Strukturaussagen jedenfalls nicht zu erwarten sind, da wir in beiden Fällen ein primes und ein nicht primes H-Ideal miteinander verglichen hatten.

Man könnte jedoch hoffen, daß wenigstens bei Primidealen

$$\mathfrak{p}_1 \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n] \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_2 \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

aus $P(t; \mathfrak{p}_1) = P(t; \mathfrak{p}_2)$ auf die Gleichheit der Gradmatrizen geschlossen werden kann. Daß auch dies nicht der Fall ist, zeigt das folgende

Beispiel 3. Wir betrachten als erstes das Primideal (vgl. Kap. 4, (165))

$$\mathfrak{v}_{15}^* = \mathfrak{v}_{15}^{(2,3)} \subset \mathbf{K}\,[x_0, x_1, x_2, x_3]$$

mit der allgemeinen Nullstelle $(t_0^5, t_0^4t_1, t_0t_1^4, t_1^5)$ und der Syzygienkette

$$\left.\begin{array}{l} (x_0x_3 - x_1x_2, x_0^3x_2 - x_1^4, x_0^2x_2^2 - x_1^3x_3, x_0x_2^3 - x_1^2x_2^2, x_2^4 - x_1x_3^3), \\ \begin{pmatrix} x_1^3 & x_0^2x_2 & x_1^2x_3 & x_0x_2^2 & x_1x_3^2 & x_2^3 \\ -x_2 & -x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_0 & x_1 & -x_2 & -x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_0 & x_1 & -x_2 & -x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_0 & x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 & 0 \\ -x_2 & 0 \\ -x_1 & x_3 \\ x_1 & -x_2 \\ 0 & -x_1 \\ 0 & x_0 \end{pmatrix}; \end{array}\right\} \tag{74}$$

aus (74) und 7.6. folgt

$$P(t; \mathfrak{v}_{15}^*) = \binom{t+3}{3} - \binom{t+1}{3} - 4\binom{t-1}{3} + 6\binom{t-2}{3} - 2\binom{t-3}{3} = 5t + 1. \tag{75}$$

Daneben betrachten wir das Primideal $\mathfrak{p}_5 \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ mit der allgemeinen Nullstelle $(t_0^5, t_0^4 t_1, t_0^2 t_1^3 + t_1^5, t_0 t_1^4)$ und der Basis $(F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$ mit

$$\left.\begin{aligned}
F_1 &= x_0^2 x_2 + x_0 x_2 x_3 - x_1^3 - x_1^2 x_2 - x_1 x_3^2,\\
F_2 &= x_0^2 x_3 - x_0 x_1 x_2 + x_1^2 x_3,\\
F_3 &= x_0 x_1 x_3 + x_0 x_2 x_3 - x_1^2 x_2 - x_1 x_3^2,\\
F_4 &= x_0 x_2^2 - x_0 x_3^2 - x_1^2 x_3 - x_1 x_2 x_3,\\
F_5 &= x_1^2 x_3^2 - x_1 x_2^3 + 3 x_1 x_2 x_3^2 + x_3^4,
\end{aligned}\right\} \tag{76}$$

und der Syzygienkette

$$\left.\begin{aligned}
&(F_1, F_2, F_3, F_4, F_5),\\
&\begin{pmatrix}
x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0\\
-x_3 & x_1 & x_1 + x_2 & 0 & 0\\
-x_1 - x_2 & -x_0 - x_3 & -x_0 & x_1 x_3 + x_2 x_3 & x_2^2 - x_3^2\\
-x_0 & 0 & x_1 & -x_1 x_2 - x_3^2 & -x_1 x_3 - x_2 x_3\\
0 & 0 & 0 & -x_0 & -x_1
\end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix}
x_1 x_3 + x_2 x_3\\
-x_1 x_2 - x_2^2\\
x_1 x_2 + x_3^2\\
x_1\\
-x_0
\end{pmatrix};
\end{aligned}\right\} \tag{77}$$

aus (76) und 7.6. folgt

$$P(t; \mathfrak{p}_5) = \binom{t+3}{3} - 4\binom{t}{3} - \binom{t-1}{3} + 3\binom{t-1}{3} + 2\binom{t-2}{3} - \binom{t-3}{3} = 5t + 1. \tag{78}$$

Hier liefert (78) dasselbe Ergebnis wie (75), obwohl gegenüber (74) verschiedene Gradmatrizen vorliegen.

Wir haben also den

Satz 20. *Sind $\mathfrak{p}_1 \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ und $\mathfrak{p}_2 \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ zwei eindimensionale Primideale mit $P(t; \mathfrak{p}_1) = P(t; \mathfrak{p}_2)$, so können die Gradvektoren und damit die Gradmatrizen der Syzygienmatrizen verschieden sein.*

Die Frage, ob bei $P(t; \mathfrak{p}_1) = P(t; \mathfrak{p}_2)$ von der Gleichheit der Gradvektoren auf die Gleichheit der weiteren Gradmatrizen geschlossen werden kann, haben wir noch nicht entscheiden können.

Uneingeschränkt gilt dies natürlich keineswegs; man betrachte dazu das naive Beispiel

$$(x_0 x_1, x_0 x_2)\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (x_0^2, x_1^2)\begin{pmatrix} x_1^2 \\ -x_0^2 \end{pmatrix};$$

hier ist allerdings auch $P(t; \mathfrak{a}) = P(t; \mathfrak{b})$ im Gegensatz zu 8.1.5. und 8.1.6. nicht erfüllt.

Könnte man — zumindest für eindimensionale Primideale aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ — von $P(t; \mathfrak{p}_1) = P(t; \mathfrak{p}_2)$ und der Gleichheit der Gradvektoren auf die Gleichheit der jeweils folgenden Gradmatrizen schließen, so wäre es wünschenswert, die Voraussetzung der Gleichheit der Gradvektoren abschwächen zu können, etwa durch die Forderung, daß für $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ die Anzahl der linear unabhängigen Basisformen vom Minimalgrad m_0 übereinstimmt. Zur Erläuterung greifen wir noch einmal auf das letzte Beispiel zurück. Die Zusammenfassung der Terme in (78) liefert

$$5t + 1 = \binom{t+3}{3} - 4\binom{t}{3} + 2\binom{t-1}{3} + 2\binom{t-2}{3} - \binom{t-3}{3}; \tag{79}$$

zur Nachprüfung dieser Rechnungen durch den Leser sei auf 7.6. verwiesen. Die einfachste Realisierung von (79) wäre dann nicht die durch Gradmatrizen, wie sie zu (77) gehören, sondern die durch

$$(3, 3, 3, 3), \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bis jetzt sind dem Verfasser jedoch eindimensionale Primideale aus $\mathsf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$, bei denen die Minimalbasis aus genau vier kubischen Basisformen besteht, nicht bekannt; auch bei der oft zitierten *Vahlenschen Kurve* kommt im zugehörigen H-Ideal noch eine Basisform vierten Grades hinzu, vgl. Beispiel 8.5.6. Die Richtigkeit der hier geäußerten Spekulation bezüglich der Anzahlgleichheit der Basisformen vom Minimalgrad m_0 würde dann bedeuten, daß es eindimensionale Primideale aus $\mathsf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ mit Minimalbasen aus vier kubischen Formen nicht geben kann, sofern $P(t; \mathfrak{p}) = 5t + 1$ bekannt ist, sondern daß stets noch eine Basisform vierten Grades hinzukommen muß. Insbesondere könnte man also das Ideal (76) an die Stelle des komplizierteren *Vahlenschen Ideals* setzen (vgl. Renschuch [15]).

Wir wollen noch bemerken, daß die Berechnung von $P(t; \mathfrak{a})$ in den meisten Fällen nur über (4) möglich ist; für H-Ideale der Hauptklasse hat Gröbner in [2], 142.4, geschlossene Formeln für die Hilbertschen Koeffizienten ohne Benutzung von (4) angeben können.

Gleichfalls ohne Benutzung von (4) hat R. Kummer in Kummer und Renschuch [2], § 7, für Potenzprodukte $\mathfrak{a}_\pi$ eine geschlossene Formel für $H(t; \mathfrak{a}_\pi)$ (Satz 23) angegeben, welche sich auch aus (4) durch Zusammenfassung gleicher Binomialkoeffizienten (analog dem Schluß von (78) auf (79)) ergibt. Jedoch kann $P(t; \mathfrak{a}_\pi)$ durch Abzählung der nicht in $\mathfrak{a}_\pi$ enthaltenen Potenzprodukte t-ten Grades zumeist schneller bestimmt werden.

Wir wollen die bereits angeschnittene Frage aufgreifen, wann ein Polynom in einer Variablen t charakteristisches Polynom $P(t; \mathfrak{a})$ von H-Idealen $\mathfrak{a} \subset \mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ sein kann. Hierzu sei auf Untersuchungen von Macaulay verwiesen, die durch Sperner in [1] kürzer und verständlicher dargestellt worden sind. Ausgangspunkt dieser Überlegungen ist die im Kap. 5, Satz 11, gegebene Beziehung

$$\mathfrak{M}(t + 1; \mathfrak{a}_\pi(t)) \subseteqq \mathfrak{M}(t + 1; \mathfrak{a}_\pi(t + 1)), \qquad \text{(Kap. 5, (35))}$$

aus welcher die *Macaulay-Spernersche Ungleichung*

$$V(t + 1; \mathfrak{a}_\pi(t)) \leqq V(t + 1; \mathfrak{a}) \tag{80}$$

folgt. Dabei ist $\mathfrak{a}_\pi(t)$ bezüglich $\mathfrak{a}$ das zugeordnete Potenzproduktideal t-ten Grades (vgl. Kap. 5, Definition 10). Der Hauptsatz von Macaulay und Sperner besagt nun, daß in (Kap. 5, (35)) und damit in (80) für „genügend großes t" das Gleichheitszeichen gilt; wir haben also

Satz 21. *Für genügend großes t, also für $t \geqq T$, ist das charakteristische Polynom eines H-Ideals $\mathfrak{a} \subset \mathsf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ gleich dem des zugeordneten Potenzprodukt-*

ideals $\mathfrak{a}_\pi(T)$:

$$P(t;\mathfrak{a}) = P(t;\mathfrak{a}_\pi(T)). \tag{81}$$

Daß in (80) für $t \geqq T$ das Gleichheitszeichen und damit (81) gilt, wurde von GÜNTER in [1] ohne Bezug auf die in Frage kommende Arbeit von MACAULAY aus dem Jahre 1927 bewiesen. Da die Güntersche Arbeit auf eine Vorlesung aus dem Jahre 1904 zurückgeht (vgl. die Biographie in GÜNTER [2]) und diesbezügliche (dem Verfasser nicht zugängliche) Publikationen aus den Jahren 1913 und 1914 in GÜNTER [1] zitiert werden, ist die Prioritätsfrage offen. Jedenfalls wird MACAULAY in GÜNTER [1] nicht zitiert, und die Arbeiten von GÜNTER waren wiederum SPERNER nicht bekannt (nach einer überbrachten mündlichen Mitteilung).

Im zweiten Beispiel haben wir den besonders günstigen Fall, daß bereits das von den ersten Potenzprodukten der Minimalbasis erzeugte Potenzproduktideal das charakteristische Polynom $P(t;\mathfrak{v}_{14}^{(2)})$ liefert; im ersten Beispiel ist es ein anderes Potenzproduktideal mit gleichen Gradmatrizen, welches zu $P(t;\mathfrak{v}_{13})$ führt. Diese Beispiele sind jedoch insofern nicht repräsentativ, als T im allgemeinen größer als der Maximalgrad M der Basisformen sein wird; die Schranke $T = 2M$ läßt sich vermuten, konnte aber noch nicht bewiesen werden.

Für noch größeres t, also $t > T^* \geqq T$, existiert dann — wie von MACAULAY und SPERNER bewiesen wird — ein Potenzproduktideal $\mathfrak{b}_\pi^*$, dessen Basis aus den ersten k Potenzprodukten T^*-ten Grades in $x_0, x_1, \ldots, x_n$ bei lexikographischer Anordnung besteht, also $\mathfrak{b}_\pi^* = (x_0^{T^*}, x_0^{T^*-1}x_1, \ldots)$ mit

$$P(t;\mathfrak{a}) = P(t;\mathfrak{b}_\pi^*) = P(t;\mathfrak{a}_\pi(T)).$$

T^* kann jedoch erheblich größer als T sein. Immerhin kann auf diese Weise jedes charakteristische Polynom als Hilbertfunktion eines Potenzproduktideals $\mathfrak{b}_\pi^*$ gewonnen werden, woraus MACAULAY und SPERNER hinreichende Bedingungen dafür ableiten, daß ein Polynom Volumfunktion eines H-Ideals ist; nach Definition der Hilbertfunktion und des charakteristischen Polynoms induziert dies entsprechende hinreichende Bedingungen dafür, daß ein Polynom das charakteristische Polynom eines H-Ideals ist.

Hieraus und auch schon aus Satz 21 folgt, daß es beispielsweise genügen würde, Satz 15 für Potenzproduktideale zu beweisen, was aber beweistechnisch keine Erleichterung liefert. Auch gehen bei diesem Prozeß des Überganges von $\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{a}_\pi(t)$ Struktureigenschaften verloren; so war im zweiten Beispiel $\mathfrak{v}_{14}^{(2)}$ ein Primideal, nicht aber $\mathfrak{b}_\pi$.

Schließlich verweisen wir darauf, daß bei dem am Schluß von 5.18. gegebenen Beispiel die Hilbertfunktion und das charakteristische Polynom bei Charakteristik 2 sich nicht ändern, da sich in Kap. 5, (144), die durch die hinzukommenden Syzygien entstehenden Glieder weggehoben haben.

6.4. Eigenschaften der Ordnung $h_0(\mathfrak{a})$

In diesem Abschnitt werden wir Ergebnisse von 6.2. übertragen und überdies zu ersten geometrischen Deutungen gelangen. Dazu benötigen wir als erstes den

Satz 22. *Ist* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein d-dimensionales H-Ideal mit dem charakteristischen Polynom*

$$P(t; \mathfrak{a}) = h_0 \binom{t}{d} + h_1 \binom{t}{d-1} + \cdots + h_{d-1} \binom{t}{1} + h_d \tag{49}$$

und sind $\mathfrak{g}_r(\mathfrak{a}), \mathfrak{g}_{r+1}(\mathfrak{a}), \ldots, \mathfrak{g}_n(\mathfrak{a})$ *die Grundideale von* $\mathfrak{a}$ *gemäß* Kap. 4, (53) *und* (54), *so gilt*

$$h_0(\mathfrak{a}) = h_0(\mathfrak{g}_n(\mathfrak{a})) = h_0(\mathfrak{g}_{n-1}(\mathfrak{a})) = \cdots = h_0(\mathfrak{g}_{r+1}(\mathfrak{a})) = h_0(\mathfrak{g}_r(\mathfrak{a})), \tag{82}$$

$$h_1(\mathfrak{a}) = h_1(\mathfrak{g}_n(\mathfrak{a})) = h_1(\mathfrak{g}_{n-1}(\mathfrak{a})) = \cdots = h_1(\mathfrak{g}_{r+1}(\mathfrak{a})), \tag{83}$$

$$\left.\begin{array}{l} h_2(\mathfrak{a}) = h_2(\mathfrak{g}_n(\mathfrak{a})) = h_2(\mathfrak{g}_{n-1}(\mathfrak{a})) = \cdots = h_2(\mathfrak{g}_{r+2}(\mathfrak{a})), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ h_i(\mathfrak{a}) = h_i(\mathfrak{g}_n(\mathfrak{a})) = h_i(\mathfrak{g}_{n-1}(\mathfrak{a})) = \cdots = h_i(\mathfrak{g}_{r+i}(\mathfrak{a})), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ h_{d-1}(\mathfrak{a}) = h_{d-1}(\mathfrak{g}_n(\mathfrak{a})) = h_{d-1}(\mathfrak{g}_{n-1}(\mathfrak{a})), \\ h_d(\mathfrak{a}) = h_d(\mathfrak{g}_n(\mathfrak{a})). \end{array}\right\} \tag{84}$$

Beweis. Wir führen den Beweis gleich für $h_i(\mathfrak{a})$. Aus Kap. 4, (53) und Definition 4, (54), folgt

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_{r+i}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{b}_{r+i+1} \tag{85}$$

mit

$$\mathfrak{b}_{r+i+1} := \mathfrak{q}_{r+i+1,1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{ns_n}, \tag{86}$$

also

$$\operatorname{Dim} \mathfrak{g}_{r+i}(\mathfrak{a}) = \operatorname{Dim} \mathfrak{a} = d, \tag{87}$$

sowie

$$\operatorname{Dim} \mathfrak{b}_{r+i+1} \leqq d - i + 1 \tag{88}$$

und auch

$$\operatorname{Dim} (\mathfrak{g}_{r+i}(\mathfrak{a}), \mathfrak{b}_{r+i+1}) = \operatorname{Dim} (\mathfrak{g}_{r+i}(\mathfrak{a}) + \mathfrak{b}_{r+i+1}) \leqq d - i - 1. \tag{89}$$

Nach (32) ist nun wegen (85)

$$P(t; \mathfrak{a}) = P(t; \mathfrak{g}_{r+i}(\mathfrak{a})) + P(t; \mathfrak{b}_{r+i+1}) - P(t; \mathfrak{g}_{r+i}(\mathfrak{a}) + \mathfrak{b}_{r+i+1}). \tag{90}$$

Aus (87), (88), (89) folgen für die charakteristischen Polynome

$$P(t;\mathfrak{g}_{r+i}(\mathfrak{a})) = a_0\binom{t}{d} + \cdots + a_i\binom{t}{d-i} + a_{i+1}\binom{t}{d-i-1} + \cdots + a_{d-1}\binom{t}{1} + a_d,$$

$$P(t;\mathfrak{b}_{r+i+1}) = b_{i+1}\binom{t}{d-i-1} + \cdots + b_{d-1}\binom{t}{1} + b_d,$$

$$P(t;\mathfrak{g}_{r+i}(\mathfrak{a}) + \mathfrak{b}_{r+i+1}) = c_{i+1}\binom{t}{d-i-1} + \cdots + c_{d-1}\binom{t}{1} + c_d.$$

Setzen wir dies in (90) ein, so folgt die Behauptung durch Koeffizientenvergleich mit (49).

Für eine weitere Aussage über $h_0(\mathfrak{a})$ benötigen wir noch in Analogie zu Satz 13 als Hilfssatz den

Satz 23. *Sind* $\mathfrak{q} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *und* $\mathfrak{c} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *zwei d-dimensionale H-Ideale und ist* $\mathfrak{q}$ *ein* $\mathfrak{p}$*-primäres H-Ideal mit*

$$\mathfrak{c} \not\subseteq \mathfrak{p}, \tag{91}$$

so ist

$$\operatorname{Dim}(\mathfrak{q}, \mathfrak{c}) \leqq d - 1. \tag{92}$$

Beweis. Nach (47) ist $\operatorname{Dim}(\mathfrak{q}, \mathfrak{c}) = \operatorname{Dim}(\mathfrak{p}, \mathfrak{c})$, und wegen $\mathfrak{c} \not\subseteq \mathfrak{p}$ ist $\operatorname{Dim}(\mathfrak{p}, \mathfrak{c}) \leqq d - 1$ nach Kap. 4, Satz 33, (68), und Kap. 4, Satz 35, (77).

Wir benötigen dies zum Beweis von

Satz 24. *Ist* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein d-dimensionales H-Ideal mit* $d = n - r$ *und*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_{r1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{rs_r} \cap \mathfrak{q}_{r+1,1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{ns_n} \cap \mathfrak{q}_T \tag{93}$$

und $\operatorname{Dim} \mathfrak{q}_{ij} = n - i$, *so ist*

$$h_0(\mathfrak{a}) = h_0(\mathfrak{g}_r(\mathfrak{a})) = h_0(\mathfrak{q}_{r1}) + h_0(\mathfrak{q}_{r2}) + \cdots + h_0(\mathfrak{q}_{rs_r}). \tag{94}$$

Beweis. Nach Kap. 4, Definition 4, (54), ist

$$\mathfrak{g}_r(\mathfrak{a}) = \mathfrak{q}_{r1} \cap \mathfrak{c}_{r2} \tag{95}$$

mit

$$\mathfrak{c}_{rj} := \mathfrak{q}_{rj} \cap \mathfrak{q}_{r,j+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{rs_r} \qquad (j = 2, \ldots, s_r), \tag{96}$$

also

$$\operatorname{Dim} \mathfrak{q}_{r1} = \operatorname{Dim} \mathfrak{c}_{rj} = d = n - r \tag{97}$$

und bei $\operatorname{Rad} \mathfrak{q}_{r1} = \mathfrak{p}_{r1}$ ferner

$$\mathfrak{c}_{r2} \not\subseteq \mathfrak{p}_{r1}; \tag{98}$$

mithin ist (91) erfüllt, und nach (92) gilt

$$\operatorname{Dim}(\mathfrak{q}_{r1}, \mathfrak{c}_{r2}) = \operatorname{Dim}(\mathfrak{q}_{r1} + \mathfrak{c}_{r2}) \leqq d - 1. \tag{99}$$

Analog (90) gilt wegen (95)

$$P\big(t; \mathfrak{g}_r(\mathfrak{a})\big) = P(t; \mathfrak{q}_{r1}) + P(t; \mathfrak{c}_{r2}) - P(t; \mathfrak{q}_{r1} + \mathfrak{c}_{r2}),$$

und hieraus folgt wegen (97) und (99)

$$h_0\big(\mathfrak{g}_r(\mathfrak{a})\big) = h_0(\mathfrak{q}_{r1}) + h_0(\mathfrak{c}_{r2}). \tag{100}$$

Analog folgt

$$h_0(\mathfrak{c}_{r2}) = h_0(\mathfrak{q}_{r2}) + h_0(\mathfrak{c}_{r3}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$h_0(\mathfrak{c}_{r,j-1}) = h_0(\mathfrak{q}_{r,j-1}) + h_0(\mathfrak{c}_{rj}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$h_0(\mathfrak{c}_{r,s_r-1}) = h_0(\mathfrak{q}_{r,s_r-1}) + h_0(\mathfrak{q}_{rs_r});$$

dies in (100) eingesetzt, folgt (94) unter Beachtung von (82).

Eine Verallgemeinerung von (94) für $h_i(\mathfrak{a})$ wurde von W. Vogel [1], S. 55, Satz 5, Folgerung 1 und Folgerung 2, gegeben.

Mit (94) haben wir die für nulldimensionale H-Ideale gültige Beziehung (48) übertragen können. Wir wollen nun in sinnvoller Weise ein Analogon für (44) geben. Wir hatten nach (41) $h_0(\mathfrak{p}) = 1$ für nulldimensionale Primideale $\mathfrak{p}$; wird (44) damit multipliziert, so folgt

$$h_0(\mathfrak{q}) = \mu \cdot h_0(\mathfrak{p}) \quad \text{mit} \quad \mu \in \mathbf{N}^*. \tag{101}$$

Nun ist (101) auch für $\mathfrak{p}$-primäre H-Ideale $\mathfrak{q} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ mit $\operatorname{Dim} \mathfrak{q} \geqq 1$ sinnvoll. Zunächst folgt aus (30) $P(t; \mathfrak{q}) \geqq P(t; \mathfrak{p})$ und daraus $h_0(\mathfrak{q}) \geqq h_0(\mathfrak{p})$ (vgl. etwa MfL Bd. 4, 2.3., (10) und (15)). Wir haben also $h_0(\mathfrak{q}) = \mu \cdot h_0(\mathfrak{p})$ mit $h_0(\mathfrak{q}) \in \mathbf{N}^*$ und $h_0(\mathfrak{p}) \in \mathbf{N}^*$, können aber $\mu \in \mathbf{N}^*$ mit unseren Mitteln nicht beweisen, auch nicht $\mu \geqq 2$ im Fall $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$; diese Behauptungen folgen mit Hilfe der Theorie der Kompositionsreihen (vgl. etwa Gröbner [2], 143.5). Wir vermerken dennoch den mithin nur teilweise bewiesenen

Satz 25. *Ist $\mathfrak{q} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ ein primäres H-Ideal mit dem zugehörigen Primideal $\mathfrak{p} = \operatorname{Rad} \mathfrak{q}$, so gilt*

$$h_0(\mathfrak{q}) = \mu \cdot h_0(\mathfrak{p}) \quad \textit{mit} \quad \mu \in \mathbf{N}^* \tag{101}$$

und $\mu = 1$ genau dann, wenn $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ ist.

Definition 5. Ist $\mathfrak{q} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ein $\mathfrak{p}$-primäres H-Ideal, so heißt

$$\mu := \frac{h_0(\mathfrak{q})}{h_0(\mathfrak{p})} \in \mathbf{N}^* \tag{102}$$

die *Multiplizität* des Primärideals $\mathfrak{q}$.

Setzen wir (101) in (94) ein, so erhalten wir

Satz 26. *Ist* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein d-dimensionales H-Ideal mit* $d = n - r$ *und* (93), *so ist*

$$h_0(\mathfrak{a}) = \mu_1 h_0(\mathfrak{p}_{r1}) + \mu_2 h_0(\mathfrak{p}_{r2}) + \cdots + \mu_{s_r} h_0(\mathfrak{p}_{r s_r}). \tag{103}$$

Wir wollen nun $h_0(\mathfrak{a})$ für einige Spezialfälle berechnen. Zunächst gilt

Satz 27. *Ist* $\mathfrak{a} = (F) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein homogenes Hauptideal und* $h(F) = \tau$, *so ist*

$$h_0\big((F)\big) = h(F) = \tau. \tag{104}$$

Dadurch erst ist die in Definition 4 neben der Bezeichnung „Ordnung" gegebene Bezeichnung „Grad" für $h_0(\mathfrak{a})$ ebenso gerechtfertigt wie die Einführung der Bezeichnung $h(F)$ bzw. $h(f)$ für den Grad von Formen bzw. Polynomen in MfL Bd. 3; vgl. auch MfL Bd. 7, 2.8.3.

Beweis von Satz 27. Wir gehen dazu aus von (28) und haben

$$P\big(t; (F)\big) = \binom{t+n}{n} - \binom{t+n-\tau}{n} \quad \text{für} \quad t \geqq \tau. \tag{105}$$

Um aus (105) die Ordnung $h_0\big((F)\big)$ zu bestimmen, setzen wir in (57) $n_1 = t + n$, $n_2 = \tau$, $k = n$; dies gibt

$$\binom{t+n-\tau}{n} = \binom{t+n}{n} - \tau\binom{t+n}{n-1} + \binom{\tau+1}{2}\binom{t+n}{n-2} + \cdots;$$

setzen wir in (54) $n_1 = n$, $n_2 = t$, $k = n - 1$, so folgt

$$\binom{t+n}{n-1} = \binom{t}{n-1} + \binom{n}{1}\binom{t}{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1};$$

mithin wird

$$\binom{t+n}{n} - \binom{t+n-\tau}{n} = \tau\binom{t}{n-1} + h_1\binom{t}{n-2} + \cdots + h_{n-1},$$

q.e.d.

Damit haben wir zugleich den Satz 39, (83), aus Kapitel 4 bestätigt, wonach jedes Hauptideal die Dimension $n - 1$ hat.

Wir beweisen nun (vgl. Renschuch [1], Satz 14)

Satz 28. *Ist* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein H-Ideal,* Dim $\mathfrak{a} = d$, $d \geqq 1$, F *eine Form mit* $F \in \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ $h(F) = \tau$ *und* Dim $(\mathfrak{a}, F) = d - 1$, *so gilt*

$$h_0(\mathfrak{a}, F) = \tau \cdot h_0(\mathfrak{a}) + h_1(\mathfrak{a}) - h_1\big(\mathfrak{a} : (F)\big). \tag{106}$$

Beweis. Ist Dim $(\mathfrak{a}, F) = d - 1$, $r = n - d$, so ist nach Kap. 4, Satz 35, (77),

$$\mathfrak{g}_r(\mathfrak{a}) : (F) = \mathfrak{g}_r(\mathfrak{a}). \tag{107}$$

Nun ist nach Kap. 1, (159),

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} : (F) &= \big(\mathfrak{q}_{r1} : (F)\big) \cap \cdots \cap \big(\mathfrak{q}_{rs_r} : (F)\big) \cap \big(\mathfrak{q}_{r+1,1} : (F)\big) \cap \cdots \cap \big(\mathfrak{q}_{ns_n} : (F)\big) \cap \mathfrak{q}_T{}^* \\ &= \mathfrak{q}_{r1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{rs_r} \cap \big(\mathfrak{q}_{r+1,1} : (F)\big) \cap \cdots \cap \big(\mathfrak{q}_{ns_n} : (F)\big) \cap \mathfrak{q}_T{}^*; \end{aligned}$$

hieraus folgt

$$\text{Dim}\,\big(\mathfrak{a} : (F)\big) = d \tag{108}$$

und

$$\mathfrak{g}_r\big(\mathfrak{a} : (F)\big) = \mathfrak{g}_r(\mathfrak{a}) = \mathfrak{g}_r(\mathfrak{a}) : (F). \tag{109}$$

Jetzt greifen wir auf (36) zurück und haben also

$$P\big(t; (\mathfrak{a}, F)\big) = P(t; \mathfrak{a}) - P\big(t - \tau; \mathfrak{a} : (F)\big). \tag{110}$$

Wir setzen nun gemäß (49) und wegen (108), (109), (82)

$$P(t; \mathfrak{a}) = h_0(\mathfrak{a}) \binom{t}{d} + h_1(\mathfrak{a}) \binom{t}{d-1} + \cdots + h_d(\mathfrak{a}),$$

$$P\big(t; \mathfrak{a} : (F)\big) = h_0(\mathfrak{a}) \binom{t - \tau}{d} + h_1\big(\mathfrak{a} : (F)\big) \binom{t}{d-1} + \cdots + h_d\big(\mathfrak{a} : (F)\big)$$

und erhalten (106) ähnlich wie beim Beweis von Satz 27 durch Benutzung von (57) für $n_1 = t$, $n_2 = \tau$, $k = d$.

Aus den Überlegungen im Anschluß an (107) folgt entsprechend generell

$$\mathfrak{g}_{r+i}\big(\mathfrak{a} : (F)\big) = \mathfrak{g}_{r+i}(\mathfrak{a}) : (F), \tag{111}$$

also insbesondere

$$\mathfrak{g}_{r+1}\big(\mathfrak{a} : (F)\big) = \mathfrak{g}_{r+1}(\mathfrak{a}) : (F). \tag{112}$$

Ist nun überdies $\mathfrak{g}_{r+1}\big(\mathfrak{a} : (F)\big) = \mathfrak{g}_{r+1}(\mathfrak{a})$, also

$$\mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{q}_{r1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{r+1,s_{r+1}} \cap \big(\mathfrak{q}_{r+2,1} : (F)\big) \cap \cdots \cap \big(\mathfrak{q}_{ns_n} : (F)\big) \cap \mathfrak{q}_T{}^*,$$

so ist nach (83)

$$h_1\big(\mathfrak{a} : (F)\big) = h_1\Big(\mathfrak{g}_{r+1}\big(\mathfrak{a} : (F)\big)\Big) = h_1\big(\mathfrak{g}_{r+1}(\mathfrak{a})\big) = h_1(\mathfrak{a}).$$

Solche Formen F existieren für $d \geqq 1$, weil dann $\mathfrak{g}_{r+1}(\mathfrak{a})$ keine triviale Komponente besitzt. Wir haben also mit (112) den

Satz 29. *Ist* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein H-Ideal,* Dim $\mathfrak{a} = d$, $r = n - d$, $d \geqq 1$ *und ist* $F \in \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *eine Form mit* $h(F) = \tau$ *und*

$$\mathfrak{g}_{r+1}(\mathfrak{a}) : (F) = \mathfrak{g}_{r+1}(\mathfrak{a}), \tag{113}$$

so gilt

$$h_0(\mathfrak{a}, F) = \tau \cdot h_0(\mathfrak{a}). \tag{114}$$

Aus (113) folgt $\mathfrak{g}_r(\mathfrak{a}) : (F) = \mathfrak{g}_r(\mathfrak{a})$, und dies ist nach Kap. 4, Satz 35, (77), mit Dim $(\mathfrak{a}, F) = d - 1$ gleichwertig. Die Frage, ob umgekehrt aus Dim $(\mathfrak{a}, F) = d - 1$ und (114) auf (113) geschlossen werden kann, konnte erst mit homologischen Mitteln durch J. Stückrad und W. Vogel [1] positiv entschieden werden.

Die Beziehung (113) ist natürlich insbesondere für $\mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a}$ erfüllt, doch erweist sich diese Bedingung als zu einschneidend, wenn wir den Schluß von Satz 29 mehrmals anwenden wollen, d. h. von $(\mathfrak{a}, F_1)$ zu $(\mathfrak{a}, F_1, F_2)$ usw. übergehen. Dabei benutzen wir:

$$\mathfrak{g}_j(\mathfrak{b}) : (F) = \mathfrak{g}_j(\mathfrak{b}) \Rightarrow \mathfrak{g}_h(\mathfrak{b}) : (F) = \mathfrak{g}_h(\mathfrak{b}) \quad \text{für alle} \quad h < j$$

und haben dann

Satz 30. *Ist* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein H-Ideal,* Dim $\mathfrak{a} = d$, $r = n - d$, $d \geqq \delta$, *so gilt für* δ *Formen* $F_1, \ldots, F_\delta$ *mit* $h(F_i) = \tau_i$ *für* $i = 1, 2, \ldots, \delta$ *und*

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{g}_{r+1}(\mathfrak{a}) : (F_1) = \mathfrak{g}_{r+1}(\mathfrak{a}), \\ &\mathfrak{g}_{r+2}(\mathfrak{a}, F_1) : (F_2) = \mathfrak{g}_{r+2}(\mathfrak{a}, F_1), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\mathfrak{g}_{r+\delta}(\mathfrak{a}, F_1, \ldots, F_{\delta-1}) : (F_\delta) = \mathfrak{g}_{r+\delta}(\mathfrak{a}, F_1, \ldots, F_{\delta-1}) \end{aligned}\right\} \tag{115}$$

die Beziehung

$$h_0(\mathfrak{a}, F_1, \ldots, F_\delta) = \tau_1 \cdot \tau_2 \cdots \tau_\delta \cdot h_0(\mathfrak{a}). \tag{116}$$

Satz 30 wird uns eine Fülle von Anwendungen liefern, die wir unter dem Sammelbegriff „*Bezoutscher Satz*" im folgenden Abschnitt 6.5. zusammenstellen werden.

Zuvor wollen wir hier noch den Spezialfall behandeln, daß $\delta = d$ und $F_1, \ldots, F_d$ Linearformen $L_1, \ldots, L_d$ sind. Dann gilt

Satz 31. *Ist* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein H-Ideal,* Dim $\mathfrak{a} = d$, $d \geqq 1$, $r = n - d$ *und sind* $L_1, \ldots, L_d$ *Linearformen mit*

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{g}_{r+1}(\mathfrak{a}) : (L_1) = \mathfrak{g}_{r+1}(\mathfrak{a}), \\ &\mathfrak{g}_{r+2}(\mathfrak{a}, L_1) : (L_2) = \mathfrak{g}_{r+2}(\mathfrak{a}, L_1), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\mathfrak{g}_n(\mathfrak{a}, L_1, \ldots, L_{d-1}) : (L_d) = \mathfrak{g}_n(\mathfrak{a}, L_1, \ldots, L_{d-1}), \end{aligned}\right\} \tag{115'}$$

so gilt

$$h_0(\mathfrak{a}) = h_0(\mathfrak{a}, L_1, \ldots, L_d). \tag{117}$$

Wegen Dim $(\mathfrak{a}, L_1, \ldots, L_d) = 0$ besagt (117): Die Ordnung eines d-dimensionalen H-Ideals $\mathfrak{a}$ kann stets durch die Ordnung eines nulldimensionalen H-Ideals erklärt werden; letztere ist nach Satz 26, (103), die Anzahl der mit entsprechender Multiplizität zu zählenden Punkte, die durch NG $(\mathfrak{a}, L_1, \ldots, L_d)$ gegeben sind.

Geometrisch formuliert: $h_0(\mathfrak{a})$ gibt die Anzahl der mit Multiplizitäten belegten Schnittpunkte von NG $(\mathfrak{a})$ mit einem „allgemeinen" linearen $(n\text{-}d)$-dimensionalen Unterraum NG $(L_1, \ldots, L_d)$ an, wobei „allgemein" die Gültigkeit von (115′) beinhaltet. Auf diese Weise werden u. a. die Begriffe „Kurve m-ter Ordnung" und „Fläche m-ter Ordnung" in n-dimensionalen projektiven Räumen erklärt.

Speziell für $d = 1$ ist also $h_0(\mathfrak{a})$ die Anzahl der mit Multiplizitäten belegten Schnittpunkte einer algebraischen Kurve im n-dimensionalen projektiven Raum mit einer „allgemeinen" Hyperebene $L = 0$.

In idealtheoretischer Formulierung gibt dies wegen $d = 1$ und $r = n - 1$ den

Satz 32. *Ist* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein eindimensionales H-Ideal und* $L \in \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *eine Linearform mit*

$$\mathfrak{g}_n(\mathfrak{a}) : (L) = \mathfrak{g}_n(\mathfrak{a}), \tag{118}$$

so gilt

$$h_0(\mathfrak{a}) = h_0(\mathfrak{a}, L). \tag{119}$$

Für eindimensionale Primideale $\mathfrak{p}$ vereinfacht sich Satz 32 zu

Satz 33. *Ist* $\mathfrak{p} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein eindimensionales primes H-Ideal und* $L \in \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *eine Linearform mit*

$$L \notin \mathfrak{p}, \tag{120}$$

so gilt

$$h_0(\mathfrak{p}) = h_0(\mathfrak{p}, L). \tag{121}$$

Beispiel. Wir betrachten das Primideal $\mathfrak{v}_{13} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ mit der allgemeinen Nullstelle $(t_0^3, t_0^2 t_1, t_0 t_1^2, t_1^3)$ und

$$\mathfrak{v}_{13} = (x_0 x_2 - x_1^2, x_0 x_3 - x_1 x_2, x_1 x_3 - x_2^2).$$

Dann wird

$$(\mathfrak{v}_{13}, x_2) = (x_2, x_0 x_3, x_1 x_3, x_1^2) = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \quad \text{mit} \quad \mathfrak{q}_1 = (x_0, x_1, x_2), \quad \mathfrak{q}_2 = (x_1^2, x_2, x_3).$$

Nach Satz 1, (3), ist $H(t; \mathfrak{q}_1) = h_0(\mathfrak{q}_1) = 1$, da x_3^t als einziges Potenzprodukt t-ten Grades nicht in $\mathfrak{q}_1$ enthalten ist; wegen $x_0^t \notin \mathfrak{q}_2$, $x_0^{t-1} x_1 \notin \mathfrak{q}_2$ folgt entsprechend $H(t; \mathfrak{q}_2) = h_0(\mathfrak{q}_2) = 2$. Nach Satz 24, (94) und (121), ist dann $h_0(\mathfrak{v}_{13}) = h_0(\mathfrak{q}_1) + h_0(\mathfrak{q}_2) = 1 + 2 = 3$.

6.5. Der Bezoutsche Satz

Ist $\mathfrak{a} = (F_1)$ ein Hauptideal und $\mathfrak{h} = (F_1, \ldots, F_r)$ mit $h(F_i) = \tau_i$ ein H-Ideal der Hauptklasse $r = n - d$, so sind die Voraussetzungen (113), (115) wegen Kap. 4, (138), erfüllt, denn es gilt

$$(F_1, \ldots, F_{i-1}) : (F_i) = (F_1, \ldots, F_{i-1}) \quad \text{für} \quad i = 2, \ldots, d,$$

und aus (116) folgt

$$h_0(\mathfrak{h}) = h_0(F_1, F_2, \ldots, F_r) = \tau_2 \cdots \tau_r \cdot h_0\big((F_1)\big);$$

wegen (104) ist $h_0\big((F_1)\big) = \tau_1$; wir haben mithin

Satz 34 (Satz von Bezout für Hauptklassenideale). *Ist*

$$\mathfrak{h} = (F_1, F_2, \ldots, F_r) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

ein H-Ideal der Hauptklasse $r = n - d$ mit $h(F_i) = \tau_i$, so ist

$$h_0(\mathfrak{h}) = \tau_1 \cdot \tau_2 \cdots \tau_r. \tag{122}$$

Durch (122) und mit Satz 33 wird die Berechnung von $h_0(\mathfrak{p})$ für eindimensionale Primideale $\mathfrak{p}$ in vielen Fällen erleichtert; wir zeigen dies an den vier Beispielen von Kap. 5, 5.18., im Anschluß an Satz 50:

Beispiel 1.

$$\mathfrak{v}_{17}^{(1,2,4,5)} = (x_0x_2 - x_1^2, x_0x_3^3 - x_1x_2^3, x_1x_3^3 - x_2^4),$$
$$x_2 \notin \mathfrak{v}_{17}^{(1,2,4,5)}, \ (\mathfrak{v}_{17}^{(1,2,4,5)}, x_2) = (x_2, x_1^2, x_0x_3^3, x_1x_3^3) = (x_0, x_1, x_2) \cap (x_1^2, x_2, x_3^3);$$

hier sind beide Primärkomponenten H-Ideale der Hauptklasse mit den Ordnungen $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ und $2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$; nach Satz 24, (94), ist also $h_0(\mathfrak{v}_{17}^{(1,2,4,5)}) = 1 + 6 = 7$.

Beispiel 2.

$$\mathfrak{v}_{17}^{(1,3,4,5)} = (x_0^2x_2 - x_1^3, x_0x_3^2 - x_1x_2^2, x_0x_2^3 - x_1^2x_3^2, x_1x_3^4 - x_2^5),$$
$$x_1 \notin \mathfrak{v}_{17}^{(1,3,4,5)}, (\mathfrak{v}_{17}^{(1,3,4,5)}, x_1) = (x_1, x_0^2x_2, x_0x_3^2, x_0x_2^3, x_2^5)$$
$$= (x_0, x_1, x_2^5) \cap (x_1, x_2, x_3^2) \cap \mathfrak{q}_T$$

mit der hier nicht interessierenden trivialen Komponente $\mathfrak{q}_T = (x_1, x_0^2, x_3^2, x_2^3)$; nach Satz 24, (94), ist $h_0(\mathfrak{v}_{17}^{(1,3,4,5)}) = 5 + 2 = 7$.

Beispiel 3.

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{v}_{1m}^* = (&x_0x_3 - x_1x_2, x_0^{m-2}x_2 - x_1^{m-1}, x_0^{m-3}x_2^2 - x_1^{m-2}x_3, \ldots, \\ &x_0x_2^{m-2} - x_1^2x_3^{m-3}, x_2^{m-1} - x_1x_3^{m-2}), \end{aligned}\right\} \tag{123}$$

$$x_1 \notin \mathfrak{v}_{1m}^*, (\mathfrak{v}_{1m}^*, x_1) = (x_1, x_0x_3, x_0^{m-2}x_2, x_0^{m-3}x_2^2, \ldots, x_0x_2^{m-2}, x_2^{m-1})$$
$$= (x_0, x_1, x_2^{m-1}) \cap (x_1, x_2, x_3) \cap \mathfrak{q}_T$$

mit der trivialen Komponente $\mathfrak{q}_T = (x_0^{m-2}, x_1, x_2^{m-1}, x_3, x_0^{m-3}x_1^2, \ldots, x_0x_2^{m-2})$ und

$$h_0(\mathfrak{v}_{1m}^*) = m \tag{124}$$

wegen $h_0(\mathfrak{v}_{1m}^*) = 1 \cdot 1 \cdot (m-1) + 1 \cdot 1 \cdot 1$.

Beispiel 4.

$$\begin{aligned}\mathfrak{v}_{1m}^{**} = (&x_0x_2 - x_1x_3, x_0^{m-4}x_2^2 - x_1^{m-2}, x_0^{m-5}x_2^3 - x_1^{m-3}x_3, \ldots,\\ &x_0x_2^{m-3} - x_1^3x_3^{m-5}, x_2^{m-2} - x_1^2x_3^{m-4}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 \notin \mathfrak{v}_{1m}^{**},\ (\mathfrak{v}_{1m}^{**}, x_1) &= (x_1, x_0x_3, x_0^{m-4}x_2^2, x_0^{m-5}x_2^3, \ldots, x_0x_2^{m-3}, x_2^{m-2})\\ &= (x_0, x_1, x_2^{m-2}) \cap (x_1, x_2^2, x_3) \cap \mathfrak{q}_T\end{aligned}$$

mit $\mathfrak{q}_T = (x_0^{m-4}, x_1, x_2^{m-2}, x_3, x_0^{m-5}x_2^3, \ldots, x_0x_2^{m-3})$ und

$$h_0(\mathfrak{v}_{1m}^{**}) = (m-2) + 2 = m.$$

Wir formulieren Satz 34 noch für den Fall $d = 0$, also $r = n$:

Satz 35 (Klassischer Satz von BEZOUT). *Ist*

$$(F_1, F_2, \ldots, F_n) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

ein nulldimensionales H-Ideal der Hauptklasse n mit $h(F_i) = \tau_i$, *so ist*

$$h_0(F_1, F_2, \ldots, F_n) = \tau_1 \cdot \tau_2 \cdots \tau_n. \tag{125}$$

In geometrischer Sprechweise lautet Satz 35: n Hyperflächen $F_1 = 0$, $F_2 = 0, \ldots,$ $F_n = 0$ im n-dimensionalen projektiven Raum haben entweder so viele mit Multiplizitäten belegte Schnittpunkte, wie das Produkt ihrer Ordnungen angibt, oder unendlich viele. Der letzte Fall tritt ein, wenn $(F_1, \ldots, F_n)$ kein H-Ideal der Hauptklasse, also $\operatorname{Dim}(F_1, \ldots, F_n) \geqq 1$ ist.

Um nun zu Verallgemeinerungen von Satz 34 zu gelangen, ersetzen wir r durch $r + \varrho \leqq n$, also

$$\mathfrak{h} = (F_1, \ldots, F_r, F_{r+1}, \ldots, F_{r+\varrho})$$

und

$$\mathfrak{h}_1 = (F_{r+1}, \ldots, F_{r+\varrho}), \qquad \mathfrak{h}_2 = (F_1, \ldots, F_r).$$

Ist $\operatorname{Dim} \mathfrak{h}_1 = \delta = n - \varrho$, $\operatorname{Dim} \mathfrak{h}_2 = d = n - r$, so ist hier außerdem

$$\operatorname{Dim} \mathfrak{h} = \operatorname{Dim}(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2) = d + \delta - n = n - (r + \varrho) \geqq 0. \tag{126}$$

Sind umgekehrt $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ zwei H-Ideale der Hauptklasse und gilt (126), so muß auch $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2)$ ein H-Ideal der Hauptklasse sein.

Wir haben also

Satz 36. *Sind* $\mathfrak{h}_1$ *und* $\mathfrak{h}_2$ *zwei H-Ideale der Hauptklasse aus* $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *mit* $\operatorname{Dim} \mathfrak{h}_1 = \delta$, $\operatorname{Dim} \mathfrak{h}_2 = d$ *und ist*

$$\operatorname{Dim}(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2) = d + \delta - n = n - (r + \varrho) \geqq 0, \tag{126}$$

so gilt

$$h_0(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2) = h_0(\mathfrak{h}_1) \cdot h_0(\mathfrak{h}_2). \tag{127}$$

Dies folgt wegen Kap. 4, Satz 54, (138), auch wieder aus (115). Wegen Kap. 5, Satz 47, (142), sind die Bedingungen (115) aber auch für perfekte H-Ideale erfüllt; dies gibt

Satz 37 (Satz von Bezout in der Fassung von Gröbner, vgl. Gröbner [2], 144.5). *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{h}$ *zwei H-Ideale aus* $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, *sind ferner* $\mathfrak{a}$ *perfekt mit* $\operatorname{Dim} \mathfrak{a} = d$ *und* $\mathfrak{h}$ *ein H-Ideal der Hauptklasse* $\varrho = n - \delta$ *und ist*

$$\operatorname{Dim}(\mathfrak{a}, \mathfrak{h}) = d + \delta - n = n - (r + \varrho) \geqq 0, \tag{128}$$

so gilt

$$h_0(\mathfrak{a}, \mathfrak{h}) = h_0(\mathfrak{a}) \cdot h_0(\mathfrak{h}). \tag{129}$$

Aus Satz 37 ergibt sich eine gewisse Verallgemeinerung von Kap. 5, Satz 50, die zum Nachweis der Imperfektheit von H-Idealen recht praktisch ist:

Satz 38. *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b} = (F_1, F_2)$ *zwei H-Ideale aus* $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *mit*

$$\operatorname{Dim} \mathfrak{a} = 2, \quad \operatorname{Dim}(F_1, F_2) = n - 2, \quad \operatorname{Dim}(\mathfrak{a}, F_1, F_2) = 0, \tag{130}$$

so gilt:

$$h_0(\mathfrak{a}, F_1, F_2) > h_0(\mathfrak{a}) \cdot h_0(\mathfrak{b}) \Rightarrow \mathfrak{a} \textit{ imperfekt}. \tag{131}$$

Auf Satz 38 machte mich W. Vogel (Halle) dankenswerterweise aufmerksam. Auch bei eindimensionalen H-Idealen leistet Satz 38 gute Dienste, wenn die Basis von komplizierterer Bauart ist.

Wir betrachten dazu das eindimensionale Primideal $\mathfrak{p}_5 \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ mit der allgemeinen Nullstelle $(t_0^5, t_0^4 t_1, t_0^2 t_1^3 + t_1^5, t_0 t_1^4)$ und der Basis $\mathfrak{p}_5 = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$, wobei F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 durch (76) gegeben sind. Wir ersetzen nun x_i durch x_{i+1}; dies gibt

$$\begin{aligned}
G_1 &= x_1^2 x_3 + x_1 x_3 x_4 - x_2^3 - x_2^2 x_3 - x_2 x_4^2,\\
G_2 &= x_1^2 x_4 - x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_4,\\
G_3 &= x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 - x_2^2 x_3 - x_2 x_4^2,\\
G_4 &= x_1 x_3^2 - x_1 x_4^2 - x_2^2 x_4 - x_2 x_3 x_4,\\
G_5 &= x_2^2 x_4^2 - x_2 x_3^3 + 3 x_2 x_3 x_4^2 + x_4^4.
\end{aligned}$$

$(G_1, G_2, G_3, G_4, G_5) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ hat dann die Dimension 2 und vermöge $t_i \mapsto t_{i+1}$ die allgemeine Nullstelle $(t_0^5, t_1^5, t_1^4 t_2, t_1^2 t_2^3 + t_2^5, t_1 t_2^4)$. Mit $(F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$ ist $(G_1, G_2, G_3, G_4, G_5)$ perfekt oder imperfekt.

$$h_0(F_1, F_2, F_3, F_4, F_5) = h_0(G_1, G_2, G_3, G_4, G_5) = 5$$

ist aus den allgemeinen Nullstellen abzulesen. Nun ist

$$(G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, x_1, x_3) = (x_1, x_3, x_2^3, x_2^2 x_4, x_2 x_4^2, x_4^4);$$

für $\mathfrak{h} = (x_1, x_3)$ und $\mathfrak{a} = (G_1, G_2, G_3, G_4, G_5)$ ist also (130) erfüllt, weil

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{h}) = (x_1, x_2^3, x_2^2 x_4, x_2 x_4^2, x_3, x_4^4)$$

ein nulldimensionales Primärideal ist (vgl. Kap. 1, Satz 18, (27)). In $(\mathfrak{a}, \mathfrak{h})$ treten sieben Potenzprodukte t-ten Grades nicht auf, nämlich

$$x_0{}^t,\ x_0{}^{t-1}x_3,\ x_0{}^{t-1}x_4,\ x_0{}^{t-2}x_3{}^2,\ x_0{}^{t-2}x_3x_4,\ x_0{}^{t-2}x_4{}^2,\ x_0{}^{t-3}x_4{}^3;$$

nach Satz 1 ist also $H(t; \mathfrak{a}, \mathfrak{h}) = h_0(\mathfrak{a}, \mathfrak{h}) = 7 > 5 = 5 \cdot 1 = h_0(\mathfrak{a}) \cdot h_0(\mathfrak{h})$; nach (131) ist also $\mathfrak{a}$ und mithin $\mathfrak{p}_5$ imperfekt.

Wir knüpfen nun wieder an Satz 37 an. L. Budach und W. Vogel gelang in [1], Satz 2, mit homologischen Mitteln der Beweis eines Satzes, der eine Verallgemeinerung von Satz 37 liefert, die hier nur ohne Beweis angegeben werden kann (vgl. auch Gröbner [9], Kap. IV, § 7, (IV), S. 232, und Vogel [2], S. 77):

Satz 39 (Allgemeiner Satz von Bezout). *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zwei perfekte H-Ideale aus* $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *mit* $\operatorname{Dim} \mathfrak{a} = d = n - r$, $\operatorname{Dim} \mathfrak{b} = \delta = n - \varrho$ *und ist*

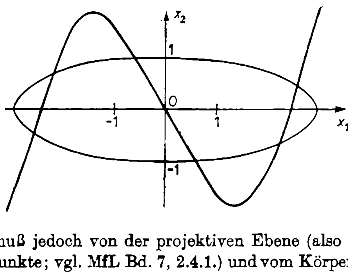
$$\operatorname{Dim}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = d + \delta - n = n - (r + \varrho) \geqq 0, \tag{132}$$

so gilt

$$h_0(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = h_0(\mathfrak{a}) \cdot h_0(\mathfrak{b}). \tag{133}$$

Wir wollen nun auf die „anschaulichen" Fälle $n = 2$ und $n = 3$ eingehen.

Für $n = 2$ geht (132) über in $d + \delta - 2 \geqq 0$, und dies ist nur für $d = \delta = 1$, $d + \delta - 2 = 0$ erfüllt. Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, x_2]$ ungemischt, so folgt daraus nach Kap. 4, Satz 39, (83), daß $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Hauptideale, also perfekt sind. Nach Satz 36 oder 37 bedeutet dies, daß zwei algebraische Raumkurven der Ordnungen m_1, m_2 in der projektiven Ebene entweder unendlich viele Punkte gemeinsam haben oder sich in $m_1 \cdot m_2$ mit Multiplizitäten belegten Punkten schneiden. Der Leser mache sich dies etwa am Schnitt der Ellipse $9x_0{}^2 - x_1{}^2 - 9x_2{}^2 = 0$ und der kubischen Parabel $6x_0{}^2x_1 + 3x_0{}^2x_2 - x_1{}^3 = 0$ klar (zur Enthomogenisierung setze man $\dfrac{x_1}{x_0} = x$, $\dfrac{x_2}{x_0} = y$, $x_0 = 1$); vgl. Abb. 2. Hier sind die sechs Schnittpunkte reell; zur Gültigkeit des



Satzes muß jedoch von der projektiven Ebene (also unter Einschluß der uneigentlichen Punkte; vgl. MfL Bd. 7, 2.4.1.) und vom Körper $\mathbf{C}$ der komplexen Zahlen ausgegangen werden.

Für $n = 3$ geht (132) über in $d + \delta - 3 \geqq 0$. Hier sind drei Fälle möglich: Für $d = \delta = 2$, $d + \delta - 3 = 1$ haben wir wegen der auch hier vorauszusetzenden Ungemischtheit von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ wie bei $n = 2$ zwei Hauptideale. Dies bedeutet, daß im dreidimensionalen projektiven Raum über dem Körper $\mathbf{C}$ der komplexen Zahlen zwei algebraische Flächen der Ordnung m_1 bzw. m_2 entweder eine Fläche gemeinsam haben oder sich in einer algebraischen Raumkurve der Ordnung $m_1 \cdot m_2$ schneiden. Es bleiben noch die beiden Fälle $d = 2$, $\delta = 1$, $d + \delta - 3 = 0$ und $d = 1$, $\delta = 2$, $d + \delta - 3 = 0$; wir brauchen hier nur den zweiten Fall zu behandeln, da die beiden Fälle durch Vertauschung von d und δ ineinander übergehen. Wegen $d + \delta - n = 0$ haben wir hier die Anzahl der mit Multiplizitäten belegten Schnittpunkte einer algebraischen Kurve ($d = 1$) der Ordnung $h_0(\mathfrak{a})$ mit einer algebraischen Fläche ($\delta = 2$) der Ordnung $h_0(\mathfrak{b})$ zu bestimmen. Idealtheoretisch liegen dann also zwei ungemischte H-Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ mit $\operatorname{Dim} \mathfrak{a} = d = 1$, $\operatorname{Dim} \mathfrak{b} = \delta = 2$ vor. Dann ist $\mathfrak{b}$ wiederum ein Hauptideal, also $\mathfrak{b} = (F)$; indessen braucht $\mathfrak{a}$ nicht perfekt zu sein, so daß Satz 37 nicht anwendbar ist. Wegen $\operatorname{Dim} \mathfrak{a} = d = 1$, $\operatorname{Dim} (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \operatorname{Dim} (\mathfrak{a}, F) = 0 = d - 1$ und der vorausgesetzten Ungemischtheit von $\mathfrak{a}$ gilt dann $\mathfrak{a} : (F) = \mathfrak{a}$ (nach Kap. 4, (79)). Mithin ist (113) erfüllt, und nach Satz 29, (114), ist

$$h_0(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = h_0(\mathfrak{a}, F) = \tau \cdot h_0(\mathfrak{a}) \quad \text{mit} \quad \tau = h(F).$$

Nach Satz 27, (104), ist $h(F) = \tau = h_0\big((F)\big) = h_0(\mathfrak{b})$; wir haben also wieder $h_0(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = h_0(\mathfrak{a}) \cdot h_0(\mathfrak{b})$.

Insgesamt gilt

Satz 40 (Spezieller Satz von Bezout). *In den Spezialfällen $n = 2, n = 3$ gilt: Für zwei ungemischte H-Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, x_2]$ oder $\mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ ist bei $d + \delta - n \geqq 0$ stets*

$$h_0(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = h_0(\mathfrak{a}) \cdot h_0(\mathfrak{b}). \tag{133}$$

Wird in Satz 40 die Forderung der Ungemischtheit fallengelassen, so ist (133) nicht einmal für $n = 2$ durchweg richtig; man betrachte dazu den Einheitskreis (Ek.) mit Mittelpunkt (M_0); jeder Durchmesser hat dann mit diesem Gebilde (Ek.) $\cup$ (M_0) drei Schnittpunkte, idealtheoretisch:

$$\mathfrak{a} = (x_0^2 x_1 - x_1^3 - x_1 x_2^2, x_0^2 x_2 - x_1^2 x_2 - x_2^3) = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2) \cap (x_1, x_2)$$

mit $h_0(\mathfrak{a}) = 2$ nach (82). Wählen wir als Durchmesser die y-Achse, so wird — homogen geschrieben — $\mathfrak{b} = (F) = (x_1)$, also $h_0(\mathfrak{b}) = 1$ nach (104) und

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}, x_1) = \big(x_1, x_2(x_0^2 - x_2^2)\big) = (x_1, x_2) \cap (x_1, x_0 - x_2) \cap (x_1, x_0 + x_2)$$

mit $h_0(\mathfrak{a}, x_1) = 1 + 1 + 1 = 3$ nach (82); wir haben also

$$h_0(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 3 > 2 \cdot 1 = h_0(\mathfrak{a}) \cdot h_0(\mathfrak{b}).$$

Demzufolge wäre also als Verallgemeinerung von Satz 40 für beliebiges n günstigenfalls die Gültigkeit von (133) unter den Voraussetzungen (132) und der Ungemischtheit (oder Pseudogemischtheit) sowohl von $\mathfrak{a}$ als auch von $\mathfrak{b}$ zu erhoffen, und die älteren Geometer hielten dies für richtig; hierbei spielte wohl auch die Auffassung eine Rolle, daß für $n = 2$ und $n = 3$ richtige geometrische Sätze sich in naheliegendster Weise für beliebiges n übertragen lassen. Diese — nicht zuletzt von F. Klein vertretene — Hypothese hat sich jedoch verschiedentlich nicht bestätigt.

Bei schwächeren Voraussetzungen als in den vorangegangenen Sätzen müssen wir also von der Beziehung

$$h_0(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = h_0(\mathfrak{a}) \cdot h_0(\mathfrak{b}) + K \tag{134}$$

mit einem Korrekturglied K ausgehen. Der Verfasser hat K in [1] auch für den Fall berechnet, daß (132) nicht erfüllt ist. Läßt man bei den Voraussetzungen von Satz 37 nur die Forderung der Perfektheit von $\mathfrak{a}$ fallen und ersetzt sie durch die Ungemischtheit, so gilt $K \geqq 0$ (Renschuch [1], (68)). Selbst für den Fall, daß $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b} = \mathfrak{h}$ Primideale sind, kann K sogar beliebig groß werden:

Satz 41. *Für $n \geqq 4$ gibt es in $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ zu jeder noch so großen Zahl $K \in \mathbf{N}^*$ Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ mit* $\operatorname{Dim} \mathfrak{p}_1 = d = n - r$, $\operatorname{Dim} \mathfrak{p}_2 = \delta = n - \varrho$ *und*

$$\operatorname{Dim} (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = d + \delta - n = n - (r + \varrho) \geqq 0 \tag{135}$$

und

$$h_0(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = h_0(\mathfrak{p}_1) \cdot h_0(\mathfrak{p}_2) + K. \tag{136}$$

Beweis. Dazu genügt die Angabe von entsprechenden Beispielen. Wegen Satz 40 können wir nur solche für $n \geqq 4$ erwarten. Wir gehen dazu gemäß (123) aus von den eindimensionalen Primidealen $\mathfrak{v}^*_{1m} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ mit den allgemeinen Nullstellen $(t_0{}^m, t_0{}^{m-1}t_1, t_0t_1{}^{m-1}, t_1{}^m)$ und den Basisformen $F_1, F_2, \ldots, F_m$ mit $F_1 = x_0x_3 - x_1x_2$ und $F_i = x_0{}^{m-i}x_2{}^{i-1} - x_1{}^{m-i+1}x_3{}^{i-2}$ für $i = 2, 3, \ldots, m$ und $m \geqq 4$. Nach 5.18. und Satz 38 waren diese $\mathfrak{v}^*_{1m}$ imperfekt. Wir wollen nun die $\mathfrak{v}^*_{1m}$ als zweidimensionale Primideale in $\mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ auffassen; um dies zu verdeutlichen, setzen wir (wie beim Beispiel zu Satz 38)

$$\mathfrak{w}^*_{1m} := \mathfrak{v}^*_{1m}|_{x_i \mapsto x_{i+1}} \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

und haben dann die allgemeine Nullstelle

$$(t_0{}^m, t_1{}^m, t_1{}^{m-1}t_2, t_1t_2{}^{m-1}, t_2{}^m), \tag{137}$$

also $\operatorname{Dim} \mathfrak{w}^*_{1m} = 2$ und $\mathfrak{w}^*_{1m} = (G_1, G_2, \ldots, G_m)$ mit

$$\begin{aligned}
G_1 &= x_1x_4 - x_2x_3, \\
G_2 &= x_1{}^{m-2}x_3 - x_2{}^{m-1}, \\
G_3 &= x_1{}^{m-3}x_3{}^2 - x_2{}^{m-2}x_4, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
G_{m-1} &= x_1x_3{}^{m-2} - x_2{}^2x_4{}^{m-3}, \\
G_m &= x_3{}^{m-1} - x_2x_4{}^{m-2}.
\end{aligned}$$

Aus (137) folgt übrigens

$$\mathfrak{w}_{1m}^* = \mathfrak{v}_{2m}^{(1,\ldots,h,h+3,\ldots,k)} \qquad \text{mit} \quad h = -1 + \binom{m+1}{2},\ k = -3 + \binom{m+2}{2}.$$

Wir wählen nun $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{w}_{1m}^*$ und $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{l} = (x_1, x_4)$. Dann ist $\operatorname{Dim} \mathfrak{p}_1 = \operatorname{Dim} \mathfrak{p}_2 = 2$. Weiter wird

$$(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = (\mathfrak{w}_{1m}^*, \mathfrak{l}) = (x_1, x_4, x_2x_3, x_2{}^{m-1}, x_3{}^{m-1}),$$

und dies ist nach Kap. 1, Satz 28, (27), ein nulldimensionales Primärideal, ausführlich: $\operatorname{Dim}(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = 0 = 2 + 2 - 4$, also ist (132) erfüllt. In $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = (\mathfrak{w}_{1m}^*, \mathfrak{l})$ sind die folgenden Potenzprodukte t-ten Grades nicht enthalten (vgl. Satz 1):

$$x_0{}^t;\ x_0{}^{t-1}x_2, \ldots, x_0{}^{t-m+2}x_2{}^{m-2};\ x_0{}^{t-1}x_3, \ldots, x_0{}^{t-m+2}x_3{}^{m-2};$$

ihre Anzahl ist

$$H(t; \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = h_0(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = 1 + m - 2 + m - 2 = 2m - 3.$$

Dagegen ist $h_0(\mathfrak{p}_1) = h_0(\mathfrak{w}_{1m}^*) = m$ nach (124) und

$$h_0(\mathfrak{p}_2) = h_0(\mathfrak{l}) = h_0(x_1, x_4) = 1 \cdot 1 = 1$$

nach Satz 34, (122), also $h_0(\mathfrak{p}_1) \cdot h_0(\mathfrak{p}_2) = m \cdot 1$ und mithin

$$h_0(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = h_0(\mathfrak{p}_1) \cdot h_0(\mathfrak{p}_2) + m - 3.$$

In diesem Beispiel ist also $K = m - 3$. Wird also $K \in \mathbf{N}^*$ vorgegeben, so braucht man nur $m = K + 3$ zu wählen und hat dazu Primideale der gewünschten Art, gleichgültig, wie groß $K \in \mathbf{N}^*$ gewählt wird.

Bei allen vorangegangenen Betrachtungen benutzten wir die in Definition 5, (102), gegebene Multiplizität. Man kann nun anstelle dieser „statischen" Multiplizität auf unterschiedliche Weise eine „dynamische" Multiplizität einführen, bei welcher der „spezielle Fall" als Grenzlage eines „allgemeinen Falles" betrachtet wird; von O.-H. Keller wurden dafür die Begriffe *Strukturmultiplizität* und *Spezialisierungsmultiplizität* geprägt. Diese unterschiedlichen Multiplizitätsbegriffe führen zu unterschiedlichen Ergebnissen; insbesondere gelang damit van der Waerden in [3] eine Verallgemeinerung des Satzes von Bezout ohne Korrekturglied; vgl. Renschuch [1], § 5, sowie Herrmann, Stammler und Sterz [1]. Die daraufhin dem *Bezoutschen Satz* vielfach eingeräumte Schlüsselposition im Begriffsstreit um die Multiplizitätsdefinitionen dürfte heute generell als aufgehoben angesehen werden; man vergleiche hierzu van der Waerden [2, 3] und Gröbner [3, 10]; die Entwicklung um diesen Problemkreis kommt ferner in den Vorworten zu den Büchern [2, 8] und [9] von Gröbner zum Ausdruck und ist auch aus erkenntnistheoretischer Sicht von Interesse, vgl. auch 6.9. und Behnke [1].

6.6. Die Hilbertschen Gleichungen

Es sei $\bar{F}_t \in \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ eine *vollständige Form* t-ten Grades (d. h. eine Form, bei welcher sämtliche Potenzprodukte t-ten Grades wirklich auftreten) mit zunächst unbestimmten Koeffizienten, also eine „allgemeine" Form

$$\bar{F}_t := u_1 x_0^t + u_2 x_0^{t-1} x_1 + \cdots + u_{N_t} x_n^t. \tag{138}$$

Da in (138) sämtliche Potenzprodukte t-ten Grades in $x_0, x_1, \ldots, x_n$ auftreten, ist in (138) nach der Hurwitzschen Formel (vgl. Kap. 5, Definition 13, Satz 31 und Satz 32, (94))

$$N_t = \Delta(t; n) = \binom{t+n}{n}. \tag{139}$$

Es sei nun $\mathfrak{a}$ ein H-Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ durch seine Basis $\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_s)$ vorgegeben, und wir fragen, welche speziellen Werte aus $\mathbf{K}$ für $u_1, \ldots, u_{N_t}$ in Frage kommen, damit die so spezialisierte Form F_t in $\mathfrak{a}$, genauer in $\mathfrak{M}(t; \mathfrak{a})$, liegt (vgl. Kap. 5, 5.15., und Definition 12).

Es sei $(G_1, \ldots, G_V)$ eine bezüglich der Potenzprodukte $x_0^t, x_0^{t-1}x_1, \ldots, x_n^t$ linear unabhängige Modulbasis von $\mathfrak{M}(t; \mathfrak{a})$; also ist $V = V(t; \mathfrak{a})$ die *Volumfunktion* (vgl. Kap. 5, 5.15.). Damit F_t bei Spezialisierung der u_i in $\mathfrak{M}(t; \mathfrak{a})$ liegt, muß also

$$\bar{F}_t = k_1 G_1 + k_2 G_2 + \cdots + k_V G_V \quad \text{mit} \quad k_i \in \mathbf{K} \tag{140}$$

gelten. Wir denken uns mit $G_1, G_2, \ldots, G_V$ den Gaußschen Algorithmus bezüglich der lexikographischen Anordnung der Potenzprodukte t-ten Grades bereits durchgeführt, so daß $G_1, \ldots, G_V$ genau $V(t; \mathfrak{a})$ verschiedene erste Potenzprodukte haben. Es ist also

$$\left.\begin{aligned} V(t; \mathfrak{a}) = {} & \text{Maximale Anzahl der ersten Potenzprodukte} \\ & t\text{-ten Grades von } G_1, \ldots, G_V. \end{aligned}\right\} \tag{141}$$

Aus (138) und (140) folgt durch Koeffizientenvergleich für $u_1, \ldots, u_{N_t}$ entweder

$$u_i = 0 \tag{142}$$

oder

$$u_j = L_j(k_1, k_2, \ldots, k_V), \tag{143}$$

wobei $L_j(k_1, k_2, \ldots, k_V)$ jeweils eine Linearkombination von $k_1, k_2, \ldots, k_V$ ist. Wegen der vorausgesetzten Verschiedenheit der ersten Potenzprodukte von $G_1, \ldots, G_V$ ist

$$k_1 = u_{i_1}, \ k_2 = u_{i_2}, \ \ldots, \ k_V = u_{i_V} \quad \text{mit} \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_V \tag{144}$$

und jedenfalls $u_j = 0$ für $j < i_1$ (aber nicht umgekehrt). Setzen wir (144) in die restlichen Gleichungen von (143) ein, so bekommen wir lineare homogene Gleichungen

$$u_j = L_j(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_V}). \tag{145}$$

Für die Anzahl der Gleichungen (145) gilt mithin

$$A(t;\mathfrak{a}) = \text{Anzahl der Bedingungsgleichungen (145)} = \text{Anzahl der } u_j,$$

also

$$\left.\begin{array}{l} A(t;\mathfrak{a}) = \text{Anzahl der in } G_1, \ldots, G_V \text{ auftretenden Potenzprodukte} \\ \qquad t\text{-ten Grades, die keine ersten Potenzprodukte sind.} \end{array}\right\} \quad (146)$$

Entsprechend folgt aus (142):

$$B(t;\mathfrak{a}) = \text{Anzahl der Bedingungsgleichungen (142)} = \text{Anzahl der } u_i,$$

also

$$\left.\begin{array}{l} B(t;\mathfrak{a}) = \text{Anzahl der in } G_1, \ldots, G_V \text{ überhaupt nicht} \\ \qquad \text{auftretenden Potenzprodukte } t\text{-ten Grades.} \end{array}\right\} \quad (147)$$

Ist umgekehrt ein lineares homogenes Gleichungssystem in $u_1, \ldots, u_{N_t}$ vorgegeben, so kann man den Gaußschen Algorithmus in umgekehrter Reihenfolge, also bezüglich $u_{N_t}, u_{N_t-1}, \ldots, u_2, u_1$ durchführen und erreichen, daß kein u_j, welches in einer der Gleichungen des Systems an erster Stelle steht, in einer anderen Gleichung des Systems an zweiter, dritter, ... Stelle steht. Man kommt dann entweder auf Gleichungen der Gestalt (142) oder der Bauart (145) und kann von dort zu (144) übergehen. Mit (144) und (142) folgen durch Einsetzen in (138) wieder $G_1, \ldots, G_V$. Auf diese Weise kann also von diesen Bedingungsgleichungen auf eine Minimalbasis von $\mathfrak{M}(t;\mathfrak{a})$ geschlossen werden. Daß gemäß (145) und (144) als Parameter solche u_h mit möglichst kleinen Indizes h gesetzt werden, erweist sich für das praktische Rechnen als zweckmäßig, ist aber nicht zwingend.

Wir haben also insgesamt

Satz 42. *Damit eine allgemeine Form t-ten Grades* (138) *nach Spezialisierung in einem vorgegebenen H-Ideal* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *liegt, müssen die Koeffizienten* $u_1, \ldots, u_{N_t}$ *in* (138) *einem System linearer homogener Gleichungen genügen. Ist umgekehrt ein solches lineares homogenes Gleichungssystem für festes t gegeben, so kann daraus der Modul* $\mathfrak{M}(t;\mathfrak{a})$ *in endlich vielen Schritten berechnet werden.*

Die Bedeutung von Satz 42 besteht darin, daß dadurch in gewisser Weise nichtlineare Probleme auf lineare zurückgeführt werden können.

Definition 6. Die den Moduln $\mathfrak{M}(t;\mathfrak{a})$ zugeordneten linearen Gleichungen in den Koeffizienten $u_1, \ldots, u_{N_t}$ von (138) heißen die *Hilbertschen Gleichungen* des H-Ideals $\mathfrak{a}$ für den Grad t.

Aus dem zweiten Teil von Satz 42 folgt dann

Satz 43. *Sind von einem H-Ideal* $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *die Hilbertschen Gleichungen für alle Gradzahlen* $t = 1, 2, 3, \ldots$ *bekannt, so läßt sich eine Basis von* $\mathfrak{a}$ *in endlich vielen Schritten berechnen.*

Auf Satz 43 werden wir im nächsten Abschnitt zurückkommen.

Eine weitere Anwendung der Hilbertschen Gleichungen hatten wir in 4.18. beim Beweis von Satz 46 über die Existenz von Schnellbasen bereits vorweggenommen, dabei aber die Linearität dieser Bedingungsgleichungen nicht benutzt.

Wir betrachten nun zur Illustration ein einfaches Beispiel. Dazu gehen wir wieder einmal von dem primen H-Ideal $\mathfrak{v}_{14}^{(2)} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ mit der allgemeinen Nullstelle $(t_0{}^4, t_0{}^3t_1, t_0t_1{}^3, t_1{}^4)$ und der Basis $\mathfrak{v}_{14}^{(2)} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$ mit

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= x_0x_3 - x_1x_2, \\ F_2 &= x_0{}^2x_2 - x_1{}^3, \\ F_3 &= x_0x_2{}^2 - x_1{}^2x_3, \\ F_4 &= x_1x_3{}^2 - x_2{}^3 \end{aligned}\right\} \tag{148}$$

aus. Der Modul $\mathfrak{M}(2; \mathfrak{v}_{14}^{(2)})$ wird dann allein durch F_1 aufgespannt. Wir wollen den Modul $\mathfrak{M}(3; \mathfrak{v}_{14}^{(2)})$ betrachten. Es ist dann

$$\mathfrak{M}(3; \mathfrak{v}_{14}^{(2)}) = (G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7)$$

mit

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= F_2 = x_0{}^2x_2 - x_1{}^3, \\ G_2 &= x_0F_1 = x_0{}^2x_3 - x_0x_1x_2, \\ G_3 &= x_1F_1 = x_0x_1x_3 - x_1{}^2x_2, \\ G_4 &= F_3 = x_0x_2{}^2 - x_1{}^2x_3, \\ G_5 &= x_2F_1 = x_0x_2x_3 - x_1x_2{}^2, \\ G_6 &= x_3F_1 = x_0x_3{}^2 - x_1x_2x_3, \\ G_7 &= F_4 = x_1x_3{}^2 - x_2{}^3. \end{aligned}\right\} \tag{149}$$

Hier entfällt der Gaußsche Algorithmus, da die ersten Potenzprodukte bereits alle voneinander verschieden sind und außerdem keines der $V = 7$ ersten Potenzprodukte als zweites Potenzprodukt auftritt. Für (138) und (140) ergibt sich

$$\begin{aligned} \overline{F}_3 = {} & u_1x_0{}^3 + u_2x_0{}^2x_1 + u_3x_0{}^2x_2 + u_4x_0{}^2x_3 + u_5x_0x_1{}^2 + u_6x_0x_1x_2 + u_7x_0x_1x_3 \\ & + u_8x_0x_2{}^2 + u_9x_0x_2x_3 + u_{10}x_0x_3{}^2 + u_{11}x_1{}^3 + u_{12}x_1{}^2x_2 + u_{13}x_1{}^2x_3 \\ & + u_{14}x_1x_2{}^2 + u_{15}x_1x_2x_3 + u_{16}x_1x_3{}^2 + u_{17}x_2{}^3 + u_{18}x_2{}^2x_3 + u_{19}x_2x_3{}^2 + u_{20}x_3{}^3 \end{aligned} \tag{150}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \overline{F}_3 = {} & k_1(x_0{}^2x_2 - x_1{}^3) + k_2(x_0{}^2x_3 - x_0x_1x_2) + k_3(x_0x_1x_3 - x_1{}^2x_2) + k_4(x_0x_2{}^2 - x_1{}^2x_3) \\ & + k_5(x_0x_2x_3 - x_1x_2{}^2) + k_6(x_0x_3{}^2 - x_1x_2x_3) + k_7(x_1x_3{}^2 - x_2{}^3). \end{aligned} \tag{151}$$

Aus (150) und (151) folgt durch Koeffizientenvergleich

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ u_2 &= 0, \\ u_5 &= 0, \\ u_{18} &= 0, \\ u_{19} &= 0, \\ u_{20} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{152}$$

entsprechend (142) sowie

$$\left.\begin{array}{lll} u_3 = k_1, & u_9 = k_5, & u_{14} = -k_5, \\ u_4 = k_2, & u_{10} = k_6, & u_{15} = -k_6, \\ u_6 = -k_2, & u_{11} = -k_1, & u_{16} = k_7, \\ u_7 = k_3, & u_{12} = -k_3, & u_{17} = -k_7 \\ u_8 = k_4, & u_{13} = -k_4, & \end{array}\right\} \tag{153}$$

gemäß (143). Drücken wir $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7$ durch u_i mit möglichst kleinem Index i aus, so wird

$$k_1 = u_3,\quad k_2 = u_4,\quad k_3 = u_7,\quad k_4 = u_8,\quad k_5 = u_9,\quad k_6 = u_{10},\quad k_7 = u_{16}, \tag{154}$$

und wegen $3 < 4 < 7 < 8 < 9 < 10 < 16$ ist dann auch die Nebenbedingung von (144) erfüllt. — Setzen wir (154) in (153) ein, so folgen die sieben nicht identisch verschwindenden linearen homogenen Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} u_{17} + u_{16} = 0, \\ u_{15} + u_{10} = 0, \\ u_{14} + u_9 = 0, \\ u_{13} + u_8 = 0, \\ u_{12} + u_7 = 0, \\ u_{11} + u_3 = 0, \\ u_6 + u_4 = 0. \end{array}\right\} \tag{155}$$

Dann sind (152) und (155) die Hilbertschen Gleichungen. Umgekehrt kann man von (155) auf (154) und (153) und mit (152) auf (151) und von (151) auf (149) schließen.

Wir wollen nun für beliebige t eine Aussage über die Anzahl $A(t; \mathfrak{a}) + B(t; \mathfrak{a})$ der linear unabhängigen Hilbertschen Gleichungen eines H-Ideals $\mathfrak{a}$ für den Grad t machen: Ist $\mathfrak{a}_\pi$ ein Potenzproduktideal, so treten nur Hilbertsche Gleichungen der Art (142) auf; es ist also $A(t; \mathfrak{a}_\pi) = 0$ und $B(t; \mathfrak{a}_\pi) = H(t; \mathfrak{a}_\pi)$ nach Satz 1, also

$$A(t; \mathfrak{a}_\pi) + B(t; \mathfrak{a}_\pi) = H(t; \mathfrak{a}_\pi).$$

Dies gilt allgemein:

Satz 44. *Die Anzahl der linear unabhängigen Hilbertschen Gleichungen eines H-Ideals $\mathfrak{a} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ist gleich der Hilbertfunktion $H(t; \mathfrak{a})$:*

$$A(t; \mathfrak{a}) + B(t; \mathfrak{a}) = H(t; \mathfrak{a}). \tag{156}$$

Beweis. Aus (139), (141), (146) und (147) folgt

$$A(t; \mathfrak{a}) + B(t; \mathfrak{a}) + V(t; \mathfrak{a}) = \binom{t+n}{n}. \tag{157}$$

Nach (1) ist

$$H(t; \mathfrak{a}) + V(t; \mathfrak{a}) = \binom{t+n}{n}. \tag{158}$$

Aus (157) und (158) folgt (156), q.e.d.

Mit Hilfe von Satz 44 kann $H(t; \mathfrak{a})$ bzw. $P(t; \mathfrak{a})$ in bestimmten Fällen bequem bestimmt werden, so bei den Veroneseschen Idealen und den Veroneseschen Projektionsidealen, vgl. 6.8.

In MACAULAY [1], V, § 64, wird Satz 44 als selbstverständlich vorausgesetzt (die Werte der hier $A(t; \mathfrak{a}) + B(t; \mathfrak{a})$ genannten Anzahlfunktion werden als „Hilbert numbers" bezeichnet), ebenso in MACAULAY [2], wo nur noch die Bezeichnungsweise auf den Zusammenhang mit der Hilbertfunktion hindeutet. Der erste, sehr elegante Beweis von Satz 44 wurde von GRÖBNER in [2], 141.6, geführt; zur effektiven Aufstellung der Hilbertschen Gleichungen ist das dort angegebene Verfahren jedoch weniger gut geeignet, weil die dabei auftretenden — schon von MACAULAY benutzten — Matrizen ("dialytic array" und „inverse array") einerseits sehr große Formatzahlen und andererseits nur wenige von Null verschiedene Elemente aufweisen. Dies war der Ausgangspunkt für den hier wiedergegebenen Beweisgedanken, der sich auch in den folgenden Abschnitten als nützlich erweisen wird.

6.7. Berechnung rationaler Primideale

Ist $\mathfrak{l} = (L_1, \ldots, L_r) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ein primes H-Ideal, dessen Basisformen $L_1, \ldots, L_r$ Linearformen sind, so ist eine beliebige Linearform

$$L = L(x_0, x_1, \ldots, x_n) = u_1 x_0 + u_2 x_1 + \cdots + u_{n+1} x_n \tag{159}$$

genau dann aus $\mathfrak{l}$, wenn L an sämtlichen Nullstellen von NG ($\mathfrak{l}$) verschwindet; dieser aus der linearen Algebra bekannte Satz (MfL Bd. 3, 4.1., Satz 4) folgt auch nach Kap. 3, Satz 11, aus der Existenz allgemeiner Nullstellen, bei denen in unserem Fall die Koordinatenfunktionen lineare Funktionen in den Parametern $t_0, t_1, \ldots, t_d$ sind. Setzen wir diese in (159) ein, so gewinnen wir daraus die Hilbertschen Gleichungen für $t = 1$ und daraus wieder die Basisformen von $\mathfrak{l}$.

Wir erläutern dies am

Beispiel 1. Es sei $n = 3$, $d = 1$, also

$$L = \overline{F}_1(x_0, x_1, x_2, x_3) = u_1 x_0 + u_2 x_1 + u_3 x_2 + u_4 x_3. \tag{160}$$

Die Parameterdarstellung einer Geraden sei unsere allgemeine Nullstelle, und zwar

$$y_0 = 2t_0 + 3t_1, \quad y_1 = t_0 - t_1, \quad y_2 = 3t_0 - 4t_1, \quad y_3 = t_0 + t_1. \tag{161}$$

Setzen wir (161) in (160) ein und ordnen wir nach t_0, t_1, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \overline{F}_1(y_0, y_1, y_2, y_3) = t_0(2u_1 + u_2 + 3u_3 + u_4) + t_1(3u_1 - u_2 - 4u_3 + u_4) = 0 \\ \text{id. in } t_0, t_1, \end{aligned}\right\} \tag{162}$$

also sind für $t = 1$ die Hilbertschen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} u_4 + 3u_3 + u_2 + 2u_1 = 0, \\ u_4 - 4u_3 - u_2 + 3u_1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} u_4 + 3u_3 + u_2 + 2u_1 = 0, \\ 7u_3 + 2u_2 - u_1 = 0, \end{aligned}$$

also

$$u_1 = 7k_1, \; u_2 = 7k_2 \quad \text{und} \quad u_3 = k_1 - 2k_2, \quad u_4 = -17k_1 - k_2;$$

dies in (160) eingesetzt, folgt — nach k_1, k_2 geordnet —

$$L = \bar{F}_1(x_0, x_1, x_2, x_3) = k_1(7x_0 + x_2 - 17x_3) + k_2(7x_1 - 2x_2 - x_3).$$

Gemäß Satz 43 ist mithin $\mathfrak{l} = (7x_0 + x_2 - 17x_3, 7x_1 - 2x_2 - x_3)$, da nach der linearen Algebra zu der durch (161) gegebenen allgemeinen Nullstelle ein lineares Gleichungssystem gehört, in unserem Fall

$$\begin{aligned} 7x_0 + x_2 - 17x_3 &= 0, \\ 7x_1 - 2x_2 - x_3 &= 0; \end{aligned}$$

diese Gleichungen werden in der analytischen Geometrie auch als die „parameterfreien Gleichungen" der Geraden (161) bezeichnet. Dies hätte man aus (161) auch durch Auflösung nach t_0 und t_1 gewonnen, wie das in der linearen Algebra üblich ist. Das hier beschriebene Verfahren ist aber auch für $t = 2, 3, \ldots$ anwendbar; für $t = 2$ ist (160) zu ersetzen durch

$$\begin{aligned} \bar{F}_2(x_0, x_1, x_2, x_3) = u_1x_0^2 + u_2x_0x_1 + u_3x_0x_2 + u_4x_0x_3 + u_5x_1^2 \\ + u_6x_1x_2 + u_7x_1x_3 + u_8x_2^2 + u_9x_2x_3 + u_{10}x_3^2. \end{aligned} \tag{163}$$

Setzen wir (161) in (163) ein, so erhalten wir — nach t_0^2, t_0t_1, t_1^2 geordnet — in Analogie zu (162):

$$\begin{aligned} \bar{F}_2(y_0, y_1, y_2, y_3) &= t_0^2(4u_1 + 2u_2 + 6u_3 + 4u_4 + u_5 + 3u_6 + u_7 + 9u_8 + 3u_9 + u_{10}) \\ &\quad + t_0t_1(12u_1 + u_2 + u_3 + 5u_4 - 2u_5 - 7u_6 - 24u_8 - u_9 + 2u_{10}) \\ &\quad + t_1^2(9u_1 - 3u_2 - 12u_3 + 3u_4 + u_5 + 4u_6 - u_7 + 16u_8 - 4u_9 + u_{10}) \\ &= 0 \text{ id. in } t_0^2, t_0t_1, t_1^2, \end{aligned}$$

was der Leser nachprüfen möge. Daraus ergeben sich als Hilbertsche Gleichungen für $t = 2$:

$$\begin{aligned} u_{10} + 3u_9 + 9u_8 + u_7 + 3u_6 + u_5 + 4u_4 + 6u_3 + 2u_2 + 4u_1 &= 0, \\ 2u_{10} - u_9 - 24u_8 \phantom{{}+u_7} - 7u_6 - 2u_5 + 5u_4 + u_3 + u_2 + 12u_1 &= 0, \\ u_{10} - 4u_9 + 16u_8 - u_7 + 4u_6 + u_5 + 3u_4 - 12u_3 - 3u_2 + 9u_1 &= 0; \end{aligned}$$

der Nachweis der linearen Unabhängigkeit mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus sei dem Leser überlassen.

Die hier dargelegte Methode des Koeffizientenvergleichs zur Aufstellung der Hilbertschen Gleichungen ist nicht nur bei linearen Parameterfunktionen, sondern jedenfalls immer dann anwendbar, wenn die Koordinatenfunktionen der vorgegebenen Nullstelle Formen vom gleichen Grad m sind. Um von einer Nullstelle auf ein H-Ideal und dessen Basisformen schließen zu können, müssen wir uns nach dem Hilbertschen Nullstellensatz (vgl. 3.7. und 3.12.) von vornherein auf prime H-Ideale beschränken.

Ist ein P-Ideal mit einer allgemeinen Nullstelle vorgegeben, bei der die Koordinatenfunktionen Polynome in den Parametern sind, so kann nach Kap. 3, Satz 12, die allgemeine Nullstelle des äquivalenten H-Ideals angegeben werden. Sind $\tau_1, \ldots, \tau_d$ die Parameter der allgemeinen Nullstelle des P-Ideals, so setze man $\tau_k = t_k/t_0$ und multipliziere mit dem Hauptnenner. Entsprechend kann man bei primen H-Idealen stets erreichen, daß alle Koordinatenfunktionen $y_0, y_1, \ldots, y_n$ Formen m-ten Grades in $t_0, t_1, \ldots, t_d$ sind:

$$\left.\begin{array}{l} y_i = a_{i1}t_0^m + a_{i2}t_0^{m-1}t_1 + \cdots + a_{iN}t_d^m \\ \quad \text{mit} \quad N = \binom{m+d}{d}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n. \end{array}\right\} \tag{164}$$

Definition 7. Ein primes H-Ideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ mit einer allgemeinen Nullstelle $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ der Bauart (164) heißt ein *rationales Primideal.*

Ist (164) vorgegeben, so machen wir für $t = 1, 2, 3, \ldots$ den Ansatz (138), setzen (164) in (138) ein und bestimmen durch Koeffizientenvergleich nach den (höchstens) $\binom{mt+d}{d}$ Potenzprodukten vom Grad mt in $t_0, t_1, \ldots, t_d$ die Hilbertschen Gleichungen; es gilt also

Satz 45. *Bei einem rationalen Primideal können die Hilbertschen Gleichungen aus der vorgegebenen allgemeinen Nullstelle* (164) *für jedes t in endlich vielen Schritten bestimmt werden. Die auf diese Weise gewonnenen linearen homogenen Gleichungssysteme enthalten im allgemeinen linear abhängige Gleichungen.*

Um ein System linear unabhängiger Gleichungen zu gewinnen, ist daher die Anwendung des Gaußschen Algorithmus unerläßlich, insbesondere dann, wenn daraus gemäß Satz 43 Basisformen des durch (164) bestimmten Primideals berechnet werden sollen. Jedenfalls gilt

Satz 46. *Ist ein rationales Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ durch seine allgemeine Nullstelle vorgegeben, so kann eine Basis von $\mathfrak{p}$ in endlich vielen Schritten berechnet werden.*

Die Frage, bis zu welchem t die Ansätze (138) durchgerechnet werden müssen, konnte noch nicht entschieden werden; die Schranke $t = m$ wäre denkbar; bei den bisher gerechneten Beispielen trat $m - 1$ als Maximalgrad auf, vgl. die Primideale $\mathfrak{v}_{1m}^*$ und $\mathfrak{v}_{1m}^{**}$ in 5.18, Beispiele 3 und 4. Bei den im Anhang berechneten rationalen Primidealen wurden die Ansätze bis $t = 6$ durchgeführt, sofern es sich nicht um Veronesesche Projektionsideale handelt, für die wir im nächsten Abschnitt ein Verfahren zum Nachweis der Vollständigkeit eines Systems von Basisformen angeben können.

Dadurch können wir endlich in vielen Fällen entscheiden, ob ein durch seine Basis gegebenes H-Ideal ein Primideal ist.

Satz 47. *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein H-Ideal aus* $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *mit einer Nullstelle* (164), *ist ferner* $\mathfrak{p}$ *das zu* (164) *gehörige rationale Primideal und ist* $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$, *so ist* $\mathfrak{a}$ *ein homogenes Primideal.*

Beweis. Ist $\mathfrak{a} = (G_1, \ldots, G_t)$ eine Basis von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{p} = (F_1, \ldots, F_s)$ die aus (164) berechnete Basis von $\mathfrak{p}$, so ist für $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$ nur noch zu zeigen, daß jedes F_i durch $G_1, \ldots, G_t$ und jedes G_j durch $F_1, \ldots, F_s$ ausgedrückt werden kann.

Für den ersten Schritt von $\mathfrak{a}$ auf (164) sei auf Kap. 4, Satz 18, verwiesen. Als Beispiel hatten wir dort (4.10) das H-Ideal $\mathfrak{a} = (F_1, F_2, F_3, F_4) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ mit (148) betrachtet und durch Bildung der Eliminationsideale gezeigt, daß $\mathfrak{a}$ nur die Nullstelle

$$y_0 = t_0^4,\; y_1 = t_0^3 t_1,\; y_2 = t_0 t_1^3,\; y_3 = t_1^4 \tag{165}$$

hat. Es bleibt noch zu zeigen, daß das Primideal $\mathfrak{v}_{14}^{(2)}$ mit der allgemeinen Nullstelle (165) ebenfalls die Basis (F_1, F_2, F_3, F_4) hat, womit $\mathfrak{a} = \mathfrak{v}_{14}^{(2)}$ und die Primidealeigenschaft von $\mathfrak{a}$ nachgewiesen ist. Bevor wir dies durchführen, wollen wir einige Betrachtungen an (164) anschließen.

Definition 8. Ein rationales Primideal $\mathfrak{p}_A$ aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ heißt bei festem m *allgemeines Primideal,* wenn die rechten Seiten von (164) allgemeine Formen m-ten Grades (also vollständige Formen in unbestimmten Koeffizienten) sind; ein rationales Primideal $\mathfrak{p}_a$ heißt *normales Primideal,* wenn es aus $\mathfrak{p}_A$ durch eine solche Spezialisierung der a_{ik} mit Koeffizienten aus $\mathbf{K}$ entstanden ist, daß $\mathfrak{p}_A$ und $\mathfrak{p}_a$ dieselben Gradmatrizen haben.

Wir wollen den damit gegebenen Sachverhalt für $n = 3$, $d = 1$ näher untersuchen. Die entsprechenden NG $(\mathfrak{p}_a)$ sind dann algebraische normale Raumkurven im dreidimensionalen projektiven Raum. Die Gleichung (164) geht also über in

$$y_i = a_{i1} t_0^m + a_{i2} t_0^{m-1} t_1 + \cdots + a_{i,m+1} t_1^m \quad \text{für} \quad i = 0, 1, 2, 3. \tag{166}$$

Für $m = 2$ folgt daraus eine lineare Beziehung zwischen den y_i, was geometrisch den Satz beinhaltet, daß rationale Kurven zweiter Ordnung ebene Kurven sind. Dies ist auch wie folgt einzusehen: Die Hilbertschen Gleichungen sind wegen der Unbestimmtheit der a_{ik} linear unabhängig, also ist

$$P(t; \mathfrak{p}_a) = mt + 1 \tag{167}$$

für normale Primideale $\mathfrak{p}_a$; für $m = 2$, $t = 1$ haben wir demgemäß drei Gleichungen für vier Unbekannte (vgl. (160)) u_1, u_2, u_3, u_4, also eine einparametrige Lösung, folglich existiert eine lineare Basisform.

Für $m = 3$ haben wir jetzt für $t = 1$ vier linear unabhängige Gleichungen für vier Unbekannte, also nur die triviale Lösung, mithin existieren keine linearen Basisformen; für $t = 2$ sind es sieben linear unabhängige Gleichungen für zehn Unbekannte (vgl. (163)), also existieren drei quadratische Basisformen. Durch eine homogene lineare Transformation können alle diese Primideale auf das Ideal $\mathfrak{v}_{13}$ mit der allgemeinen Nullstelle $(t_0^3, t_0^2t_1, t_0t_1^2, t_1^3)$ zurückgeführt werden, vgl. (70).

Für $m = 4$ existieren aus demselben Grunde keine linearen Basisformen; für $t = 2$ sind es neun linear unabhängige Hilbertsche Gleichungen für zehn Unbekannte; also existiert eine quadratische Basisform. Für $t = 3$ haben wir gemäß (150) jetzt 20 Unbekannte und 13 linear unabhängige Gleichungen, also besteht $\mathfrak{M}(3; \mathfrak{p}_a)$ aus $20 - 13 = 7$ kubischen Formen. Nun induziert die eine quadratische Basisform durch Multiplikation mit x_0, x_1, x_2, x_3 bereits vier kubische Formen, so daß noch $7 - 4 = 3$ kubische Basisformen hinzukommen. Wie (149) und (148) zeigen, wird dieser Sachverhalt sogar durch das H-Ideal $\mathfrak{v}_{14}^{(2)}$ realisiert.

Anders verhält es sich mit dem Ideal $\mathfrak{v}_{15}^*$ (vgl. (74)), dessen Basis aus einer quadratischen Form und vier Formen vierten Grades besteht. Ein normales Primideal fünfter Ordnung hat nämlich keine quadratischen Basisformen, denn die Anzahl der Unbekannten ist für $t = 2$ kleiner als die Anzahl der linear unabhängigen Gleichungen: $\binom{2+3}{3} < 5 \cdot 2 + 1$; für $t = 3$ ist dagegen $\binom{3+3}{3} > 5 \cdot 3 + 1$; wir haben also bei normalen Primidealen fünfter Ordnung $20 - 16 = 4$ kubische Basisformen. Damit kann jedoch keineswegs behauptet werden, daß dies die vollständige Basis ist. Bei allen durchgerechneten Beispielen von rationalen Primidealen fünfter Ordnung mit vier kubischen Basisformen trat noch eine weitere Basisform vierten Grades hinzu, vgl. (76); dies gilt auch für das Vahlensche Ideal, vgl. 8.5.6. Auf diese Weise können also lediglich Aussagen über den Minimalgrad m_0 der Basisformen von normalen Primidealen gemacht werden.

Bei diesen ist bei den Hilbertschen Gleichungen für den Grad t die Anzahl der linear unabhängigen Gleichungen gleich der Anzahl der Potenzprodukte vom Grad mt in t_0 und t_1, also $mt + 1$ (vgl. (167)), die Anzahl der Unbekannten $u_1, \ldots, u_{N_t}$ ist $\binom{t+3}{3}$; damit keine Basisformen g-ten Grades auftreten, muß also $\binom{g+3}{3} < mg + 1$ sein für $g = 1, 2, \ldots, m_0 - 1$, worin m_0 der Minimalgrad ist. Es gilt also

$$m(m_0 - 1) + 1 > \binom{m_0 + 2}{3}$$

und mithin

$$m > \frac{\binom{m_0 + 2}{3} - 1}{m_0 - 1}. \tag{168}$$

Gibt man m_0 vor, so kann man also m gemäß (168) so wählen, daß der Minimalgrad der Basisformen in dem entsprechenden normalen rationalen eindimensionalen

Primideal aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ gerade m_0 ist. Insbesondere wird

m_0	$\dfrac{\binom{m_0+2}{3}-1}{m_0-1}$	$m \geqq$
3	$\frac{9}{2}$	5
4	$\frac{19}{3}$	7
5	$\frac{17}{2}$	9
6	$\frac{55}{5}$	12

in Worten besagt dies: Allgemeine und normale rationale Primideale
— der Ordnung $\geqq 5$ enthalten keine quadratische Basisform,
— der Ordnung $\geqq 7$ enthalten weder quadratische noch kubische Basisformen,
— der Ordnung $\geqq 9$ enthalten keine Basisformen zweiten, dritten, vierten Grades usw.

In Ergänzung von Kap. 4, Satz 74, folgern wir hieraus

Satz 48. *Bei H-Idealen kann der Minimalgrad m_0 der Basisformen einer Minimalbasis beliebig groß sein.*

Wir illustrieren nun die praktische Basisbestimmung bei vorgegebener allgemeiner Nullstelle am

Beispiel 2. Vorgegeben sei das Primideal $\mathfrak{v}_{14}^{(2)} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ durch seine allgemeine Nullstelle (165). Setzen wir (165) in (160) ein, so folgt $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ durch Koeffizientenvergleich nach $t_0^4, t_0^3 t_1, t_0 t_1^3, t_1^4$; es existiert also keine lineare Basisform.

Wir gehen nun zum Grad $t = 2$ über und setzen (165) in (163) ein. Nach $t_0^8, t_0^7 t_1, \ldots, t_1^8$ geordnet, gibt dies

$$\left.\begin{aligned} \bar{F}_2(y_0, y_1, y_2, y_3) = {} & u_1 t_0^8 + u_2 t_0^7 t_1 + u_5 t_0^6 t_1^2 + u_3 t_0^5 t_1^3 + (u_4 + u_6)\, t_0^4 t_1^4 \\ & + u_7 t_0^3 t_1^5 + u_8 t_0^2 t_1^6 + u_9 t_0 t_1^7 + u_{10} t_1^8 = 0 \\ & \text{id. in } t_0^8, t_0^7 t_1, \ldots, t_1^8. \end{aligned}\right\} \tag{169}$$

Mithin haben wir für $t = 2$ die Hilbertschen Gleichungen

$$u_1 = u_2 = u_5 = u_3 = u_7 = u_8 = u_9 = u_{10} = 0 \quad \text{und} \quad u_6 + u_4 = 0.$$

Setzen wir $u_4 = k_1$, so folgt $u_6 = -k_1$ und $\bar{F}_2 = k_1(x_0 x_3 - x_1 x_2)$. Als erste Basisform zu (148) haben wir also $F_1 = x_0 x_3 - x_1 x_2$ gewonnen.

Wir gehen nun zu $t = 3$ über und setzen (165) in (150) ein. Nach $t_0^{12}, t_0^{11}t_1, \ldots, t_1^{12}$ geordnet, ergibt dies

$$\begin{aligned}\overline{F}_3(y_0, y_1, y_2, y_3) = u_1 t_0^{12} &+ u_2 t_0^{11} t_1 + u_3 t_0^{10} t_1^2 + (u_3 + u_{11})\, t_0^9 t_1^3 \\ &+ (u_4 + u_6)\, t_0^8 t_1^4 + (u_7 + u_{12})\, t_0^7 t_1^5 + (u_8 + u_{13})\, t_0^6 t_1^6 \\ &+ (u_9 + u_{14})\, t_0^5 t_1^7 + (u_{10} + u_{15})\, t_0^4 t_1^8 + (u_{16} + u_{17})\, t_0^3 t_1^9 \\ &+ u_{18} t_0^2 t_1^{10} + u_{19} t_0 t_1^{11} + u_{20} t_1^{12} = 0 \\ &\text{id. in } t_0^{12}, t_0^{11}t_1, \ldots, t_1^{12}.\end{aligned}$$

Hieraus folgen wieder die Hilbertschen Gleichungen (152), (155) und damit F_2, F_3, F_4 von (148).

Hierbei ist es lästig, daß man die kubischen Formen x_0F_1, x_1F_1, x_2F_1, x_3F_1 hinterher aussondern muß. Dies vorher zu bewerkstelligen, ist Gegenstand der im folgenden für dieses Beispiel beschriebenen *u^*-Methode*; für eine allgemeine Formulierung vgl. RENSCHUCH [13]. Aus (149) folgt

$$\begin{aligned} x_0^2 x_3 &= x_0 F_1 + x_0 x_1 x_2, \\ x_0 x_1 x_3 &= x_1 F_1 + x_1^2 x_2, \\ x_0 x_2 x_3 &= x_2 F_1 + x_1 x_2^2, \\ x_0 x_3^2 &= x_3 F_1 + x_1 x_2 x_3; \end{aligned}$$

dies in (150) eingesetzt, ergibt

$$\begin{aligned}\overline{F}_3(x_0, x_1, x_2, x_3) = (u_4 x_0 + u_7 x_1 + u_9 x_2 + u_{10} x_3)\, F_1 &+ u_1 x_0^3 + u_2 x_0^2 x_1 + u_3 x_0^2 x_2 \\ &+ u_5 x_0 x_1^2 + (u_4 + u_6)\, x_0 x_1 x_2 + u_8 x_0 x_2^2 + u_{11} x_1^3 \\ &+ (u_7 + u_{12})\, x_1^2 x_2 + u_{13} x_1^2 x_3 + (u_9 + u_{14})\, x_1 x_2^2 \\ &+ (u_{10} + u_{15})\, x_1 x_2 x_3 + u_{16} x_1 x_3^2 + u_{17} x_2^3 + u_{18} x_2^2 x_3 \\ &+ u_{19} x_2 x_3^2 + u_{20} x_3^3.\end{aligned}$$

Setzen wir $u_6^* := u_4 + u_6$, $u_{12}^* := u_7 + u_{12}$, $u_{14}^* := u_9 + u_{14}$, $u_{15}^* := u_{10} + u_{15}$ und dann (165) ein, so reduzieren sich die Hilbertschen Gleichungen auf

$$u_1 = u_2 = u_5 = u_6^* = u_{12}^* = u_{14}^* = u_{15}^* = u_{18} = u_{19} = u_{20} = 0$$

dun

$$\begin{aligned} u_3 &+ u_{11} = 0, \\ u_8 &+ u_{13} = 0, \\ u_{16} &+ u_{17} = 0, \end{aligned}$$

und hieraus ergeben sich nur noch die neuen Basisformen F_2, F_3, F_4 von (148).

Ob man einen * hinschreibt oder nicht, ist für das praktische Rechnen belanglos; entscheidend ist, daß man die vier ersten Potenzprodukte von x_0F_1, x_1F_1, x_2F_1, x_3F_1 in (150) streichen kann.

Entsprechend kann man für $t = 4$ verfahren. Dort lautet der Ansatz

$$\overline{F}_4(x_0, x_1, x_2, x_3) = u_1 x_0^4 + u_2 x_0^3 x_1 + \cdots + u_{35} x_3^4; \tag{170}$$

Einsetzen von (165) liefert $4 \cdot 4 + 1 = 17$ Potenzprodukte $t_0^{16}, t_0^{15}t_1, \ldots, t_1^{16}$ in t_0, t_1. Durch Bildung von $x_i x_j F_1$, $x_i F_2$, $x_i F_3$, $x_i F_4$ entstehen 22 Formen vierten Grades, von denen jedoch (wegen der Syzygien, vgl. 5.6.) vier linear abhängig sind. In (170) können also 18 der u_i gestrichen werden; nach 5.6. sind dies gerade diejenigen u_i mit

$$i = 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 26, 29, 30.$$

Es verbleiben also noch $35 - 18 = 17$ Koeffizienten u_i bzw. u_i^*, für welche sich wegen der 17 Potenzprodukte $t_0^{16}, t_0^{15}t_1, \ldots, t_1^{16}$ wiederum 17 linear unabhängige Hilbertsche Gleichungen ergeben, die mithin nur die triviale Lösung haben. Folglich existieren keine Basisformen vierten Grades.

Damit ist nun die Vollständigkeit der Basis (148) für unser Primideal mit der allgemeinen Nullstelle $(t_0^4, t_0^3t_1, t_0t_1^3, t_1^4)$ noch keineswegs erwiesen. Wir werden jedoch im nächsten Abschnitt für alle eindimensionalen primen H-Ideale aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$, bei denen die allgemeine Nullstelle (166) so spezialisiert ist, daß jedes y_i gleich einem Potenzprodukt in t_0, t_1 vom Grad m ist, ein Verfahren zum Nachweis der Vollständigkeit der Basis angeben.

6.8. Veronesesche Ideale und Projektionsideale

Wir denken uns nun die Koeffizienten a_{ik} in (164) so spezialisiert, daß für jedes i nur ein a_{ik} gleich 1 gesetzt wird und alle übrigen a_{ik} gleich Null gesetzt werden. Die Koordinatenfunktionen der allgemeinen Nullstelle $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ sind dann Potenzprodukte m-ten Grades in $t_0, t_1, \ldots, t_d$. Sind dabei zwei Potenzprodukte gleich, gilt also etwa $y_j = y_k$ mit $j < k$, so enthält das entsprechende Primideal eine Linearform $x_j - x_k$, und durch die lineare umkehrbare Transformation

$$\left.\begin{aligned} X_i &= x_i && \text{für} \quad i = 1, \ldots, k-1, \\ X_i &= x_{i+1} && \text{für} \quad i = k, \ldots, n-1, \\ X_n &= x_j - x_k && \end{aligned}\right\}$$

können wir die Betrachtungen auf ein Primideal in $\mathbf{K}[X_0, \ldots, X_{n-1}]$ ohne Linearformen zurückführen. Bei der Spezialisierung der a_{ik} von (164) derart, daß $y_0, y_1, \ldots, y_n$ Potenzprodukte werden, können wir also o.B.d.A. annehmen, daß diese Potenzprodukte alle voneinander verschieden sind:

Definition 9. Rationale Primideale, bei denen die Koordinaten der allgemeinen Nullstelle (164) zu verschiedenen Potenzprodukten m-ten Grades in $t_0, t_1, \ldots, t_d$ spezialisiert sind, heißen *Veronesesche Projektionsideale*.

In (164) war $N = \binom{m+d}{d}$ die Anzahl aller Potenzprodukte m-ten Grades in $t_0, t_1, \ldots, t_d$; wir können also bei Veroneseschen Projektionsidealen maximal N Koordinatenfunktionen bilden, d. h., bei $y_0, y_1, \ldots, y_n$ ist

$$n + 1 = N \quad \text{mit} \quad N \leqq \binom{m+d}{d}. \tag{171}$$

Steht in (171) das Gleichheitszeichen, so spricht man von Veroneseschen Idealen.

Definition 10. Unter dem *Veroneseschen Ideal* $\mathfrak{v}_{dm} \subset \mathbf{K}[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ mit

$$n = -1 + \binom{m+d}{d} \tag{172}$$

versteht man das prime H-Ideal mit der allgemeinen Nullstelle $(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ und

$$\left.\begin{aligned}
z_0 &= t_0^m, \\
z_1 &= t_0^{m-1}t_1, \\
z_2 &= t_0^{m-1}t_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
z_d &= t_0^{m-1}t_d, \\
z_{d+1} &= t_0^{m-2}t_1^2, \\
z_{d+2} &= t_0^{m-2}t_1t_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
z_{n_1} &= t_0t_d^{m-1}, \\
z_{n_1+1} &= t_1^m, \\
z_{n_1+2} &= t_1^{m-1}t_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
z_n &= t_d^m;
\end{aligned}\right\} \tag{173}$$

dabei ist

$$n_1 = -1 + \binom{m+d-1}{d}. \tag{174}$$

Es ist erstaunlich, daß Veronesesche Ideale Basen aus lauter quadratischen Formen besitzen, die man sogar implizit angeben kann. Dazu machen wir die nachfolgenden Bemerkungen: Multipliziert man alle $n_1 + 1$ (vgl. (174)) Potenzprodukte $(m-1)$-ten Grades $t_0^{m-1}, t_0^{m-2}t_1, \ldots, t_d^{m-1}$ mit $t_0, t_1, \ldots, t_d$, so gewinnt man alle $n + 1$ (vgl. (172)) Potenzprodukte $t_0^m, t_0^{m-1}t_1, \ldots, t_d^m$, einige von ihnen mehrmals. Wir schreiben uns dafür ein Multiplikationsschema und ersetzen darin die ausmultiplizierten Potenzprodukte m-ten Grades gemäß (173) durch $z_0, z_1, \ldots, z_n$:

(175)

	t_0^{m-1}	$t_0^{m-2}t_1$	$t_0^{m-2}t_2$	$\ldots$	t_d^{m-1}
t_0	z_0	z_1	z_2	$\ldots$	z_{n_1}
t_1	z_1	z_{d+1}	z_{d+2}	$\ldots$	$\ldots$
t_2	z_2	z_{d+2}	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
t_d	z_d	z_{2d}	$\ldots$	$\ldots$	z_n

Sind p_j, p_k irgendwelche zwei Potenzprodukte $(m-1)$-ten Grades in $t_0, t_1, \ldots, t_d$, so ergibt sich für die aus der h-ten und i-ten Zeile sowie j-ten und k-ten Spalte von (175) gebildete zweireihige Unterdeterminante

$$\begin{vmatrix} t_h p_j & t_h p_k \\ t_i p_j & t_i p_k \end{vmatrix} = 0. \tag{176}$$

Ersetzen wir nun in (175) die $z_0, z_1, \ldots, z_n$ durch $X_0, X_1, \ldots, X_n$, so folgt aus (175) die *homogene Matrix* (H-Matrix)

$$U_{d+1, n_1+1} = \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & \ldots & X_{n_1} \\ X_1 & X_{d+1} & X_{d+2} & \ldots & \ldots \\ X_2 & X_{d+2} & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_d & X_{2d} & \ldots & \ldots & X_n \end{pmatrix}, \tag{177}$$

und aus (176) folgt, daß alle zweireihigen Unterdeterminanten von (177) Basisformen unseres Veroneseschen Ideals $\mathfrak{v}_{dm}$ sind. Es gilt aber sogar die Umkehrung, nämlich der

Satz 49 (Satz von Goddard und Gröbner). *Durch die zweireihigen Unterdeterminanten von* (177) *ist eine Basis des Veroneseschen Ideals* $\mathfrak{v}_{dm}$ *gegeben, die für* $d \geqq 2$ *keine Minimalbasis ist.*

Wir müssen hier auf den nicht ganz einfachen Beweis verzichten und verweisen dazu auf Gröbner [9], Kap. IV, § 3, III, und Gröbner [7], Satz 3.

Satz 49 regt dazu an, H-Ideale dadurch zu definieren, daß man Unterdeterminanten bestimmter Reihenzahl aus einer vorgegebenen H-Matrix bildet. Nach Kap. 5, Satz 4, sind diese Unterdeterminanten Formen, und man wählt sie als Basisformen eines H-Ideals. Auch hierauf können wir in dem uns gestellten Rahmen leider nicht eingehen.

Nach Definition 9 können wir die allgemeine Nullstelle eines Veroneseschen Projektionsideals aus (173) durch Streichung der nicht benötigten Potenzprodukte gewinnen und danach zurückindizieren.

Dafür geben wir ein Beispiel an. In $\mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ war $\mathfrak{v}_{14}^{(2)}$ das prime H-Ideal mit der allgemeinen Nullstelle

$$y_0 = t_0^4, \quad y_1 = t_0^3 t_1, \quad y_2 = t_0 t_1^3, \quad y_3 = t_1^4; \tag{178}$$

dagegen ist $\mathfrak{v}_{14} \subset \mathbf{K}[X_0, X_1, X_2, X_3, X_4]$ das prime H-Ideal mit der allgemeinen Nullstelle

$$z_0 = t_0^4, \quad z_1 = t_0^3 t_1, \quad z_2 = t_0^2 t_1^2, \quad z_3 = t_0 t_1^3, \quad z_4 = t_1^4; \tag{179}$$

hier wird also z_2 gestrichen (daher die Bezeichnung $\mathfrak{v}_{14}^{(2)}$) sowie

$$y_0 = z_0, \quad y_1 = z_1, \quad \text{aber} \quad y_2 = z_3, \quad y_3 = z_4$$

und entsprechend

$$x_0 = X_0, \quad x_1 = X_1, \quad \text{aber} \quad x_2 = X_3, \quad x_3 = X_4$$

gesetzt. Hier wird also X_2 eliminiert.

Bei eventueller mehrmaliger Elimination gilt also

Satz 50. *Jedes Veronesesche Projektionsideal ist Eliminationsideal eines Veroneseschen Ideals.*

Nach 4.10., Satz 19ff., können mithin Basen von Veroneseschen Projektionsidealen aus der gemäß Satz 49 bekannten Basis des entsprechenden Veroneseschen Ideals durch sukzessive Elimination von Variablen zwar grundsätzlich berechnet werden, doch erweist sich dies als nicht zweckmäßig.

Hingegen ergeben sich bei dieser Betrachtungsweise Reduktionsmöglichkeiten bei der systematischen Aufstellung Veronesescher Projektionsideale. Einmal sind dies Parameterpermutationen, welche Permutationen der Variablen induzieren:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & \dots & t_d \\ t_{i_0} & t_{i_1} & \dots & t_{i_d} \end{pmatrix} \text{ führt zu } \begin{pmatrix} z_0 & z_1 & \dots & z_n \\ z_{j_0} & z_{j_1} & \dots & z_{j_n} \end{pmatrix} \\ \text{und damit } \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & \dots & X_n \\ X_{j_0} & X_{j_1} & \dots & X_{j_n} \end{pmatrix}; \end{array}\right\} \tag{180}$$

dadurch ist eine Äquivalenzrelation gegeben, und wir haben beispielsweise für $\mathfrak{v}_{23}^{(i)} \subset \mathbf{K}[X_0, \dots, X_9]$ nur drei Äquivalenzklassen, und zwar für $i = (0, 6, 9)$, $i = (1, 2, 3, 5, 7, 8)$ und $i = (4)$, vgl. Renschuch [19].

Für $d = 1$, also $m = n$, liefert (180) zwar nur:

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} t_0 & t_1 \\ t_1 & t_0 \end{pmatrix} \text{ führt zu } \begin{pmatrix} z_0 & z_1 & \dots & z_{m-1} & z_m \\ z_m & z_{m-1} & \dots & z_1 & z_0 \end{pmatrix} \\ \text{und damit } \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & \dots & X_{m-1} & X_m \\ X_m & X_{m-1} & \dots & X_1 & X_0 \end{pmatrix}; \end{array}$$

hier aber tritt dafür eine zweite Reduktionsmöglichkeit um so häufiger auf, wonach *gemeinsame Faktoren in der allgemeinen Nullstelle des Veroneseschen Projektionsideals abgespalten werden können;* so wird beispielsweise

$$\mathfrak{v}_{1m}^{(0)} = \mathfrak{v}_{1m}^{(m)} = \mathfrak{v}_{1,m-1}. \tag{181}$$

Und schließlich kann es passieren, daß *in der allgemeinen Nullstelle des betreffenden Veroneseschen Projektionsideals gewisse der Parameter $t_0, t_1, \dots, t_d$ nur in bestimmten Potenzen auftreten,* wodurch ebenfalls eine Reduktion auf kleineres m möglich ist.

Hierfür geben wir ein Beispiel an. Das Veronesesche Ideal $\mathfrak{v}_{16}$ hat die allgemeine Nullstelle

$$z_0 = t_0^6, \quad z_1 = t_0^5 t_1, \quad z_2 = t_0^4 t_1^2, \quad z_3 = t_0^3 t_1^3, \quad z_4 = t_0^2 t_1^4, \quad z_5 = t_0 t_1^5, \quad z_6 = t_1^6,$$

also hat das Veronesesche Projektionsideal $\mathfrak{v}_{16}^{(1,3,5)}$ die allgemeine Nullstelle

$$y_0 = t_0^6, \quad y_1 = t_0^4 t_1^2, \quad y_2 = t_0^2 t_1^4, \quad y_3 = t_1^6, \tag{182}$$

und in (182) sind y_0, y_1, y_2, y_3 Funktionen von t_0^2 und t_1^2. Setzen wir daher $s_0 := t_0^2$, $s_1 := t_1^2$, so geht (182) über in

$$y_0 = s_0^3, \quad y_1 = s_0^2 s_1, \quad y_2 = s_0 s_1^2, \quad y_3 = s_1^3,$$

und daraus folgt $\mathfrak{v}_{16}^{(1,3,5)} = \mathfrak{v}_{13}$.

Diese drei Reduktionsmöglichkeiten wurden bei den Aufzählungen in 8.2., 8.3. und 8.4. berücksichtigt.

Von Gröbner wurde in [7], 2, VI bzw. 5, 6 weiterhin folgendes bewiesen:

$$L(\mathfrak{v}_{dm}) = r,$$

d. h., alle Veroneseschen Ideale sind perfekt,

$$L(\mathfrak{v}_{dm}^{(1)}) = r + d - 1 \quad \text{für} \quad d \geqq 2,\ m \geqq 3,$$

diese Veroneseschen Projektionsideale sind also imperfekt,

$$L(\mathfrak{v}_{dm}^{(d+1)}) = r + d \quad \text{für} \quad m \geqq 4,$$

und folglich sind auch diese Veroneseschen Projektionsideale imperfekt.

Bei Veroneseschen Idealen und Veroneseschen Projektionsidealen können wir nun die Hilbertfunktion und das charakteristische Polynom gemäß Satz 44 aus der Anzahl der Hilbertschen Gleichungen berechnen. Nach Definition 9 und Definition 10 sind die Koordinatenfunktionen der allgemeinen Nullstelle eines Veroneseschen Ideals oder Veroneseschen Projektionsideals verschiedene Potenzprodukte m-ten Grades in $t_0, t_1, \ldots, t_d$; in (138) entspricht also nach Einsetzen der jeweiligen allgemeinen Nullstelle jedem Potenzprodukt t-ten Grades in $x_0, x_1, \ldots, x_n$ genau ein Potenzprodukt mt-ten Grades in $t_0, t_1, \ldots, t_d$, aber nicht umgekehrt. Bei den daraus durch Koeffizientenvergleich gewonnenen Hilbertschen Gleichungen tritt jedes u_i nur einmal auf; die so gewonnenen Hilbertschen Gleichungen sind also linear unabhängig; nach Satz 44 ist also die Hilbertfunktion gleich der Anzahl der nach Einsetzen der allgemeinen Nullstelle auftretenden Potenzprodukte mt-ten Grades in $t_0, t_1, \ldots, t_d$; diese ist (da ja nicht alle diese Potenzprodukte aufzutreten brauchen) nach der Hurwitzschen Formel (Kap. 5, (94)) höchstens gleich $\binom{mt+d}{d}$; mithin gilt

Satz 51. *Die Hilbertfunktion eines Veroneseschen Projektionsideals ist gleich der Anzahl der nach Einsetzen der allgemeinen Nullstelle in* (138) *auftretenden Potenzprodukte mt-ten Grades in* $t_0, t_1, \ldots, t_d$.

Beispiel. Bei $\mathfrak{v}_{dm}^{(1)}$ ist $y_0 = t_0^m$, $y_1 = t_0^{m-1} t_2, \ldots$; für $t \geqq 1$, $m \geqq 3$ tritt nach Einsetzen der allgemeinen Nullstelle das Potenzprodukt $t_0^{mt-1} t_1$ nicht auf; es ist also für $m \geqq 3$, $t \geqq 1$

$$H(t; \mathfrak{v}_{dm}^{(1)}) = P(t; \mathfrak{v}_{dm}^{(1)}) = \binom{mt+d}{d} - 1.$$

Bei Veroneseschen Idealen $\mathfrak{v}_{dm}$ können wegen der allgemeinen Nullstelle (173), in der jedes Potenzprodukt m-ten Grades in $t_0, t_1, \ldots, t_d$ vorkommt, derartige Fälle *nicht* auftreten; wir haben mithin (vgl. GRÖBNER [7], 2. II) den

Satz 52. *Für die Hilbertfunktion Veronesescher Ideale $\mathfrak{v}_{dm}$ gilt*

$$H(t; \mathfrak{v}_{dm}) = P(t; \mathfrak{v}_{dm}) = \binom{mt + d}{d} \quad \textit{für} \quad \textit{alle} \quad t \in \mathbf{N}, \tag{183}$$

also insbesondere

$$h_0(\mathfrak{v}_{dm}) = m^d. \tag{184}$$

Aus (183) wollen wir eine Folgerung ziehen. Nach (1) ist

$$V(t; \mathfrak{a}) = \binom{t + n}{n} - H(t; \mathfrak{a}) = \binom{t + n}{t} - H(t; \mathfrak{a});$$

mit (172) und (183) folgt daraus für Veronesesche Ideale

$$V(t; \mathfrak{v}_{dm}) = \binom{t - 1 + N}{t} - \binom{mt + d}{d} \quad \text{mit} \quad N = \binom{m + d}{d}; \tag{185}$$

wegen Satz 49 ist die Anzahl der Elemente einer Minimalbasis von $\mathfrak{v}_{dm}$ gerade durch $V(2; \mathfrak{v}_{dm})$ gegeben; mithin gilt (vgl. GRÖBNER [2], Kap. III, (3.9), und [7], 2. (III))

Satz 53. *Jede Minimalbasis des Veroneseschen Ideals $\mathfrak{v}_{dm}$ besteht aus genau*

$$V(2; \mathfrak{v}_{dm}) = \binom{1 + N}{2} - \binom{2m + d}{d} \quad \textit{mit} \quad N = \binom{m + d}{d} \tag{186}$$

quadratischen Basisformen.

Wie bereits vor Satz 51 bemerkt wurde, entspricht bei einem Veroneseschen Projektionsideal nach Einsetzen der allgemeinen Nullstelle in (138) jedem Potenzprodukt t-ten Grades in $x_0, x_1, \ldots, x_n$ genau ein Potenzprodukt mt-ten Grades in $t_0, t_1, \ldots, t_d$, aber nicht umgekehrt; Formen t-ten Grades entstehen gerade aus der Gleichheit der Potenzprodukte mt-ten Grades in $t_0, t_1, \ldots, t_d$ bei Ungleichheit der Potenzprodukte t-ten Grades in $x_0, x_1, \ldots, x_n$ und lassen sich daher auf Binome der Gestalt $p_i - p_j$ reduzieren, wobei p_i, p_j Potenzprodukte t-ten Grades in $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sind; wird dies für $t = 2, 3, 4, \ldots$ durchgeführt, so folgt für die Basisformen Veronesescher Projektionsideale die gegenüber Satz 49 schwächere Aussage von

Satz 54. *Die Basiselemente eines Veroneseschen Projektionsideals aus $\mathbf{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ sind Binome der Gestalt*

$$p_i - p_j, \tag{187}$$

worin p_i und p_j Potenzprodukte gleichen Grades in $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sind.

Aus Satz 54 ergibt sich nun eine Methode zur Bestätigung der Vollständigkeit der Basis eines Veroneseschen Projektionsideals, die wir hier für den Spezialfall $d = 1$ erläutern wollen. Für $d = 1$ ist $\mathfrak{v}_{1m}$ gegeben durch die allgemeine Nullstelle

$$z_0 = t_0{}^m, \quad z_1 = t_0{}^{m-1}t_1, \quad z_2 = t_0{}^{m-2}t_1{}^2, \quad \ldots, \quad z_m = t_1{}^m, \tag{188}$$

erzeugt also ein primes H-Ideal in $\mathbf{K}[X_0, X_1, \ldots, X_m]$. Für $m = 3$ liefert dies das bereits des öfteren in Beispielen benutzte prime H-Ideal $\mathfrak{v}_{13} \subset \mathbf{K}[X_0, X_1, X_2, X_3]$.

Ist in (188) $m \geqq 4$, so gelangen wir durch $(m-3)$-malige Elimination und anschließende Rückindizierung der verbliebenen vier Variablen zu einem Veroneseschen Projektionsideal in $\mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$, nämlich

$$\mathfrak{p}_3 := \mathfrak{v}_{1m}^{(i_1, i_2, \ldots, i_{m-3})} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]; \tag{189}$$

das einfachste Beispiel ist das häufig in Beispielen herangezogene prime H-Ideal $\mathfrak{v}_{14}^{(2)}$.

Aus Satz 54 folgt, daß wir uns in $\mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ bei der Kontrolle der Vollständigkeit von Basen solcher Ideale auf die folgenden vier Typen beschränken können (vgl. Renschuch [6, 11]):

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{(A)} & x_i{}^a - x_j{}^a & \text{mit } \ a \in \mathbf{N}^*, \\
\text{(B)} & x_i{}^a x_j{}^b - x_k{}^{a+b} & \text{mit } \ a, b \in \mathbf{N}^*, \\
\text{(C)} & x_i{}^a x_j{}^b x_k{}^c - x_l{}^{a+b+c} & \text{mit } \ a, b, c \in \mathbf{N}^*, \\
\text{(D)} & x_i{}^a x_j{}^b - x_k{}^c x_l{}^{a+b-c} & \text{mit } \ a, b, c, a+b-c \in \mathbf{N}^*.
\end{array}\right\} \tag{190}$$

Durch (190) sind (wie der Leser nachrechnen möge) $6 + 12 + 4 + 3 = 25$ Fälle zur Nachprüfung vorgegeben; für den Typ (A) sind dies die sechs Möglichkeiten

$$(i, j) = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}.$$

Wegen (181)ff. können wir für alle allgemeinen Nullstellen der Primideale $\mathfrak{p}_3$ (vgl. (189)) die Bauart

$$\left.\begin{array}{l}
y_0 = t_0{}^m, \quad y_1 = t_0{}^{m-m_1}t_1{}^{m_1}, \quad y_2 = t_0{}^{m-m_2}t_1{}^{m_2}, \quad y_3 = t_1{}^m \\
\text{mit } \ 1 \leqq m_1 < m_2 \leqq m - 1 \quad \text{und} \quad m \sqcap m_1 \sqcap m_2 = 1
\end{array}\right\} \tag{191}$$

voraussetzen.

Für den ersten Fall vom Typ (A), also für $i = 0$, $j = 1$ folgt $x_0{}^a - x_1{}^a$; darin (191) eingesetzt, ergibt sich

$$y_0{}^a - y_1{}^a = t_0{}^{ma} - t_0{}^{ma-m_1a}t_1{}^{m_1a} = 0 \text{ id. in } t_0, t_1;$$

hieraus folgt durch Exponentenvergleich $m_1a = 0$; wegen (191) ist $m_1 \geqq 1$, also $a = 0$ im Widerspruch zu $a \in \mathbf{N}^*$, also zu $a \geqq 1$. In entsprechender Weise führen die anderen fünf Fälle vom Typ (A) auf Widersprüche; Typ (A) kann also nicht auftreten.

In analoger Weise fallen noch weitere elf Fälle bei den Typen (B), (C), (D) fort; als ein Beispiel führen wir dies für den ersten Fall vom Typ (D), also für $(i, j, k, l) = (0, 1, 2, 3)$ aus:

$$\begin{aligned} x_0{}^a x_1{}^b - x_2{}^c x_3{}^{a+b-c} \mapsto y_0{}^a y_1{}^b &- y_2{}^c y_3{}^{a+b-c} \\ &= t_0{}^{ma} t_0{}^{mb-m_1 b} t_1{}^{m_1 b} - t_0{}^{mc-m_2 c} t_1{}^{m_2 c} t_1{}^{ma+mb-mc} \\ &= t_0{}^{ma+mb-m_1 b} t_1{}^{m_1 b} - t_0{}^{mc-m_2 c} t_1{}^{ma+mb-mc+m_2 c} \\ &= 0 \text{ id. in } t_0, t_1 . \end{aligned}$$

Durch Exponentenvergleich folgt $ma + mb - m_1 b - mc + m_2 c = 0$, also

$$(m - m_1)(a + b - c) + m_1 a + (m_2 - m_1) c = 0, \tag{192}$$

und wegen (191) sind $m - m_1 \geqq 1$, $m_1 \geqq 1$, $m_2 - m_1 \geqq 1$; andererseits sind nach (190) $a \geqq 1$, $c \geqq 1$ und $a + b - c \geqq 1$ im Widerspruch zu (192).

Nach Wegfall derartiger Fälle bleiben für alle gemäß (189) definierten $\mathfrak{p}_3$, also für alle allgemeinen Nullstellen (191), nur noch folgende acht Bauarten übrig:

$$\left.\begin{array}{l} \text{vom Typ (B): } x_0{}^a x_2{}^b - x_1{}^{a+b},\ x_0{}^a x_3{}^b - x_1{}^{a+b},\ x_0{}^a x_3{}^b - x_2{}^{a+b},\ x_1{}^a x_3{}^b - x_2{}^{a+b}, \\ \text{vom Typ (C): } x_0{}^a x_2{}^b x_3{}^c - x_1{}^{a+b+c},\ x_0{}^a x_1{}^b x_3{}^c - x_2{}^{a+b+c}, \\ \text{vom Typ (D): } x_0{}^a x_2{}^b - x_1{}^c x_3{}^{a+b-c},\ x_0{}^a x_3{}^b - x_1{}^c x_2{}^{a+b-c}. \end{array}\right\} \tag{193}$$

Diese Typenreduktion ist ein großer Vorteil. Sie ist eine spezifische Eigenschaft für $d = 1$; so waren es bei der Untersuchung der $\mathfrak{v}_{22}^{(i)}$ für verschiedene i nicht immer dieselben Fälle, die wegen bei den Exponenten auftretender Widersprüche ausfielen; auch konnte die allgemeine Nullstelle nicht (wie für $d = 1$ durch (191)) generell charakterisiert werden. Der Leser hat hier ein Beispiel dafür, daß *Eigenschaften, die für $d = 1$ gelten, für $d \geqq 2$ nicht mehr richtig zu sein brauchen.* Dagegen ließ sich unser Prinzip für die eindimensionalen H-Ideale

$$\mathfrak{p}_4 := \mathfrak{v}_{1m}^{(i_1, i_2, \ldots, i_{m-4})} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \tag{194}$$

übertragen; von 80 möglichen Fällen schieden hier 39 Fälle generell aus, und es verblieben 41; da wir jetzt fünf Variable haben, kommen noch zwei weitere Typen (E) und (F) hinzu, wie sich der Leser überlegen möge. Die zu (194) gehörige allgemeine Nullstelle ist jeweils von der Bauart

$$\left.\begin{array}{l} y_0 = t_0{}^m,\ y_1 = t_0{}^{m-m_1} t_1{}^{m_1},\ y_2 = t_0{}^{m-m_2} t_1{}^{m_2},\ y_3 = t_0{}^{m-m_3} t_1{}^{m_3},\ y_4 = t_1{}^m \\ \text{mit} \quad 1 \leqq m_1 < m_2 < m_3 \leqq m - 1 \quad \text{und} \quad m \sqcap m_1 \sqcap m_2 \sqcap m_3 = 1 . \end{array}\right\} \tag{195}$$

Hingegen gelang es bisher nicht, aus (192) und (193) und entsprechend aus (194) und (195) die Basen generell anzugeben; vielmehr wurden bei den Beispielen in 8.3. und 8.4. die Rechnungen für jedes m_1, m_2, m bzw. m_1, m_2, m_3, m gesondert durchgeführt. Lediglich für die Ideale $\mathfrak{v}_{1m}^{*}$ und $\mathfrak{v}_{1m}^{**}$ (vgl. Kap. 4, Beispiele 1 und 2, (165) und (166)) gelangen die Reduktionen der Fallunterscheidungen von (193) für beliebiges m.

Wir wollen nun zeigen, wie man für $d = 1$, $n = 3$ die verbliebenen acht Fälle (193) durchtesten kann. Das entscheidende Hilfsmittel ist dabei die in 1.2. eingeführte Kongruenzrechnung nach Idealen.

Wir zeigen dies wieder einmal an dem häufig als Beispiel herangezogenen primen H-Ideal $\mathfrak{v}_{14}^{(2)} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ mit der allgemeinen Nullstelle

$$y_0 = t_0^4, \quad y_1 = t_0^3 t_1, \quad y_2 = t_0 t_1^3, \quad y_3 = t_1^4. \tag{196}$$

Es ist zu bestätigen, daß (F_1, F_2, F_3, F_4) mit

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= x_0 x_3 - x_1 x_2, \\ F_2 &= x_0^2 x_2 - x_1^3, \\ F_3 &= x_0 x_2^2 - x_1^2 x_3, \\ F_4 &= x_1 x_3^2 - x_2^3 \end{aligned}\right\} \tag{197}$$

eine Basis von $\mathfrak{v}_{14}^{(2)}$ ist. Wir können uns F_1, F_2, F_3, F_4 aus (196) wie im Anschluß an Satz 43 gewonnen denken und wollen nun die Vollständigkeit der Basis (F_1, F_2, F_3, F_4) nachweisen. Dazu sind die acht Fälle (193) durchzutesten. Wir benötigen dazu zwei Hilfsformen, die in $\mathfrak{v}_{14}^{(2)}$ und auch in (F_1, F_2, F_3, F_4) enthalten sind, nämlich

$$\left.\begin{aligned} F_5 &:= x_0^3 x_3 - x_1^4 = x_0^2 F_1 + x_1 F_2, \\ F_6 &:= x_0 x_3^3 - x_2^4 = x_3^2 F_1 + x_2 F_4. \end{aligned}\right\} \tag{198}$$

Dann sind die Fälle vom Typ (B) schnell zu erledigen, beispielsweise

$$x_0^a x_2^b - x_1^{a+b} \mapsto y_0^a y_2^b - y_1^{a+b} = t_0^{4a+b} t_1^{3b} - t_0^{3a+3b} t_1^{a+b} = 0,$$

also $a = 2b$, mithin

$$(x_0^2 x_2)^b \equiv (x_1^3)^b \bmod (F_2)$$

(vgl. Kap. 1, (14)), also ist

$$(x_0^2 x_2)^b - x_1^{3b} \in (F_2) \subset (F_1, F_2, F_3, F_4).$$

Entsprechend folgt

$$x_0^a x_3^b - x_1^{a+b} \mapsto y_0^a y_3^b - y_1^{a+b} = t_0^{4a} t_1^{4b} - t_0^{3a+3b} t_1^{a+b} = 0,$$

also $a = 3b$, mithin

$$(x_0^3 x_3)^b - x_1^{4b} \in (F_5) \subset (F_1, F_2, F_3, F_4).$$

Auch für die beiden Fälle des Typs (C) von (193) ergeben sich keine Schwierigkeiten; wir zeigen dies für den zweiten Fall:

$$x_0^a x_1^b x_3^c - x_2^{a+b+c} \mapsto y_0^a y_1^b y_3^c - y_2^{a+b+c} = t_0^{4a+3b} t_1^{b+4c} - t_0^{a+b+c} t_1^{3a+3b+3c} = 0,$$

also $c = 3a + 2b$, mithin

$$(x_0 x_3^3)^a (x_1 x_3^2)^b - (x_2^4)^a (x_2^3)^b \in (F_6, F_4) \subset (F_1, F_2, F_3, F_4)$$

nach Kap. 1, (15).

Wir behandeln noch die beiden Möglichkeiten für den Typ (D):

$$x_0^a x_2^b - x_1^c x_3^{a+b-c} \mapsto y_0^a y_2^b - y_1^c y_3^{a+b-c} = t_0^{4a+b} t_1^{3b} - t_0^{3c} t_1^{4a+4b-3c} = 0,$$

also $b = 3c - 4a > 0$, mithin $c > 4a/3 > a$, folglich $c = a + d$, also

$$b = 3d - a \quad \text{und} \quad a + b - c = 2d - a.$$

Jetzt sind drei Fallunterscheidungen zu treffen. Für $d < a$, also $a = d + k$, wird $a + b - c = d - k > 0$, also $d = k + h$ und mithin $a = 2k + h$, $b = k + 2h$, $c = 3k + 2h$, $a + b - c = h$, folglich

$$(x_0^2 x_2)^k (x_0 x_2^2)^h - (x_1^3)^k (x_1^2 x_3)^h \in (F_2, F_3) \subset (F_1, F_2, F_3, F_4).$$

Der Fall $d = a$ liefert $c = 2a$, $b = 2a$, $a + b - c = a$, also

$$(x_0 x_2^2)^a - (x_1^2 x_3)^a \in (F_3) \subset (F_1, F_2, F_3, F_4).$$

Für $d > a$ setzen wir $d = a + k$ und erhalten $c = 2a + k$, $b = 2a + 3k$, $a + b - c = a + 2k$ und damit

$$(x_0 x_2^2)^a (x_2^3)^k - (x_1^2 x_3)^a (x_1 x_3^2)^k \in (F_3, F_4) \subset (F_1, F_2, F_3, F_4).$$

Entsprechend findet man für $x_0^a x_3^b - x_1^c x_2^{a+b+c}$ die Bestimmungsgleichung $b = 3a - 2c$ und hat die Fallunterscheidungen $a < c$, $a = c$, $a > c$ zu treffen, wobei der Fall $a = c$ auf $b = c$ und damit auf F_1 führt.

Damit haben wir endlich den Nachweis der Vollständigkeit der Basis (F_1, F_2, F_3, F_4) für das so oft als Beispiel benutzte homogene Primideal $\mathfrak{p}_{14}^{(2)} \in \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ erbracht. Entsprechend sind die Basen für alle anderen Beispiele in 8.2. und 8.3. und für die $\mathfrak{p}_{22}^{(1)}$ in 8.4. abgesichert.

6.9. Ergänzende Bemerkungen

Mit der Hilbertfunktion wird nach der bereits in MfL Bd. 1, 3.7., behandelten Eulerschen Funktion $\varphi(m)$ und der Funktion $\pi(n)$, der Anzahl aller Primzahlen p mit $p \leqq n$, dem Leser eine weitere Anzahlfunktion dargeboten; die letztgenannten Anzahlfunktionen unterscheiden sich schon dadurch von der Hilbertfunktion (und von der Volumfunktion), daß sich Hilbertfunktion und Volumfunktion auf Formen und Ideale beziehen. Für die Invarianz gegenüber linearen Transformationen verweisen wir auf Satz 2ff. Der Beweis von Satz 15 ist ein Induktionsbeweis, bei welchem die Rekursionsformel (38) bereits vorher bewiesen wurde.

Die am Schluß von 6.4. gegebene Charakterisierung der Ordnung als Anzahl der Schnittpunkte mit einem linearen Unterraum kann beispielsweise zur Erklärung von Kurven m-ter Ordnung im zwei- und dreidimensionalen Raum bereits im Schulunterricht der Klasse 12 Erwähnung finden.

Zum Satz von Bézout verweisen wir auf das im Anschluß an (133) gegebene Beispiel der Ebene. Daß die durch $x^2 + 9y^2 = 9$ gegebene Ellipse und die durch $3y = x^3 - 6x$ gegebene kubische Parabel sechs reelle Schnittpunkte haben, könnte bereits im Schulunterricht der 12. Klasse durch Extremwertbetrachtungen bestätigt werden; dabei könnte der Satz von BEZOUT Erwähnung finden.

Da lineare Parameterdarstellungen bereits in der 11. und 12. Klasse im Schulunterricht behandelt werden, ist die Möglichkeit der Bestimmung von parameterfreien Gleichungen gemäß (160), (161), (162) schon in der Schule gegeben, dort aber von geringem Wert. Demgegenüber könnte die Verwendung dieser Methode im Grundkurs den Studenten frühzeitiger und einmal mehr mit der Methode des Koeffizientenvergleichs vertraut machen.

Zum Schluß noch eine Bemerkung zu den erkenntnistheoretischen Fragen in Zusammenhang mit der Gültigkeit des Satzes von BEZOUT, die in größerem Rahmen als Fragen nach dem Wert von Arbeitshypothesen und Programmen in der Mathematik überhaupt zu sehen sind. Hier wird der Leser vor allem an das sogenannte „Erlanger Programm" von FELIX KLEIN [1], vgl. auch MfL Bd. 7, 3.1., und die damit gegebene Verbindung zur seinerzeitigen Modernisierung des Mathematikunterrichts denken. Weniger bekannt ist vielleicht die (dem Verfasser durch einen 1958 gehaltenen Vortrag von W. KRULL bekanntgewordene) Tatsache, daß FELIX KLEIN nicht gerade zu den Förderern von EMMY NOETHER gehörte; eine Passage in dem Vortrag von H. BEHNKE (vgl. [1]) über FELIX KLEIN dürfte auch in dieser Hinsicht zu verstehen sein. In diesem Zusammenhang sollen auch die „*Schwächen und Mängel von Kleins gesellschaftlichem Engagement*" erwähnt werden (Zitat nach H. WUSSING in KLEIN [1]). Hier besteht aber auch ein Zusammenhang zu den Bestrebungen, den Satz von BEZOUT für $n \geqq 4$ ohne Korrekturglied auszusprechen. H. BEHNKE schreibt dazu in [1]: „*Liest man die Arbeiten der Göttinger aus der Zeit der Jahrhundertwende (vor allem von Klein und Hilbert), so stößt man immer wieder auf die Vermutung, daß, was für den* R^3 *richtig ist, auch für den* R^n, $n > 3$ *gilt und was für den* C^2 *gilt, auch richtig ist für den* C^n, $n > 2$. *In der komplexen Topologie hat man nun gelernt, daß dies keinesfalls zutrifft. … So kommen wir mit den Annahmen der Göttinger nicht mehr aus. Dazu sind unsere Aufgaben zu verfeinert.*"

Mit diesen Bemerkungen sollten einige grundsätzliche Probleme berührt worden sein, deren Behandlung in größerem Zusammenhang auch aus historischer und philosophischer Sicht wünschenswert wäre.

7. Tabellen

In 7.1. bis 7.5. werden die Potenzprodukte anstelle von $p_1, \ldots, p_N$ mit $(1), \ldots, (N)$ bezeichnet diese Symbolik wurde teilweise auch im Text benutzt. Die Reihenfolge erfolgt durchweg gemäß der lexikographischen Anordnung.

7.1. Tabelle 1: Potenzprodukte zweiten Grades in x_0, x_1, x_2, x_3

$(1) = x_0^2$,	$(4) = x_0x_3$,	$(7) = x_1x_3$,	$(9) = x_2x_3$,
$(2) = x_0x_1$,	$(5) = x_1^2$,	$(8) = x_2^2$,	$(10) = x_3^2$.
$(3) = x_0x_2$,	$(6) = x_1x_2$,		

7.2. Tabelle 2: Potenzprodukte dritten Grades in x_0, x_1, x_2, x_3

$(1) = x_0^3$,	$(6) = x_0x_1x_2$,	$(11) = x_1^3$,	$(16) = x_1x_3^2$,
$(2) = x_0^2x_1$,	$(7) = x_0x_1x_3$,	$(12) = x_1^2x_2$,	$(17) = x_2^3$,
$(3) = x_0^2x_2$,	$(8) = x_0x_2^2$,	$(13) = x_1^2x_3$,	$(18) = x_2^2x_3$,
$(4) = x_0^2x_3$,	$(9) = x_0x_2x_3$,	$(14) = x_1x_2^2$,	$(19) = x_2x_3^2$,
$(5) = x_0x_1^2$,	$(10) = x_0x_3^2$,	$(15) = x_1x_2x_3$,	$(20) = x_3^3$.

7.3. Tabelle 3: Potenzprodukte vierten Grades in x_0, x_1, x_2, x_3

$(1) = x_0^4$,
$(2) = x_0^3x_1$,
$(3) = x_0^3x_2$,
$(4) = x_0^3x_3$,
$(5) = x_0^2x_1^2$,
$(6) = x_0^2x_1x_2$,
$(7) = x_0^2x_1x_3$,
$(8) = x_0^2x_2^2$,
$(9) = x_0^2x_2x_3$,
$(10) = x_0^2x_3^2$,
$(11) = x_0x_1^3$,
$(12) = x_0x_1^2x_2$,
$(13) = x_0x_1^2x_3$,
$(14) = x_0x_1x_2^2$,
$(15) = x_0x_1x_2x_3$,
$(16) = x_0x_1x_3^2$,
$(17) = x_0x_2^3$,
$(18) = x_0x_2^2x_3$,
$(19) = x_0x_2x_3^2$,
$(20) = x_0x_3^3$,
$(21) = x_1^4$,
$(22) = x_1^3x_2$,
$(23) = x_1^3x_3$,
$(24) = x_1^2x_2^2$,
$(25) = x_1^2x_2x_3$,
$(26) = x_1^2x_3^2$,
$(27) = x_1x_2^3$,
$(28) = x_1x_2^2x_3$,
$(29) = x_1x_2x_3^2$,
$(30) = x_1x_3^3$,
$(31) = x_2^4$,
$(32) = x_2^3x_3$,
$(33) = x_2^2x_3^2$,
$(34) = x_2x_3^3$,
$(35) = x_3^4$.

7.4. Tabelle 4: Potenzprodukte fünften Grades in x_0, x_1, x_2, x_3

$(1) = x_0^5$,
$(2) = x_0^4x_1$,
$(3) = x_0^4x_2$,
$(4) = x_0^4x_3$,
$(5) = x_0^3x_1^2$,
$(6) = x_0^3x_1x_2$,
$(7) = x_0^3x_1x_3$,
$(8) = x_0^3x_2^2$,
$(9) = x_0^3x_2x_3$,
$(10) = x_0^3x_3^2$,
$(11) = x_0^2x_1^3$,
$(12) = x_0^2x_1^2x_2$,
$(13) = x_0^2x_1^2x_3$,
$(14) = x_0^2x_1x_2^2$,
$(15) = x_0^2x_1x_2x_3$,
$(16) = x_0^2x_1x_3^2$,
$(17) = x_0^2x_2^3$,
$(18) = x_0^2x_2^2x_3$,
$(19) = x_0^2x_2x_3^2$,
$(20) = x_0^2x_3^3$,
$(21) = x_0x_1^4$,
$(22) = x_0x_1^3x_2$,
$(23) = x_0x_1^3x_3$,
$(24) = x_0x_1^2x_2^2$,
$(25) = x_0x_1^2x_2x_3$,
$(26) = x_0x_1^2x_3^2$,
$(27) = x_0x_1x_2^3$,
$(28) = x_0x_1x_2^2x_3$,
$(29) = x_0x_1x_2x_3^2$,
$(30) = x_0x_1x_3^3$,
$(31) = x_0x_2^4$,
$(32) = x_0x_2^3x_3$,
$(33) = x_0x_2^2x_3^2$,
$(34) = x_0x_2x_3^3$,
$(35) = x_0x_3^4$,
$(36) = x_1^5$,
$(37) = x_1^4x_2$,
$(38) = x_1^4x_3$,
$(39) = x_1^3x_2^2$,
$(40) = x_1^3x_2x_3$,
$(41) = x_1^3x_3^2$,
$(42) = x_1^2x_2^3$,
$(43) = x_1^2x_2^2x_3$,
$(44) = x_1^2x_2x_3^2$,
$(45) = x_1^2x_3^3$,
$(46) = x_1x_2^4$,
$(47) = x_1x_2^3x_3$,
$(48) = x_1x_2^2x_3^2$,
$(49) = x_1x_2x_3^3$,
$(50) = x_1x_3^4$,
$(51) = x_2^5$,
$(52) = x_2^4x_3$,
$(53) = x_2^3x_3^2$,
$(54) = x_2^2x_3^3$,
$(55) = x_2x_3^4$,
$(56) = x_3^5$.

7.5. Tabelle 5: Potenzprodukte sechsten Grades in x_0, x_1, x_2, x_3

$(1) = x_0^6$,
$(2) = x_0^5x_1$,
$(3) = x_0^5x_2$,
$(4) = x_0^5x_3$,
$(5) = x_0^4x_1^2$,
$(6) = x_0^4x_1x_2$,
$(7) = x_0^4x_1x_3$,
$(8) = x_0^4x_2^2$,
$(9) = x_0^4x_2x_3$,
$(10) = x_0^4x_3^2$,
$(11) = x_0^3x_1^3$,
$(12) = x_0^3x_1^2x_2$,

$(13) = x_0^3x_1^2x_3$,
$(14) = x_0^3x_1x_2^2$,
$(15) = x_0^3x_1x_2x_3$,
$(16) = x_0^3x_1x_3^2$,
$(17) = x_0^3x_2^3$,
$(18) = x_0^3x_2^2x_3$,
$(19) = x_0^3x_2x_3^2$,
$(20) = x_0^3x_3^3$,
$(21) = x_0^2x_1^4$,
$(22) = x_0^2x_1^3x_2$,
$(23) = x_0^2x_1^3x_3$,
$(24) = x_0^2x_1^2x_2^2$,
$(25) = x_0^2x_1^2x_2x_3$,
$(26) = x_0^2x_1^2x_3^2$,
$(27) = x_0^2x_1x_2^3$,
$(28) = x_0^2x_1x_2^2x_3$,
$(29) = x_0^2x_1x_2x_3^2$,
$(30) = x_0^2x_1x_3^3$,
$(31) = x_0^2x_2^4$,
$(32) = x_0^2x_2^3x_3$,
$(33) = x_0^2x_2^2x_3^2$,
$(34) = x_0^2x_2x_3^3$,
$(35) = x_0^2x_3^4$,
$(36) = x_0x_1^5$,
$(37) = x_0x_1^4x_2$,
$(38) = x_0x_1^4x_3$,
$(39) = x_0x_1^3x_2^2$,
$(40) = x_0x_1^3x_2x_3$,
$(41) = x_0x_1^3x_3^2$,
$(42) = x_0x_1^2x_2^3$,
$(43) = x_0x_1^2x_2^2x_3$,
$(44) = x_0x_1^2x_2x_3^2$,
$(45) = x_0x_1^2x_3^3$,
$(46) = x_0x_1x_2^4$,
$(47) = x_0x_1x_2^3x_3$,
$(48) = x_0x_1x_2^2x_3^2$,
$(49) = x_0x_1x_2x_3^3$,
$(50) = x_0x_1x_3^4$,
$(51) = x_0x_2^5$,
$(52) = x_0x_2^4x_3$,
$(53) = x_0x_2^3x_3^2$,
$(54) = x_0x_2^2x_3^3$,
$(55) = x_0x_2x_3^4$,
$(56) = x_0x_3^5$,
$(57) = x_1^6$,
$(58) = x_1^5x_2$,
$(59) = x_1^5x_3$,
$(60) = x_1^4x_2^2$,
$(61) = x_1^4x_2x_3$,
$(62) = x_1^4x_3^2$,
$(63) = x_1^3x_2^3$,
$(64) = x_1^3x_2^2x_3$,
$(65) = x_1^3x_2x_3^2$,
$(66) = x_1^3x_3^3$,
$(67) = x_1^2x_2^4$,
$(68) = x_1^2x_2^3x_3$,
$(69) = x_1^2x_2^2x_3^2$,
$(70) = x_1^2x_2x_3^3$,
$(71) = x_1^2x_3^4$,
$(72) = x_1x_2^5$,
$(73) = x_1x_2^4x_3$,
$(74) = x_1x_2^3x_3^2$,
$(75) = x_1x_2^2x_3^3$,
$(76) = x_1x_2x_3^4$,
$(77) = x_1x_3^5$,
$(78) = x_2^6$,
$(79) = x_2^5x_3$,
$(80) = x_2^4x_3^2$,
$(81) = x_2^3x_3^3$,
$(82) = x_2^2x_3^4$,
$(83) = x_2x_3^5$,
$(84) = x_3^6$.

7.6. Tabelle 6: Einige Werte von $6\binom{t+k+3}{3}$

$k = 1$: $(t+4)(t+3)(t+2) = t^3 + 9t^2 + 26t + 24$,
$k = 0$: $(t+3)(t+2)(t+1) = t^3 + 6t^2 + 11t + 6$,
$k = -1$: $(t+2)(t+1)\,t = t^3 + 3t^2 + 2t$,
$k = -2$: $(t+1)\,t(t-1) = t^3 - t$,
$k = -3$: $t(t-1)(t-2) = t^3 - 3t^2 + 2t$,
$k = -4$: $(t-1)(t-2)(t-3) = t^3 - 6t^2 + 11t - 6$,
$k = -5$: $(t-2)(t-3)(t-4) = t^3 - 9t^2 + 26t - 24$,
$k = -6$: $(t-3)(t-4)(t-5) = t^3 - 12t^2 + 47t - 60$,
$k = -7$: $(t-4)(t-5)(t-6) = t^3 - 15t^2 + 74t - 120$,
$k = -8$: $(t-5)(t-6)(t-7) = t^3 - 18t^2 + 107t - 210$,
$k = -9$: $(t-6)(t-7)(t-8) = t^3 - 21t^2 + 146t - 336$.

7.7. Tabelle 7: Einige Werte von $24\binom{t+k+4}{4}$

$$
\begin{array}{lll}
k = 1: & (t+5)(t+4)(t+3)(t+2) & = t^4 + 14t^3 + 71t^2 + 154t + 120, \\
k = 0: & (t+4)(t+3)(t+2)(t+1) & = t^4 + 10t^3 + 35t^2 + 50t + 24, \\
k = -1: & (t+3)(t+2)(t+1)\,t & = t^4 + 6t^3 + 11t^2 + 6t, \\
k = -2: & (t+2)(t+1)\,t\,(t-1) & = t^4 + 2t^3 - t^2 - 2t, \\
k = -3: & (t+1)\,t\,(t-1)(t-2) & = t^4 - 2t^3 - t^2 + 2t, \\
k = -4: & t(t-1)(t-2)(t-3) & = t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t, \\
k = -5: & (t-1)(t-2)(t-3)(t-4) & = t^4 - 10t^3 + 35t^2 - 50t + 24, \\
k = -6: & (t-2)(t-3)(t-4)(t-5) & = t^4 - 14t^3 + 71t^2 - 154t + 120, \\
k = -7: & (t-3)(t-4)(t-5)(t-6) & = t^4 - 18t^3 + 119t^2 - 342t + 360,
\end{array}
$$

8. Durchgerechnete Beispiele

8.1. Potenzproduktideale

8.1.1. $\mathfrak{a}_\pi = (x_0{}^2x_1,\ x_0x_2{}^2,\ x_1{}^2x_2,\ x_2{}^3) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2]$,
$\mathfrak{a}_\pi = (x_2, x_0{}^2) \cap (x_1, x_2{}^2) \cap (x_0{}^2, x_1{}^2, x_0x_2{}^2, x_2{}^3)$,

Syzygienkette: $\boldsymbol{U}^1_{14}$, $\boldsymbol{U}^2_{45}$, $\boldsymbol{U}^3_{52}$ mit

$$\boldsymbol{U}^2_{45} = \begin{pmatrix} 0 & x_1x_2 & x_2{}^2 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & -x_0x_1 & x_1{}^2 & 0 \\ 0 & x_0{}^2 & 0 & -x_0x_2 & x_2{}^2 \\ -x_0 & 0 & 0 & 0 & -x_1{}^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{U}^3_{52} = \begin{bmatrix} x_1{}^2 & 0 \\ 0 & x_2 \\ 0 & -x_1 \\ -x_2 & -x_0 \\ -x_0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P(t; \mathfrak{a}_\pi) = 4 = \binom{t+2}{2} - 4\binom{t-1}{2} + \binom{t-2}{2} + 4\binom{t-3}{2} - 2\binom{t-4}{2} \quad \text{für} \quad t \geqq 4,$$

für $m_0 = 3$ wird $H(3; \mathfrak{a}_\pi) = 6$.

8.1.2. $\mathfrak{a}_\pi = (x_0{}^4,\ x_0{}^3x_1,\ x_0{}^3x_2,\ x_0{}^2x_1{}^2,\ x_0{}^2x_1x_2,\ x_0x_1{}^3,\ x_1{}^4) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2]$,
$\mathfrak{a}_\pi = (x_0{}^3, x_0{}^2x_1, x_0x_1{}^3, x_1{}^4) \cap (x_2, x_0{}^4, x_0{}^3x_1, x_0{}^2x_1{}^2, x_0x_1{}^3, x_1{}^4)$,

Syzygienkette: $\boldsymbol{U}^1_{17}$, $\boldsymbol{U}^2_{78}$, $\boldsymbol{U}^3_{82}$ mit

$$\boldsymbol{U}^2_{78} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_0 & 0 & x_2 & x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_0 & -x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_0 & 0 & x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_0 & -x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{U}^3_{82} = \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ -x_1 & 0 \\ x_0 & 0 \\ 0 & x_2 \\ 0 & -x_1 \\ 0 & x_0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P(t;\mathfrak{a}_\pi) = 8 = \binom{t+2}{2} - 7\binom{t-2}{2} + 8\binom{t-3}{2} - 2\binom{t-4}{2} \quad \text{für} \quad t \geqq 4,$$

also auch bereits für $t = m_0 = 4$ im Gegensatz zu 8.1.1.

8.1.3. $\mathfrak{a}_\pi = (x_0, x_1^2, x_1x_2, x_1x_3) = (x_0, x_1) \cap (x_0, x_2, x_3, x_1^2) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$,

Syzygienkette: U_{14}^1, U_{46}^2, U_{64}^3, U_{41}^4 mit

$$U_{46}^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & 0 & 0 & 0 \\ -x_0 & 0 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & -x_0 & 0 & -x_1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & -x_0 & 0 & -x_0 & -x_2 \end{pmatrix},$$

$$U_{64}^3 = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & -x_1 & -x_2 & 0 \\ x_0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & x_0 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & x_0 & x_1 \end{pmatrix}, \quad U_{41}^4 = \begin{pmatrix} x_3 \\ -x_2 \\ x_1 \\ -x_0 \end{pmatrix},$$

$$P(t;\mathfrak{a}_\pi) = t + 1 = \binom{t+3}{3} - \binom{t+2}{3} - 3\binom{t+1}{3} + 6\binom{t}{3} - 4\binom{t-1}{3} + \binom{t-2}{3}$$
für $t \geqq 2$,

für $m_0 = 1$ wird $H(1;\mathfrak{a}_\pi) = 3$.

Wird die triviale Komponente weggelassen, so wird

$$P(t;\mathfrak{a}_\pi) = P(t; x_0, x_1) = t + 1 = \binom{t+3}{3} - 2\binom{t+2}{3} + \binom{t+1}{3}.$$

Zur Berechnung vgl. 7.6.

8.1.4. $\mathfrak{a}_\pi = (x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3) = (x_0, x_2) \cap (x_1, x_2) \cap (x_1, x_3) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$,

Syzygienkette: U_{13}^1, U_{32}^2 mit

$$U_{32}^2 = \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ -x_0 & x_3 \\ 0 & -x_1 \end{pmatrix},$$

$$P(t;\mathfrak{a}_\pi) = 3t + 1 = \binom{t+3}{3} - 3\binom{t+1}{3} + 2\binom{t}{3} \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbf{N}.$$

Dieses Potenzproduktideal hat dieselben Gradmatrizen und mithin dieselbe Hilbertfunktion wie das Veronesesche Ideal $\mathfrak{v}_{13}$. Zur Berechnung vgl. 7.6.

8.1.5. $\mathfrak{a}_\pi = (x_0x_2, x_0x_3, x_0x_4, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_4) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$,

$\mathfrak{a}_\pi = (x_0, x_1, x_2) \cap (x_0, x_1, x_4) \cap (x_0, x_3, x_4) \cap (x_2, x_3, x_4)$, Syzygienkette: $\boldsymbol{U}^1_{16}, \boldsymbol{U}^2_{68}, \boldsymbol{U}^3_{83}$ mit

$$\boldsymbol{U}^2_{68} = \begin{pmatrix} x_3 & x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & x_1 & x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_3 & x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_0 & 0 & 0 & 0 & x_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_0 & 0 & -x_3 & x_2 \\ 0 & -x_0 & 0 & 0 & 0 & -x_0 & 0 & -x_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{U}^3_{83} = \begin{pmatrix} x_4 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 \\ 0 & x_4 & 0 \\ x_2 & -x_1 & 0 \\ 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ 0 & x_0 & 0 \\ 0 & 0 & x_0 \end{pmatrix},$$

$$P(t; \mathfrak{a}_\pi) = 4t + 1 = \binom{t+4}{4} - 6\binom{t+2}{4} + 8\binom{t+1}{4} - 3\binom{t}{4} \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbf{N}.$$

Zur Berechnung vgl. 7.7.

8.1.6. $\mathfrak{a}_\pi = (x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$,

$\mathfrak{a}_\pi = (x_0, x_2, x_3) \cap (x_0, x_2, x_4) \cap (x_1, x_2, x_3) \cap (x_1, x_2, x_4) \cap (x_0, x_1, x_3, x_4)$,

Syzygienkette: $\boldsymbol{U}^1_{16}, \boldsymbol{U}^2_{69}, \boldsymbol{U}^3_{95}, \boldsymbol{U}^4_{51}$ mit

$$\boldsymbol{U}^2_{69} = \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_3x_4 \\ 0 & x_1 & x_3 & x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_0 & -x_0 & 0 & 0 & x_3 & x_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_0 & 0 & -x_1 & 0 & x_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_0 & 0 & -x_1 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 & -x_2 & -x_0x_1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{U}^3_{95} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x_3x_4 \\ x_3 & x_4 & 0 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & x_4 & 0 & 0 \\ 0 & -x_1 & -x_3 & 0 & 0 \\ x_0 & 0 & 0 & x_4 & 0 \\ 0 & x_0 & 0 & -x_3 & x_0x_3 \\ 0 & 0 & x_0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & -x_0 & -x_1 & x_0x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{U}^4_{51} = \begin{pmatrix} x_4 \\ -x_3 \\ x_1 \\ -x_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$P(t; \mathfrak{a}_\pi) = 4t + 1 = \binom{t+4}{4} - 6\binom{t+2}{4} + 8\binom{t+1}{4} + \binom{t}{4} - 4\binom{t}{4} - \binom{t-1}{4} + \binom{t-1}{4},$$

und aus dem letzten Term würde die Richtigkeit dieser Darstellung für $t \geqq 1$, also $t \in \mathbf{N}^*$ folgen. Da sich dieser letzte Term jedoch weghebt, gilt $P(t; \mathfrak{a}_\pi) = 4t + 1$ bereits für $t \geqq 0$, also $t \in \mathbf{N}$. Dadurch ist ein Beispiel gegeben, daß der letzte Term aus den Gradmatrizen der Syzygienkette nur eine Schranke, aber keine Grenze für das „genügend große t" liefert. Ferner läßt sich die Darstellung vereinfachen zu

$$P(t; \mathfrak{a}_\pi) = 4t + 1 = \binom{t+4}{4} - 6\binom{t+2}{4} + 8\binom{t+1}{4} - 3\binom{t}{4}$$

wie in 8.1.5., obwohl Gradmatrizen und Längen der Syzygienketten in beiden Fällen verschieden sind. Ein Vergleich von 8.1.5. und 8.1.6. zeigt weiterhin, daß zwei H-Ideale im gleichen Polynomring bei gleicher Dimension und gleichem charakteristischen Polynom trotz gleichem Gradvektor verschiedene Gradmatrizen haben können.

8.1.7. $\mathfrak{a}_\pi = (x_0x_3, x_0^2x_2, x_0x_2^2, x_1x_3^2) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$,

$\mathfrak{a}_\pi = (x_0, x_1) \cap (x_0, x_3^2) \cap (x_2, x_3) \cap (x_3, x_0^2, x_2^2)$,

Syzygienkette: $\boldsymbol{U}^1_{14}, \boldsymbol{U}^2_{44}, \boldsymbol{U}^3_{41}$ mit

$$\boldsymbol{U}^2_{44} = \begin{pmatrix} x_0x_2 & x_2^2 & x_1x_3 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & -x_3 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & -x_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{U}^3_{41} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$P(t; \mathfrak{a}_\pi) = 4t + 1 = \binom{t+3}{3} - \binom{t+1}{3} - 3\binom{t}{3} + 4\binom{t-1}{3} - \binom{t-2}{3} \quad \text{für} \quad t \geqq 2, \quad t \in \mathbf{N}^*.$$

Dieses Potenzproduktideal hat dieselben Gradmatrizen wie das Veronesesche Projektionsideal $\mathfrak{v}^{(2)}_{14}$.

8.1.8. $\mathfrak{a}_\pi = (x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$,

$\mathfrak{a}_\pi = (x_1, x_3) \cap (x_0, x_2, x_3) \cap (x_0, x_2, x_4) \cap (x_1, x_2, x_4)$,

Syzygienkette: $\boldsymbol{U}^1_{14}, \boldsymbol{U}^2_{44}, \boldsymbol{U}^3_{41}$ mit

$$\boldsymbol{U}^2_{44} = \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 & x_3x_4 \\ -x_0 & x_3 & 0 & 0 \\ 0 & -x_1 & x_4 & 0 \\ 0 & 0 & -x_2 & -x_0x_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{U}^3_{41} = \begin{pmatrix} x_3x_4 \\ x_0x_4 \\ x_0x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix},$$

$$P(t; \mathfrak{a}_\pi) = \binom{t}{2} + 5t = \binom{t+4}{4} - 4\binom{t+2}{4} + 3\binom{t+1}{4} + \binom{t}{4} - \binom{t-1}{4} \quad \text{für} \quad t \in \mathbf{N}^*.$$

Zur Berechnung vgl. 7.7.

8.1.9. $\mathfrak{a}_\pi = (x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_0x_3, x_0x_4, x_1^2) \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$,

$\mathfrak{a}_\pi = (x_0, x_1^2) \cap (x_1, x_2, x_3, x_4, x_0^2)$,

Syzygienkette: $\boldsymbol{U}^1_{16}, \boldsymbol{U}^2_{6,11}, \boldsymbol{U}^3_{11,10}, \boldsymbol{U}^4_{10,5}, \boldsymbol{U}^5_{51}$ mit

$$\boldsymbol{U}^2_{6,11} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 & 0 & 0 & x_3 & x_4 & 0 \\ 0 & 0 & -x_0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 & 0 & -x_2 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & -x_0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 & 0 & -x_2 & -x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U^3_{11,10} = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & 0 & x_3 & x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_1 & 0 & -x_2 & 0 & x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_1 & 0 & -x_2 & -x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 & x_4 & 0 & 0 \\ 0 & x_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 & 0 & x_4 & 0 \\ 0 & 0 & x_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 & -x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_0 & 0 & 0 & x_1 & 0 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_0 & 0 & 0 & x_1 & 0 & -x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix},$$

$$U^4_{10,5} = \begin{pmatrix} x_3 & 0 & -x_4 & 0 & 0 \\ -x_2 & x_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_3 & x_2 & 0 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 & x_4 & 0 \\ 0 & 0 & -x_1 & -x_3 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & x_2 & 0 \\ -x_0 & 0 & 0 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & x_0 & 0 & -x_3 \\ 0 & -x_0 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & -x_0 & -x_1 \end{pmatrix}, \quad U^5_{51} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ -x_1 \\ x_0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} P(t;\mathfrak{a}_\pi) &= 2\binom{t}{2} + 3\binom{t}{1} + 1 = t^2 + 2t + 1 \\ &= \binom{t+4}{4} - 6\binom{t+2}{4} + 11\binom{t+1}{4} - 10\binom{t}{4} + 5\binom{t-1}{4} - \binom{t-2}{4} \end{aligned}$$

für $t \geqq 2$, $t \in \mathbf{N}^*$.

Zur Berechnung vgl. 7.7.

8.1.10. $\mathfrak{a}_\pi = (x_0x_1x_2, x_0x_1x_3, x_0x_2x_4, x_0x_3x_5, x_0x_4x_5, x_1x_2x_5, x_1x_3x_4, x_1x_4x_5, x_2x_3x_4, x_2x_3x_5)$
$\subset K[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$,

vgl. Reisner [1].

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_\pi = {} & (x_0, x_1, x_2) \cap (x_0, x_1, x_3) \cap (x_0, x_2, x_4) \cap (x_0, x_3, x_5) \cap (x_0, x_4, x_5) \cap (x_1, x_2, x_5) \\ & \cap (x_1, x_3, x_4) \cap (x_1, x_4, x_5) \cap (x_2, x_3, x_4) \cap (x_2, x_3, x_5). \end{aligned}$$

Syzygienkette: $U^1_{1,10}$, $U^2_{10,15}$, $U^2_{15,6}$ bei Charakteristik 0, jedoch $U^1_{1,10}$, $U^2_{10,15}$, $U^3_{15,7}$, $U^4_{7,1}$ bei Charakteristik 2; wegen Kodim $\mathfrak{a}_\pi = 3$ ist also dieses Ideal perfekt bei Char $(K) = 0$, imperfekt bei Char $(K) = 2$; vgl. 5.18., Beispiel 5. Für die Hilbertfunktion folgt nach Kap. 6, (4), in beiden Fällen

$$\begin{aligned} H(t;\mathfrak{a}_\pi) &= \binom{t+5}{5} - 10\binom{t+2}{5} + 15\binom{t+1}{5} - 6\binom{t}{5} + \left[-\binom{t-1}{5} + \binom{t-1}{5}\right] \\ &= 10\binom{t}{2} + 5\binom{t}{1} + 1 = 5t^2 + 1 \quad \text{für} \quad t \in \mathbf{N}, \end{aligned}$$

da sich die bei Char $(K) = 2$ auftretenden Summanden in der eckigen Klammer wegheben. Wir haben damit erneut ein Beispiel, daß in Kap. 6, (4), durch den letzten Summanden nur eine *Schranke* für das „genügend große t“ von Kap. 6, Satz 15, gegeben ist; vgl. dazu die Bemerkungen im Anschluß an Kap. 6, (39), und 8.1.6.

8.2. Eindimensionale Veronesesche Projektionsideale in $\mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$

8.2.1. Die Ideale $\mathfrak{v}_{1m}^*$ der Macaulayschen Kurven

Hierbei handelt es sich um die Veroneseschen Projektionsideale $\mathfrak{v}_{1m}^* := \mathfrak{v}_{1m}^{(2,3,\ldots,m-2)}$ mit der allgemeinen Nullstelle $y_0 = t_0{}^m$, $y_1 = t_0{}^{m-1}t_1$, $y_2 = t_0 t_1{}^{m-1}$, $y_3 = t_1{}^m$ und (vgl. 4.27.) der Basisdarstellung $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ mit

$$\left.\begin{aligned}
F_1 &= x_0x_3 - x_1x_2, \\
F_2 &= x_0{}^{m-2}x_2 - x_1{}^{m-1}, \\
F_3 &= x_0{}^{m-3}x_2{}^2 - x_1{}^{m-2}x_3, \\
F_4 &= x_0{}^{m-4}x_2{}^3 - x_1{}^{m-3}x_3{}^2, \\
F_5 &= x_0{}^{m-5}x_2{}^4 - x_1{}^{m-4}x_3{}^3, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
F_{m-3} &= x_0{}^3x_2{}^{m-4} - x_1{}^4x_3{}^{m-5}, \\
F_{m-2} &= x_0{}^2x_2{}^{m-3} - x_1{}^3x_3{}^{m-4}, \\
F_{m-1} &= x_0x_2{}^{m-2} - x_1{}^2x_3{}^{m-3}, \\
F_m &= x_2{}^{m-1} - x_1x_3{}^{m-2}.
\end{aligned}\right\} \tag{A}$$

Nach Kap. 5, Satz 50, folgte (vgl. das Beispiel 3 im Anschluß an Satz 50 und (143) im Kap. 5) die Imperfektheit aller Ideale $\mathfrak{v}_{1m}^*$ wegen

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{v}_{1m}^*, x_1) &= (x_1, x_0x_3, x_0{}^{m-2}x_2, x_0{}^{m-3}x_2{}^2, \ldots, x_0x_2{}^{m-2}, x_0{}^{m-1}) \\
&= (x_0, x_1, x_2{}^{m-1}) \cap (x_1, x_2, x_3) \cap (x_1, x_3, x_0{}^{m-2}, x_0{}^{m-3}x_2{}^2, \ldots, x_0x_2{}^{m-2}).
\end{aligned} \tag{B}$$

Die Imperfektheit ergibt sich auch aus der Syzygienkette U_{1m}^1, $U_{m,2m-4}^2$, $U_{2m-4,m-3}^3$ mit

$$U_{m,2m-4}^2 = \begin{pmatrix}
x_1{}^{m-2} & x_0{}^{m-3}x_2 & x_1{}^{m-3}x_3 & \ldots & x_0x_2{}^{m-3} & x_1x_3{}^{m-3} & x_2{}^{m-2} \\
-x_2 & -x_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
x_0 & x_1 & -x_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & x_0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & -x_3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & x_1 & -x_2 & -x_3 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & x_0 & x_1
\end{pmatrix},$$

$$U^3_{2m-4,m-3} = \begin{pmatrix} x_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -x_1 & x_3 & \dots & 0 & 0 \\ x_0 & -x_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x_0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & \dots & x_0 & -x_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -x_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt für das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} P(t; \mathfrak{v}^*_{1m}) &= mt + 1 \\ &= \binom{t+3}{3} - \binom{t+1}{3} - (m-1)\binom{t-m+4}{3} + (2m-4)\binom{t-m+3}{3} \\ &\quad - (m-3)\binom{t-m+2}{3} \end{aligned}$$

für $t \geqq m - 3$, $m \geqq 4$, $m \in \mathbf{N}^*$, $t \in \mathbf{N}^*$

mit Hilfe von 7.6.

8.2.2. Die Ideale $\mathfrak{v}_{13}$, $\mathfrak{v}_{14}^{(i)}$, $\mathfrak{v}_{15}^{(i,j)}$, $\mathfrak{v}_{16}^{(i,j,k)}$, $\mathfrak{v}_{17}^{(h,i,j,k)}$

Wir fassen für diese Ideale die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen, wobei die Reduktionen gemäß 6.8. nur für $\mathfrak{v}_{14}^{(i)}$, $\mathfrak{v}_{15}^{(i,j)}$ und $\mathfrak{v}_{16}^{(1,3,5)}$ aufgeführt wurden:

Allgemeine Nullstelle	Zugehöriges Ideal	Reduzierbar auf	Basisformen	perfekt oder imperfekt	Begründung	Charakteristisches Polynom
$(t_0^3, t_0^2t_1, t_0t_1^2, t_1^3)$	$\mathfrak{b}_{13}$	—	$x_0x_2 - x_1^2$, $x_0x_3 - x_1x_2$, $x_1x_3 - x_2^2$	perfekt	$(\mathfrak{b}_{13}, x_2) = (x_0, x_1, x_2) \cap (x_2, x_3, x_1^2)$	$3t + 1$
$(t_0^3t_1, t_0^2t_1^2, t_0t_1^3, t_1^4)$	$\mathfrak{b}_{14}^{(0)}$	$= \mathfrak{b}_{13}$	—	—	—	—
$(t_0^4, t_0^2t_1^2, t_0t_1^3, t_1^4)$	$\mathfrak{b}_{14}^{(1)}$	—	$x_0x_3 - x_1^2$, $x_1x_3 - x_2^2$	perfekt	Ideal der Hauptklasse	$4t$
$(t_0^4, t_0^3t_1, t_0t_1^3, t_1^4)$	$\mathfrak{b}_{14}^{(2)}$	—	(A) für $m = 4$	imperfekt	(B) für $m = 4$	$4t + 1$
$(t_0^4, t_0^3t_1, t_0^2t_1^2, t_1^4$	$\mathfrak{b}_{14}^{(3)}$	$\sim \mathfrak{b}_{14}^{(1)}$	—	—	—	—
$(t_0^4, t_0^3t_1, t_0^2t_1^2, t_0t_1^3)$	$\mathfrak{b}_{14}^{(4)}$	$= \mathfrak{b}_{14}^{(3)}$	—	—	—	—
$(t_0^3t_1^2, t_0^2t_1^3, t_0t_1^4, t_1^5)$	$\mathfrak{b}_{15}^{(0,1)}$	$= \mathfrak{b}_{13}$	—	—	—	—
$(t_0^4t_1, t_0^2t_1^3, t_0t_1^4, t_1^5)$	$\mathfrak{b}_{15}^{(0,2)}$	$= \mathfrak{b}_{14}^{(1)}$	—	—	—	—
$(t_0^4t_1, t_0^3t_1^2, t_0t_1^4, t_1^5)$	$\mathfrak{b}_{15}^{(0,3)}$	$= \mathfrak{b}_{14}^{(2)}$	—	—	—	—
$(t_0^4t_1, t_0^3t_1^2, t_0^2t_1^3, t_1^5)$	$\mathfrak{b}_{15}^{(0,4)}$	$= \mathfrak{b}_{14}^{(3)}$	—	—	—	—
$(t_0^4t_1, t_0^3t_1^2, t_0^2t_1^3, t_0t_1^4)$	$\mathfrak{b}_{15}^{(0,5)}$	$= \mathfrak{b}_{13}$	—	—	—	—
$(t_0^5, t_0^2t_1^3, t_0t_1^4, t_1^5)$	$\mathfrak{b}_{15}^{(1,2)}$	—	$x_1x_3 - x_2^2$, $x_0x_2x_3 - x_1^3$, $x_0x_3^2 - x_1^2x_2$	perfekt	$(\mathfrak{b}_{15}^{(1,2)}, x_2) = (x_0, x_1, x_2) \cap (x_2, x_1x_3, x_3^2, x_1^3)$	$5t - 1$
$(t_0^5, t_0^3t_1^2, t_0t_1^4, t_1^5)$	$\mathfrak{b}_{15}^{(1,3)}$	—	$x_0x_2 - x_1^2$, $x_0x_3^2 - x_1x_2^2$, $x_1x_3^2 - x_2^3$	perfekt	$(\mathfrak{b}_{15}^{(1,3)}, x_1) = (x_0, x_1, x_2^3) \cap (x_1, x_2, x_3^2)$	$5t - 1$
$(t_0^5, t_0^3t_1^2, t_0^2t_1^3, t_1^5)$	$\mathfrak{b}_{15}^{(1,4)}$	—	$x_0x_3 - x_1x_2$, $x_0x_2^2 - x_1^3$, $x_1^2x_3 - x_2^3$	perfekt	$(\mathfrak{b}_{15}^{(1,4)}, x_1) = (x_0, x_1, x_2^3) \cap (x_0, x_3, x_2^2)$	$5t - 1$

Allgemeine Nullstelle	Zugehöriges Ideal	Reduzierbar auf	Basisformen	perfekt oder imperfekt	Begründung	Charakteristisches Polynom
$(t_0^5, t_0^3t_1^2, t_0^2t_1^3, t_0t_1^4)$	$\mathfrak{v}_{15}^{(1,5)}$	$= \mathfrak{v}_{14}^{(1)}$	—	—	—	—
$(t_0^5, t_0^4t_1, t_0t_1^4, t_1^5)$	$\mathfrak{v}_{15}^{(2,3)}$	—	(A) für $m = 5$	imperfekt	(B) für $m = 5$	$5t + 1$
$(t_0^5, t_0^4t_1, t_0^2t_1^3, t_1^5)$	$\mathfrak{v}_{15}^{(2,4)}$	$\sim \mathfrak{v}_{15}^{(1,3)}$	—	—	—	—
$(t_0^5, t_0^4t_1, t_0^2t_1^3, t_0t_1^4)$	$\mathfrak{v}_{15}^{(2,5)}$	$= \mathfrak{v}_{14}^{(2)}$	—	—	—	—
$(t_0^5, t_0^4t_1, t_0^3t_1^2, t_1^5)$	$\mathfrak{v}_{15}^{(3,4)}$	$\sim \mathfrak{v}_{15}^{(1,2)}$	—	—	—	—
$(t_0^5, t_0^4t_1, t_0^3t_1^2, t_0t_1^4)$	$\mathfrak{v}_{15}^{(3,5)}$	$= \mathfrak{v}_{14}^{(3)}$	—	—	—	—
$(t_0^5, t_0^4t_1, t_0^3t_1^2, t_0^2t_1^3)$	$\mathfrak{v}_{15}^{(4,5)}$	$= \mathfrak{v}_{13}$	—	—	—	—
$(t_0^6, t_0^2t_1^4, t_0t_1^5, t_1^6)$	$\mathfrak{v}_{16}^{(1,2,3)}$	—	$x_1x_3 - x_2^2$, $x_0x_3^2 - x_1^3$	perfekt	Ideal der Hauptklasse	$6t - 3$
$(t_0^6, t_0^3t_1^3, t_0t_1^5, t_1^6)$	$\mathfrak{v}_{16}^{(1,2,4)}$	—	$x_0x_3 - x_1^2$, $x_1x_3^2 - x_2^3$	perfekt	Ideal der Hauptklasse	$6t - 3$
$(t_0^6, t_0^3t_1^3, t_0^2t_1^4, t_1^6)$	$\mathfrak{v}_{16}^{(1,2,5)}$	—	$x_0x_3 - x_1^2$, $x_1^2x_3 - x_2^3$	perfekt	Ideal der Hauptklasse	$6t - 3$
$(t_0^6, t_0^4t_1^2, t_0t_1^5, t_1^6)$	$\mathfrak{v}_{16}^{(1,3,4)}$	—	$x_0^2x_3 - x_1^3$, $x_0x_2^2 - x_1^2x_3$, $x_0x_3^2 - x_1x_2^2$, $x_1x_3^3 - x_2^4$	imperfekt	$(\mathfrak{v}_{16}^{(1,3,4)}, x_3)$ $= (x_3, x_2^2, x_1^3)$ $\cap (x_0, x_1, x_2^4, x_3)$	$6t - 1$
$(t_0^6, t_0^4t_1^2, t_0^2t_1^4, t_1^6)$ $= (s_0^3, s_0^2s_1, s_0s_1^2, s_1^3)$	$\mathfrak{v}_{16}^{(1,3,5)}$	$= \mathfrak{v}_{13}$	—	—	—	—
$(t_0^6, t_0^5t_1, t_0t_1^5, t_1^6)$	$\mathfrak{v}_{16}^{(2,3,4)}$	—	(A) für $m = 6$	imperfekt	(B) für $m = 6$	$6t + 1$
$(t_0^7, t_0^2t_1^5, t_0t_1^6, t_1^7)$	$\mathfrak{v}_{17}^{(1,2,3,4)}$	—	$x_1x_3 - x_2^2$, $x_0x_2x_3^2 - x_1^4$, $x_0x_3^3 - x_1^3x_2$	perfekt	$(\mathfrak{v}_{17}^{(1,2,3,4)}, x_3)$ $= (x_3, x_1^4, x_2^2, x_1^3x_2)$ ist Primärideal	$7t - 5$

Allgemeine Nullstelle	Zugehöriges Ideal	Reduzierbar auf	Basisformen	perfekt oder imperfekt	Begründung	Charakteristisches Polynom
$(t_0^7, t_0^3t_1^4, t_0t_1^6, t_1^7)$	$\mathfrak{v}_{17}^{(1,2,3,5)}$	—	$x_0x_2^2 - x_1^3$, $x_0x_3^2 - x_1^2x_2$, $x_1x_3^2 - x_2^3$	perfekt	$(\mathfrak{v}_{17}^{(1,2,3,5)}, x_1)$ $= (x_0, x_1, x_2^3)$ $\cap (x_1, x_2^2, x_3^2)$	$7t - 4$
$(t_0^7, t_0^3t_1^4, t_0^2t_1^5, t_1^7)$	$\mathfrak{v}_{17}^{(1,2,3,6)}$	—	$x_0x_2x_3 - x_1^3$, $x_0x_3^2 - x_1x_2^2$, $x_1^2x_3 - x_2^3$	perfekt	$(\mathfrak{v}_{17}^{(1,2,3,6)}, x_3)$ $= (x_3, x_1^3, x_2^3, x_1x_2^2)$ ist Primärideal	$7t - 4$
$(t_0^7, t_0^4t_1^3, t_0t_1^6, t_1^7)$	$\mathfrak{v}_{17}^{(1,2,4,5)}$	—	$x_0x_2 - x_1^2$, $x_0x_3^3 - x_1x_2^3$, $x_1x_3^3 - x_2^4$	perfekt	$(\mathfrak{v}_{17}^{(1,2,4,5)}, x_2)$ $= (x_0, x_1, x_2)$ $\cap (x_1^2, x_2, x_3^3)$	$7t - 5$
$(t_0^7, t_0^4t_1^3, t_0^2t_1^5, t_1^7)$	$\mathfrak{v}_{17}^{(1,2,4,6)}$	—	$x_1x_3 - x_2^2$, $x_0^2x_2x_3 - x_1^4$, $x_0^2x_3^2 - x_1^3x_2$	perfekt	$(\mathfrak{v}_{17}^{(1,2,4,6)}, x_3)$ $= (x_1^4, x_2^2, x_3, x_1^3x_2)$ ist Primärideal	$7t - 5$
$(t_0^7, t_0^4t_1^3, t_0^3t_1^4, t_1^7)$	$\mathfrak{v}_{17}^{(1,2,5,6)}$	—	$x_0x_3 - x_1x_2$, $x_0x_2^3 - x_1^4$, $x_1^3x_3 - x_2^4$	perfekt	$(\mathfrak{v}_{17}^{(1,2,5,6)}, x_1)$ $= (x_0, x_1, x_2^4)$ $\cap (x_1, x_2^3, x_3)$	$7t - 5$
$(t_0^7, t_0^5t_1^2, t_0t_1^6, t_1^7)$	$\mathfrak{v}_{17}^{(1,3,4,5)}$	—	$x_0^2x_2 - x_1^3$, $x_0x_3^2 - x_1x_2^2$, $x_0x_2^3 - x_1^2x_3^2$, $x_1x_3^4 - x_2^5$	imperfekt	$(\mathfrak{v}_{17}^{(1,3,4,5)}, x_1)$ $= (x_0, x_1, x_2^5)$ $\cap (x_1, x_2, x_3^2)$ $\cap (x_1, x_0^2, x_3^2, x_2^3)$	$7t - 2$
$(t_0^7, t_0^5t_1^2, t_0^2t_1^5, t_1^7)$	$\mathfrak{v}_{17}^{(1,3,4,6)}$	—	$x_0x_3 - x_1x_2$, $x_0^3x_2^2 - x_1^5$, $x_0^2x_2^3 - x_1^4x_3$, $x_0x_2^4 - x_1^3x_3^2$, $x_1^2x_3^3 - x_2^5$	imperfekt	$(\mathfrak{v}_{17}^{(1,3,4,6)}, x_1)$ $= (x_0, x_1, x_2^5) \cap (x_1, x_3, x_2^2)$ $\cap (x_0^3, x_1, x_2^4, x_3, x_0^2x_2^3)$	$7t - 3$
$(t_0^7, t_0^6t_1, t_0t_1^6, t_1^7)$	$\mathfrak{v}_{17}^{(2,3,4,5)}$	—	(A) für $m = 7$	imperfekt	(B) für $m = 7$	$7t + 1$

8.3. Eindimensionale Veronesesche Projektionsideale in $\mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$

Wir wollen hier die Ideale $\mathfrak{v}_{15}^{(i)}$ und $\mathfrak{v}_{16}^{(i,j)}$ angeben. Für $\mathfrak{v}_{15}^{(i)}$ bleiben unter Berücksichtigung der Reduktionsmöglichkeiten nur die Ideale $\mathfrak{v}_{15}^{(1)}$ und $\mathfrak{v}_{15}^{(2)}$, die wir vorab gesondert untersuchen wollen.

8.3.1. Das Ideal $\mathfrak{v}_{15}^{(1)}$

Hier lautet die Basis

$$\mathfrak{v}_{15}^{(1)} = (x_0x_2 - x_1{}^2, x_0x_4 - x_1x_2, x_1x_3 - x_2{}^2, x_1x_4 - x_2x_3, x_2x_4 - x_3{}^2),$$

und es soll die Perfektheit, also $L(\mathfrak{v}_{15}^{(1)}) = 4 - 1 = 3$, nachgewiesen werden. Hier ist zwar wieder $d = 1$, aber $n = 4$, und daher ist Kap. 5, Satz 50, nicht mehr anwendbar, wohl aber Satz 51 und Satz 13, (38). Dazu bilden wir

$$(\mathfrak{v}_{15}^{(1)}, x_1) = (x_1, x_0x_2, x_0x_4, x_2{}^2, x_2x_3, x_2x_4 - x_3{}^2).$$

Ist $L(\mathfrak{v}_{15}^{(1)}) = k$, so ist also $L(\mathfrak{v}_{15}^{(1)}, x_1) = k + 1$. Bei Verwendung der Variablenpermutation

$$P := \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_0 & x_4 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

folgt

$$L(P\mathfrak{v}_{15}^{(1)}, Px_1) = L(P\mathfrak{v}_{15}^{(1)}, x_4) = L(\mathfrak{a}, x_4) = k + 1,$$

also

$$L(P\mathfrak{v}_{15}^{(1)}) = L(\mathfrak{a}) = k = L(\mathfrak{v}_{15}^{(1)})$$

mit

$$\mathfrak{a} = (x_0x_2, x_0x_3, x_1{}^2, x_1x_2, x_1x_3 - x_2{}^2).$$

Nun hat $\mathfrak{a}$ die Syzygienkette U_{15}^1, U_{55}^2, U_{51}^3 mit

$$U_{55}^2 = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & -x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & x_3 \\ 0 & -x_0 & 0 & -x_1 & -x_2 \\ 0 & 0 & x_0 & 0 & -x_1 \end{pmatrix}, \quad U_{51}^3 = \begin{pmatrix} x_1{}^2 \\ -x_1x_3 + x_2{}^2 \\ -x_1x_2 \\ x_0x_3 \\ -x_0x_2 \end{pmatrix};$$

folglich ist $k = 3$ und also $\mathfrak{v}_{15}^{(1)}$ perfekt.

8.3.2. Das Ideal $\mathfrak{v}_{15}^{(2)}$

Hier ist $L(\mathfrak{v}_{15}^{(2)}) = 4$, also $\mathfrak{v}_{15}^{(2)}$ imperfekt wegen

$$\mathfrak{v}_{15}^{(2)} = U_{15}^1 = (x_0x_3 - x_1x_2, x_0x_4 - x_1x_3, x_1x_4 - x_2{}^2, x_2x_4 - x_3{}^2, x_0{}^2x_2 - x_1{}^3),$$

$$U_{58}^2 = \begin{pmatrix} x_3 & x_4 & x_0x_2 & x_1{}^2 & x_1x_2 & x_1x_4 - x_2{}^2 & 0 & 0 \\ -x_2 & -x_3 & x_1{}^2 & x_0x_1 & x_0x_2 & 0 & x_1x_4 - x_2{}^2 & 0 \\ 0 & 0 & -x_0x_1 & -x_0{}^2 & -x_1{}^2 & -x_0x_3 + x_1x_2 & -x_0x_4 + x_1x_3 & x_2x_4 - x_3{}^2 \\ x_0 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1x_4 + x_2{}^2 \\ 0 & 0 & -x_3 & -x_2 & -x_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U_{85}^{3} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_4 - x_2^2 & 0 & 0 \\ -x_0x_1 & -x_0x_2 & 0 & x_1x_4 - x_2^2 & 0 \\ x_2 & x_4 & 0 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & 0 & x_4 \\ 0 & -x_3 & 0 & 0 & -x_2 \\ x_0 & 0 & -x_3 & -x_4 & -x_1 \\ 0 & -x_1 & x_2 & x_3 & -x_0 \\ 0 & 0 & x_0 & x_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_{51}^{4} = \begin{pmatrix} x_4 \\ -x_2 \\ -x_1 \\ x_0 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Bei diesem Beispiel macht die Berechnung des dritten Syzygienmoduls etwas mehr Schwierigkeiten. Aus der Syzygienkette folgt

$$\begin{aligned} P(t; \mathfrak{v}_{15}^{(2)}) = 5t + 1 &= \binom{t+4}{4} - 4\binom{t+2}{4} - \binom{t+1}{4} + 2\binom{t+1}{4} + 6\binom{t}{4} - 5\binom{t-1}{4} + \binom{t-2}{4} \\ &= \binom{t+4}{4} - 4\binom{t+2}{4} + \binom{t+1}{4} + 6\binom{t}{4} - 5\binom{t-1}{4} + \binom{t-2}{4} \end{aligned}$$

für $t \geqq 2$.

Zur Berechnung vgl. 7.7.

8.3.3. Tabelle der Ideale $\mathfrak{v}_{14}$, $\mathfrak{v}_{15}^{(i)}$ und $\mathfrak{v}_{16}^{(i,j)}$

Einfacher ist es jedoch, die Imperfektheit von $\mathfrak{v}_{15}^{(2)}$ gemäß Kap. 6, Satz 38, nachzuweisen. Auf diese Weise wurde in der nachfolgenden Tabelle jeweils die Imperfektheit nachgewiesen, während zum Beweis der Perfektheit analog 8.3.1. verfahren wurde.

Allgemeine Nullstelle	Zugehöriges Ideal	Basisformen	perfekt oder imperfekt	Charakteristisches Polynom
$(t_0^4, t_0^3t_1, t_0^2t_1^2, t_0t_1^3, t_1^4)$	$\mathfrak{v}_{14}$	$x_0x_2 - x_1^2$, $x_0x_3 - x_1x_2$, $x_0x_4 - x_2^2$, $x_1x_3 - x_2^2$, $x_1x_4 - x_2x_3$, $x_2x_4 - x_3^2$	perfekt	$4t + 1$
$(t_0^5, t_0^3t_1, t_0^2t_1^3, t_0t_1^4, t_1^5)$	$\mathfrak{v}_{15}^{(1)}$	$x_0x_3 - x_1^2$, $x_0x_4 - x_1x_2$, $x_1x_3 - x_2^2$, $x_1x_4 - x_2x_3$, $x_2x_4 - x_3^2$	perfekt	$5t$
$(t_0^5, t_0^4t_1, t_0^2t_1^3, t_0t_1^4, t_1^5)$	$\mathfrak{v}_{15}^{(2)}$	$x_0x_3 - x_1x_2$, $x_0x_4 - x_1x_3$, $x_1x_4 - x_2^2$, $x_2x_4 - x_3^2$, $x_0^2x_2 - x_1^3$	imperfekt	$5t + 1$

Allgemeine Nullstelle	Zugehöriges Ideal	Basisformen	perfekt oder imperfekt	Charakteristisches Polynom
$(t_0^6, t_0^3t_1^3, t_0^2t_1^4, t_0t_1^5, t_1^6)$	$\mathfrak{v}_{16}^{(1,2)}$	$x_0x_4 - x_1^2$, $x_1x_3 - x_2^2$, $x_1x_4 - x_2x_3$, $x_2x_4 - x_3^2$	perfekt	$6t - 1$
$(t_0^6, t_0^4t_1^2, t_0^2t_1^4, t_0t_1^5, t_1^6)$	$\mathfrak{v}_{16}^{(1,3)}$	$x_0x_2 - x_1^2$, $x_0x_4 - x_1x_2$, $x_1x_4 - x_2^2$, $x_2x_4 - x_3^2$	perfekt	$6t - 1$
$(t_0^6, t_0^4t_1^2, t_0^3t_1^3, t_0t_1^5, t_1^6)$	$\mathfrak{v}_{16}^{(1,4)}$	$x_0x_3 - x_1x_2$, $x_0x_4 - x_2^2$, $x_1x_4 - x_2x_3$, $x_0x_2^2 - x_1^3$, $x_1^2x_3 - x_2^3$, $x_1x_3^2 - x_2^2x_4$, $x_2x_4^2 - x_3^3$	imperfekt	$6t$
$(t_0^6, t_0^4t_1^2, t_0^3t_1^3, t_0^2t_1^4, t_1^6)$	$\mathfrak{v}_{16}^{(1,5)}$	$x_0x_3 - x_1^2$, $x_0x_4 - x_2^2$, $x_1x_3 - x_2^2$, $x_1x_4 - x_3^2$	perfekt	$6t - 1$
$(t_0^6, t_0^5t_1, t_0^2t_1^4, t_0t_1^5, t_1^6)$	$\mathfrak{v}_{16}^{(2,3)}$	$x_0x_3 - x_1x_2$, $x_0x_4 - x_1x_3$, $x_2x_4 - x_3^2$, $x_0x_2^2 - x_1^2x_4$, $x_1x_3x_4 - x_2^3$, $x_1x_4^2 - x_2^2x_3$, $x_0^3x_2 - x_1^4$	imperfekt	$6t + 1$
$(t_0^6, t_0^5t_1, t_0^3t_1^3, t_0t_1^5, t_1^6)$	$\mathfrak{v}_{16}^{(2,4)}$	$x_0x_4 - x_2^2$, $x_1x_3 - x_2^2$, $x_0^2x_2 - x_1^3$, $x_0^2x_3 - x_1^2x_2$, $x_0x_2x_3 - x_1^2x_4$, $x_0x_3^2 - x_1x_2x_4$, $x_1x_4^2 - x_2x_3^2$, $x_2x_4^2 - x_3^3$	imperfekt	$6t + 1$

8.4. Höherdimensionale Veronesesche Projektionsideale

8.4.1. Das Ideal $\mathfrak{v}_{22} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$

Allgemeine Nullstelle: $(t_0^2, t_0t_1, t_0t_2, t_1^2, t_1t_2, t_2^2)$,
Syzygienkette: $U_{16}^1, U_{68}^2, U_{83}^3$ mit

$$U_{16}^1 = (x_0x_3 - x_1^2, x_0x_4 - x_1x_2, x_0x_5 - x_2^2, x_1x_4 - x_2x_3, x_1x_5 - x_2x_4, x_3x_5 - x_4^2),$$

$$U_{68}^2 = \begin{pmatrix} x_2 & x_4 & x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_1 & -x_3 & 0 & x_2 & x_4 & x_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3 & -x_1 & -x_3 & -x_4 & 0 & 0 \\ x_0 & x_1 & x_2 & 0 & x_2 & 0 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & x_1 & x_0 & 0 & x_2 & -x_3 & -x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_0 & 0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \quad U_{83}^3 = \begin{pmatrix} x_4 & x_5 & 0 \\ -x_2 & 0 & x_5 \\ 0 & -x_2 & -x_4 \\ -x_3 & -x_4 & 0 \\ x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & x_1 & x_3 \\ -x_0 & 0 & x_2 \\ 0 & -x_0 & -x_1 \end{pmatrix},$$

und

$$\begin{aligned} P(t; \mathfrak{v}_{22}) &= 4\binom{t}{2} + 5t + 1 \\ &= \binom{2t+2}{2} \\ &= 2t^2 + 3t + 1 \\ &= \binom{t+5}{5} - 6\binom{t+3}{5} + 8\binom{t+2}{5} - 3\binom{t+1}{5}. \end{aligned}$$

8.4.2. Das Ideal $\mathfrak{v}_{22}^{(0)} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$

Allgemeine Nullstelle: $(t_0t_1, t_0t_2, t_1^2, t_1t_2, t_2^2)$,
Syzygienkette: U_{13}^1, U_{32}^2 mit

$$U_{13}^1 = (x_0x_3 - x_1x_2, x_0x_4 - x_1x_3, x_2x_4 - x_3^2), \quad U_{32}^2 = \begin{pmatrix} x_4 & x_3 \\ -x_3 & -x_2 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} P(t; \mathfrak{v}_{22}^{(0)}) &= 3\binom{t}{2} + 4\binom{t}{1} + 1 \\ &= \binom{2t+2}{2} - \binom{t+1}{2} \\ &= \frac{3}{2}t^2 + \frac{5}{2}t + 1 \\ &= \binom{t+4}{4} - 3\binom{t+2}{4} + 2\binom{t+1}{4}. \end{aligned}$$

Gegenüber $\mathfrak{v}_{22}$ erniedrigt sich hier die Ordnung um 1; dieser Sachverhalt tritt auch bei allgemeineren $\mathfrak{v}_{dm}^{(0)}$ auf. Zur Berechnung vgl. 7.7.

8.4.3. Das Ideal $\mathfrak{v}_{22}^{(1)} \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$

Allgemeine Nullstelle: $(t_0^2, t_0t_1, t_1^2, t_1t_2, t_2^2)$,
Syzygienkette: U_{12}^1, U_{21}^2 mit

$$U_{12}^1 = (x_0x_4 - x_1^2, x_2x_4 - x_3^2), \quad U_{21}^2 = \begin{pmatrix} x_2x_4 - x_3^2 \\ -x_0x_4 + x_1^2 \end{pmatrix},$$

$\mathfrak{v}_{22}^{(1)}$ ist ein H-Ideal der Hauptklasse, und es wird

$$\begin{aligned} P(t; \mathfrak{v}_{22}^{(1)}) &= 4\binom{t}{2} + 4\binom{t}{1} + 1 \\ &= \binom{2t+2}{2} - t \\ &= 2t^2 + 2t + 1 \\ &= \binom{t+4}{4} - 2\binom{t+2}{4} + \binom{t}{4}. \end{aligned}$$

Hier bleibt zwar gegenüber $\mathfrak{v}_{22}$ die Ordnung h_0 ungeändert, hingegen ändert sich h_1. Zur Berechnung vgl. 7.7.

8.5. Andere eindimensionale Ideale in $\mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$

8.5.1. Beispiel für verschiedene Darstellung der Syzygienmoduln

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} = U_{14}^1 &= (x_0x_1, x_0x_2, x_1^2x_2 - x_1x_3^2, x_1x_2^2 - x_2x_3^2) \\ &= \left(x_0x_1, x_0x_2, x_1(x_1x_2 - x_3^2), x_2(x_1x_2 - x_3^2)\right) \\ &= (x_1, x_2) \cap (x_0, x_1x_2 - x_3^2) \end{aligned}$$

mit den Syzygienmoduln

$$U_{44}^2 = \begin{pmatrix} x_2 & x_1x_2 - x_3^2 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & x_1x_2 - x_3^2 & 0 \\ 0 & -x_0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & -x_0 & -x_1 \end{pmatrix}, \quad U_{41}^3 = \begin{pmatrix} x_1x_2 - x_3^2 \\ -x_2 \\ x_1 \\ -x_0 \end{pmatrix};$$

diese Darstellung für U_{44}^2 scheint naheliegend. Im Hinblick auf die Berechnung des dritten Syzygienmoduls ist jedoch die Darstellung

$$U_{44}^{2\prime} = \begin{pmatrix} x_2 & x_3^2 & 0 & 0 \\ -x_1 & -x_1^2 & x_1x_2 - x_3^2 & 0 \\ 0 & x_0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & -x_0 & -x_1 \end{pmatrix}, \quad U_{41}^{3\prime} = \begin{pmatrix} x_3^2 \\ -x_2 \\ -x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

günstiger; gibt man die Forderung auf, daß die Elemente der ersten Zeile des zweiten Syzygienmoduls eine Minimalbasis bilden, so können wir diesen durch lauter Potenzprodukte ausdrücken:

$$U_{44}^{2''} = \begin{pmatrix} x_2 & x_2^2 & x_3^2 & 0 \\ -x_1 & -x_3^2 & -x_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_0 & x_2 \\ 0 & -x_0 & 0 & -x_1 \end{pmatrix}, \quad U_{41}^{3''} = \begin{pmatrix} x_1x_2 + x_2^2 \\ -x_1 \\ -x_2 \\ x_0 \end{pmatrix}.$$

Bei allen diesen Darstellungen haben wir die Gradmatrizen

$$(2, 2, 3, 3), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit die Hilbertfunktion

$$\begin{aligned} P(t; \mathfrak{a}) &= \binom{t+3}{3} - 2\binom{t+1}{3} - 2\binom{t}{3} + \binom{t}{3} + 3\binom{t-1}{3} - \binom{t-2}{3} \\ &= \binom{t+3}{3} - 2\binom{t+1}{3} - \binom{t}{3} + 3\binom{t-1}{3} - \binom{t-2}{3} \\ &= 3t + 2 \quad \text{für} \quad t \geqq 2; \end{aligned}$$

dieses charakteristische Polynom kann bei rationalen Primidealen dritter Ordnung nicht auftreten.

8.5.2. Ideal von NG $(\mathfrak{v}_{14}^{(2)})$ als Schnitt dreier Flächen

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= \mathfrak{v}_{14}^{(2)} \cap (x_0^2, x_1, x_2^3, x_3) = \mathfrak{v}_{14}^{(2)} \cap (x_0, x_1^3, x_2, x_3^2) \\ &= (x_0x_3 - x_1x_2,\ x_0^2x_2 - x_1^3,\ x_1x_3^2 - x_2^3) = U_{13}^1, \end{aligned}$$

Syzygienkette: U_{13}^1, U_{35}^2, U_{54}^3, U_{41}^4 mit

$$U_{35}^2 = \begin{pmatrix} x_0^2x_2 - x_1^3 & x_1(x_0x_3 + x_1x_2) & x_0x_2^2 + x_1^2x_3 & x_2(x_0x_3 + x_1x_2) & x_1x_3^2 - x_2^3 \\ -x_0x_3 + x_1x_2 & -x_2^2 & -x_2x_3 & -x_3^2 & 0 \\ 0 & -x_0^2 & -x_0x_1 & -x_1^2 & -x_0x_3 + x_1x_2 \end{pmatrix},$$

$$U_{54}^3 = \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & 0 & 0 \\ x_1 & 0 & x_3 & 0 \\ -x_0 & x_1 & -x_2 & x_3 \\ 0 & -x_0 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & -x_0 & -x_1 \end{bmatrix}, \quad U_{41}^4 = \begin{pmatrix} x_3 \\ -x_2 \\ -x_1 \\ x_0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} P(t; \mathfrak{a}) &= \binom{t+3}{3} - \binom{t+1}{3} - 2\binom{t}{3} + 5\binom{t-2}{3} - 4\binom{t-3}{3} + \binom{t-4}{3} \\ &= 4t + 1 \quad \text{für} \quad t \geqq 4. \end{aligned}$$

8.5.3. Ideal der Abhyankarschen Kurve

Allgemeine Nullstelle: $(t_0{}^5, t_0{}^4 t_1 + t_1{}^5, t_0{}^2 t_1{}^3, t_0 t_1{}^4)$,
Basisdarstellung: $\mathfrak{p}_A = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$ mit

$$\begin{aligned}
F_1 &= x_0x_3 - x_1x_2 + x_3{}^2,\\
F_2 &= x_0{}^3x_2 - x_0x_1{}^3 + 3x_0x_1x_2{}^2 + x_2x_3{}^3,\\
F_3 &= x_0{}^2x_2{}^2 - x_1{}^3x_2 + x_1{}^2x_3{}^2 + 2x_1x_2{}^3 - x_2{}^2x_3{}^2,\\
F_4 &= x_0x_2{}^3 - x_1{}^2x_2x_3 + x_1x_3{}^3 + x_2{}^3x_3,\\
F_5 &= x_1x_2x_3{}^2 - x_2{}^4 - x_3{}^4,
\end{aligned}$$

Syzygienkette: $\boldsymbol{U}^1_{15}, \boldsymbol{U}^2_{56}, \boldsymbol{U}^3_{62}$ mit

$$\boldsymbol{U}^2_{56} = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & H_4 & H_5 & x_3{}^3\\ -x_3 & 0 & 0 & x_2 & 0 & 0\\ x_1 & -x_3 & -x_2 & -x_0 & 0 & 0\\ 0 & x_1 & x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3\\ 0 & 0 & -x_1 & 0 & -x_0 - x_3 & -x_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{U}^2_{66} = \begin{pmatrix} x_2 & 0\\ -x_0 & x_2\\ x_1 & -x_3\\ x_3 & 0\\ 0 & x_1\\ -x_1 & -x_0 \end{pmatrix};$$

dabei ist zur Abkürzung gesetzt:

$$\begin{aligned}
H_1 &= x_0{}^2x_2 - x_0x_2x_3 - x_1{}^3 + 2x_1x_2{}^2 + x_2x_3{}^2,\\
H_2 &= x_0x_2{}^2 - x_2{}^2x_3,\\
H_3 &= x_1{}^2x_2 - x_1x_3{}^2 - x_2{}^3,\\
H_4 &= x_1{}^2x_3 - x_2{}^2x_3,\\
H_5 &= x_1x_2x_3 - x_2{}^3;
\end{aligned}$$

damit haben wir hier dieselben Gradmatrizen wie in 8.2.1. für $m = 5$ und mithin die Hilbertfunktion

$$\begin{aligned}
P(t; \mathfrak{p}_A) &= 5t + 1\\
&= \binom{t+3}{3} - \binom{t+1}{3} - 4\binom{t-1}{3} + 6\binom{t-2}{3} - 2\binom{t-3}{3}
\end{aligned}$$

für $t \geqq 3$.

Zur Berechnung vgl. 7.6.

8.5.4. Ideal einer Segreschen Kurve, d. h. einer Quintik mit Tripelpunkt (1, 0, 0, 0) und drei nicht in einer Ebene liegenden Tangenten

Allgemeine Nullstelle: $((t_0{}^5, t_0{}^2t_1(t_1{}^2 - t_0{}^2), t_0t_1{}^2(t_1{}^2 - t_0{}^2), t_1{}^3(t_1{}^2 - t_0{}^2))$,
Basisdarstellung: $\mathfrak{p}_S = (x_1x_3 - x_2{}^2, x_0x_1x_2 - x_0x_2x_3 + x_1{}^3, x_0x_2{}^2 - x_0x_3{}^2 + x_1{}^2x_2) = \boldsymbol{U}^1_{13}$,
Syzygienkette: $\boldsymbol{U}^1_{13}, \boldsymbol{U}^2_{32}$ mit

$$\boldsymbol{U}^2_{32} = \begin{pmatrix} x_0x_2 + x_1{}^2 & x_0x_3\\ -x_3 & -x_2\\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

und also

$$P(t;\mathfrak{p}_S) = 5t - 1$$
$$= \binom{t+3}{3} - \binom{t+1}{3} - 2\binom{t}{3} + 2\binom{t-1}{3}$$

für $t \in \mathbf{N}^*$.

Zur Berechnung vgl. 7.6.

8.5.5. Ideal einer quadrikenfreien Quintik vom Abhyankarschen Typ mit vier Kubiken

Allgemeine Nullstelle: $(t_0^5, t_0^4t_1, t_0^2t_1^3 + t_1^5, t_0t_1^4)$,
Basisdarstellung: $\mathfrak{p}_5 = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$ mit

$$\begin{aligned}
F_1 &= x_0^2x_3 + x_0x_2x_3 - x_1^3 - x_1^2x_2 - x_1x_3^2,\\
F_2 &= x_0^2x_3 - x_0x_1x_2 + x_1^2x_3,\\
F_3 &= x_0x_1x_3 + x_0x_2x_3 - x_1^2x_2 - x_1x_3^2,\\
F_4 &= x_0x_2^2 - x_0x_3^2 - x_1^2x_3 - x_1x_2x_3,\\
F_5 &= x_1^2x_3^2 - x_1x_2^3 + 3x_1x_2x_3^2 + x_3^4,
\end{aligned}$$

Syzygienkette: $\boldsymbol{U}_{15}^1, \boldsymbol{U}_{55}^2, \boldsymbol{U}_{51}^3$ mit

$$\boldsymbol{U}_{55}^2 = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0\\ -x_3 & x_1 & x_1 + x_2 & 0 & 0\\ -x_1 - x_2 & -x_0 - x_3 & -x_0 & x_1x_3 + x_2x_3 & x_2^2 - x_3^2\\ -x_0 & 0 & x_1 & -x_1x_2 - x_3^2 & -x_1x_3 - x_2x_3\\ 0 & 0 & 0 & -x_0 & -x_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{U}_{51}^3 = \begin{pmatrix} x_1x_3 + x_2x_3\\ -x_1x_2 - x_2^2\\ x_1x_2 + x_3^2\\ x_1\\ -x_0 \end{pmatrix},$$

$$P(t;\mathfrak{p}_5) = 5t + 1$$
$$= \binom{t+3}{3} - 4\binom{t}{3} - \binom{t-1}{3} + 3\binom{t-1}{3} + 2\binom{t-2}{3} - \binom{t-3}{3}$$
$$= \binom{t+3}{3} - 4\binom{t}{3} + 2\binom{t-1}{3} + 2\binom{t-2}{3} - \binom{t-3}{3}$$

für $t \geqq 3$.

Zur Berechnung vgl. 7.6.

8.5.6. Ideal einer speziellen Vahlenschen Quintik

Allgemeine Nullstelle (vgl. PERRON [1]): (y_0, y_1, y_2, y_3) mit

$$y_0 = t_0^5, \quad y_1 = t_1^5, \quad y_2 = t_0^2t_1(t_0 - t_1)(t_0 - at_1), \quad y_3 = t_0t_1^2(t_0 - t_1)(t_0 - at_1).$$

Nach PERRON [1] ist $a \neq 0$, $a \neq 1$. Ferner muß $a^5 + 2a^4 + 3a^3 + 3a^2 + 2a + 1 \neq 0$, also insbesondere $a \neq -1$ sein. Für den Spezialfall $a = 2$ wird

$$y_0 = t_0^5, \quad y_1 = t_1^5, \quad y_2 = t_0^2t_1(t_0 - t_1)(t_0 - 2t_1), \quad y_3 = t_0t_1^2(t_0 - t_1)(t_0 - 2t_1),$$

Basisdarstellung: $\mathfrak{p}_V = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$ mit

$$\begin{aligned}
F_1 &= 15x_0{}^2x_3 - 511x_0x_1x_3 - 15x_0x_2{}^2 + 469x_1{}^2x_2 - 6374x_1x_2{}^2 + 4728x_1x_2x_3 \\
&\quad - 248x_1x_3{}^2 - 45x_2{}^3 - 240x_2{}^2x_3 - 855x_2x_3{}^2 - 2550x_3{}^3, \\
F_2 &= 15x_0x_1x_2 - 31x_0x_1x_3 + 16x_1{}^2x_2 - 59x_1x_2{}^2 + 18x_1x_2x_3 - 8x_1x_3{}^2 - 15x_3{}^3, \\
F_3 &= x_0x_2x_3 - 31x_1x_2{}^2 + 30x_1x_2x_3 - x_2{}^3 - 3x_2{}^2x_3 - 7x_2x_3{}^2 - 15x_3{}^3, \\
F_4 &= x_0x_3{}^2 - 15x_1x_2{}^2 + 14x_1x_2x_3 - x_2{}^2x_3 - 3x_2x_3{}^2 - 7x_3{}^3, \\
F_5 &= 3x_0{}^3x_1 - 99x_0{}^2x_1{}^2 + 96x_0x_1{}^3 - 3937x_0x_1{}^2x_3 + 3472x_1{}^3x_2 - 46283x_1{}^2x_2{}^2 \\
&\quad + 34986x_1{}^2x_2x_3 - 1736x_1{}^2x_3{}^2 - 5385x_1x_2{}^2x_3 - 4050x_1x_2x_3 - 18795x_1x_3{}^3 \\
&\quad - 3x_2{}^3x_3 - 36x_2{}^2x_3{}^2 - 246x_2x_3{}^3 - 1260x_3{}^4,
\end{aligned}$$

Syzygienkette: $\boldsymbol{U}_{15}^1, \boldsymbol{U}_{55}^2, \boldsymbol{U}_{51}^3$ mit denselben Gradmatrizen wie im vorigen Beispiel 8.5.5., charakteristisches Polynom: wie im vorigen Beispiel 8.5.5.

Dieses Beispiel zeigt, daß bei idealtheoretischer Auffassung des Kurvenproblems die Basis von $\mathfrak{p}_V$ nicht nur aus vier Kubiken besteht, sondern noch eine fünfte Basisform vierten Grades hinzukommen muß.

8.6. Höherdimensionale Ideale

8.6.1. Zweidimensionales Ideal mit trivialer Komponente

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} &= (x_0{}^2x_3 - x_0x_1x_2,\ x_0x_1x_3 - x_1{}^2x_2,\ x_0x_2x_3 - x_1x_2{}^2,\ x_0x_3{}^2 - x_1x_2x_3) \\
&= (x_0x_3 - x_1x_2) \cap (x_0{}^2, x_1, x_2, x_3{}^2).
\end{aligned}$$

Die Basis von $\mathfrak{a}$ kann aus den dreireihigen Unterdeterminanten der Matrix

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & x_0 & x_1 \\ x_2 & x_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gewonnen werden.

Syzygienkette: $\boldsymbol{U}_{14}^1, \boldsymbol{U}_{46}^2, \boldsymbol{U}_{64}^3, \boldsymbol{U}_{41}^4$ mit

$$\boldsymbol{U}_{46}^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\ -x_0 & 0 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & -x_0 & 0 & -x_1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & -x_0 & 0 & -x_1 & -x_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{U}_{64}^3 = \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & -x_1 & -x_2 & 0 \\ x_0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & x_0 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & x_0 & x_1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{U}_{41}^4 = \begin{pmatrix} x_3 \\ -x_2 \\ x_1 \\ -x_0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
P(t; \mathfrak{a}) &= 2\binom{t}{2} + 3\binom{t}{1} + 1 \\
&= t^2 + 2t + 1 \\
&= \binom{t+3}{3} - 4\binom{t}{3} + 6\binom{t-1}{3} - 4\binom{t-2}{3} + \binom{t-3}{3}
\end{aligned}$$

für $t \geqq 3$.

Zur Berechnung vgl. 7.6.

Der zweite, dritte und vierte Syzygienmodul stimmt jeweils mit dem von (x_0, x_1, x_2, x_3) überein. Das steht nicht im Widerspruch zu Kap. 5, Satz 20.

8.6.2. Ideal der Hartshorneschen Fläche in $\mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$

Allgemeine Nullstelle: $(t_0{}^3, t_0{}^2t_1, t_0t_1t_2, t_0t_2(t_2 - t_0), t_2{}^2(t_2 - t_0))$,
Basisdarstellung:

$$\mathfrak{p}_H = (x_1x_4 - x_2x_3,\ x_0x_1x_3 - x_0x_2{}^2 + x_1{}^2x_3,\ x_0x_2x_3 - x_0x_1x_4 + x_1x_3{}^2,\ x_0x_3x_4 - x_0x_4{}^2 + x_3{}^3),$$

Syzygienkette: $\boldsymbol{U}_{14}^1, \boldsymbol{U}_{44}^2, \boldsymbol{U}_{41}^3$ mit

$$\boldsymbol{U}_{44}^2 = \begin{pmatrix} x_0x_2 & x_0x_2 + x_1x_3 & x_0x_3 - x_0x_4 & x_3{}^2 \\ -x_3 & -x_4 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & -x_3 & -x_4 \\ 0 & 0 & -x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{U}_{41}^3 = \begin{pmatrix} x_4 \\ -x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} P(t; \mathfrak{p}_H) &= 4\binom{t}{2} + 5\binom{t}{1} + 0 \\ &= 2t^2 + 3t \\ &= \binom{t+4}{4} - \binom{t+2}{4} - 3\binom{t+1}{4} + 4\binom{t}{4} - \binom{t-1}{4} \end{aligned}$$

für $t \in \mathbf{N}^*$.

Zur Berechnung vgl. 7.7.

Literatur

ABHYANKAR, S., and A. M. SATHAYE
[1] On Macauly's examples, Conf. on Commutative Algebra, Lawrence, Kansas, 1972, Lecture Notes in Math., Vol. 311, Springer-Verlag; Berlin—Heidelberg—New York 1973, S. 1—16.
ARTIN, E.
[1] Elements of Algebraic Geometry, New York University Press, New York 1955.
BALDASSARRI, M.
[1] Algebraic Varieties, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1956.
BEHNKE, H.
[1] Felix Klein und die heutige Mathematik, Math.-Phys. Semesterberichte 7 (1961), 129—144.
BREHMER, S., und H. BELKNER
[1] Einführung in die analytische Geometrie und lineare Algebra, 4. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin/Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/M.—Zürich 1974.
BRESINSKY, H., and M. J. FULLER
[1] Minimal bases of polynomial ideals, erscheint in Pacific J. Math.
BUDACH, L.
[1] Quotientenfunktoren und Erweiterungstheorie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967.
[2] Homologische Methoden in der Mathematik, Mitteil. Math. Ges. DDR Jg. 1972, Heft 1/2 (1972), 5—42.
BUDACH, L., und W. VOGEL
[1] Cohen-Macaulay-Moduln und der Bezoutsche Satz, Monatsh. Math. 73 (1969), 97—111.
BURAU, W.
[1] Mehrdimensionale projektive und höhere Geometrie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1961.
DEDEKIND, R.
[1] Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1964.
DICK, A.
[1] Emmy Noether, 13, Birkhäuser, Basel—Stuttgart 1970.

DUBREIL, P.
[1] Sur la dimension des idéaux de polynomes, J. math. pures et appl. (9) **15** (1936), 271—283.
EICHLER, M.
[1] Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlen und Funktionen, Birkhäuser, Basel 1963.
EISENREICH, G.
[1] Eine charakteristische Eigenschaft von Hauptklassenmoduln, Math. Nachr. **47** (1970), 79—85.
[2] Zur Definition der Perfektheit von Polynomidealen, Archiv Math. **21** (1970), 571 bis 573.
[3] Zur Syzygientheorie und Theorie des inversen Systems perfekter Ideale und Vektormoduln in Polynomringen und Stellenringen, Sitz.-ber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-nat. Kl., Bd. 109, Heft 3 (1970).
FRANZKE, N., und W. GÜNTHER
[1] Emmy Noether, Math. in der Schule **11** (1973), 129—135.
FUCHS, L.
[1] On quasiprimary ideals, Acta litt. ac Scient. Univ. Szeged, Sect. Sci. Math., **11** (1947), 174—183.
GAETA, F.
[1] Sur la limite inférieure l_0 des valeurs de l pour la validité de la postulation régulière d'une variété algébrique, C. R. Acad. Sci. Paris **234** (1952), 1121—1123.
GILMER, R.
[1] Multiplicative Ideal Theory, Pure and Applied Mathematics, vol. 12, M. Dekker, New York 1972.
GRÖBNER, W.
[1] Über die Syzygientheorie der Polynomideale, Monatsh. Math. **53** (1949), 1—16.
[2] Moderne algebraische Geometrie. Die idealtheoretischen Grundlagen, Springer-Verlag, Wien—Innsbruck 1949.
[3] Über den Multiplizitätsbegriff in der algebraischen Geometrie, Math. Nachr. **4** (1950/51), 193—201.
[4] Über das arithmetische Geschlecht einer algebraischen Mannigfaltigkeit, Archiv Math. **3** (1952), 351—359.
[5] Über das Verhalten der Hilbertfunktion eines H-Ideals bei rationalen Transformationen, Archiv. Math. **5** (1954), 1—3.
[6] Die birationalen Transformationen der Polynomideale, Monatsh. Math. **58** (1954), 266 bis 286.
[7] Über Veronesesche Varietäten und deren Projektionen, Archiv. Math. **16** (1965), 257 bis 264.
[8] Algebraische Geometrie, I. Allgemeine Theorie der kommutativen Ringe und Körper, Bibliographisches Institut, Mannheim 1968.
[9] Algebraische Geometrie, II. Arithmetische Theorie der Polynomringe, Bibliographisches Institut, Mannheim—Wien—Zürich 1970.
[10] Il concetto di molteplicità nella geometria algebrica, Rend. Sem. Mat. e Fis. di Milano **40** (1970), 3—10.
GROTHENDIECK, J., et J. A. DIEUDONNÉ
[1] Eléments de géométrie algébrique I, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1971.
GÜNTER, N. M.
[1] Sur les modules des formes algébriques (mit russ. Zusammenfassung), Труды Тбилисского мат. инст. (Travaux de l'institut math. de Tbilissi) **9** (1941), 97—206.

[2] Die Potentialtheorie und ihre Anwendung auf Grundaufgaben der mathematischen Physik. Am Schluß: „Kurze Biographie“ von W. I. SMIRNOW und S. L. SOBOLEW, B. G. Teubner, Leipzig 1957 (Übersetzung aus dem Russischen).

HASSE, H.

[1] Wissenschaftlicher Nachruf auf Hermann Ludwig Schmid, Math. Nachr. **18** (1956), 1–18.

HAUSER, W., und W. BURAU

[1] Integrale algebraischer Funktionen und ebene algebraische Kurven, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1958.

HECKE, E.

[1] Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen, 2. Aufl., Akad. Verlagsges. Geest & Portig, Leipzig 1954.

HERMANN, G.

[1] Die Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale. Unter Benutzung nachgelassener Sätze von K. Hentzelt, Diss. Göttingen 1926 (angeregt und betreut von E. NOETHER) = Math. Ann. **95** (1926), 736–788.

HERRMANN, M., L. STAMMLER und U. STERZ

[1] Geometrie auf Varietäten, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975.

HILBERT, D.

[1] Über die Theorie der algebraischen Formen, Math. Ann. **36** (1890), 473–534.

[2] Die Hilbertschen Probleme, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Bd. 252, Akad. Verlagsges. Geest & Portig, Leipzig 1971.

HURWITZ, A.

[1] Über die Trägheitsformen eines algebraischen Moduls, Ann. mat. pura ed appl. (3) **20** (1913), 113–151.

KELLER, O.-H.

[1] Analytische Geometrie und lineare Algebra, 3. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1968.

[2] Vorlesungen über algebraische Geometrie, Akad. Verlagsges. Geest & Portig, Leipzig 1974.

KERTÉSZ, A.

[1] Vorlesungen über Artinsche Ringe, B. G. Teubner, Leipzig 1968.

[2] Einführung in die transfinite Induktion, Akadémiai Kiadó, Budapest/Birkhäuser, Basel–Stuttgart/VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975.

KLEIN, F.

[1] Das Erlanger Programm. Eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von H. WUSSING, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Bd. 253, Akad. Verlagsges. Geest & Portig, Leipzig 1974.

KLEINERT, W.

[1] Zur Theorie der perfekten und quasiperfekten Moduln, Math.-nat. Diss., Humboldt-Univ. Berlin 1971 = Beiträge zur Algebra und Geometrie **3** (1974), 69–122.

KOCHENDÖRFFER, R.

[1] Einführung in die Algebra, 3. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1966.

[2] Einführung in die Algebra, 4. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1974.

KREKÓ, B.

[1] Lehrbuch der linearen Optimierung, 6. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973.

KRULL, W.

[1] Allgemeine Modul-, Ring- und Idealtheorie, Enzyklopädie der math. Wiss. I, 2. Aufl., Heft 5, Artikel 11, B. G. Teubner, Leipzig 1939.

[2] Theorie der Polynomideale und Eliminationstheorie, Enzyklopädie der math. Wiss. I, 2. Aufl., Heft 5, Artikel 12, B. G. Teubner, Leipzig 1939.
[3] Idealtheorie, 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1968.

KUMMER, R., und B. RENSCHUCH
[1] Potenzproduktideale I, Publ. math. Debrecen **17** (1970), 81—98.
[2] Potenzproduktideale II, Publ. math. Debrecen **18** (1971), 273—288.

KURKE, H., G. PFISTER und M. ROCZEN
[1] Henselsche Ringe und algebraische Geometrie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975.

LANG, S.
[1] Introduction to Algebraic Geometry, Interscience Publishers, New York—London 1958.

LARSEN, M. D., and P. J. MCCARTHY
[1] Multiplicative Theory of Ideals, Academic Press, New York—London 1971.

LASKER, E.
[1] Zur Theorie der Moduln und Ideale, Math. Ann. **60** (1905), 20—116.

LUGOWSKI, H., und H. J. WEINERT
[1] Grundzüge der Algebra, Teil I, 4. Aufl., B. G. Teubner, Leipzig 1968.
[2] Grundzüge der Algebra, Teil II, 3. Aufl., B. G. Teubner, Leipzig 1967.
[3] Grundzüge der Algebra, Teil III, 2. Aufl., B. G. Teubner, Leipzig 1967.

MACAULAY, F. S.
[1] On the resolution of a given modular system into primary systems including some properties of Hilbert numbers, Math. Ann. **74** (1913), 66—121.
[2] The Algebraic Theory of Modular Systems, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, no. 19, Cambridge University Press 1916; Nachdruck: Stechert-Hafner Service Agency, New York—London 1964.

MATUTAT, E., und B. RENSCHUCH
[1] Perfekte Ideale und Idealtypen von Dubreil, Wiss. Z. PH Potsdam **17** (1973), 133—140.

MOH, T. T.
[1] On the unboundness of generators of prime ideals in power rings of three variables, J. Math. Soc. Japan **26** (1974), 722 — 734.

NAGATA, M.
[1] Local Rings, Interscience Publishers, New York—London 1962.

NEISS, F. sen.
[1] Determinanten und Matrizen, 7. Aufl., Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1967.

NOETHER, E.
[1] Idealtheorie in Ringbereichen, Math. Ann. **83** (1921), 24—66.
[2] Eliminationstheorie und allgemeine Idealtheorie, Math. Ann. **90** (1923), 229—261.

NORTHCOTT, D. G.
[1] Ideal Theory, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, no. 42, Cambridge University Press 1953.
[2] An Introduction to Homological Algebra, Cambridge University Press 1960.

OSTROWSKI, A.
[1] Über ein algebraisches Übertragungsprinzip, Abhandl. Math. Sem. Univ. Hamburg **1** (1922), 281—326.

PERRON, O.
[1] Beweis und Verschärfung eines Satzes von Kronecker, Math. Ann. **118** (1943), 441 bis 448.

PIEHLER, J.
[1] Einführung in die lineare Optimierung, 4. Aufl., B. G. Teubner, Leipzig 1970.

REISNER, G. A.

[1] Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings, Thesis at the University of Minnesota, Minneapolis 1974 = Advanc. in Math. **21** (1976), 30—49.

RENSCHUCH, B.

[1] Verallgemeinerungen des Bezoutschen Satzes, Sitz.-ber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-nat. Kl., Bd. 107, Heft 4 (1966).

[2] Idealtheoretische Betrachtungen zu Sätzen von Eckmann, Habicht und Chow, Math. Ann. **166** (1966), 45—53.

[3] Syzygienketten von Idealpotenzen, Zesz. Nauk. wyższej szkoły Ped. w Opolu, Mat., **9** (1971), 85—96.

[4] Rekursive Definition von H-Idealen der Hauptklasse, Wiss. Z. PH Potsdam **17** (1973), 155—157.

[5] Zur Definition der Grundideale, Math. Nachr. **55** (1973), 63—71.

[6] Beiträge zur konstruktiven Theorie der Polynomideale, I. Zur Bestimmung der Basis eines H-Ideals bei vorgegebener allgemeiner Nullstelle, Wiss. Z. PH Potsdam **17** (1973), 141—146.

[7] Beiträge zur konstruktiven Theorie der Polynomideale, II. Zur Bestimmung des zweiten Syzygienmoduls mit Hilfe des Gaußschen Eliminierungsverfahrens, Wiss. Z. PH Potsdam **17** (1973), 147—151.

[8] Beiträge zur konstruktiven Theorie der Polynomideale, III. Über eine Klasse imperfekter Primideale, Wiss. Z. PH Potsdam **17** (1973), 151—153.

[9] Beiträge zur konstruktiven Theorie der Polynomideale, IV. Zur Berechnung von äquivalenten H-Idealen und Minimalbasen für inhomogene P-Ideale, Wiss. Z. PH Potsdam **18** (1974), 95—98.

[10] Beiträge zur konstruktiven Theorie der Polynomideale, V. Syzygienketten von $(\mathfrak{a}, F)$, Wiss. Z. PH Potsdam **18** (1974), 98—100.

[11] Beiträge zur konstruktiven Theorie der Polynomideale, VI. Veronesesche Projektionskurven im S_3, Wiss. Z. PH Potsdam **18** (1974), 100—106.

[12] Beiträge zur konstruktiven Theorie der Polynomideale, VII. Beispiele Veronesescher Projektionsvarietäten, Wiss. Z. PH Potsdam **19** (1975), 101—106.

[13] Beiträge zur konstruktiven Theorie der Polynomideale, VIII. Basisbestimmung von primen H-Idealen mit vorgegebenen rationalen allgemeinen Nullstellen aus den Hilbertschen Gleichungen, Wiss. Z. PH Potsdam **19** (1975), 106—113.

[14] Beiträge zur konstruktiven Theorie der Polynomideale, IX. Basisdarstellungen inhomogener Polynomideale, Wiss. Z. PH Potsdam **19** (1975), 113—121.

[15] Beiträge zur konstruktiven Theorie der Polynomideale, X. Basisdarstellungen Vahlenscher Kurven und allgemeiner rationaler Raumkurven, Wiss. Z. PH Potsdam **20** (1976), 109—122.

[16] Beiträge zur konstruktiven Theorie der Polynomideale, XI. Aufstellung der Hilbertschen Gleichungen für H-Ideale bei vorgegebener Basis, Wiss. Z. PH Potsdam **20** (1976), 123—125.

[17] Beiträge zur konstruktiven Theorie der Polynomideale, XII. Zur Berechnung von Eliminationsidealen, Wiss. Z. PH Potsdam **20** (1976), 126—130.

[18] Der Satz von Kronecker und Perron für Veronesesche Ideale, Beiträge zur Algebra und Geometrie **2** (1974), 19—25.

[19] Zur Klassifizierung Veronesescher Projektionsideale, Math. Nachr. **67** (1975), 35—40.

ŠAFAREVIČ, I. R. (SCHAFAREWITSCH, I. R.; Шафаревич, И.Р.; SHAFAREVICH, I. R.)

[1] Algebraische Flächen, Akad. Verlagsges. Geest & Portig, Leipzig 1968 (Übersetzung aus dem Russischen).

[2] Grundzüge der algebraischen Geometrie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin/Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1972 (Übersetzung aus dem Russischen).

[3] Основы алгебраической геометрии, Наука, Москва 1972.
[4] Basic Algebraic Geometry, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1974 (Übersetzung aus dem Russischen).

SEMPLE, I. G., and L. ROTH
[1] Introduction to Algebraic Geometry, Clarendon Press, Oxford 1949.

SPERNER, E.
[1] Über einen kombinatorischen Satz von Macaulay und seine Anwendungen auf die Theorie der Polynomideale, Abhandl. Math. Sem. Univ. Hamburg **7** (1930), 149—163.

STÜCKRAD, J., und W. VOGEL
[1] Über die h_1-Bedingung in der idealtheoretischen Multiplizitätstheorie, Beiträge zur Algebra und Geometrie **1** (1971), 73—76.

SZÁSZ, F.
[1] Radikale der Ringe Akadémiai Kiadó, Budapest/VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975.

TSCHERNIKOW, S. N.
[1] Lineare Ungleichungen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1971 (Übersetzung aus dem Russischen).

VIEREGGE, H.
[1] Einführung in die klassische Algebra, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972.

VOGEL, W.
[1] Zur Theorie der charakteristischen Hilbertfunktion in homogenen Ringen über Ringen mit Vielfachkettensatz, Math. Nachr. **33** (1967), 39—60.
[2] Schnitte von perfekten Mannigfaltigkeiten, Veröff. d. Univ. Innsbruck **91** (1974), 77—84.

VAN DER WAERDEN, B. L.
[1] Zur Nullstellentheorie der Polynomideale, Math. Ann. **96** (1927), 183—209.
[2] Der Multiplizitätsbegriff der algebraischen Geometrie, Math. Ann. **97** (1927), 756—774.
[3] Eine Verallgemeinerung des Bézoutschen Theorems, Math. Ann. **99** (1928), 497—541.
[4] Nachruf auf Emmy Noether, Math. Ann. **111** (1935), 469—474.
[5] Zur Algebraischen Geometrie, XII. Ein Satz über Korrespondenzen und die Dimension einer Schnittmannigfaltigkeit, Math. Ann. **115** (1938), 330—332.
[6] Moderne Algebra I, 3. Aufl., Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1950.
[7] Algebra I, 8. Aufl. der Modernen Algebra, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1971.
[8] Algebra II, 3. Aufl. der Modernen Algebra, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1955.
[9] Algebra II, 4. Aufl. der Modernen Algebra, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1959.
[10] Algebra II, 5. Aufl. der Modernen Algebra, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1967.
[11] The Foundation of Algebraic Geometry from Severi to André Weil, Archive for history of exact sciences **7** (1971), 171—180 = Vortrag auf dem Internat. Math.-Kongreß, Nizza 1970 = Anhang zum Lehrbuch: Einführung in die algebraische Geometrie, 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1973.

WEIL, A.
[1] Foundations of Algebraic Geometry, 2nd ed., American Math. Soc. Colloqu. Publ., vol. 29, American Mathematical Society, Providence (R. I.) 1962.

WUSSING, H.
[1] Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1969.

[2] Emmy Noether, in: Biographien bedeutender Mathematiker, (Hrsg. H. Wussing und W. Arnold), Verlag Volk und Wissen, Berlin 1975, S. 504–513.

Zariski, O., and P. Samuel

[1] Commutative Algebra, vol. I, D. van Nostrand Comp., Princeton–New York–Toronto–London 1958.

[2] Commutative Algebra, vol. II, D. van Nostrand Comp., Princeton–New York–Toronto–London 1960.

Verzeichnis der praktischen Methoden

Namen- und Sachverzeichnis