

Studienbücherei



B. Klotzek,
E. Quaisser

Nichteuklidische
Geometrie



Mathematik für Lehrer

Band 17

Herausgegeben von:

W. Engel, S. Brehmer, M. Schneider, H. Wussing

Unter Mitarbeit von:

**G. Asser, J. Böhm, J. Flachsmeyer, G. Geise, T. Glocke,
K. Härtig, G. Kasdorf, O. Krötenheerdt, H. Lugowski,
P. H. Müller, G. Porath**

Studienbücherei

**Nichteuklidische
Geometrie**

**B. Klotzek
E. Quaisser**

(Eine Einführung)

Mit 173 Abbildungen



**VEB Deutscher Verlag
der Wissenschaften
Berlin 1978**

Verlagslektor: Dipl.-Math. E. Arndt
Umschlaggestaltung: R. Wendt
© 1978 VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin
Printed in the German Democratic Republic
Lizenz-Nr.: 206 · 435/98/78
Gesamtherstellung: VEB Druckhaus „Maxim Gorki“, Altenburg
LSV 1044
Bestellnummer: 570 490 9
DDR 19,80 M

Vorwort

Zwei Jahrtausende wurde die Mathematik in der Sprache der Geometrie formuliert; bis ins 18. Jahrhundert wurde Geometrie synonym für Mathematik gebraucht. Auch wenn die Geometrie nicht mehr diese Stellung in der Mathematik besitzt und den Charakter einer Naturwissenschaft verloren hat, so hat sie seitdem doch wesentlich die Entwicklung der Mathematik und Naturwissenschaft beeinflußt, und ihre Sprache bewährt sich auch in Disziplinen, die sich in unserem Jahrhundert herausgebildet haben.

Mit der vorliegenden Einführung in geometrische Theorien, die von der euklidischen Geometrie abweichen, möchten wir einerseits den Blick des künftigen wie auch des an der Oberschule tätigen Mathematiklehrers weiten. Andererseits behandeln wir ausschließlich solche Theorien, die DAVID HILBERT in seinem berühmten Vortrag „Mathematische Probleme“ 1900 in Paris auf dem 2. Internationalen Mathematikerkongreß als „der euklidischen Geometrie nächststehend“ bezeichnet hat; somit wird man beim Eindringen in diese Theorien auch zu einem tieferen Verständnis der euklidischen Geometrie geführt — zumindest in dem Maße, wie man es beim Studium einer Fremdsprache gewöhnlich für den bewußteren Gebrauch der Muttersprache gewinnt.

Im ersten Kapitel behandeln wir den Teil der euklidischen Geometrie des Raumes, der von dem euklidischen Parallelenaxiom unabhängig ist. Da man Axiomatik erst kennenlernt, wenn man schon mathematische Kenntnisse besitzt, konnten wir solche Grundbegriffe und Axiome wählen, die unter anderem die Entwicklung der später benötigten Sätze der absoluten Geometrie möglichst rasch gestatten. In diesem Kapitel wird neben Inzidenz-, Anordnungs- und Bewegungssätzen auch ein Stetigkeitsaxiom formuliert, jedoch zunächst nicht angewendet. Dagegen werden drei Axiome des Zirkels zur Realisierung elementarer Konstruktionen vorgestellt. (Spätere Überlegungen ermöglichen ihre Herleitung aus den übrigen Axiomen.)

Der erste Teil des zweiten Kapitels bringt nach einigen Vorbereitungen zunächst eine Reihe von Aussagen, die in der absoluten Geometrie dem 5. Postulat EUKLIDS äquivalent sind. Damit verfolgen wir nach wie vor das oben genannte Anliegen — nämlich die weitere Vertiefung der Kenntnis der euklidischen Geometrie, speziell

der Tragweite des euklidischen Parallelenaxioms. Über die Negation des 5. Postulats von EUKLID erhält man gemäß der Vorbereitung bereits zahlreiche spezifische Aussagen der Lobačevskijschen Geometrie und so einen ersten Einblick in die Situation zur Zeit der Entdeckung dieser Geometrie. Über Lagebeziehungen zweier Geraden einer Ebene wird die Darlegung zu ebenen Kurven „konstanter Krümmung“, zu den Abstandslinien, Kreisen und Grenzkreisen vorbereitet. Sie werden als Orbiten oder Bahnen bezüglich der Gruppen erklärt, die von Büscheln erzeugt werden; diese Überlegungen stützen sich stark auf gruppentheoretische Methoden. Im Zusammenhang mit den Lagebeziehungen zweier Geraden einer Ebene wird auch die Lobačevskijsche Π -Funktion betrachtet und die Möglichkeit der Definition einer absoluten Längeneinheit nachgewiesen. Im dritten und letzten Teil des Kapitels erarbeiten wir die Bedeutung der Dreiecksinhalte für die elementare Flächeninhaltslehre. Dabei wird kein Parallelenaxiom benutzt, d. h., daß die gewonnenen Aussagen auch in der euklidischen Geometrie gelten. Für die Lobačevskijsche Geometrie ist typisch, daß sich die Defekte als Dreiecksinhalte eignen, sobald man die Winkelgrößen in eine geordnete Struktur mit unbeschränkt ausführbarer Addition eingebettet hat. Mit Hilfe dieser Resultate und der Zerlegungsgleichheit werden Flächeninhalte auch als Äquivalenzklassen gewonnen.

Das dritte Kapitel besteht aus zwei Teilen. Im ersten Teil werden die Grundlagen der analytischen Geometrie aus den bereits vorliegenden Aussagen über die euklidische Geometrie abgeleitet. Der Umfang dieses Teiles ist wesentlich durch die Erfordernisse im folgenden Beweis der relativen Widerspruchsfreiheit der Lobačevskijschen Geometrie bestimmt. Dieser Beweis stützt sich auf das Kleinsche Kugelmodell. Im Zusammenhang mit den Modellbewegungen werden häufig die Eigenschaften des euklidischen Vektorraumes ausgenutzt. Auf den projektiven Abschluß des Anschauungsraumes konnte somit verzichtet werden. Abschließend veranschaulichen wir einige bemerkenswerte Begriffe und Aussagen der Lobačevskijschen Geometrie im Modell.

Bei der Behandlung der Banach-Minkowskischen Geometrie im vierten Kapitel wird in Analogie zur absoluten Geometrie häufig das in den Vordergrund gerückt, was auch in der euklidischen Geometrie gilt, insbesondere Folgerungen aus der Dreiecksungleichung, nach der unter anderem die Strecken kürzeste Verbindungen von zwei Punkten sind. Im einführenden Teil des Kapitels dient der Anschauungsraum als „Träger“ der Überlegungen, obwohl nur die Eigenschaften eines stetigen affinen Raumes in die Beweise eingehen; somit erweisen sich eine mit dem Teilverhältnis verträgliche Abstandsfunktion, Maßbestimmung mittels Eichfigur und Norm für die Vektoren als gleichberechtigte Möglichkeiten zur Einführung einer Minkowskischen Metrik. Aussagen über konvexe Figuren, Stützgeraden und Kreisschnittpunkte bereiten das Studium der Orthogonalität und die Bestimmung der Kreisumfänge in Abhängigkeit von einer Eichfigur vor. Im letzten Teil des Kapitels werden zunächst Aussagen zusammengetragen, die in der Minkowskischen Geometrie für die euklidische Geometrie charakteristisch sind. Als solche kennzeichnende Eigenschaften erweisen sich spezielle Aussagen bezüglich der Bewegungen oder Winkelkongruenz, auch der Satz des PYTHAGORAS. Der weitere Ausbau der Minkowskischen Geometrie mit konvexer Eichfigur — unter anderem von STEFAN BANACH — wird ange-

deutet, zumal die Anwendungen der Banachräume die von HILBERT im 4. Problem ausgesprochene Vermutung über die Fruchtbarkeit der Forschung in dieser Richtung vollauf bestätigt haben.

Bei der anderen mit dem Namen von MINKOWSKI verknüpften Theorie handelt es sich um das „mathematische Gewand“ der speziellen Relativitätstheorie von ALBERT EINSTEIN. Da viele Überlegungen noch nicht alle Eigenschaften des Körpers der reellen Zahlen voraussetzen, gehen wir im fünften Kapitel von Vektorräumen über Körpern aus. Auf dieser Grundlage werden auch affine Räume behandelt; wir hoffen, daß gerade dadurch der Gebrauch der analytischen Methoden gefördert wird. Für die Einführung eines inneren Produktes, das mit Ausnahme des Positiv-definit-seins die Eigenschaften des Skalarproduktes im dritten Kapitel besitzt, wird ein Körper einer Charakteristik $\neq 2$ vorausgesetzt. Über angeordneten Körpern, in denen jedes positive Element quadratisch ist, wird ein Abstandsbegriff eingeführt, der sich jedoch grundlegend vom Abstandsbegriff in Banach-Minkowskischen Räumen unterscheidet, da unter anderem verschiedene Punkte den Abstand Null haben können und die Dreiecksungleichung nicht gilt. Nach der Darstellung von Bewegungen wird der Zusammenhang zum Raum der Ereignisse in der speziellen Relativitätstheorie hergestellt.

Seit mehr als zehn Jahren haben wir Lehrerstudenten an nichteuklidische Geometrie herangeführt. Der Gegenstand dieses Bandes wurde von uns im Rahmen der wahlweise obligatorischen Ausbildung bzw. in der Lehrveranstaltung Ausgewählte Kapitel der Mathematik im Umfang von 4 bis 6 Semesterwochenstunden realisiert, vorwiegend in Vorlesungen. Dabei kam uns zustatten, daß die letzten beiden Kapitel auch unabhängig von den vorangehenden und unabhängig voneinander geboten werden können. Aus Zeitgründen mußten wir gelegentlich einige Beweise skizzieren, die hier voll ausgeführt wurden. Bei der Verwirklichung dieses Programms in höchstens vier Semesterstunden wurde nur die erste Hälfte des zweiten Kapitels ausführlich gelesen, während über den restlichen Teil nur informierend referiert wurde; dabei kann man die Abschnitte 1.2.2 und 1.2.3 aus der absoluten Geometrie auslassen. Natürlich ist es auch möglich, über größere Teile der absoluten Geometrie informierend zu referieren, wenn über diese Teile im Rahmen der Grundausbildung ausführlich gesprochen wurde. Es ist nicht nötig, viele Varianten ausführlich vorzustellen; denn man kann stets interessierende Teile in Angriff nehmen und notfalls fehlende Überlegungen, die in davorliegenden Abschnitten enthalten sind, nachtragen. Entsprechendes gilt für die Durchführung des Beweises der relativen Widerspruchsfreiheit der Lobačevskischen Geometrie. Die Kapitel 4 und 5 konnten stets ohne wesentliche Kürzungen in Vorlesungen geboten werden. Größere Teile der absoluten Geometrie sowie der Abschnitt 3.1 waren mitunter in Seminare gelegt worden. Solch Vorgehen hängt davon ab, inwieweit passende Literatur zur Verfügung steht. Die Durchführung eines Seminars zur vorliegenden Thematik ist wünschenswert, da es die selbständige Auseinandersetzung des Studierenden mit diesem Stoff fördert und bei der Herausbildung von Fertigkeiten in bezug auf die axiomatische Methode hilft.

Dieser Band umfaßt den axiomatischen Aufbau solcher nichteuklidischer Geometrien, die der euklidischen Geometrie am nächsten stehen. Der Kundige wird in

dieser nichteuklidischen Geometrie das „mathematische Gewand“ der allgemeinen Relativitätstheorie (1916) von A. EINSTEIN vermissen, das BERNHARD RIEMANN in seiner Habilitationsvorlesung *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen* bereits 1854 vorgelegt hatte. Dieses Thema stellt in der Tat eine notwendige Ergänzung dieses Bandes dar. Deshalb führen wir im Rahmen der wahlweise obligatorischen Ausbildung über Elemente der Kurven- und Flächentheorie der euklidischen Geometrie an den Begriff des Riemannschen oder gar des Finslerschen Raumes heran. Eine solche Heranführung benötigte jedoch einen eigenen Band.

Wir hoffen, daß der vorliegende Band eine wünschenswerte Ergänzung der Geometrie-Bände in der Reihe „Mathematik für Lehrer (MfL)“ darstellt. Der Vollständigkeit halber haben wir geringe Teile des axiomatischen Aufbaus der Geometrie in MfL, Bd. 6 wiederholt, zumal die Deduktion im Rahmen der absoluten Geometrie unter veränderten bzw. schwächeren Voraussetzungen erfolgen mußte. Dasselbe trifft auf den Geometrie-Band des einen Autors in der Studienbücherei zu. In einigen Fällen konnten derartige Herleitungen vereinfacht werden. Gegenüber [32] wurde die Einführung der Begriffe entsprechend den Festlegungen für die Reihe MfL verändert, so daß hier und in [32] selbst hinter gleichen Symbolen kaum genau derselbe Begriffsinhalt steht.

An einigen Stellen haben wir wissenschaftsgeschichtliche Angaben gemacht. Neben den Lebensdaten wurden nur bei den weniger bekannten Wissenschaftlern einige biographische Notizen aufgenommen. Insbesondere möchten wir bezüglich GAUSS, LOBAČEVSKIJ, J. BOLYAI und MINKOWSKI auf die einschlägigen mathematik-historischen Veröffentlichungen verweisen.

Für viele Anregungen, Hinweise und Verbesserungsvorschläge haben wir den Herren S. BREHMER, W. ENGEL und G. GEISE zu danken, ebenso Herrn H. WUSSING, der uns zu den mathematikgeschichtlichen Bemerkungen wertvolle Hinweise gegeben hat. Beim Korrekturlesen haben uns die Kollegen B. WERNICKE und U. LENGTAT in hervorragender Weise unterstützt. Unser Dank gilt weiterhin dem VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften für die gute Zusammenarbeit; die sachkundige und umsichtige redaktionelle Bearbeitung des Manuskripts leistete Frl. E. ARNDT, der wir für zahlreiche Ratschläge und Korrekturen sehr verbunden sind. Schließlich danken wir dem VEB Druckhaus „Maxim Gorki“ für die sorgfältige Arbeit.

Potsdam, im Januar 1978

B. KLOTZEK
E. QUAISSE

Inhalt

1.	Absolute Geometrie	11
1.1.	Inzidenz, Anordnung und Bewegung	14
1.1.1.	Inzidenzaxiome und einige Folgerungen	14
1.1.2.	Anordnungsaxiome und grundlegende Folgerungen	17
1.1.3.	Bewegungen und Spiegelungen	21
1.2.	Die Bewegungen einer Ebene und die Bewegungen des Raumes	28
1.2.1.	Ebene Spiegelungen, Drehungen und Verschiebungen	29
1.2.2.	Die Gruppe der ebenen Bewegungen	35
1.2.3.	Die Bewegungen des Raumes	39
1.3.	Grundlegende Sätze über Längen und Winkelgrößen	44
1.3.1.	Strecken- und Winkelkongruenz	44
1.3.2.	Längen und Winkelgrößen	48
1.3.3.	Einige wichtige Ungleichungen und ihre Bedeutung beim Konstruieren	52
2.	Einführung in die Lobačevskische Geometrie	58
2.1.	Euklidisches und Lobačevskisches Parallelenaxiom	58
2.1.1.	Einige weitere Sätze der absoluten Geometrie	58
2.1.2.	Das euklidische Parallelenaxiom	64
2.1.3.	Das Lobačevskische Parallelenaxiom	74
2.2.	Büschele und Bahnen	80
2.2.1.	Beziehungen zwischen zwei Geraden einer Ebene	80
2.2.2.	Büschele in einer Lobačevskischen Ebene	86
2.2.3.	Bahnen bezüglich eines Büschels	91
2.3.	Flächeninhalte in der Lobačevskischen Geometrie	95
2.3.1.	Dreiecksinhalte und elementargeometrische Flächeninhalte	95
2.3.2.	Defekte als Dreiecksinhalte	98
2.3.3.	Zerlegungsgleichheit und elementargeometrische Flächeninhalte	101
3.	Euklidische Geometrie und relative Widerspruchsfreiheit der Lobačevskischen Geometrie	106
3.1.	Gerichtete Strecken und Schubvektoren	106
3.1.1.	Verschiebungen in der euklidischen Geometrie	106
3.1.2.	Gerichtete Strecken und reelle Zahlen	109
	a) Die Vervielfachung von gerichteten Strecken mit ganzen Zahlen 110 — b) Die	

Vervielfachung von gerichteten Strecken mit rationalen Zahlen	111	— c) Die Vervielfachung von gerichteten Strecken mit reellen Zahlen	114	— d) Die Strahlensatzgruppe	118
3.1.3. Der Vektorraum der Verschiebungen					122
a) Die Vervielfachung der Verschiebungen	122	— b) Betrag und Skalarprodukt			
124 — c) Punkte und Vektoren	127				
3.2. Die relative Widerspruchsfreiheit der Lobačevskischen Geometrie					128
3.2.1. Das Kleinsche Modell					128
3.2.2. Die Gültigkeit der Axiome der Lobačevskischen Geometrie im Modell					135
3.2.3. Aussagen der Lobačevskischen Geometrie im Kleinschen Modell					143
4. Banach-Minkowskische Geometrie					147
4.1. Einführung					147
4.1.1. Anschauliche Einführung					147
4.1.2. Maßbestimmung mittels Eichfigur					149
4.1.3. Analytische Maßbestimmung					153
4.2. Der Umfang der Kreise und die Orthogonalität					158
4.2.1. Konvexe Figuren und Stützgeraden in der Minkowskischen Geometrie					158
4.2.2. Kreisschnittpunkte					164
4.2.3. Die Orthogonalität					167
4.2.4. Die Bestimmung von $2\pi_k$					172
4.3. Euklidische Räume und Banachräume					175
4.3.1. Bewegungen in der Minkowskischen Geometrie					175
4.3.2. Die Kongruenz in der Minkowskischen Geometrie					181
4.3.3. Banachräume					184
5. Minkowskische Geometrie der speziellen Relativitätstheorie					189
5.1. Vektorräume über Körpern und symmetrische Bilinearform					189
5.1.1. Vektorräume					189
5.1.2. Affine Räume					196
5.1.3. Symmetrische Bilinearform und metrischer Vektorraum					201
5.2. Minkowskische Räume und spezielle Relativitätstheorie					209
5.2.1. Abstand, isotrope Kegel, Modelle (Veranschaulichungen)					209
5.2.2. Bewegungen					214
5.2.3. Der Raum der Ereignisse der speziellen Relativitätstheorie					221
Literatur					228
Bezeichnungen und Symbole					231
Namen- und Sachverzeichnis					233

1. Absolute Geometrie

Die Geometrie ist eine der ältesten Wissenschaften. Der aus dem Griechischen stammende Name — Erdvermessung — weist auf ihren Ursprung in der objektiven Realität hin. Die Erkenntnisse wurden wie in jeder empirischen Wissenschaft in der Auseinandersetzung mit der Umwelt durch Abstraktion gewonnen, und durch die Anwendung der gewonnenen Einsichten haben sie in der Praxis ihre Bestätigung gefunden. Dieses Herangehen an die Erkenntnisgewinnung sollte auch heute noch im Unterricht hinreichend breit berücksichtigt werden. So kann man beispielsweise eine Anzahl von Dreiecken untersuchen, um dann folgende Vermutung aufzustellen: *In jedem Dreieck ABC gilt* (mit den üblichen Vereinbarungen hinsichtlich der Bezeichnungen von Seitenlängen und Winkelgrößen)

$$a \leq b \Leftrightarrow \alpha \leq \beta.$$

Typisch für die Mathematik ist jedoch, die Gültigkeit solch einer Aussage durch einen Beweis zu sichern. Dieser Beweis soll hier skizziert werden.

Wir setzen zunächst die jeweiligen Beziehungen zwischen a und b voraus.

Fall 1: $a = b$ (Abb. 1a). Dann ist das Dreieck ABC gleichschenklig, und die Basiswinkel $\angle A$ und $\angle B$ sind deckungsgleich, d. h. $\alpha = \beta$.

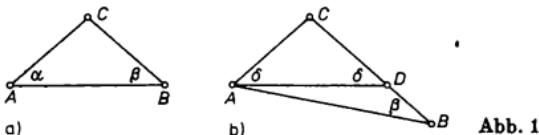


Abb. 1

Fall 2: $a > b$ (Abb. 1b). Wir tragen die Strecke AC auf der Halbgeraden p , die den Anfangspunkt C besitzt und durch B geht, ab und erhalten einen Punkt D zwischen B und C . Im Dreieck ADC gilt $\angle A \cong \angle D$. Ist δ die Größe dieses Winkels, so gilt $\alpha > \delta$ und $\delta > \beta$ (nach dem Satz vom Außenwinkel bezüglich des Dreiecks ABD); folglich ist $\alpha > \beta$.

Fall 3: $\alpha < \beta$. Hier erhalten wir $\alpha < \beta$ wie im Fall 2.

Nunmehr setzen wir umgekehrt die Beziehungen zwischen α und β voraus.

Fall 1: $\alpha < \beta$. Es gilt $\alpha < b$, denn aus $a \geq b$ folgte $\alpha \geq \beta$.

Fall 2: $\alpha = \beta$. Es gilt $a = b$, denn aus $a \leq b$ folgte $\alpha \leq \beta$.

Fall 3: $\alpha > \beta$. Es gilt $a > b$, denn aus $a \leq b$ folgte $\alpha \leq \beta$,
w. z. b. w.

Im ersten Teil des Beweises wurden einige geometrische Sätze als gültig vorausgesetzt: Satz vom gleichschenkligen Dreieck, Satz vom Außenwinkel, die Transitivität der Relation $>$ für Winkelgrößen¹⁾ u. a. m. Im zweiten Teil des Beweises wurde der bereits bewiesene Teil des Satzes benutzt. Außerdem haben wir uns darauf gestützt, daß sich die Fälle $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$ gegenseitig ausschließen und daß von den Fällen $a < b$, $a = b$ und $a > b$ wenigstens einer eintritt.²⁾

Die soeben geschilderte Situation ist auch typisch für die gesamte Mathematik. So finden wir in jedem Geometriebuch wahre geometrische Aussagen, geometrische Sätze mit Beweis, wobei im Beweis andere geometrische Aussagen als wahr vorausgesetzt werden. Insbesondere gibt es auch Aussagen, die als wahr vorausgesetzt und zuvor nicht bewiesen wurden, die *Axiome*. Als Axiome werden in der Elementargeometrie z. B. folgende Sätze benutzt:

Durch zwei Punkte gibt es genau eine Gerade. Durch drei nicht kollineare Punkte gibt es genau eine Ebene. Liegen zwei Punkte einer Geraden auch in einer Ebene, dann liegt die Gerade ganz in dieser Ebene. Zu jeder Geraden gibt es durch jeden Punkt höchstens eine Parallele.

Zum Aufbau der Elementargeometrie können jedoch Systeme bzw. Mengen von Axiomen benutzt werden, die nur einen Teil oder sogar keine dieser genannten Sätze als Axiome enthalten.

Den Zusammenhang zwischen den Axiomen, Sätzen und Beweisen bei einem Aufbau einer Theorie kann man durch das folgende Schema darstellen:

Axiome $\xrightarrow{\text{Beweise}} \text{Sätze}$

In die Formulierung von Axiomen und Sätzen geht eine Reihe von Begriffen ein wie z. B. Punkt, Gerade, Strecke, Mittelpunkt, ... geht durch ... In jedem Geometriebuch gibt es geometrische Begriffe, die mit Hilfe anderer erklärt bzw. definiert werden. Es existieren aber auch geometrische Begriffe ohne vorherige Erklärung bzw. Definition. Im allgemeinen bemüht man sich, wenige geometrische Begriffe als Grundbegriffe unerklärt zu benutzen, um mit ihrer Hilfe die anderen Begriffe durch Definitionen einzuführen:

Grundbegriffe $\xrightarrow{\text{Definitionen}} \text{Begriffe der Theorie}$

¹⁾ Daß die Transitivität im allgemeinen nicht trivial ist, überlegt man sich beispielsweise anhand der Beziehung „ist Tochter von“.

²⁾ Dabei wird übrigens eine logische Formel sichtbar, die sich in vielen Beweissituationen der Mathematik anwenden läßt, nämlich das Haubersche Theorem.

Ein Aufbau nach den hier skizzierten Prinzipien, ein *axiomatischer* bzw. *deduktiver Aufbau*, wurde erstmals für die Geometrie erarbeitet. In seinen *Elementen* hat EUKLID (365?–300 v. u. Z.) den Versuch eines streng logischen Aufbaus der Geometrie unternommen. Hinsichtlich der logischen Strenge galt dieses Werk, das die gesamte Mathematik der Antike enthielt, zwei Jahrtausende lang als mustergültig. Trotzdem hatten viele Mathematiker Bedenken gegen die Aufnahme des sogenannten 5. Postulats in das System der Axiome und Postulate:

Gefordert soll sein:

.....

5. (Ax. 11) *Und daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.* (Vgl. [16], S. 3)

Dieses Axiom, das sich schon durch seine Länge von den anderen Postulaten und Axiomen EUKLIDS unterscheidet, hat bei vielen Mathematikern Mißtrauen erweckt. Geraden und Ebenen sind ideale Gebilde, die in der Realität nur teilweise

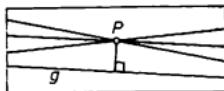


Abb. 2

realisiert werden können; auf jedem Zeichenblatt bzw. auf jeder Wandtafel (Abb. 2) gibt es stets gerade Linien, die die Voraussetzungen des 5. Postulats erfüllen, und sich dennoch auf dem Zeichenblatt bzw. auf der Tafel nicht schneiden, auch nicht bei jeder Verlängerung, die wir realisieren können. Bis vor 150 Jahren wurde versucht, das 5. Postulat aus den übrigen Axiomen und Postulaten EUKLIDS abzuleiten. Wie die Lösung der Parallelenfrage durch CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855, 1816), NIKOLAJ IVANOVIC LOBAČEVSKIJ (1792–1856, 1826) und JANOS BOLYAI (1802–1860, 1831) zeigt, ist das nicht möglich. Vielmehr wurde die *Lobačevskische Geometrie* entdeckt¹⁾, in der es zu einer Geraden und einem Punkt außerhalb der Geraden mehrere Parallelen gibt. Im Rahmen der Prüfgenauigkeit auf der Erde eignet sich diese Theorie wie die euklidische Geometrie zur angeneherten Beschreibung der geometrischen Verhältnisse des physikalischen Raumes.

Die Forderungen an einen deduktiven Aufbau sind vor allem im vorigen Jahrhundert gewachsen. Nachdem MORITZ PASCH (1843–1930) besonders durch seine *Vorlesungen über neuere Geometrie* von 1883 die axiomatische Methode entwickelt hatte, formulierte DAVID HILBERT (1862–1943) in den *Grundlagen der Geometrie* von 1899 die Forderungen an einen deduktiven Aufbau, wie sie heute in der Mathematik gestellt werden. Es ist bemerkenswert, daß er erst in der vierten Axiomengruppe ein euklidisches Parallelenaxiom benutzt. Darin spiegelt sich die Tendenz

¹⁾ LOBAČEVSKIJ hat diese Ehrung verdient, weil er nicht nur als erster seine Ergebnisse veröffentlicht hat, sondern sich auch später durch Veröffentlichungen um die Anerkennung, den Ausbau und um die Anwendungen seiner Ideen bemüht hat.

wider, die von einem Parallelenaxiom unabhängigen geometrischen Sätze gesondert zu entwickeln. Nach J. BOLYAI faßt man diese Sätze zur *absoluten Geometrie* zusammen. Wir wollen bereits hier bemerken, daß das Attribut „absolut“ durchaus relativ ist. Wir haben keinen Grund, nur dem Euklidischen Parallelenaxiom eine fragliche Übereinstimmung mit der Realität nachzusagen. Bereits PASCH äußert z. B. gegenüber der Dichtheit der Strecken und Geraden Vorbehalte, die dann bezüglich der Stetigkeit erst recht bestehen.

1.1. Inzidenz, Anordnung und Bewegung

1.1.1. Inzidenzaxiome und einige Folgerungen

Wir setzen die Begriffe Punkt, Gerade und Ebene als Grundbegriffe voraus. In unseren späteren Überlegungen betrachten wir Punkte, Geraden und Ebenen als Elemente gegebener Mengen \mathfrak{P} , \mathfrak{G} bzw. \mathfrak{E} und gehen von folgender Grundannahme aus:

I₀. Gegen sei ein festes Tripel $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{E})$ derart, daß

$$g \in \mathfrak{G} \Rightarrow g \subseteq \mathfrak{P}, \quad \varepsilon \in \mathfrak{E} \Rightarrow \varepsilon \subseteq \mathfrak{P}$$

gilt.

Die Elemente von \mathfrak{P} nennen wir *Punkte* und bezeichnen sie mit großen lateinischen Buchstaben $A, B, C, \dots, P, Q, \dots$ Zur Bezeichnung der Elemente von \mathfrak{G} und \mathfrak{E} , die *Geraden* bzw. *Ebenen* genannt werden, verwenden wir vorwiegend die kleinen lateinischen Buchstaben f, g, h bzw. die kleinen griechischen Buchstaben $\varepsilon, \zeta, \eta, \vartheta$. Die Zeichen \in, \subseteq bzw. \ni, \supseteq werden im Zusammenhang mit Punkten, Geraden und Ebenen als (*liegt*) *in* bzw. als (*geht*) *durch* (einheitlich auch als *inzidiert mit*) gelesen.

Jede beliebige Teilmenge F von \mathfrak{P} wird *Figur* genannt. Im Fall $F \subseteq g$ für eine Gerade g bzw. $F \subseteq \varepsilon$ für eine Ebene ε heißt F *linear* bzw. *eben*.

Die Punkte einer linearen Figur werden *kollinear*, die Punkte einer ebenen Figur *komplanar* genannt.

Es werden folgende *Inzidenzaxiome* vorausgesetzt:

- I₁. Jede Gerade g enthält voneinander verschiedene Punkte P, Q .
- I₂. Durch zwei Punkte P, Q gibt es genau eine Gerade g .
- I₃. Jede Ebene ε enthält nicht kollineare Punkte P, Q, R .
- I₄. Durch nicht kollineare Punkte P, Q, R gibt es genau eine Ebene ε .
- I₅. Liegen zwei Punkte P, Q einer Geraden g in einer Ebene ε , dann liegt die Gerade g in ε .
- I₆. Für zwei Ebenen ε, η , die einen gemeinsamen Punkt besitzen, ist $\varepsilon \cap \eta$ eine Gerade.
- I₇. Es gibt Punkte P, Q, R, S , wobei $P \neq Q$ gilt und P, Q, R nicht kollinear sowie P, Q, R, S nicht komplanar sind.

Für die späteren Beweisführungen ist es wichtig, die logische Struktur der Axiome genau zu erfassen. Formalisiert können einige Axiome wie folgt notiert werden:

$$I_1. \quad \bigwedge_{g \in \mathfrak{G}} P, Q \in g \Rightarrow P \neq Q.$$

$$I_4. \quad \bigwedge_{P, Q, R \in \mathfrak{G}} P, Q, R \text{ nicht kollinear} \Rightarrow \bigvee_{\varepsilon \in \mathfrak{E}} P, Q, R \in \varepsilon.$$

$$I_7. \quad \bigvee_{P, Q, R, S \in \mathfrak{G}} P \neq Q \wedge P, Q, R \text{ nicht kollinear} \wedge P, Q, R, S \text{ nicht komplanar.}$$

Für den Leser ist es nützlich, alle Axiome nach dem vorliegenden Muster zu notieren.

Es sei bemerkt, daß wir nach I_3 statt $g \subseteq \varepsilon$ bzw. $\varepsilon \supseteq g$ einfach $g \subset \varepsilon$ bzw. $\varepsilon \supset g$ schreiben können.

Die Formulierung des Axioms I_1 läßt sich nicht dahingehend vereinfachen, daß nur die Existenz nicht komplanarer Punkte P, Q, R, S gefordert wird, weil sonst weder die Existenz einer Geraden noch die einer Ebene gesichert ist und weil im Fall $\mathfrak{E} = \emptyset$ jede Punktmenge nicht komplanar ist.

Nach I_2 bestimmen zwei Punkte eine Gerade eindeutig; nach demselben Axiom haben zwei Geraden höchstens einen Punkt gemeinsam. Außerdem bestimmen drei nicht kollineare Punkte nach I_4 eindeutig eine Ebene. Das rechtfertigt den Gebrauch des bestimmten Artikels in den folgenden

Definitionen. Die Gerade g heißt die *Verbindungsgerade von P, Q* (in Zeichen: $g = g_{PQ} = g(PQ)$) genau dann, wenn $P \neq Q$ und $P, Q \in g$ gilt.

Der Punkt P heißt der *Schnittpunkt der Geraden g, h* (in Zeichen: $P = P_{gh} = P(gh)$) oder g, h schneiden sich in P genau dann, wenn $g \neq h$ und $P \in g, h$ gilt.

Die Ebene ε heißt die *Verbindungsebene von P, Q, R* (in Zeichen: $\varepsilon = \varepsilon_{PQR} = \varepsilon(PQR)$) genau dann, wenn P, Q, R nicht kollinear sind und $P, Q, R \in \varepsilon$ gilt.

Satz 1.1. Es gibt höchstens eine Ebene, die

a) durch einen Punkt P und eine Gerade g mit $P \notin g$ gilt
oder

b) durch zwei Geraden g, h geht.

Zusatz. Die Existenz ist gesichert, wenn $P \notin g$ gilt bzw. wenn sich g, h schneiden.

Beweis. a) Nach I_1 gibt es in g zwei Punkte Q und R , die wegen I_2 mit P nicht kollinear sind. Gehen etwa ε und η durch P und g , dann gilt $P, Q, R \in \varepsilon, \eta$ und folglich $\varepsilon = \eta$ nach I_4 .

b) Wegen $g \neq h$ gibt es einen Punkt, der etwa in h und nicht in g liegt. Aus $g, h \subset \varepsilon, \eta$ erhalten wir somit nach a) sofort $\varepsilon = \eta$. Den Beweis des Zusatzes überlassen wir dem Leser (vgl. Aufgabe 2).

Dieser Satz ermöglicht folgende

Definition. Die Ebene ε heißt *Verbindungsebene von P, g bzw. g, h* (in Zeichen: $\varepsilon = \varepsilon_{gP} = \varepsilon(gP)$ bzw. $\varepsilon = \varepsilon_{gh} = \varepsilon(gh)$) genau dann, wenn $P \notin g, P \in \varepsilon$ und $g \subset \varepsilon$ bzw. $g \neq h$ und $g, h \subset \varepsilon$ gilt.

Mit Hilfe der bisherigen Begriffe können wir folgende Definition der *Parallelität von Geraden* aussprechen:

Wir schreiben $g \parallel h$ für komplanare Geraden g, h genau dann, wenn $g = h$ oder $g \cap h = \emptyset$ ist.

Wir dürfen jedoch nicht erwarten, daß die gewohnten Eigenschaften dieser Relation gelten wie z. B. Existenz und Eindeutigkeit einer Parallelen zu einer Geraden durch einen Punkt oder die Transitivität der Parallelität. Im Gegenteil. So werden wir z. B. im folgenden zeigen, daß die Existenz einer Parallelen zu einer Geraden durch einen Punkt aus dem vorliegenden Axiomensystem nicht hergeleitet werden kann.

Satz 1.2. *Aus den Inzidenzaxiomen ist nicht beweisbar, daß Geraden mehr als zwei und Ebenen mehr als drei Punkte enthalten und daß zu Geraden durch Punkte stets Parallelen existieren.*

Um das einzusehen, betrachten wir folgendes Modell des Systems der Inzidenzaxiome:

$$\mathfrak{P}_M = \{A, B, C, D\},$$

$$\mathfrak{G}_M = \{\{X, Y\} : X \neq Y \wedge X, Y \in \mathfrak{P}_M\},$$

$$\mathfrak{E}_M = \{\{X, Y, Z\} : X \neq Y \neq Z \neq X \wedge X, Y, Z \in \mathfrak{P}_M\}.$$

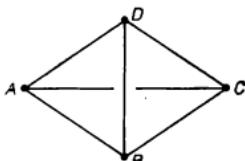


Abb. 3

Die Menge der M -Punkte besteht aus vier Punkten (Abb. 3). Die M -Geraden können wir als sechs „Hanteln“ deuten, die M -Ebenen als vier „Triangel“. Nach Definition enthält jede M -Gerade zwei Punkte, und durch je zwei M -Punkte geht genau eine M -Gerade. Entsprechend enthält jede Ebene nicht kollineare Punkte, und durch je drei Punkte geht genau eine Ebene. Trivialerweise liegt eine Gerade in einer Ebene, wenn ihre beiden Punkte zur Ebene gehören. Aus Mangel an Punkten schneiden sich je zwei Ebenen in einer Geraden. Offenbar ist auch I_1 erfüllt, so daß unser Tripel $(\mathfrak{P}_M, \mathfrak{G}_M, \mathfrak{E}_M)$ neben der Grundannahme I_0 auch I_1 bis I_5 genügt. — Damit ist die Behauptung des Satzes 1.2 einsichtig, denn wäre das Gegenteil richtig, dann müßte es speziell für das Tripel $(\mathfrak{P}_M, \mathfrak{G}_M, \mathfrak{E}_M)$ gelten — im Widerspruch dazu, daß $g = \{A, B\} \in \mathfrak{G}_M$ genau zwei und $e = \{A, B, C\} \in \mathfrak{E}_M$ genau drei Punkte enthält und daß zu g in e durch C keine Parallele existiert, w. z. b. w.

Aufgaben

1. Man zeige, daß sich Geraden g und h einer Ebene genau dann schneiden, wenn $g \nparallel h$ gilt.
2. Man beweise mit Hilfe der Axiome I_1 , I_2 , I_4 und I_5 :
 - a) Es gibt eine Ebene, die einen gegebenen Punkt P und eine gegebene Gerade g mit $P \notin g$ enthält.
 - b) Durch sich schneidende Geraden existiert eine Ebene.

3. Es gilt:

- a) Nicht kollineare Punkte A, B, C sind paarweise verschieden.
- b) Von nicht komplanaren Punkten A, B, C, D sind je drei nicht kollinear.

Beweis von a). Nach I_1 , gibt es einen Punkt $P \neq A$, nach I_2 existiert g_{AP} und nach Voraussetzung gilt $B \notin g_{AP}$ oder $C \notin g_{AP}$, etwa $B \notin g_{AP}$ und damit $A \neq B$. Nach I_2 existiert g_{AB} und nach Voraussetzung ist $C \notin g_{AB}$ und folglich $A, B \neq C$, w. z. b. w.
Man beweise b) nach diesem Muster oder indirekt mit Hilfe des Zusatzes zu Satz 1.1 und I_7 .

1.1.2. Anordnungsaxiome und grundlegende Folgerungen

Oft werden Geraden als (total) geordnete Punktmengen vorausgesetzt. Dabei wird besonders deutlich, was sich in der Mengenlehre erst nach zusätzlichen Überlegungen herausstellt: Eine Relation und ihre inverse Relation sind wie Zwillingsschwestern Ordnungsrelationen oder nicht. An anschauliche Vorstellungen anknüpfend, werden wir die ausgezeichneten Ordnungsrelationen der Geraden Durchlaufsinne nennen und neben den Begriffen Punkt, Gerade und Ebene als Grundbegriff verwenden, um alle anderen Anordnungsbegriffe wie z. B. Halbgeraden, Halbebenen und Halbräume, Winkel und deren Ordnung darauf zurückzuführen.

Deshalb erweitern wir unsere Grundannahme I_0 dahingehend, daß wir neben $\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{E}$ eine Funktion \mathfrak{D} als gegeben ansehen, die jeder Geraden g zwei zueinander entgegengesetzte Relationen D_g^1, D_g^2 in g zuordnet:

$$A_0. \quad g \in \mathfrak{G} \Rightarrow \mathfrak{D}(g) = \{D_g^1, D_g^2\} \text{ mit } g \times g \supset D_g^2 = (D_g^1)^{-1}.$$

Bezüglich der Grundannahme werden D_g^1, D_g^2 die *Durchlaufsinne von g* genannt. Im allgemeinen werden wir den von uns betrachteten bzw. ausgezeichneten Durchlaufsinne von g kurz mit $<$ bezeichnen, weil keine Mißverständnisse zu befürchten sind (vgl. auch Aufgabe 1).

Für jede Gerade wird festgelegt: A liegt vor B genau dann, wenn $A < B$ gilt. B liegt zwischen A und C genau dann, wenn $A < B < C$ oder $C < B < A$ gilt. Die Menge der zwischen A und B liegenden Punkte wird mit (AB) bezeichnet.

$$AB := (AB) \cup \{A, B\}$$

ist die *Strecke* mit den *Endpunkten* A und B . Bezüglich AB ist (AB) das *Innere*.

Für $A = B$ ist $(AB) = \emptyset$ und $AB = \{A\}$ hier als Sonderfall zugelassen.

Wir setzen folgende *Anordnungsaxiome* voraus:

A₁. Jede Gerade g ist eine unbegrenzte (total) geordnete Menge, d. h., daß bezüglich eines Durchlaufsinnes $<$ für alle $A, B, C \in g$ folgendes gilt:

- (a) $A < A$ (Irreflexivität),
- (b) $A < B \wedge B < C \Rightarrow A < C$ (Transitivität),
- (c) $A \neq B \Rightarrow A < B \vee B < A$ (Konnexität),
- (d) $\bigvee_{P, Q \in g} P < A < Q$ (Unbegrenztheit).

A₂. Zu jeder Ebene ε und jeder in ε enthaltenen Geraden g gibt es genau eine Menge $\{H_1, H_2\}$, deren Elemente *offene Halbebenen in ε bezüglich des Trägers g* genannt werden, mit folgenden Eigenschaften:

(a) $H_1 \cup H_2 = \varepsilon \setminus g$,

(b) $P, Q \in \varepsilon \setminus g$ liegen genau dann in derselben offenen Halbebene, wenn $PQ \cap g = \emptyset$ ist.

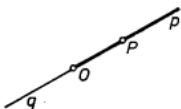
A₃. Zu jeder Ebene ε gibt es genau eine Menge $\{\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2\}$, deren Elemente *offene Halbräume bezüglich des Trägers ε* genannt werden, mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\mathfrak{H}_1 \cup \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{B} \setminus \varepsilon$,

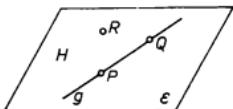
(b) $P, Q \in \mathfrak{B} \setminus \varepsilon$ liegen genau dann in demselben Halbraum, wenn $PQ \cap \varepsilon = \emptyset$ ist.

Neben den offenen Halbebenen und Halbräumen gibt es die *offenen Halbgeraden in g bezüglich O in g* :

$$p = \{X \in g: O < X\}, \quad q = \{X \in g: X < O\};$$



a)



b)

Abb. 4

dabei ist $O = O(p) = O(q)$ der *Anfangspunkt von p bzw. q* . Gilt $P \in p$, dann werden $OP^+ := p \cup \{O\}$ und $OP^- := g \setminus p$ *abgeschlossene Halbgeraden* genannt (Abb. 4a).

Aus der Definition der offenen Halbgeraden erhalten wir folgenden

Hilfssatz 1. 3. Ist p eine offene Halbgerade mit dem Anfangspunkt O , dann folgt aus $P, P' \in p$ stets $PP' \subset p$.

Beweis. Es genügt, den Fall $O < P < P'$ zu betrachten. Dann folgt aus $X \in PP'$ zunächst $O < P \leq X \leq P'$ und mit $O < X$ bereits $X \in p$, w. z. b. w.

Die Bezeichnung von Halbebenen und Halbräumen erfolgt entsprechend den Festlegungen für Halbgeraden: Ist H eine offene Halbebene in ε bezüglich $g = g_{PQ}$ (Abb. 4b) und $R \in H^1$, dann heißen $PQR^+ = gR^+ := H \cup g$ und $PQR^- = gR^- := \varepsilon \setminus H$ *abgeschlossene Halbgeraden*. Analog werden für $S \notin \varepsilon = \varepsilon_{PQR}$ die *abgeschlossenen Halbräume* $PQRS^+ = \varepsilon S^+$ bzw. $PQRS^- = \varepsilon S^-$ eingeführt.

Offenbar sind offene Halbgeraden, Halbebenen und Halbräume Elemente einer gewissen Klasseneinteilung. Auch n -Ecke²⁾ $A_1A_2\dots A_n = A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup \dots \cup A_nA_1$ in einer Ebene ε zerlegen $\varepsilon \setminus A_1A_2\dots A_n$ in Teile, die allerdings nicht so einfach wie Halbebenen nach A₂(b) beschrieben werden können (Abb. 5a): $P, Q \in \varepsilon \setminus A_1A_2\dots A_n$

¹⁾ Man überlegt sich leicht, daß jede offene Halbebene und jeder offene Halbraum Punkte enthält.

²⁾ Vielecke und ihre Ecken, Seiten, Diagonalen seien wie üblich erklärt (vgl. etwa MfL, Bd. 6 oder die Lehrbücher für Mathematik der Polytechnischen Oberschule).

liegen genau dann in demselben Teil, wenn es in ε Punkte P_1, \dots, P_k derart gibt, daß $(PP_1 \cup P_1P_2 \cup \dots \cup P_kQ) \cap A_1A_2 \dots A_n = \emptyset$ ist (Streckenzugäquivalenz). Wie

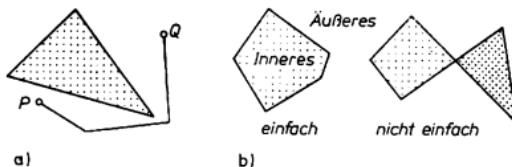


Abb. 5

man leicht sieht, ist die Streckenzugäquivalenz in $\varepsilon \setminus A_1A_2 \dots A_n$ eine Äquivalenzrelation. Somit können wir erklären:

Definition. In einer Ebene ε heißt das n -Eck $A_1A_2 \dots A_n = A_1A_2 \cup \dots \cup A_nA_1$ *einfach (zusammenhängend)* genau dann, wenn $\varepsilon \setminus A_1A_2 \dots A_n$ bezüglich der Streckenzugäquivalenz genau zwei Äquivalenzklassen enthält¹⁾ (Abb. 5 b).

Im Fall der Winkel $\angle POQ := \{OP^+, OQ^+\}$ mit $OP^+ \neq OQ^+$ können bezüglich der Streckenzugäquivalenz ebenfalls Äquivalenzklassen gebildet werden (Abb. 6);

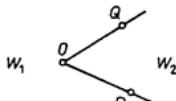


Abb. 6

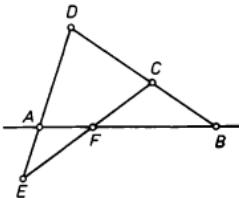


Abb. 7

darauf wollen wir nicht weiter eingehen, zumal wir davon kaum Gebrauch machen.

Die Ordnung der Punkte einer Geraden hat noch eine bemerkenswerte Eigenschaft:

Satz 1.4. *Die Geraden sind dichte Punktmengen, d. h., daß zwischen zwei Punkten stets noch ein Punkt der Geraden liegt.*

Folgerung. *Es gilt $(AB) = \emptyset$ genau dann, wenn $A = B$ ist.*

Beweis. Es sei $A \neq B$. Nach I₁, gibt es einen Punkt C derart, daß A, B, C nicht kollinear sind.²⁾ Nach A₁(d) existiert ein Punkt $D \in g_{BC}$, für den $C \in (BD)$ und folglich $D \notin g_{AB}$ gilt (Abb. 7). Ebenfalls nach A₁(d) finden wir einen Punkt $E \in g_{AD}$, so daß A im Inneren von DE liegt. Es gilt $D \in ABC^+$, $E \in ABC^-$; somit gibt es einen Punkt $F \in (CE) \cap g_{AB}$. Andererseits ergibt die Wahl der Punkte $B \in ECD^-$, $A \in ECD^+$, so daß F zwischen A und B liegt, w. z. b. w.

¹⁾ Man kann beweisen, daß genau eine Klasse, das *Äußere*, Geraden enthält; die andere Klasse ist das *Innere*.

²⁾ Im folgenden werden wir keine Inzidenzaxiome wie beispielsweise I₂ zitieren. Auch in späteren Beweisen soll die Anwendung der benötigten Inzidenzaxiome kaum noch besonders hervorgehoben werden.

Eine entsprechende Aussage gilt für Halbgeraden, die von einem Punkt ausgehen. Dazu müssen Mengen solcher Halbgeraden geordnet werden: Es sei $O \notin g_{PQ}$ und etwa $P < Q$. Wir setzen für zwei von O ausgehende Halbgeraden s und t per definitionem $s < t$ genau dann, wenn s, t die Strecke PQ in Punkten S bzw. T mit $S < T$ treffen. Dann gilt

Satz 1.5. *Sind O, P, Q nicht kollineare Punkte, so kann die Menge der Halbgeraden, die von O ausgehen und PQ treffen, mit Hilfe der Durchlaufsinne in g_{PQ} so geordnet werden, daß die Ordnung von der speziellen Transversalen PQ unabhängig ist; wir erhalten eine dichte (total) geordnete Menge.*

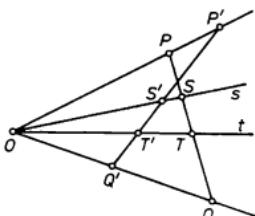


Abb. 8

Beweis. Wir haben nur zu zeigen, daß die oben beschriebene Ordnung unabhängig von der Strecke PQ ist. Es sei $OP^+ = OP'^+$ und $OQ^+ = OQ'^+$ (Abb. 8). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $P' < Q'$ neben $P < Q$ voraussetzen. Die von O ausgehenden Halbgeraden s, t mögen die Strecke PQ in S und T treffen, wobei $S < T$ gälte.

Im Fall $S = P$ und $T = Q$ gilt $P' \in s \cap P'Q', Q' \in t \cap P'Q'$ und $P' < Q'$. Andernfalls gilt $S \neq P$ oder $T \neq Q$, etwa $S \neq P$. Wir betrachten die offenen Halbgebene H_1, H_2 bezüglich g_{OS} mit $P \in H_1$ und $Q \in H_2$. Nach dem Hilfssatz 1.3 gilt $H_1 \ni P, P', H_2 \ni Q, Q'$; folglich trifft g_{OS} die Strecke $P'Q'$ in einem Punkt S' , der wegen

$$OPQ^+ \supset PQ, OQ^+, P'Q' \wedge s = g_{OS} \cap OPQ^+$$

in s liegt. Entsprechend trifft t die Strecke $P'Q'$ in einem Punkt T' . Wegen $H_1 \ni P, P'$ und $H_2 \ni T, Q, Q', T'$ gilt schließlich $S' < T'$, w. z. b. w.

Ist M eine nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge einer Geraden g , dann kann man fragen, ob eine kleinste obere Schranke, eine obere Grenze von M , existiert. Aus den bisherigen Axiomen kann diese Frage nicht positiv beantwortet werden. Wir formulieren deshalb das *Axiom von der oberen bzw. unteren Grenze*:

St. Jede nicht leere, nach oben bzw. unten beschränkte Teilmenge einer Geraden besitzt eine obere bzw. untere Grenze.

Diese Eigenschaft überträgt sich offenbar sofort auf die Menge der Halbgeraden die von einem Punkt ausgehen und eine Strecke schneiden.

Im Gegensatz zu den bisherigen Axiomen wird hier eine Existenzaussage über eine unendliche Menge (von oberen bzw. unteren Schranken) gemacht. Deshalb

spricht man hier nicht mehr von einem Anordnungsaxiom, sondern von einem *Stetigkeitsaxiom*. Wir wollen HILBERT folgen und dieses Axiom erst später, und zwar in Kapitel 2 benutzen.

Aufgaben

1. Irreflexivität, Transitivität, Konnektivität und Unbegrenztheit des ausgezeichneten Durchlaufsinnes $<_g$ einer Geraden g bedingen die entsprechenden Eigenschaften des dazu entgegengesetzten Durchlaufsinnes $<_g^*$.
2. Die Durchlaufsinne sind asymmetrisch: $A < B \Rightarrow B < A$. Folglich können $B \in (AC)$ und $A \in (BC)$ nicht zugleich gelten.
Anleitung: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt $A < B$.
- 3.*¹⁾ Es seien A, B, C, D nicht komplanare Punkte. Dann sind keine drei dieser Punkte kollinear. Es sei \mathfrak{H}_A der offene Halbraum bezüglich ϵ_{BCD} , der A enthält; entsprechend seien $\mathfrak{H}_B, \mathfrak{H}_C$ und \mathfrak{H}_D definiert. Wir setzen

$$\mathfrak{P}_M := \mathfrak{H}_A \cap \mathfrak{H}_B \cap \mathfrak{H}_C \cap \mathfrak{H}_D,$$

$$\mathfrak{G}_M := \left\{ g' : \forall g' = g \cap \mathfrak{P}_M \neq \emptyset \right\},$$

$$\mathfrak{E}_M := \left\{ \epsilon' : \forall \epsilon' = \epsilon \cap \mathfrak{P}_M \neq \emptyset \right\}.$$

Die Durchlaufsinne in den Modellgeraden $g' = g \cap \mathfrak{P}_M \in \mathfrak{G}_M$ seien durch Einschränkung der Durchlaufsinne in g auf g' erklärt: $<_{g'} := <_g \cap (g' \times g')$.

- a) Man zeige, daß für $(\mathfrak{P}_M, \mathfrak{G}_M, \mathfrak{E}_M, \mathfrak{D}_M)$ alle Inzidenz-, Anordnungs- und Stetigkeitsaxiome gelten.
- b) Es ist zu beweisen, daß jede Gerade g' unendlich viele Punkte enthält und daß zu jeder Geraden $g' \in \mathfrak{G}_M$ durch jeden Punkt $P' \in \mathfrak{P}_M$ mit $P' \notin g'$ in \mathfrak{G}_M unendlich viele Parallele existieren.

1.1.3. Bewegungen und Spiegelungen

Als fünften und letzten Grundbegriff verwenden wir den Begriff der Bewegung. Wir gehen nun von einem Tupel $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \mathfrak{B})$ aus, wobei wir die Elemente von \mathfrak{B} Bewegungen nennen, und erweitern unsere Grundannahme um

B0. $\tau \in \mathfrak{B} \Rightarrow \tau$ eineindeutige Abbildung aus \mathfrak{P} in \mathfrak{P} , u. a. $\tau \subseteq \mathfrak{P} \times \mathfrak{P}$.

Bewegungen ebener Figuren können gut mit Hilfe von Transparentpapier veranschaulicht werden. Zur Motivierung späterer Axiome kann man sich so folgende Sachverhalte klarmachen: Jede lineare Figur F mit zwei Punkten A und B kann so bewegt werden, daß A in den Anfangspunkt O einer gegebenen Halbgeraden p und B in einen Punkt $B' \in p$ übergeht. Durch $A' = O, B' \in p$ ist für jeden Punkt X von F der Bildpunkt X' eindeutig bestimmt (Abb. 9a).

¹⁾ Der Stern an einer Aufgabe bedeutet, daß die Aufgabe einen höheren Schwierigkeitsgrad besitzt.

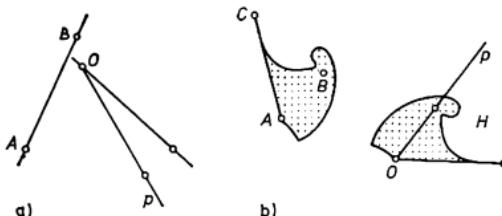


Abb. 9

Sind in einer ebenen Figur F nicht kollineare Punkte A, B, C vorgegeben, dann können wir F so bewegen, daß A in den Anfangspunkt O einer gegebenen Halbgeraden p , B in einen Punkt $B' \in p$ und C in einen Punkt C' einer durch p bestimmten Halbebene H übergeht (Abb. 9b). Durch $A' = O$, $B' \in p$, $C' \in H$ ist für jeden Punkt X von F der Bildpunkt X' eindeutig bestimmt. — Eine entsprechende Eigenschaft ist für die Bewegungen räumlicher Figuren erfüllt.

Zur Bezeichnung von Bewegungen werden wir hauptsächlich die Variablen ϱ, σ, τ benutzen. P' bezeichne das Bild des Punktes P bei der Abbildung τ ; ist F eine Figur, so ist F' das Bild der Figur F bei τ . Sobald P' bzw. F' benutzt wird, setzen wir (evtl. unausgesprochen) voraus, daß P bzw. F im Definitionsbereich $D(\tau)$ von τ enthalten ist.

Definition. Figuren F, F' heißen *kongruent* oder *deckungsgleich* (in Zeichen: $F \cong F'$) genau dann, wenn es eine Bewegung τ mit $F' = F'$ gibt. Winkel $\sphericalangle POQ$ und $\sphericalangle P'Q'Q$ heißen *kongruent* (in Zeichen: $\sphericalangle POQ \cong \sphericalangle P'Q'Q$) genau dann, wenn $\{(OP^+), (OQ^+)\} = \{O'P^+, O'Q^+\}$ für eine Bewegung τ gilt.

Die Nacheinanderausführung von Bewegungen ϱ und τ werden wir, um $(P^\varrho)^\tau = P^{\varrho\tau}$ zu erhalten, durch

$$\varrho\tau := \left\{ (X, Z) : \bigvee_y X^\varrho = Y \wedge Y^\tau = Z \right\}$$

festlegen. Im allgemeinen gilt nur $D(\varrho\tau) \subseteq D(\varrho)$; in Abb. 10 sind Definitionsbereich von $\varrho\tau$ schraffiert, wobei $D(\varrho\tau) \subset D(\varrho)$ gilt.

Die Umkehrung τ^{-1} von τ ist wie üblich durch

$$\tau^{-1} := \{(X, Y) : Y^\tau = X\}$$

festgelegt. Speziell gilt $Q^{\tau^{-1}} = P$, wenn $Q = P^\tau$ ist.

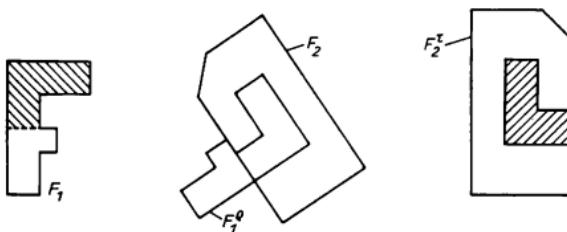


Abb. 10

Für $F = D(\tau)$ ist $\tau\tau^{-1}$ im allgemeinen nicht die identische Abbildung der Menge aller Punkte, sondern die identische Abbildung von F , während $\tau^{-1}\tau$ die Figur F' identisch abbildet.

Bezüglich τ ist P Fixpunkt, g Fixgerade bzw. ε Fixebene genau dann, wenn $P^\tau = P$, $g^\tau = g$ bzw. $\varepsilon^\tau = \varepsilon$ gilt.¹⁾

Definition. Die Bewegung σ heißt *Spiegelung an P* genau dann, wenn $P^\sigma = P$ und für alle $X \neq P$ stets $X^\sigma \in PX^-$ gilt (Abb. 11a). Die Bewegung σ heißt *Spiegelung an g* genau dann, wenn $X^\sigma = X$ für alle $X \in g$ und $X^\sigma \in gX^-$ für alle $X \notin g$ gilt (Abb. 11b). Die Bewegung σ heißt *Spiegelung an ε* genau dann, wenn $X^\sigma = X$ für alle $X \in \varepsilon$ und $X^\sigma \in \varepsilon X^-$ für alle $X \notin \varepsilon$ gilt (Abb. 11c).

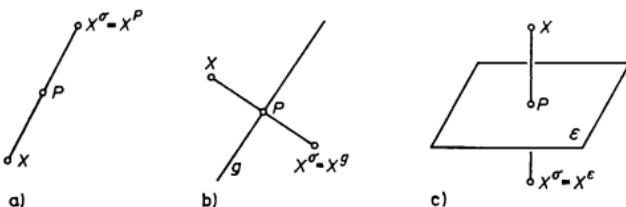


Abb. 11

Ohne zusätzliche Axiome ist weder die Existenz noch die Eindeutigkeit von Spiegelungen gesichert; nach dem folgenden Axiom B₄ gibt es an jedem Punkt bzw. an jeder Geraden genau eine Spiegelung. Hier vereinbaren wir: Ist σ eindeutig bestimmte Spiegelung an P , g bzw. ε , dann schreiben wir statt X^σ kurz und signifikant X^P , X^g bzw. X^ε , gelesen: Bild von X bei der Spiegelung an P usw. (Abb. 11).

Wir nennen g *senkrecht zu* h (in Zeichen: $g \perp h$) genau dann, wenn $g \neq h$ und $g^\perp = g$ ist. Entsprechend heißt g bzw. ε *senkrecht zu* η (in Zeichen: $g \perp \eta$ bzw. $\varepsilon \perp \eta$) genau dann, wenn $g \perp \eta$ und $g^\eta = g$ bzw. $\varepsilon \neq \eta$ und $\varepsilon^\eta = \varepsilon$ ist.

Es werden folgende Bewegungssätze, deren Inhalt teilweise gut mittels Transparentpapier zu veranschaulichen ist (vgl. die Erläuterungen zum Axiom B₃(a, b) durch Abb. 9 und die entsprechende Textstelle), vorausgesetzt:

B₁. Mit ϱ und τ sind auch $\varrho\tau$ und τ^{-1} Bewegungen.²⁾

1) Fixgeraden bzw. -ebenen brauchen keinen Fixpunkt zu besitzen.

2) Nach MfL, Bd. 1 ist die Nacheinanderausführung von Abbildungen stets assoziativ. Bezüglich dieser Operation bildet eine nichtleere Menge \mathfrak{M} von eineindeutigen Abbildungen mit der Eigenschaft

$$(1) \quad \varrho, \tau \in \mathfrak{M} \Rightarrow \varrho\tau \in \mathfrak{M}$$

eine Halbgruppe. Kommt noch

$$(2) \quad \tau \in \mathfrak{M} \Rightarrow \tau^{-1} \in \mathfrak{M}$$

hinzu, dann liegt im allgemeinen noch keine Gruppe, sondern nur eine *inverse Halbgruppe* vor (vgl. E. C. Ляпин, Полугруппы, Физматгиз, Москва 1960). Solch *inverse Halbgruppe*

- B₂.** Verträglichkeit mit den Inzidenz- und Anordnungsbegriffen.¹⁾
- Bei Bewegungen bleiben Kollinearität und Komplanarität erhalten.
 - Ist τ eine Bewegung einer linearen Figur $F \subseteq g$ und gilt $A, B \in F$, $A < B$ und $A' < B'$ für einen Durchlaufsinn $<$ der Verbindungsgeraden von A' und B' , dann folgt $X' < Y'$ für alle $X, Y \in F$ mit $X < Y$.
- B₃.** Beweglichkeit und Starrheit.
- Sind A, B ($\neq A$) in einer linearen Figur F und eine Halbgerade p gegeben, dann existiert genau eine Bewegung τ mit $D(\tau) = F$, $A' = O(p)$ und $B' \in p$.
 - Sind nicht kollineare Punkte A, B, C in einer ebenen Figur F , eine offene Halbebene H und eine Halbgerade p in deren Träger gegeben, dann existiert genau eine Bewegung τ mit $D(\tau) = F$, $A' = O(p)$, $B' \in p$ und $C' \in H$.
 - Sind A, B, C, D nicht komplanare Punkte in einer Figur F , \mathfrak{H} ein offener Halbraum, H eine Halbebene in seinem Träger und p eine Halbgerade in deren Träger, dann existiert genau eine Bewegung τ mit $D(\tau) = F$, $A' = O(p)$, $B' \in p$, $C' \in H$ und $D' \in \mathfrak{H}$.
- B₄.** Symmetrie der Strecken und Winkel.
- Es gibt genau eine Spiegelung an einem Punkt M , die die Endpunkte einer gegebenen Strecke vertauscht.
 - Ist ein Winkel in einer Ebene ε gegeben, dann existiert genau eine Spiegelung an einer Geraden w in ε , die die Schenkel des Winkels vertauscht.

enthält jedoch die folgenden Untergruppen (B. B. Baršep): Ist D Definitionsbereich für ein Element aus \mathfrak{M} , dann bildet

$$\mathfrak{G}_D := \{\tau \in \mathfrak{M} : D(\tau) = W(\tau) = D\}$$

nach (1) und (2) eine Untergruppe der inversen Halbgruppe; weitere Untergruppen gibt es nicht.

In der Vereinigung der Potenzmengen der Definitionsbereiche

$$\mathbf{M} := \bigcup_{\tau \in \mathfrak{M}} \mathfrak{P}(D(\tau))$$

induziert \mathfrak{M} folgendermaßen eine Äquivalenzrelation:

$$M \sim N : \Leftrightarrow \bigvee_{\tau \in \mathfrak{M}} M \subseteq D(\tau) \wedge M' = N.$$

Mit Hilfe dieser Relation lassen sich in Form von Äquivalenzklassen invariante Begriffe erklären. Die Aussage „ \sim ist Äquivalenzrelation“ verallgemeinert die Aussage, daß eine Gruppe eineindeutiger Abbildungen einer Menge auf sich in deren Potenzmenge eine Äquivalenzrelation erzeugt.

¹⁾ In [32] wurde nur $B' \in (A' C')$ für $A, B, C \in D(\tau)$ und $B \in (AC)$ verlangt. Die jetzige Formulierung scheint dem bisherigen Aufbau besser angepaßt zu sein. Verwendet man dagegen die Zwischenbeziehung als Grundbegriff (vgl. [4]), dann ist die Forderung nach Invarianz der Zwischenbeziehung natürlich.

Die Veranschaulichung des Axioms B_4 veranlaßt uns, den bei gegebenen Punkten P, Q eindeutig existierenden Punkt $M = M(P, Q)$ mit $P^M = Q$ und $Q^M = P$ den *Mittelpunkt von PQ* zu nennen (Abb. 12a). Für $P = Q$ gilt $M = P$, so daß nach $B_4(a)$ an jedem Punkt eindeutig gespiegelt werden kann.

Bei gegebenem Winkel $\angle(p, q)$ in ε nennen wir die Gerade $w = w(\angle(p, q))$ mit $p^w = q$ und $q^w = p$ die *Winkelhalbierende von $\angle(p, q)$* . Nach $B_4(b)$ kann an jeder Geraden eindeutig gespiegelt werden.

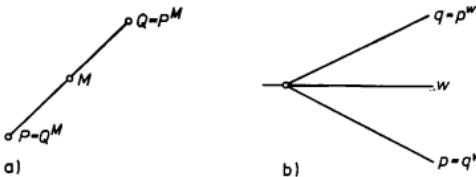


Abb. 12

Wegen der Beweglichkeit der Figuren nach B_3 gibt es für jede Figur F mit wenigstens zwei Punkten eine Bewegung τ mit $D(\tau) = F$; und mit $\iota(F) := \tau\tau^{-1}$ erkennen wir nach dem Axiom B_1 die identische Abbildung von F als Bewegung; nach $B_3(a)$ und B_1 trifft das auch für Figuren mit weniger als zwei Punkten (uninteressante Sonderfälle) zu. Ist folglich $\varrho \subset \tau$ und τ eine Bewegung, dann ist mit ι als identischer Bewegung des Definitionsbereichs von ϱ offenbar $\varrho = \iota\tau$ eine Bewegung. Solche Bewegungen erhält man oft als Einschränkungen von Bewegungen auf gewisse Figuren: Ist beispielsweise τ eine Bewegung eines Dreiecks ABC , dann ist τ/AB eine Bewegung der Strecke AB .

Umgekehrt möchte man manchmal z. B. eine Bewegung τ eines Dreiecks auf die Schenkel der Dreieckswinkel ausdehnen. Es kann tatsächlich jede Bewegung τ einer ebenen Figur F mit $A' = O(p), B' \in p, C' \in H$ für nicht kollineare Punkte $A, B, C \in F$ und Halbgeraden p im Träger der offenen Halbebene H eindeutig auf jede Figur F^* mit $F' \subseteq F^* \subseteq \varepsilon_{ABC}^{-1}$ fortgesetzt werden: Nach $B_3(b)$ gibt es genau eine Bewegung τ^* mit $D(\tau^*) = F^*$ und $A'^* = O(p), B'^* \in p, C'^* \in H$; die Bewegung τ^*/F ist nach der Eindeutigkeitsaussage in $B_3(b)$ gleich τ , w. z. b. w.

Entsprechende Aussagen können für lineare Figuren mit zwei Punkten bzw. für Figuren mit nicht komplanären Punkten gewonnen werden.

Unter Berücksichtigung der uninteressanten Sonderfälle gilt der

Satz 1.6. a) *Für jede Figur ist deren identische Abbildung eine Bewegung.*

b) *Das Einschränken von Bewegungen führt ebenfalls zu Bewegungen.*

c) *Jede Bewegung einer linearen Figur mit zwei Punkten A und B kann in g_{AB} eindeutig fortgesetzt werden. Entsprechendes gilt für ebene Figuren mit nicht kollinearen*

¹⁾ Die Bezeichnung ε_{ABC} setzt Existenz und Eindeutigkeit der Verbindungsebene voraus, die nach I_4 gesichert ist. Wir werden uns künftig auf den Hinweis auf verwendete Bewegungsaxiome konzentrieren und verwendete Inzidenz- und Anordnungsaxiome kaum namentlich zitieren.

Punkten A, B, C bezüglich ε_{ABC} und für Figuren mit nicht komplanaren Punkten bezüglich des ganzen Raumes \mathfrak{P} .

Da mit τ auch τ^{-1} Bewegung ist, kann $B_2(a)$ sofort dahingehend verschärft werden, daß bei Bewegung nicht kollineare Punkte in nicht kollineare und nicht komplanare Punkte in nicht komplanare übergehen.

Schon in der Mengenlehre kann folgendes festgestellt werden:

Ist τ eine eineindeutige Abbildung von M auf $M' \subset N$, so gibt es keine eineindeutige Abbildung ϱ von N in M mit $(X')^\varrho = X$ für alle $X' \in M'$. Das heißt, wenn τ eine eineindeutige Abbildung von M auf $M' \subseteq N$ ist und eine eineindeutige Abbildung ϱ von N in M mit $(X')^\varrho = X$ für alle $X' \in M'$ bzw. $X \in M$ existiert, dann gilt $M' = N$.

Diese Situation ist im Zusammenhang mit Bewegungen oft gegeben. Ist beispielsweise $D(\tau) = AB^+$ für eine Bewegung τ , dann gilt nach dem Axiom $B_2(a)$ zunächst $(AB^+)^\tau \subseteq g_{A^+B^+}$; o. B. d. A. können wir $A < B$ und $A^+ < B^+$ voraussetzen, um aus $X \in AB^+$ nach $B_2(b)$ noch $A^+ \leq X^+$, d. h. $(AB^+)^\tau \subseteq A^+B^+$, zu erhalten. Da die Erweiterung von τ^{-1} auf A^+B^+ diese Halbgerade nach $B_2(b)$ in AB^+ abbildet, ergibt sich $(AB^+)^\tau = A^+B^+$. — Nach diesem Muster beweist man den

Satz 1.7. Es gelten folgende Regeln:

- (1) $g_{AB}^\tau = g_{A^+B^+}$, $\varepsilon_{ABC}^\tau = \varepsilon_{A^+B^+C^+}$, $\mathfrak{P}^\tau = \mathfrak{P}$,
- (2) $(AB^+)^\tau = A^+B^+$, $(ABC^+)^\tau = A^+B^+C^+$, $(ABCD^+)^\tau = A^+B^+C^+D^+$,
- (3) $(AB)^\tau = A^+B^+$, $(\prec ABC)^\tau = \prec A^+B^+C^+$, $(\Delta ABC)^\tau = \Delta A^+B^+C^+$.

Wir wenden uns nun den Spiegelungen zu. Aus der Definition der Spiegelungen ergibt sich, daß für jeden Punkt des Raumes ein Bildpunkt existiert; aus ihr erhalten wir auch folgende Charakterisierung der Bildpunkte (Abb. 11):

Spiegelung an P	Spiegelung an g	Spiegelung an ε
Für $X \neq P$ gilt $X^P \in PX^-$, $XP \cong PX^P$.	Für $X \notin g$ und $P \in XX^g \cap g$ gilt $XX^g \perp g$, $X^g \in gX^-$, $XP \cong PX^g$.	Für $X \notin \varepsilon$ und $P \in XX^e \cap g$ gilt $XX^e \perp \varepsilon$, $X^e \in \varepsilon X^-$, $XP \cong PX^e$.

Auf diese Kennzeichnung der Bildpunkte baut die Konstruktion der Bildpunkte mit den Zeichengeräten auf.

Die folgenden Sätze enthalten grundlegende Eigenschaften der Spiegelungen.

Satz 1.8. Für jede Spiegelung σ gilt

$$X^\sigma = Y \Rightarrow Y^\sigma = X$$

bzw. $X^{\sigma\sigma} = X$.

Beweis. Es sei $X^\sigma = Y$ bei einer Spiegelung σ .

a) Es sei σ Spiegelung an P .

Fall 1: $X = P$. Dann ist $X = X^\sigma = Y = Y^\sigma$.

Fall 2: $X \neq P$. σ und σ^{-1} bewegen P und Y ; nach der Eindeutigkeitsaussage in B_{3(a)} gilt

$$\left. \begin{array}{l} P^{\sigma^{-1}}, P^\sigma = P \\ Y^{\sigma^{-1}} (= X), Y^\sigma \in PX^+ \end{array} \right\} \Rightarrow Y^\sigma = X.$$

b) Es sei σ Spiegelung an g .

Fall 1: $X \in g$. Dann ist $X = X^\sigma = Y = Y^\sigma$.

Fall 2: $X \notin g$. Es sei $P \in XY \cap g$; σ und σ^{-1} bewegen P und Y ; nach der Eindeutigkeitsaussage in B_{3(a)} gilt

$$\left. \begin{array}{l} P^{\sigma^{-1}}, P^\sigma = P \\ Y^{\sigma^{-1}} (= X), Y^\sigma \in PX^+ \end{array} \right\} \Rightarrow Y^\sigma = X.$$

c) Es sei σ Spiegelung an ε . Dann erhält man analog b) die Behauptung, w. z. b. w.

Satz 1.9. a) Die Fixpunkte der Spiegelungen werden durch folgende Bedingungen charakterisiert:

$$X^P = X \Leftrightarrow X = P,$$

$$X^g = X \Leftrightarrow X \in g,$$

$$X^\varepsilon = X \Leftrightarrow X \in \varepsilon.$$

b) Hinsichtlich der Fixgeraden gilt

$$x^P = x \Leftrightarrow x \ni P,$$

$$x^g = x \Leftrightarrow x = g \vee x \perp g,$$

$$x^\varepsilon = x \Leftrightarrow x \subset \varepsilon \vee x \perp \varepsilon.$$

Beweis. a) Wenn $X = P$ ist, gilt nach Definition $X^P = X$; wenn $X \neq P$ ist, gilt $X^P \in PX^-$ und folglich $X^P \neq X$. Damit gilt die Behauptung bezüglich der Fixpunkte einer Punktspiegelung. Die Aussagen bezüglich der Fixpunkte der Spiegelungen an Geraden und Ebenen beweist man analog.

b) Die Aussagen bezüglich der Fixgeraden von Spiegelungen an Geraden bzw. Ebenen ergeben sich unmittelbar aus der Definition der Orthogonalität. Aus der Definition der Punktspiegelung folgt unmittelbar, daß $x \ni P$ sofort $x^P = x$ nach sich zieht; gilt umgekehrt $x^P = x = g_{QR}$ und $P \neq Q$, dann erhalten wir zunächst $Q \neq Q^P \in x^P = x$ und schließlich $P \in g_{PQ} = g_{QQ^P} = x$, w. z. b. w.

Satz 1.10. Für die Spiegelung an jedem Punkt P und für jede Gerade g gilt $g^P \parallel g$.

Zusatz. Aus $P \notin g$ folgt $g^P \cap g = \emptyset$.

Beweis. Für $P \in g$ ist $g^P = g$ und folglich $g^P \parallel g$. Nun sei $P \notin g$. Aus der Definition der Punktspiegelung folgt zunächst $g^P \subset \varepsilon_{gP}$. Außerdem gilt $g^P \cap g = \emptyset$, denn andernfalls würden sich g^P und g in einem Punkt $S \neq P$ schneiden, weil

nach dem Satz 1.9b wegen $P \notin g$ noch $g^P \neq g$ gilt. Aus $S \in g^P \cap g$ folgt aber $S^P \in g \cap g^P$ nach dem Satz 1.8 und damit $S^P = S$ im Widerspruch zum Satz 1.9a, w. z. b. w.

Aufgaben

1. Man beweise $X^{\sigma\sigma} = X$ für die Spiegelung σ an einer beliebigen Ebene ε . (Vgl. Satz 1.8.)
2. Man zeige:
 - Erfüllt eine Bewegung τ einer Figur F für zwei ihrer Punkte die Bedingungen $A^\tau = A$ und $B^\tau \in AB^+$, dann gilt $X^\tau = X$ für jeden Punkt $X \in F \cap g_{AB}$.
 - Erfüllt eine Bewegung τ einer Figur F für drei nicht kollineare Punkte die Bedingungen $A^\tau = A$, $B^\tau \in AB^+$ und $C^\tau \in ABC^+$, dann ist $X^\tau = X$ für alle Punkte $X \in F \cap \varepsilon_{ABC}$.
Man kann den Beweis des Satzes 1.8 variieren, indem man a) mit $\tau = \sigma\sigma$ benutzt.

1.2. Die Bewegungen einer Ebene und die Bewegungen des Raumes

In diesem Abschnitt werden wir oft Produkte von Bewegungen und deren Inverse betrachten. Es ist deshalb nützlich, einige Regeln aus der Mengenlehre zu wiederholen. Die Nacheinanderausführung von Abbildungen ist stets assoziativ, so daß wir stets klammerfrei arbeiten können. Es gilt außerdem

$$(\varrho\tau)^{-1} = \tau^{-1}\varrho^{-1}.$$

Für Spiegelungen σ gilt $\sigma^{-1} = \sigma$ nach Satz 1.8.

Für Produkte $\sigma_1 \cdots \sigma_m$ bzw. $\sigma_1' \cdots \sigma_n'$, für deren Faktoren $\sigma_\mu^{-1} = \sigma_\mu$ bzw. $\sigma_\nu'^{-1} = \sigma_\nu'$ gilt, ergibt sich

$$(\sigma_1 \cdots \sigma_m)^{-1} = \sigma_m \cdots \sigma_1,$$

und aus $\sigma_1 \cdots \sigma_m = \sigma_1' \cdots \sigma_n'$ folgt der Reihe nach

$$\sigma_2 \cdots \sigma_m = \sigma_1 \sigma_1' \cdots \sigma_n',$$

$$\sigma_2 \cdots \sigma_m \sigma_n' = \sigma_1 \sigma_1' \cdots \sigma_{n-1}',$$

• • • • • • • • •

$$\sigma_n' \cdots \sigma_1' = \sigma_m \cdots \sigma_1.$$

Ist schließlich σ Spiegelung an P und σ' eine beliebige Spiegelung, dann ist $\sigma'\sigma\sigma'$ Spiegelung an $P\sigma'$, denn es gilt $(P\sigma')^{\sigma'\sigma\sigma'} = P\sigma\sigma' = P\sigma'$, und zu jedem $Y \neq P\sigma'$ gibt es ein X mit $X\sigma' = Y$, so daß aus $P \in XX\sigma$ nach dem Axiom B₂ offenbar $P\sigma' \in X\sigma'X\sigma\sigma' = YY\sigma'\sigma\sigma'$ folgt. Ähnlich zeigt man natürlich für beliebige Spiegelungen σ' :

Ist σ Spiegelung an g , dann ist $\sigma'\sigma\sigma'$ Spiegelung an $g\sigma'$, ist σ Spiegelung an ε , dann ist $\sigma'\sigma\sigma'$ Spiegelung an $\varepsilon\sigma'$.

1.2.1. Ebene Spiegelungen, Drehungen und Verschiebungen

In diesem und dem nächsten Abschnitt betrachten wir eine beliebige, aber feste Ebene ε . Die identische Abbildung von ε bezeichnen wir mit 1. Sind in ε ein Punkt P bzw. eine Gerade g gegeben, dann gilt $\varepsilon^P = \varepsilon$ bzw. $\varepsilon^g = \varepsilon$. Die auf ε eingeschränkte Spiegelung an P bzw. g bezeichnen wir mit σ_P bzw. σ_g und nennen sie *ebene Spiegelung an P bzw. g* .

Das Axiom B_4 sichert uns in ε eindeutige Mittelpunkte und Winkelhalbierende. Es sichert uns auch wie folgt das *Lot von einem Punkt P auf eine Gerade h* ($\not\parallel P$) und *zu einer Geraden g in einem Punkt P ($\in g$) die Senkrechte*:

a) Gilt $h = g_{AB} \subset \varepsilon$, dann existiert die Spiegelung an h als Winkelhalbierende von $\not\prec BAB$, und nur die Verbindungsgerade g von P und P^h erfüllt $P \in g \perp h$ (Abb. 13a).

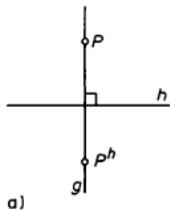
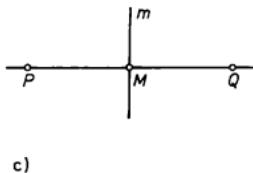
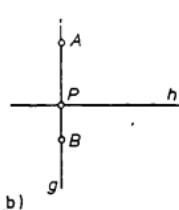


Abb. 13



b) Gilt $P \in g \subset \varepsilon$ und liegt P in g zwischen A und B , dann ist die Winkelhalbierende h von $\not\prec APB$ die eindeutige Senkrechte mit $P \in h$ und $g \perp h$ ¹ (Abb. 13b).

Für Punkte P und Q in ε wird eine Gerade $m = m(P, Q) \subset \varepsilon$, die P und Q vertauscht ($P^m = Q$ und $Q^m = P$), *Mittelsenkrechte* genannt. Wie der Beweis des folgenden Satzes lehrt, sichert das Axiom B_4 auch Existenz und Eindeutigkeit der Mittelsenkrechten.

Satz 1.11. In ε gibt es zu zwei Punkten P und Q genau eine *Mittelsenkrechte* m .

Zusatz. Es gilt $g_{PQ} \perp m$ und $M(P, Q) \in m$.

Beweis. Existenz. Nach $B_4(a)$ gibt es einen Punkt M mit $PM = Q$, und nach $B_4(b)$ existiert zu $\not\prec PMQ$ eine Winkelhalbierende m (Abb. 13c). Da σ_M und σ_m den Punkt M festlassen und $P^m, P^m \in MP^-$ erfüllen, gilt nach $B_4(a)$ wie erwartet $P^m = P^m = Q$.

Eindeutigkeit. Aus $P^m = Q = P^m'$ folgt $\sigma_m = \sigma_{m'}$ und damit $m = m'$ (Menge der Fixpunkte), denn σ_m und $\sigma_{m'}$ erfüllen die Bedingungen

$$P^m = P^m' = Q,$$

$$Q^m = Q^m' \in QP^+$$

¹) Nach dieser Herleitung steht vorläufig das Lot links vom \perp -Zeichen und die Senkrechte rechts. Nach dem Zusatz von 1.13 brauchen wir die Reihenfolge nicht mehr zu beachten.

und bilden jede der Halbebenen bezüglich g_{PQ} auf sich ab, erfüllen also die Voraussetzungen des Axioms B₃(b), w. z. b. w.

Neben den ebenen Spiegelungen werden in der Elementargeometrie noch Drehungen und Verschiebungen betrachtet, die wir hier wie folgt erklären:

Definition. Eine Bewegung
 $\varrho \neq 1$ von ε auf sich heißt genau
dann *Drehung um P*, wenn

1. $P^\varrho = P$,
2. $X \neq P \Rightarrow X^\varrho \neq X$

gilt.

Definition. Eine Bewegung
 $\tau \neq 1$ von ε auf sich heißt genau
dann *Verschiebung längs g*, wenn

1. $g^\tau = g$,
2. $x \nparallel g \Rightarrow x^\tau \cap x = \emptyset$

gilt.

Um spätere Fallunterscheidungen zu vermeiden, soll die identische Bewegung 1 von ε Sonderfall sowohl der Drehung als auch der Verschiebung sein. In der Definition der Drehung $\varrho \neq 1$ können die Bedingungen 1 und 2 zusammengefaßt werden: ϱ besitzt genau einen Fixpunkt, nämlich das *Drehzentrum*. Eine Verschiebung $\tau \neq 1$ ist fixpunktfrei. Offenbar gilt der

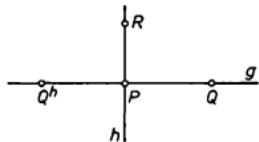


Abb. 14

Satz 1.12. a) Mit ϱ ist auch ϱ^{-1} eine Drehung um P .

b) Mit τ ist auch τ^{-1} eine Verschiebung längs g .

Als Beispiel einer ebenen Drehung um P können wir die Spiegelung σ_P angeben. Für diese spezielle Drehung gilt

Satz 1.13. Aus $P \in g$, $h \subset \varepsilon$ und $g \perp h$ folgt $\sigma_P \sigma_h = \sigma_P = \sigma_h \sigma_g$ und umgekehrt.

Zusatz. Wenn $g \perp h$ gilt, dann schneiden sich g und h in einem Punkt P , und es ist auch $h \perp g$; außerdem gilt

$$X \in g \Rightarrow X^h = X^P,$$

$$Y \in h \Rightarrow Y^g = Y^P.$$

Beweis. a) Es sei $g \perp h$, d. h. $g \neq h$ und $g^h = g$. Es gibt Punkte Q und R mit $Q \in g \setminus h$ und $R \in h \setminus g$. Wegen $Q^h \in g \cap h^Q$ schneiden sich g , h in einem Punkt P (Abb. 14). Nach der Eindeutigkeitsaussage im Axiom B₃(b) gilt

$$\left. \begin{array}{l} (P^h)^\varrho = P = P^P \\ (Q^h)^\varrho, Q^P \in PQ^- \\ (R^h)^\varrho, R^P \in PQR^- \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma_h \sigma_g = \sigma_P = \sigma_P^{-1} = \sigma_g \sigma_h.$$

Wegen $g^h = g$ und $h^g = (h^h)^g = h^P = h$ erkennt man

$$X \in g \Rightarrow X^h = X^P,$$

$$Y \in h \Rightarrow Y^g = Y^P$$

sowie $h \perp g$.

Zum Beweis der Umkehrung sei $\sigma_g \sigma_h = \sigma_P = \sigma_h \sigma_g$. Dann ist offensichtlich $g \neq h$. Es sei $X \in h \setminus g$. Wegen $X^P = (X^h)^g = X^g$ ist P Mittelpunkt und g Mittelsenkrechte von XX^P , für die $P \in g$ gilt. Aus $P^h = (P^g)^h = P^g = P$ folgt $P \in h$, und $g^h = (g^g)^h = g^P = g$ zieht noch $g \perp h$ nach sich, w. z. b. w.

Der Satz 1.13, der über die Spiegelungen σ_P als spezielle Drehungen Auskunft gibt, kann für Drehungen und Verschiebungen verallgemeinert werden.

Satz 1.14. Wenn $P \in g$, $h \subset \varepsilon$ gilt, dann ist $\sigma_g \sigma_h$ eine Drehung um P . Ist umgekehrt ϱ eine Drehung um P und h eine Gerade durch P , dann gibt es eine Gerade g durch P mit $\varrho = \sigma_g \sigma_h$.

Zusatz. Aus $(F^g)^h = F$ und $g \neq h$ folgt $F \in g, h$.

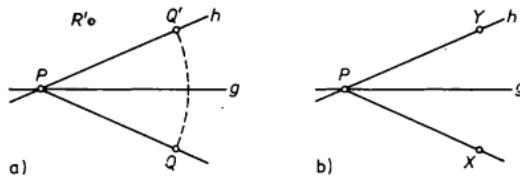


Abb. 15

Folgerung. Die Menge der Drehungen um P ist auf der Menge der von P ausgehenden Halbgeraden einfach transitiv, d. h., daß zu Halbgeraden PX^+ und PY^+ in ε genau eine Drehung ϱ um P mit $(PX^+)^{\varrho} = PY^+$ existiert.

Beweis. a) Es sei $P \in g$, $h \subset \varepsilon$. Dann ist $\varrho := \sigma_g \sigma_h$ eine Bewegung von ε mit dem Fixpunkt P . Für $g = h$ ist ϱ die identische Drehung von ε . Für $g \neq h$ ist ϱ eine Drehung um P , wenn ϱ außer P keinen weiteren Fixpunkt besitzt; das ergibt sich aus dem Zusatz, den wir nun beweisen.

Es sei $(F^g)^h = F$ bzw. $F^g = F^h$. Wäre $F \notin g$ oder $F \notin h$, dann gälte $F \neq F^g = F^h$. Wir erhielten $g = m(F, F^g) = h$ im Widerspruch zur Voraussetzung über g und h . Deshalb gilt $F \in g, h$.

b) Es sei ϱ Drehung um P und $P \in h$ (Abb. 15a). Es gibt Punkte Q' und R' mit $P \neq Q' \in h$ und $R' \in \varepsilon \setminus h$. Die Urbilder von Q' , R' bei ϱ seien Q bzw. R , d. h. $Q^{\varrho} = Q'$ und $R^{\varrho} = R'$. Weiterhin bezeichnen wir die Winkelhalbierende von $\angle QPQ'$ mit g . Nach der Eindeutigkeitsaussage im Axiom B₃(b) gilt

$$\left. \begin{aligned} P^{\varrho} &= (P^g)^h = P^g = P \\ Q^{\varrho} &= (Q^g)^h = Q' = Q^g \in PQ'^+ \\ R^{\varrho} &\in PQ'R'^+ \vee (R^g)^h \in PQ'R'^+ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma_g = \varrho \vee \sigma_g \sigma_h = \varrho.$$

Da die Anzahl der Fixpunkte von σ_g und ϱ differiert, ist wie behauptet $\varrho = \sigma_g \sigma_h$.

Zum Beweis der Folgerung sei PX^+ , $PY^+ \subset \varepsilon$, g die Winkelhalbierende von $\angle XPY$ und $h = g_{PY}$ (Abb. 15b). Dann ist $\varrho := \sigma_g \sigma_h$ eine Drehung um P mit $(PX^+)^{\varrho} = PY^+$. — Gilt auch $(PX^+)^{\varrho'} = PY^+$ für eine weitere Drehung ϱ' , dann gibt es zunächst eine Gerade f mit $\varrho' = \sigma_f \sigma_h$, und $\varrho' \varrho^{-1} = \sigma_f \sigma_h \sigma_g \sigma_h = \sigma_f \sigma_g$ ist eine Drehung mit den Fixpunkten P und X , d. h. $\varrho' \varrho^{-1} = 1$ und $\varrho' = \varrho$, w. z. b. w.

Satz 1.15. Wenn $f \perp g$, $h \subset \varepsilon$ gilt, dann ist $\sigma_g \sigma_h$ eine Verschiebung längs f . Ist umgekehrt τ eine Verschiebung längs f und h eine Gerade mit $f \perp h$, dann gibt es eine zu f senkrechte Gerade g mit $\tau = \sigma_g \sigma_h$.

Zusatz. Für $A, B \in f$ ist $\sigma_A \sigma_B$ eine Verschiebung längs f ; wenn $A, B, C \in f$ gilt, ist $\sigma_A \sigma_B \sigma_C$ Spiegelung an einem Punkt aus f .

Folgerung. Die Menge der Verschiebungen längs f ist auf f einfach transitiv, d. h., daß es zu $X, Y \in f$ genau eine Verschiebung τ längs f mit $X^{\tau} = Y$ gibt. Außerdem erhält jede Verschiebung längs f die Durchlaufsinne von f wie folgt:

$$X < Y \Rightarrow X^{\tau} < Y^{\tau}.$$

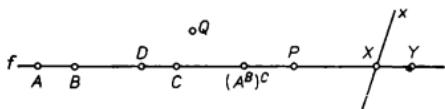


Abb. 16

Beweis. Wir beweisen zunächst den Zusatz. Es sei $A, B, C \in f = g_{AP}$, D in f der Mittelpunkt von A und $(A^B)^C$ und $Q \in \varepsilon \setminus f$ (Abb. 16). Nach dem Axiom B₂(b) bleibt der Durchlaufsinne $<$ von f mit $A < P$ bei den Spiegelungen an den Punkten X von f erhalten ($<^{\tau} = <$), oder er wird umgekehrt ($<^{\tau} = <^{-1}$); nach der Definition der Punktspiegelungen kann nur der zweite Fall eintreten. Außerdem ist $Q^X \in f Q^{\tau}$. Es gilt also

$$\begin{aligned} & ((A^B)^C)^D = A < (((P^A)^B)^C)^D \in f, \\ & (((P^A)^B)^C)^D \in AP^+, \\ & (((Q^A)^B)^C)^D \in AP^{\tau}, \end{aligned}$$

so daß $\sigma_A \sigma_B \sigma_C \sigma_D$ nach der Eindeutigkeitsaussage in B₃(b) die identische Bewegung 1 ist, d. h. $\sigma_A \sigma_B \sigma_C = \sigma_D$ oder $\sigma_A \sigma_B = \sigma_D \sigma_C$.

Für $A, B \in f$ ist $\tau := \sigma_A \sigma_B$ eine Bewegung von ε mit $f^{\tau} = f$. Schneidet nun $x \subset \varepsilon$ die Gerade f in X , dann gibt es einen Punkt $Y \in f$ mit $\tau^{-1} = \sigma_B \sigma_A = \sigma_Y \sigma_X$ und $\tau = \sigma_A \sigma_B = \sigma_X \sigma_Y$. Im Fall $A = B$ ist τ die identische Verschiebung von ε ; im Fall $A \neq B$ ist $X \neq Y$, d. h. $Y \notin x$, und nach 1.10¹⁾ gilt noch

$$x^{\tau} \cap x = (x^X)^Y \cap x = x^Y \cap x = \emptyset.$$

1) Verweise dieser Art beziehen sich auf die Gesamtheit der im Anschluß an die Formulierung des Satzes 1.10 getroffenen Aussagen. Entsprechendes gilt sinngemäß bei Verweisen auf andere Nummern. Verweise auf ganze Abschnitte sind durch den Zusatz „Abschnitt“ vor der Nummer gekennzeichnet.

Nun ist der Beweis des Satzes nicht mehr schwer.

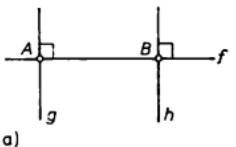
a) Es sei $f \perp g, h \subset \varepsilon$. Sind A, B die Schnittpunkte von f mit g bzw. h (Abb. 17a), dann gilt nach dem Satz 1.13 zunächst $\sigma_g \sigma_h = \sigma_g \sigma_f \sigma_f \sigma_h = \sigma_A \sigma_B$. Nach dem Zusatz erkennen wir somit $\sigma_g \sigma_h$ als Verschiebung längs f .

b) Es sei nun τ eine Verschiebung längs $f \perp h$. Im Fall $\tau = 1$ kann $g = h$ gewählt werden. Im Fall $\tau \neq 1$ besitzt die Verschiebung keinen Fixpunkt. Es sei Q der Schnittpunkt von f und h , P sein Urbild bei τ ($P = Q$) und g die Mittelsenkrechte von PQ in ε ; R wird beliebig in $\varepsilon \setminus f$ gewählt (Abb. 17b).

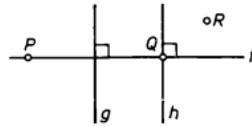
Nach der Eindeutigkeitsaussage im Axiom B₃(b) gilt

$$\left. \begin{array}{l} P^\theta = P^{\theta h} = P^\tau = Q \\ Q^\theta \in QQ^{+} \vee (Q^\theta)^h \in QQ^{+} \\ R^\theta, (R^\theta)^h, R^\tau \in PQR^+ \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma_g = \tau \vee \sigma_g \sigma_h = \tau.$$

Da τ fixpunktfrei ist, kann nur $\tau = \sigma_g \sigma_h$ gelten.



a)



b)

Abb. 17

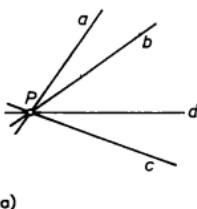
Zum Beweis der Folgerung sei $X, Y \in f$ und M der Mittelpunkt von XY . Dann ist $\tau := \sigma_M \sigma_Y$ eine Verschiebung längs f mit $X' = Y$. Ist $\tau' = \sigma_N \sigma_Y$ mit $N \in f$ (vgl. Aufgabe 1) auch eine Verschiebung längs f mit $X' = Y$, dann ist $\tau' \tau^{-1} = \sigma_N \sigma_Y \sigma_Y \sigma_M$ eine Verschiebung längs f mit dem Fixpunkt X , d. h. $\tau' \tau^{-1} = 1$ bzw. $\tau' = \tau$, w. z. b. w.

Als Folgerung aus 1.14 und 1.15 erhalten wir außerdem den

Dreispiegelungssatz mit seiner Umkehrung.

Wenn $P \in a, b, c \subset \varepsilon$ gilt, dann ist $\sigma_a \sigma_b \sigma_c$ Spiegelung an einer vierten Geraden d durch P (Abb. 18a). Aus $P \in a, b$ ($\neq a$) und $\sigma_a \sigma_b \sigma_c = \sigma_d$ folgt umgekehrt $P \in c, d$.

Wenn $f \perp a, b, c \subset \varepsilon$ gilt, ist $\sigma_a \sigma_b \sigma_c$ Spiegelung an einer vierten, zu f senkrechten Geraden d (Abb. 18b). Aus $f \perp a, b$ ($\neq a$) und $\sigma_a \sigma_b \sigma_c = \sigma_d$ folgt umgekehrt $f \perp c, d$.



a)

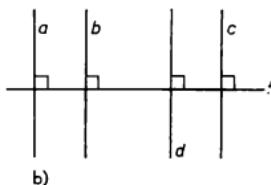


Abb. 18

Folgerung. Die Drehungen um P bilden eine kommutative Gruppe.

Beweis. a) Es sei $P \in a, b, c \subset \varepsilon$. Dann ist $\varrho := \sigma_a \sigma_b$ eine Drehung um P . Folglich existiert zu c eine Gerade d durch P mit $\varrho = \sigma_d \sigma_c$. Dann ist aber $\sigma_a \sigma_b \sigma_c = \sigma_d$.

Den Beweis des ersten Teiles auf der rechten Seite überlassen wir dem Leser (vgl. Aufgabe 2).

b) Es sei $P \in a, b$ ($\neq a$) und $\sigma_a \sigma_b \sigma_c = \sigma_d$. Es gilt $(P^a)^b = P$, $\sigma_a \sigma_b = \sigma_d \sigma_c$ und $c \neq d$, denn aus $c = d$ folgte $\sigma_a \sigma_b = 1$, d. h. $a = b$. Aus $c \neq d$ und $(P^d)^c = (P^a)^b = P$ folgt $P \in c, d$ nach dem Zusatz zu 1.14. — Schließlich sei $f \perp a, b$ ($\neq a$) und $\sigma_a \sigma_b \sigma_c = \sigma_d$. Wäre $c \perp f$, dann wählen wir einen Punkt $P \in c$ und bestimmen eine Gerade c' mit $P \in c' \perp f$ (Abb. 19) und eine weitere Gerade d' mit $d' \perp f$ und $\sigma_a \sigma_b = \sigma_{d'} \sigma_{c'}$. Wir erhalten $\sigma_d \sigma_c = \sigma_{d'} \sigma_{c'}$, $\sigma_c \sigma_{c'} = \sigma_d \sigma_{d'}$ und $P \in c, c', d, d'$; aus $P \in c', d' \perp f$ folgt $c' = d'$, $c = d$ und schließlich $a = b$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

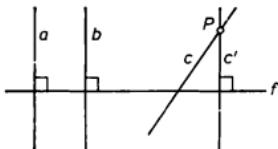


Abb. 19

Beweis der Folgerungen. a) Zu den Drehungen um P gehört 1. Sind ϱ, ϱ' Drehungen um P , dann gibt es Geraden $h, g, f \ni P$ mit $\varrho' = \sigma_g \sigma_h$ und $\varrho = \sigma_f \sigma_g$. Folglich sind

$$\varrho \varrho' = \sigma_f \sigma_g \cdot \sigma_g \sigma_h = \sigma_f \sigma_h,$$

$$\varrho^{-1} = (\sigma_f \sigma_g)^{-1} = \sigma_g \sigma_f$$

Drehungen um P . Zum Beweis der Kommutativität bemerken wir, daß $\sigma_g \sigma_f \sigma_h$ als Spiegelung mit dem eigenen Inversen übereinstimmt: $\sigma_g \sigma_f \sigma_h = \sigma_h \sigma_f \sigma_g$. Daraus folgt

$$\varrho \varrho' = \sigma_f \sigma_h = \sigma_g \cdot \sigma_g \sigma_f \sigma_h = \sigma_g \cdot \sigma_h \sigma_f \sigma_g = \varrho' \varrho.$$

b) Den Beweis der anderen Folgerung überlassen wir dem Leser als nützliche Übung.

Aufgaben

1. Es sei τ eine Verschiebung längs f und $B \in f$. Man zeige, daß es einen Punkt $A \in f$ mit $\tau = \sigma_A \sigma_B$ gibt.
2. Man beweise den zweiten Teil des Dreispiegelungssatzes (rechte Seite), indem man
 - a) den Zusatz des Satzes 1.15 verwendet,
 - b) den Beweis des ersten Teiles des Dreispiegelungssatzes (linke Seite) sinngemäß auf die neuen Voraussetzungen überträgt.
- 3.* Definiert man für gerichtete Strecken $\overrightarrow{XY} := (X, Y)$

$$\overrightarrow{AB} \# \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \sigma_A \sigma_B = \sigma_D \sigma_C,$$

dann erhält man offenbar eine Äquivalenzrelation.

Außerdem folgt aus $\overrightarrow{AB} \# \overrightarrow{DC}$ stets $\overrightarrow{AD} \# \overrightarrow{BC}$.

Für die Menge $\mathfrak{B}_{OE} := \{\overrightarrow{OX} : X \in g_{OE}\}$ kann man eine Ordnungsrelation (o. B. d. A. sei $O < E$)

$$\overrightarrow{OX} < \overrightarrow{OY} \Leftrightarrow X < Y$$

und das Antragen

$$\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OZ} \Leftrightarrow \overrightarrow{OY} \# \overrightarrow{XZ}$$

erklären. Man zeige, daß $(\mathfrak{B}_{OE}, <, +)$ eine geordnete kommutative Gruppe ist.

(Benutzt man noch das Stetigkeitsaxiom, dann läßt sich eine monotone Multiplikation mit dem Einselement \overrightarrow{OE} auf genau eine Weise einführen, und $(\mathfrak{B}_{OE}, <, +, \cdot)$ ist dem Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen isomorph. Dazu vgl. etwa [34].)

1.2.2. Die Gruppe der ebenen Bewegungen

Im vorigen Abschnitt hat sich schon angedeutet, daß die ebenen Spiegelungen für die ebenen Bewegungen bedeutsam sind. Es erweist sich, daß sie für die ebene Bewegungsgeometrie von fundamentaler Bedeutung sind:

Satz 1.16. *Jede ebene Bewegung ist Produkt von Spiegelungen an zwei oder drei Geraden.*

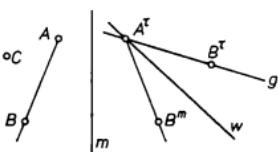


Abb. 20

Beweis. Es sei τ eine beliebige Bewegung von $\varepsilon = \varepsilon_{ABC}$ auf sich. Offenbar gibt es Geraden m und w mit $A^m = A'$ und $((AB^+)^m)^w = A'B'^+$ (Abb. 20). Ist g die Verbindungsgerade von A' und B' , dann gilt nach der Eindeutigkeitsaussage im Axiom B₃(b)

$$\left. \begin{aligned} (A^m)^w &= ((A^m)^w)^o = A' \\ (B^m)^w &= ((B^m)^w)^o \in A^o B'^+ \\ (C^m)^w &\in A^o B'^+ C'^+ \vee ((C^m)^w)^o \in A^o B'^+ C'^+ \end{aligned} \right\} \tau = \sigma_m \sigma_w \vee \tau = \sigma_m \sigma_w \sigma_g,$$

w. z. b. w.

Zwei Geraden einer Ebene schneiden sich, oder sie sind parallel zueinander. In der euklidischen Geometrie haben parallele Geraden wenigstens ein gemeinsames Lot, so daß man dort die Bewegungen $\sigma_a \sigma_b$ als Drehungen und Verschiebungen erkennt. Hier kann das, wie die Kapitel 2 und 3 lehren, nicht abgeleitet werden. Dagegen können wir noch tiefere Einsichten bezüglich der Gruppe der ebenen Bewegungen gewinnen, indem wir Aussagen über die Menge aller Produkte $\sigma_a \sigma_b$ bzw. $\sigma_a \sigma_b \sigma_c$ machen. Dazu sind einige Vorbereitungen nötig.

Hilfssatz 1.17. a) Es ist $\sigma_a \sigma_B \sigma_c$ genau dann eine Spiegelung σ_D , wenn eine Gerade g mit $a, c \perp g$ und $B \in g$ existiert (Abb. 21a).

b) Es ist $\sigma_A \sigma_b \sigma_C$ genau dann eine Spiegelung σ_d , wenn eine Gerade g mit $A, C \in g$ und $b \perp g$ existiert (Abb. 21b).

Zusatz. Aus $\sigma_a \sigma_B \sigma_c = \sigma_D$, $a, c \perp g$ und $B \in g$ folgt $D \in g$; aus $\sigma_A \sigma_b \sigma_C = \sigma_d$, $A, C \in g$ und $b \perp g$ folgt $d \perp g$.

Folgerung. Jedes Produkt $\sigma_A \sigma_b \sigma_C$ ist gleich einem Produkt $\sigma_P \sigma_h$.¹⁾

Beweis. a.) Es sei $a, c \perp g$ und $B \in g$ (Abb. 21a). Ist b die Senkrechte auf g in B , dann ist $\sigma_b \sigma_g = \sigma_B$ und $\sigma_c \sigma_g = \sigma_g \sigma_c$ nach dem Satz 1.13, und nach dem Dreispiegelungssatz gibt es wegen $a, b, c \perp g$ eine Gerade d mit

$$\sigma_a \sigma_B \sigma_c = \sigma_a \sigma_b \sigma_g \sigma_c = \sigma_a \sigma_b \sigma_c \sigma_g = \sigma_d \sigma_g$$

und $d \perp g$, so daß $\sigma_d \sigma_g$ gleich der Spiegelung am Schnittpunkt D von d und g ist. — Damit gilt auch der erste Teil des Zusatzes.

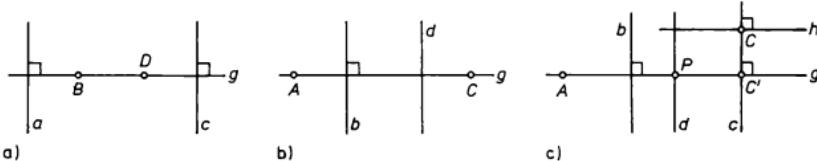


Abb. 21

a.) Nun sei $\sigma_a \sigma_B \sigma_c = \sigma_D$ (oder $\sigma_a \sigma_B = \sigma_D \sigma_c$), g das Lot von B auf a , b die Senkrechte auf g in B , d das Lot von D auf g und h die Senkrechte auf d in D . Wegen $d, a, b \perp g$ ist $\sigma_d \sigma_a \sigma_b$ nach dem Dreispiegelungssatz Spiegelung an einer Geraden $c' \perp g$. Wenn C' der Schnittpunkt von c' und g ist, gilt unter Berücksichtigung des Satzes 1.13

$$\sigma_B = \sigma_b \sigma_g, \quad \sigma_D = \sigma_d \sigma_h, \quad \sigma_d \sigma_D = \sigma_h,$$

$$\sigma_{c'} = \sigma_{c'} \sigma_g = \sigma_d \sigma_a \sigma_b \sigma_g = \sigma_d \sigma_a \sigma_B = \sigma_d \sigma_D \sigma_c = \sigma_h \sigma_c,$$

und damit $C' \in h$ und $c \perp h$. Aus $C' \in g$, $h \perp d$ folgt $g = h \perp c$.

b.) Die übrigen Teile können unter Berücksichtigung des bereits Bewiesenen hergeleitet werden (vgl. Aufgabe 2).

Zum Beweis der Folgerung fällen wir von A das Lot g auf b und von C das Lot c auf g ; dann ist $\sigma_c \sigma_g$ gleich der Spiegelung $\sigma_{c'}$ am Schnittpunkt von c und g ($\sigma_c \sigma_g = \sigma_{c'}$ und $\sigma_c = \sigma_{c'} \sigma_g$), $\sigma_A \sigma_b \sigma_C$ Spiegelung an einer Geraden $d \perp g$ (Abb. 21c). Es sei P der Schnittpunkt von d und g , und h sei die Senkrechte auf c in C ; dann gilt

$$\sigma_A \sigma_b \sigma_C = \sigma_A \sigma_b \sigma_c \sigma_h = \sigma_A \sigma_b \sigma_C \cdot \sigma_g \sigma_h = \sigma_d \sigma_g \cdot \sigma_h = \sigma_P \sigma_h,$$

w. z. b. w.

¹⁾ Diese Folgerung kann man auch nach dem Satz 1.19 erhalten. Nach diesem Satz erkennt man außerdem, daß jedes Produkt $\sigma_a \sigma_B \sigma_c$ gleich einem Produkt $\sigma_a \sigma_f$ ist.

Satz 1.18 (Lotensatz von HJELMSLEV¹). Stehen a, a' in A und c, c' in C aufeinander senkrecht und ist $\sigma_a \sigma_b \sigma_c = \sigma_d$, dann gilt: Es ist $\sigma_a \sigma_b \sigma_c$ genau Spiegelung an einer Geraden, wenn eine Gerade g mit $A, C \in g$ und $d \perp g$ existiert.

Folgerung. Ist P ein Punkt und sind a', c' Geraden in ε , dann existiert stets eine Gerade $b \ni P$ derart, daß $\sigma_a \sigma_b \sigma_c$ Spiegelung an einer Geraden ist.

Beweis. Es sei $\sigma_a \sigma_{a'} = \sigma_A$, $\sigma_c \sigma_{c'} = \sigma_C$ und $\sigma_a \sigma_b \sigma_c = \sigma_d$. Es gilt

$$\sigma_A \sigma_d \sigma_C = \sigma_{a'} \sigma_a \cdot \sigma_a \sigma_b \sigma_c \cdot \sigma_c \sigma_{c'} = \sigma_{a'} \sigma_b \sigma_{c'},$$

so daß der Lotensatz nach dem Satz 1.17b gilt (Abb. 22a).

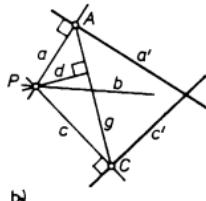
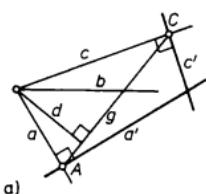


Abb. 22

Um die Folgerung zu beweisen, falle man Lote a, c von P auf a' bzw. c' , lege durch die Lotfußpunkte A bzw. C eine Gerade g und falle das Lot d von P auf g (Abb. 22b). Nach dem Dreispiegelungssatz ist $\sigma_a \sigma_d \sigma_c$ Spiegelung an einer Geraden $b \ni P$. Aus $\sigma_b = \sigma_a \sigma_d \sigma_c$ folgt $\sigma_a \sigma_b \sigma_c = \sigma_d$, und nach dem Lotensatz ist $\sigma_a \sigma_b \sigma_c$ Spiegelung an einer Geraden, w. z. b. w.

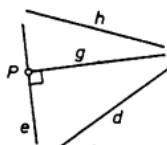
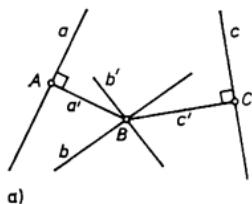


Abb. 23

Satz 1.19 (Reduktionssätze). a) Zu Geraden a, b, c gibt es stets eine Gerade h und einen Punkt P mit $\sigma_a \sigma_b \sigma_c = \sigma_P \sigma_h$.

b) Zu Geraden a, b, c, d gibt es stets Geraden e, f mit $\sigma_a \sigma_b \sigma_c \sigma_d = \sigma_e \sigma_f$.

Beweis. a) Es sei $B \in b$, A der Fußpunkt des Lotes a' von B auf a und C der Fußpunkt des Lotes c' von B auf c (Abb. 23a). Nach dem Dreispiegelungssatz gibt es eine Gerade b' mit $\sigma_a \sigma_b \sigma_{c'} = \sigma_{b'}$, nach der Folgerung aus 1.17 ist $\sigma_A \sigma_{b'} \sigma_C$ gleich einem Produkt $\sigma_P \sigma_h$. Folglich gilt

$$\sigma_a \sigma_b \sigma_c = \sigma_a \sigma_{a'} \cdot \sigma_{a'} \sigma_b \sigma_{c'} \cdot \sigma_c \sigma_{c'} = \sigma_A \sigma_{b'} \sigma_C = \sigma_P \sigma_h.$$

¹⁾ Nach dem dänischen Mathematiker JOHANNES HJELMSLEV (1873–1950).

b) Nach a) kann $\sigma_a \sigma_b \sigma_c$ durch ein Produkt $\sigma_p \sigma_h$ ersetzt werden, nach der Folgerung zum Lotensatz gibt es eine Gerade g mit $P \in g$ und $\sigma_d \sigma_g \sigma_h = \sigma_f$ für eine Gerade f . Dann ist

$$\sigma_g \sigma_h \sigma_d = \sigma_d \sigma_f \sigma_d = \sigma_f$$

für $f = f'^d$.

Mit der Senkrechten e zu g durch P gilt (Abb. 23b)

$$\sigma_a \sigma_b \sigma_c \sigma_d = \sigma_p \sigma_h \sigma_d = \sigma_e \sigma_g \sigma_h \sigma_d = \sigma_e \sigma_f,$$

w. z. b. w.

Die Produkte $\sigma_p \sigma_h$ können mittels des Lotes g von P auf h mit dem Fußpunkt Q (Abb. 24) nach dem Satz 1.13 wie folgt umgeformt werden:

$$\sigma_p \sigma_h = \sigma_p \sigma_h \sigma_g \sigma_g = \sigma_p \sigma_{Qg} \sigma_g.$$

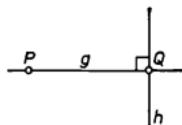


Abb. 24

Da sie aus einer Verschiebung längs g mit anschließender Spiegelung an g bestehen, werden die Produkte $\sigma_p \sigma_h$ *Schubspiegelungen* oder *Gleitspiegelungen* genannt. Für $P = Q$ erhalten wir als Sonderfall die Spiegelung an g . Es gilt nun der

Satz 1.20. *In der Gruppe der ebenen Bewegungen bildet die Menge*

$$U := \{\sigma_a \sigma_b : a, b \subset e\},$$

die Menge der „geraden“ Bewegungen, eine Untergruppe, während die Menge der übrigen ebenen Bewegungen $\sigma_a \sigma_b \sigma_c$, die Menge der „ungeraden“ Bewegungen, die nur aus Schubspiegelungen besteht, mit Hilfe einer Spiegelung σ_g in der Form

$$V = \sigma_g U = U \sigma_g$$

geschrieben werden kann.¹⁾

Beweis. Aus $\sigma_a \sigma_b, \sigma_a \sigma_d \in U$ folgt $\sigma_a \sigma_b \sigma_c \sigma_d \in U$ nach dem Reduktionssatz 1.19b und $(\sigma_a \sigma_b)^{-1} = \sigma_b \sigma_a \in U$, d. h., daß U eine Untergruppe bildet.

Die Mengen U und V haben kein gemeinsames Element, denn nach dem Reduktionssatz 1.19b gäbe es zu Geraden a, b, c, d, h mit $\sigma_a \sigma_b = \sigma_h \sigma_d \sigma_c$ und $\sigma_a \sigma_b \sigma_c \sigma_d \cdot \sigma_h = 1$ Geraden f, g mit $\sigma_f \sigma_g \cdot \sigma_h = 1$ und $\sigma_f \sigma_g = \sigma_h$; das ergibt einen Widerspruch bezüglich der Fixpunkte von $\sigma_f \sigma_g$ bzw. σ_h .

Nach dem Satz 1.16 ist V die Menge der ebenen Bewegungen außerhalb U .

Nach dem Reduktionssatz 1.19a besteht V nur aus Schubspiegelungen.

¹⁾ Folglich ist U in der Gruppe der ebenen Bewegungen ein Normalteiler vom Index 2.

Ist schließlich σ_g Spiegelung an einer festen Geraden g und $\sigma_a \sigma_b \sigma_c \in V$, dann gilt

$$\sigma_a \sigma_b \sigma_c = \sigma_g \cdot \sigma_g \sigma_a \sigma_b \sigma_c \in \sigma_g U,$$

$$\sigma_a \sigma_b \sigma_c = \sigma_a \sigma_b \sigma_c \sigma_g \cdot \sigma_g \in U \sigma_g$$

wegen $\sigma_g \sigma_a \sigma_b \sigma_c, \sigma_a \sigma_b \sigma_c \sigma_g \in U$ nach dem Reduktionssatz 1.19b. Die Umkehrung $\sigma_g U, U \sigma_g \subseteq V$ ist trivial, w. z. b. w.

Aufgaben

1. Man zeige, daß $\sigma_f \sigma_Q$ aus einer Verschiebung längs des Lotes g von Q auf f und der Spiegelung σ_g besteht, d. h., daß $\sigma_f \sigma_Q$ eine Schubspiegelung ist.
2. Man beweise den Hilfssatz 1.17b und den zugehörigen Teil des Zusatzes.

1.2.3. Die Bewegungen des Raumes

Einleitend bemerken wir, daß an jeder Ebene $\varepsilon = \varepsilon_{ABC}$ genau eine Spiegelung s existiert, denn nach B₃(c) gibt es genau eine Bewegung σ mit

$$A^\sigma = A,$$

$$B^\sigma \in AB^+,$$

$$C^\sigma \in ABC^+,$$

$$D^\sigma \in ABCD^-$$

für einen Punkt $D \notin \varepsilon$. Wegen $A^\sigma = A$, $B^\sigma \in AB^+$ und $C^\sigma \in ABC^+$ ist $\varepsilon = \varepsilon_{ABC}$ punktweise fest, d. h. $\sigma = s_\varepsilon$.

Wir können räumliche Bewegungsgeometrie in Analogie zu der ebenen Bewegungsgeometrie und mit deren Hilfe entwickeln. Zunächst wollen wir bestehende Zusammenhänge zwischen den Spiegelungen s_P, s_g bzw. s_ε an einem Punkt P , einer Geraden g bzw. einer Ebene ε aufdecken.

Wir gehen von einem Punkt P und einer Geraden f mit $P \in f$ aus. Ist η eine beliebige Ebene durch f und g in η die Gerade mit $P \in g \perp f$, so erzeugen s_P, s_f und s_g in η ebene Spiegelungen σ_P, σ_f und σ_g mit $\sigma_P = \sigma_f \sigma_g$ und $\sigma_g = \sigma_f \sigma_P$, d. h., daß g bei $s_P s_g$ punktweise festbleibt; für die Gerade g' in einer weiteren Ebene η' durch f mit $P \in g' \perp f$ erhält man analog, daß auch sie bei $s_P s_{g'}$ punktweise festbleibt.

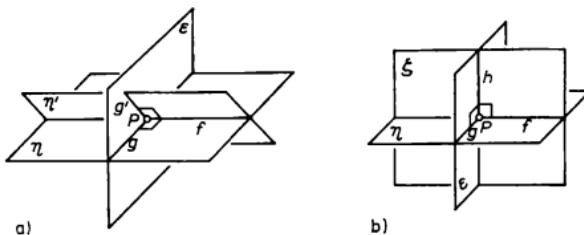


Abb. 25

Die Ebene $\varepsilon := \varepsilon_{gg'}$ (Abb. 25a) besteht nur aus Fixpunkten, denn für $X \in \varepsilon$ gilt

$$(X^P)' \in \varepsilon_{fX} \cap \varepsilon_{gg'} = g_{PX};$$

folglich bewirkt $s_P s_f$ in ε_{fX} die ebene Spiegelung an g_{PX} , d. h. $(X^P)' = X$. Da $s_P s_f$ offenbar die Halbräume bezüglich ε vertauscht, ist

$$s_P s_f = s_\varepsilon,$$

wobei $P \in f$, ε und $f \perp \varepsilon$ gilt.

In ε finden wir durch P eine Gerade h mit $g \perp h$; außerdem gilt $f \perp h$. Es sei $\zeta := \varepsilon_{hf}$ (Abb. 25 b). Es ist

$$s_P s_g = s_\zeta, \quad s_P s_h = s_\eta;$$

ε, ζ, η sind paarweise orthogonal.

Ist $f = g_{PQ}$, $g = g_{PR}$ und $h = g_{PS}$, dann gilt

$$(P^e)^\eta = P' = P,$$

$$(Q^e)^\eta = Q' = Q \in PQ^+,$$

$$(R^e)^\eta = R' \in PR^- \subset PQR^-,$$

$$(S^e)^\eta = S' \in PS^- \subset PQRS^-,$$

so daß nach B₃(c) noch

$$s_f = s_\zeta s_\eta$$

folgt. Mit $s_f = s_P s_\varepsilon = s_\varepsilon s_P$ erhalten wir schließlich noch

$$s_P = s_\varepsilon s_\zeta s_\eta.$$

Zusammenfassend können wir feststellen:

Satz 1.21. a) Aus $f = \zeta \cap \eta$ und $\zeta \perp \eta$ folgt $s_f = s_\zeta s_\eta$.

b) Gilt $P \in \varepsilon, \zeta, \eta$ und sind ε, ζ, η paarweise senkrecht, dann ist

$$s_P = s_\varepsilon s_\zeta s_\eta.$$

Zusatz. Gilt $P \in f$, dann ist $s_P s_f$ Spiegelung an einer Ebene ε mit $P \in \varepsilon$ und $f \perp \varepsilon$.

Außerdem sind folgende Konstruktionen klar oder nunmehr leicht zu bestätigen:

a) Zu P und ε gibt es genau ein f mit $P \in f \perp \varepsilon$.

b) Zu P und f gibt es durch P genau eine ε mit $f \perp \varepsilon$.

c) Zu f, η mit $f \subset \eta$ gibt es genau eine ζ mit $f \subset \zeta \perp \eta$.

d) Zu ε, η mit $\varepsilon \perp \eta$ gibt es genau eine ζ mit $\zeta \perp \varepsilon, \eta$.

Bei der Bestätigung sind folgende Regeln wichtig:

Aus $f \neq g$ und $f, g \perp h$ folgt $h \perp \varepsilon_{fg}$; sind f, g, h paarweise senkrecht, dann sind auch $\varepsilon_{fg}, \varepsilon_{gh}, \varepsilon_{hf}$ paarweise senkrecht. Offenbar ist die Relation \perp auch für Ebenen symmetrisch.

Die Aussagen über Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende können wie folgt verallgemeinert werden:

- Satz 1.22.** a) Zu zwei Punkten P, Q gibt es genau eine Ebene ε mit $P' = Q$ (Abb. 26a).
 b) Sind O, P, Q nicht kollinear, dann gibt es genau eine Ebene ε mit $(OP^+)^c = OQ^+$ (Abb. 26b).
 c) Sind sowohl P, Q, R als auch P, Q, S nicht kollinear, dann existiert genau eine Ebene ε mit $(PQR^+)^c = PQS^+$ (Abb. 26c).

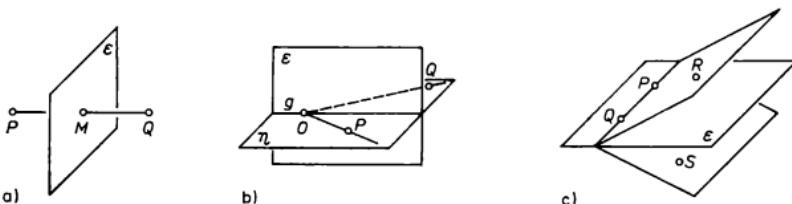


Abb. 26

Beweis. a) Existenz. Ist $f := g_{PQ}$ und M der Mittelpunkt von P und Q , dann ist $s_M \varepsilon$, Spiegelung an einer Ebene ε . Es gilt $P' = (PM)^f = Q' = Q$.

Eindeutigkeit. Gilt $P' = Q$ und $N \in f \cap \varepsilon'$, dann können wir in ε' aufeinander senkrechte Geraden g und h mit $N \in g, h$ wählen. Folglich sind die Ebenen ε' , $\zeta := \varepsilon_{fh}$ und $\eta := \varepsilon_{fg}$ paarweise senkrecht, und es gilt

$$s_f = s_g s_\eta,$$

$$s_N = s_\varepsilon s_\zeta s_\eta = s_{\varepsilon'} s_f.$$

Wegen $P^N = P' = Q$ ist $N = M$. Daraus folgt

$$s_\varepsilon = s_M s_f = s_N s_f = s_{\varepsilon'},$$

d. h. $\varepsilon = \varepsilon'$.

b) Existenz. Es sei $\eta := \varepsilon_{OPQ}$. Ist g die Winkelhalbierende von $\angle POQ$ und bestimmen wir ε durch $g \subset \varepsilon \perp \eta$ (Abb. 26b), dann gilt $s_g = s_\varepsilon s_\eta$, $s_\varepsilon = s_g s_\eta$ und folglich

$$(OP^+)^c = ((OP^+)^c)^{\eta} = (OQ^+)^c = OQ^+.$$

Eindeutigkeit. Gilt $(OP^+)^c = OQ^+$, dann ist ε' senkrecht zu η ; wegen $((OP^+)^c)^{\eta} = OQ^+$ und der Eindeutigkeit der Winkelhalbierenden ist $s_\varepsilon s_\eta$ Spiegelung an g . Aus

$$s_{\varepsilon'} s_\eta = s_g = s_\varepsilon s_\eta$$

folgt zunächst $s_{\varepsilon'} = s_\varepsilon$ und dann $\varepsilon' = \varepsilon$.

c) Den Beweis des letzten Teiles überlassen wir dem Leser (vgl. Aufgabe 1).

Nach dieser Vorbereitung beweisen wir den zu 1.16 analogen

Satz 1.23. *Jede Bewegung des Raumes ist Produkt von Spiegelungen an drei oder vier Ebenen.*

Beweis. Es sei τ eine beliebige Bewegung von \mathfrak{P} auf sich. Wir wählen nicht komplanare Punkte A, B, C, D und können feststellen, daß nach dem Satz 1.22 oder (in den Sonderfällen trivialerweise) nach den Inzidenzaxiomen Ebenen ε, ζ, η mit $A' = A^\tau$, $((AB^+)^*)^\zeta = A^*B^{*+}$ und $((ABC^+)^*)^\eta = A^*B^*C^{*+}$ existieren. Ist ϑ die Verbindungsebene von A^τ, B^τ und C^τ , dann gilt nach der Eindeutigkeitsaussage im Axiom B₃(c)

$$\left. \begin{aligned} ((A^\tau)^\zeta)^\eta &= (((A^\tau)^\zeta)^\eta)^\vartheta = A^\tau \\ ((B^\tau)^\zeta)^\eta &= (((B^\tau)^\zeta)^\eta)^\vartheta \in A^*B^{*+} \\ ((C^\tau)^\zeta)^\eta &= (((C^\tau)^\zeta)^\eta)^\vartheta \in A^*B^*C^{*+} \\ ((D^\tau)^\zeta)^\eta &\in A^*B^*C^*D^{*+} \vee (((D^\tau)^\zeta)^\eta)^\vartheta \in A^*B^*C^*D^{*+} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tau = s_\varepsilon s_\zeta s_\eta \vee \tau = s_\varepsilon s_\zeta s_\eta s_\vartheta.$$

w. z. b. w.

Bereits in der ebenen Geometrie gab es Schwierigkeiten, nach dem entsprechenden Satz 1.16 eine befriedigende Systematik der ebenen Bewegungen aufzubauen. Es blieb die Frage offen, ob sich neben den Drehungen und den Verschiebungen noch andere ebene Bewegungen in der Form $\sigma_a \sigma_b$ darstellen lassen. Da in der euklidischen Geometrie die negative Antwort auf diese Frage bei der Systematik der Bewegungen des Raumes vorteilhaft ausgenutzt werden kann, muß man hier mit anderen Ansätzen beginnen, um trotzdem einige wesentliche Aussagen herleiten zu können. Einige solcher Aussagen sollen hier ohne Beweis mitgeteilt werden¹⁾: *Jedes Produkt von Spiegelungen an fünf Ebenen läßt sich auf ein Produkt von Spiegelungen an drei Ebenen reduzieren; daraus folgt dann, daß im obigen Satz 1.23 das „oder“ zu „entweder – oder“ verschärft werden kann, daß*

$$U := \{s_\varepsilon s_\zeta s_\eta s_\vartheta : \varepsilon, \zeta, \eta, \vartheta \in \mathfrak{G}\}$$

in der Gruppe der Bewegungen eine Untergruppe (sogar einen Normalteiler) bildet und daß für die Spiegelung an einer festen Ebene ε

$$s_\varepsilon U = U s_\varepsilon = \{s_\zeta s_\eta s_\vartheta : \zeta, \eta, \vartheta \in \mathfrak{G}\}$$

gilt. Die Gruppe der Bewegungen des Raumes ist wie folgt zweispiegelig (vgl. den Satz 1.16 in Verbindung mit dem Reduktionssatz 1.19a):

$$U = \{s_f s_g : f, g \in \mathfrak{G}\},$$

$$s_\varepsilon U = \{s_f s_\eta : f \in \mathfrak{G} \wedge \eta \in \mathfrak{G}\}.$$

Das Einselement der Gruppe der Bewegungen des Raumes ist die identische Abbildung u der Menge aller Punkte.

¹⁾ Vgl. etwa J. AHRENS, Begründung der absoluten Geometrie des Raumes aus dem Spiegelungsbegriff, Math. Z. 71 (1959), 154–185.

In Analogie zur ebenen Bewegungsgeometrie lassen sich jedoch Aussagen über Drehungen und Verschiebungen machen:

Definition. Eine Bewegung $\varrho \neq \iota$ von \mathfrak{P} auf sich heißt genau dann *Drehung um f* , wenn

$$1. X \in f \Rightarrow X^\varrho = X,$$

$$2. X \notin f \Rightarrow X^\varrho \neq X$$

gilt.

Definition. Eine Bewegung $\tau \neq \iota$ von \mathfrak{P} auf sich heißt genau dann *Verschiebung des Raumes längs f* , wenn

$$1. f' = f,$$

$$2. f \nparallel \varepsilon^1 \Rightarrow \varepsilon^1 \cap \varepsilon = \emptyset$$

gilt.

Wiederum sei ι sowohl (*identische*) *Drehung* als auch (*identische*) *Verschiebung*. Eine nichtidentische Bewegung ist genau dann Drehung um f , wenn f die Menge der Fixpunkte ist. Die Spiegelung s_f ist Spezialfall einer Drehung um f ; sie kann mit Hilfe der Spiegelungen an zwei Ebenen dargestellt werden, die in f aufeinander senkrecht stehen. Allgemein gilt

Satz 1.24. Wenn $f \subset \varepsilon, \eta$ gilt, ist $s_\varepsilon s_\eta$ eine Drehung um f . Ist umgekehrt ϱ eine Drehung um f und η eine Ebene durch f , dann gibt es eine Ebene ε durch f mit $\varrho = s_\varepsilon s_\eta$.

Zusatz. Aus $(F^\iota)^\eta = F$ und $\varepsilon \neq \eta$ folgt $F \in \varepsilon, \eta$.

Folgerung. Die Menge der Drehungen um f bildet eine auf der Menge der Halbebenen mit dem Träger f einfach transitive Gruppe.

Satz 1.25. Wenn $f \perp \varepsilon, \eta$ gilt, dann ist $s_\varepsilon s_\eta$ eine Verschiebung längs f . Ist τ eine Verschiebung des Raumes längs f und η eine Ebene mit $f \perp \eta$, dann existiert eine zu f senkrechte Ebene ε mit $\tau = s_\varepsilon s_\eta$.

Zusatz. Für $A, B \in f$ ist $s_A s_B$ eine Verschiebung längs f ; wenn $A, B, C \in f$ gilt, ist $s_A s_B s_C$ Spiegelung an einem Punkt D aus f .

Folgerung. Die Menge der Verschiebungen längs f bildet eine auf f einfach transitive Gruppe.

Schließlich folgert man aus 1.24 und 1.25 einen Dreispiegelungssatz mit seiner Umkehrung.

Satz 1.26. Wenn $f \subset \varepsilon, \zeta, \eta$ oder $f \perp \varepsilon, \zeta, \eta$ gilt, dann ist $s_\varepsilon s_\zeta s_\eta$ Spiegelung an einer Ebene ϑ mit $f \subset \vartheta$ bzw. $f \perp \vartheta$. Gilt umgekehrt $s_\varepsilon s_\zeta s_\eta = s_\vartheta$, dann folgt aus $f \subset \varepsilon, \zeta$ ($\neq \varepsilon$) oder $f \perp \varepsilon, \zeta$ ($\neq \varepsilon$) stets $f \subset \eta, \vartheta$ bzw. $f \perp \eta, \vartheta$:

Somit kann man wieder die Kommutativität der Gruppe der Drehungen um eine feste Gerade f bzw. der Gruppe der Verschiebungen längs einer festen Geraden ableiten.

Aufgaben

1. Man beweise den Satz 1.22c.
2. Man zeige mit Hilfe des Satzes 1.24, daß die Menge der Drehungen um Geraden durch einen festen Punkt O eine Gruppe bildet.

¹⁾ Wie üblich sei $f \parallel \varepsilon$ genau dann, wenn $f \subset \varepsilon$ oder $f \cap \varepsilon = \emptyset$ gilt.

1.3. Grundlegende Sätze über Längen und Winkelgrößen

1.3.1. Strecken- und Winkelkongruenz

Wir knüpfen an den Abschnitt 1.1 über die Inzidenz, Anordnung und Bewegung an. Mit Hilfe der Bewegungssätze können die vielfach benutzten grundlegenden Eigenschaften der Strecken- und Winkelkongruenz hergeleitet werden:

Satz 1.27. *Die Kongruenz der Strecken und Winkel besitzt folgende Eigenschaften:*

- K₁.** *Zu AB und $A'P^+$ gibt es genau ein B' mit $B' \in A'P^+$ und $AB \cong A'B'$ (Möglichkeit und Eindeutigkeit des Streckenabtragens auf Halbgeraden).*

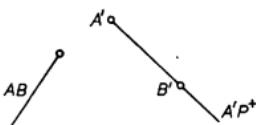


Abb. 27a

- K₁'.** *$\not\propto(p, q), p' = OP^+$ und OP^+ gibt es genau ein q' mit $O(q') = O, q' \subset OPQ^+$ und $\not\propto(p, q) \cong \not\propto(p', q')$ (Möglichkeit und Eindeutigkeit des Winkelantragens an Fahnen).*

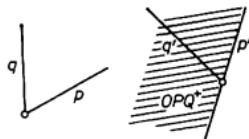


Abb. 27b

- K₂.** *Aus $AB = A'B'$ und $A''B'' \cong A'B'$ folgt $AB \cong A''B''$ (Drittengleichheit).*

- K₃.** *Aus $Q \in PR, Q' \in P'R'$, $PQ \cong P'Q'$ und $QR \cong Q'R'$ folgt $PR \cong P'R'$ (Streckenadditionssatz).*

- K₂'.** *$\not\propto(p, q) \cong \not\propto(p', q')$ und $\not\propto(p'', q'') \cong \not\propto(p', q')$ folgt $\not\propto(p, q) \cong \not\propto(p'', q'')$ (Drittengleichheit).*

- K₃'.** *Aus $OQ^+ \cap PR \neq \emptyset$, $OQ^+ \cap P'R' \neq \emptyset$, $\not\propto POQ \cong \not\propto P'O'Q'$ und $\not\propto QOR \cong \not\propto Q'O'R'$ folgt $\not\propto POR \cong \not\propto P'O'R'$ (Winkeladditionssatz).*

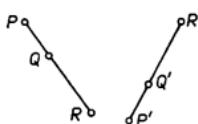


Abb. 28a

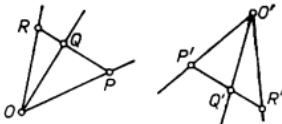


Abb. 28b

- K.** *Gilt $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ und $\not\propto BAC \cong \not\propto B'A'C'$ für Dreiecke ABC und $A'B'C'$, dann ist $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (Dreiecks Kongruenzsatz sws).*

Beweis. Die Möglichkeit des Streckenabtragens ist nach dem Axiom B₃(a) trivial, nicht die Eindeutigkeit, denn es gibt bei gegebener Strecke AB und Halbgerade $A'P^+$ zwei Bewegungen ϱ und τ , die das Abtragen von AB auf $A'P^+$ realisieren, etwa wie folgt:

$$A^t = A' \wedge B^t \in A'P^+ \quad \text{bzw.} \quad B^{\varrho} = A' \wedge A^{\varrho} \in A'P^+.$$

Ist σ die Spiegelung am Mittelpunkt von A^tB^t , dann gilt

$$A^{\varrho} = B^{\varrho\sigma} = B^t$$

wegen $A^{\varrho\sigma} = B^{\varrho} = A^t = A^{\varrho}$ nach der Eindeutigkeitsaussage in B₃(a).

Ist $(AB)^t = A'B'$ und $(A''B'')^{\varrho} = A'B'$, dann gilt $(AB)^{\varrho\tau^{-1}} = A''B''$ und somit die Drittengleichheit der Streckenkongruenz.

Im Fall $P = Q$ oder $Q = R$ ist K₃ trivial. Andernfalls bewegen wir PR mittels τ derart, daß $Q^t = Q'$ und $P^t \in Q'P^+$ gilt; nach dem Axiom B₂(b) gilt $R^t \in Q'R^+$ und nach K₁ bereits $P^t = P'$ und $R^t = R'$, d. h. $PR \cong P'R'$. — Es ist nicht schwer, nun K₁' zu beweisen.

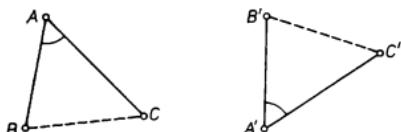


Abb. 29

Sind die Voraussetzungen von K erfüllt, dann gibt es nach dem Axiom B₃(b) eine Bewegung τ mit

$$A^t = A', \quad B^t \in A'B'^+, \quad C^t \in A'B'C'^+;$$

nach K₁ und K₁' erhalten wir der Reihe nach $B^t = B'$, $(AC^t)^{\tau} = A'C'^+$ und $C^t = C'$, d. h.

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C^t = \triangle A'B'C'.$$

Die Teilaussagen K₁' bis K₃' können analog K₁ bis K₃ hergeleitet werden, w. z. b. w.

Mit dem Satz 1.27 können viele Sätze nach dem Euklid-Hilbertschen Muster oder mit Hilfe des Bewegungsbegriffes bewiesen werden. Im folgenden sollen Beispiele für die zweite Möglichkeit angegeben werden. Nach K₁ und K₂ bzw. K₁' und K₂' sind Strecken- und Winkelkongruenz Äquivalenzrelationen. Andererseits kann mit Hilfe der Bewegungssaxionie sofort mehr bewiesen werden: Jede Figur F ist zu sich selbst kongruent, da deren identische Bewegung (vgl. den Satz 1.6a) F auf sich abbildet. Gilt $F^t = F'$ für eine Bewegung τ , dann gilt $F'^{\tau^{-1}} = F$ für die Bewegung τ^{-1} (vgl. das Axiom B₁), d. h., daß die Kongruenz in der Menge der Figuren symmetrisch ist. Aus $F^{\varrho} = F'$ und $F'^{\tau} = F''$ mit Bewegungen ϱ, τ folgt $F^{\varrho\tau} = F''$, wobei $\varrho\tau$ nach dem Axiom B₁ eine Bewegung ist, so daß die Relation \cong in der Menge der Figuren auch transitiv ist. Zusammenfassend gilt

Satz 1.28. Die Kongruenz ist in der Menge der Figuren eine Äquivalenzrelation.

Folgerung. Die Kongruenz der Winkel ist ebenfalls eine Äquivalenzrelation.

Auch den folgenden Satz wollen wir mit Hilfe des Bewegungsbegriffes beweisen.

Satz 1.29 (Satz vom gleichschenkligen Dreieck). a) Gilt $AB \cong AC$ (Gleichschenkligkeit) für drei beliebige Punkte A, B, C , dann ist die Winkelhalbierende des Winkels $\angle A$ Mittelsenkrechte von BC . Folglich gilt $\angle B \cong \angle C$ (Kongruenz der Basiswinkel.)

b) Gilt $\angle B \cong \angle C$ im Dreieck ABC , dann ist die Mittelsenkrechte von BC Winkelhalbierende von $\angle A$. Folglich gilt $AB \cong AC$.

Folgerung. Die Diagonalen g, h eines gleichseitigen Vierecks $PQRS$ sind Symmetrieachsen, ihr Schnittpunkt M ist Symmetriezentrum. Folglich sind die Diagonalen orthogonal, sie halbieren sich sowie die Viereckswinkel; die Gegenseiten sind parallel zueinander.

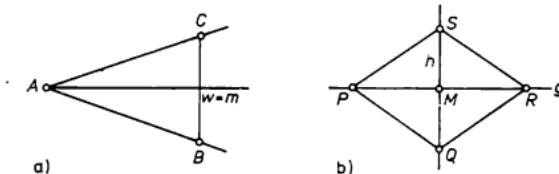


Abb. 30

Beweis. a) Es sei $AB \cong AC$ (Abb. 30a). Bei der Spiegelung an der Winkelhalbierenden w von $\angle BAC$ wird AB auf AC^+ und AC auf AB^+ abgetragen. Wegen der Eindeutigkeit des Streckenabtrags gilt $B^w = C$ und $C^w = B$, d. h., daß w Mittelsenkrechte von BC ist. Offensichtlich gilt $\angle B \cong (\angle ABC)^w = \angle C$.

b) Es sei $\angle B \cong \angle C$. Bei der Spiegelung an der Mittelsenkrechten m von BC wird $\angle B$ wie folgt angetragen: $(BC^+)^m = CB^+$ und $(BA^+)^m \subset BCA^+$. Wegen der Eindeutigkeit des Winkelabtrags gilt $(BA^+)^m = CA^+$ und $(CA^+)^m = BA^+$; als Schnittpunkt von BA^+ und CA^+ ist A ein Fixpunkt, der folglich in m liegt, d. h., daß m Winkelhalbierende von $\angle A$ ist. Nun ist $(AB)^m = AC$ trivial.

Zum Beweis der Folgerung bemerken wir (Abb. 30b)

$$g := w(\angle P) = m(QS) = w(\angle R),$$

$$h := w(\angle Q) = m(PR) = w(\angle S),$$

d. h., daß g, h Symmetrieachsen mit $g \perp h$ sind, die sich und die Viereckswinkel halbieren. Für den Schnittpunkt M von g und h gilt

$$P^M = P^h = R, \quad Q^M = Q^g = S;$$

folglich ist M Symmetriezentrum, und die Gegenseiten sind parallel zueinander, w. z. b. w.

In der Form von K wurde der Dreiecks Kongruenzsatz sws formuliert und bewiesen. Wir wenden uns nun weiteren, auf der Kongruenz von Seiten bzw. Innenwinkeln beruhenden Kriterien für die Dreiecks Kongruenz zu.

Satz 1.30 (Dreieckskongruenzsätze). *Für Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gibt es eine Bewegung τ mit $A^\tau = A'$, $B^\tau = B'$ und $C^\tau = C'$, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

- $AB \cong A'B'$, $\not\propto A \cong \not\propto A'$ und $\not\propto B \cong \not\propto B'$ (vgl. wsw),
- $AB \cong A'B'$, $\not\propto B \cong \not\propto B'$ und $\not\propto C \cong \not\propto C'$ (sww)¹⁾,
- $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ und $CA \cong C'A'$ (vgl. sss).²⁾

Beweis. a) Es sei $AB \cong A'B'$, $\not\propto A \cong \not\propto A'$ und $\not\propto B \cong \not\propto B'$. Nach dem Axiom B₃(b) gibt es eine Bewegung τ mit

$$A^\tau = A', \quad B^\tau \in A'B'^+, \quad C^\tau \in A'B'C'^+.$$

Nach K₁ und K₁' erhalten wir der Reihe nach $B^\tau = B'$, $(AC^\tau)^\tau = A'C'^+$, $(BC^\tau)^\tau = B'C'^+$ und schließlich $C^\tau = C'$.

b) Es sei $AB \cong A'B'$, $\not\propto B \cong \not\propto B'$ und $\not\propto C \cong \not\propto C'$. Dann gibt es eine Bewegung τ mit

$$A^\tau = A', \quad B^\tau \in A'B'^+, \quad C^\tau \in A'B'C'^+.$$

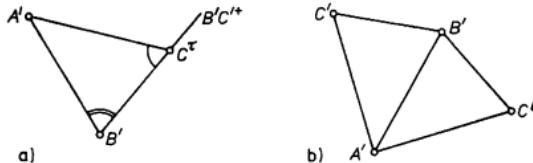


Abb. 31

Nach K₁ und K₁' erhalten wir zunächst $B^\tau = B'$ und $(BC^\tau)^\tau = B'C'^+$ (Abb. 31a). Es gibt eine Verschiebung τ' längs $g_{B'C'}$ mit $C^{\tau'} = C'$ und $(C'A'^+)^\tau' = C'A'^+$, die wegen $A' \in C'A'^+ \cap C'A'^+$ die identische Abbildung der Ebene $\varepsilon_{A'B'C'}$ sein muß, d. h. $C^\tau = C'$.

c) Es sei $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ und $CA \cong C'A'$. Dann gibt es eine Bewegung ϱ mit

$$A^\varrho = A', \quad B^\varrho \in A'B'^+, \quad C^\varrho \in A'B'C'^-$$

(Abb. 31b). Wegen der Eindeutigkeit des Streckenabtragens gilt $B^\varrho = B'$. Nach dem Satz 1.29a ist

$$g := w(\not\propto C'A'C^\varrho) = m(C'C^\varrho) = w(\not\propto C'B'C^\varrho);$$

insbesondere verbindet g die Punkte A' und B' . Ist σ die Spiegelung der Ebene $\varepsilon_{A'B'C'}$ an g , dann gilt für $\tau := \varrho\sigma$

$$A^\tau = (A^\varrho)^\sigma = A', \quad B^\tau = (B^\varrho)^\sigma = B', \quad C^\tau = (C^\varrho)^\sigma = C',$$

w. z. b. w.

¹⁾ In der euklidischen Geometrie ist sww eine Folgerung aus wsw.

²⁾ Der Kongruenzsatz sSW, der im Gegensatz zu den anderen Dreieckskongruenzsätzen nicht in den Elementen des EUKLID enthalten ist, wurde erst Mitte des 18. Jahrhunderts ausgesprochen. Er wird als 1.36 bewiesen.

Aufgaben

1. Man zeige, daß Scheitelwinkel stets kongruent sind.
2. Man beweise mit Hilfe von $B_3(b)$, B_2 und der Eindeutigkeit des Winkelantragens, daß die Nebenwinkel kongruenter Winkel untereinander kongruent sind.
3. Man zeige, daß nach $B_4(a)$, B_2 und K_1' von drei Geraden einer Ebene, die kongruente Wechselwinkel bilden, zwei Geraden parallel zueinander sind.¹⁾

1.3.2. Längen und Winkelgrößen²⁾

Nach dem Satz 1.28 und seiner Folgerung sind Strecken- und Winkelkongruenz Äquivalenzrelationen. Die Äquivalenzklassen in der Menge der Strecken werden bekanntlich *Längen* genannt; der *Abstand* $a(P, Q)$ der Punkte P und Q ist per definitionem gleich der Länge der Strecke PQ . In der Menge der Winkel werden die *Winkelgrößen* zur Benennung der Äquivalenzklassen benutzt.

Offenbar bilden alle Strecken XY mit $X = Y$, die *Nullstrecken*, eine Länge, die wir mit o bezeichnen. Nicht ganz so einfach erhält man, daß alle Nullwinkel, alle rechten Winkel und alle gestreckten Winkel je eine Äquivalenzklasse bilden, die wir der Reihe nach mit o (Omkron), R und $2R$ bezeichnen.

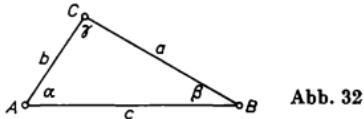


Abb. 32

Eine Äquivalenzklasse ist eindeutig bestimmt, wenn eines ihrer Elemente angegeben wird; beispielsweise gilt

$$a(P, Q) = \{XY : XY \cong PQ\}.$$

Dabei wird PQ Repräsentant von $a(P, Q)$ genannt. Man veranschaulicht Äquivalenzklassen durch Angaben von Repräsentanten. In einer veranschaulichenden Abbildung werden an Repräsentanten die Bezeichnungen für die Äquivalenzklassen geschrieben; das ist in Abb. 32 bezüglich eines Dreiecks ABC in der allgemein üblichen Art und Weise erfolgt.

Strecken- und Winkeladditionssatz in 1.27 gestatten folgende Erklärungen:

Definition. Die Länge c der Strecke PR heißt *Summe* der Längen a , b (in Zeichen: $a + b = c$) genau dann, wenn in PR ein Punkt Q derart existiert, daß PQ die

Definition. Die Größe γ des Winkels $\angle POR$ heißt *Summe* der Winkelgrößen α , β (in Zeichen: $\alpha + \beta = \gamma$) genau dann, wenn ein Punkt $Q \neq O$

¹⁾ Auf Grund der Ergebnisse der Kapitel 2 und 3 ergibt sich, daß die Umkehrung nur in der euklidischen Geometrie gilt.

²⁾ Dieses Thema wird in MfL, Bd. 6 im Rahmen der euklidischen Geometrie der Ebene ausführlich behandelt. Die folgenden Ausführungen für die absolute Geometrie des Raumes werden dadurch keineswegs überflüssig.

Länge a und QR die Länge b besitzt (Abb. 33a).

derart existiert, daß $OQ \cap PR = \emptyset$ gilt und $\not\propto POQ$ die Größe α , $\not\propto QOR$ die Größe β hat (Abb. 33b).

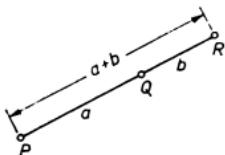


Abb. 33a

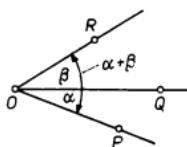


Abb. 33b

Wir schreiben für Längen a, c

$$a < c$$

genau dann, wenn es eine Länge $x \neq o$ mit $a + x = c$ gibt.

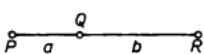
Wir schreiben für Winkelgrößen α, γ

$$\alpha < \gamma$$

genau dann, wenn es eine Winkelgröße $\xi \neq o$ mit $\alpha + \xi = \gamma$ gibt.¹⁾

Satz 1.31. *In der Menge der Längen ist $+$ eine assoziative und kommutative Operation und $<$ eine monotone Ordnung, d. h., daß die Menge der Längen durch $+$ und $<$ zu einer geordneten, kommutativen Halbgruppe (mit dem Nullelement o) wird.*

Beweis. Die Definition der Längenaddition ist eindeutig (repräsentantenunabhängig), denn aus $Q \in PR$, $Q' \in P'R'$, $PQ, P'Q' \in a$ und $QR, Q'R' \in b$ folgt nach K₃ in 1.27 bereits $PR, P'R' \in c$. Die Ausführbarkeit der Addition von a und b ergibt sich folgendermaßen: Auf einer Halbgeraden mit dem Anfangspunkt Q tragen wir eine Strecke der Länge a , auf der dazu entgegengesetzten Halbgeraden eine Strecke der Länge b ab; dann repräsentiert die erhaltene Strecke PR die Summe der gegebenen Längen (Abb. 34a). Offenbar gilt $a + o = a$ für alle Längen a .



a)

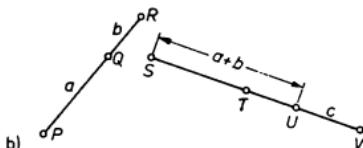


Abb. 34

Die Kommutativität der Addition ist trivial. Zum Beweis der Assoziativität mögen PR und SV eine Summe $a + b$ bzw. $(a + b) + c$ repräsentieren, wobei in PR ein Punkt Q mit $PQ \in a$ und $QR \in b$ und in SV ein Punkt U mit $SU \in a + b$ und $UV \in c$ liegt (Abb. 34b). Wegen $PR \cong SU$ gibt es nach B_{4(a)} o. B. d. A. eine Bewegung τ von PR mit $P^\tau = S$ und $R^\tau = U$; es sei $T := Q^\tau$ und $S \leqq U \leqq V$. Dann gilt $S \leqq T \leqq U \leqq V$, $TV \in b + c$ und $SV \in (a + b) + c$, $a + (b + c)$, d. h. $(a + b) + c = a + (b + c)$.

1) Nunmehr läßt sich erklären: Ein Winkel der Größe α heißt genau dann *spitz* bzw. *stumpf*, wenn $o < \alpha < R$ bzw. $R < \alpha < 2R$ gilt.

Für alle Längen x und $y \neq o$ gilt $x < x + y$ und wegen der Eindeutigkeit des Streckenabtragens noch $o, x \neq x + y$. Somit ist $<$ irreflexiv. Die Transitivität der Ordnungsrelation erhalten wir wie folgt: Wenn $a < b$ und $b < c$ gilt, gibt es Längen $x \neq o$ und $y \neq o$ mit $a + x = b, b + y = c$ und folglich $a + (x + y) = (a + x) + y = b + y = c$, d. h. $a < c$ wegen $x + y \neq o$. Zum Beweis der Konnexität braucht man nur Strecken zweier gegebener Längen a, b auf einer Halbgeraden abzutragen.

Gilt $a < b$, etwa $a + x = b$ mit $x \neq o$, dann ist $a + c < b + c$ wegen $(a + c) + x = (a + x) + c = b + c$ und $x \neq o$, d. h., daß $<$ auch monoton ist, w. z. b. w.

Die Addition der Winkelgrößen ist nicht immer ausführbar, z. B. können R und $2R$ nicht addiert werden.¹⁾ Wenn man von der Ausführbarkeit der Addition absieht, dann hat sie als „partielle“ Operation Eigenschaften, die den Eigenschaften der Längenaddition entsprechen.

Sogar die Beweisführung ist so ähnlich, daß wir uns mit einigen diesbezüglichen Bemerkungen begnügen.

Satz 1.32. *In der Menge der Winkelgrößen ist $+$ eine partielle Operation, die wie folgt assoziativ und kommutativ ist:*

a) *Mit $(\alpha + \beta) + \gamma$ existiert auch $\alpha + (\beta + \gamma)$, und es gilt*

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

b) *Mit $\alpha + \beta$ existiert auch $\beta + \alpha$, und es gilt*

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

Außerdem ist $<$ eine Ordnungsrelation mit o als kleinstem und $2R$ als größtem Element, die wie folgt monoton ist: Gilt $\alpha < \beta$ und existiert $\beta + \gamma$, dann existiert auch $\alpha + \gamma$, und es gilt:

$$\alpha + \gamma < \beta + \gamma.$$

Zusatz. Ist α Größe eines Winkels und α' die Größe seiner Nebenwinkel, dann gilt:

$$\alpha + \beta \text{ existiert} \Leftrightarrow \beta \leq \alpha'.$$

Beim Beweis des Satzes kann man sich, gestützt auf den Satz 1.5, an den Beweis von Satz 1.31 anlehnen. Die Konnexität der Relation $<$ beruht letztlich auf folgender Aussage: Liegt R in OQ^+ , dann gilt $OQ^+ \cap PR \neq \emptyset$ oder $OR^+ \cap PQ \neq \emptyset$ (vgl. [32] oder [34]).

Auf der Grundlage der Sätze 1.31 und 1.32 kann die Vervielfachung und die n -Teilung für Längen und Winkelgrößen eingeführt werden. Setzen wir für beliebige Längen a und natürliche Zahlen n

$$0 \cdot a := o, \quad (n + 1) a := na + a,$$

¹⁾ Solche Aufgaben werden lösbar, wenn man in der Menge der Winkelflächen Äquivalenzklassen bildet, die Menge der Äquivalenzklassen strukturiert und die Menge der hier definierten Winkelgrößen darin einbettet (vgl. [32]).

dann kann für beliebige Längen a, b und beliebige natürliche Zahlen m, n

$$(m \cdot n) a = m(na),$$

$$(m + n) a = ma + na,$$

$$n(a + b) = na + nb$$

durch vollständige Induktion bewiesen werden. Außerdem gilt auf Grund der Ordnungseigenschaften, daß zu einer Länge a und zu einer natürlichen Zahl $n > 0$ höchstens eine Länge x mit $nx = a$ (Eindeutigkeit der n -Teilung) existiert.¹⁾ Somit können wir mit

$$x = \frac{1}{n} a \Leftrightarrow nx = a$$

per definitionem die n -Teilung und mit

$$\frac{m}{n} a := m \left(\frac{1}{n} a \right)$$

wegen der Repräsentantenunabhängigkeit die Vervielfachung mit rationalen Zahlen erklären. Das genügt zunächst hinsichtlich der Längen.

Analog verfahren wir im Fall der Winkelgrößen. Wir setzen für beliebige Winkelgrößen α und natürliche Zahlen n

$$0 \cdot \alpha := 0, \quad (n + 1) \cdot \alpha := n \cdot \alpha + \alpha,$$

falls $n \cdot \alpha$ und $n \cdot \alpha + \alpha$ existieren.²⁾ Da $+$ für Winkelgrößen nur eine partielle Operation ist, sind die Regeln für die Vervielfachung mit natürlichen Zahlen nur modifiziert gültig. (Statt $n \cdot \alpha$ schreiben wir kurz $n\alpha$.) Es läßt sich die Eindeutigkeit der n -Teilung³⁾ herleiten und damit

$$\xi = \frac{1}{n} \alpha \Leftrightarrow n\xi = \alpha,$$

$$\frac{m}{n} \alpha := m \left(\frac{1}{n} \alpha \right)$$

erklären.

Aufgaben

1. Die Länge x wird *Differenz* von c und a genannt (in Zeichen: $x = c - a$) genau dann, wenn $a + x = c$ gilt. Man zeige, daß unter der Voraussetzung $a \leq c$ genau eine Differenz $c - a$ existiert. (Analoges gilt für Winkelgrößen.)

¹⁾ Hinsichtlich der Existenz gilt folgendes: Nach B₄ können wir fortgesetzt halbieren. Neben dieser elementar realisierbaren Möglichkeit gibt es die näherungsweise n -Teilung; mit Hilfe des Axioms von der oberen bzw. unteren Grenze läßt sich die Existenz vollständig beweisen.

²⁾ Für R können wir nur die Koeffizienten 0, 1, 2 gebrauchen. Dabei gilt $2 \cdot R = 2R$.

³⁾ Vgl. die Fußnote 1.

2. Man beweise

$$a < b \Rightarrow na < nb$$

für Längen a, b und positive natürliche Zahlen n und begründe damit die Eindeutigkeit der n -Teilung.

1.3.3. Einige wichtige Ungleichungen und ihre Bedeutung beim Konstruieren

Hinsichtlich der Bezeichnungen der Seitenlängen und der Größen der Innenwinkel eines Dreiecks ABC halten wir uns an die allgemein üblichen Festlegungen (vgl. Abb. 32). Ist ξ die Größe eines Winkels, dann werden wir mit ξ' die Größe seiner Nebenwinkel bezeichnen; damit ist speziell für ein Dreieck die Bezeichnung der Größen der Außenwinkel geregelt.

Satz 1.33 (Satz vom Außenwinkel). *Die Größe eines Innenwinkels eines Dreiecks ABC ist kleiner als die Größe eines nicht anliegenden Außenwinkels.*

Folgerung. *Die Summe zweier Innenwinkelgrößen ist stets kleiner als $2R$.*

Beweis. Wir zeigen etwa $\alpha < \beta'$. Es gibt eine Verschiebung τ längs g_{AB} mit $B^\tau = A$ (Abb. 35a). Es gilt $(BC^\tau)^\tau \cap BC = \emptyset$ und folglich $\alpha < \beta'$ sowie $\alpha + \beta < \beta' + \beta = 2R$, w. z. b. w.¹⁾

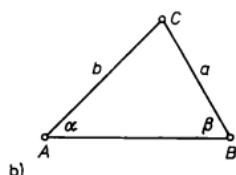
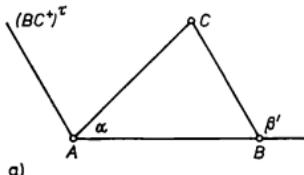


Abb. 35

Satz 1.34. *In jedem Dreieck ABC gilt*

$$a \leq b \Leftrightarrow \alpha \leq \beta,$$

d. h., daß der Seite mit der kleineren Länge der Winkel mit der kleineren Größe gegenüberliegt.

Folgerung. *Ein rechter oder stumpfer Winkel ist stets größter Innenwinkel; ihm liegt die längste Seite gegenüber.*

Beweis. Der Satz (vgl. Abb. 35b) ergibt sich nach den Sätzen 1.27, 1.29, 1.31 bis 1.33 wie in der Einleitung. Zum Beweis der Folgerung bemerken wir, daß ein rechter bzw. stumpfer Innenwinkel an einem nichtstumpfen Außenwinkel liegt und somit die anderen Innenwinkel spitz sind, d. h., daß ein rechter bzw. stumpfer Winkel stets größter Innenwinkel ist und daß ihm gegenüber die längste Seite liegt, w. z. b. w.

¹⁾ Der Beweis kann variiert werden, indem statt τ die Spiegelung am Mittelpunkt M von AB betrachtet wird.

Hilfssatz 1.35. Ist $a(M, O) \leq a(M, P)$ für ein Dreieck MOP , dann gilt

$$X \in (OP) \Rightarrow a(M, X) < a(M, P),$$

$$Y \in OP^+ \setminus OP \Rightarrow a(M, P) < a(M, Y).$$

Beweis. Der Punkt X liege zwischen O und P , Y in $OP^+ \setminus OP$ (Abb. 36). Die Größen der Winkel $\not\propto MOP$, $\not\propto MPO$, $\not\propto MXO$ und $\not\propto MYO$ bezeichnen wir der Reihe nach mit α, β, γ bzw. δ ; β' und γ' sind die Größen der Nebenwinkel von $\not\propto MPO$ bzw. $\not\propto MXO$.

Wegen $a(M, O) \leq a(M, P)$ ergibt der Satz 1.34 zunächst $\alpha \geq \beta$. Nach dem Satz vom Außenwinkel gilt $\beta \leq \alpha < \gamma'$ und $\delta < \beta \leq \alpha < \beta'$, so daß $a(M, X) < a(M, P)$ bzw. $a(M, P) < a(M, Y)$ nach dem Satz 1.34 folgt, w. z. b. w.

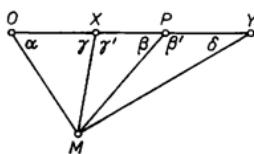


Abb. 36

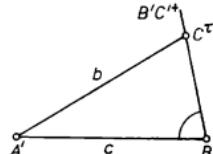


Abb. 37

Satz 1.36 (sSW). Gilt für Dreiecke ABC und $A'B'C'$

$$AB \cong A'B', \quad AC \cong A'C', \quad \not\propto B \cong \not\propto B'$$

und $b \geqq c$, dann gibt es eine Bewegung τ des Dreiecks ABC mit $A' = A$, $B' = B$, $C' = C$.

Beweis. Nach dem Axiom B₃(b) gibt es eine Bewegung τ mit

$$B' = B, \quad A' \in B'A'^+, \quad C' \in A'B'C'^+.$$

Wegen der Eindeutigkeit des Strecken- und Winkelantragens gilt $A' = A'$ und $(BC^+)^{\tau} = B'C'^+$, insbesondere $C' \in B'C'^+$ (Abb. 37). Aus

$$a(A', C') = a(A, C) = b = a(A', C')$$

und $b \geqq c$ folgt $C' = C'$ nach dem Hilfssatz 1.35, w. z. b. w.

Satz 1.37 (Dreiecksungleichung). Die Summe zweier Seitenlängen eines Dreiecks ist größer als die dritte Seitenlänge.

Zusatz. Gilt $a \leqq b$, dann ist $b - a < c$.

Ergänzung. Sind A, B, C drei Punkte einer Geraden, dann gilt $a + b \geqq c$.

Beweis. Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Um etwa $a < b + c$ zu zeigen, tragen wir die Strecke AC auf der Halbgeraden AB^- ab und erhalten einen Punkt D (Abb. 38). Nach dem Satz 1.29 haben die Winkel $\not\propto ACD$ und $\not\propto ADC$ dieselbe Größe δ . Indem

wir den Satz 1.34 auf das Dreieck BCD anwenden, erhalten wir wegen $\delta < \gamma + \delta$ bereits $a < b + c$.

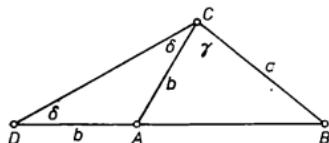


Abb. 38

Gilt $a \leq b$, dann ist $b - a < c$ wegen $b < c + a$.

Hinsichtlich der Ergänzung sei bemerkt, daß einer der Punkte zwischen den anderen liegt; somit gilt $a + b = c$ oder $b + c = a$ oder $c + a = b$, in jedem Fall

$$a + b \geq c,$$

w. z. b. w.

Längen a, b, c erfüllen per definitionem die Dreiecksungleichung genau dann, wenn die Summe von je zweien größer als die dritte ist. Man überlegt sich leicht, daß unter der Voraussetzung $a \leq b$ die Längen genau dann die Dreiecksungleichung erfüllen, wenn

$$b - a < c < b + a$$

gilt. Somit läßt sich der Satz 1.37 folgendermaßen umformulieren: Wenn a, b, c Seitenlängen eines Dreiecks sind und o. B. d. A. $a \leq b$ ist, dann gilt $b - a < c < b + a$.

Ist von diesem Satz auch die Umkehrung richtig: Wenn a, b, c Längen mit $a \leq b$ und $b - a < c < b + a$ sind, dann sind a, b, c Seitenlängen eines Dreiecks? Die Beantwortung der Frage läuft auf die Lösung einer Konstruktionsaufgabe hinaus. Wir können deshalb auch fragen, ob das Erfüllen der Dreiecksungleichung, das sich nach dem Satz 1.37 für die Lösung der Konstruktionsaufgabe als notwendige Bedingung erweist, dazu auch hinreicht. Bekanntlich läuft die Aufgabe auf die Bestimmung von Kreisschnittpunkten hinaus. Um das näher auseinandersetzen zu können, bezeichnen wir in einer Ebene ε den Kreis um $M \in \varepsilon$ mit dem Radius r mit $k(M, r)$, d. h.

$$k(M, r) := \{X \in \varepsilon: a(M, X) = r\}.$$

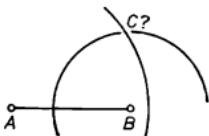
Gilt nun $b - a < c < b + a$, dann können wir eine Strecke AB der Länge c in ε wählen. Die Frage lautet nun, ob sich die Kreise $k(A, b)$ und $k(B, a)$ in ε schneiden (vgl. Abb. 39).

Ein ähnliches Problem tritt auf, wenn β, b, c mit $0 < \beta < 2R$ und $b > c$ vorgegeben sind: Wir wählen einen Winkel der Größe β , tragen von seinem Scheitel B aus auf einem Schenkel eine Strecke der Länge c ab und erhalten A . Trifft $k(A, b)$ den anderen Schenkel BP ?

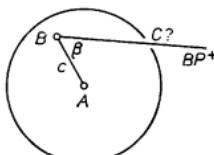
Es läßt sich zeigen, daß die Eindeutigkeit der gesuchten Schnittpunkte aus den Dreieckskongruenzsätzen sss bzw. sSW folgt. Die Existenz der gesuchten Schnittpunkte läßt sich mit Hilfe der Inzidenz-, Anordnungs- und Bewegungssätze

nicht herleiten. Ihre Herleitung wird nach dem Stetigkeitsaxiom möglich (vgl. Abschnitt 4.2.2). Man kann diese nichtelementare Herleitung dieser elementaren Aussagen umgehen, indem man folgende Axiome des Zirkels formuliert:

- Z_1 . In einer Ebene schneiden sich ein Kreis und ein Halbgerade, deren Anfangspunkt vom Kreismittelpunkt einen Abstand kleiner als der Radius hat, in genau einem Punkt.
- Z_2 . In einer Ebene schneiden sich zwei Kreise in einer Halbebene bezüglich der Verbindungsgeraden der Kreismittelpunkte in genau einem Punkt, wenn ihre Radien und der Abstand der Mittelpunkte der Dreiecksungleichung genügen.



a)



b)

Abb. 39

Da wir die Eindeutigkeit der Schnittpunkte postuliert haben, können die Dreieckskongruenzsätze sSW und sss mit Hilfe der Eindeutigkeitsaussagen in Z_1 bzw. Z_2 hergeleitet werden. Sind beispielsweise die Voraussetzungen von sSW für Dreiecke ABC und $A'B'C'$ wie in 1.36 erfüllt, dann können wir den Beweis wie dort formulieren, wobei wir statt des Hilfssatzes 1.35 das Axiom Z_1 zitieren. — Der Beweis von sss verkürzt sich erheblich (vgl. Aufgabe 4).

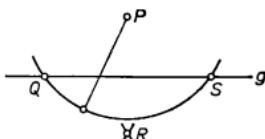


Abb. 40

Die Existenzaussagen in Z_1 und Z_2 sind für Grundkonstruktionen in der Ebene wie das *Errichten einer Senkrechten*, das *Füllen eines Lotes*, das *Halbieren von Strecken und Winkeln* sowie die *Konstruktion einer Mittelsenkrechten* bedeutsam. Um z. B. von einem Punkt P auf eine Gerade g ($\not\parallel P$) das Lot zu fällen, ziehen wir um P durch einen Punkt aus der offenen Halbebene gP^- einen Kreis, der g nach Z_1 in zwei Punkten Q, S trifft; die Kreise um Q und S mit demselben Radius schneiden sich etwa nach Z_2 in gP^- in genau einem Punkt R , für den nach der Folgerung aus 1.29 wie gewünscht $g_{PR} \perp g$ gilt. — Mit Hilfe der genannten Folgerung und den Axiomen Z_1 und Z_2 lassen sich auch die anderen, oben genannten Grundkonstruktionen begründen (vgl. etwa [32]).

Abschließend wollen wir nochmals die Dreieckskonstruktionen behandeln, deren Eindeutigkeit bis auf Kongruenz bzw. Bewegung durch die Dreieckskongruenzsätze ausgedrückt wird.

Es ist bemerkenswert, daß EUKLID keine Bedenken gegen eine (stillschweigende) Verwendung von Z_2 hatte. Dagegen hatte er die Lösbarkeit der Aufgabe bei gegebenen α, β, c durch die Formulierung seines 5. Postulates (vgl. S. 13) erreicht. Bald werden wir erkennen, daß die Forderung nach uneingeschränkter Lösbarkeit dieser Aufgabe für die euklidische Geometrie kennzeichnend ist. Im Ergebnis der Kapitel 2 und 3 können wir dann sagen, daß die Aufgabe in der absoluten Geometrie nicht lösbar ist.

Vorgabe ¹⁾	Lösbarkeit	Eindeutigkeit (bis auf Kongruenz)
a, b, c	nach Z_2 , falls a, b, c die Dreiecksungleichung erfüllen	nach sss
a, b, γ	nach K_1	nach sws
β, b, c	für $b > c$ nach Z_1	nach sSW für $b > c$
α, β, c	offen	nach wsw
a, α, β	für $\alpha + \beta < 2R$ nach Z_3 (s. u.)	nach sww

Die Lösung der Aufgabe mit gegebenen a , α , β ($\alpha + \beta < 2R$) kann wie folgt in Angriff genommen werden: Wir wählen einen Winkel der Größe β und tragen von seinem Scheitel B aus auf einem Schenkel eine Strecke der Länge a ab und erhalten einen Punkt C (Abb. 41). Ist BP^+ der andere Schenkel des Winkels $\not\angle B$, dann tragen wir einen Winkel der Größe α an PB^+ in die Halbebene PBC^+ ab und erhalten

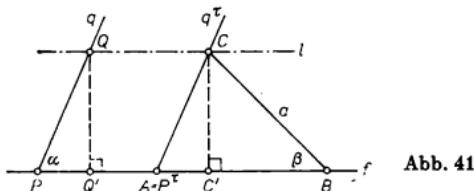


Abb. 41

die Halbgerade q . Indem wir q längs $f := g_{BP}$ so verschieben, daß q' den Punkt C enthält, finden wir schließlich den noch gesuchten Punkt A . — Doch wie läßt sich die Verschiebung τ längs f exakt bestimmen? Ist $Q \in q$ ein Punkt, der denselben Abstand von f wie C hat, d. h., dessen Lotfußpunkt $Q' \in f$ von Q denselben Abstand hat wie der Punkt C von seinem Lotfußpunkt $C' \in f$, dann kann die nach der Folgerung zu 1.15 existierende Verschiebung τ mit $Q' = C'$ gewählt werden.

Der Punkt Q kann als Schnittpunkt von q mit der Abstandslinie l durch C aufgefaßt werden, wobei l per definitionem die Menge derjenigen Punkte aus PBC^+ enthält, die von f denselben Abstand wie C besitzen.²⁾ Wie wir später sehen werden,

¹⁾ Als generelle Bedingungen setzen wir voraus, daß alle Längen größer als o sind und alle Winkelgrößen zwischen o und $2R$ liegen.

²⁾ In der euklidischen Geometrie ist l eine Parallele von f . Das trifft in der absoluten Geometrie im allgemeinen nicht zu.

lassen sich Existenz und Eindeutigkeit des Schnittpunktes herleiten, allerdings nur mit Hilfe des Stetigkeitsaxioms. Wer die oben geschilderte Konstruktion elementar abgesichert wissen möchte, wird wie im Fall der Axione Z_1 und Z_2 folgendes Axiom in Kauf nehmen:

- $Z_3.$ In einer Ebene schneiden sich eine Gerade g und eine Abstandslinie l einer Geraden f in genau einem Punkt, wenn $f \neq g$ gilt.

Es sei dem Leser überlassen, sich einen „Abstandslinienzirkel“ vorzustellen.

Aufgaben

1. Man zeige, daß unter allen Streckenzügen, die zwei Punkte P und Q verbinden, PQ der kürzeste „Streckenzug“ ist.
2. Es sei ABC ein Dreieck, das nur spitze Winkel besitzt, und P ein Punkt zwischen B und C . Wie müssen Punkte Q und R im Innern von CA bzw. AB gewählt werden, daß der Umfang des Dreiecks PQR möglichst klein wird?
Anleitung: Man wähle P, Q, R zunächst beliebig und spiegle P an g_{CA} bzw. g_{AB} .
3. Man falle vom Scheitel des größten Winkels eines Dreiecks das Lot auf die Verbindungsgerade der beiden anderen Ecken und zeige, daß der Lotfußpunkt zwischen diesen Ecken liegt.
4. Für Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gelte $a = a'$, $b = b'$ und $c = c'$ (Voraussetzungen in sss). Man wähle nach $B_3(b)$ eine Bewegung τ mit

$$A^\tau = A', \quad B^\tau \in A'B'^+, \quad C^\tau \in A'B'C'^+$$

und zeige $B^\tau = B'$ und $C^\tau = C'$ mit Hilfe von K_1 und Z_2 .

2. Einführung in die Lobačevskijsche Geometrie

Die Lobačevskijsche Geometrie unterscheidet sich von der euklidischen lediglich im Parallelenaxiom. Zunächst wird die absolute Geometrie fortgesetzt, um dann mit der Einführung eines nichteuklidischen Parallelenaxioms (LP) erste charakteristische Sätze der Lobačevskijschen Geometrie zu gewinnen. Die Abschnitte 2.2 und 2.3, die beim ersten Lesen ausgelassen werden können, besitzen die Aussagen über die Beziehungen zwischen zwei Geraden einer Ebene als gemeinsame Grundlage.

2.1. Euklidisches und Lobačevskijsches Parallelenaxiom

2.1.1. Einige weitere Sätze der absoluten Geometrie

Im Gegensatz zum Kapitel 1 werden wir künftig unser Stetigkeitsaxiom, das Axiom von der oberen bzw. unteren Grenze, häufig benutzen. Eine wichtige Folgerung ist die Aussage, daß die Geraden archimedisch geordnet sind. Um uns diesen Begriff zu

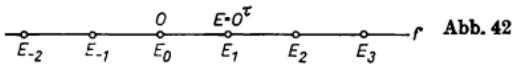


Abb. 42

erarbeiten, gehen wir von einer Geraden $f = g_{OE}$ und einer Verschiebung τ längs f mit $O^{\tau} = E$ aus (Abb. 42). Da die Verschiebungen längs f eine geordnete kommutative Gruppe bilden, können wir zunächst Potenzen von τ bilden,

$$\tau^0 := \iota, \quad \tau^{n \pm 1} := \tau^n \cdot \tau^{\pm 1},$$

und dann

$$E_n := O^{\tau^n}$$

setzen, um auf f eine Skala zu erhalten. Wie man leicht sieht, gilt für $O < E$ und alle ganzen Zahlen m, n

$$m < n \Leftrightarrow E_m < E_n.$$

Außerdem gibt es — das ist ein Ausdruck der archimedischen Ordnung — zu jedem Punkt $X \in f$ eine ganze Zahl m mit $X \in E_{m-1}E_m$.

Zum Beweis dieser Behauptung dürfen wir o. B. d. A.

$$X \in OE^+$$

voraussetzen. Wir nehmen an, daß $E_n < X$ für alle ganzen Zahlen n gilt. Dann wäre die Menge

$$M := \{E_n : n \in \mathbb{Z} \wedge E_n < X\}$$

nicht leer und nach oben beschränkt, so daß es eine obere Grenze $P \in f$ geben müßte. Es gälte $E_n < P$ für alle ganzen Zahlen n , jedoch müßte es für den Mittelpunkt M von O und P eine natürliche Zahl n mit $M \leq E_n$ und folglich $P \leq E_{2n}$ im Widerspruch zur Eigenschaft von P geben. Da die Annahme falsch war, existiert eine natürliche Zahl n mit $X \leq E_n$. — Nun ist es nicht mehr schwer, eine natürliche Zahl m mit $X \in E_{m-1}E_m$ zu finden, w. z. b. w.

Aus der archimedischen Ordnung der Geraden folgt

Satz 2.1. Zu Längen $a, b \neq 0$ gibt es stets eine natürliche Zahl n mit $a \leq nb$.¹⁾

Folgerung. Zu Längen $a, b \neq 0$ gibt es stets eine natürliche Zahl k mit $\frac{a}{2^k} \leq b$.

Die Folgerung läßt sich sinngemäß auf Winkelgrößen übertragen. Dazu stellen wir einen Hilfssatz bereit, der auch später noch benötigt wird.

Hilfssatz 2.2. Im Dreieck ABC sei $b < c$ und $X \in BC$. Ist dann α_1 bzw. α_2 die Größe von $\angle BAX$ bzw. $\angle CAX$ und $a_1 := a(B, X)$ sowie $a_2 := a(C, X)$, dann gilt

$$\alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow a_1 > a_2,$$

$$\alpha_1 = a_2 \Rightarrow \alpha_1 < \alpha_2.$$

Zusatz. Für $b = c$ gilt

$$\alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2.$$

Beweis. Unter der Voraussetzung $\alpha_1 = \alpha_2$ spiegeln wir an $w = g_{AX}$. Wegen $b < c$ liegt C^w zwischen A und B (Abb. 43). Nach dem Satz vom Außenwinkel gilt $\beta < \gamma'$, so daß $a_1 > a_2$ nach dem Satz 1.34 folgt. Aus diesem Resultat ergibt sich sofort $\alpha_1 < \alpha_2$ unter der Voraussetzung $a_1 = a_2$. — Der Zusatz ist nach dem Satz 1.29 trivial, w. z. b. w.

Satz 2.3. Zu Winkelgrößen α, β mit $0 < \alpha, \beta < 2R$ gibt es stets eine natürliche Zahl k mit $\frac{\alpha}{2^k} \leq \beta$.

¹⁾ Diese Aussage wird oft als *Eudoxus-Archimedisches Axiom* benutzt.

Beweis. Im Fall $\alpha \leq \beta$ kann $k = 0$ gewählt werden.

Es sei nun $R > \alpha > \beta$. Dann gibt es Punkte A, B, C, X derart, daß $\not\propto BAC$ die Größe α , $\not\propto CAX$ die Größe β hat und X zwischen B und C liegt; im Dreieck ABC kann $\not\propto C$ o. B. d. A. als rechter Winkel vorausgesetzt werden (Abb. 44).

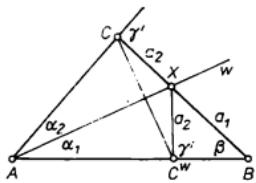


Abb. 43

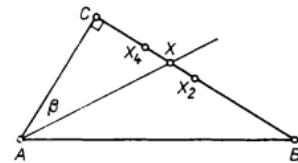


Abb. 44

Wir bestimmen X_{2^k} wie folgt als Mittelpunkte:

$$X_2 := M(B, C), \quad X_{2^{k+1}} := M(C, X_{2^k}).$$

Nach der Folgerung aus 1.34 ergibt sich nacheinander

$$b < a(A, X_2), a(A, X_4), \dots, a(A, X_{2^k}), \dots$$

Somit gilt für die Größen $\alpha_2, \alpha_4, \dots, \alpha_{2^k}, \dots$ von $\not\propto CAX_2$ bzw. $\not\propto CAX_4$ bzw. ... nach dem Hilfssatz 2.2 der Reihe nach

$$\alpha_2 > \frac{\alpha}{2}, \alpha_4 > \frac{\alpha_2}{2} > \frac{\alpha}{4}, \dots, \alpha_{2^k} > \frac{\alpha}{2^k}, \dots$$

Schließlich gibt es nach der Folgerung aus 2.1 eine natürliche Zahl k mit $X_{2^k} \in CX$, d. h.

$$\beta > \alpha_{2^k} > \frac{\alpha}{2^k}.$$

Gilt $\alpha > \beta$, jedoch $2R > \alpha \geq R$, dann setzen wir $\alpha^* := \frac{\alpha}{2}$ und $\beta^* := \frac{\beta}{2}$. Nach dem bereits Bewiesenen gibt es eine natürliche Zahl k mit $\frac{\alpha^*}{2^k} < \beta^*$, d. h. mit $\frac{\alpha}{2^k} < \beta$, w. z. b. w.

Die hergeleiteten Sätze sind Voraussetzung zum Beweis der folgenden Aussagen.

Satz 2.4. Für jedes Dreieck ABC existiert $\alpha + \beta + \gamma$, d. h. $\alpha + \beta \leq \gamma'$ und $\alpha + \beta + \gamma \leq 2R$.

Zusatz. Für jedes rechtwinklige Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C ist $\alpha + \beta \leq R$.

Beweis. Zunächst wird der Zusatz bewiesen. Nach der Folgerung aus 1.33 ergibt sich lediglich $\alpha + \beta < 2R$. Es sei etwa $\alpha \geq \beta$. Wir setzen $A := A_1, B := A_2$ und

$$M_i := M(A_i, C), \quad A_{i+2} := A_{i+1}^{M_i}$$

für $i = 1, 2, \dots$ (Abb. 45a). Außerdem seien $\alpha_1 := \alpha$ und $\alpha_i, \bar{\alpha}_j$ die Größen von $\not\propto CA_iA_{i+1}$ bzw. $\not\propto A_{i-1}A_iA_{i+1}$ für $j = 2, 3, \dots$. Dann gilt

$$\alpha_2 + \bar{\alpha}_2 = \beta, \quad \alpha_3 + \bar{\alpha}_3 = \bar{\alpha}_2, \dots, \alpha_{j+1} + \bar{\alpha}_{j+1} = \bar{\alpha}_j, \dots,$$

$$(1) \quad \alpha + \beta = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_j) + \bar{\alpha}_j.$$

Aus der Konstruktion ergibt sich außerdem

$$R + \alpha_1 + \cdots + \alpha_i < 2R$$

oder einfach

$$(2) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_i < R.$$

Wir nehmen nun entgegen der Behauptung $R < \alpha + \beta < 2R$ an. Nach dem Satz 2.3 gibt es eine natürliche Zahl k mit

$$(3) \quad \frac{\beta}{2^k} \leq \gamma := \alpha + \beta - R.$$

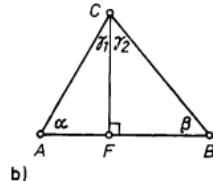
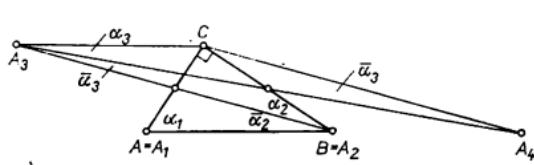


Abb. 45

Andererseits liegt nach der Folgerung aus 1.34 im Dreieck $A_{i-1}A_iC$ für $i = 2, 3, \dots$ dem Punkt C die längste Seite gegenüber; daraus folgt $\alpha_i > \bar{\alpha}_i$ nach dem Hilfssatz 2.2 und somit

$$\bar{\alpha}_2 < \frac{\beta}{2}, \bar{\alpha}_3 < \frac{\bar{\alpha}_2}{2} < \frac{\beta}{4}, \dots, \bar{\alpha}_i < \frac{\beta}{2^{i-1}}, \dots$$

für $i = 2, 3, \dots$ Aus (2) und (1) erhalten wir für $j = k + 1$

$$\alpha + \beta < R + \bar{\alpha}_{k+1} < R + \frac{\beta}{2^k}$$

im Widerspruch zur angenommenen Ungleichung $R + \frac{\beta}{2^k} \leq \alpha + \beta$ gemäß (3). Damit gilt der Zusatz.

Um den Satz zu beweisen, betrachten wir in einem beliebigen Dreieck ABC die längste Seite, etwa AB . Das Lot von C auf g_{AB} hat einen Fußpunkt F zwischen A und B (vgl. Aufgabe 3, S. 57). Bezeichnen wir die Größen der Winkel $\sphericalangle ACF$, $\sphericalangle BCF$ mit γ_1 bzw. γ_2 (Abb. 54 b), dann gilt nach dem Zusatz $\alpha + \gamma_1 \leq R$, $\beta + \gamma_2 \leq R$ und somit $\alpha + \beta + \gamma \leq 2R$, w. z. b. w.

Es ist üblich, für jedes Dreieck ABC die Differenz $\delta(ABC) := 2R - (\alpha + \beta + \gamma)$ den *Defekt des Dreiecks* ABC zu nennen. Grundlegende Eigenschaften enthält der folgende

Satz 2.5. *Für Defekte gilt*

- (a) $0 \leq \delta(ABC) < 2R$,
- (b) $A \notin g_{BC} \wedge X \in (BC) \Rightarrow \delta(ABX) + \delta(ACX) = \delta(ABC)$,
- (c) $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C' \Rightarrow \delta(ABC) = \delta(A'B'C')$.

Zusatz. Außerdem gilt

$$(b') \quad \delta(ABC) = 0 \wedge X \in (BC) \Rightarrow \delta(ABX) = \delta(ACX) = 0.$$

Beweis. Nach der Definition und dem Satz 2.4 sind (a) und (c) trivial.

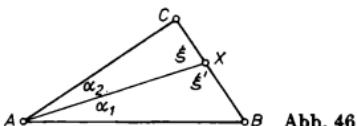


Abb. 46

Es sei nun X innerer Punkt der Dreiecksseite BC des Dreiecks ABC (Abb. 46). Die Größen der Winkel $\angle BAX$, $\angle CAX$ und $\angle AXB$ bezeichnen wir mit α_1 , α_2 bzw. ξ , $2R - \xi$ wie oben mit ξ' . Dann gilt

$$\begin{aligned} \delta(ABX) + \delta(ACX) &= (2R - \alpha_1 - \beta - \xi') + (2R - \alpha_2 - \gamma - \xi) \\ &= (2R - \alpha_1 - \beta - \xi') + (\xi' - \alpha_2 - \gamma) \\ &= 2R - \alpha - \beta - \gamma = \delta(ABC). \end{aligned}$$

Der Zusatz ergibt sich nun aus den Rechenregeln für Winkelgrößen: Wäre etwa $\delta(ABX) > 0$, dann folgte $\delta(ABC) = \delta(ABX) + \delta(ACX) > 0 + \delta(ACX) \geq 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung, w. z. b. w.

Satz 2.6. *Gilt $\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 = 2R$ für wenigstens ein Dreieck $A_0B_0C_0$, dann gilt $\alpha + \beta + \gamma = 2R$ für alle Dreiecke ABC .*

Zusatz. *Gilt $\beta_1 + \gamma_1 = R$ für wenigstens ein rechtwinkliges Dreieck $A_1B_1C_1$ mit $\alpha_1 = R$, dann gilt $\beta + \gamma = R$ für jedes rechtwinklige Dreieck ABC mit $\alpha = R$.*

Beweis. Auch hier wenden wir uns zuerst dem Beweis des Zusatzes zu. Es sei $A_1B_1C_1$ ein Dreieck mit $\alpha_1 = \beta_1 + \gamma_1 = R$. Indem wir fortgesetzt an Seitenmittelpunkten spiegeln, erhalten wir (durch Parkettieren) neue rechtwinklige Dreiecke, deren Kathetenlängen jede vorgegebene obere Schranke übertreffen (vgl. Abb. 47a): Ist $K_1 := M(B_1, C_1)$ der Mittelpunkt von B_1C_1 , dann setzen wir $K_2 := A_1K_1$, $L_1 := M(B_1, K_2)$ und $M_1 := M(C_1, K_2)$ sowie $B_2 := C_1L_1$ und $C_2 := B_1M_1$; wegen $\beta_1 + \gamma_1 = R$ sind B_2 , C_2 und K_2 kollinear, und es gilt $B_2 \in A_1B_1^+$, $C_2 \in A_1C_1^+$,

$\not\propto B_2 \in \beta_1$, $\not\propto C_2 \in \gamma_1$, $b_2 = 2b_1$ und $c_2 = 2c_1$. Indem wir diese Konstruktion auf das Dreieck $A_2 B_2 C_2$ mit $A_2 := A_1$ anwenden, erhalten wir ein Dreieck $A_4 B_4 C_4$ mit $A_4 := A_2$, $B_4 \in A_2 B_2^+$, $C_4 \in A_2 C_2^+$, $\not\propto B_4 \in \beta_1$, $\not\propto C_4 \in \gamma_1$, $b_4 = 2b_2 = 4b_1$ und $c_4 = 2c_2 = 4c_1$. Durch fortgesetzte Konstruktionen der geschilderten Art, bei der sich die Kathetenlängen jeweils verdoppeln, ergeben sich Dreiecke mit den Kathetenlängen $2^k b_1$ und $2^k c_1$, für die es nach der Eudoxus-Archimedischen Aussage 2.1 keine obere Schranke gibt.

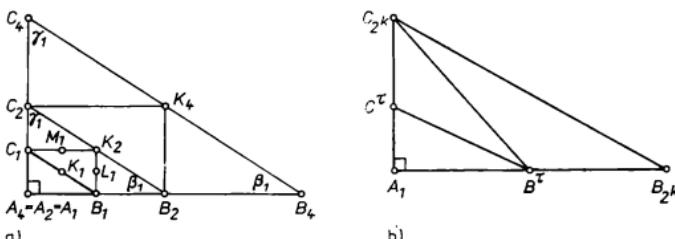


Abb. 47

Ist nun ABC ein beliebiges Dreieck mit $\alpha = R$, dann können wir es so bewegen, daß $A' = A_1$, $B' = A_1 B_1^+$ und $C' = A_1 C_1^+$ gilt. Weiterhin gibt es eine natürliche Zahl k derart, daß B' zwischen A_1 und B_{2^k} , C' zwischen A_1 und C_{2^k} liegt (Abb. 47b). Zerlegen wir noch das Viereck $B' B_{2^k} C_{2^k} C'$ durch eine Diagonale, etwa $B' C_{2^k}$, dann erkennen wir wegen $\delta(A_2 B_2 C_2) = o$ nach 2.5c, b' sofort $\delta(ABC) = \delta(A' B' C') = o$, d. h. $\alpha = \beta + \gamma = R$. Somit ist der Zusatz vollständig bewiesen.

Es sei nun $A_0 B_0 C_0$ ein beliebiges Dreieck mit $\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 = 2R$. Liegt etwa C_0 gegenüber der längsten Seite, dann hat das Lot von C_0 auf $g_{A_0 B_0}$ einen Fußpunkt F_0 zwischen A_0 und B_0 (vgl. Aufgabe 3, S. 57). Wegen $\delta(A_0 B_0 C_0) = o$ verschwindet auch der Defekt der rechtwinkligen Teildreiecke $A_0 F_0 C_0$ und $B_0 F_0 C_0$; somit verschwindet der Defekt jedes rechtwinkligen Dreiecks.

Ist nun ABC ein beliebiges Dreieck, wobei etwa AB die längste Seite ist, dann trifft das Lot von C auf g_{AB} sogar AB in einem inneren Punkt F (Abb. 45b). Sind γ_1, γ_2 die Größen von $\not\propto ACF$ bzw. $\not\propto BCF$, dann gilt $\alpha + \gamma_1 = R$, $\beta + \gamma_2 = R$ und folglich $\alpha + \beta + \gamma = 2R$, w. z. b. w.

Den Satz 2.6 kann man auch wie folgt interpretieren: *Entweder es gilt $\delta(ABC) = o$ für alle Dreiecke, oder es gilt $\delta(ABC) > o$ für alle Dreiecke.* Natürlich ist noch nicht geklärt, ob nur einer der Fälle möglich ist oder ob beide eintreten können. Aus diesem Resultat kann man eine erste Antwort auf die Frage erhalten, ob man Rechtecke oder gar Quadrate konstruieren kann. Dazu betrachten wir zunächst *Saccherische*¹⁾ Vierecke, das sind Vierecke $ABCD$ mit rechten Winkeln etwa bei A

¹⁾ Nach dem italienischen Mathematiker G. SACCHERI (1667–1733) benannt, obwohl bereits 'UMAR AL-HAYYĀM (1048–1131) solche Vierecke betrachtet hat (vgl. [52]).

und B und mit $AD \cong BC$ (Abb. 48a). Sie sind immer konstruierbar, aber sind sie Rechtecke? Wir können zunächst nur sagen

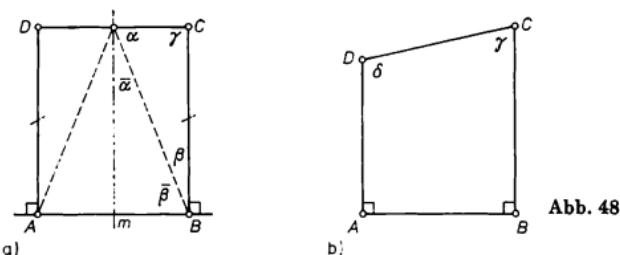


Abb. 48

Satz 2.7. Ist $ABCD$ ein Saccherisches Viereck mit rechten Winkeln bei A und B , dann sind die Winkel bei C und D ebenfalls rechte oder kongruente spitze Winkel. Oder schärfer: Entweder sind alle Saccherischen Vierecke Rechtecke, oder es gibt überhaupt kein Rechteck.¹⁾

Den Beweis überlassen wir dem Leser als Aufgabe.

Aufgaben

1. Man beweise den Satz 2.7.

Anleitung: Die Mittelsenkrechte $m = m(A, B)$ ist Symmetrieachse des Saccherischen Vierecks $ABCD$; bezüglich der entstandenen Teilvierecke argumentiere man mit Hilfe des Satzes 2.4 bzw. seines Zusatzes. Die Verschärfung erhält man nach dem Satz 2.6.

2. Man zeige für ein Viereck $ABCD$ mit rechten Winkeln bei A und B sowie Winkeln der Größe γ, δ bei C bzw. D die folgende Äquivalenz (vgl. Abb. 48b)

$$\gamma < \delta \Leftrightarrow a(A, D) < a(B, C).$$

2.1.2. Das euklidische Parallelenaxiom

In diesem Abschnitt wollen wir auf der Grundlage der absoluten Geometrie die Bedeutung des 5. Postulates für den Aufbau der euklidischen Geometrie erarbeiten. Da die Resultate unserer Überlegungen unmittelbare Rückschlüsse auf die Lobačevskische Geometrie gestatten, hat dieser Abschnitt an dieser Stelle seine Berechtigung. Neben den zahlreichen Aussagen sind auch viele Beweise bedeutsam. Wir überlassen es dem Leser, sich eine Übersicht über die Beweise zu verschaffen, um daraufhin die intensive Erarbeitung zu planen. Wir haben versucht, bei der Anordnung der Sätze neben beweistechnischen Aspekten die historische Entwicklung zu berücksichtigen.

¹⁾ Im ersten Fall spricht man von der *Hypothese der rechten*, im zweiten Fall von der *Hypothese des spitzen Winkels* für Saccherische Vierecke.

Der Inhalt des 5. Postulates kann wie folgt wiedergegeben werden (vgl. auch die Bemerkungen zur Konstruktion eines Dreiecks bei gegebenen α , β und c am Schluß des Abschnittes 1.3.3):

Sind $\not\propto BAX$, $\not\propto ABY$ Winkel der Größe α bzw. β und gilt neben $Y \in ABX^+$ noch

$$\alpha + \beta < 2R,$$

dann schneiden sich AX^+ und BY^+ in einem Punkt C (Abb. 49).

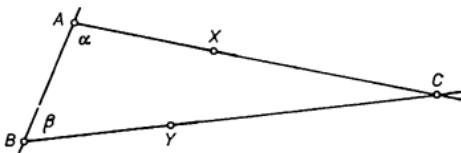


Abb. 49

Dieses Postulat EUKLIDS ist in der absoluten Geometrie zu zahlreichen anderen Aussagen gleichwertig.

Satz 2.8. Das 5. Postulat Euklids ist äquivalent zu

(1) Es gilt $\alpha + \beta + \gamma = 2R$ für alle Dreiecke ABC .¹⁾

Folgerung. Das 5. Postulat Euklids gilt genau dann, wenn

(1') ein Dreieck $A_0B_0C_0$ mit $\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 = 2R$ existiert.

Beweis. a) Es gelte das 5. Postulat, ABC sei ein beliebiges Dreieck. Um die Summe $\beta + \gamma$ zu bilden, spiegeln wir am Mittelpunkt M von BC (Abb. 50a). Nach dem Satz 2.4 gilt $\alpha + (\beta + \gamma) \leq 2R$. Wäre $\alpha + (\beta + \gamma) < 2R$, dann müßten sich AB^+ und $(BA^+)^M$ nach dem 5. Postulat schneiden im Widerspruch zu $g_{AB} \parallel g_{AB}^M$ für die Spiegelung an M .

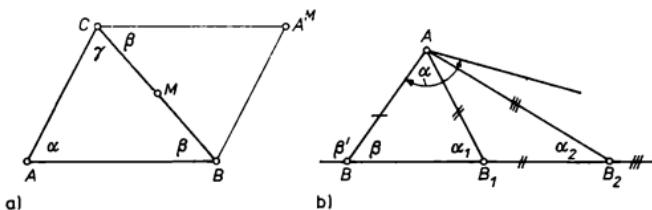


Abb. 50

b) Es wird nun (1) vorausgesetzt. Außerdem seien $\not\propto BAX$ und $\not\propto ABY$ Winkel der Größe α bzw. β , und es gelte $Y \in ABX^+$ und $\alpha + \beta < 2R$ (Abb. 50b). Wir konstruieren eine Folge gleichschenklicher Dreiecke $ABB_1, AB_1B_2, AB_2B_3, \dots$, indem wir

¹⁾ Diese Äquivalenz wurde bereits von dem aserbaidschanischen Mathematiker NĀSĪR AD-DĪN AT-TŪSĪ (Nasir-ed-din; 1201–1274) betrachtet, der das 5. Postulat zu beweisen versuchte. Er wirkte am Observatorium Maragha in der Nähe Bagdads, einem Zentrum der Wissenschaft des Orients.

AB auf BY^+ , AB_1 auf B_1B^- , AB_2 auf B_2B^- usw. abtragen; die Größen der Winkel $\not\propto BAB_1$, $\not\propto B_1AB_2$, $\not\propto B_2AB_3$, ... bezeichnen wir der Reihe nach mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ Nach dem Satz 1.29 und (1) gilt (mit $\beta' := 2R - \beta$)

$$\beta' = 2\alpha_1, \alpha_1 = 2\alpha_2, \alpha_2 = 2\alpha_3, \dots,$$

d. h.

$$\alpha_i = \frac{\beta'}{2^i} \quad \text{für } i = 1, 2, \dots$$

Andererseits folgt aus $\alpha + \beta < 2R$ zunächst $\alpha < \beta'$. Im Dreieck ABB_1 hat der Winkel bei A die Größe

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i = \beta' - \alpha_i = \beta' - \frac{\beta'}{2^i}.$$

Nach dem Satz 2.3 gibt es eine natürliche Zahl k mit

$$\frac{\beta'}{2^k} \leq \beta' - \alpha \quad \text{und} \quad \alpha \leq \beta' - \frac{\beta'}{2^k},$$

d. h., daß der Schenkel AX^+ die Strecke BB_k trifft. Somit schneiden sich AX^+ und BY^+ .

Die Folgerung ist nun nach dem Satz 2.6 trivial, w. z. b. w.

Der italienische Jesuitenpater GIROLAMO SACCHERI (1667–1733) betrachtete die nach ihm benannten Vierecke, um das 5. Postulat aus den übrigen Axiomen und Postulaten EUKLIDS herzuleiten. Es gelang ihm, die „Hypothese des stumpfen Winkels“ zum Widerspruch zu führen. Um nun die „Hypothese des rechten Winkels“ zu erhalten, wollte er die „Hypothese des spitzen Winkels“ ebenfalls ausschließen. Sein Widerspruch beruhte jedoch auf einem Fehler. Die „Hypothese des rechten Winkels“ kann nur als Axiom das 5. Postulat herleitbar machen. — Ähnlich ging der Schweizer Mathematiker JOHANN HEINRICH LAMBERT (1728–1777) an das Parallelenproblem heran; er untersuchte Vierecke mit drei rechten Winkeln, zeigte, daß die Hypothese des rechten Winkels für diese Vierecke zum 5. Postulat äquivalent ist, die Hypothese des stumpfen Winkels zum Widerspruch führt, und vermutete, daß sich die Hypothese des spitzen Winkels nicht zum Widerspruch führen läßt. Wir zeigen hier

Satz 2.9. *Das 5. Postulat Euklids ist zu jeder der folgenden Aussagen äquivalent:*

- (2) *Jedes Viereck mit drei rechten Winkel ist ein Rechteck* (Rechtseitsatz).
- (3) *Jedes Saccherische Viereck ist ein Rechteck* (Hypothese des rechten Winkels).
- (3') *Wenigstens ein Saccherisches Viereck ist ein Rechteck.*
- (R) *Es gibt ein Rechteck.*¹⁾

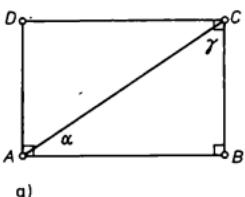
Beweis. a) Aus dem 5. Postulat folgt (2): Es sei $ABCD$ ein Viereck mit rechten Winkeln bei A , B und C (Abb. 51a). Bezeichnen wir die Winkelgrößen im Dreieck

¹⁾ Aus der Existenz eines Rechtecks hat der französische Mathematiker ALEXIS CLAUDE CLAIRAUT (1713–1765) die Parallellentheorie entwickelt.

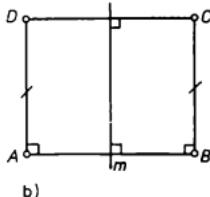
ABC wie üblich, dann gilt $\alpha + \gamma = R$, da wir nach dem Satz 2.8 speziell (1) benutzen dürfen. Nach (1) ist

$$2R - ((R - \alpha) + (R - \gamma)) = 2R - (2R - (\alpha + \gamma)) = R$$

die Größe des Winkels bei D .



a)



b)

Abb. 51

b) Aus (2) folgt (3): Ist $ABCD$ ein Saccherisches Viereck mit rechten Winkeln bei A und B sowie mit $AD \cong BC$, dann ist die Mittelsenkrechte m von AB eine Symmetrieachse des Vierecks $ABCD$. Nach (2) — angewandt auf die entstandenen Teilvierecke (Abb. 51b) — liegen bei C und D rechte Winkel.

c) Aus (3) folgt trivialerweise (3').

d) Aus (3') ergibt sich (R).

e) Gilt (R), so gilt auch (1): Es sei $ABCD$ ein Rechteck. Bezeichnen wir wieder die Winkelgrößen im Dreieck ABC wie üblich und wenden den Zusatz zum Satz 2.4 auf die rechtwinkligen Dreiecke ABC und ACD an, dann ergibt sich

$$\alpha + \gamma \leq R, \quad (R - \alpha) + (R - \gamma) \leq R.$$

Aus der zweiten Ungleichung erhalten wir $R \leq \alpha + \gamma$. Mit

$$R \leq \alpha + \gamma \leq R$$

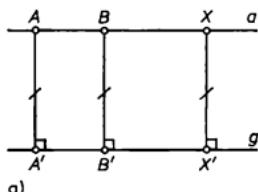
gilt $\alpha + \gamma = R$. Da $\alpha + \beta + \gamma = 2R$ für das Dreieck ABC besteht, haben wir (1) nach dem Satz 2.6.

Da nach dem Satz 2.8 die Aussage (1) das 5. Postulat nach sich zieht, ist somit der Satz vollständig bewiesen.

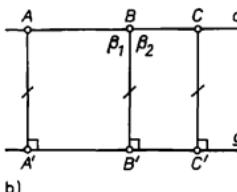
Die Hypothese des rechten Winkels für Saccherische Vierecke gestattet uns, eine Aussage über Abstandslinien zu machen. Es seien A, B, X drei Punkte einer Abstandslinie a einer Geraden g und A', B', X' die Fußpunkte der Lote von A, B bzw. X auf g (Abb. 52a). Dann sind $A'B'BA$ und $B'X'XB$ Saccherische Vierecke; nach der Hypothese des rechten Winkels sind A, B, X kollinear, d. h. $a \subseteq g_{AB}$. Wie man leicht sieht, gilt sogar $a = g_{AB}$.

Gibt es eine Abstandslinie a einer Geraden g mit drei kollinearen Punkten A, B, C , dann bilden diese Punkte gemeinsam mit dem Lotfußpunkt A', B' bzw. C' Saccherische Vierecke. Es sei etwa $B \in AC$. Sind dann β_1, β_2 die Größen der Winkel

bei B in den genannten Vierecken (Abb. 52b), dann gilt einerseits $\beta_1, \beta_2 \leq R$ nach dem Satz 2.7 und andererseits $\beta_1 + \beta_2 = 2R$; daraus folgt $\beta_1 = \beta_2 = R$ und somit (3'). Nach dem Satz 2.9 gilt dann für Saccherische Vierecke die Hypothese des rechten Winkels und schließlich das 5. Postulat EUKLIDS.



a)



b)

Abb. 52

Aus diesen Überlegungen erhält man leicht den

Satz 2.10. *Das 5. Postulat Euklids ist zu jeder der folgenden Aussagen äquivalent:*

- (4) *Die Abstandslinien sind Geraden.¹⁾*
- (4') *Die Punkte der Abstandslinien sind kollinear.*
- (4'') *Es gibt eine Abstandslinie, die drei kollineare Punkte enthält.*

Verbindet man die Seitenmittelpunkte eines Dreiecks, dann entstehen vier Teildreiecke; in der euklidischen Geometrie erweisen sich diese Dreiecke als zum Ausgangsdreieck ähnlich, insbesondere haben sie die Innenwinkelgrößen α, β, γ^2 (Abb. 53a).

Um diesen Sachverhalt in seiner Bedeutung für die euklidische Geometrie noch deutlicher zu machen, setzen wir nun voraus, daß zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ mit $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ und $\gamma = \gamma'$ existieren, die nicht kongruent sind. Nach wsw gilt $a \neq a'$, $b \neq b'$ und $c \neq c'$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $C' = C$ und $A' \in CA^+$, $B' \in CB^+$ voraussetzen (Abb. 53b). Von den Mittelpunkten $M := M(A, A')$ und $N := M(B, B')$ fallen wir die Lote auf g_{AB} . Indem wir die Lotfuß-

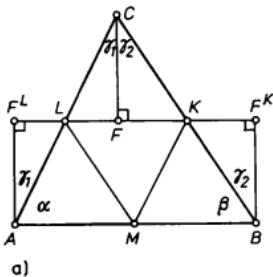
¹⁾ Einen „Beweis“ des 5. Postulates mit Hilfe von (4) besaßen nach [15] der in Rom wirkende griechische Gelehrte POSEIDONIOS (135?–51 v. u. Z.), der armenisch-byzantinische Mathematiker AGANIS (5.–6. Jh.), der in Bagdad lebende THÄBIT IBN QUBRA (908–946) und HASÄN IBN AL-HAITHAM (ALHAZEN, etwa 965–1039) in Kairo. Im Zusammenhang mit dem Parallelensproblem hat bereits CHRISTOPH CLAVIUS (1537–1612) diese Aussage betrachtet. Dieser deutsche Mathematiker trat 1555 dem Jesuiten-Orden bei und lehrte mehrere Jahrzehnte im römischen Collegium Germanicum Mathematik. Im Jahre 1574 erschien von ihm in Rom eine Ausgabe der Elemente des EUKLID mit Erläuterungen.

²⁾ Sind K, L und M die Mittelpunkte von BC , CA bzw. AB , dann können wir wie folgt die Übereinstimmung in den entsprechenden Winkelgrößen beweisen. Es sei F der Fußpunkt des Lotes von C auf g_{KL} . Wir spiegeln die Dreiecke CFK und CFL an K bzw. L und erhalten ein Saccherisches Viereck $FKFL'AB$, für das in der euklidischen Geometrie (Hypothese des rechten Winkels) $\alpha + \gamma_1 = \beta + \gamma_2 = R$ gilt, d. h. $\not\propto KLC \in \alpha$ und $\not\propto LKC \in \beta$. – Analog erhalten wir die Behauptungen bezüglich der Dreiecke AML und BKM ; daraus folgt dann die Behauptung bezüglich des Dreiecks KLM . (Vgl. auch Aufgabe 1.)

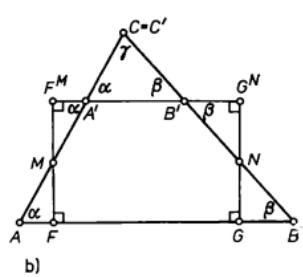
punkte F bzw. G an M bzw. N spiegeln, erhalten wir wegen $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ ein Rechteck $FGGNFM$. Nach dem Satz 2.9 gilt das 5. Postulat. Zusammenfassend haben wir den

Satz 2.11. Das 5. Postulat Euklids gilt genau dann, wenn

- (5) *es zwei nicht kongruente Dreiecke ABC und $A'B'C'$ mit $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ und $\gamma = \gamma'$ gibt.¹⁾*



a)



b)

Abb. 53

Die Ptolemäische Form des Parallelenaxioms — zu jeder Geraden gibt es durch jeden Punkt genau eine Parallel — fand mit den englischen Euklid-Ausgaben für Schulzwecke weite Verbreitung, besonders durch J. PLAYFAIR, Elements of geometry containing the first six books of Euclid, Edinburgh and London 1797²⁾). Diese Form des Parallelenaxioms wird in England und Amerika meist Playfairsches Axiom genannt. Die Eindeutigkeit der Parallelen zu einer Geraden durch einen Punkt wurde auch von HILBERT in seinen *Grundlagen der Geometrie* als Axiom verwendet; dieses einfach formulierte Inzidenzaxiom ist in modernen Darstellungen der euklidischen Geometrie häufig anzutreffen. Mit ihm wollen wir sogleich einige weitere Aussagen zur Kennzeichnung der euklidischen Geometrie angeben.

Satz 2.12. Das 5. Postulat Euklids ist zu jeder der folgenden Aussagen äquivalent:

- (EP) *Zu jeder Geraden gibt es durch jeden Punkt höchstens eine Parallel (Euklidisches Parallelenaxiom).*
- (6) *Es gibt eine Gerade g und außerhalb von g einen Punkt P , durch den höchstens eine Parallel zu g geht.*
- (T) *Die Parallelität der Geraden ist transitiv.³⁾*

Folgerung. Das 5. Postulat gilt genau dann, wenn

- (7) *zwei parallele Geraden beim Schnitt mit einer dritten Geraden stets kongruente Wechsel- bzw. Stufenwinkel bilden.*

¹⁾ Es war bereits dem Oxford-Geometrie-Professor JOHN WALLIS (1616–1703) bekannt, daß das 5. Postulat gilt, wenn es zu jeder Figur „beliebig große“ ähnliche Figuren gibt.

²⁾ JOHN PLAYFAIR (1748–1819).

³⁾ Statt der Transitivität kann ohne weiteres die Drittengleichheit genommen werden: *Sind zwei Geraden einer dritten parallel, dann sind sie untereinander parallel.*

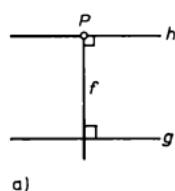
(Die Umkehrung von (7) gilt in der absoluten Geometrie, etwa nach dem Satz vom Außenwinkel — ähnlich wie die Umkehrung des 5. Postulats als Folgerung dieses Satzes 1.33.)

Beweis. Wir zeigen zunächst

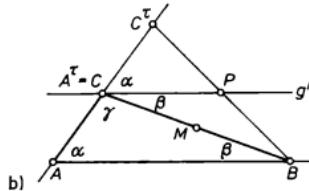
A. 5. Postulat \Rightarrow (EP) \Rightarrow (6) \Rightarrow 5. Postulat.

a) Unter der Voraussetzung des 5. Postulates betrachten wir in einer Ebene ε eine Gerade g und einen Punkt P und fällen von P das Lot f auf g (Abb. 54a). Nach dem 5. Postulat kann in ε nur die Senkrechten h zu f in P parallel zu g sein.

b) Aus (EP) folgt trivialerweise (6).



a)



b)

Abb. 54

c) Es sei $C \notin g = g_{AB}$ und g' die einzige Parallele zu g durch C . Wir verschieben $\not\propto BAC$ längs g_{AC} , bis der Scheitel in C fällt, d. h. $A' = C$ (Abb. 54b). Nach dem Satz vom Außenwinkel trifft $(AB^+)^*$ die Strecke BC^* in einem Punkt P ; wegen $g \cap g' = \emptyset$ muß $P \in BC^* \cap g'$ sein. — Bei der Spiegelung am Mittelpunkt M von BC erhalten wir analog $\not\propto PCB \in \beta$. Es gilt folglich $\alpha + \beta = \gamma' = 2R - \gamma$ und $\alpha + \beta + \gamma = 2R$ für ein Dreieck ABC .¹⁾ Nach der Folgerung aus 2.8 ist das zum 5. Postulat äquivalent.

B. Es gilt $(EP) \Leftrightarrow (T)$.

a) Um (EP) aus (T) herzuleiten, bemerken wir, daß \parallel nach (T) in der Menge der Geraden eine Äquivalenzrelation ist. Es sei nun $P \in f_1, f_2 \parallel g$. Dann gilt $P \in f_1, f_2$ und $f_1 \parallel f_2$; daraus folgt $f_1 = f_2$ nach der Definition der Parallelität.

b) Wir setzen nun (EP) voraus. Es sei $f \parallel g$ und $g \parallel h$. Für $f = g$ oder $g = h$ ist die Behauptung $f \parallel h$ trivial. Nun sei $f \neq g, g \neq h, \varepsilon := \varepsilon_{fg}$ und $\zeta := \varepsilon_{gh}$.

Im Fall $f \cap h \neq \emptyset$ folgt $f = h$ nach (EP) und somit $f \parallel h$. Es sei nun $f \cap h = \emptyset$. Der Beweis von $f \parallel h$ ist erbracht, sobald die Komplanarität von f, h nachgewiesen ist. Hierbei ist der Fall $\varepsilon = \zeta$ trivial. Schließlich sei $\varepsilon \neq \zeta$, $P \in h$ und $\eta := \varepsilon_{Ph}$ (Abb. 55). Wie man leicht sieht, gilt $\eta \neq \zeta$, so daß $\zeta \cap \eta$ wegen $P \in \zeta, \eta$ eine Gerade ist. Es gilt $g \cap (\zeta \cap \eta) = g \cap \eta = \emptyset$; als zu g parallele Geraden in ζ fallen $h, \zeta \cap \eta \ni P$ nach (EP) zusammen. Somit gilt schließlich $f, h \subset \eta$.³⁾

¹⁾ Unter der Voraussetzung von (EP) liefern diese Überlegungen $\alpha + \beta + \gamma = 2R$ für alle Dreiecke.

²⁾ Andernfalls erhält man $P \in \eta = \varepsilon$ und $\varepsilon = \varepsilon_{Ph} = \zeta$ im Widerspruch zur Fallvoraussetzung.

³⁾ Nach einer Analyse der bisherigen Beweise empfiehlt sich zur Charakterisierung der euklidischen Geometrie das folgende Axiom: *Sind zwei Geraden einer dritten parallel, dann sind sie untereinander parallel.*

C. Es gilt (EP) \Leftrightarrow (7).

a) Unter der Voraussetzung von (EP) seien zwei parallele Geraden f, g gegeben, die von einer Geraden h in A bzw. B geschnitten werden (Abb. 56). Es sei M der Mittelpunkt von AB . Aus $B \in f^M, g$ und $f \parallel f^M, g$ folgt nach (EP) zunächst $f^M = g$. Ist $f = g_{AP}$, dann gilt $P^M \in g$ und $\sphericalangle BAP \cong \sphericalangle (BAP)^M = \sphericalangle ABP^M$, d. h., $\sphericalangle A$ und $\sphericalangle B$ sind kongruente Wechselwinkel.

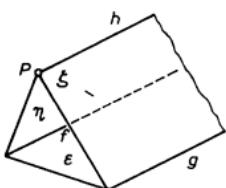


Abb. 55

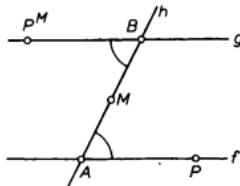


Abb. 56

b) Um abschließend (EP) aus (7) herzuleiten, betrachten wir eine Gerade $f = g_{AP}$ und einen Punkt $B \notin f$ sowie den Mittelpunkt M von AB . Es sind $\sphericalangle BAP$ und $\sphericalangle ABP^M$ kongruente Wechselwinkel. Wegen der Eindeutigkeit des Winkelantragens muß jede Parallele zu f durch B nach (7) auch durch P^M gehen. Somit gilt (EP) im Fall $B \notin f$. — Im Fall $B \in f$ ist (EP) trivial, w. z. b. w.

Ist $\sphericalangle POQ$ ein Winkel, dessen Schenkel nicht in einer Geraden liegen, dann können wir mit Hilfe des 5. Postulates durch jeden Punkt $X \in OPQ^+ \cap OQP^+$ eine Gerade legen, die beide Schenkel trifft: Ist nämlich w die Winkelhalbierende von $\sphericalangle POQ$ und f das Lot von X auf w (Abb. 57a), dann trifft f nach dem 5. Postulat beide Schenkel des Winkels.

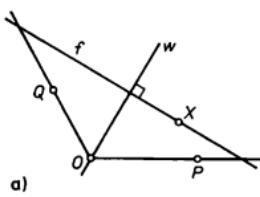
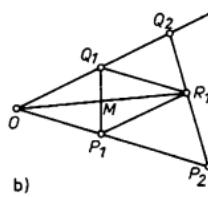


Abb. 57



Aus dieser Aussage hat der französische Mathematiker ADRIEN MARIE LEGENDRE (1752–1833) das 5. Postulat gefolgt.¹⁾ — Es gelte diese Aussage für wenigstens einen (evtl. „sehr“ spitzen Winkel) $\sphericalangle P_1OQ_1$; das Bild des Scheitels O bei der Spiegelung am Mittelpunkt M von P_1Q_1 werde mit R_1 bezeichnet (Abb. 57b). Wenn es eine Gerade durch R_1 gibt, die OP_1^+ und OQ_1^+ trifft, dann existiert auch eine Gerade,

¹⁾ Nach [15] sind Mathematiker vor LEGENDRE auch schon etwa denselben Weg gegangen: der griechische Mathematiker SIMPLIKIOS (6. Jh.), der in Bagdad wirkende SAI'D AL-ĞAŪHĀRĪ (9. Jh.) und der in Mittelasien schaffende SAMS AD-DĪN AS SAMARKANDI (13. Jh.).

die P_1O^- und Q_1O^- schneidet, etwa in P_2 bzw. Q_2 . Nach dem Satz 2.5(b, c) gilt

$$\begin{aligned}\delta(OP_2Q_2) &= \delta(OP_2R_1) + \delta(OQ_2R_1) \\ &= \delta(P_1P_2R_1) + \delta(MP_1R_1) + \delta(MOP_1) \\ &\quad + \delta(Q_1Q_2R_1) + \delta(MQ_1R_1) + \delta(MOQ_1) \\ &= \delta(P_1P_2R_1) + \delta(Q_1Q_2R_1) + \delta(P_1Q_1R_1) + \delta(OP_1Q_1) \\ &= \delta(P_1P_2R_1) + \delta(Q_1Q_2R_1) + 2\delta(OP_1Q_1)\end{aligned}$$

und folglich $\delta(OP_2Q_2) > 2\delta$ mit $\delta := \delta(OP_1Q_1)$. Indem wir dieses Verfahren mehrfach wiederholen, erhalten wir ein Dreieck OP_nQ_n mit $\delta(OP_nQ_n) > 2^{n-1}\delta$. Nach dem Satz 2.5(a) erhielten wir

$$R \geq \frac{1}{2} \delta(OP_nQ_n) > 2^{n-2}\delta \quad \text{und} \quad \frac{R}{2^{n-2}} > \delta$$

für alle natürlichen Zahlen n d. h. $\delta = 0$ nach Satz 2.3. Insgesamt gilt der

Satz 2.13. *Das 5. Postulat Euklids ist zu jeder der folgenden Aussagen äquivalent:*

- (8) *Gilt $X \in OPQ^+ \cap OQP^+$, dann gibt es eine Gerade durch X , die beide Schenkel von $\not\propto POQ$ trifft.*
- (8') *Es gibt einen Winkel $\not\propto POQ$ mit $Q \notin g_{OP}$ derart, daß durch jeden Punkt $X \in OPQ^+ \cap OQP^+$ eine Gerade existiert, die beide Schenkel von $\not\propto POQ$ schneidet.*

In jüngerer Zeit sind Charakterisierungen der euklidischen Geometrie mit Hilfe von Abbildungen angegeben worden. Wir wollen zum Abschluß des Abschnittes wenigstens einige solcher Möglichkeiten ins Auge fassen.

Satz 2.14. *Das 5. Postulat ist zu jeder der folgenden Aussagen äquivalent:*

- (9) *Das Produkt von je drei ebenen¹⁾ Punktspiegelungen ist eine ebene Punktspiegelung.*
- (9') *Es gibt nicht kollineare Punkte A, B, C derart, daß die Nacheinanderausführung der Spiegelungen an diesen Punkten in ϵ_{ABC} eine ebene Punktspiegelung ist.*
- (10) *Die Nacheinanderausführung von ebenen¹⁾ Verschiebungen führt wieder zu ebenen Verschiebungen.*

Beweis. Wir beweisen zunächst

A. 5. Postulat \Rightarrow (9) \Rightarrow (9') \Rightarrow 5. Postulat.

a) Es seien A, B, C drei beliebige Punkte in einer Ebene, ferner sei $f := g_{AB}$, c das Lot von C auf f , a und b die Senkrechten zu f in A bzw. B und g die Senkrechte zu c in C (Abb. 58a). Nach dem Dreispiegelungssatz gibt es eine Gerade $d \perp f$ mit $\sigma_a \sigma_b \sigma_c = \sigma_d$. Wenn wir das 5. Postulat und somit den Rechtseitsatz (Satz 2.9 (2))

¹⁾ Diese Aussagen können auch als Aussagen über Spiegelungen bzw. Verschiebungen des Raumes ausgesprochen werden.

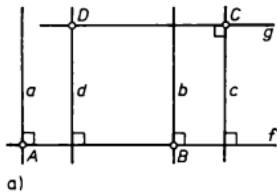
voraussetzen, dann gilt noch $d \perp g$. Unter Berücksichtigung des Satzes 1.13 erhalten wir

$$\sigma_A \sigma_B \sigma_C = \sigma_a \sigma_f \sigma_b \sigma_c \sigma_g = \sigma_d \sigma_g,$$

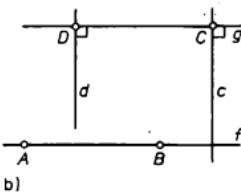
d. h., $\sigma_A \sigma_B \sigma_C$ ist die Spiegelung an dem Schnittpunkt von d und g .

b) Die Implikation $(9) \Rightarrow (9')$ ist trivial.

c) In ε_{ABC} sei $\sigma_A \sigma_B \sigma_C = \sigma_D$. Wir setzen $f := g_{AB}$ und $g := g_{CD}$ und betrachten die Senkrechten c, d auf g in C bzw. D (Abb. 58b). Nach dem Satz 1.13 gilt $\sigma_A \sigma_B \sigma_c = \sigma_d$, so daß $c, d \perp f$ nach dem Hilfssatz 1.17 ist, d. h., daß c, f, d, g ein Rechtseit bilden. Aus (R) folgt aber das 5. Postulat nach dem Satz 2.9.



a)

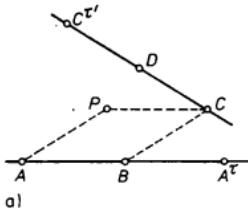


b)

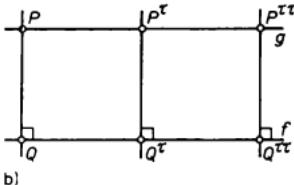
Abb. 58

B. Nach dem Satz 2.10 genügt es, nun $(9) \Rightarrow (10) \Rightarrow (4'')$ zu zeigen.

Sind in ε zwei Verschiebungen τ und τ' gegeben, dann existieren Punkte A, B, C, D mit $\tau = \sigma_A \sigma_B$ und $\tau' = \sigma_C \sigma_D$; folglich ist $\tau \tau' = \sigma_A \sigma_B \cdot \sigma_C \sigma_D = \sigma_A \sigma_B \sigma_C \cdot \sigma_D$ nach (9) eine Verschiebung, weil $\sigma_A \sigma_B \sigma_C$ Spiegelung an einem Punkt P ist (vgl. Abb. 59a).



a)



b)

Abb. 59

Wir betrachten eine Verschiebung τ ($\neq 1$) längs f und einen Punkt $P \notin f$ (Abb. 59b). Es gibt eine Verschiebung τ' mit $(P^{\tau'})' = P$. Wenn wir $\tau \tau'$ nach (10) als Verschiebung voraussetzen, dann muß $\tau' = \tau^{-1}$ und $\tau = \tau'^{-1}$ gelten, d. h., daß τ Verschiebung längs f und längs $g := g_{PP'}$ ist. Damit enthält die Abstandslinie zu f durch P mehr als zwei Punkte von g , etwa $P, P^{\tau}, P^{\tau'}$, w. z. b. w.

Aufgaben

1. Man verbinde die Seitenmittelpunkte eines Dreiecks ABC und zeige unter Voraussetzung des 5. Postulates, daß bei geeigneter Zuordnung die Seiten der Teildreiecke halb so lang wie die des Ausgangsdreiecks sind.

Anleitung: Vgl. die Fußnote 2 auf S. 68.

2. Man beweise, daß in der absoluten Geometrie das Produkt einer Verschiebung längs f und einer Verschiebung längs g eine Verschiebung ist, wenn f und g einen gemeinsamen Punkt P haben.

2.1.3. Das Lobačevskische Parallelenaxiom

Wir knüpfen hier an die einleitenden, knappen Ausführungen zum Kapitel 1 an. Das 5. Postulat, EUKLIDS ist in seinen *Elementen* (etwa 325 v. u. Z.) enthalten. In ihnen wurde nicht nur das mathematische Wissen seiner Zeit in der Sprache der Geometrie zusammengefaßt, sondern es wurde, ausgehend von „Definitionen“, „Postulaten“ und „Axiomen“, streng logisch hergeleitet. Um die kulturgeschichtliche Bedeutung dieses Werkes wenigstens anzudeuten, sei bemerkt, daß die *Στοιχεῖα* zu den Büchern mit den meisten Übersetzungen und Auflagen gehört, und zwar unter den Büchern aller Zeiten.

Bis in unsere Zeit galten die *Elemente* bezüglich der logischen Strenge als muster-gültig, mustergültig nicht nur in der Mathematik. Trotzdem hatten die Mathematiker von Anfang an Bedenken gegen die Aufnahme des 5. Postulates in das System der Axiome und Postulate. Vielleicht hat nur seine Länge dazu Anlaß gegeben, vielleicht war der Umstand ausschlaggebend, daß seine Umkehrung beweisbar ist (vgl. die Folgerung aus dem Satz vom Außenwinkel); vielleicht hat EUKLID dadurch Bedenken aufkommen lassen, daß er die ersten 28 Sätze ohne sein 5. Postulat beweist. Wie es auch gewesen sein mag, haben sich doch 2000 Jahre lang bedeutende Mathematiker mit dem sogenannten Parallelenproblem beschäftigt. Bei den zahlreichen¹⁾ Versuchen, EUKLIDS 5. Postulat mit Hilfe der übrigen Postulate und Axiome EUKLIDS zu beweisen, wurde letzten Endes immer eine Aussage benutzt, die dem 5. Postulat gleichwertig ist. Solche Aussagen und Hinweise auf ihre Quellen sind im vorigen Abschnitt 2.1.2 enthalten.

Einer der größten Mathematiker aller Zeiten, CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855), auch ehrenvoll *princeps mathematicorum* genannt, besaß reiches Material zur Überprüfung der euklidischen Geometrie aus der Praxis der Landesvermessung: Auch beim größten von ihm ausgemessenen Dreieck Brocken–Inselsberg–Hohehagen (bei Göttingen), bei dem die Entfernung Brocken–Inselsberg mehr als 100 km mißt, lag die Abweichung in den Fehlern²⁾.

Bis zu Beginn des 19. Jahrhunderts wurde versucht, das 5. Postulat EUKLIDS aus den übrigen Postulaten und Axiomen in den *Elementen* herzuleiten. Diese nüchterne Feststellung trifft noch nicht ganz den Kern der Bemühungen; worum es darüber hinaus ging, wird vorzüglich durch den Titel der Saccherischen Arbeit zur Parallelenfrage ausgedrückt: „Euclides ab omni naevo vindicatus“, von jedem Makel befreiter EUKLID (Mailand 1733). Wie schon oben erwähnt, hatte SACCHERI

¹⁾ Nach [14] gibt es mehr als 250 ernst zu nehmende Abhandlungen.

²⁾ Nach SABTORIUS von Waltershausen (vgl. [18], S. 267). Mitunter wird jedoch die Meinung vertreten, daß GAUSS als Astronom nach seinen erfolgreichen Berechnungen von Planetenbahnen keine Zweifel an der näherungsweisen Gültigkeit der euklidischen Geometrie auf der Erde gehabt haben könne.

auf Grund eines Fehlers gleich zahlloser anderer Mathematiker vor und nach ihm das Ziel nicht erreicht. Nach zwei Jahrtausenden mißglückter Beweisversuche ist es verständlich, daß der Ungar FARKAS BOLYAI (1775—1856) seinem Sohn JÁNOS davon abrat, sich mit dem Parallelenproblem zu beschäftigen:

„Versuche die Parallelen auch Du nicht, ich bitte Dich; denn alle Deine Zeit würdest Du dabei verschwenden. Den Satz werdet ihr alle mitsammen nicht beweisen. Versuche die Ergründung der Parallelen weder auf dem mir mitgetheilten noch auf einem andern Wege. Versuche es nicht, nie wirst Du zeigen, dass die obere Gerade von Strecke zu Strecke um gleiche Winkel gegen die untere gedreht, diese je schneiden werde. Ich kenne alle Wege bis ans Ende; ich habe keine Idee angetroffen, die ich nicht schon bearbeitet hätte. Ich durchmaass diese grundlose Nacht, und alles Licht, alle Freude meines Lebens erstarb in ihr. Ich bitte Dich um Gottes Willen! lass ab von der Materie der Parallelen — entsetze Dich davor nicht weniger als vor welch' immer für einen lüderlichen Umgang, sie kann Dich ebenso aller Deiner Zeit, Gesundheit, Ruhe und Deines ganzen Lebensglückes berauben. Jene grundlose Finsterniss verschlingt gar wohl tausend NEWTONsche Riesenthürme. Nie wird sie erhellt auf Erden, und nie wird das arme Menschengeschlecht etwas vollkommen Reines besitzen, auch in der Geometrie nicht. Eine grosse und ewige Wunde ist dies in meiner Seele. Gott bewahre Dich davor, dass dies sich bei Dir jemals so tief einfresse. Dies benimmt einem die Lust zur Geometrie, zum irdischen Leben. Ich hatte mir vorgenommen, mich aufzuopfern für die Wahrheit, und bereit wäre ich gewesen, ein Märtyrer zu werden, um nur die Geometrie von diesem Flecken gereinigt dem menschlichen Geschlechte übergeben zu können. Ich habe riesenhafte Arbeiten unternommen, nichts unversucht gelassen. Ich lieferte weit Besseres, als bis dahin geleistet wurde, aber völlige Befriedigung fand ich nicht, da auch hier das: *Si paullum a summo discesseris, vergis ad imum*¹⁾ Anwendung findet. Als ich einsah, dass der Grund dieser Nacht von der Erde aus nicht erreichbar ist, kehrte ich um, trostlos, mich und das arme Menschengeschlecht bejammernd. Lerne Du an meinem Beispiel. Ich blieb strebend die Parallelen zu erkennen unwissend. Das raubte alle Blüthe meines Lebens und meiner Zeit, ja darin wurzelte der Grund aller meiner nachherigen Fehler, und aus den trüben Wolken häuslicher Verhältnisse regnete es darauf.“ (Aus einem Brief, den der Vater 1820 an den Sohn richtete, vgl. [48], S. 3/4).

In einem 1831 veröffentlichten Anhang zu einem Geometriebuch des Vaters konnte J. BOLYAI (1802—1860), zeigen, daß eine Geometrie denkbar ist, in der es zu einer Geraden durch einen nicht in ihr liegenden Punkt mehr als eine Parallele gibt. Doch schon im Jahre 1826 hatte der geniale russische Mathematiker LOBAČEVSKIJ seiner Fakultät der Kasaner Universität die Lösung des Parallelenproblems vorgelegt. Daß die Zeit zur Lösung dieses Problems reif war, kommt schließlich auch darin zum Ausdruck, daß GAUSS sich seit 1792 mit dieser Frage beschäftigt hatte und seit etwa 1816 eine nichteuklidische Geometrie besaß; das wissen wir nach der Veröffentlichung des Nachlasses, aus Briefen konnten es Freunde erahnen:

„.... Auch über ein anderes Thema, das bei mir schon fast 40 Jahr alt ist, habe ich zuweilen in einzelnen freien Stunden wieder nachgedacht, ich meine die ersten

¹⁾ Wenn man vom Gipfel abweicht, gleitet man ganz in die Tiefe.

Gründe der Geometrie: ich weiss nicht, ob ich Ihnen je über meine Ansichten darüber gesprochen habe. Auch hier habe ich manches noch weiter consolidirt, und meine Überzeugung, dass wir die Geometrie nicht vollständig a priori begründen können, ist, wo möglich, noch fester geworden. Inzwischen werde ich wohl noch lange nicht dazu kommen, meine sehr ausgedehnten Untersuchungen darüber zur öffentlichen Bekanntmachung auszuarbeiten, und vielleicht wird diess auch bei meinen Lebzeiten nie geschehen, da ich das Geschrei der Böötier¹⁾ scheue, wenn ich meine Ansicht ganz aussprechen wollte ...“ (Aus einem Brief an BESEL vom 29. 1. 1829, vgl. [18], S. 200.)

Dieses Zitat deutet an, daß die neue Geometrie das Umdenken sowohl von seiten der Mathematik als auch von seiten der Philosophie erforderte.

Wir wenden uns zunächst der mathematischen Seite des Umdenkens zu. Seit SACCHERI versuchte man vielfach, das 5. Postulat EUKLIDS indirekt zu beweisen. Die Entdecker der nichteuklidischen Geometrie, der Lobačevskischen Geometrie, gingen ebenfalls von der Verneinung des 5. Postulates aus, aber sie strebten keinen Widerspruch an, sondern entwickelten die neue Theorie. Doch welche Konsequenzen hat das Lobačevskische Parallelenaxiom, das wir hier als $\neg (EP)$ formulieren:

(LP) Es gibt eine Gerade g und einen Punkt P , durch den wenigstens zwei Parallelen zu g existieren.

Als Antwort können wir sofort sagen, daß dann die Negation aller zu (EP) bzw dem 5. Postulat EUKLIDS äquivalenten Aussagen herleitbar ist. Nach dem Satz 2.4 und dem Satz 2.8(1') erhalten wir den

Satz 2.8'. In der Lobačevskischen Geometrie gilt $\alpha + \beta + \gamma < 2R$ bzw. $\delta(ABC) > 0$ für alle Dreiecke ABC .

In der nichteuklidischen Geometrie kann $\alpha + \beta + \gamma$ nicht für alle Dreiecke ABC ein und dieselbe Konstante sein, da konstante Defekte mit dem Satz 2.5(b) unverträglich sind. Für „hinreichend kleine“ Dreiecke unterscheidet sich darüber hinaus $\alpha + \beta + \gamma$ beliebig wenig von $2R$: Ist ABC ein beliebiges Dreieck, dann können wir o. B. d. A. $\alpha, \beta \leq \gamma$ voraussetzen. Folglich hat das Lot von C auf g_{AB} einen Fußpunkt F_0 zwischen A und B (Abb. 60).

Wir überlassen es dem Leser, folgendes zu zeigen (vgl. Aufgabe 1): In der Ebene des Dreiecks trifft die Mittelsenkrechte von CF_0 die Seiten AC und BC in Punkten A_1 bzw. B_1 , und es gilt $\delta(A_1B_1C) < \frac{1}{2} \delta(ABC)$. — Indem wir diese Konstruktion wiederholen, erhalten wir eine Folge A_1B_1C, A_2B_2C, \dots von Dreiecken mit $\delta(A_nB_nC) < \frac{1}{2^n} \delta(ABC)$. Nach dem Satz 2.3 gibt es zu jeder Winkelgröße $\delta > 0$ eine natürliche

¹⁾ Böötien ist eine Landschaft in Mittelgriechenland, deren Bevölkerung in der Antike als gefräßig und denkfaul galt. Im zitierten Zusammenhang wird Böötier im übertragenen Sinne auf Menschen mit Bildung angewandt, die weder fähig noch bereit gewesen wären, sich von der euklidischen Geometrie zu lösen (und das waren fast alle!).

Zahl k mit

$$2R - (\alpha_k + \beta_k + \gamma) = \delta(A_k B_k C) < \frac{1}{2^k} \delta(ABC) \leq \delta.$$

Nicht so einfach läßt sich zeigen, daß auch Dreiecke ABC mit $\alpha + \beta + \gamma < \delta$ für beliebiges $\delta < 2R$ existieren.

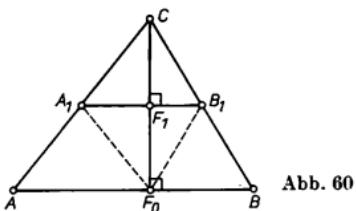


Abb. 60

Welche weiteren Aussagen widersprechen der Anschauung eines nur an der euklidischen Geometrie geschulten Menschen? Nach den Sätzen 2.7, 2.9(3') und 2.9(R) erhalten wir den

Satz 2.9'. *In der Lobačevskijschen Geometrie gilt für Saccherische Vierecke die Hypothese des spitzen Winkels; in ihr gibt es keine Rechtecke und damit erst recht keine Quadrate, zwei Geraden haben höchstens ein gemeinsames Lot.*

Aus den Sätzen 2.10(4') und 2.10(4'') folgt der

Satz 2.10'. *In der Lobačevskijschen Geometrie sind die Abstandslinien gekrümmt; eine Abstandslinie hat mit einer Geraden höchstens zwei Punkte gemeinsam.¹⁾*

Indem wir (5) verneinen, erhalten wir einen weiteren Dreiekskongruenzsatz:

Satz 2.11'. *In der Lobačevskijschen Geometrie sind Dreiecke ABC und $A'B'C'$ mit $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ und $\gamma = \gamma'$ kongruent, genauer: Unter der Voraussetzung $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ und $\gamma = \gamma'$ gibt es eine Bewegung τ des Dreiecks ABC mit $A' = A'$, $B' = B'$ und $C' = C'$ (www).*

Nach dem Satz 2.12 und dem Axiom (LP) wird die Parallelenfrage im engeren Sinne wie folgt beantwortet:

Satz 2.12'. *In der Lobačevskijschen Geometrie gibt es zu jeder Geraden g durch jeden Punkt außerhalb von g wenigstens zwei (und damit unendlich viele) Parallelen zu g . Die Parallelität der Geraden ist keine Äquivalenzrelation, weil sie nach (LP) nicht transitiv ist bzw. nicht der Drittengleichheit genügt. Schließlich können zwei parallele Geraden beim Schnitt mit einer dritten Geraden inkongruente Stufen- bzw. Wechselwinkel bilden.*

¹⁾ Im folgenden Abschnitt 2.2 werden wir noch weitere Gemeinsamkeiten von Kreisen und Abstandslinien aufdecken.

Bezüglich der Legendreschen Aussage über Winkel können wir nach dem Satz 2.13(8') hier feststellen:

Satz 2.13'. *In der Lobačevskischen Geometrie gibt es zu jedem Winkel $\not\prec POQ$ mit $Q \notin g_{OP}$ wenigstens einen Punkt $X \in OPQ^+ \cap OQP^+$ derart, daß keine Gerade durch X beide Schenkel von $\not\prec POQ$ schneidet.*

Schließlich gilt bezüglich der Aussagen über Bewegungen nach dem Zusatz zum Satz 1.15 sowie nach den Sätzen 2.14(9') und 2.14(10) der

Satz 2.14'. *In der Lobačevskischen Geometrie sind Punkte A, B, C einer Ebene genau dann kollinear, wenn $\sigma_A \sigma_B \sigma_C$ eine ebene Punktspiegelung ist. Außerdem gibt es Verschiebungen einer Ebene, deren Produkt keine Verschiebung ist, so daß die ebenen Verschiebungen keine Gruppe bilden.*

Vor 150 Jahren bedeutete die Anerkennung der Lobačevskischen Geometrie beispielsweise die Anerkennung der Sätze 2.8' bis 2.13'. Dazu war damals kaum ein Mathematiker bereit. Den Entdeckern, die mutig ihre Ergebnisse veröffentlicht hatten, nämlich LOBAČEVSKIJ und J. BOLYAI, blieb die erhoffte Anerkennung versagt. GAUSS hatte mit seiner Äußerung vom „Geschrei der Böötier“ recht. Erst nach Jahrzehnten wandten sich breitere Kreise von Mathematikern der nichteuklidischen Geometrie zu und begannen, sie zu verstehen. Von J. BOLYAI wird berichtet, daß er unter dem Mangel an Verständnis in seiner Zeit so litt, daß er frühzeitig psychisch und physisch verfiel.

Man muß aber auch sehen, daß in allzu vielen „Beweisen“ des 5. Postulates Fehler gefunden worden waren und daß man damals eher an einen Widerspruch in der Lobačevskischen Geometrie zu glauben bereit war, als sie anzuerkennen. Vielleicht hat GAUSS auch deshalb seine Ergebnisse nicht veröffentlicht, weil ihm ein bündiger Beweis der Widerspruchsfreiheit der nichteuklidischen Geometrie fehlte. Ja es kann sogar sein, daß auch Leser nach den Sätzen 2.8' bis 2.14' die Lobačevskische Geometrie mit Mißtrauen betrachten. Solchen Lesern sei empfohlen, das Kapitel 3 vor den Abschnitten 2.2 und 2.3 zu lesen.

Man kann mit Sicherheit annehmen, daß GAUSS das „Geschrei der Böötier“ nicht nur aus Mathematikerkreisen befürchtete, sondern daß er nur allzu gut wußte, daß er mit der Veröffentlichung der nichteuklidischen Geometrie einen Schlag gegen die damals vorherrschende Philosophie von IMMANUEL KANT (1724–1804) führen würde (vgl. neben [18], S. 200, noch [18], S. 224, oder [52], S. 56/57/61). GAUSS stand wie auch LOBAČEVSKIJ bezüglich der Geometrie auf einer materialistischen Grundposition (vgl. [18], S. 177, oder [52], S. 56/60).

Seit EUKLID hatte sich seine Geometrie zu *der* Raumvorstellung entwickelt. Die (euklidische) Geometrie¹⁾ wurde hinsichtlich des Umfangs und der Methoden ausgebaut. Ihre Formulierung als analytische Geometrie gestattete GOTTFRIED

¹⁾ Dazu muß bemerkt werden, daß von EUKLID her bis ins 18. Jahrhundert die Mathematik in der Sprache der Geometrie formuliert, daß somit Geometrie synonym für Mathematik gebraucht wurde.

WILHELM LEIBNIZ (1646–1716) den geometrischen Zugang zur Infinitesimalrechnung. Die folgende rasche Lösung zahlreicher Probleme, insbesondere der Himmelsmechanik mit Hilfe der Theorie von ISAAC NEWTON (1642–1727), führte zu einem Gefühl der Vollkommenheit der Theorie, das JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736–1813) zu den folgenden Zeilen an JEAN BAPTISTE LE ROND D'ALEMBERT (1717–1783) veranlaßte: „Scheint es Ihnen nicht, daß die erhabene Geometrie ein wenig dazu neigt, dekadent zu werden? Sie hat keine andere Stütze als Sie und Herrn Euler.“ (1772)¹⁾ Ausgesprochen oder unausgesprochen wurde stets das 5. Postulat EUKLIDS vorausgesetzt; speziell in diesem Sinne blieb die Geometrie euklidisch. Die Untersuchungen zum 5. Postulat verfolgten bis damals nur das Ziel, EUKLID „von allen Makeln zu befreien“. So wurde die Geometrie eine Stütze des mechanischen Materialismus, aber gegen 1781 gelangte auch KANT zu der subjektiv-idealistenischen Auffassung von Raum und Zeit als Anschauungsformen *a priori* jeder Sinneserfahrung. Danach wäre die euklidische Raumvorstellung denknotwendig. Diese Auffassung ist wegen der Existenz nichteuklidischer Geometrie hinfällig.

Für uns sind die euklidische wie die Lobačevskijsche Geometrie mathematische Modelle des uns umgebenden Raumes. Im Rahmen der Prüfgenauigkeit auf der Erde stellen sie die realen Verhältnisse dar. Nach den bisherigen Ausführungen könnte der Eindruck entstehen, daß die Lobačevskijsche Geometrie die Alternative zur euklidischen Geometrie ist. Tatsächlich sind aber in der modernen Kosmologie zahlreiche mathematische Modelle für unseren Raum entwickelt worden, die erheblich komplizierter als die euklidische Geometrie sind, die aber zur besseren Beschreibung der Vorgänge im Kosmos geeignet sind. So hat ALBERT EINSTEIN (1879–1955) in seiner allgemeinen Relativitätstheorie 1916 eine Theorie verwendet, die BERNHARD RIEMANN (1826–1866) in seiner Habilitationsschrift „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen“ schon 1854 entwickelt hatte. Auch sei bemerkt, daß seit der Aufstellung der speziellen Relativitätstheorie von 1905 vierdimensionale (mathematische) Räume zur Beschreibung der Realität benutzt werden. Übrigens hatte HERMANN GRASSMANN (1809–1877) in seiner „Linealen Ausdehnungslehre“ schon 1844 den Schritt zur n -dimensionalen Geometrie vollzogen²⁾.

Die Entscheidung über die Güte einer Geometrie zur Beschreibung der realen Raumverhältnisse kann nicht in der Geometrie selbst, sondern nur in der Naturwissenschaft gefunden werden; letztes Kriterium der Wahrheit ist die Praxis. (Man erinnere sich an dieser Stelle an GAUSS' Ausmessung des Dreiecks Brocken–Inselsberg–Hohehagen!) Wie wir oben bemerkt haben, können wir auf der Erde die euklidische Geometrie als relativ einfache, brauchbare Annäherung an die realen Verhältnisse benutzen. Die Tradition wird bedingen, daß sie auch in der Zukunft für die allgemeinbildende polytechnische Oberschule bestimmend sein wird. Übrigens haben wir keinen Grund, nur dem Axiom EP fragliche Übereinstimmung mit der Realität nachzusagen. PASCH äußert z. B. gegenüber der Dichtheit der Strecken und Geraden (vgl. Satz 1.4) Vorbehalte, die dann bezüglich der Stetigkeit erst recht be-

1) Vgl. [52], S. 144.

2) Wir könnten uns durch eine Variation der Axiome I₆ und B₃ einen mühelosen Weg zur n -dimensionalen Geometrie schaffen.

stehen. Damit ist der Zusammenhang mit den reellen Zahlen in Frage gestellt usw. Wir können aber mit PASCH abschließend nochmals feststellen, daß die euklidische Geometrie für uns auf der Erde „hinreichende Genauigkeit besitzt“.

Aufgaben

1. Für ein Dreieck ABC gelte $\alpha, \beta \leq \gamma$. Dann hat das Lot von C auf g_{AB} einen Fußpunkt F_0 zwischen A und B (Abb. 60). Man zeige, daß in der Ebene des Dreiecks die Mittelsenkrechte von CF_0 die Seiten AC und BC in Punkten A_1 bzw. B_1 trifft und daß $\delta(A_1B_1C) < \frac{1}{2} \delta(ABC)$ gilt.
2. In einer Ebene sei τ ($\neq 1$) eine Verschiebung längs f , $P \notin f$, $g := g_{PF}$ und τ' die Verschiebung längs g mit $P\tau' = P$. Man beweise, daß $\tau\tau'$ nach dem Satz 1.15, dem Reduktionsatz 1.19b und dem Zusatz zu 1.14 wegen $P\tau' = P$ in der Lobačevskischen Geometrie eine von 1 verschiedene Drehung um P ist, weil $\tau\tau' = 1$ nach dem Zusatz zu 1.15 und dem Satz 2.14' im Widerspruch zum Lobačevskischen Parallelenaxiom (LP) steht.

2.2. Büschel und Bahnen

2.2.1. Beziehungen zwischen zwei Geraden einer Ebene

In der absoluten Geometrie schneiden sich zwei Geraden einer Ebene, oder sie sind parallel zueinander. Nennt man nun Geraden einer Ebene genau dann *verbindbar*, wenn sie einen Punkt oder ein Lot gemeinsam haben, dann kann festgestellt werden, daß in der euklidischen Geometrie je zwei Geraden einer Ebene durch einen Punkt (sich schneidende Geraden) oder durch ein gemeinsames Lot (zueinander parallele Geraden) verbunden sind. Wir werden sehen, daß es in der Lobačevskischen Geometrie unverbindbare Geraden gibt. Vorbereitend beweisen wir einige Hilfssätze.

Hilfssatz 2.15. *In der Lobačevskischen Geometrie seien g, h zwei Geraden einer Ebene; weiterhin bezeichne $<$ einen ausgezeichneten Durchlaufsinn von g und X' den Fußpunkt des Lotes von $X \in g$ auf h . Gilt $A = A'$ oder $\not\propto BAA' \in \alpha \geq R$ für einen Punkt $B > A$, dann ist*

$$a(X) = a(X, h) := a(X, X')$$

für $X \geq A$ streng monoton wachsend, stetig und (nach oben) nicht beschränkt.¹⁾

Beweis. Es seien die Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllt, $g \perp h$ und $X, Y \geq A$ Punkte mit $X < Y$ (Abb. 61a, b). Für $X = A = A'$ gilt offenbar $a(X) = o < a(Y)$. Andernfalls betrachten wir das Viereck $\hat{X}X'Y'Y$ mit rechten Winkeln bei X' und Y' . Wie man leicht sieht, ist der Winkel bei X nicht spitz und folglich bei Y spitz.

¹⁾ Nach diesem Satz wird das Axiom Z_8 entbehrlich.

In der euklidischen Geometrie ist $a(X)$ für $\not\propto BAA' \in \alpha = R$ konstant (vgl. den Satz 2.10). PROKLOS DIADOCHOS (410–485) hat das 5. Postulat EUKLIDS aus der Beschränktheit von $a(X)$ für $\alpha = R$ gefolgert, die nach diesem Satz dem 5. Postulat äquivalent ist.

Daraus folgt

$$a(X) < a(Y)$$

(vgl. Aufgabe 2 aus dem Abschnitt 2.1.1).

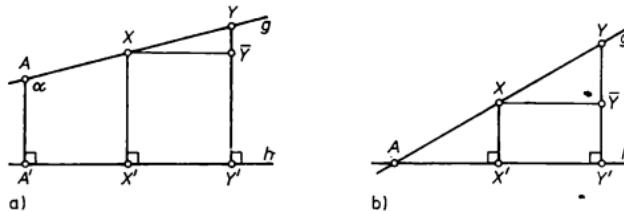


Abb. 61

Um die rechtsseitige Stetigkeit in $X \geqq A$ zu zeigen, betrachten wir einen Punkt $Y > X$, tragen die Strecke XX' auf $Y'Y^+$ ab und erhalten einen Punkt \bar{Y} . Im Dreieck $XY\bar{Y}$ ist $\angle X\bar{Y}Y$ der größte Winkel, so daß nach dem Satz 1.34

$$a(Y) - a(X) = a(Y, \bar{Y}) < a(X, Y)$$

gilt; bei gegebener Länge $a > 0$ gilt demzufolge

$$a(X, Y) < a \Rightarrow a(Y) - a(X) < a.$$

Analog erhalten wir die linksseitige Stetigkeit für alle $X > A$.

Wir beweisen abschließend die Unbeschränktheit, indem wir auf g einen Punkt $H > A$ wählen und zunächst mittels der Verschiebung $\tau := \sigma_A \sigma_H$ vermöge

$$A_n := A^{\tau^n}$$

für alle natürlichen Zahlen n auf g eine Skala erzeugen (Abb. 62a). Wir betrachten drei benachbarte Punkte A_{i-1} , A_i und A_{i+1} , tragen auf $A_{i-1}A_i^+$ die Strecken $A_{i-1}A_{i-1}'$

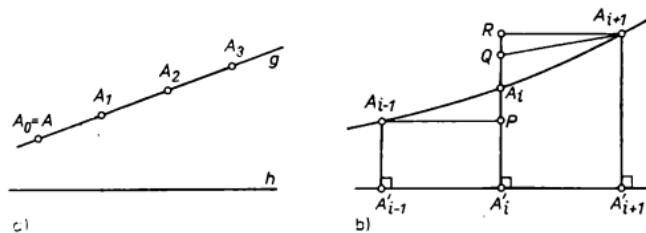


Abb. 62

und $A_{i+1}A_{i+1}'$ ab und erhalten P bzw. R (Abb. 62b). Außerdem sei Q das Bild von P bei der Spiegelung an A_i . In den Saccherischen Vierecken $A_{i-1}A_{i-1}'A_i'P$ und $A_{i+1}A_{i+1}'A_i'R$ liegen bei P bzw. R spitze Winkel, in den kongruenten Dreiecken

$A_{i-1}A_iP$ und $A_{i+1}A_iQ$ liegen folglich bei P bzw. Q stumpfe Winkel; mit dem Satz vom Außenwinkel ist nur $Q \in (A_iR)$ verträglich, d. h.

$$a(A_i) - a(A_{i-1}) = a(A_i, P) = a(A_i, Q) < a(A_i, R) = a(A_{i+1}) - a(A_i).$$

Mit $a := a(A_0)$ und $b := a(A_1) - a(A_0)$ erhalten wir

$$a(A_1) = a + b,$$

$$(4) \quad a(A_2) = a(A_1) + (a(A_2) - a(A_1)) > a(A_1) + (a(A_1) - a(A_0)) = a + 2b,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a(A_k) > a + k \cdot b^1,$$

$$\dots \dots \dots$$

Nach dem Eudoxus- Archimedischen Axiom 2.1 ist $a(X)$ nach oben nicht beschränkt.

Der Fall $g \perp h$ ist wegen $a(Y) - a(X) = a(X, Y)$ für $X < Y$ trivial, w. z. b. w.

Aus dem Hilfssatz folgt unmittelbar der

Satz 2.16. *In der Lobačevskischen Geometrie ist für zwei verbindbare Geraden g und h die Funktion $a(X)$ sowohl bei wachsendem als auch bei fallendem X unbeschränkt.²⁾ Für sich schneidende Geraden ist o das Minimum von $a(X)$, während andernfalls $a(X)$ sein Minimum annimmt, wenn X auf dem (nach 2.9' eindeutigen) gemeinsamen Lot von g und h liegt.*

Vom ersten Teil des Satzes gilt auch die Umkehrung:

Satz 2.17. *Ist in der Lobačevskischen Geometrie für zwei Geraden g und h einer Ebene die Funktion $a(X)$ sowohl bei wachsendem als auch bei fallendem X unbeschränkt, dann sind g, h verbindbar.*

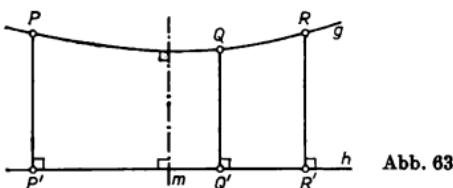


Abb. 63

Beweis. Für sich schneidende Geraden ist nichts zu zeigen. Wir betrachten deshalb den Fall, daß g, h parallel sind. Es sei $g = g_{QR}$ und etwa $\not\propto Q'QR$ nicht spitz (Abb. 63). Dann gilt $a(Q) < a(R)$. Da $a(X)$ für $X \in QR^-$ als unbeschränkt vorausgesetzt wird,

¹⁾ Folglich können Geraden in der Lobačevskischen Geometrie nicht durch lineare Gleichungen beschrieben werden.

²⁾ Wegen dieses Sachverhaltes werden zwei parallele verbindbare Geraden als *divergierend* bezeichnet.

gibt es einen Punkt $P \in QR^-$ mit $a(P) > a(Q)$; o. B. d. A. gelte für R nach 2.15 noch $a(P) = a(R)$. Bei der Spiegelung an der Mittelsenkrechten m von $P'R'$ bleiben g und h fest, d. h. $g, h \perp m$, w. z. b. w.

Als Folgerung aus den Sätzen 2.16 und 2.17 erhalten wir unmittelbar den

Satz 2.18. *In der Lobachevskischen Geometrie sind zwei parallele Geraden g und h genau dann unverbindbar, wenn $a(X)$ bei wachsendem oder bei fallendem X beschränkt ist.*

Sind eine Gerade h und ein Punkt P mit $P \notin h$ gegeben, dann können wir eine Parallele zu h durch P konstruieren, indem wir einen beliebigen Punkt $X \in h$ wählen und h am Mittelpunkt M von P und X spiegeln (Abb. 64a). Dabei sind die Parallelen h und h^M verbindbar, weil das Lot von M auf h auch zu h^M senkrecht ist

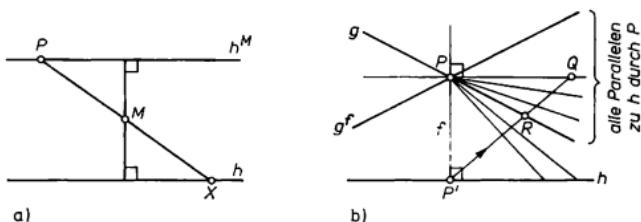


Abb. 64

Um die Frage nach der Existenz unverbindbarer Geraden zu beantworten, betrachten wir das Lot f von P auf h mit dem Fußpunkt P' sowie einen Punkt Q auf der Senkrechten zu f in P (Abb. 64b). Wir betrachten die gemäß Satz 1.5 geordnete Menge M der von P ausgehenden Halbgeraden, die $P'Q$ treffen und für die PP^+ erstes und PQ^+ letztes Element ist. Die Menge

$$M' := \{PX^+ \in M : X \in h\},$$

d. h. die Menge der h schneidenden Halbgeraden aus M , ist nicht leer und nach oben beschränkt; sie besitzt folglich nach dem Satz 1.5 und dem Axiom von der oberen Grenze eine obere Grenze PR^+ , o. B. d. A. mit $R \in P'Q$. Die Gerade

$$g := g_{P'}$$

kann h nicht schneiden; da andererseits alle Halbgeraden aus M , die h nicht schneiden, obere Schranken von M' sind, ist g „erste“ Parallele, Grenzgerade oder Randparallele.¹⁾

Es sei nun S ein beliebiger Punkt der offenen Halbgeraden PR^+ (Abb. 65a), S' der Fußpunkt des Lotes von S auf h und T der Fußpunkt des Lotes von P auf $g_{SS'}$. Im Viereck $PP'S'T$ liegt bei P ein spitzer Winkel, wegen $PT^+ \cap h = \emptyset$ liegt PR^+

¹⁾ Für diesen Namen gibt es verschiedene Motivierungen. Wir können etwa daran denken, daß g und g' die Winkelfläche in ε_{Ph} „beranden“, die alle Parallelen zu h durch P umfaßt.

vor PT^+ , und folglich liegt S zwischen S' und T . Somit gilt

$$a(S) < a(S', T) < a(P)^1$$

(vgl. dazu Aufgabe 2 aus dem Abschnitt 2.1.1), d. h. nach dem Satz 2.18, daß g und h unverbindbar sind.

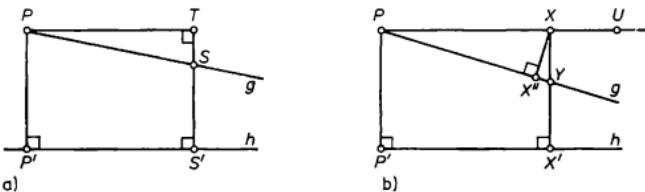


Abb. 65

Umgekehrt ist eine Gerade $g_{PU} \subset \varepsilon_{PA}$ randparallel zu h , wenn $a(X)$ für alle $X \in PU^+$ beschränkt ist: Die Randparallele g zu h durch P , die $P'U$ und somit $P'X$ trifft, muß auch einen Punkt Y von XX' enthalten (Abb. 65b). Ist nun X'' der Fußpunkt des Lotes von X auf g , dann gilt

$$a(X, X'') < a(X, Y) < a(X, X'),$$

d. h., daß $a(X, X'')$ beschränkt ist. Folglich gilt nun $g = g_{PU}$, denn für sich schneidende Geraden g_{PU} und g ist $a(X, X'')$ nach dem Satz 2.16 unbeschränkt.

Zusammenfassend können wir feststellen:

Satz 2.19. *In der Lobačevskischen Geometrie sind zwei Geraden g und h einer Ebene genau dann randparallel, wenn $a(X)$ bei wachsendem oder fallendem X beschränkt ist, d. h., wenn sie unverbindbar sind.*

Satz 2.20. *In der Lobačevskischen Geometrie gibt es zu jeder Geraden h durch jeden Punkt $P \notin h$ zwei Randparallele.*

Sind f und g zwei Randparallele zu h durch P , dann bestimmen diese Randparallelen einen Winkel der Größe 2α , in dessen Innerem h verläuft (Abb. 66a). Nach LOBAČEVSKIJ faßt man α als Funktion des Abstandes a von P und h auf:

$$\alpha := \Pi(a).$$

Da Randparallelen einer Geraden bei Bewegungen stets in Randparallelen der Bildgeraden übergehen, hängt α nur von a und nicht von der speziellen Geraden h und dem speziellen Punkt P ab.

Zum Definitionsbereich der Π -Funktion gehören alle Längen $a > 0$. Um uns einen Überblick über den Wertebereich der Π -Funktion zu verschaffen, betrachten wir

¹ Es ließe sich sogar zeigen, daß $a(S)$ mit wachsendem Abstand $a(P, S)$ monoton gegen 0 strebt. Deshalb nannte J. BOLYAI solche Geraden g, h asymptotisch. 'UMAR AL-HAYYĀM (1048–1131) erhielt das 5. Postulat EUKLIDS unter der Voraussetzung, daß einander unbeschränkt nähernende Geraden sich schneiden.

eine Winkelgröße α mit $0 < \alpha < R$, einen Winkel $\not\propto POQ$ der Größe 2α und dessen Winkelhalbierende w . Nach dem Satz 2.13' gibt es einen Punkt $X \in OPQ^+ \cap OQP^+$ derart, daß keine Gerade durch X beide Schenkel von $\not\propto POQ$ schneidet. Das Lot f von X auf w trifft weder OP^+ noch OQ^+ (Abb. 66 b). Alle Lote von w durch Punkte von $OPQ^+ \cap OQP^+$, die OP^+ nicht treffen, sind (bei geeigneter Feststellung der Ordnung nach der Ordnung der Punkte in w) obere Schranken für die nichtleere Menge

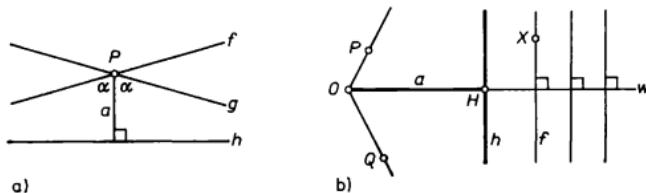


Abb. 66

der Lote von w , die OP^+ (und OQ^+) treffen; folglich besitzt diese Menge eine obere Grenze h . Offensichtlich kann h den Schenkel OP^+ nicht schneiden; nach dem Satz 2.19 sind g_{OP} und h randparallel. Insgesamt gilt der

Satz 2.21. *In der Lobačevskischen Geometrie hat die Π -Funktion, die für alle Längen $a > 0$ definiert ist, das offene Intervall $(0, R)$ als Wertebereich.¹⁾*

In der euklidischen Geometrie ist keine Länge $a \neq 0$ vor einer anderen ausgezeichnet. Im Gegensatz dazu gibt es Winkel, wie beispielsweise die rechten, die geometrisch von den anderen unterschieden werden können. Deshalb kann man die Winkelmessung mit R oder ganzzahligen Teilen von R als Einheit aufbauen, während die Längenmessung etwa bezüglich des Urmeters Kopien davon notwendig mache.

In der Lobačevskischen Geometrie können wir rechte Winkel konstruieren, aber auch eine Einheitsstrecke bestimmen, indem wir oben beispielsweise von einem rechten Winkel $\not\propto POQ$ ausgehen, die Strecke OH mit H als Schnittpunkt von h und w ins Auge fassen (Abb. 66 b) und deren Länge e als Längeneinheit wählen; dann gilt $R = 2\pi(e)$.

Folgerung 2.22. *In der Lobačevskischen Geometrie können Einheitswinkel und Einheitsstrecken innermathematisch bestimmt werden.²⁾*

Aufgaben

1. Es sei $g = g_{PQ}$ randparallel zu h , $P < Q$ und $a(P) > a(Q)$. Man zeige, daß $a(X)$ für $X > P$ monoton fallend ist und daß die Definition der Randparallelität unabhängig von der Wahl eines Punktes $P \in g$ ist.

1) In der euklidischen Geometrie ist diese Funktion konstant: $\Pi(a) = R$ für alle Längen a .

2) In diesem Sinne spricht man auch von „absoluter Strecken- und Winkelmessung“. Es war bereits LAMBERT bekannt, daß die Hypothese des spitzen Winkels für Saccherische Viercke zu einer absoluten Längeneinheit führt.

2. Man beweise mit Hilfe des Satzes 2.19, daß die Randparallelität symmetrisch ist.

Anleitung: Es sei $g = g_{PQ}$ randparallel zu h , weil $a(X)$ für $X \in PQ^+$ beschränkt ist. Man zeige, daß $a(Y, g)$ für $Y \in P'Q'^+$ beschränkt bleibt. (Dabei bezeichne $a(Y, g)$ den Abstand von Y und g und P' bzw. Q' den Fußpunkt des Lotes von P bzw. Q auf h .)

2.2.2. Büschel in einer Lobačevskischen Ebene

Im folgenden untersuchen wir Mengen von Geraden einer Ebene ε . Besonders einfach lassen sich wichtige Eigenschaften der Mengen

$$M(P) := \{x \subset \varepsilon: P \in x\},$$

$$M(g) := \{x \subset \varepsilon: g \perp x\}$$

(Abb. 67a, b) herleiten. Sind M und M' solche Mengen, dann gilt

$$(1') \quad a, b \in M, M' \Rightarrow a = b \vee M = M'.$$

Zum Beweis betrachten wir zwei Mengen M und M' ($M \neq M'$) sowie Geraden a und b mit $a, b \in M, M'$.

Fall 1: $M = M(P)$ und $M' = M(Q)$. Aus $M \neq M'$ folgt $P \neq Q$ und $a = b$ wegen der Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden zweier Punkte.

Fall 2: $M = M(P)$ und $M' = M(g)$. Es gilt $a = b$ wegen der Eindeutigkeit des Lotes von P auf g in ε .

Fall 3: $M = M(f)$ und $M' = M(g)$. Aus $M \neq M'$ folgt $f \neq g$ und $a = b$ wegen der Eindeutigkeit des gemeinsamen Lotes von f und g nach dem Satz 2.9', w. z. b. w.

Für eine Menge M der oben definierten Art gilt

$$(2') \quad a, b, c \in M \Rightarrow \bigvee_{d \in M} \sigma_a \sigma_b \sigma_c = \sigma_d.$$

Diese Aussage ist gerade der Dreispiegelungssatz (vgl. 67a, b).

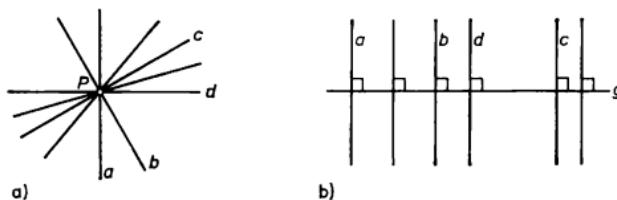


Abb. 67

Schließlich seien noch folgende, offensichtlich richtige Regeln

$$(3') \quad M(P)^f = M(P^f), \quad M(g)^f = M(g^f)$$

bezüglich der Spiegelung an einer Geraden f hervorgehoben.

Andererseits können wir mit Hilfe von

$$S := \{\sigma_x: x \subset \varepsilon\};$$

der Menge der Spiegelungen an Geraden der Ebene ε , Mengen von Geraden bezüglich zweier Geraden a und b aus ε wie folgt einführen:

$$M(a, b) := \{x \subset \varepsilon : \sigma_a \sigma_b \sigma_x \in S\}.$$

Wie der folgende Satz lehrt, sind die Mengen $M(P)$ bzw. $M(g)$ unter den soeben definierten Mengen enthalten.

Satz 2.23. Für je zwei Geraden a und b aus ε gilt

$$a, b \in M(P) \Rightarrow M(P) = M(a, b),$$

$$a, b \in M(g) \Rightarrow M(g) = M(a, b).$$

Beweis. a) Aus $a, b, x \in M(P)$ bzw. $a, b, x \in M(g)$ folgt nach dem Dreispiegelungssatz $x \in M(a, b)$.

b) Gilt $x \in M(a, b)$ für eine Gerade $x \subset \varepsilon$, dann ergibt die Umkehrung des Dreispiegelungssatzes $x \in M(P)$ im Fall $a, b \in M(P)$ und $x \in M(g)$ im Fall $a, b \in M(g)$, w. z. b. w.

Definition. Die Mengen $M(a, b)$ werden (*Geraden-*) *Büschele* genannt. Speziell heißen die Mengen $M(P)$ *eigentliche Büschele*, die Mengen $M(g)$ *Lobüschele* und alle Büschele $M(a, b)$ mit unverbindbaren (oder randparallelen) Geraden a, b *Enden*.

Wir wollen nun zeigen, daß die Beziehungen (1') bis (3') für alle Büschele gelten. Dazu stellen wir vorbereitend einige Regeln bereit.

Hilfssatz 2.24. Die dreistellige Relation $\sigma_a \sigma_b \sigma_c \in S$ hat folgende Eigenschaften:

- (a) Es gilt $\sigma_a \sigma_b \sigma_c \in S$, wenn a, b, c nicht paarweise verschieden sind (Reflexivität).
- (b) Gilt $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \in S$, dann gilt $\sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \sigma_{i_3} \in S$ für jede Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix}$ von $\{1, 2, 3\}$ (Symmetrie).
- (c) Aus $a \neq b$ und $\sigma_a \sigma_b \sigma_c, \sigma_a \sigma_b \sigma_d \in S$ folgt $\sigma_b \sigma_c \sigma_d \in S$ (Transitivität).

Folgerung. Außerdem gilt

- (d) $a, b \in M(a, b)$,
- $x \in M(a, b) \wedge \sigma_a \sigma_b \sigma_x = \sigma_{x'} \Rightarrow x' \in M(a, b)$,
- (e) $x, y, z \in M(a, b) \Rightarrow \bigvee \sigma_x \sigma_y \sigma_z = \sigma_u \wedge u \in M(a, b)$,
- (f) $a \neq b \wedge a, b \in M(c, d) \Rightarrow M(a, b) = M(c, d)$.

Beweis. a) Die Reflexivität ist in den Fällen $a = b$ bzw. $b = c$ trivial. Im Fall $a = c$ gilt $\sigma_a \sigma_b \sigma_a = \sigma_g \in S$ mit $g = b^a$ nach der Vorbemerkung zu Abschnitt 1.2.

b) Es sei $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \in S$. Es gilt $\sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 = \sigma_1 (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) \sigma_1 \in S$ und $\sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 = (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)^{-1} \in S$. Da alle Permutationen von $\{1, 2, 3\}$ durch Nacheinanderausführen der Permutationen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ gewonnen werden können, besteht die Symmetrie.

c) Es sei $a \neq b$ und $c, d \in M(a, b)$. Wenn a, b verbindbar sind, dann gibt es einen Punkt P oder eine Gerade g mit $P \in a, b, c, d$ oder $a, b, c, d \perp g$ nach dem Satz 2.23; folglich ergibt der Dreispiegelungssatz $\sigma_b \sigma_c \sigma_d \in S$.

Im folgenden seien a, b unverbindbar. In den Spezialfällen $a = c, a = d, b = c, b = d$ oder $c = d$ gilt der Reihe nach $\sigma_b \sigma_c \sigma_d = \sigma_b \sigma_a \sigma_d \in S$ nach b), $\sigma_b \sigma_c \sigma_d = \sigma_b \sigma_c \sigma_a \in S$ nach b), $\sigma_b \sigma_c \sigma_d = \sigma_d \in S$, $\sigma_b \sigma_c \sigma_d = \sigma_b \sigma_d \sigma_b \in S$ bzw. $\sigma_b \sigma_c \sigma_d = \sigma_b \in S$. Wir setzen nun a, b, c, d als paarweise verschiedene Geraden voraus; wegen der Unverbindbarkeit von a und b sind nach der Umkehrung des Dreispiegelungssatzes auch a, b und c bzw. a, b und d paarweise unverbindbar.

Wir erhalten nun das gewünschte Resultat durch mehrfache Anwendung des Lotensatzes von HJELMSLEV: Wir wählen einen beliebigen Punkt $B \in b$ und fällen von ihm die Lote a', c' und d' auf a, c bzw. d ; die Lotfußpunkte seien A, C bzw. D .

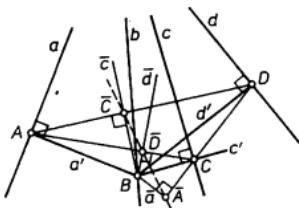


Abb. 68

(Abb. 68). Wegen der Unverbindbarkeiten gilt $A \neq C, D$. Für die Lote \bar{c} und \bar{d} von B auf g_{AD} bzw. g_{AC} gilt wegen $\sigma_a \sigma_b \sigma_c, \sigma_a \sigma_b \sigma_d \in S$ nach dem Lotensatz

$$(*) \quad \sigma_{a'} \sigma_b \sigma_{c'} = \sigma_{\bar{d}}, \quad \sigma_{a'} \sigma_b \sigma_{d'} = \sigma_{\bar{c}}.$$

Es gilt $C \neq D$, denn andernfalls wäre $c' = d'$ und somit $c = d$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Es sei \bar{A} der Fußpunkt des Lotes \bar{a} von B auf g_{CD} ; die Fußpunkte der Lote \bar{c} und \bar{d} in g_{AD} bzw. g_{AC} werden mit \bar{C} und \bar{D} bezeichnet.

Es gilt $\sigma_{\bar{d}} \sigma_c \sigma_{\bar{a}} = \sigma_a \sigma_b \sigma_{\bar{a}} = \sigma_c \sigma_d \sigma_{\bar{a}} \in S$ nach (*) und dem Dreispiegelungssatz; es sei $\sigma_g := \sigma_{\bar{a}} \sigma_c \sigma_{\bar{d}} = \sigma_{\bar{d}} \sigma_c \sigma_{\bar{a}} = \sigma_c \sigma_d \sigma_{\bar{a}}$. Wir betrachten $M(B)$ und $M(C)$, $M(D)$ bzw. $M(A)$ und erhalten nach dem Lotensatz, daß erstens \bar{A} und \bar{C} sowie \bar{A} und \bar{D} auf ein und derselben zu g senkrechten Geraden liegen und daß zweitens $\sigma_{\bar{c}} \sigma_{\bar{a}} \sigma_{\bar{d}} = \sigma_g = \sigma_{\bar{a}} \sigma_c \sigma_{\bar{d}}$ und $\sigma_{\bar{c}} \sigma_{\bar{a}} = \sigma_{\bar{d}} \sigma_{\bar{c}}$ ist. Nach (*) folgt hieraus

$$\sigma_{\bar{a}} \sigma_{c'} = \sigma_a \sigma_b \sigma_{a'} \cdot \sigma_{a'} = \sigma_{d'} \sigma_b.$$

Somit gilt neben $\bar{a} \perp g_{CD}$ noch

$$\sigma_{\bar{a}} = \sigma_{d'} \sigma_b \sigma_{c'}.$$

Nach dem Lotensatz bedeutet das aber $\sigma_a \sigma_b \sigma_d \in S$, d. h. $\sigma_b \sigma_c \sigma_d \in S$ nach b).

Zum Beweis der Folgerung stützen wir uns nur auf (a) bis (c).

d) Nach (a) gilt $a, b \in M(a, b)$, und aus $x \in M(a, b)$ und $\sigma_{x'} := \sigma_a \sigma_b \sigma_x \in S$ folgt

$$\sigma_a \sigma_b \sigma_{x'} = \sigma_a \sigma_b \sigma_x \sigma_x \sigma_{x'} = \sigma_{x'} \sigma_x \sigma_{x'} \in S,$$

d. h. $x' \in M(a, b)$, ebenfalls nach (a).

e) Es sei $x, y, z \in M(a, b)$. Wir zeigen zunächst $\sigma_x \sigma_y \sigma_z \in S$. Das ist nach (a) klar, wenn x, y, z nicht paarweise verschieden sind. Nun sei $x \neq y \neq z \neq x$. Nach (b) dürfen wir o. B. d. A. $b \neq x$ voraussetzen, so daß nach (c) der Reihe nach gilt:

$$\sigma_a \sigma_b \sigma_x, \sigma_a \sigma_b \sigma_y \in S \Rightarrow \sigma_b \sigma_x \sigma_y \in S,$$

$$\sigma_a \sigma_b \sigma_x, \sigma_a \sigma_b \sigma_z \in S \Rightarrow \sigma_b \sigma_x \sigma_z \in S,$$

$$\sigma_b \sigma_x \sigma_y, \sigma_b \sigma_x \sigma_z \in S \Rightarrow \sigma_x \sigma_y \sigma_z \in S.$$

Gilt $\sigma_{x'} := \sigma_a \sigma_b \sigma_x$ und $\sigma_u := \sigma_x \sigma_y \sigma_z$, dann folgt nach (d) $x', y, z \in M(a, b)$ und nach dem bereits Bewiesenen

$$\sigma_a \sigma_b \sigma_u = \sigma_a \sigma_b \sigma_x \sigma_y \sigma_z = \sigma_{x'} \sigma_y \sigma_z \in S,$$

d. h. $u \in M(a, b)$.

f) Es sei $a \neq b$ und $a, b \in M(c, d)$. Aus $x \in M(c, d)$ folgt $\sigma_a \sigma_b \sigma_x \in S$ nach (e), d. h. $x \in M(a, b)$. Nun sei $x \in M(a, b)$. Nach (b) und (c) erhalten wir wegen

$$\sigma_a \sigma_d \sigma_a, \sigma_a \sigma_d \sigma_b \in S \Rightarrow \sigma_d \sigma_a \sigma_b \in S,$$

$$\sigma_d \sigma_c \sigma_a, \sigma_d \sigma_c \sigma_b \in S \Rightarrow \sigma_c \sigma_a \sigma_b \in S$$

zunächst $c, d \in M(a, b)$ und dann $\sigma_c \sigma_d \sigma_x \in S$ nach (e), d. h. $x \in M(c, d)$.

Insgesamt gilt $M(a, b) = M(c, d)$, w. z. b. w.

Satz 2.25. Für Geraden a, b, c, f und Büschel M, M' gilt

$$(1) \quad a, b \in M, M' \Rightarrow a = b \vee M = M',$$

$$(2) \quad a, b, c \in M \Rightarrow \bigvee_{d \in M} \sigma_a \sigma_b \sigma_d = \sigma_c,$$

$$(3) \quad M(a, b)^f = M(a^f, b^f),$$

$$(3') \quad f \in M(a, b) \Rightarrow M(a, b)^f = M(a, b).$$

Zusatz. Zu Geraden $x, y \in M(a, b)$ gibt es eine Gerade $m \in M(a, b)$ mit $x^m = y$; für eigentliche Büschel $M(a, b)$ gibt es genau zwei zueinander senkrechte Geraden dieser Eigenschaft in $M(a, b)$, und für nicht eigentliche Büschel $M(a, b)$ ist m eindeutig.

Beweis. a) Es sei $a, b \in M, M'$ und $a \neq b$. Nach 2.24(f) gilt offensichtlich $M = M(a, b) = M'$.

b) Der Dreispiegelungssatz für Geraden eines Büschels ist nach (e) trivial.

c) Zum Beweis der Gleichung $M(a, b)^f = M(a^f, b^f)$ betrachten wir folgende, für $x = y^f$ untereinander äquivalente Aussagen:

$$y \in M(a, b)^f,$$

$$x \in M(a, b),$$

$$\sigma_a \sigma_b \sigma_x \in S,$$

$$\sigma_f \sigma_a \sigma_f \cdot \sigma_f \sigma_b \sigma_f \cdot \sigma_f \sigma_x \sigma_f \in S,$$

$$\sigma_a \sigma_b \sigma_{x'} \in S,$$

$$x' \in M(a', b'),$$

$$y \in M(a', b').$$

d) Es sei $f \in M(a, b)$. Wegen $\sigma_f \sigma_a \sigma_f = \sigma_a$ und $\sigma_f \sigma_b \sigma_f = \sigma_b$, gilt $a', b' \in M(a, b)$ nach (2) und schließlich $M(a, b)' = M(a', b') = M(a, b)$ nach (3) und (1).

Wir beweisen nun den Zusatz.

Existenz. Es sei $x, y \in M(a, b)$. Für verbindbare Geraden x, y erhalten wir eine gesuchte Gerade m als Winkelhalbierende bzw. Mittelsenkrechte (Abb. 69 a, b). Wir setzen nun x, y als unverbindbar voraus und wählen einen Punkt $X \in x$ (Abb. 69 c). Von X fällen wir das Lot auf y und erhalten einen Fußpunkt X' . Der

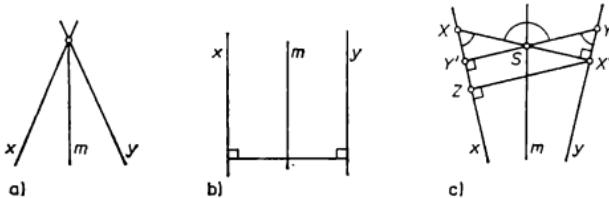


Abb. 69

Fußpunkt Z des Lotes von X' auf x ist wegen der Unverbindbarkeit von x und y von X verschieden; nach dem Satz 1.34 gilt $a := a(X, X') > a(X', Z)$. Nach dem Hilfssatz 2.15 gibt es einen Punkt $Y \in y$ mit $a = a(X, X') = a(Y, x)$; es sei Y' der Fußpunkt des Lotes von Y auf x . Man überlegt sich leicht, daß sich die offenen Strecken (XX') und (YY') wegen $a(X, X') = a(Y, Y')$ in einem Punkt S schneiden müssen. Die Dreiecke XSY' und YSX' sind nach www kongruent, da $\not\propto X$ und $\not\propto Y$ die Größe $\Pi(a)$ besitzen. Somit hat die Winkelhalbierende m von $\not\propto XSY$ die Eigenschaft

$$x^m = y.$$

Folglich ist $\sigma_y = \sigma_m \sigma_x \sigma_m$ und $\sigma_x \sigma_m \sigma_y = \sigma_m$, d. h.

$$m \in M(x, y) = M(a, b)$$

nach den Sätzen 2.24(b) und 2.25(1).

Eindeutigkeit. Aus $x^m = y = x^n$ und $m, n \in M(a, b)$ folgt

$$\sigma_m \sigma_x \sigma_m = \sigma_n \sigma_x \sigma_n, \quad \sigma_m \sigma_x \sigma_m \sigma_n = \sigma_n \sigma_x, \quad \sigma_m \cdot \sigma_n \sigma_m \sigma_x = \sigma_n \sigma_x$$

nach dem Satz 2.25(2) und somit $\sigma_m \sigma_n \sigma_m = \sigma_n$, d. h. $n^m = n$. Folglich haben wir $m = n$ oder $m \perp n$, $m = n$ oder $M(a, b) = M(m, n)$ nach dem Satz 2.25(1). Es gilt entweder $m = n$, oder $M(a, b) = M(m, n)$ ist wegen $m \perp n$ eigentlich, w. z. b. w.

Aufgaben

1. Man beweise, daß je zwei Geraden eines Endes unverbindbar sind.¹⁾
 2. Man zeige, daß bezüglich einer dreistelligen Äquivalenzrelation in der Menge $\mathfrak{G}_\varepsilon := \{x \in \mathfrak{G} : x \subset \varepsilon\}$ mit den Eigenschaften (a) bis (c) das System der Büschel $M(a, b)$ folgende Eigenschaften besitzt (vgl. die Eigenschaften einer Klasseneinteilung in einer Menge):
 - (g) Je zwei Elemente aus S liegen in einem Büschel, und jedes Büschel enthält wenigstens zwei Elemente.
 - (h) Zwei Büschel haben höchstens eine Gerade gemeinsam.
- Außerdem befinden sich je drei Elemente eines Büschels in der Relation; und besteht die Relation für drei Elemente, von denen zwei einem Büschel angehören, dann liegt auch das dritte Element in diesem Büschel.

2.2.3. Bahnen bezüglich eines Büschels

Wir betrachten ein eigentliches Büschel $M(a, b) = M(P)$ in ε und suchen die kleinste Untergruppe $U(a, b)$ der Gruppe der Bewegungen \mathfrak{B}_ε von ε auf sich, die die Menge der Geradenspiegelungen

$$S(a, b) := \{\sigma_x : x \in M(a, b)\}$$

umfaßt. Jede Untergruppe von \mathfrak{B}_ε , die $S(a, b)$ umfaßt, muß auch alle Produkte $\sigma_1 \cdots \sigma_m$ mit $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in S(a, b)$ enthalten; wegen

$$(\sigma_1 \cdots \sigma_m)^{-1} \cdot \sigma_1' \cdots \sigma_m' = \sigma_m \cdots \sigma_1 \cdot \sigma_1' \cdots \sigma_m'$$

gilt

$$U(a, b) = \{\sigma_1 \cdots \sigma_m : \sigma_1, \dots, \sigma_m \in S(a, b)\}.$$

Nach dem Satz 1.14 enthält $U(a, b)$ die Gruppe

$$D(a, b) := \{\sigma\sigma' : \sigma, \sigma' \in S(a, b)\},$$

die Gruppe der Drehungen um P , als kommutative Untergruppe. Schließlich gilt nach dem Dreispiegelungssatz

$$U(a, b) = D(a, b) \cup S(a, b).$$

Man kann sich eine tiefere Einsicht bezüglich der Wirkung einer Abbildungsgruppe und eine anschauliche Vorstellung von ihr verschaffen, indem man die Bilder eines Punktes X bei allen Elementen der Gruppe betrachtet. Beispielsweise sind die Bildmengen

$$X^{D(a, b)} := \{X' : \bigvee_{\sigma \in D(a, b)} X' = X^\sigma\},$$

$$X^{U(a, b)} := \{X' : \bigvee_{\tau \in U(a, b)} X' = X^\tau\}$$

¹⁾ Darüber hinaus gilt für ein Ende $M(a, b)$, für das $a_b(X)$ bei in a wachsendem X beschränkt ist: $g \in M(a, b) \Leftrightarrow a_g(X)$ ist bei in a wachsendem X beschränkt. Das heißt, daß „randparallel zu a bezüglich \prec_a “ eine Äquivalenzrelation ist.

im Fall eines eigentlichen Büschels $M(a, b) = M(P)$ für $X \neq P$ konzentrische Kreise mit dem gemeinsamen Mittelpunkt P (Abb. 70). Die Geraden des Büschels sind die Symmetriechsen.

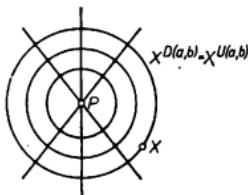


Abb. 70

Diese Überlegungen lassen sich für beliebige Büschel verallgemeinern:

Satz 2.26. Für ein beliebiges Büschel $M(a, b)$ in ε ist $D(a, b)$ eine kommutative Untergruppe der Gruppe $U(a, b) = D(a, b) \cup S(a, b)$. Außerdem gilt

$$X^{U(a,b)} = X^{D(a,b)} = X^{S(a,b)}$$

für alle Punkte $X \in \varepsilon$, wobei

$$X^{S(a,b)} := \left\{ X' : \bigvee_f f \in M(a, b) \wedge X' = X^f \right\}$$

ist.

Beweis. a) Es sei $\varrho, \varrho' \in D(a, b)$. Dann gibt es Geraden $c, d, c', d' \in M(a, b)$ mit $\varrho = \sigma_c \sigma_d$ und $\varrho' = \sigma_{c'} \sigma_{d'}$. Nach dem Satz 2.25(2) gilt

$$\varrho^{-1} \varrho' = \sigma_d \sigma_c \cdot \sigma_{c'} \sigma_{d'} = \sigma_d \cdot \sigma_c \sigma_{c'} \sigma_{d'} \in D(a, b),$$

d. h., $D(a, b)$ ist eine Gruppe.

Zum Beweis der Kommutativität bemerken wir zunächst, daß nach dem Satz 2.25(2) für $x, y, z \in M(a, b)$ stets $\sigma_x \sigma_y \sigma_z = \sigma_z \sigma_y \sigma_x$ gilt. Folglich ist

$$\begin{aligned} \varrho \varrho' &= \sigma_c \sigma_d \cdot \sigma_{c'} \sigma_{d'} = \sigma_c \sigma_d \sigma_{c'} \cdot \sigma_{d'} \\ &= \sigma_{c'} \sigma_d \sigma_c \cdot \sigma_{d'} = \sigma_{c'} \cdot \sigma_d \sigma_c \sigma_{d'} \\ &= \sigma_{c'} \cdot \sigma_{d'} \sigma_c \sigma_d = \varrho' \varrho. \end{aligned}$$

b) Wir überlassen es dem Leser, die Aussage über $U(a, b)$ zu beweisen.

c) Zum Beweis der übrigen Teilbehauptungen genügt es, $X^{D(a,b)} = X^{S(a,b)}$ zu zeigen. Nach der Folgerung aus dem Satz 1.18 gibt es eine Gerade $f \in M(a, b)$ mit $X \in f$. Wenn $Y \in X^{D(a,b)}$ gilt, gibt es Geraden $c, d \in M(a, b)$ mit $Y = (X^c)^d$; nach dem Satz 2.25(2) ist $Y = ((X^f)^c)^d \in X^{S(a,b)}$. Gilt umgekehrt $Y \in X^{S(a,b)}$ wegen $Y = X^g$ und $g \in M(a, b)$, dann ist $Y = (X^f)^g \in X^{D(a,b)}$, w. z. b. w.

Die Mengen $X^{D(a,b)}$ werden *Orbits* oder *Bahnen (Bahnkurven)* genannt. Die Büschel können als Parameterbereich für $X^{D(a,b)} = X^{S(a,b)}$ gedeutet werden. Man überlegt sich leicht, daß im Fall der Gruppe der Drehungen um P das System der Bahnen aus $\{P\}$ und allen Kreisen mit dem Mittelpunkt P besteht und daß für die Gruppe der

Verschiebungen längs f dieses System neben f alle Abstandslinien von f in ε enthält (vgl. Aufgabe 1). Die Bahnen bezüglich der „Drehgruppe“ $D(a, b)$ mit unverbindbaren Geraden a, b werden *Grenzkreise*¹⁾ genannt. — Für Bahnen bezüglich eines Büschels lassen sich einheitlich weitere Eigenschaften ableiten:

- Satz 2.27.** a) *Jede Gerade g eines Büschels $M(a, b)$ ist Symmetriearchse von $X^{S(a,b)}$.*
 b) *Aus $Y \in X^{S(a,b)}$ folgt $X^{S(a,b)} = Y^{S(a,b)}$.*
 c) *Zu jedem Punkt $Y \in X^{S(a,b)}$ gibt es eine Gerade $y \in M(a, b)$ mit $Y \in y$; y ist für $M(X) \neq M(a, b)$ eindeutig.*
 d) *Zu jeder Geraden $y \in M(a, b)$ gibt es einen Punkt $Y \in X^{S(a,b)}$ mit $Y \in y$. Der Punkt Y ist eindeutig, wenn $M(a, b)$ nicht eigentlich ist; bei einem eigentlichen Büschel $M(a, b) = M(P)$ enthält y zwei Punkte von $X^{S(a,b)}$, sobald $X \neq P$ gilt.*

Beweis. Es sei $M(a, b)$ ein Büschel.

a) Es sei $g \in M(a, b)$ und $Y \in X^{S(a,b)}$. Folglich gibt es eine Gerade $f \in M(a, b)$ mit $Y = X^f$. Nun gilt nach dem Satz 2.26 der Reihe nach $Y^g = (X^f)^g \in X^{D(a,b)} = X^{S(a,b)}$.

b) Unter der Voraussetzung $Y \in X^{S(a,b)}$ gibt es eine Gerade $f \in M(a, b)$ mit $Y = X^f$ (und $Y^f = X$). Für $Z \in X^{S(a,b)}$ gibt es eine Gerade $g \in M(a, b)$ mit $X^g = Z$, d. h. $Z = X^g = (Y^f)^g \in Y^{D(a,b)} = Y^{S(a,b)}$; für $Z \in Y^{S(a,b)}$ existiert eine Gerade $h \in M(a, b)$ mit $Y^h = Z$, so daß $Z = Y^h = (X^f)^h \in X^{D(a,b)} = X^{S(a,b)}$ gilt. Wegen $X^{S(a,b)} \subseteq Y^{S(a,b)}$ und $Y^{S(a,b)} \subseteq X^{S(a,b)}$ ist folglich $X^{S(a,b)} = Y^{S(a,b)}$.

c) Wegen $Y \in X^{S(a,b)} = Y^{S(a,b)}$ nach b) gibt es eine Gerade $y \in M(a, b)$ mit $Y^y = Y$ und $Y \in y$. Um die Eindeutigkeit für $M(X) \neq M(a, b)$ zu zeigen, betrachten wir Geraden $f, y, y' \in M(a, b)$ mit $X^f = Y \in y, y'$; wäre $y \neq y'$, dann erhielten wir $M(a, b) = M(y, y') = M(Y) = M(X)$ nach dem Satz 2.25(1, 3') im Widerspruch zur Voraussetzung. Folglich gilt $y = y'$.

d) Es sei $y \in M(a, b)$ und $X \in x \in M(a, b)$. Nach dem Zusatz zum Satz 2.25 gibt es eine Gerade $m \in M(a, b)$ mit $x^m = y$, wobei $Y := X^m \in y \cap X^{S(a,b)}$ nach a) gilt.

Um die Eindeutigkeitsaussagen zu beweisen, betrachten wir den Fall $y \cap X^{S(a,b)} = \{Y, Y'\}$ mit $Y \neq Y'$. Nach b) ist $X^{S(a,b)} = Y^{S(a,b)}$, so daß eine Gerade $g \in M(a, b)$ mit $Y^g = Y'$ existiert. Wegen $M(a, b) = M(g, y)$ und $g \perp y$ ist $M(a, b)$ eigentlich. — Gilt $M(a, b) = M(P)$ und $X \neq P$, dann gilt $P \in m$, $Y = X^m \neq P$ und $Y \neq Y' := Y^P = (X^m)^P \in X^{S(a,b)} \cap y$, w. z. b. w.

Wie der Satz 2.27 (d) lehrt, kann die Definition der Kreistangente der euklidischen Elementargeometrie nicht auf Abstandslinie und Grenzkreis ausgedehnt werden. Wir erklären deshalb (vgl. Abb. 71)

Definition. Die Gerade g heißt *Stützgerade* der ebenen *Figur F* in einem ihrer Punkte $P \in F$ genau dann, wenn $P \in g$ und $F \subseteq gX^+$ für einen Punkt X gilt. Existiert in einem Punkt $P \in F$ genau eine Stützgerade von F, dann wird diese *Tangente* genannt (Abb. 71 b, c).

¹⁾ LOBAČEVSKIJ nannte einen Grenzkreis auch *Oricykel*. GAUSS schlug zu seiner Bezeichnung *Paracykel* und zur Bezeichnung einer Abstandslinie *Hypencykel* vor.

Satz 2.28. Es sei t Tangente in einem Punkt Y einer Bahn $X^{s(a,b)}$ und $Y \in y \in M(a,b)$. Dann gilt $t \perp y$.¹⁾

Beweis. Die Gerade $y \in M(a,b)$ ist nach dem Satz 2.27(a) eine Symmetrieachse: Bei der Spiegelung an y bleiben Y und $X^{s(a,b)}$ fest. Folglich gilt $t' = t$ und $t \perp y$, w. z. b. w.

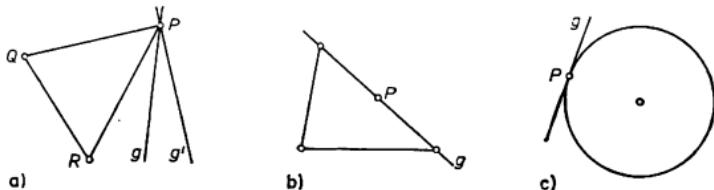


Abb. 71

Satz 2.29. Kreis, Abstandslinie und Grenzkreis enthalten von einer Geraden f höchstens zwei Punkte.

Folgerung. Eine Tangente hat mit einem Kreis, einer Abstandslinie bzw. einem Grenzkreis genau einen Punkt gemeinsam.

Beweis. Es sei $X^{s(a,b)} \cap f = \{A, B, C\}$ mit $A \neq B \neq C \neq A$. Nach dem Satz 2.27(b) gibt es Geraden $g, h \in M(a,b)$ mit $A^g = B$ und $B^h = C$. Nach der Voraussetzung haben die zwei Geraden g, h das gemeinsame Lot f . Wegen $M(f) = M(g, h) = M(a,b)$ nach dem Satz 2.25(1) gilt $X^{s(a,b)} = f$.

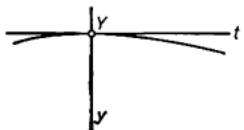


Abb. 72

Es sei nun t Tangente im Punkt Y eines Kreises, einer Abstandslinie bzw. eines Grenzkreises und y der „Berührungsradius“ in $M(a,b)$ (Abb. 72). Da y nach dem Satz 2.27(a) Symmetrieachse der betrachteten Bahn $X^{s(a,b)}$ durch Y ist, kann in $X^{s(a,b)} \cap t$ außer Y kein Punkt Z liegen, weil sonst auch Z^y dem Durchschnitt angehört und wir einen Widerspruch zum bewiesenen Satz erhielten, w. z. b. w.

Satz 2.30. In jedem Punkt eines Kreises, einer Abstandslinie bzw. eines Grenzkreises existiert eine Tangente.

Zum Beweis vgl. Aufgabe 2.

¹⁾ Vgl. den Satz der euklidischen Geometrie: Die Kreistangente steht auf dem Berührungsradius senkrecht.

Aufgaben

1. Man zeige mit Hilfe von Winkelhalbierenden und Mittelsenkrechten, daß die Bahnen $X^{S(a,b)}$ für $P \in a, b$ und $X \neq P$ Kreise um P und für $a, b \perp f$ und $X \notin f$ Abstandslinien von f sind.
2. Man beweise den Satz 2.30.
Anleitung: Der Satz 2.28 liefert eine notwendige Bedingung für eine Tangente. Daß diese Bedingung auch hinreichend ist, überlege man sich im Fall des Kreises mit Hilfe der Folgerung aus dem Satz 1.34 und im Fall der Abstandslinie zusätzlich mittels des Hilfssatzes 2.15. Der Fall des Grenzkreises ist etwas schwieriger; hier kommt man mit Hilfe des Satzes 2.27(a) und der Lobačevskischen Π -Funktion zum Ziel.

2.3. Flächeninhalte in der Lobačevskischen Geometrie

2.3.1. Dreiecksinhalte und elementargeometrische Flächeninhalte

Die Behandlung dieses Themas in Anlehnung zur euklidischen Elementargeometrie (vgl. MfL, Bd. 6) scheint zunächst aussichtslos. Denn in der Lobačevskischen Geometrie gibt es keine Quadrate. Darüber hinaus kann die Inhaltsformel $I(ABC) = \frac{1}{2} gh$ für Dreiecke nicht gelten: Um das einzusehen, betrachten wir ein Dreieck ABC

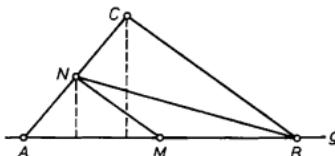


Abb. 73

mit M und N als Mittelpunkten der Seiten AB bzw. AC (Abb. 73). Wäre die genannte Formel gültig, dann erhielten wir zunächst

$$\begin{aligned} I(ABC) &= I(ABN) + I(BCN) = 2I(ABN) \\ &= 2(I(AMN) + I(BMN)) = 4I(AMN). \end{aligned}$$

Wegen $a(A, B) = 2a(A, M)$ müßte für $g := g_{AB}$ sofort $a(C, g) = 2a(N, g)$ gelten im Widerspruch zu

$$a(C, g) > 2a(N, g)$$

gemäß der Formel (4) am Schluß des Beweises von Hilfssatz 2.15.

Für die elementare Inhaltslehre ist die Kenntnis der Dreiecksinhalte unentbehrlich. Um das nachzuweisen, wollen wir zunächst eine grobe, durch Axiome bestimmte Beschreibung der Dreiecksinhalte vornehmen: Für uns sind Dreiecksinhalte positive Elemente einer Menge M , welche Trägermenge einer Struktur $(M, +, <)$ mit einer (totalen) Ordnung $<$ und einer assoziativen, kommutativen und monotonen Opera-

tion + mit Nullelement 0 ist, wobei die Abbildung I , die jeder Dreiecksfläche \overline{ABC} ihren Flächeninhalt $I(\overline{ABC})$ zuordnet, folgende Eigenschaften besitzt:

- (a) $I(\overline{ABC}) > 0$,
- (b) $A \notin g_{BC} \wedge X \in (BC) \Rightarrow I(\overline{ABC}) = I(\overline{ABX}) + I(\overline{ACX})$,
- (c) $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C' \Rightarrow I(\overline{ABC}) = I(\overline{A'B'C'})$.

Wie angekündigt wenden wir uns jetzt der Entwicklung der elementaren Inhaltslehre zu, wobei wir im wesentlichen mit (b) auskommen.

Definition. Eine Menge $\{\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_n\}$ von Dreiecksflächen heißt eine (*elementargeometrische*) **Zerlegung einer ebenen Figur F** genau dann, wenn

1. die Vereinigung der Dreiecksflächen F ergibt $(F = \bigcup_{i=1}^n \overline{D}_i)$,
2. für $i \neq k$ das Innere (D_i) von D_i mit dem Inneren (D_k) von D_k keine gemeinsamen Punkte besitzt ($i \neq k \Rightarrow (D_i) \cap (D_k) = \emptyset$).

Beispiele für solche Zerlegungen sind in Abb. 74 dargestellt. In Abb. 74a ist — vgl. (b) — eine *einfache Transversalzerlegung* einer Dreiecksfläche dargestellt, in Abb. 74c die Zerlegung einer Figur, die keine n -Ecksfläche ist.

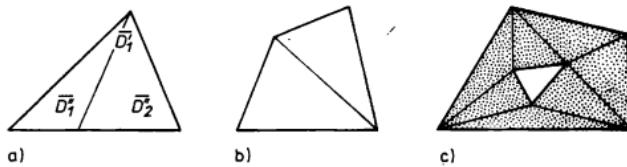


Abb. 74

Jeder Zerlegung $\{\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_n\}$ einer Figur F kann man zunächst durch

$$I = \sum_{s=1}^n I(\overline{D}_s)$$

einen Inhalt zuordnen. Wollen wir darüber hinaus I sogar F eindeutig zuordnen, dann müssen wir zeigen, daß für je zwei Zerlegungen $\{\overline{D}_1', \dots, \overline{D}_m'\}$ und $\{\overline{D}_1'', \dots, \overline{D}_n''\}$ von F stets

$$(5) \quad \sum_{\mu} I(\overline{D}_{\mu}') = \sum_{\nu} I(\overline{D}_{\nu}'')$$

gilt.¹⁾

Der Fall $m = 1$ und $n = 2$ ist besonders einfach, nämlich eine einfache Transversalzerlegung von \overline{D}_1' in \overline{D}_1'' und \overline{D}_2'' (Abb. 74a). Hieraus erhalten wir den

Hilfssatz 2.31. Es gilt $I(\overline{PQR}) = \sum_{s=1}^k I(\overline{D}_s)$, wenn $\{\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_k\}$ die Dreiecksfläche \overline{PQR} derart zerlegt, daß sämtliche Ecken von D_1, \dots, D_k in PQ oder QR liegen (Abb. 75).

¹⁾ Im Schulunterricht wird diese Gleichheit allzu oft stillschweigend vorausgesetzt.

Beweis. Die Behauptung gelte für jede Zerlegung in $k - 1$ Teile. Wir betrachten jetzt unsere Zerlegung von \overline{PQR} in k Teile sowie die Eckpunkte P_1 und R_1 in PQ bzw. QR , die P bzw. R am nächsten liegen. Entweder P_1R oder PR_1 ist Seite eines Dreiecks D_s , etwa P_1R (Abb. 75). Ist o. B. d. A. $PP_1R = D_k$, dann gilt nach der Induktionsvoraussetzung

$$I(\overline{PQR}) = I(\overline{PP_1R}) + I(\overline{P_1QR}) = I(\overline{D_k}) + \sum_{s=1}^{k-1} I(\overline{D_s}) = \sum_{s=1}^k I(\overline{D_s}),$$

w. z. b. w.

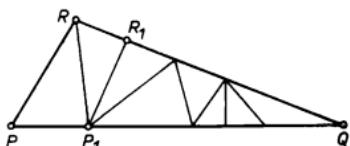


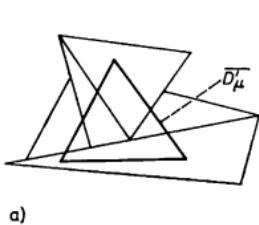
Abb. 75

Satz 2.32. Sind $\{\overline{D}_1', \dots, \overline{D}_m'\}$ und $\{\overline{D}_1'', \dots, \overline{D}_n''\}$ zwei beliebige Zerlegungen einer ebenen Figur F , dann gilt (5).

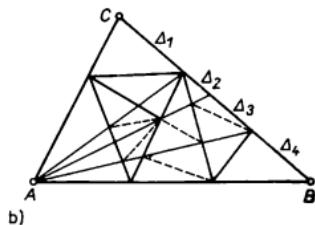
Beweis. Jede Dreiecksfläche \overline{D}_μ' ist in gewisse Vielecksflächen zerlegt, die von den D_ν'' erzeugt werden, die das Innere von \overline{D}_μ' treffen (Abb. 76a). Indem wir die entstandenen Vielecksflächen durch Diagonalen zerlegen, erhalten wir eine „verfeinerte“ neue Zerlegung derart, daß sich jedes \overline{D}_μ' und jedes \overline{D}_ν'' aus Dreiecken dieser Zerlegung zusammensetzen läßt. Die Gleichung (5) gilt deshalb dann, wenn für eine Zerlegung $\{\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_k\}$ einer Dreiecksfläche \overline{D}

$$(6) \quad I(\overline{D}) = \sum_{\mu=1}^k I(\overline{D}_\mu')$$

(Verallgemeinerung des Hilfssatzes 2.31) gilt.



a)



b)

Abb. 76

Es sei $D = ABC$ ein beliebiges Dreieck und $\{\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_k\}$ eine beliebige Zerlegung von \overline{D} (Abb. 76b). Den Eckpunkt A verbinden wir mit jedem Punkt $P \in BC$, für den AP eine Ecke von einem der Dreiecke D_s enthält. Dadurch entsteht eine Zerlegung $\{\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2, \dots\}$ von \overline{D} mit $I(\overline{D}) = \sum_i I(\overline{\Delta}_i)$ nach dem Hilfssatz 2.31. Jedes $\overline{\Delta}_i$ zerfällt

auf Grund der ursprünglichen Zerlegung $\{\bar{D}_1, \dots, \bar{D}_k\}$ in Dreiecks- und Vierecksflächen; letztere teilen wir durch eine Diagonale und erhalten eine Zerlegung $\{\bar{\Delta}_{i1}, \bar{\Delta}_{i2}, \dots\}$ von $\bar{\Delta}_i$. Es gilt $I(\bar{\Delta}_i) = \sum_j I(\bar{\Delta}_{ij})$ und somit $I(\bar{D}) = \sum_{i,j} I(\bar{\Delta}_{ij})$ nach dem Hilfssatz 2.31, denn die Ecken von $\bar{\Delta}_{ij}$ liegen in den von A ausgehenden Seiten von $\bar{\Delta}_i$.

Wie ist die Zerlegung von \bar{D}_* durch die $\bar{\Delta}_{ij}$ beschaffen (Abb. 76b)? Liegt eine Seite von D_* in einer von A ausgehenden Geraden, dann enthalten nur die anderen Seiten Ecken von $\bar{\Delta}_{ij}$, so daß sich der Hilfssatz 2.31 anwenden läßt. Andernfalls wird \bar{D}_* durch eine Seite eines $\bar{\Delta}_i$ einfach in zwei Teildreiecksflächen zerlegt, die ihrerseits die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2.31 erfüllen. Durch Klammerung in $\sum_{i,j} I(\bar{\Delta}_{ij})$ erhalten wir

$$I(\bar{D}) = \sum_{i,j} I(\bar{\Delta}_{ij}) = \sum_{s=1}^k I(\bar{D}_s),$$

w. z. b. w.

Nach dem Satz dürfen wir $\sum_{s=1}^k I(\bar{D}_s)$ nun der durch $\{\bar{D}_1, \dots, \bar{D}_n\}$ zerlegten Figur F zuordnen und ihren *elementargeometrischen Flächeninhalt* nennen:

$$(7) \quad I(F) := \sum_{s=1}^n I(\bar{D}_s).$$

Die Formel (6) besagt gerade, daß der elementargeometrische Flächeninhalt einer Dreiecksfläche mit ihrem Dreiecksinhalt übereinstimmt, daß die Abbildung I auf zerlegbare Figuren fortgesetzt werden konnte.

Aufgabe

In einem Viereck $ABCD$ mögen sich AC und BD in S schneiden. Man zeige, daß

- die beiden Zerlegungen der Vierecksfläche \overline{ABCD} in je zwei Dreiecke mit Hilfe einer Diagonale (5) erfüllen und daß
- mit a) der Satz 2.32 für Vierecke nicht entbehrliech wird.

2.3.2. Defekte als Dreiecksinhalte

Dem aufmerksamen Leser wird nicht entgangen sein, daß in der Lobačevskischen Geometrie für die Funktion δ , die jedem Dreieck ABC seinen Defekt $\delta(ABC)$ zuordnet, nach den Sätzen 2.8' und 2.5

- $0 < \delta(ABC) < 2R$,
- $A \notin g_{BC} \wedge X \in (BC) \Rightarrow \delta(ABC) = \delta(ABX) + \delta(ACX)$,
- $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C' \Rightarrow \delta(ABC) = \delta(A'B'C')$

gilt.¹⁾ Jedoch eignen sich Winkelgrößen noch nicht als Dreiecksinhalte, da ihre Addition nicht immer ausführbar ist und da die unbeschränkte Ausführbarkeit der Addition von Dreiecksinhalten eine unerlässliche Voraussetzung für die Definition der elementargeometrischen Flächeninhalte gemäß (7) in Abschnitt 2.3.1 darstellt. Um diesen Mangel zu beheben, betten wir die Winkelgrößen in eine geordnete Struktur mit kommutativer, assoziativer und monotoner Addition ein: Es sei M die Menge der geordneten Paare (n, ξ) , für die n eine natürliche Zahl und ξ eine Winkelgröße mit $o \leq \xi < R$ ist.²⁾ Wir erklären

$$(k, \alpha) + (l, \beta) := \begin{cases} (k + l, \alpha + \beta) & \text{für } \alpha + \beta < R, \\ (k + l + 1, \alpha + \beta - R) & \text{für } R \leq \alpha + \beta < 2R \end{cases}$$

und setzen

$$(k, \alpha) < (l, \beta) \Leftrightarrow k < l \vee k = l \wedge \alpha < \beta$$

(lexikographische Ordnung). Dann gilt

Satz 2.33. *Die Relation $<$ der Struktur $(M, +, <)$ ist eine (totale) Ordnung und die Operation $+$ eine kommutative, assoziative und monotone Addition in M . Die Teilmenge*

$$W := \{(n, \xi) \in M : n = 0 \vee n = 1 \vee (n = 2 \wedge \xi = o)\}$$

bildet eine Unterstruktur von $(M, +, <)$ mit einer partiellen Operation, die vermöge

$$(n, \xi) \mapsto nR + \xi$$

zur Struktur der Winkelgrößen isomorph ist.

Beweis. a) Eigenschaften der Relation $<$. In der Mengenlehre kann gezeigt werden, daß die Eigenschaften einer (totalen) Ordnung für die lexikographische Ordnung aus den entsprechenden Eigenschaften der verwendeten geordneten Mengen — hier der Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen und des halboffenen Intervalls $[o, R)$ — folgen: Die Irreflexivität ist offensichtlich. Zum Beweis der Transitivität sei $(k, \alpha) < (l, \beta)$ und $(l, \beta) < (m, \gamma)$.

Fall 1. $k < l$ und $l \leq m$. Dann gilt $k < m$.

Fall 2. $k \leq l$ und $l < m$. Dann ist ebenfalls $k < m$.

Fall 3. $k = l = m$, $\alpha < \beta$ und $\beta < \gamma$. Es gilt $k = m$ und $\alpha < \gamma$.

Auch die Konnexität ist leicht einzusehen, denn aus $(k, \alpha) \neq (l, \beta)$ folgt $k \neq l$ oder $\alpha \neq \beta$, im Fall $k \neq l$ ist $k < l$ oder $l < k$, im Fall $k = l$ sofort $\alpha < \beta$ oder $\beta < \alpha$.

¹⁾ In der euklidischen Geometrie sind Defekte als Dreiecksinhalte untauglich, weil $\delta(ABC) = o$ für alle Dreiecke ABC gilt.

²⁾ Wir wählen hier die folgende elementare Konstruktion und vermeiden somit die nicht-elementare Einführung von nicht negativen reellen Zahlen als Winkelmaßzahlen. Vgl. auch S. BREHMER, Eine elementare Konstruktion von Winkelzahlen in der komplexen Zahlen-ebene, Acta math. 15 (1964), 53–55.

b) Eigenschaften der Operation $+$. Die Kommutativität ist offensichtlich. Um $[(k, \alpha) + (l, \beta)] + (m, \gamma) = (k, \alpha) + [(l, \beta) + (m, \gamma)]$ nachzuweisen, treffen wir eine umfangreiche Fallunterscheidung:

Fall 1. $\alpha + \beta, \beta + \gamma < R$.

i) $\alpha + \beta + \gamma < R$:

$$\begin{aligned} [(k, \alpha) + (l, \beta)] + (m, \gamma) &= (k + l, \alpha + \beta) + (m, \gamma) \\ &= (k + l + m, \alpha + \beta + \gamma) \\ &= (k, \alpha) + (l + m, \beta + \gamma) \\ &= (k, \alpha) + [(l, \beta) + (m, \gamma)]. \end{aligned}$$

ii) $R \leq \alpha + \beta + \gamma < 2R$:

$$\begin{aligned} [(k, \alpha) + (l, \beta)] + (m, \gamma) &= (k + l, \alpha + \beta) + (m, \gamma) \\ &= (k + l + m + 1, \alpha + \beta + \gamma - R) \\ &= (k, \alpha) + (l + m, \beta + \gamma) \\ &= (k, \alpha) + [(l, \beta) + (m, \gamma)]. \end{aligned}$$

Fall 2. $\alpha + \beta < R \leq \beta + \gamma < 2R$. Dann gilt $R \leq \alpha + \beta + \gamma < 2R$ und

$$\begin{aligned} [(k, \alpha) + (l, \beta)] + (m, \gamma) &= (k + l, \alpha + \beta) + (m, \gamma) \\ &= (k + l + m + 1, \alpha + \beta + \gamma - R) \\ &= (k, \alpha) + (l + m + 1, \beta + \gamma - R) \\ &= (k, \alpha) + [(l, \beta) + (m, \gamma)]. \end{aligned}$$

Den Beweis der restlichen Fälle

Fall 3. $\beta + \gamma < R \leq \alpha + \beta < 2R$,

Fall 4. $R \leq \alpha + \beta, \beta + \gamma < 2R$,

i) $\alpha + \beta + \gamma - R < R$,

ii) $R \leq \alpha + \beta + \gamma - R < 2R$

überlassen wir dem Leser (vgl. Aufgabe 1).

Zum Beweis der Monotonie betrachten wir Paare (k, α) , (l, β) und (m, γ) mit $(k, \alpha) < (l, \beta)$.

Fall 1'. $k < l$. Dann gilt $k + m < l + m < l + m + 1$.

i) $\alpha + \gamma < R$. Wegen $(k, \alpha) + (m, \gamma) = (k + m, \alpha + \gamma)$ gilt bereits

$$(k, \alpha) + (m, \gamma) < (l, \beta) + (m, \gamma).$$

ii) $R \leq \alpha + \gamma, \beta + \gamma < 2R$. Hier gilt die Behauptung mit $k + m + 1 < l + m + 1$.

iii) $\beta + \gamma < R \leq \alpha + \gamma < 2R$. Aus $\alpha < R$ folgt $\alpha + \gamma < R + \gamma$ und danach $\alpha + \gamma - R < \gamma < \beta + \gamma$. Mit $k + m + 1 \leq l + m$ erhalten wir

$$\begin{aligned} (k, \alpha) + (m, \gamma) &= (k + m + 1, \alpha + \gamma - R) \\ &< (l + m, \beta + \gamma) = (l, \beta) + (m, \gamma). \end{aligned}$$

Fall 2'. $k = l$ und $\alpha < \beta$. Hier erhalten wir unmittelbar die Behauptung.

Den Beweis der nur noch offenen Isomorphieaussage überlassen wir ebenfalls dem Leser.

Nach dem Satz dürfen wir die Elemente aus W durch ihnen zugeordnete Winkelgrößen ersetzen und $(n, \xi) = nR + \xi$ für alle Elemente $(n, \xi) \in M$ setzen. Als Folgerung erhalten wir

Satz 2.34. *In der Lobačevskischen Geometrie kann $I(\overline{ABC}) := \delta(ABC)$ gesetzt werden. Dabei sind die Dreiecksinhalte durch $2R$ nach oben beschränkt.*

Aufgaben

1. Man vervollständige den Beweis des Satzes 2.33.
2. In einer Geraden sei eine Skala (vgl. Abb. 42) gegeben. Ist nun P ein Punkt außerhalb der Geraden, dann kann P mit allen Punkten der Skala verbunden werden. Man beweise mit Hilfe der entstehenden Dreiecke, daß in der Lobačevskischen Geometrie die Formel $I = \frac{1}{2}gh$ der euklidischen Geometrie für Dreiecksinhalte nicht gelten kann.

2.3.3. Zerlegungsgleichheit und elementargeometrische Flächeninhalte

Der Leser könnte annehmen, daß sich das merkwürdige Resultat des Abschnittes 2.3.2 durch eine großzügige Formulierung der Eigenschaften von Dreiecksinhalten ergibt, oder die erhaltenen Resultate wegen des „ungeometrischen“ Vorgehens ablehnen. Wir wollen deshalb hier einen geometrischen Weg zu den elementargeometrischen Flächeninhalten angeben. Dabei werden Flächeninhalte wie die Längen und Winkelgrößen als Äquivalenzklassen gewonnen, und zwar in der Menge der zerlegbaren Figuren.

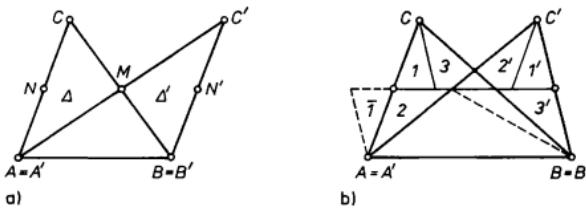


Abb. 77

Definition. Figuren F und F' heißen genau dann *zerlegungsgleich* (in Zeichen $F \underset{z}{=} F'$), wenn Zerlegungen $\{\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_n\}$ und $\{\overline{D}'_1, \dots, \overline{D}'_n'\}$ mit $D_v \cong D'_v$ für $v = 1, \dots, n$ existieren.

Die Zerlegungsgleichheit ist in der Menge der zerlegbaren Figuren offensichtlich reflexiv und symmetrisch; die Transitivität dieser Relation wird mit Hilfe einer geeigneten Verfeinerung der Zerlegung nachgewiesen (vgl. Aufgabe 1). Die Äquivalenzklassen werden wir kurz *Flächeninhalte* nennen.

Ein Beispiel für zerlegungsgleiche Dreiecksflächen bilden Dreiecke mit einer gemeinsamen Seite, für die sich zwei andere Seiten in einem Punkt M halbieren (Abb. 77a): Die Spiegelung an M vertauscht die Teildreiecke Δ und Δ' , die nicht

gemeinsam sind. Dabei erkennen wir noch, daß die Seitenmittelpunkte M , N und N' kollinear sind.

Dreiecksflächen mit einer gemeinsamen Seite sind auch dann zerlegungsgleich, wenn die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte der anderen Seiten eine Strecke gemeinsam haben (Abb. 77b): Die notwendigen Kongruenzen weist man mit Hilfe der Spiegelungen an den Seitenmittelpunkten nach.

Bezeichnen wir die Verbindungsgerade der Mittelpunkte zweier Dreiecksseiten als (zur dritten Seiten gehörige) *Mittellinie*, dann gilt der

Satz 2.35. *Dreiecksflächen, die in einer Seite und der zugehörigen Mittellinie übereinstimmen (Abb. 78), besitzen denselben Flächeninhalt.*

Beweis. Für die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sei $A = A'$, $B = B'$ und g die gemeinsame, zu AB gehörige Mittellinie (Abb. 78). Mit E_0 , E_1 , M und N bezeichnen wir die Mittelpunkte der Seiten AC , BC , AC' bzw. BC' ; o. B. d. A. sei $M \in E_0 E_1^+$. Indem wir das Dreieck ACE_1 an E_1 spiegeln, erhalten wir die zu \overline{ABC} zerlegungsgleiche Dreiecksfläche \overline{ABC}_1 mit $C_1 := A^{E_1}$; dabei liegt der Mittelpunkt E_2 von BC_1 auf g . . . Indem wir $AC_{k-1}E_k$ an E_k spiegeln, erhalten wir die zu \overline{ABC} zerlegungsgleiche Dreiecksfläche \overline{ABC}_k mit $C_k := A^{E_k}$, wobei der Mittelpunkt E_{k+1} von BC_k auf g liegt. . .

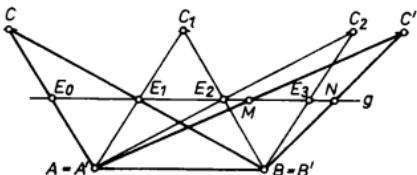


Abb. 78

Wegen der archimedischen Anordnung von g (vgl. Abschnitt 2.1.1) gibt es einen Index n mit $E_n E_{n+1} \cap MN \neq \emptyset$. Nach den Vorbemerkungen gilt

$$\overline{ABC} = \overline{ABC}_1 = \dots = \overline{ABC}_n = \overline{ABC},$$

w. z. b. w.

Die Menge der Flächeninhalte läßt sich strukturieren: Wir nennen den Flächeninhalt von F *Summe* der Flächeninhalte von F_1 und F_2 genau dann, wenn es eine Zerlegung $\{\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_n\}$ von F derart gibt, daß $F_1 = \bigcup_{z=1}^k \overline{D}_z$ und $F_2 = \bigcup_{z=k+1}^n \overline{D}_z$, für einen Index k mit $1 \leq k < n$ gilt. Der Flächeninhalt von F_1 heißt *kleiner* als der Flächeninhalt von F genau dann, wenn es eine Zerlegung $\{\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_n\}$ von F gibt, so daß $F_1 = \bigcup_{z=1}^k \overline{D}_z$, für einen Index k mit $1 \leq k < n$ ist. — Man überlegt sich leicht, daß die Addition der Flächeninhalte eindeutig ist.

Aus der Definition der Zerlegungsgleichheit folgt unmittelbar

$$\overline{F} = \overline{F'} \Rightarrow I(F) = I(F'),$$

da kongruente Dreiecke denselben Defekt besitzen. Ist der Flächeninhalt von F gleich der Summe der Flächeninhalte von F_1 und F_2 , dann gilt

$$I(F) = I(F_1) + I(F_2);$$

ist der Flächeninhalt von F_1 kleiner als der Flächeninhalt von F , dann ist

$$I(F_1) < I(F).$$

Das legt die Vermutung nahe, daß die Struktur der Flächeninhalte isomorph zur Struktur der elementargeometrischen Flächeninhalte ist. Um diese Aussage zu beweisen, stellen wir einige Hilfssätze bereit.

Hilfssatz 2.36. *Die zu AB gehörige Mittellinie des Dreiecks ABC sei g . Dann ist die Mittelsenkrechte f von AB senkrecht zu g ; sie ist folglich eine weitere Symmetriechse des Vierecks ABB^gA^g , der Schnittpunkt S von f und g ist Symmetriezentrum. \overline{ABC} und $\overline{ABA^g}$ sind zerlegungsgleich, und die Winkel des Vierecks haben sämtlich die Größe $R - \frac{\delta}{2}$ mit $\delta := \delta(ABC)$.*

Folgerung. *Gilt $0 < \delta_1 < \delta = \delta(ABC)$, dann gibt es zwischen B und C einen Punkt C_1 mit $\delta(ABC_1) = \delta_1$.*

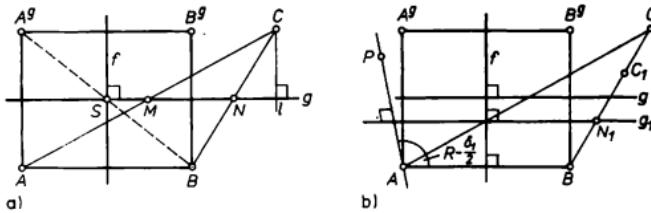


Abb. 79

Beweis. Die Mittelpunkte M und N von AC bzw. BC liegen auf g . Ist l das Lot von C auf g , dann gibt es nach dem Satz 1.17b eine Gerade $f \perp g$ mit $\sigma_f = \sigma_M \sigma_l \sigma_N$. Wegen (vgl. Abb. 79a)

$$A^g = ((A^M)^l)^N = (C^l)^N = C^N = B$$

ist f außerdem Mittelsenkrechte von AB und folglich von A^gB^g , d. h., f ist wie g eine Symmetriechse von ABB^gA^g . Somit ist der Schnittpunkt S von f und g Symmetriezentrum dieses Vierecks.

Nach dem Satz 2.35 sind die Dreiecksflächen \overline{ABC} und $\overline{ABA^g}$ zerlegungsgleich. Mithin gilt $\delta := \delta(ABC) = \delta(ABA^g)$. Da im Viereck ABB^gA^g alle Winkel gleich groß sind und die Summe der Größen der Winkel bei A und B wegen $\delta(ABA^g) = \delta$ offensichtlich $2R - \delta$ ergibt, gilt auch die letzte Teilbehauptung des Hilfssatzes.

Zum Beweis der Folgerung tragen wir an AB^+ in die Halbebene ABA^g+ einen Winkel der Größe $R - \frac{\delta_1}{2}$ an und erhalten eine Halbgerade AP^+ (vgl. Abb. 79b).

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $A < P$. Nach dem Hilfssatz 2.15 wächst $a(X, f)$ von einer Stelle an für fallendes $X \in g_{AP}$ unbeschränkt wie für wachsendes $X \in g_{AP}$ (wegen des unbeschränkten Wachsens von $a(X, f)$ für $X \in A^a A^-$). Da f und g_{AP} punktfremd sind, haben diese Geraden somit nach dem Satz 2.17 ein gemeinsames Lot g_1 . Das Viereck $ABB^a A^{a_1}$ ist gleichwinklig und kann wegen $2\delta_1 < 2\delta$ als Ungleichung zwischen elementargeometrischen Flächeninhalten das Viereck $ABB^a A^a$ nicht umfassen; folglich liegt g_1 zwischen g_{AB} und g . Die Seite BC trifft g_1 in einem Punkt N_1 ; es sei $C_1 := B^{N_1}$. Die zu AB gehörige Mittellinie des Dreiecks ABC_1 muß durch N_1 gehen und auf f senkrecht stehen; somit ist g_1 diese Mittellinie. Nunmehr ist es nicht schwer, mit Hilfe des Satzes 2.35 wie behauptet $\delta(ABC_1) = \delta_1$ nachzuweisen, w. z. b. w.

Hilfssatz 2.37. *Gilt für die elementargeometrischen Flächeninhalte $I(F)$ und $I(F')$ der zerlegbaren Figuren F bzw. F' die Ungleichung*

$$I(F) \leq I(F'),$$

dann gibt es Zerlegungen $\{\bar{D}_1, \dots, \bar{D}_m\}$ von F und $\{\bar{D}'_1, \dots, \bar{D}'_n\}$ von F' mit $\delta(D_\mu) = \delta(D'_\mu)$ für $\mu = 1, \dots, m$. Es gilt $m < n$ im Fall $I(F) < I(F')$ und $m = n$ im Fall $I(F) = I(F')$.

Beweis. Es sei $\{\bar{\Delta}_1, \dots, \bar{\Delta}_k\}$ eine Zerlegung von F und $\{\bar{\Delta}'_1, \dots, \bar{\Delta}'_l\}$ eine Zerlegung von F' . Wir führen einen induktiven Beweis über $k + l$ und setzen voraus, daß die Behauptung für Zerlegungen mit einer Summe $< k + l$ gilt. Es sei etwa $\delta(\Delta_1) \geq \delta(\Delta'_1)$. Im Fall $\delta(\Delta_1) = \delta(\Delta'_1)$ setzen wir $D_1 := \Delta_1$ und $D'_1 := \Delta'_1$. Es gilt

$$\sum_{\mu=2}^k I(\bar{\Delta}_\mu) \leq \sum_{\nu=2}^l I(\bar{\Delta}'_\nu)$$

und $(k - 1) + (l - 1) < k + l$, so daß die Behauptung nach der Induktionsvoraussetzung gilt. Im Fall $\delta(\Delta_1) > \delta(\Delta'_1)$ können wir nach der Folgerung aus dem Hilfssatz 2.36 das Dreieck Δ_1 durch eine einfache Transversalzerlegung $\{\bar{D}_1, \bar{\Delta}\}$ mit $\delta(D_1) = \delta(\Delta'_1)$ zerlegen. Es sei $D'_1 := \Delta'_1$. Wegen

$$I(\bar{\Delta}) + \sum_{\mu=2}^k I(\bar{\Delta}_\mu) \leq \sum_{\nu=2}^l I(\bar{\Delta}'_\nu)$$

und $k + (l - 1) < k + l$ folgt die Behauptung wiederum nach der Induktionsvoraussetzung.

Die übrigen Teilbehauptungen sind nun trivial, w. z. b. w.

Hilfssatz 2.38. *Für Dreiecke ABC und $A'B'C'$ folgt aus der Gleichung $\delta(ABC) = \delta(A'B'C')$ stets $\overline{ABC} = \overline{A'B'C'}$.*

Beweis. Es sei $\delta := \delta(ABC) = \delta(A'B'C')$. Nach dem Hilfssatz 2.36 dürfen wir $\not\propto BAC, \not\propto B'A'C' \in R - \frac{\delta}{2}$ und somit o. B. d. A. $A' = A$, $B' \in AB^+$, $C' \in AC^+$ voraussetzen. Wegen $\delta(ABC) = \delta(A'B'C')$ kann kein Dreieck Teildreieck des anderen sein. Folglich gilt $B = B'$ und $C = C'$ oder $B \in (AB')$ und $C' \in (AC)$ oder $B' \in (AB)$ und $C \in (AC')$. Im ersten Fall sind wir am Ziel. Von den anderen Fällen genügt

es, den in Abb. 80 dargestellten zu betrachten. Offensichtlich gilt $\delta_1 := \delta(BB'C') = \delta(BCC')$; die zugehörigen gleichwinkligen Vierecke gemäß Hilfssatz 2.36 müssen zusammenfallen, da $R - \frac{\delta_1}{2}$ die Größe ihrer Winkel und $2\delta_1$ ihr elementargeometrischer Flächeninhalt ist. Somit besitzen die Dreiecke $BB'C'$ und BCC' dieselbe zu BC' gehörige Mittellinie g , so daß die Behauptung nach dem Satz 2.35 gilt, w. z. b. w.

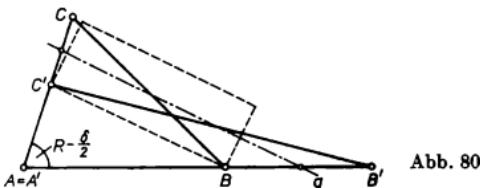


Abb. 80

Satz 2.39. *Die Struktur der (auf der Grundlage der Zerlegungsgleichheit gebildeten) Flächeninhalte ist isomorph zur Struktur $(M, +, <)$ der elementargeometrischen Flächeninhalte des Abschnittes 2.3.2.*

Beweis. a) Wir kennen bereits die Implikation

$$\underset{z}{F} = F' \Rightarrow I(F) = I(F'),$$

die sich unmittelbar aus der Definition der Zerlegungsgleichheit ergibt. Um die Umkehrung zu beweisen, betrachten wir Figuren F und F' mit $I(F) = I(F')$. Nach dem Hilfssatz 2.37 gibt es Zerlegungen $\{\bar{D}_1, \dots, \bar{D}_n\}$ von F und $\{\bar{D}'_1, \dots, \bar{D}'_n\}$ von F' mit $\delta(D_\nu) = \delta(D'_\nu)$ für $\nu = 1, \dots, n$, nach dem Hilfssatz 2.38 gilt $\bar{D}_\nu = \underset{z}{D}'_\nu$ für $\nu = 1, \dots, n$. Somit sind F und F' zerlegungsgleich.

b) Es ist nicht schwer, mit den Hilfssätzen 2.37 und 2.38 Relations- und Operationstreue der Abbildung zu beweisen, die der Äquivalenzklasse von F bezüglich der Zerlegungsgleichheit den elementargeometrischen Flächeninhalt $I(F)$ zuordnet, w. z. b. w.

Aufgaben

1. Man beweise, daß die Zerlegungsgleichheit eine Äquivalenzrelation ist.
2. Man vollende den Beweis des Satzes 2.39.

3. Euklidische Geometrie und relative Widerspruchsfreiheit der Lobačevskischen Geometrie

In Abschnitt 2.1.3 haben wir darauf hingewiesen, daß man vielfach versuchte, das 5. Postulat EUKLIDS indirekt zu beweisen. Angesichts der Sätze der Lobačevskischen Geometrie wird der eine oder andere Leser fragen, ob diese Theorie ihre Berechtigung besitzt, ob die Entdecker nicht auch einen indirekten Beweis begonnen hatten, wobei die Herleitung eines Widerspruchs noch aussteht? Das Hauptziel dieses Kapitels besteht darin, mit Hilfe der euklidischen Geometrie die Widerspruchsfreiheit der Lobačevskischen Geometrie zu beweisen. Um dieses Ziel überzeugend zu erreichen, wollen wir im Anschluß an das Kapitel 1 sowie an die Abschnitte 2.1.1 und 2.1.2 die hier benötigten Beweishilfsmittel in Abschnitt 3.1 bereitstellen.

3.1. Gerichtete Strecken und Schubvektoren

3.1.1. Verschiebungen in der euklidischen Geometrie

Nach dem Satz 2.12 (T) ist die Parallelität in der Menge der Geraden eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklasse, die die Gerade g enthält, wird die *Richtung* $\mathfrak{N}(g)$ dieser Geraden genannt.

Ist τ eine Verschiebung des Raumes längs f , dann gilt

$$X \notin f \Rightarrow (fX^+)^\iota = fX^{+1}$$

denn andernfalls wäre τ nicht die identische Abbildung ι des Raumes ($\tau \neq \iota$), und es gäbe durch X und X' eine Ebene ε mit $f \nparallel \varepsilon$ und den Widerspruch $X' \in \varepsilon, \varepsilon'$. Somit liegen X, X' auf einer Abstandslinie zu f , die nach dem Satz 2.10 (4) eine zu f parallele Gerade g ist. Nun überlegt man sich leicht, daß für zueinander parallele Geraden f und g

$$f \nparallel \varepsilon \Leftrightarrow g \nparallel \varepsilon$$

¹⁾ Hieraus folgt speziell, daß τ in jeder Ebene η durch f eine (ebene) Verschiebung längs f induziert.

gilt. In der euklidischen Geometrie lässt τ folglich als Verschiebung des Raumes längs f und g die Richtung $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(f)$ elementweise fest, ist τ also unabhängig von den speziellen Repräsentanten f bzw. g von \mathfrak{R} .

Gilt $P \neq P'$ und $X \notin f := g_{PP'}$ für eine Verschiebung τ , dann ist wegen $g_{PX} \parallel g_{P'X'}$ das Bild X' von X vierte Ecke im Parallelogramm $P'PXX'$. Hierauf können wir die Konstruktion der Bildpunkte bei τ gründen (Abb. 81). Hieraus erkennen wir außerdem die Regel

$$(8) \quad \left(\bigvee_P P' = P' \right) \Rightarrow \tau = \tau',$$

weil nach dem Satz 2.12 (EP) die Parallelen zu Geraden durch Punkte eindeutig sind.

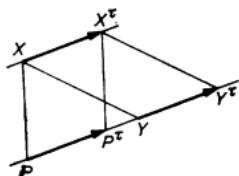


Abb. 81

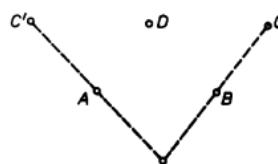


Abb. 82

Nach dem Zusatz zum Satz 1.25 ist $s_A s_B$ eine Verschiebung des Raumes. Hier kann jetzt gezeigt werden, daß $s_A s_B s_C = s_C$ klar. Nun sei $A \neq B$, $C' := (C^B)^A$ und D der Mittelpunkt von C und C' (Abb. 82). Wegen $(C^B)^A = C' = (C^C)^D$ gilt $s_B s_A = s_D s_D$ nach (8), folglich $s_A s_B = s_D s_C$ und schließlich $s_A s_B s_C = s_D$. Wir haben somit den

Satz 3.1. Die Produkte $s_A s_B$ sind Verschiebungen des Raumes, die Produkte $s_A s_B s_C$ Punktspiegelungen.

Ist τ eine Verschiebung des Raumes und M der Mittelpunkt von P und P' für einen Punkt P , dann gilt nach (8) bereits $\tau = s_P s_M$. Somit können wir den folgenden Satz durch Rechnen mit Punktspiegelungen herleiten.

Satz 3.2. Die Verschiebungen des Raumes bilden eine kommutative, auf der Menge aller Punkte einfach transitive Gruppe mit dem Einselement ι .

Beweis. Sind τ und τ' Verschiebungen des Raumes, dann gibt es Punkte A, B, C, D mit $\tau = s_A s_B$ und $\tau' = s_C s_D$. Nach dem Satz 3.1 sind $\tau \tau' = s_A s_B \cdot s_C s_D = s_A \cdot s_B s_C s_D$ und $\tau'^{-1} = s_D s_A$ Verschiebungen des Raumes; da das Nacheinanderausführen von Abbildungen stets assoziativ ist, liegt eine Gruppe vor. Weil $s_P s_Q s_R$ nach dem Satz 3.1 eine Punktspiegelung ist, gilt $s_P s_Q s_R = (s_P s_Q s_R)^{-1} = s_R s_Q s_P$; hiermit erhalten wir die Kommutativität:

$$\begin{aligned} \tau \tau' &= s_A \cdot s_B s_C s_D = s_A \cdot s_D s_C s_B = s_A s_D s_C \cdot s_B \\ &= s_C s_D s_A \cdot s_B = \tau' \tau. \end{aligned}$$

Sind P und P' beliebige Punkte mit dem Mittelpunkt M , dann gilt $P' = P'$ für $\tau := s_{PM}$. Nach (8) ist die kommutative Gruppe der Verschiebungen auf der Menge aller Punkte sogar einfach transitiv, w. z. b. w.

Die Aussage, daß die Menge \mathfrak{B} der Verschiebungen auf der Menge aller Punkte einfach transitiv ist, kann auch wie folgt formuliert werden:

Satz 3.3. *Die Verschiebungen des Raumes bilden eine Klasseneinteilung von $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$, der Menge der geordneten Punktpaare.*

Definieren wir *gerichtete Strecken* \overrightarrow{PQ} einfach durch $\overrightarrow{PQ} := (P, Q)$, dann ist $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$ die Menge der gerichteten Strecken. Die vorliegende Klasseneinteilung von $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$ in Form der Menge der Verschiebungen des Raumes erzeugt eine Äquivalenzrelation in $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$. Wir definieren (vgl. Abb. 81) die *Parallelgleichheit*:

$$\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{P'Q'}$$

genau dann, wenn es eine Verschiebung τ mit $P' = Q$ und $P'' = Q'$ gibt. Um gegebenenfalls den Repräsentantenstatus von $\overrightarrow{P\tau}$ für eine Verschiebung τ hervorzuheben, schreiben wir auch $\tau = v(PP') = v(\overrightarrow{PP'})$, bezeichnen die Verschiebungen auch mit a, b, c, \dots und schreiben ihre kommutative Nacheinanderausführung als Addition. Durch

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{PR} \Leftrightarrow \overrightarrow{QR} \parallel \overrightarrow{ST}$$

erhalten wir eine mit der Verknüpfung von Verschiebungen verträgliche Operation für gerichtete Strecken (Abb. 83a), d. h.

$$v(\overrightarrow{PQ}) + v(\overrightarrow{ST}) = v(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{ST}).$$

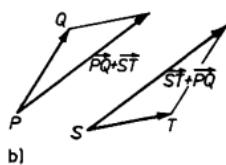
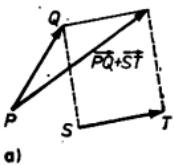


Abb. 83

Das „Antragen von gerichteten Strecken an gerichtete Strecken“ ist assoziativ, jedoch gilt nur $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{ST} \neq \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{PQ}$ (Abb. 83b). Betrachten wir jedoch die Menge

$$\mathfrak{B}_{0E} := \{\overrightarrow{OX} : X \in g_{0E}\},$$

die die Menge der Verschiebungen längs g_{0E} nach der Folgerung aus dem Satz 1.15 vollständig repräsentiert, dann ist dort + offenbar eine assoziative, kommutative und umkehrbare Operation.

Werden in einer Ebene zueinander parallelgleiche Strecken \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{DC} auf eine Gerade g durch parallele Geraden projiziert (Abb. 84), d. h., wenn es projizierende

Geraden $a \parallel b \parallel c \parallel d \nparallel g$ mit $A, A' \in a$; $B, B' \in b$; $C, C' \in c$; $D, D' \in d$ und $A', B', C', D' \in g$ gibt, dann gilt $\overrightarrow{A'B'} \nparallel \overrightarrow{D'C'}$: Die Parallele zu g durch A trifft b in einem Punkt P .

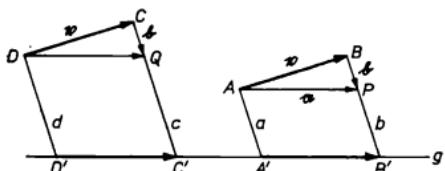


Abb. 84

Es sei $v = v(AB)$, $a = v(AP)$ und $b = v(BP)$ sowie $Q = C + b := C^b \in c$. Wegen $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{DC}$ gilt $v(AB) = v(DC)$ und wegen $a = v + b$ außerdem $a = v(DQ)$. Somit ist

$$\overrightarrow{A'B'} \nparallel \overrightarrow{AP} \nparallel \overrightarrow{DQ} \nparallel \overrightarrow{DC'},$$

d. h.

Satz 3.4. *Die Parallelgleichheit ist bei Parallelprojektion auf eine Gerade invariant.*

Abschließend erwähnen wir die Vertauschungsregel

$$(9) \quad \overrightarrow{PQ} \nparallel \overrightarrow{P'Q'} \Rightarrow \overrightarrow{PP'} \nparallel \overrightarrow{QQ'},$$

die auf der Kommutativität der Verknüpfung von Verschiebungen beruht (vgl. Aufgabe 2).

Aufgaben

1. Man zeige die Äquivalenz

$$\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow s_A s_B = s_D s_C. \quad (1)$$

2. Man beweise

a) die Vertauschungsregel (9),

b) $\overrightarrow{PQ} \nparallel \overrightarrow{P'Q'} \Leftrightarrow \exists \tau \text{ Verschiebung mit } P' = P^\tau \text{ und } Q' = Q^\tau.$

3.1.2. Gerichtete Strecken und reelle Zahlen²⁾

Aus den Definitionen folgte unmittelbar, daß $(\mathfrak{B}_{0E}, +)$ eine kommutative Gruppe ist. Nunmehr wollen wir \mathfrak{B}_{0E} ordnen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $0 < E$. Durch die Festsetzung

$$\overrightarrow{OX} < \overrightarrow{OY} : \Leftrightarrow X < Y$$

¹⁾ Sind A, B, C nicht kollinear und gilt $s_A s_B s_C = s_D$, dann ist folglich D vierte Ecke des Parallelogramms $ABCD$.

²⁾ Vgl. auch Aufgabe 3* zum Abschnitt 1.2.1.

wird in \mathfrak{Z}_{0S} offenbar eine irreflexive, transitive und konnexe Relation, eine (totale) Ordnung, eingeführt. Sie ist auch monoton, denn aus $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OS}$, $\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OT}$ und $P < Q$ erhalten wir nach der Folgerung aus dem Satz 1.15 bereits $S < T$. Zusammenfassend gilt

Satz 3.5. (\mathfrak{Z}_{0S} , $+$, $<$) ist eine geordnete kommutative Gruppe mit dem Nullelement \overrightarrow{OO} und mit $-\overrightarrow{OX} \neq \overrightarrow{XO}$.

Wir besitzen nun eine brauchbare Voraussetzung zur Einführung der Vervielfachung der gerichteten Strecken mit ganzen, rationalen und schließlich mit reellen Zahlen.

a) *Die Vervielfachung von gerichteten Strecken mit ganzen Zahlen*

Definition 1. Wir setzen

$$0 \cdot \overrightarrow{OP} := \overrightarrow{OO}, \quad (m \pm 1) \overrightarrow{OP} := m \overrightarrow{OP} \pm \overrightarrow{OP}$$

für beliebige gerichtete Strecken \overrightarrow{OP} und ganze Zahlen m .

Satz 3.6. Die Vervielfachung der gerichteten Strecken mit ganzen Zahlen hat folgende Eigenschaften ($m, n \in \mathbb{Z}$)

- (1) $1 \cdot \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OX}$,
- (2) $(mn) \overrightarrow{OX} = m(n \overrightarrow{OX})$,
- (3) $(m + n) \overrightarrow{OX} = m \overrightarrow{OX} + n \overrightarrow{OX}$,
- (4) $m(\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{O'X'}) = m \overrightarrow{OX} + m \overrightarrow{O'X'}$.

Folgerung. Für $m \in \mathbb{Z}$ gilt außerdem

- (5) $m \overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OO}$,
- (6) $(-m) \overrightarrow{OX} = -(m \overrightarrow{OX}) = m(-\overrightarrow{OX})$.

Beweis. Zu (1). Es gilt $1 \cdot \overrightarrow{OX} = (0 + 1) \overrightarrow{OX} = 0 \cdot \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OX}$.

Zu (3). Es sei $m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$(m + 0) \overrightarrow{OX} = m \overrightarrow{OX} = m \overrightarrow{OX} + 0 \cdot \overrightarrow{OX}.$$

Wenn $(m + n) \overrightarrow{OX} = m \overrightarrow{OX} + n \overrightarrow{OX}$ für eine beliebige ganze Zahl n gilt, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} (m + (n \pm 1)) \overrightarrow{OX} &= ((m + n) \pm 1) \overrightarrow{OX} = (m + n) \overrightarrow{OX} \pm \overrightarrow{OX} \\ &= (m \overrightarrow{OX} + n \overrightarrow{OX}) \pm \overrightarrow{OX} = m \overrightarrow{OX} + (n \overrightarrow{OX} \pm \overrightarrow{OX}) \\ &= m \overrightarrow{OX} + (n \pm 1) \overrightarrow{OX}, \end{aligned}$$

d. h., (3) gilt für beliebige ganze Zahlen m und n .

Den Beweis von (4) und (2) überlassen wir dem Leser (vgl. Aufgabe 1).

Der Beweis von (5) und (6) für $\vec{OX} \in \mathfrak{Z}_{0E}$ stützt sich auf (1) bis (4) und die Eigenschaften der kommutativen Gruppe $(\mathfrak{Z}_{0E}, +)$:

Zu (5). Wegen $m \vec{OO} = m(\vec{OO} + \vec{OO}) = m \vec{OO} + m \vec{OO}$ ist $m \vec{OO} = \vec{OO}$.

Zu (6). Aus $m \vec{OX} + (-m) \vec{OX} = 0 \cdot \vec{OX} = \vec{OO}$ folgt $(-m) \vec{OX} = -(m \vec{OX})$, und die Beziehung $m \vec{OX} + m(-\vec{OX}) = m(\vec{OX} - \vec{OX}) = \vec{OO}$ zieht $m(-\vec{OX}) = -(m \vec{OX})$ nach sich, w. z. b. w.

Bemerkung. Hierauf beruht die Veranschaulichung der ganzen Zahlen sowie ihrer Ordnung, ihrer Addition und Multiplikation auf einer Zahlengeraden, die wir als $(\mathfrak{Z}_{0E}, +, <)$ deuten:

$$(10a) \quad \mathbb{Z} \rightarrow \mathfrak{Z}_{0E} \quad (m \mapsto \vec{OE}_m := m \vec{OE}).$$

Offenbar ist $k \vec{OE} = \vec{OO}$ für $k = 0$; induktiv weist man $k \vec{OE}$ als positiv für $k > 0$ nach, so daß $k \vec{OE}$ für $k < 0$ negativ ist, d. h., daß $k \vec{OE}$ genau dann positiv ist, wenn $k > 0$ gilt. Wir erhalten bezüglich der

a) **Ordnung**

$$m < n \Leftrightarrow n - m > 0 \Leftrightarrow (n - m) \vec{OE} > \vec{OO} \Leftrightarrow m \vec{OE} < n \vec{OE},$$

b) **Addition**

$$\vec{OE}_{m+n} = (m+n) \vec{OE} = m \vec{OE} + n \vec{OE} = \vec{OE}_m + \vec{OE}_n,$$

c) **Multiplikation**

Wegen der Invarianz der Parallelgleichheit bei Parallelprojektion von g_{0E} auf g_{0F} in der Richtung von g_{BF} und von g_{0F} auf g_{0E} in der Richtung von g_{FE} gilt (Abb. 85)

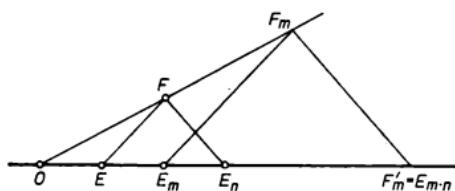


Abb. 85

$$\vec{OF}'_m = m \vec{OE}_n = m(n \vec{OE}) = (mn) \vec{OE} = \vec{OE}_{m \cdot n}.$$

Zusammenfassung. Die Abbildung (10a) ist eineindeutig, bezüglich $<$ relationstreu und bezüglich $+$ operationstreu. Die Multiplikation kann mit Hilfe von Parallelprojektionen veranschaulicht werden.

b) *Die Vervielfachung von gerichteten Strecken mit rationalen Zahlen*

Vorbereitend befassen wir uns mit der n -Teilung von gerichteten Strecken.

Hilfssatz 3.7. Zu jeder positiven ganzen Zahl n gibt es in \mathfrak{Z}_{0E} genau eine gerichtete Strecke \vec{OP} mit $n \vec{OP} = \vec{OE}$.

Beweis. Existenz. Es sei $F \notin g_{OE}$ und in g_{OF} etwa $O < F$ und somit $O < F \leq F_n$, d. h. $F_n \notin g_{OE}$. Bei der Parallelprojektion von g_{OF} auf g_{OE} in der Richtung von g_{EF_n} geht F in einen Punkt $P \in g_{OE}$ über, für den wegen der Invarianz der Parallelgleichheit bei Parallelprojektion $n \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OE}$ gilt (Abb. 85').

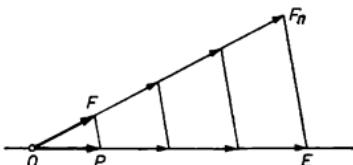


Abb. 85'

Eindeutigkeit. Wäre auch $n \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OE}$ und $\overrightarrow{OQ} \neq \overrightarrow{OP}$, etwa $\overrightarrow{OP} < \overrightarrow{OQ}$, dann wären $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ und $n(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP})$ positiv im Widerspruch zu $n \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OE} = n \overrightarrow{OP}$, w. z. b. w.

Definition 2. Wir setzen für $m \in \mathbb{Z}$ und positive natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}^*$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{n} \overrightarrow{OE} : \Leftrightarrow n \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OE},$$

$$\frac{m}{n} \overrightarrow{OE} := m \left(\frac{1}{n} \overrightarrow{OE} \right).$$

Hilfssatz 3.8. Die Teilung der gerichteten Strecken genügt folgenden Regeln:

$$\frac{1}{m} \left(\frac{1}{n} \overrightarrow{OE} \right) = \frac{1}{m \cdot n} \overrightarrow{OE},$$

$$\frac{1}{m} (k \overrightarrow{OE}) = k \left(\frac{1}{m} \overrightarrow{OE} \right),$$

$$\frac{1}{m} (\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{O'E'}) = \frac{1}{m} \overrightarrow{OE} + \frac{1}{m} \overrightarrow{O'E'}.$$

Außerdem hängt $\frac{m}{n} \overrightarrow{OE}$ nur von \overrightarrow{OE} und der durch $\frac{m}{n}$ bestimmten rationalen Zahl ab.

Beweis. Das entscheidende Beweishilfsmittel ist die Eindeutigkeit der n -Teilung.¹⁾

Bezüglich der Regeln genügt es, die Beweisidee etwa bei der Herleitung der zweiten

¹⁾ Der Vervielfachung mit ganzen Zahlen entspricht in multiplikativen Gruppen die Einführung ganzzahliger Exponenten, der n -Teilung entspricht das Radizieren. Der Beweis obiger Regeln erfolgt somit analog zur Herleitung von Wurzelgesetzen.

Zeile zu demonstrieren (vgl. Aufgabe 2). Aus

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &:= m \left[\frac{1}{m} (k \overrightarrow{OE}) \right] = k \overrightarrow{OE} = k \left(m \left(\frac{1}{m} \overrightarrow{OE} \right) \right) = km \left(\frac{1}{m} \overrightarrow{OE} \right) \\ &= m \left[k \left(\frac{1}{m} \overrightarrow{OE} \right) \right]\end{aligned}$$

folgt wegen der Eindeutigkeit der Teilung von \overrightarrow{OP} in m Teile bereits die „Gleichheit des Inneren der eckigen Klammern“, d. h. $\frac{1}{m} (k \overrightarrow{OE}) = k \left(\frac{1}{m} \overrightarrow{OE} \right)$.

Auch der letzte Teil des Hilfssatzes wird so gefolgt: Es sei $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$, d. h. $mn' = m'n$. Wegen

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &:= (nn') \left(\frac{m}{n} \overrightarrow{OE} \right) = nn' \left(m \left(\frac{1}{n} \overrightarrow{OE} \right) \right) = mnn' \left(\frac{1}{n} \overrightarrow{OE} \right) \\ &= mn' \left(n \left(\frac{1}{n} \overrightarrow{OE} \right) \right) = mn' \overrightarrow{OE} = m'n \overrightarrow{OE} = m'n \left(n' \left(\frac{1}{n'} \overrightarrow{OE} \right) \right) \\ &= m'nn' \left(\frac{1}{n'} \overrightarrow{OE} \right) = nn' \left(m' \left(\frac{1}{n'} \overrightarrow{OE} \right) \right) = nn' \left(\frac{m'}{n'} \overrightarrow{OE} \right)\end{aligned}$$

gilt auf Grund der Eindeutigkeit der Teilung von \overrightarrow{OQ} in nn' Teile

$$\frac{m}{n} \overrightarrow{OE} = \frac{m'}{n'} \overrightarrow{OE},$$

w. z. b. w.

Satz 3.9. Die Vervielfachung der gerichteten Strecken mit rationalen Zahlen hat folgende Eigenschaften ($x, y \in \mathbb{Q}$)

- (1) $1 \cdot \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OE}$,
- (2) $(xy) \overrightarrow{OE} = x(y \overrightarrow{OE})$,
- (3) $(x + y) \overrightarrow{OE} = x \overrightarrow{OE} + y \overrightarrow{OE}$,
- (4) $x(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{O'E'}) = x \overrightarrow{OE} + x \overrightarrow{O'E'}$.

Beweis. (1) ist trivial.

Zum Beweis von (2) sei $x = \frac{m}{n}$ und $y = \frac{m'}{n'}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{mm'}{nn'} \overrightarrow{OE} &= mm' \left[\frac{1}{nn'} \overrightarrow{OE} \right] = m \left(m' \left[\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n'} \overrightarrow{OE} \right) \right] \right) = m \left(\frac{1}{n} \left[m' \left(\frac{1}{n'} \overrightarrow{OE} \right) \right] \right) \\ &= \frac{m}{n} \left[\frac{m'}{n'} \overrightarrow{OE} \right].\end{aligned}$$

Wir dürfen nun den Beweis der übrigen Gleichungen mit Hilfe der Regeln für die Vervielfachung mit ganzen Zahlen gemäß dem Satz 3.6 und der Regeln für die Teilung gemäß Hilfssatz 3.8 übergehen (vgl. Aufgabe 3a).

Bemerkung. Die Abbildung

$$(10b) \quad \mathbb{Q} \rightarrow \mathfrak{Z}_{OE} \quad \left(z = \frac{m}{n} \mapsto \overrightarrow{OE}_z := \frac{m}{n} \overrightarrow{OE} \right)$$

ist wegen

$$m < n \Leftrightarrow \frac{m}{k} \overrightarrow{OE} < \frac{n}{k} \overrightarrow{OE}$$

relationstreu und eineindeutig, nach dem Satz 3.9(3) bezüglich + operationstreu. Auch die Veranschaulichung der Multiplikation ist wegen 3.9(2) analog der Veranschaulichung der Multiplikation ganzer Zahlen.

c) *Die Vervielfachung von gerichteten Strecken mit reellen Zahlen*

Die näherungsweise Vervielfachung von \overrightarrow{OE} mit $z = 2,154\dots$ ist in der Abb. 86 dargestellt: Der gesuchte Endpunkt E_z von $z \overrightarrow{OE}$ muß zwischen E_2 und E_3 , zwischen

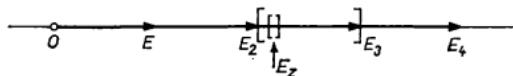


Abb. 86

$E_{2,1}$ und $E_{2,2}, \dots$ liegen. Diese anschauliche Vorstellung verarbeiten wir in der

Definition 3. Es sei $z \in \mathbb{R}$.

1. Im Fall $0 < z = z_0, z_1, z_2, \dots, z_k, \dots$ setzen wir

$$\overrightarrow{OP} = z \overrightarrow{OE} : \Leftrightarrow \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} z_0, z_1, \dots, z_k \overrightarrow{OE} \leqq \overrightarrow{OP} \leqq \left(z_0, z_1, \dots, z_k + \frac{1}{10^k} \right) \overrightarrow{OE}.$$

2. Im Fall $z = 0$ sei weiterhin $z \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OO}$, im Fall $0 > z = -z_0, z_1, z_2, \dots, z_k, \dots$ setzen wir $z \overrightarrow{OE} := z_0, z_1, z_2, \dots, \overrightarrow{OE}_{-1}$ unter Berücksichtigung der Vereinbarung unter 1.

3. Schließlich sei $z \overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OO}$.

Vordringlich sind folgende Fragen zu erklären: Genügt unter 1. höchstens eine gerichtete Strecke den unendlich vielen Ungleichungen? Folgt aus $\frac{m}{n} = z_0, z_1, z_2, \dots$ stets $\frac{m}{n} \overrightarrow{OE} = z_0, z_1, z_2, \dots, \overrightarrow{OE}$, d. h. die Verträglichkeit mit der Definition 2?

Zunächst bemerken wir, daß in \mathfrak{Z}_{OE} wegen

$$\overrightarrow{OX} < \overrightarrow{OY} \Leftrightarrow X < Y$$

jede nicht leere, nach oben (unten) beschränkte Teilmenge eine obere (untere) Grenze besitzt. Außerdem ist \mathfrak{Z}_{OE} archimedisch geordnet (vgl. Abschnitt 2.1.1); somit gibt es zu jeder gerichteten Strecke $\overrightarrow{OP} \in \mathfrak{Z}_{OE}$ eine natürliche Zahl n mit $\overrightarrow{OP} \leqq n \overrightarrow{OE}$

und zu jeder positiven Strecke \overrightarrow{OQ} eine natürliche Zahl k mit $\frac{1}{10^k} \overrightarrow{OE} \leq \overrightarrow{OQ}$. Die Beantwortung obiger Fragen ergibt sich damit aus dem folgenden

Satz 3.10. a) Zu jeder positiven reellen Zahl z gibt es genau eine gerichtete Strecke $\overrightarrow{OP} \in \mathcal{B}_{08}$ mit $\overrightarrow{OP} = z \overrightarrow{OE}$. Dabei ist \overrightarrow{OP} positiv.

b) Zu jeder positiven gerichteten Strecke $\overrightarrow{OP} \in \mathcal{B}_{08}$ gibt es genau eine reelle Zahl z mit $\overrightarrow{OP} = z \overrightarrow{OE}$ (eindeutige Meßbarkeit). Dabei ist z positiv.

Folgerung. Aus $\frac{m}{n} = z_0, z_1 \dots z_k \dots$ folgt

$$\frac{m}{n} \overrightarrow{OE} = z_0, z_1 \dots z_k \dots \overrightarrow{OE}.$$

Beweis. a) Existenz. Es sei $z = z_0, z_1 \dots z_k \dots$. Dann gilt

$$z_0 \leq z_1 \leq \dots \leq z_0, z_1 \dots z_k \leq \dots \leq z,$$

$$z \leq \dots \leq z_0, z_1 \dots z_l + \frac{1}{10^l} \leq \dots \leq z_0, z_1 + \frac{1}{10} \leq z_0 + 1.$$

Für die nicht leere Menge

$$T := \{z_0 \overrightarrow{OE}; z_0, z_1 \overrightarrow{OE}; \dots; z_0, z_1 \dots z_k \overrightarrow{OE}; \dots\}.$$

sind die gerichteten Strecken $\left(z_0, z_1 \dots z_l + \frac{1}{10^l} \right) \overrightarrow{OE}$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) wegen der Relations- und Operationstreue von (10b) sämtlich obere Schranken; folglich besitzt T eine obere Grenze \overrightarrow{OP} , die nach ihrer Definition

$$(11) \quad \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} \left(z_0, z_1 \dots z_k \overrightarrow{OE} \leq \overrightarrow{OP} \leq \left(z_0, z_1 \dots z_k + \frac{1}{10^k} \right) \overrightarrow{OE} \right)$$

erfüllt und offensichtlich positiv ist.

Eindeutigkeit. Genügte noch $\overrightarrow{OP'}$ den unendlich vielen Ungleichungen in (11) und wäre $\overrightarrow{OP'} \neq \overrightarrow{OP}$, etwa $\overrightarrow{OP'} < \overrightarrow{OP}$, dann gäbe es für $\overrightarrow{OQ} := \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'}$ eine natürliche Zahl k mit

$$\frac{1}{10^k} \overrightarrow{OE} < \frac{1}{10^{k-1}} \overrightarrow{OE} \leq \overrightarrow{OQ}$$

im Widerspruch zu

$$\overrightarrow{OQ} \leq \frac{1}{10^k} \overrightarrow{OE}$$

nach der $(k+1)$ -ten Ungleichung in (11).

Zum Beweis der Folgerung sei $\frac{m}{n} = z_0, z_1 \dots z_k \dots$ Dann gilt

$$\wedge_{k \in \mathbb{N}} \left(z_0, z_1 \dots z_k \leq \frac{m}{n} \leq z_0, z_1 \dots z_k + \frac{1}{10^k} \right),$$

wegen der Relationstreue von (10b) erhalten wir

$$\wedge_{k \in \mathbb{N}} \left(z_0, z_1 \dots z_k \overrightarrow{OE} \leq \frac{m}{n} \overrightarrow{OE} \leq \left(z_0, z_1 \dots z_k + \frac{1}{10^k} \right) \overrightarrow{OE} \right),$$

und nach a) gilt $\frac{m}{n} \overrightarrow{OE} = z_0, z_1 \dots z_k \dots \overrightarrow{OE}$.

b) Existenz. Da \mathfrak{B}_{OE} archimedisch geordnet ist, gibt es zu einer beliebigen Strecke $\overrightarrow{OP} \in \mathfrak{B}_{OE}$ eine natürliche Zahl n mit $\overrightarrow{OP} \leq n \overrightarrow{OE}$. Dann gibt es (im Dezimalsystem dargestellte) natürliche Zahlen $z_0, z_0 z_1, z_0 z_1 z_2, \dots, z_0 z_1 z_2 \dots z_k, \dots$ mit

$$z_0 \overrightarrow{OE} \leq \overrightarrow{OP} \leq (z_0 + 1) \overrightarrow{OE} \wedge z_0 0 \left(\frac{1}{10} \overrightarrow{OE} \right) \leq \overrightarrow{OP} \leq (z_0 0 + 10) \frac{1}{10} \overrightarrow{OE},$$

$$z_0 z_1 \left(\frac{1}{10} \overrightarrow{OE} \right) \leq \overrightarrow{OP} \leq (z_0 z_1 + 1) \left(\frac{1}{10} \overrightarrow{OE} \right)$$

$$\wedge z_0 z_1 0 \left(\frac{1}{100} \overrightarrow{OE} \right) \leq \overrightarrow{OP} \leq (z_0 z_1 0 + 10) \left(\frac{1}{100} \overrightarrow{OE} \right),$$

$$z_0 z_1 z_2 \left(\frac{1}{100} \overrightarrow{OE} \right) \leq \overrightarrow{OP} \leq (z_0 z_1 z_2 + 1) \left(\frac{1}{100} \overrightarrow{OE} \right) \wedge \dots$$

$$z_0 z_1 z_2 \dots z_k \left(\frac{1}{10^k} \overrightarrow{OE} \right) \leq \overrightarrow{OP} \leq (z_0 z_1 z_2 \dots z_k + 1) \left(\frac{1}{10^k} \overrightarrow{OE} \right)$$

wobei $0 \leq z_1 \leq 9, 0 \leq z_2 \leq 9, \dots, 0 \leq z_k \leq 9, \dots$ ist. Offenbar gilt dann

$$\overrightarrow{OP} = z_0, z_1 z_2 \dots z_k \dots \overrightarrow{OE}.$$

Eindeutigkeit. Es sei

$$(12) \quad x_0, x_1 \dots x_k \dots \overrightarrow{OE} = y_0, y_1 \dots y_k \dots \overrightarrow{OE}.$$

Fall 1. $x_k = y_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist schon

$$x_0, x_1 \dots x_k \dots = y_0, y_1 \dots y_k \dots$$

Fall 2. $x_n \neq y_n$, o. B. d. A. $x_n = y_n$ für $0 \leq n < k$ und $x_n < y_n$ für eine natürliche Zahl n . Folglich gilt

$$(13) \quad \begin{aligned} x_0, x_1 \dots x_n &= y_0, y_1 \dots y_n, & \text{für} & \quad 0 \leq n < k, \\ x_0, x_1 \dots x_n &< y_0, y_1 \dots y_n, & \text{für} & \quad n \leq k \end{aligned}$$

(Ordnung nach der ersten Differenzstelle). Andererseits ist nach (12)

$$(14) \quad y_0, y_1 \dots y_k \overrightarrow{OE} \leq \overrightarrow{OP} \leq \left(x_0, x_1 \dots x_l + \frac{1}{10^l} \right) \overrightarrow{OE}$$

für beliebige natürliche Zahlen k, l . Aus (14) folgt wegen der Relationstreue von (10b)

$$(15) \quad y_0, y_1 \dots y_k \leq x_0, x_1 \dots x_l + \frac{1}{10^l}.$$

Nunmehr ist die Lösung des Problems auf das Rechnen mit Dezimalbrüchen zurückgeführt: Nach (13) und (15) gilt

$$x_0, x_1 \dots x_n < y_0, y_1 \dots y_n \leq x_0, x_1 \dots x_n + \frac{1}{10^n}$$

und somit $y_n = x_n + 1$; wegen

$$y_0, y_1 \dots y_n \leq y_0, y_1 \dots y_{n+1} \leq x_0, x_1 \dots x_n + \frac{1}{10^n} = y_0, y_1 \dots y_n$$

erhalten wir $y_{n+v} = 0$ für $v = 0, 1, 2, \dots$ und wegen

$$y_0, y_1 \dots y_n \leq x_0, x_1 \dots x_{n+v} + \frac{1}{10^{n+v}} \leq x_0, x_1 \dots x_n + \frac{1}{10^n} = y_0, y_1 \dots y_n$$

außerdem

$$0,0 \dots x_{n+1} \dots x_{n+v} + \frac{1}{10^{n+v}} = \frac{1}{10^n} = 0,0 \dots 1,$$

d. h. $x_{n+1} = \dots = x_{n+v} = 9$ für $v = 1, 2, \dots$ Zusammenfassend können wir

$$x = x_0, x_1 \dots x_n 999 \dots = x_0, x_1 \dots x_{n-1} (x_n + 1) = y_0, y_1 \dots y_n = y$$

konstatieren, w. z. b. w.

Satz 3.11. Die Vervielfachung der gerichteten Strecken mit reellen Zahlen hat folgende Eigenschaften ($x, y \in \mathbb{R}$):

$$(1) \quad 1 \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OE},$$

$$(2) \quad (xy) \overrightarrow{OE} = x(y \overrightarrow{OE}),$$

$$(3) \quad (x+y) \overrightarrow{OE} = x \overrightarrow{OE} + y \overrightarrow{OE}.$$

Folgerung. Für $\overrightarrow{OF} \in \mathfrak{B}_{0B}$ gilt außerdem

$$(4') \quad x(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}) = x \overrightarrow{OE} + x \overrightarrow{OF}.$$

Die Folgerung erhalten wir folgendermaßen mit Hilfe der Meßbarkeit: Ist $\overrightarrow{OF} = y \overrightarrow{OE}$, dann gilt nach (3) und (2)

$$\begin{aligned} x(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}) &= x(\overrightarrow{OE} + y \overrightarrow{OE}) = x(1 + y) \overrightarrow{OE} = (x + xy) \overrightarrow{OE} \\ &= x \overrightarrow{OE} + (xy) \overrightarrow{OE} = x \overrightarrow{OE} + x \overrightarrow{OF}. \end{aligned}$$

Im Satz ist (1) wiederum trivial, während (2) und (3) wie im Beweis der Eindeutigkeitsaussage des Satzes 3.10a mittels der Archimedizität der Ordnung von $\mathfrak{B}_{\mathfrak{O}B}$ gewonnen werden (vgl. Aufgabe 3b). Mit der eingeführten Vervielfachung erweist sich $(\mathfrak{B}_{\mathfrak{O}B}, +)$ als reeller Vektorraum.

d) *Die Strahlensatzgruppe*

Der Leser vermißt im Satz 3.11 zweifellos die Eigenschaft (4) sowie eine Veranschaulichung der Multiplikation reeller Zahlen auf einer Zahlengeraden. Die dazu fehlende Invarianz der Teilverhältnisse bei Parallelprojektion auf eine Gerade werden wir sogleich erarbeiten. Im Gegensatz zum Vorgehen in der Schule erklären wir *Teilverhältnisse gerichteter Strecken auf parallelen Geraden* (Abb. 87)

$$\frac{PQ}{OE} = t \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \parallel t \overrightarrow{OE}.$$

Die Zweckmäßigkeit dieser Definition wird sich u. a. in diesem Abschnitt erweisen.

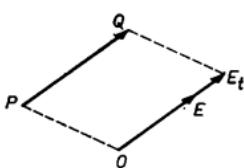


Abb. 87

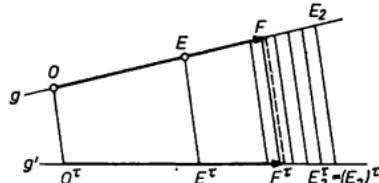


Abb. 88

1) Bei dem Symbol $\frac{PQ}{OE}$ ist ähnlich der Festlegung für eine Verschiebung $v(PQ) = v(\overrightarrow{PQ})$ die Reihenfolge der Punkte zu beachten, da wir von gerichteten Strecken ausgehen. Aus der Definition ergibt sich jedoch die Regel

$$\frac{PQ}{OE} = \frac{QP}{EO}.$$

Betrachtet man gerichtete Strecken \overrightarrow{PX} und \overrightarrow{QX} einer Geraden mit $\overrightarrow{PX} \parallel x \overrightarrow{QX}$, dann gilt (vgl. MfL, Bd. 7, S. 40)

$$\frac{PX}{QX} = x = \text{TV}(P, Q; X).$$

Dabei ist $x = \text{TV}(P, Q; X)$ das (Teil-)Verhältnis, in dem die gerichtete Strecke \overrightarrow{PQ} durch X geteilt wird. Im Fall $x < 0$ spricht man von innerer, im Fall $x > 0$ von äußerer Teilung.

Satz 3.12. Die Teilverhältnisse sind bei Bewegungen und Parallelprojektionen τ invariant, d. h., daß aus $\overrightarrow{OF} = t \overrightarrow{OE}$ stets $\overrightarrow{O^*F^*} = t \overrightarrow{O^*E^*}$ bzw. $\frac{\overrightarrow{OF}}{\overrightarrow{OE}} = \frac{\overrightarrow{O^*F^*}}{\overrightarrow{O^*E^*}}$ folgt.

Beweis. a) $0 < t = t_0, t_1, \dots, t_k, \dots$ Wegen der Invarianz der Parallelgleichheit bei einer Bewegung bzw. Parallelprojektion τ , d. h.

$$\overrightarrow{AB} \# \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{A^*B^*} \# \overrightarrow{D^*C^*},$$

und der Invarianz der Zwischenbeziehung bei einer Bewegung bzw. Parallelprojektion τ , d. h.

$$[AB]^* = A^*B^{*2},$$

gilt offensichtlich

$$t_0 \overrightarrow{O^*E^*} \leq \overrightarrow{O^*F^*} \leq (t_0 + 1) \overrightarrow{O^*E^{*3}},$$

$$t_0, t_1 \overrightarrow{O^*E^*} \leq \overrightarrow{O^*F^*} \leq \left(t_0, t_1 + \frac{1}{10} \right) \overrightarrow{O^*E^{*3}},$$

$$t_0, t_1, \dots, t_k \overrightarrow{O^*E^*} \leq \overrightarrow{O^*F^*} \leq \left(t_0, t_1, \dots, t_k + \frac{1}{10^k} \right) \overrightarrow{O^*E^*},$$

d. h. nach der Eindeutigkeitsaussage im Satz 3.10a bereits

$$\overrightarrow{O^*F^*} = t \overrightarrow{O^*E^*}.$$

b) Für $t = 0$ ist die Behauptung trivial.

c) Für $0 > t = -t_0, t_1, \dots, t_k, \dots$ gilt nach a)

$$\overrightarrow{O^*F^*} = -t_0, t_1, \dots, \overrightarrow{O^*E^*} = t \overrightarrow{O^*E^*},$$

w. z. b. w.

Ziehen wir im Sonderfall $O = O^*$ und $g_{OE} \neq g_{O^*E^*}$, durch E' eine Parallele h zu g_{OE} (Abb. 89), dann gilt für die Parallelprojektion τ von g_{OE} auf $g_{O^*E^*}$ in der Richtung

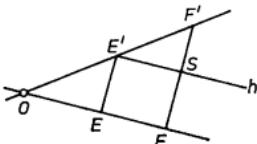


Abb. 89

1) Für Parallelprojektionen wurde das im Satz 3.4 gezeigt, für Bewegungen ist das aber auch klar, weil Parallelogramme auf Parallelogramme abgebildet werden.

2) Für Bewegungen steht das im Satz 1.7(3), für Parallelprojektionen ergibt sich diese Regel unmittelbar aus dem Axiom A₂.

3) Für $t = 1,62, \dots$ und eine Parallelprojektion veranschaulicht Abb. 88 diesen Sachverhalt.

von $g_{BB'}$ (mit $F' := F^*$) bzw. von $g_{OE'}$ auf $g_{FF'}$ in der Richtung von h

$$\frac{OF}{OE} = \frac{OF'}{OE'} = \frac{FF'}{FS} = \frac{FF'}{EE'}.$$

Insgesamt gilt der

Satz 3.13 (Strahlensatz). *Sind die Punkte O, E, F nicht kollinear, dann gilt*

$$\left. \begin{array}{l} O, E, F \text{ kollinear} \\ O, E', F' \text{ kollinear} \\ g_{EE'} \parallel g_{FF'} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{OF}{OE} = \frac{OF'}{OE'} \neq 0 \wedge \frac{OF}{OE} = \frac{FF'}{EE'} \neq 0.$$

Gemäß unserer Definition impliziert

$$\frac{OF}{OE} = \frac{OF'}{OE'} \neq 0$$

die Kollinearität von O, E, F bzw. O, E', F' und

$$\frac{OF}{OE} = \frac{FF'}{EE'} \neq 0$$

die Parallelität $g_{EE'} \parallel g_{FF'}$. Somit werden wir auf folgende Umkehrungen des Strahlensatzes geführt, wobei mit ⁰⁾ triviale Folgerungen gekennzeichnet werden:

Satz 3.14 (Umkehrungen des Strahlensatzes). *Unter der Voraussetzung, daß O, E, E' nicht kollinear sind, gilt*

$$\text{a)} \frac{OF}{OE} = \frac{OF'}{OE'} \neq 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} O, E, F \text{ kollinear } \text{0)} \\ O, E', F' \text{ kollinear } \text{0)} \\ g_{EE'} \parallel g_{FF'} \end{array} \right\} \wedge \frac{OF}{OE} = \frac{FF'}{EE'},$$

$$\text{b)} \frac{OF}{OE} = \frac{FF'}{EE'} \neq 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} O, E, F \text{ kollinear } \text{0)} \\ O, E', F' \text{ kollinear } \text{2)} \\ g_{EE'} \parallel g_{FF'} \text{ 0)} \end{array} \right\} \wedge \frac{OF}{OE} = \frac{OF'}{OE'}.$$

Beweis. a) Um $g_{EE'} \parallel g_{FF'}$ zu zeigen, ziehen wir eine Parallele zu $g_{EE'}$ durch F , die $g_{OE'}$ in F^* schneiden möge (Abb. 90a). Dann gilt nach dem Strahlensatz

$$t := \frac{OF'}{OE'} = \frac{OF}{OE} = \frac{OF^*}{OE'}.$$

Wegen $\overrightarrow{OF} = t \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OF^*}$ gilt aber $F' = F^*$ und somit $g_{BB'} \parallel g_{FF'} = g_{FF'}$. Nach dem Strahlensatz ist nun

$$\frac{OF}{OE} = \frac{FF'}{EE'}.$$

¹⁾ Die gewählte Formulierung soll uns das Finden von Umkehrungen erleichtern.

²⁾ Diese Aussage benötigt man unter anderem, um das Bild einer linearen Funktion bei ihrer graphischen Darstellung als Gerade zu erkennen.

b) Um die Kollinearität von O, E', F' zu beweisen, betrachten wir den Schnittpunkt F^* von $g_{OE'}$ und $g_{FF'}$ (Abb. 90b). Nach dem Strahlensatz gilt

$$t := \frac{FF'}{EE'} = \frac{OF}{OE} = \frac{FF^*}{EE'},$$

d. h. $\overrightarrow{FF'} \parallel t \overrightarrow{EE'} \parallel \overrightarrow{FF^*}$. Hieraus folgt $F' = F^*$, und somit sind O, E, F' ($= F^*$) kollinear.

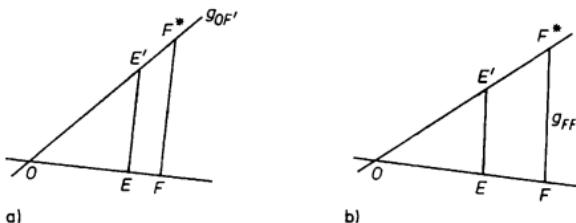


Abb. 90

Nach dem Strahlensatz kann man nun auf die noch offene Gleichung zwischen Teilverhältnissen schließen, w. z. b. w.

Satz 3.15 (Ergänzung von Satz 3.11). *Es gilt für beliebige reelle Zahlen x*

$$(4) \quad x(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}) = x\overrightarrow{OE} + x\overrightarrow{OF}.$$

Beweis. Nach dem Satz 3.11(4') brauchen wir nur noch den Fall $g_{OE} \neq g_{OF}$ zu betrachten. Für die nicht kollinearen Punkte O, E, F sei $\overrightarrow{OG} := \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$,

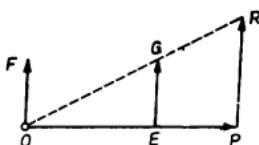


Abb. 91

$\overrightarrow{OP} := x\overrightarrow{OE}$ und $\overrightarrow{PR} := x\overrightarrow{OF}$ ($\parallel x\overrightarrow{EG}$); wegen $\frac{OP}{OE} = x = \frac{PR}{EG}$ sind die Punkte O, G, R nach dem Satz 3.14b kollinear (Abb. 91). Nach demselben Satz erhalten wir

$$x\overrightarrow{OE} + x\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} = x\overrightarrow{OG} = x(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}),$$

w. z. b. w.

¹⁾ Da bei der Addition gerichteter Strecken der zweite Summand stets durch einen zu ihm parallelgleichen ersetzt werden kann, ohne das Ergebnis zu verändern, konnte als zweiter Summand o. B. d. A. eine gerichtete Strecke mit O als Anfangspunkt gewählt werden.

Zusammenfassend gilt

Hauptsatz 3.16. Die Abbildung

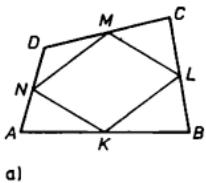
$$(10c) \quad \mathbf{R} \rightarrow \mathfrak{B}_{OE} \quad (z \mapsto \overrightarrow{OE}_z := z \overrightarrow{OE})$$

ist eineindeutig, bezüglich $<$ relationstreu und nach dem Satz 3.11(3) bezüglich + operationstreu. Auch die Veranschaulichung der Multiplikation erfolgt nach den Sätzen 3.12 und 3.11(2) wie bei den ganzen bzw. rationalen Zahlen. Wegen der eindeutigen Meßbarkeit wird \mathbf{R} auf \mathfrak{B}_{OE} abgebildet, d. h., daß die Abbildung ein Isomorphismus ist.

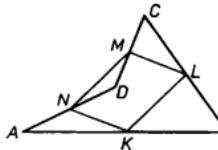
Dieser Satz legt es nahe, die reellen Zahlen über Zahlengeraden zu definieren (vgl. [32], S. 199).

Aufgaben

1. Man leite (4) und (2) im Satz 3.6 her.
2. Man beweise die Regel $\frac{1}{m} \left(\frac{1}{n} \overrightarrow{OE} \right) = \frac{1}{mn} \overrightarrow{OE}$.
3. Man zeige $(x + y) \overrightarrow{OE} = x \overrightarrow{OE} + y \overrightarrow{OE}$ unter der Voraussetzung
 - $x, y \in \mathbb{Q}$ (vgl. den Beweis des Satzes 3.9),
 - $x, y \in \mathbf{R}$ (vgl. die Bemerkungen im Anschluß an den Satz 3.11).
4. Es sei $KLMN$ Mittelpunktviereck des Vierecks $ABCD$ (Abb. 92). Man zeige mit Hilfe des Satzes 3.14, daß $KLMN$ stets ein Parallelogramm ist.



a)



b)

Abb. 92

3.1.3. Der Vektorraum der Verschiebungen

Zur Bezeichnung der Verschiebungen verwenden wir hier ausschließlich die Buchstaben a, b, c, \dots , die Nacheinaderauführung schreiben wir als Addition, und die identische Abbildung ι des Raumes als Nullelement wird mit o bezeichnet.

a) *Die Vervielfachung der Verschiebungen*

Wir setzen für $a = v(PQ) = v(\overrightarrow{PQ})$

$$(16) \quad xa := v(x \overrightarrow{PQ}).$$

Hängt xa hierbei wesentlich vom Repräsentanten \overrightarrow{PQ} ab? Zum Beweis der Repräsentantenunabhängigkeit bemerken wir, daß sich jede Parallelgleichheit durch

eine Kette von Parallelprojektionen von Geraden auf parallele Geraden realisieren läßt und daß aus $\overrightarrow{PQ} \# \overrightarrow{P'Q'}$ wegen der Invarianz des Teilverhältnisses bei Parallelprojektionen $x \overrightarrow{PQ} \# x \overrightarrow{P'Q'}$ folgt (vgl. Abb. 93).

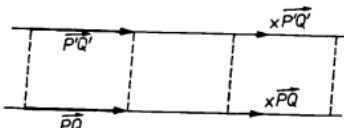


Abb. 93

Nach der Definition (16) gilt der

Satz 3.17. Die Menge \mathfrak{B} der Verschiebungen bildet mit ihrer Addition und der Vervielfachung (16) einen reellen Vektorraum, d. h., $(\mathfrak{B}, +)$ ist eine kommutative Gruppe, für die die Vervielfachung mit reellen Zahlen folgende Eigenschaften besitzt $(x, y \in \mathbb{R}; a, b \in \mathfrak{B})$

- (1) $1a = a$,
- (2) $(xy)a = x(ya)$,
- (3) $(x + y)a = xa + ya$,
- (4) $x(a + b) = xa + xb$.

Beweis. Nach dem Satz 3.2 brauchen wir nur (1) bis (4) herzuleiten. Das ist nach den Sätzen 3.11 und 3.15 sehr leicht: Ist $a = v(PQ)$, dann gilt beispielsweise

$$\begin{aligned} 1a &= v(1 \cdot \overrightarrow{PQ}) = v(\overrightarrow{PQ}) = a, \\ (xy)a &= v((xy)\overrightarrow{PQ}) = v(x(y\overrightarrow{PQ})) = xv(y\overrightarrow{PQ}) = x(ya). \end{aligned}$$

Zum Beweis der übrigen Regeln vgl. Aufgabe 1.

Wegen dieses Satzes nennen wir die Verschiebungen auch *Schubvektoren*. Für sie gilt

Satz 3.18. Der Vektorraum der Schubvektoren ist dreidimensional, d. h., es gibt Vektoren a, b, c derart, daß zu jedem Vektor $v \in \mathfrak{B}$ genau ein Tripel (x, y, z) reeller Zahlen mit

$$v = xa + yb + zc$$

existiert.

Bemerkung. Nach MfL, Bd. 3 ist $\{a, b, c\}$ eine Basis des Vektorraumes der Schubvektoren. Da es vielfach auf die Reihenfolge der Basisvektoren a, b, c ankommt — z. B. bei der Bestimmung des Tripels (x, y, z) —, werden wir auch das Tripel (a, b, c) eine (geordnete) Basis nennen (vgl. den Abschnitt 5.1.1).

Beweis des Satzes 3.18. Existenz. Es gibt nicht komplanare Punkte O, A, B und C . Es sei $a := v(OA)$, $b := v(OC)$ und $c := v(OB)$ und $v = v(OX)$ (Abb. 94). Die Parallelen zu g_{OC} durch X treffe ε_{OAB} in X' , die Parallelen zu g_{OB} durch X' schneide

go₄ in einem Punkt X'' . Außerdem sei

$$v(OX'') = xa,$$

$$v(X''X') = yb,$$

$$v(X'X) = zc$$

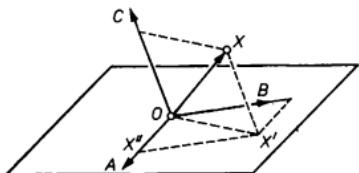


Abb. 94

für reelle Zahlen x, y, z , die nach dem Satz 3.10b existieren. Dann gilt

$$v = xa + yb + zc.$$

Eindeutigkeit. Gilt noch $v = x'a + y'b + z'c$, dann ist zunächst

$$v(OP) := (z' - z)c = (x - x')a + (y - y')b,$$

d. h. $O, P \in g_{OC} \cap \varepsilon_{OAB}$, $O = P$ und $z' = z$, $y' = y$, $x' = x$ nach dem Satz 3.10b, w. z. b. w.

b) Betrag und Skalarprodukt

Wir setzen für $z \in \mathbb{R}_+$ und Längen a

$$za = b$$

genau dann, wenn es Punkte P, Q, R mit $a = a(P, Q)$, $b = a(P, R)$ und $\overrightarrow{PR} = z \overrightarrow{PQ}$ gibt. Wegen der Invarianz des Teilverhältnisses bei Bewegungen ist diese Definition repräsentantenunabhängig. Nun erkennen wir, daß die Längen *archimedisch geordnet* sind. Außerdem erhalten wir aus den Sätzen 3.10 und 3.11

Satz 3.19. a) Zu jeder Länge a und jeder Zahl $z \in \mathbb{R}_+$ gibt es genau eine Länge b mit $za = b$.

b) Zu je zwei Längen a ($\neq 0$), b gibt in \mathbb{R}_+ genau eine Zahl z mit $za = b$ (eindeutige *Meßbarkeit*).¹⁾

Satz 3.20. Für beliebige Längen a, b und Zahlen $x, y \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$(xy)a = x(ya),$$

$$(x + y)a = xa + ya,$$

$$x(a + b) = xa + xb.$$

1) Genau dann, wenn x rational ist, heißen a, b *kommensurabel*.

Da aus $\overrightarrow{PQ} \neq \overrightarrow{P'Q'}$ zunächst $\overrightarrow{PP'} \neq \overrightarrow{QQ'}$ und dann $a(P, Q) = a(P', Q')$ folgt, kann jedem Schubvektor vermöge

$$v(PQ) \mapsto a(P, Q)$$

einzigartig eine Länge zugeordnet werden. Wird eine Längeneinheit e ($\neq 0$) ausgezeichnet, dann können wir eine Abbildung

$$\mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad (a = v(PQ) \mapsto a(P, Q) = |a| \cdot e \mapsto |a|)$$

erklären; dabei heißt $|a|$ der *Betrag von a* .¹⁾ Im Fall $|e| = 1$ heißt e *Einheitsvektor*.

Durch eine Fallunterscheidung bestätigt man leicht

$$|ta| = |t| \cdot |a|$$

für beliebige reelle Zahlen t und Schubvektoren a . Danach ist für $a \neq 0$

$$a^0 := \frac{1}{|a|} a$$

ein Einheitsvektor, für den $a = |a| \cdot a^0$ gilt.

Wir schreiben $a \parallel b$ genau dann, wenn es eine reelle Zahl t mit $a = tb$ oder $b = ta$ gibt. Schubvektoren $a = v(OA)$, $b = v(OB)$ heißen *zueinander senkrecht* oder *orthogonal* (in Zeichen: $a \perp b$) genau dann, wenn $g_{OA} \perp g_{OB}$ oder $A = O$ oder $B = O$ gilt.

Ist $a \neq 0$ und $v = v_a + v_a^\perp$ mit $v_a \parallel a$ und $v_a^\perp \perp a$, dann wird v_a *Parallel- und v_a^\perp Normalkomponente von v bezüglich a* genannt (Abb. 95). Mit der Existenz und Eindeutigkeit von parallelen bzw. senkrechten Geraden zu einer Geraden durch einen Punkt gewinnt man die Existenz und Eindeutigkeit von v_a und v_a^\perp .

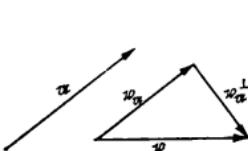


Abb. 95

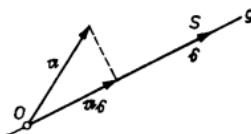


Abb. 96

Ist ein Körper, auf den die Kraft a wirkt, nur auf einer zwangsläufigen geraden Bahn g beweglich, so ist für die Arbeit bei der Bewegung des Körpers von O nach S nur die Parallelkomponente a_s bezüglich $s := v(OS)$ wichtig (Abb. 96): Die Arbeit ist gleich dem Produkt $a_s \cdot s$, wenn $a_s = a_s \cdot s^0$ und $s = ss^0$ gilt.

¹⁾ Eigentlich müssten wir *Betrag von a bezüglich e* sagen und das Symbol $||$ mit e indizieren. Mißverständnisse sind jedoch ausgeschlossen, solange wir e als von nun an festgewählt ansehen.

Nach diesem Vorbild erklären wir das *Skalarprodukt* von Vektoren a und b wie folgt als reelle Zahl

$$ab = \begin{cases} 0 & \text{für } a = 0 \text{ oder } b = 0^1), \\ a_b b & \text{für } a_b = a_b b^0 \text{ und } |b| = b. \end{cases}$$

Auf dieser Definition beruht die Äquivalenz

$$a \perp b \Leftrightarrow ba = 0.$$

Denn gilt $a \perp b$, dann ist $a_b = 0$ oder $b = 0$. Umgekehrt folgt aus $ab = 0$ zunächst $a_b = 0$ oder $b = 0$ und dann $a = 0$ oder $a \perp b$ oder $b = 0$.

Der folgende Satz enthält die wichtigsten Eigenschaften des Skalarproduktes.

Satz 3.21. Für $a, b, c \in \mathfrak{B}$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt

- (1) $aa > 0$ für $a \neq 0$,
- (2) $ab = ba$,
- (3) $(ta)b = t(ab)$,
- (4) $(a + b)c = ac + bc$.

Folgerung. Ist (a, b, c) eine Basis und sind a, b, c paarweise senkrechte Einheitsvektoren, dann gilt

$$\xi \mathfrak{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

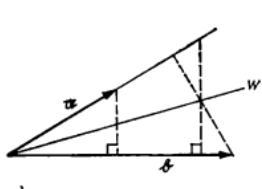
für $\xi = x_1 a + x_2 b + x_3 c$ und $\mathfrak{y} = y_1 a + y_2 b + y_3 c$.

Beweis. Zu (1). Für $a \neq 0$ ist $aa = |a| |a| > 0$.²⁾

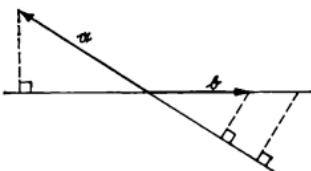
Zu (2). Für $a \perp b$ gilt $ab = 0 = ba$. Es sei nun $a \pm b$.

Fall 1: $a = v(OA) \wedge b = v(OB)$. Wir spiegeln an der Winkelhalbierenden w von $\angle AOB$ und erhalten nach Stufenwinkel- und nach Strahlensatz (Abb. 97a, b)

$$\frac{a}{b} = \frac{a_b}{b_a}, \quad \text{d. h. } a_b b = b_a a.$$



a)



b)

Abb. 97

¹⁾ Die Definition mit Hilfe der cos-Funktion macht die folgenden Überlegungen nur unübersichtlicher; deshalb wird hier darauf verzichtet. Auch sei bemerkt, daß das Skalarprodukt als Abbildung $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}$ keine Operation in \mathfrak{B} ist (vgl. jedoch den Satz 3.21).

²⁾ Hieraus folgt noch die Regel $|a| = \sqrt{aa}$.

Fall 2. $a \parallel b$. Es gilt $a_b = |a|$ und $b_a = |b|$ oder $a_b = -|a|$ und $b_a = -|b|$, in jedem Fall $ab = ba$.

Zu (3). Für $t = 0$ oder $a = 0$ ist $(ta)b = 0 = t(ab)$. Es sei nun $t \neq 0$ und $a \neq 0$. Wir zerlegen t in der Form $t = \operatorname{sgn} t \cdot |t|$. Dann gilt $b_{ta} = \operatorname{sgn} t \cdot b_a$ und somit nach (2)

$$(ta)b = b(ta) = b_{ta}|ta| = \operatorname{sgn} t \cdot b_a \cdot |t| \cdot |a| = t(ba) = t(ab).$$

Zu (4). Für $c = 0$ ist offensichtlich $(a + b)c = ac + bc$. Es sei nun $c \neq 0$. Aus der Definition folgt unmittelbar

$$(a + b)c = (a + b)_c c.$$

Um die Parallelkomponente $(a + b)_c$ zu bestimmen, stellen wir $a_c + b_c \parallel c$, $a_c^\perp + b_c^\perp \perp c$ und $(a_c + b_c) + (a_c^\perp + b_c^\perp) = a + b$ fest, d. h. $(a + b)_c = a_c + b_c$. Wegen $a_c + b_c = a_c c^0 + b_c c^0 = (a_c + b_c) c^0$ gilt nun

$$\begin{aligned} (a + b)c &= (a + b)_c c = (a_c + b_c)c = (a_c + b_c)|c| \\ &= a_c|c| + b_c|c| = a_c c + b_c c = ac + bc. \end{aligned}$$

Zum Beweis der Folgerung verweisen wir auf Aufgabe 3.

c) Punkte und Vektoren

Ist Y das Bild von X beim Schubvektor a , d. h., wenn $\overrightarrow{XY} \in a$ gilt, schreiben wir gelegentlich $Y = X + a$.

Die Aussage, daß die Verschiebungen des Raumes mit dem Nacheinanderausführen als Verknüpfung eine auf der Menge aller Punkte einfach transitive Abbildungsgruppe bilden, kann nun wie folgt formuliert werden:

Satz 3.22. a) Zu jedem Punkt P und jedem Schubvektor a gibt es genau einen Punkt Q mit $P + a = Q$.

b) Zu Punkten P, Q gibt es genau einen Schubvektor a mit $P + a = Q$.

c) Für jeden Punkt P und für beliebige Schubvektoren a, b gilt

$$(P + a) + b = P + (a + b).$$

Jede Gerade g und jede Ebene ε kann mit Hilfe eines Punktes und eines bzw. zweier Vektoren dargestellt werden: Unter der Voraussetzung $a \neq 0$, $P + a = Q$ und $g = g_{PQ}$ gilt

$$g = \{X: X = P + ta; t \in \mathbb{R}\}.$$

Entsprechend ist

$$\varepsilon = \{X: X = P + sa + tb; s, t \in \mathbb{R}\}$$

für $a \neq b$, $P + a = Q$, $P + b = R$ und $\varepsilon = \varepsilon_{PQR}$. Die Bewegungen sind die ein-eindeutigen Abbildungen τ , die

$$\tau(OA^\tau) \tau(OB^\tau) = \tau(OA) \tau(OB)$$

(Invarianz des Skalarproduktes) erfüllen. Somit kann gezeigt werden, daß ein Tupel $(\mathfrak{P}', \mathfrak{G}', \mathfrak{E}', \mathfrak{D}', \mathfrak{B}')$, das ebenfalls dem Axiomensystem der euklidischen Geometrie genügt, zu $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \mathfrak{B})$ isomorph ist.

Aufgaben

- 1. Man leite die Regeln (3) und (4) im Satz 3.17 mit Hilfe der Sätze 3.11 und 3.15 her.
- 2. Man verifizierte den Satz 3.19b nach Satz 3.10.
- 3. Man zeige

$$\xi \eta = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

für $\xi = x_1 \mathfrak{a} + x_2 \mathfrak{b} + x_3 \mathfrak{c}$ und $\eta = y_1 \mathfrak{a} + y_2 \mathfrak{b} + y_3 \mathfrak{c}$ unter der Voraussetzung, daß die Basis $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ orthonormiert ($|\mathfrak{a}| = |\mathfrak{b}| = |\mathfrak{c}| = 1$ und $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b} \perp \mathfrak{c} \perp \mathfrak{a}$) ist.

3.2. Die relative Widerspruchsfreiheit der Lobačevskischen Geometrie

3.2.1. Das Kleinsche Modell

FELIX KLEIN (1849–1925) war um die Jahrhundertwende einer der führenden Köpfe der Bewegung zur Modernisierung der Mathematikausbildung an den Hochschulen und Schulen in Deutschland und im internationalen Maßstab, u. a. durch seine Arbeit in der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission (IMUK). Dieser Arbeit im Interesse der Organisation der Wissenschaft und ihrer Vermittlung gingen bedeutende Beiträge zur Mathematik voraus. Indem er als junger Mathematiker versuchte, die nichteuklidische Geometrie in das Konzept von ARTHUR CAYLEY (1821–1895) über die invariantentheoretische Kennzeichnung der geometrischen Theorien einzuordnen, fand er 1871 das nach ihm benannte Modell. Wir wollen hier nur noch erwähnen, daß damit seinerseits die wichtigste Vorarbeit für seine Antrittsvorlesung *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* beim Eintritt in die Fakultät an der Universität Erlangen vorlag, die ihrerseits die geometrische Forschung auf Jahrzehnte bestimmte und allgemein als *Erlanger Programm*¹⁾ bekannt ist.

Das Kleinsche Modell²⁾ der Lobačevskischen Geometrie wird in der euklidischen Geometrie konstruiert. Somit erweist sich die Lobačevskische Geometrie als widerspruchsfrei, denn andernfalls wäre auch die euklidische Geometrie widersprüchlich.

Wie sieht dieses Modell aus? Zunächst brauchen wir eine Interpretation der fünf Grundbegriffe. In der euklidischen Geometrie sei eine Kugel \mathfrak{K} mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r ($\neq 0$) ausgezeichnet: $\mathfrak{K} = \{X: a(O, X) = r\}$; dann ist

$$(\mathfrak{K}) := \{X: a(O, X) < r\}$$

¹⁾ Vgl. [31]; dort findet man auch eine F.-Klein-Biographie und Anmerkungen von H. WUSING.

²⁾ Es gibt noch andere Modelle. Unter anderem stammt ein bekanntes Modell von HENRI POINCARÉ (1854–1912).

deren Inneres. Grob gesagt wird durch das Kleinsche Modell eine Geometrie im Inneren der Kugel dargestellt. Wir erklären (vgl. Abb. 98)

***M*-Punkte:** die Punkte aus (\mathfrak{K}) ,

***M*-Geraden:** das Innere (UV) von Kugelsehnen, d. h. $\mathfrak{K} \ni U, V \neq U$,

***M*-Ebenen:** das Innere (k) von Kreisen k in \mathfrak{K} , d. h. mit $k \subset \mathfrak{K}$.

***M*-Durchlaufsinne:** auf ***M*-Geraden** eingeschränkte Durchlaufsinne.

In der Abb. 98 sind A, B, C beispielsweise ***M*-Punkte**, P, U, V wegen $P, U, V \notin (\mathfrak{K})$ jedoch nicht. Es ist (UV) eine ***M*-Gerade** und (k) eine ***M*-Ebene**. Außerdem wurde $A < B < C$ dargestellt.

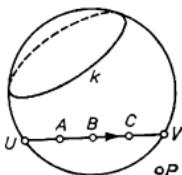


Abb. 98

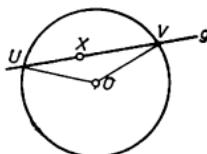


Abb. 99

Die Deutung der Bewegungen im Modell wollen wir über die Definition von ***M*-Spiegelungen** an ***M*-Ebenen** gewinnen. Dabei werden wir eine andere Darstellung der ***M*-Geraden** und ***M*-Ebenen** benutzen, die wir zunächst bereitstellen.

Hilfssatz 3.23. a) *Enthält eine Gerade g innere Punkte von \mathfrak{K} , dann ist sie eine Sekante.*

b) *Aus $U, V \neq U \in \mathfrak{K}$ folgt $(UV) = g_{UV} \cap (\mathfrak{K})$.*

c) *Aus $A, B \in (\mathfrak{K})$ folgt $AB \subset (\mathfrak{K})$.*

Beweis. a) Jede Gerade g , die einen Punkt $X \in (\mathfrak{K})$ enthält, liegt in einer Ebene η durch O . Der Kreis $k(O, r) \subset \mathfrak{K}$ trifft g nach dem Axiom Z_1 in zwei Punkten U und V (Abb. 99). Wegen $U, V \in k(O, r) \subset \mathfrak{K}$ gilt die Behauptung.

b) Nach dem Hilfssatz 1.35 — angewandt auf das Dreieck OUV — gilt $(UV) = g_{UV} \cap (\mathfrak{K})$.

c) Nach dem Hilfssatz 1.35 gilt auch $AB \subset (\mathfrak{K})$ für Punkte $A, B \in (\mathfrak{K})$, w. z. b. w.

Hilfssatz 3.24. a) *Enthält eine Ebene ε innere Punkte von \mathfrak{K} , dann schneidet sie \mathfrak{K} in einem Kreis.*

b) *Aus $k = \varepsilon \cap \mathfrak{K}$ folgt $(k) = \varepsilon \cap (\mathfrak{K})$.*

Beweis. a) Im Fall $O \in \varepsilon$ ist $\mathfrak{K} \cap \varepsilon$ der Kreis $k(O, r) \subset \varepsilon$.

Es sei nun $O \notin \varepsilon$, $S \in \varepsilon \cap (\mathfrak{K})$ und M der Fußpunkt des Lotes von O auf ε . Wir wählen eine Ebene η durch O, M und S (Abb. 100a). Wegen $a(O, S) < r$ trifft die Gerade $\varepsilon \cap \eta$ den Kreis $k(O, r) \subset \eta$ nach dem Axiom Z_1 in einem Punkt P . Mit $\varrho := a(M, P)$ behaupten wir, daß $\varepsilon \cap \mathfrak{K}$ der Kreis $k(M, \varrho) \subset \varepsilon$ ist (Abb. 100b).

Es sei $X \in k(M, \varrho) \subset \varepsilon$. Die Dreiecke OMX und OMP besitzen bei M einen rechten Winkel, so daß nach dem Kongruenzsatz sws aus $a(M, X) = \varrho = a(M, P)$ schon $a(O, X) = a(O, P) = r$, d. h. $X \in \varepsilon \cap \mathfrak{K}$, folgt.

Es sei $X \in \varepsilon \cap \mathfrak{R}$. Wiederum haben die Dreiecke OMX und OMP bei M einen rechten Winkel, und es gilt $a(O, X) = r = a(O, P)$; nach dem Kongruenzsatz aSW folgt mit $MP \cong MX$ nun $X \in k(M, \varrho) \subset \varepsilon$.

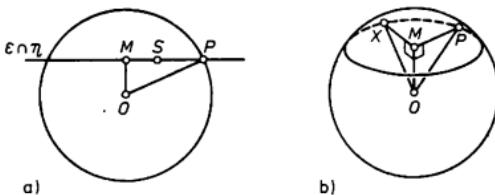


Abb. 100

b) Es sei $k = \varepsilon \cap \mathfrak{R}$. Unter der Voraussetzung $O \in \varepsilon$ ist $k = k(O, r) \subset \varepsilon$ und die Behauptung trivial. Wir setzen nun $O \notin \varepsilon$ voraus. Nach a) ist der Fußpunkt M des Lotes von O auf ε Mittelpunkt des Kreises $k \subset \varepsilon$.

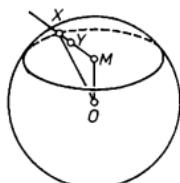


Abb. 101

Es sei $MY^+ \subset \varepsilon$ und $X \in MY^+ \cap k$ (Abb. 101). Das Dreieck OMX hat bei M einen rechten Winkel; nach dem Hilfssatz 1.35 gilt

$$Y \in (MX) \Rightarrow a(O, Y) < r,$$

$$Y = X \Rightarrow a(O, Y) = r,$$

$$Y \in MX^+ \setminus MX \Rightarrow a(O, Y) > r$$

und folglich

$$Y \in (k) \Leftrightarrow Y \in \varepsilon \cap (\mathfrak{R}),$$

w. z. b. w.

Der unmittelbaren Vorbereitung der Definition von M -Spiegelungen an M -Ebenen $\varepsilon \cap (\mathfrak{R})$ dient folgende Begriffsbildung: P heißt *Pol* der Ebene ε , wenn die Berührungs punkte der Tangenten von P an \mathfrak{R} in ε liegen (Abb. 102a). Es gilt der

Hilfssatz 3.25. Ist $\varepsilon \cap (\mathfrak{R})$ eine M -Ebene und gilt $O \notin \varepsilon$, dann besitzt ε genau einen Pol.

Beweis. Es sei f das Lot von O auf ε . Wir legen eine Ebene η durch f . Die Gerade $\varepsilon \cap \eta$ schneidet den Kreis $k := k(O, r) \subset \eta$ nach dem Axiom Z₁ in zwei Punkten U und V , weil $f \cap \varepsilon$ in (k) liegt. Die Tangenten an k in U und V schneiden sich in

einem Punkt $P \in f$. Dieser Punkt P hängt nicht von der Wahl von η ab, denn bei Drehung von η um f bleiben \mathfrak{F} und ε fest, so daß die Tangenten g_{PU} und g_{PV} in die Tangenten von P an \mathfrak{F} übergehen, w. z. b. w.

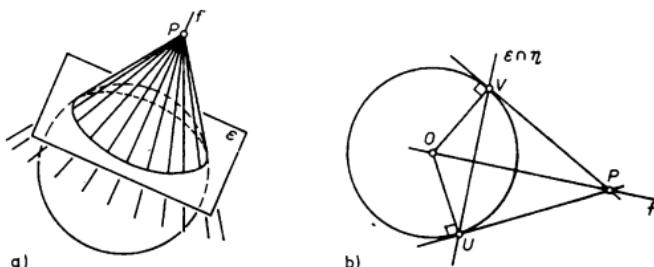


Abb. 102

Wir kommen nun zur Definition der *M-Spiegelungen an M-Ebenen* ($k = (\mathfrak{F}) \cap \varepsilon$):

1. Im Fall $O \in \varepsilon$ sei die *M-Spiegelung an der M-Ebene* $\varepsilon \cap (\mathfrak{F})$ die Einschränkung von s_e auf die Menge der *M-Punkte*.

2. Um im Fall $O \notin \varepsilon$ das Bild X' eines *M-Punktes* X zu bestimmen, legen wir eine Ebene η durch X und den Pol P von ε . Nach dem Hilfssatz 3.24 ist $k := \eta \cap \mathfrak{F}$ ein Kreis, wobei η aus der „Tangentenfläche von P an \mathfrak{F} “ Tangenten g_{PU} und g_{PV} mit $U, V \in k \cap \varepsilon$ herausschneidet (Abb. 103).

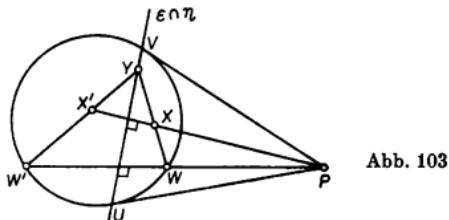


Abb. 103

Fall 1. $X \in \varepsilon \cap \eta$. Dann setzen wir $X' := X$.

Fall 2. $X \notin \varepsilon \cap \eta$. Wir wählen einen Punkt $Y \in \varepsilon \cap \eta \setminus g_{PX}$ und einen Punkt $W \in YX^+ \cap k$, um W' als zweiten Punkt in $k \cap g_{PW}$ und das gesuchte Bild X' bei der Spiegelung an der *M-Ebene* $\varepsilon \cap (\mathfrak{F})$ als Schnittpunkt g_{PX} und $g_{YW'}$ zu bestimmen.¹⁾

Es gilt $X' \in (\mathfrak{F})$, jedoch hat die Definition den Nachteil, daß die Eindeutigkeit von X' unter 2. wegen der Willkür von η , Y und für $Y \in g_{UV} \setminus UV$ von W nicht zu erkennen ist. Um diesen Mangel zu beseitigen, werden wir eine Reihe von Hilfs-

¹⁾ Nach der Definition unter 2. gilt für alle Lote $g \cap (\mathfrak{F})$ der *M-Ebene* $\varepsilon \cap (\mathfrak{F})$ offenbar $g \ni P$ (Abb. 103). Hier wie auch später werden wir auch Punkte außerhalb (\mathfrak{F}) zusätzlich abbilden, wie hier beispielsweise W .

sätzen aussprechen und beweisen. Vorbereitend erklären wir das *Doppelverhältnis* $(ABCD)$ von vier Punkten A, B, C, D einer Geraden

$$(ABCD) := \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}.$$

Hilfssatz 3.25. Das Doppelverhältnis von vier kollinearen Punkten ist gegen Zentralprojektion auf vier Punkte einer anderen Geraden invariant.

Beweis¹⁾. Es seien A, B, C, D vier kollineare Punkte und A', B', C', D' deren Bilder bei einer Zentralprojektion mit dem Zentrum Z .

Fall 1: $g_{AB} \parallel g_{A'B'}$ (Abb. 104a). Nach dem Strahlensatz folgt aus $\overline{ZA}' = t \overline{ZA}$

$$\overrightarrow{A'C'} = t \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{B'C'} = t \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{A'D'} = t \overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{B'D'} = t \overrightarrow{BD}$$

und folglich

$$\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{AC}{BC}, \quad \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{AD}{BD},$$

d. h. $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

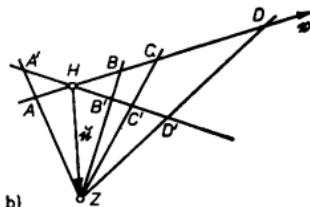
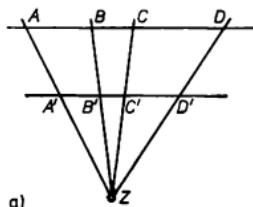


Abb. 104

Fall 2: $g_{AB} \nparallel g_{A'B'}$, etwa $H \in g_{AB} \cap g_{A'B'}$ (Abb. 104b). Wir betrachten ein linear unabhängiges Vektorpaar (u, v) gemäß Abb. 104b und reelle Zahlen m, a und a' mit

$$v(HA) = av, \quad v(HA') = a'(u + mv).$$

Außerdem gibt es eine reelle Zahl λ mit $v(AA') = \lambda v(ZA)$, so daß

$$\begin{aligned} a'u + a'mv &= a'(u + mv) = v(HA') = v(HA) + v(AA') \\ &= av + \lambda v(ZA) = av + \lambda(av - u) \\ &= -\lambda u + a(1 + \lambda)v, \end{aligned}$$

folglich $a' = -\lambda$, $a'm = a(1 + \lambda)$ und schließlich

$$a' = \frac{a}{m + a}$$

¹⁾ Für die Beweise der Hilfssätze 3.25, 3.26, 3.27 und 3.30 benutzen wir folgende Quelle: B. WEBNICKE, Die relative Widerspruchsfreiheit der Lobatschewskischen Geometrie, Wiss. Z. PH „Karl Liebknecht“ Potsdam 17 (1973), 159–176.

gelten. Mit analogen Bezeichnungen für B, B' bzw. C, C' bzw. D, D' statt A, A' gilt

$$b' = \frac{b}{m+b}, \quad c' = \frac{c}{m+c}, \quad d' = \frac{d}{m+d}.$$

Somit erhalten wir nach leichter Rechnung

$$(A'B'C'D') = \frac{c' - a'}{c' - b'} : \frac{d' - a'}{d' - b'} = \frac{c - a}{c - b} : \frac{d - a}{d - b} = (ABCD),$$

w. z. b. w.

Hilfssatz 3.26. Ist UV Sehne eines (Einheits-)Kreises k , die nicht durch seinen Mittelpunkt M geht, P der Schnittpunkt der Kreistangenten in U und V und g eine Kreissekante durch P , die den Kreis in P_1 und P_2 sowie UV in \bar{P} trifft (Abb. 105), dann gilt $(P\bar{P}P_1P_2) = -1$.

Beweis. Es sei $a := v(MP)$, $a_2 := v(MP_2)$ und $u := v(MU)$. Da o. B. d. A. ein Einheitskreis vorausgesetzt wird, gilt (Abb. 105)

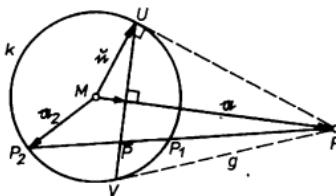


Abb. 105

$$1 = u^2 = a_u u = a u = u a = u_a a$$

und folglich

$$u_a = \frac{1}{a^2} a.$$

Es gibt eine reelle Zahl t mit $\bar{a} := v(M\bar{P}) = a + t(a_2 - a)$. Wir können t wegen $\bar{a}_a = u_a$ folgendermaßen bestimmen:

$$1 = u_a a = \bar{a}_a a = \bar{a} a = a^2 + t(a_2 a - a^2),$$

d. h.

$$t = \frac{1 - a^2}{a_2 a - a^2}.$$

Es sei nun P_1^* mit $a_1 := v(MP_1^*)$ derjenige Punkt, für den $(P\bar{P}P_1^*P_2) = -1$ gilt. Indem wir für Vektoren v', v ($\neq 0$)

$$\frac{v'}{v} = t \Leftrightarrow v' = t v^1)$$

¹⁾ Nach dem Abschnitt 3.1.2d) gilt unter der Voraussetzung $v' = v(PQ) = t v = t v(OE)$ offenbar $t = \frac{PQ}{OE}$.

setzen, erhalten wir

$$-1 = \frac{a_1 - a}{a_1 - \bar{a}} : \frac{a_2 - a}{a_2 - \bar{a}} = \frac{a_1 - a}{a_1 - \bar{a}} \cdot (1 - t),$$

$$(1 - t)(a_1 - a) = -(a_1 - \bar{a}),$$

$$(2 - t)a_1 = \bar{a} + (1 - t)a = (2 - 2t)a + ta_2,$$

$$a_1 = \frac{2(1 - t)}{2 - t} a + \frac{t}{2 - t} a_2.$$

Der Satz ist bewiesen, wenn $P_1^* = P_1$ gilt. Dazu genügt es, abschließend $P_1^* \in k$ nachzuweisen: Wegen $a_2^2 = 1$ gilt

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \frac{1}{(2 - t)^2} [4(1 - t)^2 a^2 + 4(1 - t)t a a_2 + t^2] \\ &= \frac{1}{(2 - t)^2} [(4 - 4t)a^2 + t(4 - 4t)(a a_2 - a^2) + t^2]. \end{aligned}$$

Mit $t \cdot (a_2 a - a^2) = 1 - a^2$ folgt

$$a_1^2 = \frac{(4 - 4t) + t^2}{(2 - t)^2} = 1,$$

w. z. b. w.

Hilfssatz 3.27. Bei einer M -Spiegelung an einer M -Ebene $(k) = \varepsilon \cap (\mathbb{R})$ ist für jeden M -Punkt X das Bild X' eindeutig bestimmt.

Zusatz. Es gilt $(P\bar{X}XX') = -1 = (P\bar{W}W'W)$ für $\bar{X} \in g_{PX} \cap \varepsilon$ im Fall $O \notin \varepsilon$.

Beweis. Im Fall $O \in \varepsilon$ ist nichts zu zeigen, im Fall $O \notin \varepsilon$ (Abb. 106) gilt nach 3.25 und 3.26 mit den Bezeichnungen der Abb. 106

$$(P\bar{X}XX') = (P\bar{W}W'W) = -1 = (P\bar{W}W'W) = (P\bar{X}X'X),$$

w. z. b. w.

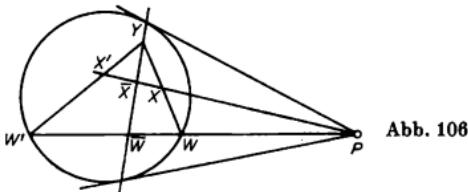


Abb. 106

Um den Begriff der M -Bewegung zu fixieren, erklären wir abschließend: M -Bewegungen sind Produkte von M -Spiegelungen an M -Ebenen und die Einschränkungen solcher Abbildungen auf Figuren. Die M -Spiegelungen an M -Punkten bzw. M -Geraden werden wie in Abschnitt 1.1.3 als spezielle M -Bewegungen eingeführt.

Aufgaben

1. Man zeige, daß das Innere eines Dreiecks im Inneren einer Kugel liegt, sobald sich dessen Ecken dort befinden.
2. Es sei B Mittelpunkt von AD und C der Mittelpunkt von BD . Man berechne
 - $(ABCD), (BADC), (CDAB),$
 - $(ABDC), (BACD),$
 - $(ACBD), (ADBC).$

3.2.2. Die Gültigkeit der Axiome der Lobačevskischen Geometrie im Modell

Wir wenden uns den Inzidenzaxiomen zu.

Beweis von I₁. Ist UV eine Sehne der Kugel \mathfrak{K} , dann liegen nach dem Satz 1.4 unendlich viele Punkte in (UV) , d. h., daß jede M -Gerade wenigstens zwei M -Punkte enthält.

Beweis von I₂. Existenz. Sind P, Q zwei M -Punkte, dann ist g_{PQ} nach dem Hilfssatz 3.23a eine Sekante der Kugel \mathfrak{K} , etwa $g_{PQ} \cap \mathfrak{K} = \{U, V\}$ mit $U \neq V$. Nach b) derselben Hilfssatzes 3.23 gilt $(UV) = g_{PQ} \cap (\mathfrak{K}) \ni P, Q$.

Eindeutigkeit. Aus $P, Q \in (UV)$, (XY) für M -Geraden (UV) und (XY) folgt ebenfalls nach 3.23b

$$(UV) = (\mathfrak{K}) \cap g_{PQ} = (XY).$$

Beweis von I₃. M -Ebenen enthalten nicht kollineare M -Punkte, da das Innere eines Kreises stets nicht kollineare Punkte enthält.

Beweis von I₄. Liegen die M -Punkte P, Q, R in keiner Modellgeraden, dann sind sie auch in der euklidischen Geometrie nicht kollinear, denn wenn $P, Q, R \in g$ gälte, dann wäre g nach dem Hilfssatz 3.23 Sekante, und P, Q, R lägen in der M -Geraden $g \cap (\mathfrak{K})$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Nach dem Hilfssatz 3.24 ist $\varepsilon_{PQR} \cap (\mathfrak{K})$ eine M -Ebene durch P, Q, R , und es kann keine weitere M -Ebene durch P, Q, R geben.

Beweis von I₅. Aus $P, Q \in g \cap (\mathfrak{K})$, $\varepsilon \cap (\mathfrak{K})$ für zwei M -Punkte P, Q folgt $g \subset \varepsilon$ und folglich $g \cap (\mathfrak{K}) \subset \varepsilon \cap (\mathfrak{K})$.

Beweis von I₆. Liegt ein M -Punkt in zwei M -Ebenen $\varepsilon \cap (\mathfrak{K})$ und $\eta \cap (\mathfrak{K})$, dann ist $\varepsilon \cap \eta$ nach dem Hilfssatz 3.23 eine Sekante und $\varepsilon \cap (\mathfrak{K}) \cap \eta \cap (\mathfrak{K}) = \varepsilon \cap \eta \cap (\mathfrak{K})$ eine M -Gerade.

Beweis von I₇. Offensichtlich gibt es in (\mathfrak{K}) Punkte P, Q, R, S , wobei $P \neq Q$ gilt, P, Q, R nicht kollinear und P, Q, R, S nicht komplanar sind. Daraus folgt die Gültigkeit von I₇ im Modell.

Offensichtlich gilt auch das Axiom (LP) im Modell, es kann sogar mehr gezeigt werden (Abb. 107): Ist (UV) eine Modellgerade und R ein M -Punkt mit $R \notin (UV)$,

dann sind g_{RU} und g_{RV} Sekanten von \mathfrak{R} , es sei etwa $g_{RU} \cap \mathfrak{R} = \{U, U'\}$ und $g_{RV} \cap \mathfrak{R} = \{V, V'\}$. Die M -Geraden (UU') und (VV') sind Randparallele zu (UV) durch R . Außerdem führt jede Gerade g durch R und einen Punkt $S \in g_{UV} \setminus UV$ zu einer Parallelen $(XY) = g \cap (\mathfrak{R})$ von (UV) durch R .

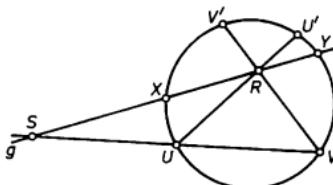


Abb. 107

Auch die Gültigkeit der Anordnungsaxiome und des Stetigkeitsaxioms ist leicht zu erhalten.

Beweis von A₁. Nach der Definition sind die Durchlaufsinne der M -Geraden irreflexiv, transitiv und konnex. Ist A ein Punkt der M -Geraden (UV) , dann gibt es nach dem Satz 1.4 Punkte Q, R mit $U < Q < A < R < V$, falls o. B. d. A. $U < V$ gilt, d. h., daß die Ordnung der M -Geraden auch unbegrenzt ist.

Beweis von A₂. Ist $g \cap (\mathfrak{R})$ eine M -Gerade und $\varepsilon \cap (\mathfrak{R})$ eine M -Ebene mit $g \cap (\mathfrak{R}) \subset \varepsilon \cap (\mathfrak{R})$, dann gilt $g \subset \varepsilon$, weil $g \cap (\mathfrak{R})$ wenigstens zwei Punkte enthält. Sind H_1, H_2 die offenen Halbebenen in ε bezüglich g , dann gilt für $K_1 := H_1 \cap (\mathfrak{R})$ und $K_2 := H_2 \cap (\mathfrak{R})$ erstens

$$\begin{aligned} K_1 \cup K_2 &= (H_1 \cap (\mathfrak{R})) \cup (H_2 \cap (\mathfrak{R})) = (H_1 \cup H_2) \cap (\mathfrak{R}) \\ &= (\varepsilon \setminus g) \cap (\mathfrak{R}) = (\varepsilon \cap (\mathfrak{R})) \setminus (g \cap (\mathfrak{R})), \end{aligned}$$

zweitens folgt aus $X, Y \in K_1$ zunächst $XY \cap g = \emptyset$ und dann $XY \cap (g \cap (\mathfrak{R})) = \emptyset$, und wenn drittens $X \in K_1$ und $Y \in K_2$ gilt, ist $XY \cap g \neq \emptyset$ und wegen $XY \subset (\mathfrak{R})$ nach dem Hilfssatz 3.23c sogar

$$XY \cap ((\mathfrak{R}) \cap g) = (XY \cap (\mathfrak{R})) \cap g = XY \cap g \neq \emptyset.$$

Beweis von A₃. Analog dem Beweis von A₂.

Beweis des Stetigkeitsaxioms. Es sei T eine nicht leere, nach oben (unten) beschränkte Teilmenge einer M -Geraden (UV) , es sei etwa $Q \in T$ und $R \in (UV)$ eine Schranke. In g_{UV} besitzt T eine obere (untere) Grenze S ; da S zwischen den M -Punkten Q und R liegt, ist S nach dem Hilfssatz 3.23c ein M -Punkt, w. z. b.w.

Der Beweis der Bewegungsaxiome für das Modell ist nicht immer einfach; wir werden ihn weiter unten durch Hilfsüberlegungen unterbrechen müssen. Zum Beweis der Axiome B₁ und B₂ bemerken wir vorbereitend, daß nach der Definition einer M -Spiegelung s stets $s^{-1} = s$ gilt bzw. daß s^2 die Menge aller M -Punkte identisch abbildet.

Beweis von B₁. Sind ϱ und τ M -Bewegungen von (\mathfrak{N}) , dann gibt es M -Spiegelungen $s_1, \dots, s_m, s_1', \dots, s_n'$ mit $\varrho = s_1 \cdots s_m$ und $\tau = s_1' \cdots s_n'$. Folglich sind auch $\varrho\tau = s_1 \cdots s_m s_1' \cdots s_n'$ und $\varrho^{-1} = s_m \cdots s_1$ M -Bewegungen. Daraus folgt B₁.

Beweis von B₂. Es genügt, die Verträglichkeit mit den Inzidenz- und Anordnungsgründen für M -Spiegelungen an M -Ebenen $\varepsilon \cap (\mathfrak{N})$ mit $O \notin \varepsilon$ zu zeigen.

Es sei P der Pol von ε und (UV) eine M -Gerade.

Fall 1: $P \in g_{UV}$. Dann ist $(UV)' = (U'V')$.

Fall 2: $P \notin g_{UV}$. Zur Bestimmung der Bildpunkte X' für Punkte $X \in (UV)$ wählen wir eine Ebene η durch P , U und V . Falls $g_{UV} \nparallel \varepsilon \cap \eta$ ist (Abb. 108a), wählen wir außerdem $Y \in g_{UV} \cap \varepsilon \cap \eta$ und erkennen sofort $(UV)' = (U'V')$; falls $g_{UV} \parallel \varepsilon \cap \eta$ ist (Abb. 108b), gilt $g_{U'V'} \parallel g_{UV}$ und $(UV)' = (U'V')$ nach dem Zusatz zum Hilfssatz 3.27 wegen der Invarianz des Teilverhältnisses bei Parallelprojektion. Insbesondere bleibt die Kollinearität erhalten; daraus folgt die Invarianz der Komplanarität.

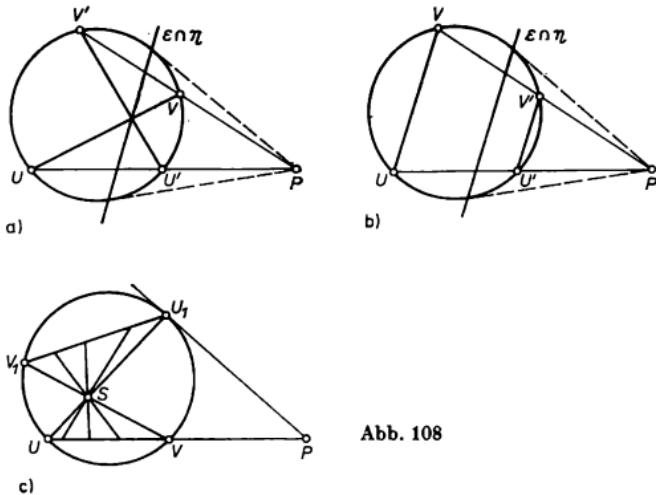


Abb. 108

Die Invarianz der Durchlaufsinne kann man im Fall $P \notin g_{UV}$ nach dem Satz 1.5 leicht einsehen. Gilt jedoch $P \in g_{UV}$ (Abb. 108c), so projizieren wir (UV) zunächst ordnungserhaltend auf eine M -Gerade (U_1V_1) mit $P \notin g_{U_1V_1}$. Indem wir diese gesamte Konfiguration spiegeln, erhalten wir wegen der Invarianz der Kollinearität eine Abbildungskette

$$(UV) \rightarrow (U_1V_1) \rightarrow (U_1'V_1') \rightarrow (U'V'),$$

die aus einer Projektion aus S , der auf (U_1V_1) eingeschränkten M -Spiegelung und einer Projektion aus S' besteht und in jedem Schritt die Ordnung erhält, w. z. b. w.

Die zuletzt benutzte Methode können wir zum Beweis der folgenden Aussage verwenden:

Hilfssatz 3.28. Bei M -Bewegungen bleibt das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden erhalten.

Die Eigenschaft, daß ein M -Punkt M *nichteuklidischer Mittelpunkt* in der Strecke AB in der M -Geraden (UV) ist, sei dadurch gekennzeichnet, daß eine M -Bewegung σ mit $M^\sigma = M$ und $A^\sigma = B$ existiert. Bei einer M -Bewegung τ erhalten wir $M^\tau \in A^\tau B^\tau$ sowie $(M^\tau)^{\tau^{-1}\sigma\tau} = M^{\sigma\tau} = M^\sigma$ und $(A^\tau)^{\tau^{-1}\sigma\tau} = A^{\sigma\tau} = B^\tau$, d. h., daß *nichteuklidische Mittelpunkte bei M -Bewegungen wieder in nichteuklidische Mittelpunkte übergehen*. In der Definition wird jedoch eine Reihenfolge A, B benutzt. Um im Fall $A \neq B$ die Unabhängigkeit der Definition von der Reihenfolge zu zeigen, bemerken wir $U^\sigma = V$ und $V^\sigma = U$ wegen $M \in AB$ (vgl. Abb. 109a),

$$(17) \quad (UVAM) = (VUBM)$$

als neue Kennzeichnung der nichteuklidischen Mittelpunkte nach obigem Hilfssatz sowie $B^\sigma = A$ wegen $(UVAM) = (VUBM) = (UVB^\sigma M)$.

Ist nun s die M -Spiegelung an einem M -Punkt A und τ eine beliebige M -Bewegung, dann ist $\tau^{-1}s\tau$ die M -Spiegelung an A^τ ; denn ist Y ($\neq A^\tau$) ein beliebiger M -Punkt und $X := Y^{\tau^{-1}s\tau}$, dann gilt

$$(A^\tau)^{\tau^{-1}s\tau} = A^{s\tau} = A^\tau$$

und

$$Y^{\tau^{-1}s\tau} = X^{s\tau},$$

wobei A^τ der Mittelpunkt von $YX^{s\tau} = X^sX^\tau$ ist.

Eine entsprechende Aussage gilt auch für M -Spiegelungen s an M -Ebenen $\varepsilon \cap (\mathfrak{K})$: Ist τ eine M -Bewegung und s' die M -Spiegelung an $\varepsilon^\tau \cap (\mathfrak{K})$, dann gilt

$$s' = \tau^{-1}s\tau.$$

Denn bei M -Bewegungen bleiben Komplanarität, Kollinearität, Ordnung und die Eigenschaft, nichteuklidischer Mittelpunkt zu sein, erhalten; wir erkennen somit $s' = \tau^{-1}s\tau$, wenn wir neben ε den ganzen „Abbildungsmechanismus“ der M -Spiegelung s der Abbildung τ unterwerfen (Abb. 109).

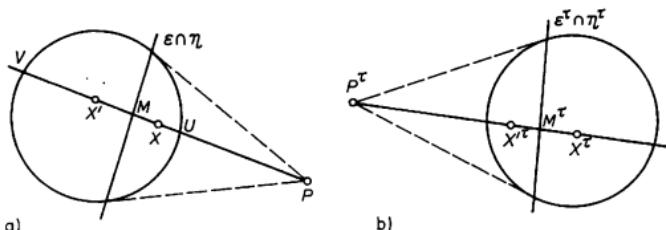


Abb. 109

Wir haben zusammenfassend den

Satz 3.29. Ist τ eine beliebige M -Bewegung und s M -Spiegelung an einem M -Punkt A bzw. einer M -Ebene $\varepsilon \cap (\mathbb{R})$, dann ist $\tau^{-1}s\tau$ die M -Spiegelung an A' bzw. $\varepsilon' \cap (\mathbb{R})$.

Für weitere Überlegungen erweist sich die Existenz von M -Ebenen, deren M -Spiegelung zwei gegebene M -Punkte vertauscht, von grundlegender Bedeutung. Wir werden solche Ebenen gewinnen, indem wir zunächst den Hilfssatz 3.27 durch die Angabe einer Berechnungsformel für die Bildpunkte ergänzen. Damit wird Vorarbeit für den Beweis der Axiome B_3 und B_4 geleistet, und zwar für die Existenz-aussagen.

Indem wir bei der Bestimmung des Bildpunktes X' eines Punktes X bei der M -Spiegelung an einer M -Ebene $\varepsilon \cap (\mathfrak{F})$ mit $O \notin \varepsilon$ eine Ebene η durch den Kugel-

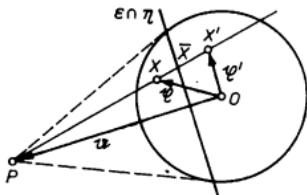


Abb. 110

mittelpunkt O verwenden, können wir eine explizite Darstellung von $\xi' := \mathbf{v}(OX')$ mit Hilfe von $a := \mathbf{v}(OP)$ und $\xi := \mathbf{v}(OX)$ angeben (P bezeichne wieder den Pol von ε): Für $X \in \varepsilon$ ist $X' = X$. Es sei nun $X \notin \varepsilon$ (Abb. 110) und $\bar{\xi} := \mathbf{v}(\overline{OX})$ mit $\bar{X} \in g_{PX} \cap \varepsilon \cap \eta$. Wie bei der Berechnung von \bar{a} im Beweis von 3.26 erhalten wir, indem wir o. B. d. A. eine Einheitskugel voraussetzen,

$$\bar{x} = a + \frac{1-a^2}{ra-a^2} (x - a).$$

Zusammen mit $(P\bar{X}X'X) = -1$ nach dem Zusatz von 3.27, d. h.

$$-1 = \frac{\xi' - a}{\xi' - \bar{\xi}} \cdot \frac{\xi - a}{\xi - \bar{\xi}} = \frac{\xi' - a}{\xi' - \bar{\xi}} \cdot \left(1 - \frac{1 - a^2}{\xi a - a^2}\right),$$

ergibt das

$$\left(1 - \frac{1 - \alpha^2}{\tau\alpha - \alpha^2}\right)(\xi' - \alpha) = -(\xi' - \bar{\xi}),$$

$$\frac{2\mathfrak{x}\mathfrak{a} - \mathfrak{a}^2 - 1}{\mathfrak{x}\mathfrak{a} - \mathfrak{a}^2} \mathfrak{x}' = \bar{\mathfrak{x}} + \left(1 - \frac{1 - \mathfrak{a}^2}{\mathfrak{x}\mathfrak{a} - \mathfrak{a}^2}\right) \mathfrak{a} = \frac{1 - \mathfrak{a}^2}{\mathfrak{x}\mathfrak{a} - \mathfrak{a}^2} \bar{\mathfrak{x}} + \frac{2\mathfrak{x}\mathfrak{a} - 2}{\mathfrak{x}\mathfrak{a} - \mathfrak{a}^2} \mathfrak{a}$$

und schließlich

$$(18) \quad \xi' = \frac{(1 - \alpha^2) \xi + 2(\xi \alpha - 1) \alpha}{2\alpha - \alpha^2 - 1},$$

letztlich eine Darstellung von X' allein mit Hilfe von P und X . Analog erhalten wir aus $(P\bar{X}XX') = -1$

$$(19) \quad \xi = \frac{(1 - a^2) \xi' + 2(\xi' a - 1) a}{2\xi' a - a^2 - 1}.$$

Läßt sich auch a als Funktion von ξ und ξ' schreiben, wenn $\xi \neq \xi'$ gilt? Aus den modifizierten Gleichungen (18) und (19)

$$(2\xi a - a^2 - 1) \xi' = (1 - a^2) \xi + 2(\xi a - 1) a,$$

$$(2\xi' a - a^2 - 1) \xi = (1 - a^2) \xi' + 2(\xi' a - 1) a$$

erhalten wir nach Addition

$$2a\xi(\xi' - a) + 2a\xi'(\xi - a) - 2\xi' - 2\xi + 4a = 0$$

und nach Multiplikation mit $\frac{1}{2} \xi$ bzw. $\frac{1}{2} \xi'$

$$(20a) \quad a\xi \cdot \xi\xi' - (a\xi)^2 + a\xi' \cdot \xi^2 - a\xi' \cdot a\xi - \xi\xi' - \xi^2 + 2a\xi = 0,$$

$$(20b) \quad a\xi \cdot \xi'^2 - a\xi \cdot a\xi' + a\xi' \cdot \xi\xi' - (a\xi')^2 - \xi'^2 - \xi\xi' + 2a\xi = 0.$$

Um a zu bestimmen, machen wir den Ansatz

$$a = \xi + t(\xi' - \xi), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Wir können damit a in (20a) eliminieren, um zu einer Gleichung für t zu kommen:

$$(21a) \quad [t^2(\xi^2 - \xi'^2) - 2t(\xi^2 - 1) + (\xi^2 - 1)] (\xi\xi' - \xi^2) = 0;$$

im Fall $\xi\xi' - \xi^2 \neq 0$ erhalten wir

$$(22a) \quad t^2(\xi^2 - \xi'^2) - 2t(\xi^2 - 1) + (\xi^2 - 1) = 0.$$

Mit dem Ansatz $a = \xi' + t(\xi - \xi')$, $t \in \mathbb{R}$ und (20b) kommt man zu einer Gleichung (21b), die aus (21a) durch Vertauschung von ξ und ξ' hervorgeht und die für $\xi\xi' - \xi'^2 \neq 0$ zu

$$(22b) \quad t^2(\xi'^2 - \xi^2) - 2t(\xi'^2 - 1) + (\xi'^2 - 1) = 0$$

führt.

Es kann nicht $\xi\xi' - \xi^2 = \xi(\xi' - \xi) = 0 = \xi'(\xi - \xi') = \xi'\xi - \xi'^2$ gelten, weil sonst $\xi = \xi'$ oder $\xi, \xi' \perp \xi - \xi'$ wäre.

Fall 1: $\xi^2 - \xi'^2 = 0$. Wegen der Gleichschenkligkeit des Dreiecks OXX' gibt es nach dem Satz 1.22b eine Ebene ε durch O derart, daß $X' = X'$ gilt. Die einzige Lösung der Gleichungen (22a, b) ist $t = \frac{1}{2}$; sie führt zur Bestimmung des Mittelpunktes von XX' .

Fall 2: $\xi^2 - \xi'^2 \neq 0$. Dann gibt es zwei Lösungen von (22a, b):

$$(23a) \quad t_{1,2} = \frac{\xi^2 - 1 \pm \sqrt{(\xi^2 - 1)(\xi'^2 - 1)}}{\xi^2 - \xi'^2}$$

oder

$$(23b) \quad t_{1,2} = \frac{\xi'^2 - 1 \pm \sqrt{(\xi^2 - 1)(\xi'^2 - 1)}}{\xi'^2 - \xi^2}.$$

Gemäß der beiden Lösungsansätze ergeben sich hieraus der Pol einer Ebene ε , für die die M -Spiegelung an $\varepsilon \cap (\mathfrak{R})$ die Punkte X und X' vertauscht, und der nicht-euklidische Mittelpunkt von XX' .

Somit gilt der

Hilfssatz 3.30. Zu je zwei M -Punkten X und X' gibt es genau eine M -Ebene $\varepsilon \cap (\mathfrak{R})$ derart, daß bei der M -Spiegelung an dieser M -Ebene X und X' vertauscht werden; XX' hat einen nichteuklidischen Mittelpunkt.

Beweis von B₄. a) Es sei AB eine beliebige M -Strecke.

Existenz. Nach dem Hilfssatz gibt es eine M -Ebene $\varepsilon \cap (\mathfrak{R})$ derart, daß bei der M -Spiegelung s an dieser M -Ebene $M' = O$ für den nichteuklidischen Mittelpunkt M von AB gilt (Abb. 111a). Nach dem Satz 3.29 ist

$$s' := ss_Os$$

M -Spiegelung an M , für die $A s' = B$ gilt.

Eindeutigkeit. Ist auch s'' M -Spiegelung an M , dann ist $ss''s$ die eindeutig bestimmte M -Spiegelung an O , d. h. $s'' = ss_Os = s'$.

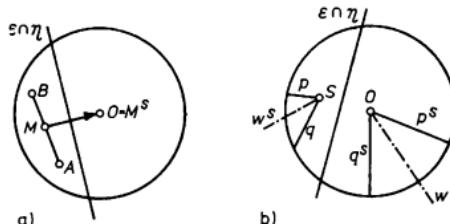


Abb. 111

b) In $\zeta \cap (\mathfrak{R})$ sei $\prec(p, q)$ ein beliebiger M -Winkel mit dem Scheitel S . Nach dem Hilfssatz 3.30 gibt es eine M -Ebene $\varepsilon \cap (\mathfrak{R})$, so daß die Spiegelung s an dieser M -Ebene S auf O abbildet (Abb. 111b). In ζ' gibt es genau eine Gerade w , so daß s_w die Schenkel des Winkels $\prec(p^s, q^s)$ vertauscht. Ist ϑ durch $s_w = s_Os_\vartheta$ bestimmt, dann ist

$$s' := ss_w s = ss_O s_\vartheta s = ss_O s s s_\vartheta s$$

nach dem Satz 3.29 eine M -Spiegelung an $w^s \cap (\mathfrak{R})$, für die $p^{ssw^s} = ((p^s)^w)^s = (q^s)^s = q$ gilt. — Die Eindeutigkeit ergibt sich wie unter a).

Beweis von B₃.

a) Es seien A, B ($\neq A$) Punkte einer Figur F in einer M -Geraden (UV) , etwa $B \in (AV)$, und $(A'W)$ eine offene M -Halbgerade (Abb. 112a).

Existenz. Nach B₄ gibt es eine M -Spiegelung s an einem M -Punkt M und eine M -Spiegelung s' an einer M -Geraden $w \cap (\mathfrak{R})$ mit $A^s = A'$, $A^{s'} = A'$ und $B^{ss'} \in (A'W)$. Die Einschränkung $ss' \mid F$ von ss' auf F ist eine gesuchte Bewegung von F .

Eindeutigkeit. Gilt auch $A^t = A'$ und $B^t \in (A'W)$ für eine M -Bewegung von F , dann gelten die Gleichungen

$$A^{ss'} = A' = A^t, \quad U^{ss'} = U^t, \quad V^{ss'} = W = V^t.$$

Aus $(U^{ss'}V^{ss'}A^{ss'}X^{ss'}) = (UVAX) = (U^tV^tA^tX^t)$ für alle Punkte $X \in F$ folgt noch $X^{ss'} = X^t$, speziell $B^{ss'} = B^t$, d. h. $ss' \mid F = \tau$.

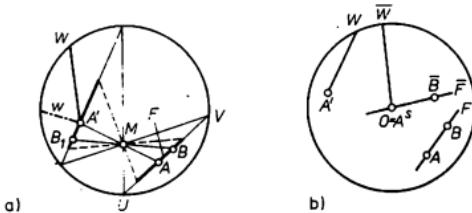


Abb. 112

Die Existenzaussage in B₃(a) kann (ohne B₄) allein mit Hilfe von 3.30 und 1.22 erfolgen: Es gibt M -Spiegelungen s und s^* an M -Ebenen mit $A^s = O$ und $O^{s^*} = A'$ (Abb. 112b). Es sei $\bar{B} := B^s$ und $\bar{W} := W^{s^*}$. Nach dem Satz 1.22b gibt es durch O eine Ebene ε mit $\bar{B} \in (\bar{O}\bar{W})$. Nun brauchen wir nur noch ss^* auf F einzuschränken. — Dieser Gedankengang kann für den Beweis von B₃(b, c) als Vorbild dienen:

b) Es seien A, B, C nicht kollineare Punkte einer Figur F in einer M -Ebene, $(A'U)$ eine offene M -Halbgerade und $A'UV^+ \cap (\mathfrak{R})$ eine M -Halbebene. Werden s, s^* wie eben bestimmt, dann gibt es nach dem Satz 1.22b,c Ebenen ε und ζ , so daß für $\tau := ss^*s^*s^*$

$$A^t = A', \quad B^t \in (A'U), \quad C^t \in A'UV^+ \cap (\mathfrak{R})$$

gilt. Nun ist $\tau \mid F$ eine gesuchte Bewegung.

Zum Beweis der Eindeutigkeit bemerken wir zunächst, daß die Punkte in $g_{AB} \cap (\mathfrak{R})$ nach a) eindeutig abgebildet werden. Von jedem Punkt $X \in F \setminus ABC^+$ fällen wir das nichteuklidische Lot l auf g_{AB} . Nach dem Satz 3.29 bleibt die M -Orthogonalität bei M -Bewegungen erhalten. Da der M -Lotfußpunkt F und damit das M -Lot l eindeutig abgebildet werden, ist auch das Bild von X in $l' \cap A'UV^+ \cap (\mathfrak{R})$ eindeutig. — Analog schließt man für $X \in F \setminus ABC^+$.

Der Beweis von c) kann nun übergangen werden (vgl. Aufgabe 2), w. z. b. w.

Die Axiome des Zirkels sind mit Hilfe des Stetigkeitsaxioms aus den hergeleiteten Axiomen ableitbar (vgl. dazu die Abschnitte 1.3.3 und 4.2.2 sowie den Hilfssatz 2.15). Somit können wir nochmals feststellen, daß die Lobačevkijische Geometrie im Inneren einer Kugel realisierbar ist und ein Widerspruch in ihr einen Widerspruch in der euklidischen Geometrie bedeuten würde. Mehr kann in der Mathematik nicht geleistet werden. Auch die Widerspruchsfreiheit anderer mathematischer Theorien kann nur relativ zu einer bereits akzeptierten Theorie bewiesen werden. So ist beispielsweise die euklidische Geometrie relativ zur Theorie der reellen Zahlen oder relativ zur Lobačevkijischen Geometrie widerspruchsfrei. In der Geschichte der Mathematik haben die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie und der Nachweis ihrer relativen Widerspruchsfreiheit ihren besonderen Platz: Es handelt sich um den ersten bedeutenden Beweis dafür, daß eine Aussage aus gewissen anderen Aussagen nicht ableitbar ist.

Aufgaben

1. Man stelle die Rechnungen, die zum Hilfssatz 3.30 führen, ausführlich dar.
2. Man leite B₃(c) im Modell her.

3.2.3. Aussagen der Lobačevkijischen Geometrie im Kleinschen Modell

Parallele und randparallele Geraden wurden in Abb. 107 dargestellt.

Um die Hypothese des spitzen Winkels für Saccherische Vierecke zu veranschaulichen, betrachten wir ein Viereck dieser Art mit rechten Winkeln bei A und B . Nach dem Hilfssatz 3.30 gibt es eine M -Spiegelung s , die den Mittelpunkt von AB in O abbildet (Abb. 113). Das Viereck $A^sB^sC^sD^s$ ist nun ein euklidisches Rechteck, jedoch gilt nichteuklidisch die Hypothese des spitzen Winkels.

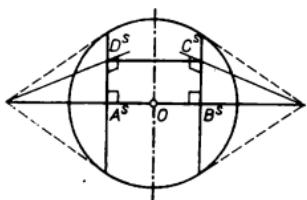


Abb. 113

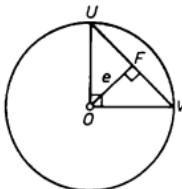


Abb. 114

Bei der Bestimmung einer absoluten Längeneinheit e sind wir von einem rechten Winkel ausgegangen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\not\propto UOV$ mit $U, V \in \mathbb{R}$ ein rechter Winkel, dersomit auch nichteuklidisch ein Rechter ist (Abb. 114). Die zu bestimmende Grenzgerade ist (UV) . Die Winkelhalbierende von $\not\propto UOV$ steht auf (UV) senkrecht. Ist F der Fußpunkt dieses Lotes von O auf (UV) , dann

besitzt OF die Länge e mit $\frac{R}{2} = \Pi(e)$. — Damit ist insbesondere auch der Satz 2.13' veranschaulicht, falls wir $\not\propto UOV$ und F betrachten.

Wir kommen nun zu den Abstandslinien, Kreisen und Grenzkreisen im Kleinschen Modell. Zunächst betrachten wir diese Bahnkurven in einer Ebene η durch O . Außerdem setzen wir noch besondere Lagen voraus (o. B. d. A sei \mathfrak{K} Einheitskugel):

a) Nichteuklidischer Kreis um O . Die Spiegelungen an Geraden durch O sind auf (\mathfrak{K}) eingeschränkte euklidische Spiegelungen. Folglich ergibt sich als Bahn ein euklidischer Kreis um O (Abb. 115).

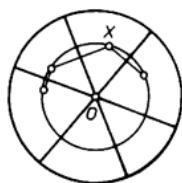


Abb. 115

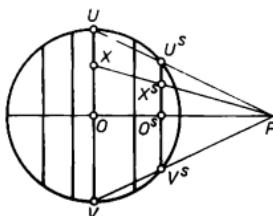


Abb. 116

b) Abstandslinie zu einer Geraden $g \cap (\mathfrak{K})$ durch O . Die M -Geraden des Lotbüschels stehen auf g auch im euklidischen Sinne senkrecht (Abb. 116). Es sei nun X ein Punkt einer zu $g \cap (\mathfrak{K})$ senkrechten M -Geraden (UV) durch O . Bei der Spiegelung s an einer M -Geraden des Lotbüschels mit dem Pol P gilt nach dem Strahlensatz

$$\frac{OX^s}{OX} = \frac{PX^s}{PX} = \frac{O^sU^s}{OU}.$$

Folglich ist auch

$$t := \frac{OX}{OU} = \frac{O^sX^s}{O^sU^s}.$$

Aus der Kreisgleichung $x^2 + y^2 = 1$ für $\mathfrak{K} \cap \eta$ erhalten wir die Ellipsengleichung

$$x^2 + \frac{y^2}{t^2} = 1.$$

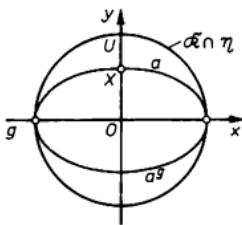


Abb. 117

Somit bilden die Abstandslinie a durch X und a° zwei Teile einer Ellipse, wobei die Endpunkte der großen Achse nicht zu den Abstandslinien gehören.

c) Grenzkreis durch O . Da alle M -Geraden des erzeugenden Büschels untereinander randparallel sind, müssen sie einen Punkt in $\mathfrak{K} \cap \eta$ gemeinsam haben, etwa den Einheitspunkt der y -Achse (Abb. 118). Die Pole dieser Geraden müssen somit

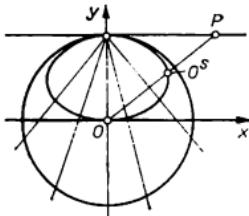


Abb. 118

sämtlich auf der Parallelen zur x -Achse durch diesen Einheitspunkt liegen. Hat P das Koordinatenpaar $(p, 1)$, dann erhalten wir gemäß (18) mit $\xi = (0, 0)$

$$\xi' = \frac{-2}{-(p^2 + 2)} (p, 1) = \left(\frac{2p}{p^2 + 2}, \frac{2}{p^2 + 2} \right).$$

Indem wir in $y := 2(p^2 + 2)^1 \neq 0$ mittels $x := py$ nun p eliminieren, erhalten wir die Ellipsengleichung

$$x^2 + 2y^2 - 2y = 0.$$

Der Einheitspunkt auf der y -Achse gehört nicht zum Grenzkreis.¹⁾

Die bisher erhaltenen Ergebnisse lassen sich nach dem folgenden Hilfssatz verallgemeinern.

Hilfssatz 3.31. Bei M -Spiegelungen an M -Ebenen wird die Menge der euklidischen Ellipsen, die in $(\mathfrak{K}) \cup \mathfrak{K}$ liegen, auf sich abgebildet.

Beweisskizze. Die Behauptung ist für M -Ebenen durch O trivial. Es sei nun O kein Punkt der M -Ebene $\varepsilon \cap (\mathfrak{K})$; die Ellipse liege in $\eta \cap ((\mathfrak{K}) \cup \mathfrak{K})$.

Fall 1: η bleibt bei der Spiegelung s an $\varepsilon \cap (\mathfrak{K})$ fest. Wir wählen eine orthonormierte Basis des Vektorraumes derart, daß $a = (p, 0)$, $\xi = (x, y)$ und $\xi' = (x', y')$ gilt²⁾ (Abb. 119a). Gemäß (19) erhalten wir

$$\xi = \frac{(1 - p^2) \xi' + 2(px' - 1) a}{2px' - (p^2 + 1)},$$

d. h.

$$(24) \quad x = \frac{(1 + p^2) x' - 2p}{2px' - (p^2 + 1)}, \quad y = \frac{(1 - p^2) y'}{2px' - (p^2 + 1)}.$$

¹⁾ In diesem Punkt ist $\mathfrak{K} \cap \eta$ Krümmungskreis der Ellipse.

²⁾ Das heißt, daß Null als dritte Koordinate unberücksichtigt bleibt.

Setzen wir nun in eine Gleichung zweiten Grades

$$a_{00} + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$$

ein, dann erhalten wir wieder eine Gleichung zweiten Grades (vgl. Aufgabe 1)

$$a'_{00} + 2a'_{01}x' + 2a'_{02}y' + a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 = 0,$$

die Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung. Da die Bildpunkte X' in $(\mathfrak{K}) \cup \mathfrak{R}$ liegen, ist das Bild einer Ellipse wieder eine Ellipse.

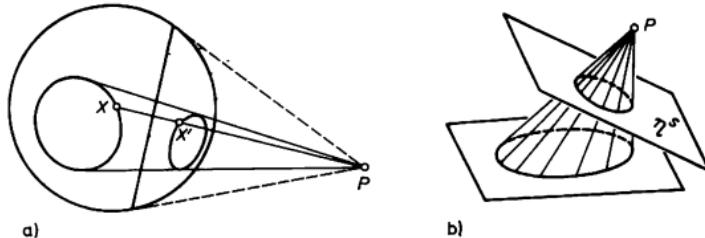


Abb. 119

Fall 2: η bleibt nicht bei der Spiegelung s an $\varepsilon \cap (\mathfrak{R})$ fest. Da $(\eta \cap (\mathfrak{R}))^s$ eine M -Ebene ist, läuft der Beweis darauf hinaus, den Schnitt einer Ebene mit einem (eventuell schiefen) Kegel mit einer Ellipse als Grundfläche (Abb. 119b) zu bestimmen. Das kann mit Mitteln der analytischen Geometrie vollzogen werden.

Somit haben wir den

Satz 3.32. *Die Kreise, Grenzkreise und Abstandslinien in einer Ebene η der Lobačevskischen Geometrie haben die Gestalt $e \cap (\mathfrak{R})$, wobei e eine euklidische Ellipse in $\eta \cap (\mathfrak{R}) \cup \mathfrak{K}$ ist, von der keine, ein bzw. zwei Punkte in $\eta \cap \mathfrak{R}$ liegen (Abb. 120).*

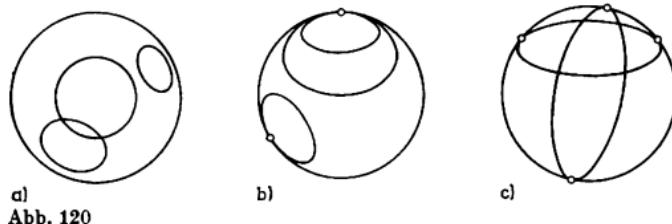


Abb. 120

Es bleibt dem Leser überlassen, sich weitere Sachverhalte der Lobačevskischen Geometrie im Kleinschen Modell zu veranschaulichen. Da alle Modelle der Lobačevskischen Geometrie untereinander isomorph sind, kann man das Modell sogar zur Herleitung von Sätzen der nichteuklidischen Geometrie verwenden, z. B. um die nichteuklidische Trigonometrie aufzubauen (vgl. [4]).

Aufgaben

1. Man zeige, daß bei der Abbildung (24) eine Gleichung zweiten Grades in eine Gleichung zweiten Grades übergeht.
- 2.* Man untersuche die Schnitte elliptischer Kegel.

4. Banach-Minkowskische Geometrie

Die Minkowskische Geometrie, die später von STEFAN BANACH (1892–1945) ausgebaut wurde, entsteht aus der euklidischen durch Änderung der Längenmessung. Dabei bleibt die Strecke (nicht notwendig eindeutige) kürzeste Verbindung zweier Punkte. Während die Streckenkongruenz somit einen festen Sinn hat, erweisen sich mit ihr verknüpfte Winkel- und Dreieckskongruenz-eigenschaften im wesentlichen als kennzeichnende Eigenschaften euklidischer Geometrie. Auch für sie wird hier die Bedeutung der Dreiecksungleichung besonders deutlich, jedoch sind in den Anwendungen nichteuklidische Minkowskische Geometrien ebenfalls unentbehrlich. Sie verdanken ihre Entstehung einer arithmetischen Fragestellung, die von HERMANN MINKOWSKI (1864–1909) in seiner *Geometrie der Zahlen* behandelt wurde.

4.1. Einführung

4.1.1. Anschauliche Einführung

In der Natur begegnen wir bei physikalischen Erscheinungen dem Phänomen der Richtungsabhängigkeit. Dieser für Kristallstrukturen typische Tatbestand wird *Anisotropie* genannt. Beispielsweise sind Elastizität und Kohäsion richtungsabhängig. Anisotropie bezüglich der Ausbreitungsgeschwindigkeit in kristallinen Medien führt dazu, daß die Wellenflächen keine Kugelflächen sind. In einigen in der Optik wichtigen Fällen sind sie Ellipsoide.

Bei den Entfernungen in einer Stadt können wir ebenfalls von Richtungsabhängigkeit sprechen, wenn wir von der *Luftrichtungsentfernung* zur *Entfernung in Minuten für einen Fußgänger* übergehen. Zur Vereinfachung unserer Betrachtungen setzen wir voraus, daß alle Straßen geradlinig und waagerecht verlaufen und bei Kreuzungen stets rechtwinklig aufeinander treffen (Abb. 121). Dann ist offenbar die Strecke nicht mehr die eindeutig bestimmte kürzeste Fußgängerverbindung zweier Punkte P und Q ; es kann mehrere kürzeste Verbindungen geben.

Die nächste Frage, die uns bezüglich der Fußgänger-Entferungen interessiert, bezieht sich auf die Gestalt eines Kreises k , dessen Radius etwa durch die Vorgabe von 20 Minuten gegeben ist (Abb. 122). Verkürzen wir den Radius durch die Vorgabe

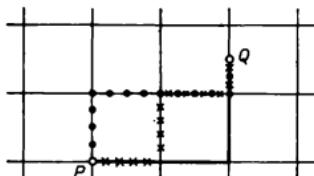


Abb. 121

von 10 Minuten, dann erhalten wir einen Kreis k' , der aus k durch eine Stauchung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ hervorgeht. Verallgemeinernd sei festgestellt, daß alle Kreise bezüglich der Fußgänger-Entfernung aus k durch

1. Dehnung (bei ungleichen Radien),
2. Verschiebung (bei gleichen Radien)

gewonnen werden. Diese Einsicht können wir auch wie folgt formulieren: *Ein Teilverhältnis paralleler gerichteter Strecken stimmt bis auf das Vorzeichen mit dem Verhältnis der Längen dieser Strecken bezüglich der neuen Entfernungsmessung überein.*

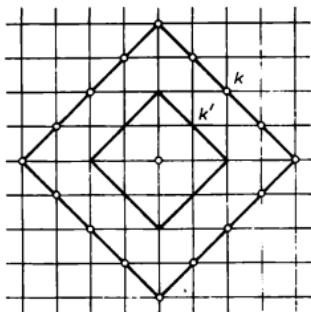


Abb. 122

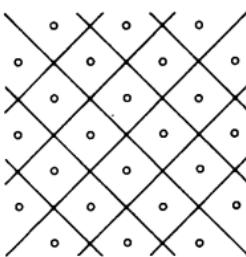


Abb. 123

Die Bestimmung der Kreise in unserer *Stadtgeometrie* kann für die Planung der Standortverteilung von Verkaufsstellen gleichen Typs, Apotheken usw. ausgenutzt werden. Dazu überdecken wir die Stadt mit kongruenten Kreisen bezüglich der Fußgänger-Entfernung. Die Mittelpunkte ergeben dann günstige Standorte, wenn je zwei Kreise keine innere Punkte gemeinsam haben. Als Lösung erhalten wir ein Quadratnetz, bei dem die Diagonalen der Kreise die Richtungen der Straßenzüge besitzen (Abb. 123). — Bezuglich der Luftliniendistanz erhält man eine andere Lösung, bei der zwei benachbarte Kreise gemeinsame innere Punkte haben (vgl. Aufgabe 2).

Aufgaben

1. Man bestimme einen Kreis bezüglich der Fußgänger-Entfernung in obiger Stadt, dessen Mittelpunkt keine Kreuzung, sondern ein beliebiger Punkt in einer Straße ist.
2. Man überlege sich, daß die Lösung der Standortaufgabe zu den Mittelpunkten von „Bienenwaben“ führt, wenn man sich auf die Luftliniendentfernung bezieht.

4.1.2. Maßbestimmung mittels Eichfigur¹⁾

Im Beispiel der Fußgänger-Entfernung hat die Wegzeit $\varrho(P, Q)$ von P nach Q neben der Eigenschaft

$$(0) \quad \frac{XY}{PQ} = t^2 \Rightarrow \frac{\varrho(X, Y)}{\varrho(P, Q)} = |t|$$

für beliebige Punkte P, Q, X, Y und reelle Zahlen t noch folgende *Eigenschaften einer Abstandsfunktion*: Für beliebige Punkte X, Y, Z gilt

- (1) $\varrho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$ (Identitätsaxiom),
- (2) $\varrho(X, Y) = \varrho(Y, X)$ (Symmetrieaxiom),
- (3) $\varrho(X, Y) + \varrho(Y, Z) \geq \varrho(X, Z)$ (Dreiecksungleichung).

Dabei ist diese Abstandsfunktion durch die zugehörigen Kreise bzw. Kugelflächen völlig bestimmt. Außerdem erhält man nach (0) die Kreise bzw. Kugelflächen aus einem Kreis bzw. einer Kugelfläche, einer *Eichfigur*, durch Dehnung oder Verschiebung. In diesem Abschnitt werden wir die gegenüber einer Abstandsfunktion anschaulichere Eichfigur in den Vordergrund rücken.

Es sei k eine zentrale symmetrische Figur, die jede vom Mittelpunkt O ausgehende (offene) Halbgerade in genau einem Punkt trifft. Um einer beliebigen Strecke \overrightarrow{AB} mit $A \neq B$ eine Maßzahl $\varrho_k(A, B)$ zuzuordnen, bestimmen wir (vgl. Abb. 124) zunächst Punkte P und E durch die Forderungen

$$\overrightarrow{AB} \# \overrightarrow{OP},$$

$$E \in OP^+ \cap k$$

und dann die positive reelle Zahl $t = \varrho_k(A, B)$ mit

$$\overrightarrow{OP} = t \overrightarrow{OE}.$$

Offenbar ist $\varrho_k(A, B)$ durch \overrightarrow{AB} eindeutig bestimmt.

In der Ebene ε ist die Eichfigur k ein *Einheitskreis* bei dieser Maßbestimmung. Sein Inneres (k) ist durch $\varrho := \varrho_k(O, X) < 1$, seine Fläche $\bar{k} := k \cup (k)$ durch

¹⁾ Alle Überlegungen dieses Abschnittes können als Aussagen im Anschauungsraum aufgefaßt werden. Es sei aber darauf hingewiesen, daß in den Beweisen nur die Inzidenz- und Anordnungsaxiome einschließlich des euklidischen Parallelaxioms und — für den Begriff des reellen Teilverhältnisses — das Stetigkeitsaxiom benutzt werden.

²⁾ Es gilt hier $\frac{XY}{PQ} = t$ genau dann, wenn $\overrightarrow{XY} \# t \overrightarrow{PQ}$ ist (vgl. 3.1.2 d)).

$\varrho \leq 1$ gekennzeichnet. Außerdem charakterisiert $\varrho = \varrho_k(O, X) > 1$ das Äußere des Einheitskreises (Abb. 125). Die Menge

$$\{X \in \varepsilon: \varrho_k(O, X) = r_0\}$$

ist ein zu k konzentrischer Kreis, der für $0 < r_0 < 1$ im Inneren und für $r_0 > 1$ im Äußeren von k verläuft.

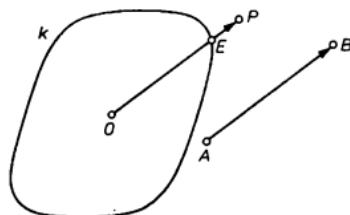


Abb. 124

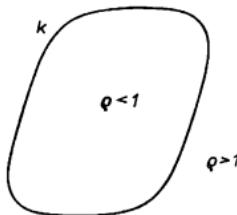


Abb. 125

Ist k beispielsweise das in Abb. 126 dargestellte regelmäßige Sechseck, dann ist das Dreieck OPQ gleichseitig mit $\varrho_k(O, P) = \varrho_k(P, Q) = \varrho_k(Q, O) = 1$.

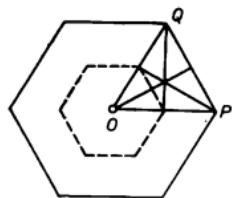


Abb. 126

Bemerkenswerterweise haben auch alle Seitenhalbierenden die Maßzahl 1. Außerdem ist in Abb. 126 ein zu k konzentrischer Kreis mit $r_0 = \frac{1}{2}$ durch eine punktierte Linie hervorgehoben.

Im Raum ist die Eichfigur k eine *Einheitskugel* (fläche) bei der Maßbestimmung bezüglich k :

$$k = \{X: \varrho = \varrho_k(O, X) = 1\}.$$

Inneres (k), Kugelkörper \bar{k} und Äußeres werden durch $\varrho < 1$, $\varrho \leq 1$ und $\varrho > 1$ beschrieben.

Unsere bisherigen Forderungen an k lassen noch vielfältige Gestalten zu (Abb. 127). In Abb. 127a, b ist die Einheitskreisfläche \bar{k} *konvex*, d. h.

$$(4) \quad P, Q \in \bar{k} \Rightarrow PQ \subseteq \bar{k}.$$

Unter unseren Voraussetzungen über k lässt sich eine einfachere Bedingung für die Konvexität formulieren:

Definition. Die Eichfigur k ist genau dann *konvex*, wenn

$$(5) \quad P, Q \in k \Rightarrow PQ \subseteq \bar{k}$$

gilt. Die Eichfigur ist genau dann *im engeren Sinne konvex*, wenn

$$(5^*) \quad P, Q \in k \Rightarrow (PQ) \subseteq (k)$$

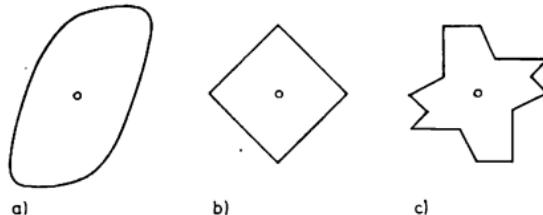


Abb. 127

gilt, d. h., wenn zwei Punkte in k liegen, so gehört das Innere der Verbindungsstrecke zum Inneren von k .

Die Eichfigur unserer einleitend betrachteten Stadtgeometrie (Abb. 127b) ist beispielsweise nicht im engeren Sinne konvex. Offenbar ist jede im engeren Sinne konvexe Eichfigur erst recht konvex. Außerdem gilt

Satz 4.1. Die Eichfigur k ist genau dann konvex, wenn \bar{k} konvex, wenn also (4) erfüllt ist.

Beweis. a) Wir setzen (4) voraus. Wegen $k \subseteq \bar{k}$ gilt (5) trivialerweise.

b) Wir setzen nun (5) voraus. Es seien P, Q zunächst beliebige, mit O nicht kollinare Punkte aus \bar{k} (Abb. 128a). Wir betrachten die Punkte P' und Q' in k mit $P \in OP'$ und $Q \in OQ'$. Liegt X zwischen P und Q , dann existiert in $P'Q'$ ein Punkt X' mit $X \in OX'$ und wegen (5) mit $\varrho(O, X') \leq 1$. Wir erhalten

$$\varrho_k(O, X) \leq \varrho_k(O, X') \leq 1.$$

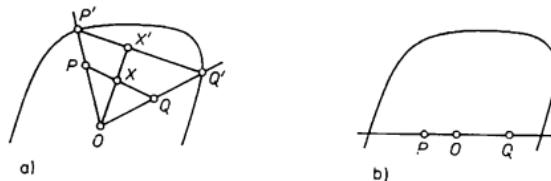


Abb. 128

Sind O, P, Q kollinear, dann ist PQ in einem Durchmesser von k enthalten, d. h. $\varrho_k(O, X) \leq 1$, w. z. b. w.

Wie man leicht sieht, erfüllt die Funktion ϱ_k nach der Definition die Bedingungen (0) und (1). Offenbar ist (2) mit der Zentralsymmetrie von k gleichwertig; übrigens

folgt (2) aus (0). Die Antwort auf die naheliegende Frage, für welche k die Dreiecksungleichung (3) erfüllt ist, erhalten wir im folgenden

Satz 4.2. *Die Funktion ϱ_k genügt genau dann der Dreiecksungleichung (3), wenn k konvex ist.*

Zusatz. *Die Funktion ϱ_k genügt genau dann der Dreiecksungleichung*

$$(3^*) \quad \varrho(X, Y) + \varrho(Y, Z) > \varrho(X, Z)$$

für nichtkollineare Punkte X, Y, Z , wenn k im engeren Sinne konvex ist.

Beweis. Für beliebige Punkte A, B, C setzen wir

$$a := \varrho_k(B, C), \quad b := \varrho_k(C, A) \quad \text{und} \quad c := \varrho_k(A, B).$$

a) Es sei k konvex.

Fall 1: A, B, C kollinear. Dann liegt o. B. d. A. der Punkt C in AB , so daß $a + b = c$ für die nicht negativen reellen Zahlen a, b, c gilt. Daraus folgt (3).

Fall 2: A, B, C nicht kollinear. Um A ziehen wir den Kreis $k(A, r)$ mit $r := a + b$ (Abb. 129). Wir bestimmen außerdem Punkte B^*, P, Q, R durch

$$\overrightarrow{CB} \# \overrightarrow{AB}^*,$$

$$P \in AB^{*+} \cap k(A, r), \quad Q \in AB^+ \cap k(A, r), \quad R \in AC^+ \cap k(A, r).$$

Wegen

$$(6) \quad a, b < a + b = r$$

liegt B^* zwischen A und P , C zwischen A und R . Aus (6) folgt noch $\varrho_k(C, R) = a$, damit zunächst

$$\frac{a+b}{a} \overrightarrow{RC} = \overrightarrow{RA}, \quad \frac{a+b}{a} \overrightarrow{CB} \# \frac{a+b}{a} \overrightarrow{AB}^* = \overrightarrow{AP}$$

und dann

$$\frac{a+b}{a} \overrightarrow{RB} = \frac{a+b}{a} (\overrightarrow{RC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{RP}.$$

Folglich sind die Punkte B, P, R kollinear, wobei B zwischen P und R liegt $\left(1 < \frac{a+b}{a}\right)$.

Da k konvex ist und $P, R \in k(A, r)$ gilt, erhalten wir $B \in k(A, r)$ bzw. $\varrho_k(A, B) \leq r$, d. h. nach (6) wie gewünscht $c \leq a + b$; ist k im engeren Sinne konvex, dann liegt B im Inneren von k , d. h. nach (6) gilt sogar $c < a + b$.

Analog erhält man $a \leq b + c$ und $b \leq c + a$; aus (5*) folgt natürlich $a < b + c$ und $b < c + a$.

b) Es sei k nicht konvex. Dann gibt es in k Punkte P und Q , zwischen denen ein Punkt B mit $\varrho_k(O, B) > 1$ liegt (Abb. 130). Die Punkte O, P und Q können nicht kollinear sein. Wir setzen $A := O$ und bestimmen einen Punkt C als Schnittpunkt

von OP mit der Parallelen zu g_{OQ} durch B . Dann gilt

$$\varrho_k(P, C) = \frac{PC}{PO} = \frac{CB}{OQ} = \varrho_k(B, C) = a$$

und folglich

$$a + b = \varrho_k(P, C) + \varrho_k(C, A) = 1 < \varrho_k(A, B) = c.$$

Das heißt, wenn k nicht konvex ist, gilt (3) nicht.

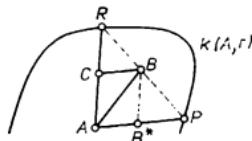


Abb. 129

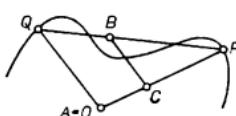


Abb. 130

Um den Beweis des Zusatzes zu beenden, setzen wir k als nicht im engeren Sinne konvex voraus. Dann gibt es in k Punkte P und Q , zwischen denen ein Punkt B mit $\varrho_k(O, B) \geq 1$ liegt. Die Punkte O , P und Q können nicht kollinear sein; bestimmen wir A und C wie oben, dann sind A , B , C nicht kollinear, und es gilt

$$\varrho_k(B, C) + \varrho_k(C, A) = 1 \leq \varrho_k(A, B),$$

w. z. b. w.

Aufgaben

1. Man gebe sich eine konvexe zentrale symmetrische Eichfigur k vor und bestimme bezüglich k Kreise, deren Radien die Maßzahlen $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ und 3 haben und deren Mittelpunkte paarweise voneinander verschieden sind.
2. In der euklidischen Ebene löse man mit Hilfe der Dreiecksungleichung (mit dem $<$ -Zeichen für Dreiecke!) folgende Aufgaben:
 - a) Kann, wenn Punkte P , Q und eine Gerade g gegeben sind, in g ein Punkt derart gefunden werden, daß die Summe seines Abstandes von P und Q möglichst klein wird?
Anleitung: Im Fall $gP^+ = gQ^+$ spiegele man P oder Q an g .
 - b) Im Inneren eines Winkels mit den Schenkeln p , q liege ein Punkt R . Unter welchen Bedingungen für den Winkel lassen sich Punkte $P \in p$ und $Q \in q$ finden, für die der Umfang des Dreiecks PQR möglichst klein wird?

4.1.3. Analytische Maßbestimmung¹⁾

In der affinen Koordinatenebene ist es natürlich, die neue Längenmessung durch die Angabe einer Abstandsfunktion einzuführen. Die Maßbestimmung mit Hilfe einer Eichfigur k liefert für parallelgleiche gerichtete Strecken $\overrightarrow{P_1P_2}$ und $\overrightarrow{P_1P_2'}$

¹⁾ Vgl. die Fußnote 1 auf S. 149.

dieselbe Maßzahl:

$$(7) \quad \overrightarrow{P_1 P_2} \neq \overrightarrow{P_1' P_2'} \Rightarrow \varrho_k(P_1, P_2) = \varrho_k(P_1', P_2').$$

Wenn P_i, P_i' die Koordinaten x_i, y_i bzw. x_i', y_i' besitzt, gilt

$$\overrightarrow{P_1 P_2} \neq \overrightarrow{P_1' P_2'} \Leftrightarrow (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (x_2' - x_1', y_2' - y_1').$$

Wir haben folglich eine Abstandsfunktion mit den Variablen $x_2 - x_1, y_2 - y_1$ zu erwarten.

Bei den folgenden Beispielen habe P_i wieder die Koordinaten x_i, y_i :

$$\varrho_1(P_1, P_2) := |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|,$$

$$\varrho_2(P_1, P_2) := \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2},$$

$$\varrho_3(P_1, P_2) := \sqrt[4]{|x_2 - x_1|^4 + |y_2 - y_1|^4}.$$

Aus $\frac{P_3 P_4}{P_1 P_2} = \lambda$ folgt bekanntlich $(x_4 - x_3, y_4 - y_3) = (\lambda(x_2 - x_1), \lambda(y_2 - y_1))$, und damit gilt

$$\frac{P_3 P_4}{P_1 P_2} = \lambda \Rightarrow \frac{\varrho_1(P_3, P_4)}{\varrho_1(P_1, P_2)} = |\lambda|,$$

d. h., daß die Teilverhältnisse bis auf das Vorzeichen mit den Abstandsverhältnissen bezüglich ϱ_1 übereinstimmen.

Wegen

$$\varrho_1(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \Leftrightarrow P_1 = P_2$$

genügt ϱ_1 dem Identitätsaxiom (1). Das Symmetriaxiom (2), das bereits aus (0) folgt, kann wegen der vorhandenen $|$ -Striche unmittelbar abgelesen werden. Um die Gültigkeit der Dreiecksungleichung (3) zu untersuchen, kann man die Einheitskreise um den Ursprung betrachten:

$$k_1 := \{(x, y): |x| + |y| = 1\},$$

$$k_2 := \{(x, y): x^2 + y^2 = 1\},$$

$$k_3 := \{(x, y): x^4 + y^4 = 1\}.$$

In Abb. 131 sind gleichwertige graphische Darstellungen von k_i angegeben. (Insbesondere sei hervorgehoben, daß alle Ellipsen als Eichfiguren zur Beschreibung der ebenen euklidischen Geometrie geeignet sind, daß in der affinen Koordinatenebene auf mannigfaltige Art und Weise eine euklidische Metrik eingeführt werden kann.) Die Konvexität von k_1 und k_2 ist wohlbekannt, bezüglich der Konvexität von k_3 vgl. man Aufgabe 2.

Bei der rechnerischen Herleitung der Dreiecksungleichung genügt es wegen (7), den Fall zu betrachten, daß einer der drei Punkte der Ursprung O ist. Wir untersuchen hier nochmals ϱ_1 und ϱ_2 .

Der Fall ϱ_1 : $\varrho_1(P_1, P_2) \leq \varrho_1(P_1, O) + \varrho_1(O, P_2)$. Es gilt

$$\begin{aligned}\varrho_1(P_1, P_2) &= |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| = |x_2 + (-x_1)| + |y_2 + (-y_1)| \\ &\leq |x_2| + |x_1| + |y_2| + |y_1| = (|x_1| + |y_1|) + (|x_2| + |y_2|) \\ &= \varrho_1(P_1, O) + \varrho_1(O, P_2).\end{aligned}$$

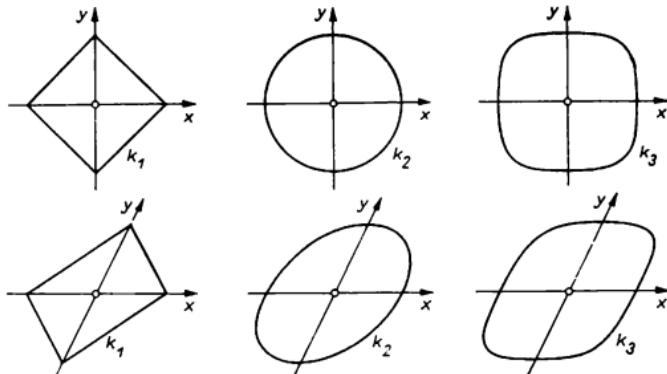


Abb. 131

Der Fall ϱ_2 : $\varrho_2(P_1, P_2) \leq \varrho_2(P_1, O) + \varrho_2(O, P_2)$. Aus

$$0 \leq (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2$$

folgt der Reihe nach

$$\begin{aligned}2x_1 y_1 x_2 y_2 &\leq x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2, \\ (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 &\leq (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2), \\ |x_1 x_2 + y_1 y_2| &\leq \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}.^1\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned}\varrho_2^2(P_1, P_2) &= x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1 y_2 + y_2^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2(x_1 x_2 + y_1 y_2) \\ &\leq x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2|x_1 x_2 + y_1 y_2| \\ &\leq x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} \\ &= (\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2})^2,\end{aligned}$$

d. h.

$$\varrho_2(P_1, P_2) \leq \varrho_2(P_1, O) + \varrho_2(O, P_2).$$

¹⁾ Diese Ungleichung wird Bunjakovskij-Schwarzsche Ungleichung genannt (nach VIKTOR JAKOVLEVIČ BUNJAKOVSKIJ (1804–1889) und HERMANN AMANDUS SCHWARZ (1843–1921). Auch AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789–1857) ist in diesem Zusammenhang zu nennen.

Im Raum können ähnliche Beispiele untersucht werden. Dabei sind für P_i drei Koordinaten x_i, y_i, z_i zu beachten:

$$\varrho_1'(P_1, P_2) := |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| + |z_2 - z_1|,$$

$$\varrho_2'(P_1, P_2) := \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2},$$

.....

Auch hier ist es nützlich, sich die Eichfiguren mit dem Ursprung als Mittelpunkt zu erarbeiten. Indem wir eine Fallunterscheidung nach den einzelnen Oktanten — z. B. $x, y, z \geq 0$ oder $x \leq 0, y, z \geq 0$ — vornehmen, erhalten wir bezüglich ϱ_1' ein Oktaeder (Abb. 132a). Die Eichfigur bezüglich ϱ_2' ergibt in kartesischen Koordinaten eine Kugelfläche, sonst ein Ellipsoid. — Es ist nun reizvoll, die Metrik in Ebenen durch den Ursprung zu studieren. Im Fall ϱ_2' erhält man natürlich im wesentlichen ϱ_2 ; in den Koordinatenebenen erzeugt ϱ_1' analog ϱ_1 , in der Ebene durch den Ursprung und die Punkte $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ und $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ jedoch nicht ϱ_1 (vgl. Aufgabe 3).

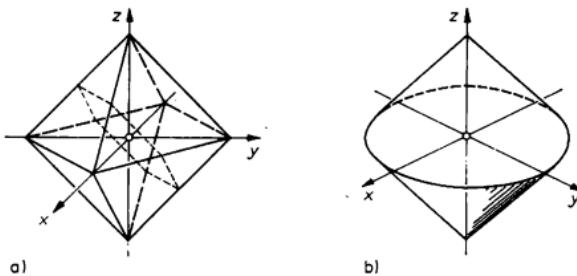


Abb. 132

Es ist auch möglich, die Maßbestimmung mit der analytischen Beschreibung einer Eichfigur zu beginnen. Setzt man $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, dann ist $|r| + |z| = 1$ die Gleichung eines „Doppelkegels“ (Abb. 132b). Er erzeugt in der x, y -Ebene ϱ_2 und etwa in der x, z -Ebene ϱ_1 .

Wegen (7) können wir jedem Vektor $a := v(PQ)$ die reelle Zahl

$$(8) \quad \|a\| := \varrho_2(P, Q),$$

die *Norm von a*, zuordnen.¹⁾ Die analytische Maßbestimmung kann mit Hilfe der Abbildung

$$a \rightarrow \|a\|$$

vorgenommen werden.

¹⁾ In Kapitel 3 wurden die Vektoren $v(PQ)$ als spezielle Bewegungen definiert. Da die Verschiebung $v(PQ)$ nach dem Abschnitt 3.1.1 die Äquivalenzklasse aller zu \overrightarrow{PQ} parallel gleicher gerichteter Strecken ist und die Relation $\#$ mit Hilfe von Parallelogrammen charakterisiert werden kann, lassen sich die Verschiebungen nach dem euklidischen Parallelenaxiom allein auf der Grundlage der räumlichen Inzidenzaxiome (vgl. etwa [34]) und ihre Vervielfachung dann gemäß 3.1 einführen. Somit hat die Fußnote 1 auf S. 149 nach wie vor Gültigkeit.

Satz 4.3. Wird die Norm (8) mit Hilfe einer Abstandsfunktion ϱ_k , die die Bedingungen (0) bis (3) erfüllt, definiert, dann gilt für beliebige Vektoren a, b und reelle Zahlen λ

- (a) $\|a\| = 0 \Rightarrow a = 0$,
- (b) $\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|$,
- (c) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$.

Beweis. Es seien P, Q, R Punkte mit $a = v(PQ)$ und $b = v(QR)$; solche Punkte existieren stets (Abb. 133).

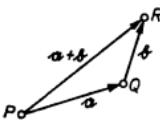


Abb. 133

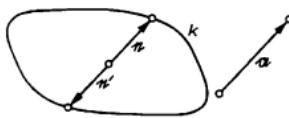


Abb. 134

- a) Gilt $\|a\| = \varrho_k(P, Q) = 0$, dann ist $P = Q$ nach (1) und folglich $a = 0$.
- b) Zu a bestimmen wir bezüglich k einen Einheitsvektor e und eine reelle Zahl μ mit $a = \mu e$ (Abb. 134). Dann gilt nach (0) zunächst $\|a\| = |\mu|$. Für λa erhalten wir entsprechend

$$\|\lambda a\| = \|\lambda \mu e\| = |\lambda \mu| = |\lambda| |\mu| = |\lambda| \cdot \|a\|.$$

- c) Es gilt

$$\|a + b\| = \varrho_k(P, R) \leq \varrho_k(P, Q) + \varrho_k(Q, R) = \|a\| + \|b\|$$

nach der Dreiecksungleichung (3) für ϱ_k , w. z. b. w.

Bemerkung 4.4. Aus (a) und (b) folgt

$$(9) \quad \|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

wegen $\|0\| = \|0 \cdot 0\| = |0| \|0\| = 0$, aus (b) und (c)

$$(10) \quad \|a\| \geq 0$$

wegen $0 = \|0\| = \|a - a\| = \|a + (-a)\| \leq \|a\| + \|a\| = 2\|a\|$.

Umgekehrt können wir bei gegebener Norm

$$(11) \quad \varrho(P, Q) := \|a\|$$

definieren, wobei wieder $a = v(PQ)$ sei.

Satz 4.5. Die Funktion ϱ hat nach (11) die Eigenschaften (0) bis (3), wenn die Norm $\|\cdot\|$ die Eigenschaften (a) bis (c) besitzt.

Beweis. Aus $\frac{XY}{PQ} = t$ folgt $v(XY) = t \cdot v(PQ) = ta$ und somit

$$\varrho(X, Y) : \varrho(P, Q) = |t| \|a\| : \|a\| = |t|.$$

Es gilt

$$\varrho(P, Q) = 0 \Leftrightarrow \|\mathbf{a}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0} \Leftrightarrow P = Q.$$

Wegen $\varrho(P, Q) = \|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{-a}\| = \varrho(Q, P)$ ist ϱ symmetrisch. Mit den Bezeichnungen der Abb. 133 gilt

$$\varrho(P, Q) + \varrho(Q, R) = \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| \geq \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = \varrho(P, R),$$

d. h. die Dreiecksungleichung (3), w. z. b. w.

Die Norm ist unabhängig von der Wahl eines Koordinatensystems. Ein weiterer Vorzug der Axiome (a) bis (c) besteht darin, daß keine Festlegung hinsichtlich der Dimension des Raumes benötigt wird. Im folgenden werden wir die Charakterisierung der Minkowskischen Metrik benutzen, die am besten dem jeweiligen Problem angepaßt ist.

Aufgaben

1. Man untersuche

- a) $\varrho(P_1, P_2) := \max(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|)$,
 b) $\varrho(P_1, P_2) := (\sqrt{|x_2 - x_1|} + \sqrt{|y_2 - y_1|})^2$.

2. Man beweise die Dreiecksungleichung (3) für ϱ_2 .

Anleitung: Die Konvexität von k_3 (sogar im engeren Sinne) läßt sich mit Mitteln der Differentialrechnung („Kurvendiskussion“) nachweisen.

3. Welche Metrik erzeugt ϱ_1' in der Ebene, die durch den Ursprung und die Punkte $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ und $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ geht?

4.2. Der Umfang der Kreise und die Orthogonalität

4.2.1. Konvexe Figuren und Stützgeraden in der Minkowskischen Geometrie

In Abschnitt 4.1 haben wir Minkowskische Geometrie innerhalb der euklidischen Geometrie betrachtet. Für den systematischen Aufbau der Minkowskischen Geometrie kann man sich von dieser Voraussetzung trennen. Wir gehen (vgl. Abschnitt 1.1) von einem Quadrupel $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{E}, \mathfrak{D})$ aus und setzen nur die räumlichen Inzidenz- und Anordnungsaxiome einschließlich des euklidischen Parallelenaxioms sowie das Axiom von der oberen bzw. unteren Grenze voraus. Ebene Geometrie betrachten wir stets als Geometrie einer Ebene des Raumes. Unter den genannten Voraussetzungen sehen wir gerichtete Strecken $\overrightarrow{P_0Q_0}$ und $\overrightarrow{P_nQ_n}$ mit $P_0 \neq Q_0$, $P_n \neq Q_n$ genau dann als *parallelgleich* an, wenn gerichtete Strecken $\overrightarrow{P_1Q_1}, \dots, \overrightarrow{P_{n-1}Q_{n-1}}$ derart existieren, daß $P_0Q_0P_1, P_1Q_1Q_2P_2, \dots$ Parallelogramme sind. Ohne Beweis teilen

wir mit, daß die Parallelgleichheit gerichteter Strecken die folgenden Eigenschaften besitzt, die die Definition von Schubvektoren als Äquivalenzklassen gestaltet:

- G₁. Zu jeder gerichteten Strecke \overrightarrow{PQ} und jedem Punkt P' gibt es genau einen Punkt Q' mit $\overrightarrow{PQ} \# \overrightarrow{P'Q'}$ (Möglichkeit und Eindeutigkeit des Antragens gerichteter Strecken an Punkte).
- G₂. Aus $\overrightarrow{PQ} \# \overrightarrow{UV}$ und $\overrightarrow{ST} \# \overrightarrow{UV}$ folgt $\overrightarrow{PQ} \# \overrightarrow{ST}$ (Drittengleichheit).
- G₃. Aus $\overrightarrow{PQ} \# \overrightarrow{RT}$ folgt $\overrightarrow{PR} \# \overrightarrow{QT}$ (Vertauschungsregel).
- G₄. Aus $\overrightarrow{PQ} \# \overrightarrow{QP}$ folgt $P = Q$ (Fano-Aussage).

In der Minkowskischen Geometrie gehen wir von einem Tupel $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{E}, \mathfrak{D}, k)$ bzw. $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \varrho)$ aus, wobei die Minkowskische Metrik durch eine konvexe zentral-symmetrische Eichfigur k oder eine Abstandsfunktion ϱ mit den Eigenschaften (0) bis (3) gegeben ist. — Bei analytischer Betrachtungsweise kann auch ein (zwei- oder dreidimensionaler) Vektorraum mit einer Norm $\|\cdot\|$ gegeben sein.

Unter der Voraussetzung der Inzidenz- und Anordnungseigenschaften hat bereits der Begriff der konvexen Figur F , definiert mit Hilfe von

$$X, Y \in F \Rightarrow XY \subseteq F,$$

seinen Sinn (vgl. (4)). In der Minkowskischen Geometrie besitzen die Punkte P die ε -Umgebungen

$$U(P, \varepsilon) := \{X : \varrho(P, X) < \varepsilon\};$$

das sind im ebenen Fall *offene Kreisscheiben* und im räumlichen Fall *offene Kugelkörper*. Deshalb können wir die Punkte bezüglich einer Figur F einteilen:

Definition. Ein Punkt P heißt *innerer Punkt* von F genau dann, wenn wenigstens eine ε -Umgebung von P zu F gehört. Entsprechend heißt ein Punkt P *äußerer Punkt* von F genau dann, wenn P innerer Punkt des Komplementes von F ist, d. h., wenn wenigstens eine ε -Umgebung von P keinen Punkt von F enthält. Alle übrigen Punkte werden *Begrenzungspunkte* von F genannt. Alle inneren, äußeren bzw. Begrenzungspunkte bilden das *Innere*, das *Äußere* bzw. die *Begrenzung* von F .

Offenbar sind die Begrenzungspunkte von F dadurch gekennzeichnet, daß jede ε -Umgebung von P sowohl Punkte von F als auch Punkte, die nicht zu F gehören, enthält. Begrenzungspunkte, die zu F gehören, heißen *Randpunkte*; die Menge aller Randpunkte von F wird *Rand von F* genannt.

Definition. F heißt *abgeschlossen (offen)* genau dann, wenn F alle (keine) Begrenzungspunkte enthält. Der *Abschluß von F* ist per definitionem gleich der Vereinigung von F mit der Begrenzung von F .¹⁾

¹⁾ Der Abschluß einer Figur F ist abgeschlossen. Dazu genügt es zu zeigen, daß jeder äußere Punkt von F auch äußerer Punkt des Abschlusses ist, weil der Abschluß dann alle seine Begrenzungspunkte enthält. Es sei P ein äußerer Punkt von F ; dann gibt es eine ε -Umgebung von P , die zu F disjunkt ist. In ihr liegt auch kein Begrenzungspunkt R von F , denn aus $\delta := \varepsilon - \varrho(P, R) > 0$ folgte $U(R, \delta) \subseteq U(P, \varepsilon)$ wegen

$$\varrho(P, X) \leq \varrho(P, R) + \varrho(R, X) < \varepsilon$$

für $X \in U(R, \delta)$, so daß $U(P, \varepsilon)$ nur äußere Punkte enthält, w. z. b. w.

Sind P, Q zwei Punkte einer konvexen Figur F , von denen wenigstens einer ein innerer Punkt ist (Abb. 135a), dann sind alle inneren Punkte der Strecke PQ innere Punkte von F ; denn gilt etwa $U(Q, \varepsilon) \subseteq F$ und $\overrightarrow{PX} = t \overrightarrow{PQ}$ mit $0 < t < 1$, dann folgt aus der Konvexität von F bereits $U(X, t\varepsilon) \subseteq F$. Folglich ist das Innere einer Strecke, deren Endpunkte Begrenzungspunkte von F sind, entweder Teil des Inneren oder Teil der Begrenzung von F . Außerdem erhält man als

Folgerung. Eine offene Figur F ist genau dann konvex, wenn ihr Abschluß konvex ist.

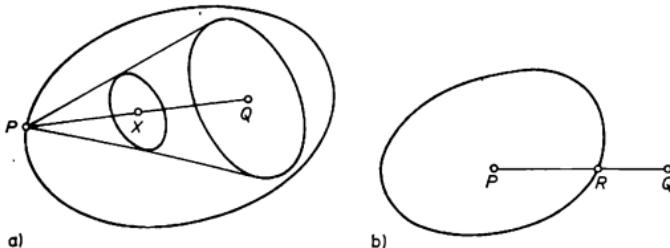


Abb. 135

Hilfssatz 4.6. Ist P ein Punkt der Figur F und liegt Q im Äußeren von F , dann gibt es in PQ einen Begrenzungspunkt R von F ; wenn dabei F konvex ist und P im Inneren von F liegt, ist R eindeutig.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit liege P vor Q in g_{PQ} . Für $PQ \cap F$ ($\neq \emptyset$) ist Q eine obere Schranke (Abb. 135b); folglich hat diese Menge eine obere Grenze R . Zwischen Q und R kann kein Punkt von F liegen, während jede ε -Umgebung von der kleinsten oberen Schranke R Punkte der Menge $PQ \cap F$ enthalten muß; somit ist R ein Begrenzungspunkt von F . — Zwischen einem inneren Punkt und einem Begrenzungspunkt einer konvexen Figur liegen sämtlich innere Punkte, so daß R einziger Begrenzungspunkt in PQ ist, wenn F konvex ist und P zum Inneren von F gehört, w. z. b. w.

Satz 4.7. Eine abgeschlossene Figur F ist genau dann konvex, wenn $PQ \subseteq F$ für alle Randpunkte P, Q von F gilt.

Beweis. a) Es sei F eine abgeschlossene konvexe Figur. Da eine abgeschlossene Figur ihren Rand als Teilmenge enthält, gilt wegen der Konvexität $PQ \subseteq F$ für alle Randpunkte von F (Abb. 136a).

b) Es sei nun F eine abgeschlossene, nicht konvexe Figur (Abb. 136b). Dann gibt es in F Punkte P, Q mit $PQ \not\subseteq F$; es sei etwa $A \in PQ \setminus F$. Da F abgeschlossen ist, muß A ein äußerer Punkt von F sein. Nach 4.6 gibt es Randpunkte $S \in PA$ und $T \in AQ$, so daß $ST \not\subseteq F$ gilt, w. z. b. w.

Im Zusammenhang mit vielen Problemen benötigen wir eine Verallgemeinerung des Begriffes der Kreistangente, die in der Elementargeometrie als Gerade der Ebene

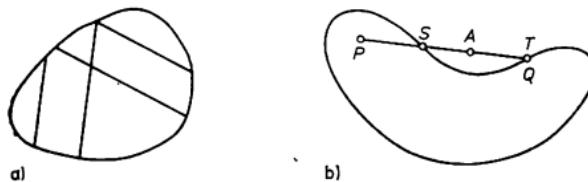


Abb. 136

des Kreises mit genau einem Kreispunkt definiert ist. Wir können folgende Konstruktionen ausführen:

- die Tangente in einem Punkt P des Kreises zeichnen (Abb. 137a),
- von einem Punkt P eine Tangente an einen Kreis legen (Abb. 137b),
- parallel zu einer Geraden g eine Tangente an einen Kreis legen (Abb. 137c).

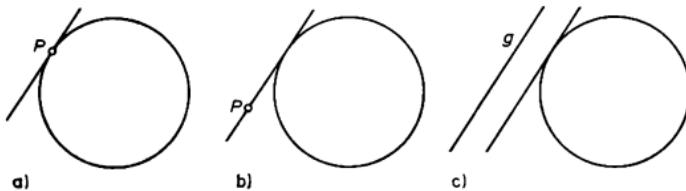


Abb. 137

Die Tangente t eines Kreises k kann auch folgendermaßen gekennzeichnet werden (vgl. auch S. 93):

$$\begin{aligned} t \cap k &\neq \emptyset, \\ \bigvee_x t x^+ \cap k &= k. \end{aligned}$$

Das führt uns zu folgender

Definition. Eine Gerade g heißt *Stützgerade* der ebenen Figur F genau dann, wenn

$$\begin{aligned} g \cap F &\neq \emptyset, \\ \bigvee_x g x^+ \cap F &= F \end{aligned}$$

gilt. Dabei bezeichnet $g x^+$ die abgeschlossene Halbebene bezüglich g durch X .

Entsprechend heißt eine Ebene ε *Stützebene* der Figur F genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \varepsilon \cap F &\neq \emptyset, \\ \bigvee_x \varepsilon x^+ \cap F &= F \end{aligned}$$

gilt, wobei εx^+ den abgeschlossenen Halbraum bezüglich ε durch X bezeichnet.

Aus der Definition folgt unmittelbar, daß eine Stützgerade (bzw. -ebene) nur Randpunkte von F enthält. Mitunter wird die Definition dahingehend abgewandelt,

daß statt $g \cap F \neq \emptyset$ nur gefordert wird, daß g einen Begrenzungspunkt von F enthält. (Dabei kann $g \cap F = \emptyset$ gelten.)

Satz 4.8. Eine ebene abgeschlossene Figur F mit inneren Punkten ist genau dann konvex, wenn durch jeden Randpunkt eine Stützgerade von F existiert.

Beweis. a) Es sei F eine abgeschlossene, konvexe Figur mit inneren Punkten, P ein Randpunkt von F und $F' := F \setminus \{P\}$. Dann gibt es einen Winkel $\prec SPT$ derart, daß F' in der von $\prec SPT$ und dem zugehörigen konvexen Winkelraum gebildeten Winkelfläche enthalten ist (Abb. 138a, b):

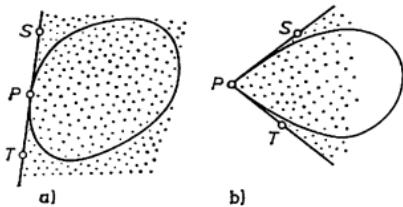


Abb. 138

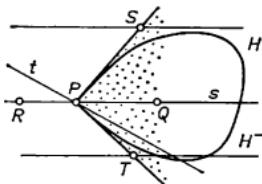


Abb. 139

Es sei Q ein innerer und R ein äußerer Punkt von F mit $P \in QR$ (Abb. 139). Auf der Grundlage der Inzidenz- und Anordnungsaxiome allein können die Winkel, für die PQ^+ ein Schenkel und deren zweiter Schenkel in einer der Halbebene H (bzw. H^-) bezüglich g_{PQ} liegen, geordnet werden, etwa mit Hilfe einer Parallelen zu g_{PQ} . Wir betrachten die Menge

$$M := \{\prec QPX: X \in F' \cap H\}.$$

Sie ist offensichtlich nicht leer und wegen der Konvexität von F nach oben beschränkt (durch jeden Winkel $\prec(s, t)$ mit $s = PQ^+$ und $t \cap (F' \cap H^-) \neq \emptyset$). Sie besitzt also eine obere Grenze $\prec QPS$. Die zugehörige konvexe Winkelfläche enthält $F' \cap H^1$), denn andernfalls könnte $\prec QPS$ wegen der Konvexität von F keine obere Schranke sein.

Entsprechend erhalten wir einen Winkel $\prec QPT$ als eine obere Grenze, wobei $F' \cap H^-$ in der zugehörigen konvexen Winkelfläche liegt. Außerdem ist der Q enthaltende Winkelraum bezüglich $\prec SPT$ konvex, denn die gegenteilige Annahme führt wegen der Konvexität von F zu einem Widerspruch, etwa daß P im Inneren von F liegt. Folglich existiert eine Stützgerade durch P .²⁾

b) Es sei F eine abgeschlossene, nicht konvexe Figur mit inneren Punkten. Dann gibt es Randpunkte P, Q mit $PQ \not\subseteq F$ und einen inneren Punkt $K \in F \setminus g_{PQ}$.

Fall 1: Zwischen K und P oder zwischen K und Q liegt noch ein Randpunkt R von F , etwa zwischen K und P (Abb. 140a). Keine von g_{PK} verschiedene Gerade g

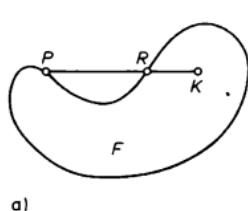
¹⁾ Deshalb wird PS^+ auch Halbtangente genannt.

²⁾ Wenn $\prec SPT$ gestreckt ist, erhalten wir mit g_{ST} eine eindeutige Stützgerade, eine Tangente.

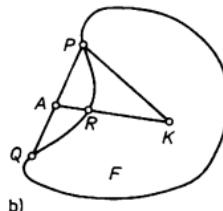
kann in R Stützgerade sein, da K und P bezüglich g in verschiedenen offenen Halbebenen liegen. Außerdem trennt g_{KP} innere Punkte einer ε -Umgebung von K .

Fall 2: Weder zwischen K und P noch zwischen K und Q liegt ein Randpunkt von F . Dann liegen zwischen diesen Punkten sämtlich innere Punkte von F (Abb. 140b). Um das einzusehen, betrachten wir etwa die Menge

$$\{X \in KP: KX \text{ ist Teilmenge des Inneren von } F\}.$$



a)



b)

Abb. 140

Diese Menge ist nicht leer und für $P < K$ (o. B. d. A.) nach unten beschränkt; sie besitzt folglich eine untere Grenze L . Zwischen K und L als größter unterer Schranke können nur innere Punkte liegen. Der Punkt L kann weder innerer noch äußerer Punkt von F sein; mit $P = L$ gilt die Zwischenbehauptung.

Wegen $PQ \not\subseteq F$ gibt es zwischen P und Q einen Punkt A , der nicht zur abgeschlossenen Figur F gehört und der folglich äußerer Punkt von F ist. Gilt o. B. d. A. $A < K$, dann erhalten wir zwischen A und K wie oben einen Randpunkt R von F als untere Grenze von

$$\{X \in AK: KX \text{ ist Teilmenge des Inneren von } F\}.$$

Offenbar gibt es durch R keine Stützgerade von F , w. z. b. w.

Analog gilt im Raum

Satz 4.9. Eine abgeschlossene Figur F mit inneren Punkten ist genau dann konvex, wenn durch jeden Randpunkt eine Stützebene von F geht.

Eindeutige Stützgeraden in einem Randpunkt werden *Tangenten*, eindeutige Stützebenen werden *Tangentialebenen* der konvexen Figur genannt. Ein Randpunkt mit eindeutiger Stützgerade (bzw. -ebene) heißt *regulärer* Randpunkt; alle übrigen Randpunkte werden *singulär* genannt. Schließlich heißt eine abgeschlossene Figur genau dann *glatt*, wenn ihre Randpunkte ausnahmslos regulär sind.

Aufgaben

1. Für einen Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r wird $\{X: \rho(M, X) < r\}$ Inneres und $\{X: \rho(M, X) > r\}$ Äußeres genannt (vgl. Abschnitt 4.1.2). Man zeige, daß die Definition dieser Begriffe im vorliegenden Abschnitt zu denselben Mengen führt.
2. Welche Aussagen lassen sich auf der Grundlage der Sätze über konvexe Figuren und des Resultates der Aufgabe 1 über die Eichfiguren machen?

4.2.2. Kreisschnittpunkte

Bevor wir uns mit der Umfangsbestimmung der Kreise befassen, sollen Schnittpunkteigenschaften der Kreise hergeleitet werden, die in der Elementargeometrie die Ausführbarkeit der Konstruktionen rechtfertigen. Diese Eigenschaften werden wir bei der Umfangsbestimmung benutzen, sie können aber auch hier eigenständiges Interesse beanspruchen.

Satz 4.10. *In der Ebene schneiden sich ein Kreis und eine Halbgerade, deren Anfangspunkt im Kreisinneren liegt, in genau einem Punkt (Abb. 141a).*

Beweis. Es sei $k = k(M, r)$ ein Kreis und PQ^+ eine Halbgerade derselben Ebene mit $\varrho(M, P) < r$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $\varrho(P, Q) = 2r$ vorausgesetzt werden (Abb. 141a). Wegen $\varrho(M, Q) \geq \varrho(P, Q) - \varrho(P, M) > r$ liegt dann Q im Äußeren von k , und nach 4.6 schneiden sich PQ^+ und k in genau einem Punkt, w. z. b. w.

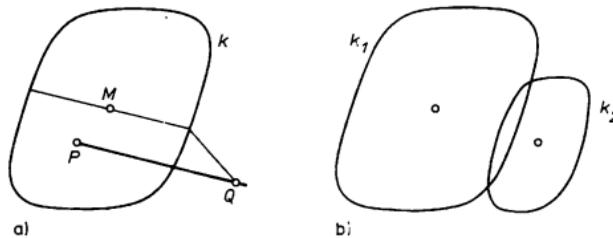


Abb. 141

Satz 4.11. *Genügen die Radien und der Abstand der Mittelpunkte zweier Kreise der Ebene der Dreiecksungleichung (3), dann besitzen die Kreise gemeinsame Punkte. (Gilt statt (3) sogar (3*) und sind die Kreise im engeren Sinne konvex, dann gibt es in jeder Halbebene der Ebene bezüglich der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte genau einen Schnittpunkt.)*

Dem Beweis stellen wir zwei Hilfssätze voran.

Hilfssatz 4.12. *Es sei $k = k(M, r)$ ein Kreis und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es zu jedem Punkt $P \in k$ in jeder offenen Halbebene H der Ebene des Kreises bezüglich g_{MP} einen von P verschiedenen Punkt $S \in k$ mit $\varrho(P, S) < \varepsilon$.*

Beweis. Es sei g eine Stützgerade von k in P , $U \in g \cap H$ und $Q \in k \cap MU^+$ (Abb. 142). Es gibt eine reelle Zahl t mit $0 < t < 1$ und $\varrho(P, U) + \varrho(U, Q) < \frac{\varepsilon}{t}$. Wir bestimmen Punkte R, V mit $\overline{PR} = t \overline{PQ}$ und $\overline{PV} = t \overline{PU}$.

Wegen der Konvexität von k liegt R in \bar{k} ; als Punkt einer Stützgerade ist V kein innerer Punkt von k . Mit Hilfe von 4.6 erhalten wir die Existenz eines Punktes S in $RV \cap k$, für den $S \neq P$ und $\varrho(P, S) \leq \varrho(P, V) + \varrho(V, R) = t[\varrho(P, U) + \varrho(U, Q)] < \varepsilon$ gilt, w. z. b. w.

Hilfssatz 4.13. In einer Ebene sei $k = k(M, r)$ ein Kreis, N ein von M verschiedener Punkt und H eine offene Halbebene bezüglich g_{MN} . Sind A, B Punkte aus $k \cap H$, dann gilt

$$\not\propto AMN < \not\propto BMN \Rightarrow \varrho(A, N) \leq \varrho(B, N).$$

(Wenn k im engeren Sinne konvex ist, dann gilt $<$ statt \leq .)

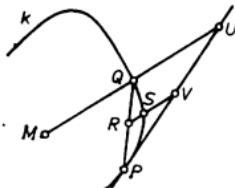


Abb. 142

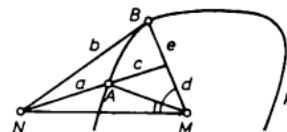


Abb. 143

Beweis. Es sei $\not\propto AMN < \not\propto BMN$.

Fall 1: $B \in ANM^-$. Dann gilt mit den Bezeichnungen der Abb. 143

$$a + r \leq a + (c + d) = (a + c) + d \leq (b + e) + d = b + r$$

und somit $\varrho(A, N) = a \leq b = \varrho(B, N)$. (Wenn k im engeren Sinne konvex ist, erhält man $a < b$ nach dem Zusatz von 4.2.)

Fall 2: $B \in NA^+$. Es folgt sofort $\varrho(A, N) < \varrho(B, N)$.

Fall 3: $B \in ANM^+$. Hier betrachten wir Unterfälle.

Fall 3a: $NA^+ \cap MB^+ = \{C\}$. Unter der Voraussetzung über die Winkel und der des Falles 3 liegt A zwischen C und N sowie B zwischen C und M . Mit den Bezeichnungen der Abb. 144a gilt

$$a + c + d + r \leq b + d + r \leq b + d + c + r.$$

(Wenn k im engeren Sinne konvex ist, erhält man $a < b$.)

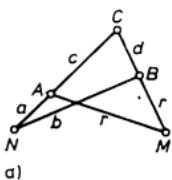


Abb. 144a

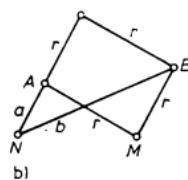


Abb. 144b

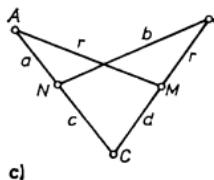


Abb. 144c

Fall 3b: $g_{AN} \parallel g_{BM}$. Der Abb. 144b ist unmittelbar

$$a + r \leq b + r$$

(bzw. $a + r < b + r$ für im engeren Sinne konvexes k) zu entnehmen.

Fall 3c: $NA^- \cap MB^- = \{C\}$. Der Beweis ist dem Leser als Aufgabe überlassen (vgl. Abb. 144c).

Beweis von Satz 4.11. Es seien $k_1 = k(M_1, r_1)$ und $k_2 = k(M_2, r_2)$ zwei Kreise in einer Ebene, für die

$$r_3 - r_1 \leq \rho(M_1, M_2) \leq r_3 + r_1$$

gilt. Dabei sind die Fälle mit dem Gleichheitszeichen trivial, so daß wir nun o. B. d. A. $r_1 \leq r_2$ und

$$r_3 - r_1 \leq \varrho(M_1, M_2) \leq r_3 + r_1$$

voraussetzen. Dann gibt es von k_1 Punkte sowohl im Inneren als auch im Äußeren von k_2 , nach 4.12 sogar in einer beliebigen offenen Halbebene H bezüglich $g_{M,M}$ (Abb. 145). Wir betrachten die Menge

$$\mathbf{M} := \{ \preceq_{\mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 \mathbf{X}} X : X \in k_1 \cap \bar{k}_2 \cap H \}.$$

Nach der Vorbemerkung ist diese Menge nicht leer, sie besitzt eine obere Schranke und somit eine obere Grenze $\preceq M_2 M_1 P$ mit $P \in k_1 \cap H$.

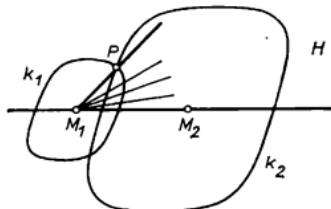


Abb. 145

Es gilt $P \in k_2$, weil $\varrho(M_2, P) \neq r_2$ zum Widerspruch führt:

Der Fall $\varrho(M_2, P) < r_2$. Nach 4.12 gäbe es in $k_1 \cap H \cap PM_1M_2$ einen Punkt S mit $\varrho(P, S) < r_2 - \varrho(M_2, P)$ und

$$\varrho(M_2, S) \leq \varrho(M_2, P) + \varrho(P, S) < r_2,$$

d. h., daß $\not\prec M_2 M_1 P$ keine obere Schranke für M wäre.

Der Fall $\varrho(M_2, P) > r_2$. Nach 4.12 gäbe es in $k_1 \cap H \cap PM_1M_2^+$ einen Punkt T mit $\varrho(P, T) < \varrho(M_2, P) - r_2$ und

$$\varrho(M_2, T) \geq \varrho(M_2, P) - \varrho(P, T) > r_2.$$

Weiterhin wäre $\not\leq M_2M_1T > \not\leq M_2M_1X$ für alle $\not\leq M_2M_1X$ aus M , denn aus $\not\leq M_2M_1T \leq \not\leq M_2M_1X$ folgte nach 4.13 der Widerspruch $r_2 < \varrho(M_2, T) \leq \varrho(M_2, X)$, d. h., daß $\not\leq M_2M_1P$ nicht die kleinste obere Schranke von M wäre.

(Setzen wir zusätzlich voraus, daß die Kreise im engeren Sinne konvex sind, dann folgt aus $P, Q \in k_1 \cap k_2 \cap H$ stets $P = Q$: Wäre $P \neq Q$ und damit $\not\propto M_2 M_1 P$

$\neq \varrho(M_2, M_1, Q)$, dann folgte der Widerspruch $r_2 = \varrho(M_2, P) \neq \varrho(M_2, Q) = r_2$ nach der Verschärfung von 4.13.)

Damit ist der Satz 4.11 einschließlich seiner Verschärfung hinsichtlich der Eindeutigkeit bewiesen.

Aufgaben

1. In der Ebene eines Kreises enthält jeder Streckenzug, der einen inneren mit einem äußeren Punkt verbindet, wenigstens einen Kreispunkt. Je zwei innere bzw. äußere Punkte können in der Ebene des Kreises durch einen Streckenzug verbunden werden, der den Kreis nicht trifft.
2. In der Ebene sei k' das Bild eines Kreises $k = k(M, r)$ bei einer Verschiebung a bzw. Dehnung b . Unter welcher Bedingung über die Norm $\|a\|$ bzw. den Dehnungskoeffizienten t von b haben k und k' gemeinsame Punkte?

4.2.3. Die Orthogonalität

Um den Begriff der Orthogonalität einführen zu können, suchen wir Charakterisierungen des Begriffes in der Elementargeometrie, die sich weder auf den Begriff der Spiegelung noch auf den Begriff der Kongruenz von Winkeln stützen: Es gilt $g \perp h$ für Geraden g, h mit dem Schnittpunkt S genau dann, wenn es um einen von

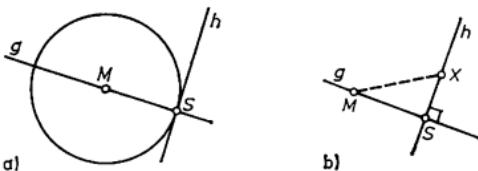


Abb. 146

S verschiedenen Punkt M von g einen Kreis gibt, der die Gerade h in S berührt (Abb. 146a). Es gilt aber auch $g \perp h$ für Geraden g, h mit dem Schnittpunkt S genau dann, wenn in g ein von S verschiedener Punkt M existiert, der von allen Punkten $X \in h$ keinen kleineren Abstand hat als von S (Abb. 146b).

In der Minkowskischen Geometrie gilt der

Satz 4.14. Es sei $g = g_{MS}$ und $S \in h$ ($\neq g$). In der Ebene der Geraden g und h ist h genau dann Stützgerade an dem Kreis k um M durch S , wenn $\varrho(M, S) \leq \varrho(M, X)$ für alle Punkte $X \in h$ gilt.

Beweis. a) Es sei h Stützgerade und $X \in h$. Dann gibt es einen Punkt $X' \in k \cap MX^+$. Da h Stützgerade von k ist, gilt $X' \in MX$ (Abb. 147a) und folglich $\varrho(M, S) = \varrho(M, X') \leq \varrho(M, X)$ wegen $S, X' \in k$.

b) Es sei h keine Stützgerade. Dann gibt es einen Punkt $Y \in k \setminus hM^+$, wobei hM^+ eine abgeschlossene Halbebene bezeichnet (Abb. 147b); folglich liegt zwischen M und Y ein Punkt X von h , d. h. $\varrho(M, S) = \varrho(M, Y) > \varrho(M, X)$, w. z. b. w.

Unter Berücksichtigung der größeren Anschaulichkeit formulieren wir

Definition. Wir schreiben $g \perp h$ und nennen g *Linksslot* von h bzw. h *Rechtsslot* von g genau dann, wenn sich g, h in einem Punkt S schneiden und in g ein von S verschiedener Punkt M derart existiert, daß h in S Stützgerade an dem Kreis um M durch S in ε_{gh} ist.

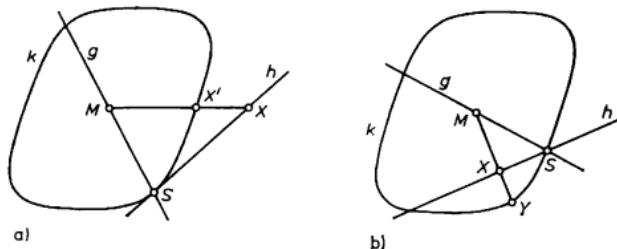


Abb. 147

Man überlegt sich leicht, daß $g \perp h$ unabhängig von der Wahl eines Punktes M in g ist (vgl. Aufgabe 1). Dagegen kann M im allgemeinen nicht in h bestimmt werden; anders ausgedrückt heißt das, daß die Orthogonalität im allgemeinen nicht symmetrisch ist, weil es Eichfiguren gibt, bezüglich der Geraden g, h mit $g \perp h$ und $h \perp g$ existieren (Abb. 148).

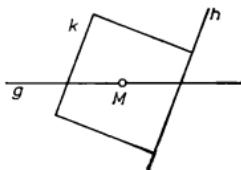


Abb. 148

Satz 4.15. a) Aus $g \perp h$, $g \parallel g'$ und $h \parallel h'$ folgt $g' \perp h'$.

b) Zu jeder Geraden g gibt es durch jeden Punkt P ein Rechtsslot h .¹⁾

c) Zu jeder Geraden h gibt es durch jeden Punkt P ein Linkslot g .²⁾

Folgerung. An jeden Kreis kann eine Stützgerade gelegt werden, die zu einer Geraden der Ebene des Kreises parallel ist.

Beweis. a) Es sei k ein Kreis in ε_{gh} um einen Punkt M von g durch den Schnittpunkt S von g, h . Bei der Verschiebung a , die S in den Schnittpunkt S' von g' und h' überführt, ist das Bild k^a ein Kreis, der $g' \perp h'$ offensichtlich macht (Abb. 149).

b) Sind g, P in einer Ebene gegeben, dann ziehen wir in dieser Ebene um einen Punkt der Geraden g einen Kreis k , der g etwa in S trifft. Nach 4.8 existiert in S eine Stützgerade f von k . Für die Parallele h zu f durch P gilt $g \perp h$ (Abb. 150a).

¹⁾ Rechtsloten sind offenbar eindeutig, wenn durch jeden Punkt der Eichfigur k genau eine Stützgerade geht, d. h., wenn k nur aus regulären Punkten besteht.

²⁾ Linksloten sind eindeutig, wenn jede Stützgerade der Eichfigur k genau einen Punkt von k enthält, d. h., wenn k im engeren Sinne konvex ist.

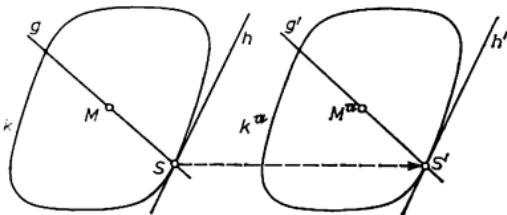


Abb. 149

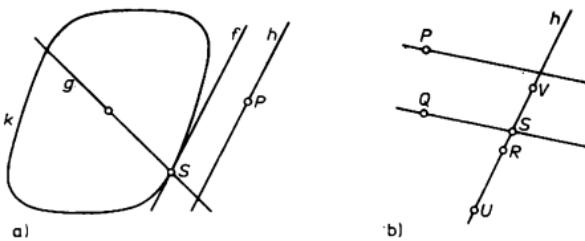


Abb. 150

c) Wir betrachten einen Punkt $Q \notin h$ (Abb. 150b). Um einen Punkt S in h zu finden, der minimalen Abstand von Q hat, betrachten wir einen beliebigen Punkt $R \in h$ sowie die beiden Punkte $U, V \in h$ mit

$$2a := 2\varrho(Q, R) = \varrho(R, U) = \varrho(R, V).$$

Für die Punkte $X \in h \setminus UV$ gilt

$$\varrho(Q, X) \geq \varrho(R, X) - \varrho(Q, R) > 2a - a = a,$$

d. h., der minimale Abstand kann nur für einen Punkt $S \in UV$ angenommen werden.

Die auf h definierte Funktion $f(X) := \varrho(Q, X)$ ist stetig: Ist $\varepsilon > 0$, dann kann $\delta := \varepsilon$ gewählt werden, denn aus $X' \in U(X, \varepsilon) \cap h$ folgt

$$\begin{aligned} \varrho(Q, X) - \varepsilon < \varrho(Q, X) - \varrho(X', X) &\leq \varrho(Q, X') \\ &\leq \varrho(Q, X) + \varrho(X, X') < \varrho(Q, X) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Nach einem wohlbekannten Satz aus der Analysis nimmt f auf dem abgeschlossenen Intervall UV ihr (absolutes) Minimum an, etwa für S .

Es gilt $g_{QS} \perp h$. Die Parallele g von g_{QS} durch P ist ein gesuchtes Linkslot.

Zum Beweis der Folgerung bestimmen wir durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises k ein Linkslot g der gegebenen Geraden h . Ist $S \in g \cap k$, dann ist die Parallele zu h durch S eine Stützgerade von k , w. z. b. w.

Jeder Kreis k mit dem Mittelpunkt M kann wie folgt in ein *Stützgeradenparallelogramm* eingeschlossen werden (Abb. 151a): Wir wählen einen beliebigen Punkt P in k . Durch diesen Punkt existiert eine Stützgerade g ; bei der Spiegelung an M

erhalten wir eine zu g punktfremde zweite Stützgerade. — Die Parallele f zu diesen Stützgeraden durch M trifft k , etwa in Q . Durch Q und den bezüglich M symmetrischen Punkt existieren zueinander parallele Stützgeraden h und h^M , die mit den zuerst bestimmten Stützgeraden g und g^M ein Stützgeradenparallelogramm bilden, in dessen Fläche k liegt. — Die Konstruktion stützt sich auf 4.8.

Nach der Folgerung zum Satz 4.15 kann die Bestimmung eines Stützgeradenparallelogrammes auch folgendermaßen ausgeführt werden: Wir wählen zunächst f durch M , bestimmen die dazu parallelen Stützgeraden g und g^M sowie parallele Stützgeraden durch $Q, Q^M \in f \cap k$. — Hierbei wird neben 4.8 die Folgerung aus 4.15 benötigt.

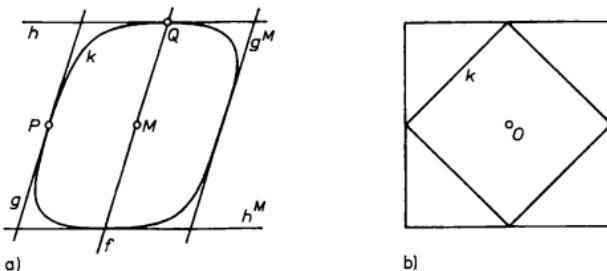


Abb. 151

Wir werden für den Fall, daß benachbarte Spalten eines Stützgeradenparallelogrammes gleichlang sind und unabhängig von der Reihenfolge aufeinander senkrecht stehen, von einem *Stützgeradenquadrat* sprechen. In der einleitend vorgestellten Stadtgeometrie sind erstens die Eichfigur k selbst und zweitens das Stützgeradenparallelogramm, dessen Seiten zu den Diagonalen der Eichfigur parallel sind, die einzigen Stützgeradenquadrate bezüglich der Eichfigur k (Abb. 151b).

Satz 4.16. *Jeder Kreis $k(M, r)$ läßt sich in ein Stützgeradenquadrat der Kantenlänge $2r$ einschließen.*

Beweis.¹⁾ Es seien a, b zwei Vektoren, etwa mit $\|a\| = \|b\| = r$. Wir betrachten die euklidische Metrik, bezüglich der a, b orthogonale Einheitsvektoren sind, d. h., aus $\xi = xa + yb$ und $\xi' = x'a + y'b$ folgt in dieser Metrik $\xi \xi' = xx' + yy'$.

Jedem Vektor $\xi = xa + yb$ mit $\|\xi\| = r$ ordnen wir ein Stützgeradenparallelogramm zu, indem wir die Stützgeraden der Richtung ξ , eine Stützgerade der Richtung η durch $X = M + \xi$ und die dazu bezüglich M symmetrische Stützgerade bestimmen (Abb. 152a). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei η so gewählt, daß $|\xi \times \eta|$ den Flächeninhalt dieses Parallelogrammes angibt. Dabei ist $|\xi \times \eta|$ unabhängig von der Wahl einer Stützgerade durch X . Die Funktion

$$f: \xi \rightarrow |\xi \times \eta|$$

ist für alle $X \in k$ stetig (ohne nähere Begründung) und nimmt demzufolge für wenigstens ein $X \in k$ ihr Minimum an.

¹⁾ Die wesentliche Beweisidee stammt von dem österreichischen Mathematiker PAUL FUNK.

Es sei $ABCD$ ein Stützgeradenparallelogramm minimalen Flächeninhalts f_0 bezüglich obiger euklidischer Metrik; dann liegen die Mittelpunkte aller Seiten dieses Vierecks in k (Abb. 152b); denn wäre etwa der Mittelpunkt N von AB ein äußerer Punkt von k (Abb. 152c), dann erhielten wir mit Hilfe von parallelen Stützgeraden

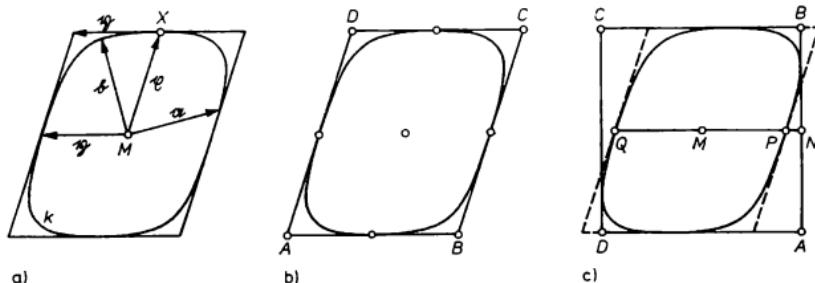


Abb. 152

durch die Schnittpunkte P, Q von g_{MN} mit k und mit Hilfe von g_{BC} und g_{DA} ein Parallelogramm mit

$$f(b(MP)) < f_0.$$

Wenn jedoch die Mittelpunkte der Seiten des Parallelogrammes $ABCD$ in k liegen, dann gilt erstens

$$\varrho(A, B) = \varrho(B, C) = 2r$$

und zweitens

$$g_{AB} \perp g_{BC} \perp g_{AB},$$

w. z. b. w.

Satz 4.17. Für ein Stützgeradenparallelogramm $ABCD$ eines Kreises $k(M, r)$ sind folgende Bedingungen gleichwertig:

1. $ABCD$ ist ein Stützgeradenquadrat.
2. $ABCD$ hat minimalen Umfang U , nämlich $U = 8r$.
3. Die Seitenmittelpunkte von $ABCD$ liegen in $k(M, r)$.

Beweis. a) Aus 1. folgt $g_{AB} \perp g_{BC}$ und $g_{BC} \perp g_{AB}$; daraus erhalten wir bereits 3. Umgekehrt folgt aus 3. offenbar $\varrho(A, B) = \varrho(B, C) = 2r$, $g_{AB} \perp g_{BC}$ und $g_{BC} \perp g_{AB}$, d. h. 1.

- b) Für ein Stützgeradenparallelogramm $ABCD$ gilt stets

$$\varrho(A, B), \varrho(B, C) \geq 2r,$$

$$U \geq 8r.$$

Aus 2. folgt nach 4.16 zunächst $U \leq 8r$, so daß dann nur $U = 8r$ und $\varrho(A, B) = \varrho(B, C) = 2r$ gelten kann, d. h., daß die Seitenmittelpunkte von $ABCD$ in $k(M, r)$ liegen (vgl. 3.). Umgekehrt folgt mit $U = 8r$ bereits wie behauptet 2., w. z. b. w.

Im Raum kann die Orthogonalität mit Hilfe von Stützebenen der Kugeln definiert werden.

Aufgaben

1. Es sei $g \perp h$. Man zeige (etwa mit Hilfe einer geeigneten Dehnung), daß h für jeden Kreis in ε_{gh} um einen Punkt $M' \in g \setminus h$ durch den Schnittpunkt von g und h eine Stützgerade ist.
2. Die Bilder senkrechter Kreisdurchmesser bei einer affinen Abbildung werden *konjugierte Ellipsendurchmesser* genannt.
 - a) Man zeige, daß Geraden bezüglich einer Ellipse als Eichfigur genau dann aufeinander senkrecht stehen, wenn die Geraden die Richtungen konjugierter Durchmesser der Ellipse besitzen.
 - b) Man gebe auf der Grundlage der Aussage a) eine Konstruktionsbeschreibung für das Lotfällen, wenn die Eichfigur eine Ellipse ist.
3. Man zeige durch eine geeignete Fallunterscheidung, daß für ein reguläres Sechseck als Eichfigur die Orthogonalität symmetrisch ist.

4.2.4. Die Bestimmung von $2\pi_k$

Ist k eine konvexe Eichfigur, dann wollen wir deren Umfang¹⁾ mit $2\pi_k$ bezeichnen. Angesichts der Schwierigkeiten bei der Bestimmung von 2π in der euklidischen Geometrie kann es überraschen, daß der Umfang in der einleitend betrachteten Stadtgeometrie mühelos bestimmt werden kann: $2\pi_k = 8$ (Abb. 153a).

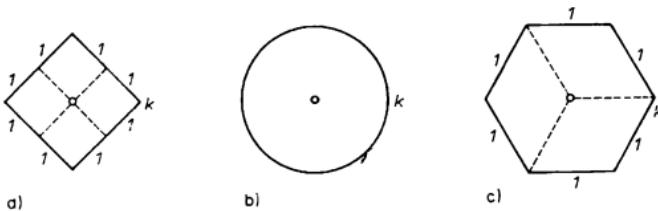


Abb. 153

Weil sich in ein reguläres Sechseck k mit Hilfe des Mittelpunktes leicht drei kongruente Rhomben einzeichnen lassen (Abb. 153c), gilt in diesem Fall $2\pi_k = 6$.

Wenn wir die Eichfiguren der Abb. 153 einer affinen Abbildung unterwerfen, dann erhalten wir der Reihe nach ein Parallelogramm als *affin-reguläres Viereck*

¹⁾ Dabei ist keineswegs selbstverständlich, daß der Umfang für jede Eichfigur existiert. Vgl. den folgenden Satz 4.18.

(mit sich halbierenden Diagonalen), eine Ellipse als *affinen Kreis*¹⁾ und ein *affin-reguläres Sechseck*, das zentrale symmetrisch ist und in das mit Hilfe des Mittelpunktes drei Parallelogramme eingezeichnet werden können (Abb. 154a, b, c); es gilt der Reihe nach $2\pi_k = 8$, $2\pi_k = 2\pi$ und $2\pi_k = 6$.

Die bisherigen Überlegungen haben gezeigt, daß $2\pi_k$ von der speziellen Eichfigur k abhängt. Von der Funktion

$$f: k \rightarrow 2\pi_k$$

wollen wir den Definitionsbereich und den Wertebereich ermitteln.

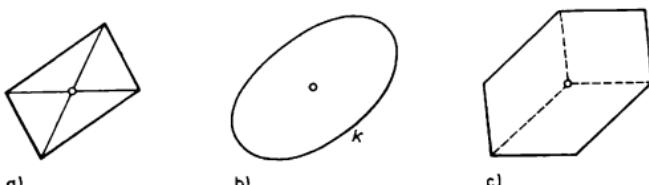


Abb. 154

Satz 4.18. *Jede konvexe Eichfigur k ist in ihrer Metrik rektifizierbar, d. h., daß sich für jede konvexe Eichfigur $f(k) = 2\pi_k$ bestimmen läßt.*

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich aus dem Beweis des folgenden Satzes.

Satz 4.19. *Für jede konvexe Eichfigur k gilt $2\pi_k \leq 8$.*

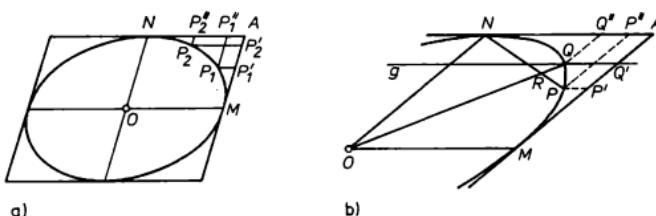


Abb. 155

Beweis. Es sei k eine beliebige konvexe Eichfigur mit dem Mittelpunkt O . Nach 4.16 gibt es ein Stützgeradenquadrat, dessen Seitenmittelpunkte folglich nach 4.17 in k liegen; es seien M, N die Mittelpunkte benachbarter Seiten mit der gemeinsamen Ecke A (Abb. 155a). Wir betrachten ein Näherungspolygon $P_0P_1P_2\dots P_n$ mit $P_0 = M$, $P_n = N$ und $\measuredangle MOP_1 < \measuredangle MOP_2 < \dots < \measuredangle MOP_n$. Die Parallele zu g_{OM} durch P_i trifft die M enthaltende Seite des Stützgeradenquadrates in einem Punkt P'_i , die Parallele zu g_{ON} durch P_i trifft die N enthaltende Seite in einem Punkt P''_i .

¹⁾ Die Geometrie bezüglich dieser Eichfigur ist euklidisch (vgl. auch Abschnitt 4.1.3).

Gilt o. B. d. A. $M < A$ und $A < N$, dann erhalten wir $M \leq P_1' \leq P_2' \leq \dots \leq P_n' = A$ und $A \leq P_1'' \leq P_2'' \leq \dots \leq P_n'' = N$: Aus

$$\not\propto MOP < \not\propto MOQ < \not\propto MON$$

folgt $P' \in MQ'$, denn es gilt zunächst $PN \cap OQ^+ = \{R\}$ und dann $PN \cap OQ = \{R\}$ wegen der Konvexität von k (Abb. 155b). Ist nun g die Parallele zu g_{OM} durch Q , dann gilt für die abgeschlossene Halbebene gO^+ der Reihe nach $gO^+ \ni O, R, P$ und damit $P' \in MQ'$.

Nunmehr gilt (vgl. Abb. 155a)

$$\begin{aligned} l &:= \varrho(P_0, P_1) + \varrho(P_1, P_2) + \dots + \varrho(P_{n-1}, P_n) \\ &\leq \varrho(P_0', P_1') + \varrho(P_0'', P_1'') + \dots + \varrho(P_{n-1}', P_n') + \varrho(P_{n-1}'', P_n'') \\ &= \varrho(P_0', P_1') + \dots + \varrho(P_{n-1}', P_n') + \varrho(P_0'', P_1'') + \dots + \varrho(P_{n-1}'', P_n'') \\ &= \varrho(M, A) + \varrho(A, N) = 2. \end{aligned}$$

Folglich existiert $\sup l$ für die Längen l aller Näherungspolygone (Schluß des Beweises von Satz 4.18, für den nur die Eigenschaften eines Stützgeradenparallelogrammes benötigt werden), und es gilt $2\pi_k := 4 \sup l \leq 4 \cdot 2$, w. z. b. w.

Satz 4.20. Für jede konvexe Eichfigur gilt $2\pi_k \geq 6$.

Beweis.¹⁾ Es sei k eine konvexe Eichfigur mit dem Mittelpunkt O und $P \in k$. Um P ziehen wir einen zweiten Einheitskreis k' (Abb. 156). Wegen $1 - 1 = 0 < \varrho(O, P) < 1 + 1$ existiert nach 4.11 ein Punkt $Q \in k \cap k'$, offensichtlich außerhalb g_{OP} . Wir setzen $R := Q + v(PO)$, $S := P^o$, $T := Q^o$ und $U := R^o$. Dann ist $PQRSTU$ wegen $\overrightarrow{SO} \# \overrightarrow{OP} \# \overrightarrow{RQ}$ und (als Folgerung) $\overrightarrow{OQ} \# \overrightarrow{SR}$, $\overrightarrow{OR} \# \overrightarrow{PQ}$ (Vertauschungsregel G_3 !) ein affin-reguläres Sechseck. Offenbar gilt

$$2\pi_k \geq \varrho_k(P, Q) + \varrho_k(Q, R) + \dots + \varrho_k(U, P) = 6,$$

w. z. b. w.

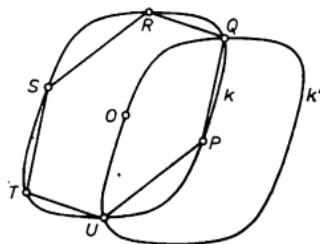


Abb. 156

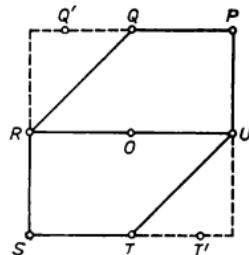


Abb. 157

¹⁾ Nach dem polnischen Mathematiker STANISLAW GOŁĄB.

Satz 4.21. Es sei $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Dann existiert eine konvexe Eichfigur k mit $2\pi_k = 6 + 2\varepsilon$.

Beweis. Es sei $PQRSTU$ ein affin-reguläres Sechseck (Abb. 157). Wir bestimmen Punkte Q' und T' durch $\vec{PQ'} = (1 + \varepsilon) \vec{PQ}$ und $\vec{ST'} = (1 + \varepsilon) \vec{ST}$. Die Eichfigur $k := PQ'RST'U$ ist wegen $0 \leq \varepsilon \leq 1$ konvex, und es gilt

$$\begin{aligned} 2\pi_k &= \varrho_k(P, Q') + \varrho_k(Q', R) + \cdots + \varrho_k(S, T') + \varrho_k(T', U) + \varrho_k(U, P) \\ &= (1 + \varepsilon) + 1 + 1 + (1 + \varepsilon) + 1 + 1 = 6 + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

w. z. b. w.

Zusammenfassend können wir feststellen, daß die Funktion $f: k \rightarrow 2\pi_k$ für alle konvexen Eichfiguren definiert ist und daß das abgeschlossene Intervall $[6, 8]$ den Wertebereich darstellt. Da jeder Kreis aus der Eichfigur durch Dehnung oder Verschiebung hervorgeht, erhalten wir schließlich (vgl. auch Aufgabe 2) den

Satz 4.22. In der Minkowskischen Geometrie ist jeder Kreis rektifizierbar. Dabei ist

$$U = 2\pi_k r$$

die Formel für den Umfang U eines Kreises $k(M, r)$.

Aufgaben

1. In der euklidischen Ebene bestimme man $2\pi_k$ bezüglich eines regelmäßigen
 - $2 \cdot 2^n$ -Ecks ($n = 1, 2, \dots$),
 - $3 \cdot 2^n$ -Ecks ($n = 1, 2, \dots$).
2. Man gebe eine Begründung für den letzten Satz, indem man sich eine Übersicht über alle Näherungspolygone von $k(M, r)$ mit Hilfe der Näherungspolygone der Eichfigur verschafft.
3. Die Metrik ϱ_1 aus dem Abschnitt 4.1.3, bezüglich der die Eichfigur ein Oktaeder ist (Abb. 132a), induziert in den Ebenen η durch die Punkte $\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ und $\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ Metriken ϱ_η . Man bestimme in diesen Ebenen den Umfang $2\pi_k$ der Eichfiguren.

4.3. Euklidische Räume und Banachräume

4.3.1. Bewegungen in der Minkowskischen Geometrie

In der Elementargeometrie können die Bewegungen mit Hilfe der Längeninvarianz charakterisiert werden. Dabei gilt, daß Q genau dann ein Punkt der Strecke PR ist, wenn $a(P, Q) + a(Q, R) = a(P, R)$ ist. Gilt $P \neq Q$ und $a(P, Q) + a(Q, R) = a(P, R)$, dann erhalten wir noch

$$\frac{PR}{PQ} = \frac{a(P, R)}{a(P, Q)}.$$

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß in der euklidischen Geometrie aus der Längeninvarianz bei einer Abbildung die Invarianz der Zwischenbeziehung und des Teilverhältnisses folgt.

In der Minkowskischen Geometrie gilt die Dreiecksungleichung (3*) genau dann für nicht kollineare Punkte, wenn k im engeren Sinne konvex ist (vgl. den Zusatz zum Satz 4.2). Um diesen Sachverhalt noch deutlicher zu machen, betrachten wir eine konvexe Eichfigur, die nicht im engeren Sinne konvex ist. In ihr gibt es Punkte

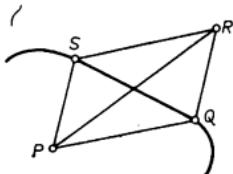


Abb. 158

Q, S , zwischen denen ein Randpunkt liegt; folglich besteht QS nur aus Randpunkten (Abb. 158). Ist P Mittelpunkt der Eichfigur und R das Bild von P bei der Spiegelung am Mittelpunkt von QS , dann ist $PQRS$ ein Parallelogramm, und es gilt

$$\varrho(P, Q) + \varrho(Q, R) = 2 = \varrho(P, R),$$

obwohl P, Q, R nicht kollinear sind. Da wir bei den noch zu definierenden Bewegungen in der Minkowskischen Geometrie nicht auf die Invarianz des Teilverhältnisses verzichten wollen, erklären wir

Definition. Eine affine Abbildung τ von einem linearen Unterraum der Menge der Punkte in die Menge der Punkte, bei der

$$\varrho(X^*, Y^*) = \varrho(X, Y)$$

für alle Bildpunkte X^*, Y^* gilt (Metrikinvarianz), wird *Bewegung* genannt. Figuren, die sich durch Bewegungen zur Deckung bringen lassen, werden *kongruent* genannt.

Wegen der Metrikinvarianz sind die Bewegungen eineindeutig. Der Definitionsbereich einer Bewegung ist ein linearer Unterraum der Menge aller Punkte, d. h. eine Gerade oder eine Ebene oder die Menge aller Punkte; außerdem sind die uninteressanten Fälle der einelementigen Punktmengen und der leeren Menge möglich. Wegen der Eineindeutigkeit haben Definitions- und Bildbereich dieselbe Dimension.

Die Verschiebungen und die Spiegelungen an den Punkten sind stets Bewegungen der Menge aller Punkte, denn es gilt dabei

$$\overrightarrow{XY} \# \overrightarrow{X'Y'} \vee \overrightarrow{XY} \# \overrightarrow{Y'X'}$$

und somit

$$\varrho(X', Y') = \varrho(X, Y)$$

für die Bildpunkte X', Y' von X bzw. Y . Weitere Beispiele für Bewegungen können noch für eindimensionale Unterräume angegeben werden, und zwar in Form affiner

Abbildungen von Geraden (vgl. den folgenden Satz 4.23c mit seinem Beweis). Im allgemeinen können wir über die Existenz von Bewegungen sehr wenig aussagen; die Forderungen nach einer gewissen Reichhaltigkeit an Bewegungen führt — wie wir noch sehen werden — sofort zur euklidischen Geometrie.

Welche Eigenschaften besitzen die Bewegungen in der Minkowskischen Geometrie? Wir denken zunächst an das System der Bewegungssaxiome in der euklidischen Geometrie als System von grundlegenden Eigenschaften der uns vertrauten Geometrie. Ein Teil der Bewegungssaxiome gilt auch in der Minkowskischen Geometrie (vgl. den Satz 4.23), ein anderer Teil erweist sich jedoch als charakteristisch für die euklidische Geometrie (vgl. die Sätze 4.25 und 4.26).

Satz 4.23. *In der Minkowskischen Geometrie gilt:*

a) *Das Nacheinanderausführen und Umkehren von Bewegungen führt wieder zu Bewegungen.*

b) *Bewegungen erhalten die Kollinearität, die Komplanarität, die Durchlaufsinne und das Teilverhältnis.*

c) *Jede lineare Figur F mit Punkten A, B ($\neq A$) lässt sich eindeutig so bewegen, daß A in den Anfangspunkt und B in einen Punkt einer gegebenen Halbgeraden übergeht.*

d) *Es gibt genau eine Punktspiegelung, die die Endpunkte einer Strecke vertauscht.*
(Vgl. die Bewegungssaxiome $B_1, B_2, B_3(a)$ und $B_4(a)$.)

Beweis. Offensichtlich sind a) und b) richtig; d) wird durch Spiegelung am Streckenmittelpunkt realisiert.

Sind nun A, B ($\neq A$) in g und die Halbgerade p mit dem Anfangspunkt A' gegeben, dann existiert in p genau ein Punkt B' mit $\varrho(A', B') = \varrho(A, B)$. Es gibt genau eine affine Abbildung τ der Geraden g mit $A^\tau = A'$ und $B^\tau = B'$; damit ist die Eindeutigkeitsfrage bezüglich c) bereits positiv entschieden. Außerdem folgt aus $X, Y \in g$ mit

$$\varrho(X, Y) = \left| \frac{XY}{AB} \right| \varrho(A, B) = \left| \frac{X^\tau Y^\tau}{A' B'} \right| \varrho(A', B') = \varrho(X^\tau, Y^\tau)$$

die Metrikinvarianz, w. z. b. w.

Für viele weitere Überlegungen stellen wir einen Hilfssatz von K. LÖWNER bereit:

Hilfssatz 4.24. a) *In einer Minkowskischen Ebene mit der bezüglich O symmetrischen Eichfigur k sei eine Basis a, b des Vektorraumes ausgezeichnet und*

$$\xi \xi' := xx' + yy'$$

für $\xi = xa + yb$, $\xi' = x'a + y'b$ als Skalarprodukt einer euklidischen Metrik gesetzt. Dann gibt es unter allen Ellipsen mit dem Mittelpunkt O genau eine, die Punkte von k enthält und deren Fläche k umfaßt und minimalen Inhalt besitzt.

b) Im Minkowskischen Raum mit der bezüglich O symmetrischen Eichfigur k sei eine Basis a, b, c des Vektorraumes ausgezeichnet und

$$\xi\xi' := xx' + yy' + zz'$$

für $\xi = xa + yb + zc$, $\xi' = x'a + y'b + z'c$ als Skalarprodukt einer euklidischen Metrik gesetzt. Dann gibt es unter allen Ellipsoiden mit dem Mittelpunkt O genau ein Ellipsoid, das Punkte von k enthält und dessen Körper k umfaßt und minimales Volumen hat.¹⁾

Beweis. a) In einer Minkowskischen Ebene sei eine Basis a, b des Vektorraumes ausgezeichnet.

Existenz. Wir betrachten eine Ellipse mit dem Mittelpunkt O , deren Fläche k enthält (Abb. 159a), und eine von O ausgehende Halbgerade p . Die Funktion

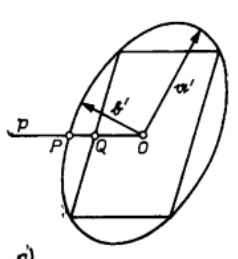
$$d: p \rightarrow d(p) := \|\mathbf{v}(P, Q)\|,$$

wobei P, Q die Schnittpunkte von p mit der Ellipse bzw. mit der Eichfigur sind, ist für jede Halbgerade p stetig, weil P und Q stetig von p abhängen. Sie nimmt, da sie auf einem abgeschlossenen Intervall definiert ist, ihr Minimum an, etwa für p_0

mit den Schnittpunkten P_0 und Q_0 . Die Dehnung $d(O, t)$ mit $t = \frac{OQ_0}{OP_0}$ führt zu

einer Ellipse mit den Achsen a', b' , auf der der Punkt Q_0 aus k liegt, deren Fläche k enthält und für die bei gegebener Richtung $r := |a'|^{-1} a'$ von a' und gegebenem Verhältnis $q := |b'| : |a'|$

$$f(r, q) := \pi |a'| |b'| = \pi q |a'|^2$$



a)

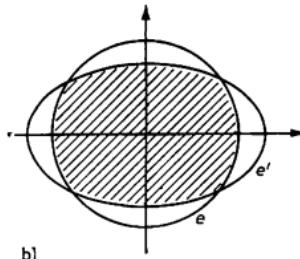


Abb. 159

offenbar minimal ist. Die Funktion f ist stetig und kann ihr Minimum nur auf einem abgeschlossenen Intervall $0 < \epsilon \leq q \leq \frac{1}{\epsilon}$ annehmen. Da auch r auf einem abgeschlossenen Intervall variiert, nimmt f ein Minimum an, d. h., es gibt eine Ellipse mit dem Mittelpunkt O , die Punkte von k enthält und deren Fläche k umfaßt und minimalen Flächeninhalt hat.

¹⁾ Die Aussage ist auch für n -dimensionale Räume richtig.

Eindeutigkeit. Wir betrachten eine k umschriebene Ellipse e minimalen Flächeninhalts mit Punkten aus k . Sind a' , b' deren Hauptachsen, dann nehmen wir eine Koordinatentransformation

$$(O, a, b) \rightarrow (O, a', b')$$

vor. Dabei ändern sich die Inhaltsverhältnisse nicht, so daß die Ellipse e , die im neuen Koordinatensystem durch eine Kreisgleichung beschrieben wird, nach wie vor minimalen Flächeninhalt hat. Um die Eindeutigkeit von e nachzuweisen, betrachten wir eine zweite Ellipse e' und drehen unser Koordinatensystem derart, daß die Achsen von e' neue Koordinatenachsen werden; es gilt dann (vgl. Abb. 159b)

$$e: x^2 + y^2 = 1,$$

$$e': \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Der Durchschnitt der zugehörigen Flächen, der auch noch k enthält, ist durch die beiden Ungleichungen

$$x^2 + y^2 \leq 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

gekennzeichnet; er ist offenbar in

$$\frac{x^2}{2} \left(1 + \frac{1}{a^2}\right) + \frac{y^2}{2} \left(1 + \frac{1}{b^2}\right) \leq 1,$$

der Fläche einer Ellipse

$$\bar{e}: \frac{x^2}{\bar{a}^2} + \frac{y^2}{\bar{b}^2} = 1$$

mit

$$\bar{a}^2 = \frac{2a^2}{1+a^2}, \quad \bar{b}^2 = \frac{2b^2}{1+b^2} \quad \text{und} \quad \bar{I} := \pi \frac{2ab}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}$$

enthalten.

Wäre e' ebenfalls eine Ellipse minimalen Flächeninhaltes — $\pi ab = \pi \cdot 1^2 = \pi!$ — mit $e' \neq e$, dann wäre $a \neq 1$ oder $b \neq 1$; etwa $a \neq 1$. Aus $(1-a)^2 > 0$ und $(1-b)^2 \geq 0$ erhielten wir $1+a^2 > 2a$, $1+b^2 \geq 2b$ neben $ab = 1$, d. h.

$$\bar{I} < \pi \frac{2}{\sqrt{2a \cdot 2b}} = \pi$$

im Widerspruch zur Minimalität von e .

Der zweite Teil des Hilfssatzes ergibt sich analog.

Satz 4.25. a) Eine Minkowskische Ebene ist genau dann euklidisch, wenn sie die Existenzaussage in $B_3(b)$ erfüllt.¹⁾

b) Ein Minkowskischer Raum ist genau dann euklidisch, wenn er die Existenzaussage in $B_3(c)$ erfüllt.

Zusatz. Ein Minkowskischer Raum, in dem jede Ebene (durch einen Punkt) euklidisch ist, hat selbst euklidische Metrik.

Beweis. a) Es sei O der Mittelpunkt der Eichfigur k , und es sei a, b eine Basis des Vektorraumes. Wie im Beweis des Hilfssatzes 4.24 führen wir eine euklidische Metrik vermittels

$$\xi\xi' := xx' + yy'$$

für $\xi = xa + yb$, $\xi' = x'a + y'b$ ein. Bezuglich dieser Metrik gilt:

- Die Fläche k der Eichfigur hat einen Flächeninhalt (ohne nähere Begründung).
- Es existiert eine „Minimal“ellipse e mit dem Mittelpunkt O , d. h. eine Ellipse e mit dem Mittelpunkt O , die Punkte von k enthält und deren Fläche k umfaßt und minimalen Inhalt besitzt (Existenzaussage in 4.24).

Gilt $P \in k \cap e$, dann gibt es nach der Voraussetzung des Satzes eine Bewegung τ der Ebene mit $O^\tau = O$ und $P^\tau = X$ für jeden Punkt $X \in k$. Es gilt $k^\tau = k$, folglich $e^\tau = e$ wegen der Eindeutigkeitsaussage in 4.24 und damit

$$\begin{aligned} \{X\} &= OX^+ \cap k = (OP^+ \cap k)^\tau = \{P^\tau\} = (OP^+ \cap e)^\tau \\ &= OX^+ \cap e, \end{aligned}$$

d. h. $k = e$. Mithin ist die Minkowskische Ebene euklidisch.

Die Umkehrung ist trivial.

b) Der zweite Teil des Satzes ergibt sich analog.

Zum Beweis des Zusatzes bemerken wir nur, daß k ein Ellipsoid sein muß, weil jeder Schnitt mit einer Ebene durch O eine Ellipse ergibt.²⁾

Analog zum Beweis des Satzes 4.25a erhält man den

Satz 4.26. Eine Minkowskische Ebene ist genau dann euklidisch, wenn sie $B_4(b)$ erfüllt.

Eine Analyse der Beweise zeigt, daß die Minkowskische Metrik schon dann euklidisch ist, wenn Teilaussagen der Existenzaussage in $B_3(b)$ bzw. wenn $B_4(b)$ erfüllt sind. Dazu benötigen wir nur spezielle Bewegungen. Unter einer *ebenen Bewegung* verstehen wir eine Bewegung einer Ebene auf sich. Eine ebene Bewegung mit genau einem Fixpunkt P wird *Drehung um P* genannt. Eine ebene Bewegung, die eine Gerade

¹⁾ Man spricht dann auch von *freier Beweglichkeit*.

²⁾ G. Krr, Studentin im dritten Studienjahr, geht folgenden Weg: Für Geraden f, g, h, x durch einen Punkt O folgt aus $f \perp g, h$ und $x \subset \varepsilon_{gh}$ stets $f \perp x$. Nun kann die Existenz der Spiegelungen an allen Ebenen und damit die Existenzaussage in $B_3(c)$ oder die Existenz einer orthonormierten Basis und für k mit Hilfe des Satzes von PYTHAGOREAS die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ bewiesen werden.

punktweise festläßt und die Halbebenen bezüglich g vertauscht, heißt *Spiegelung an g* . Mit diesen Begriffen können folgende Kriterien formuliert werden:

Satz 4.27. a) Eine Minkowskische Ebene ist genau dann euklidisch, wenn jede Halbgerade OP^+ in jede Halbgerade OQ^+ gedreht werden kann.

b) Eine Minkowskische Ebene ist genau dann euklidisch, wenn an jeder Geraden (durch einen festen Punkt O) eine Spiegelung existiert.

Beweis. Der erste Teil des Satzes kann wie Satz 4.25a bewiesen werden. Zum Beweis von b) betrachten wir den Einheitskreis k um O sowie die Minimalellipse e , die im geeigneten Koordinatensystem die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ besitzt. Die Spiegelungen σ an den Geraden durch O müssen k und e festlassen; wegen $e^\sigma = e$ kann es sich nur um die Spiegelungen der Ebene mit der Eichfigur e handeln. (Vgl. auch die folgende Aufgabe 1.) Nach B₄(b) für diese euklidische Ebene kann jede Halbgerade OP^+ in jede Halbgerade OQ^+ gespiegelt werden, d. h., die Ebene ist euklidisch. — Die Umkehrung ist trivial, w. z. b. w.

Aufgaben

1. Es sei σ Spiegelung der Minkowskischen Ebene an g . Dann gilt für $X, Y \notin g$ und die Mittelpunkte M, N von X, X^σ bzw. Y, Y^σ stets

$$gXX^\sigma \parallel gYY^\sigma, \quad M, N \in g, \quad g \perp gXX^\sigma \perp g.$$

- 2.* Was läßt sich in der Minkowskischen Geometrie über die Eindeutigkeitsaussagen in B₃(b) bzw. B₃(c) sagen?

4.3.2. Die Kongruenz in der Minkowskischen Geometrie

Wegen der Gültigkeit der Bewegungsaxiome B₃(a) und B₄(a) neben B₁ und B₂ gilt der

Satz 4.28. Strecken können mit Hilfe von Bewegungen eindeutig auf Halbgeraden abgetragen werden. Außerdem gelten für die Streckenkongruenz die Drittengleichheit und der Streckenadditionssatz.

Die bekannten Eigenschaften der Winkelkongruenz sind im wesentlichen für die euklidische Geometrie kennzeichnend:

Satz 4.29. Die Minkowskische Geometrie ist genau dann euklidisch, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- a) Es gilt $\not\propto POQ \cong \not\propto QOP$ für alle Winkel $\not\propto POQ$.
 b) Jeder Winkel kann an jede Fahne angetragen werden.

Offenbar ist a) mit der Gültigkeit von B₄(b) gleichwertig, während b) eine Teilaussage von B₃(b) darstellt. Somit ergibt sich die Gültigkeit des Satzes etwa aus den Sätzen 4.25 und 4.26.

Da die Winkel im allgemeinen nicht das Symmetriaxiom 4.29a erfüllen, ergeben sich von vornherein Schwierigkeiten bei den Dreiecks Kongruenzsätzen, die Winkelkongruenzen in den Voraussetzungen enthalten. Um überhaupt zu brauchbaren Aussagen zu gelangen, könnte man die Kongruenz gerichteter Winkel betrachten. Wir wollen aber hier darauf verzichten.

Der Kongruenzsatz *sss* kann hier ohne weiteres untersucht werden. Das Ergebnis ist negativ: *In der Minkowskischen Geometrie gilt der Kongruenzsatz *sss* für Dreiecke im allgemeinen nicht*. Um das einzusehen, betrachten wir wieder die einleitend dargelegte Stadtgeometrie mit der Eichfigur $ABCD$. Im Dreieck ABC gilt (vgl. Abb. 160)

$$\varrho(A, B) = \varrho(B, C) = \varrho(C, A) = 2.$$

Trotzdem können die Ecken dieses gleichseitigen Dreiecks nicht durch Bewegungen beliebig permuiert werden; denn sind K , L und M die Mittelpunkte der Seiten BC , CA bzw. AB , dann gilt

$$\varrho(B, L) = 1 \neq 2 = \varrho(C, M) = \varrho(A, K).$$

Wegen der ungleichlangen Seitenhalbierenden gilt beispielsweise

$$\triangle ABC \not\cong \triangle BCA.$$

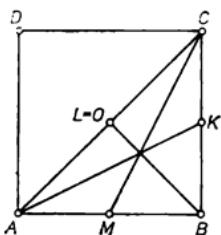


Abb. 160

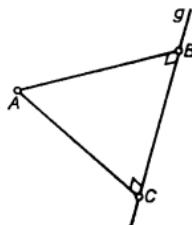


Abb. 161

Das Dreieck ABC in Abb. 160 ist gleichseitig und wegen $g_{AB} \perp g_{BC}$ auch rechtwinklig. Somit kann der Satz des Pythagoras nicht gelten.

Wenn der Satz des PYTHAGORAS gilt, sind Links- bzw. Rechtsloten eindeutig (Abb. 161): Aus $A \notin g$ und $B, C \in g$ sowie $g \perp g_{AB}, g_{AC}$ oder $g_{AB}, g_{AC} \perp g$ folgt

$$\varrho(A, B)^2 + \varrho(B, C)^2 + \varrho(C, A)^2 = \varrho(A, C)^2 + \varrho(B, C)^2 = \varrho(A, B)^2,$$

d. h. $2\varrho(B, C) = 0$, $\varrho(B, C) = 0$ und schließlich $B = C$. — Es gilt sogar der

Satz 4.30. *In der Minkowskischen Geometrie gilt der Satz des Pythagoras genau dann, wenn die Metrik euklidisch ist.*

Beweis. a) Wir setzen zunächst voraus, daß aus $g_{AB} \perp g_{BC}$ stets

$$\varrho(A, B)^2 + \varrho(B, C)^2 = \varrho(A, C)^2$$

folgt (Satz des PYTHAGORAS), und wählen durch den Mittelpunkt O der Eichfigur eine beliebige Ebene ε_{OEF} , wobei o. B. d. A. $g_{OB} \perp g_{OF}$ und $\varrho(O, E) = \varrho(O, F) = 1$

gelte. Bezuglich des Koordinatensystems $(O, v(OE), v(OF))$ gilt für einen beliebigen Punkt X des Einheitskreises k der Minkowskischen Metrik und den Schnittpunkt P von g_{OE} mit der Parallelens zu g_{OF} durch X wegen $g_{OE} \perp g_{OF}$

$$x^2 + y^2 = \varrho(O, P)^2 + \varrho(P, X)^2 = \varrho(O, X)^2 = 1,$$

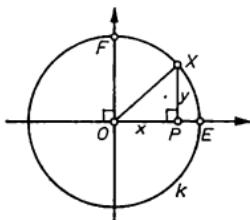


Abb. 162

d. h., die Eichfigur der Ebene genügt der Kreisgleichung der euklidischen Metrik.¹⁾ Für die ebene Geometrie ist nichts mehr zu zeigen; andernfalls sind alle Ebenen euklidisch, mithin der Minkowskische Raum (vgl. den Zusatz zum Satz 4.25).

b) Die Umkehrung ist trivial, w. z. b. w.

Wenn in der Minkowskischen Geometrie der Satz des PYTHAGORAS gilt, kann ein Skalarprodukt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := \frac{1}{4} (\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2)$$

eingeführt werden: Es gilt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2 \geq 0$ und

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Aus der Definition ist auch unmittelbar die Symmetrie

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

abzulesen. Gilt $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, dann kann jeder Vektor \mathbf{z} bezüglich \mathbf{a} in eine Parallelkomponente \mathbf{z}_a und eine Normalkomponente \mathbf{z}_a^\perp mit $\mathbf{z}_a = \lambda \mathbf{a}$, $\mathbf{z}_a^\perp \perp \mathbf{a}$ und $\mathbf{z} = \mathbf{z}_a + \mathbf{z}_a^\perp$ zerlegt werden; wegen

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{a} + \mathbf{z}_a + \mathbf{z}_a^\perp\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{z}_a - \mathbf{z}_a^\perp\|^2 \\ &= \|\mathbf{a} + \mathbf{z}_a\|^2 + \|\mathbf{z}_a^\perp\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{z}_a\|^2 - \|\mathbf{z}_a^\perp\|^2 \\ &= \|\mathbf{a} + \mathbf{z}_a\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{z}_a\|^2 \end{aligned}$$

¹⁾ Wie der Beweis lehrt, benötigen wir den Satz des PYTHAGORAS nur unter sehr speziellen Voraussetzungen, etwa unter der Voraussetzung, daß die Katheten zu zwei orthogonalen Geraden parallel sind. Die Voraussetzung $g_{AB} \perp g_{BC}$ könnte zu $g_{AB} \perp g_{BC} \perp g_{AB}$ verschärft werden.

gilt die wichtige Regel

$$a\bar{c} = a\bar{c}_a.$$

Hieraus kann nun

$$(\lambda a) b = \lambda(ab),$$

$$a(b + c) = ab + ac$$

abgeleitet werden (vgl. die folgende Aufgabe). Somit erhält man einen weiteren Beweis des Satzes 4.30.

Schließlich sei erwähnt, daß die Minkowskische Geometrie genau dann euklidisch ist, wenn

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$$

für alle Vektoren a, b gilt (Abb. 163), d. h., wenn die Parallelogrammbeziehung gilt.¹⁾

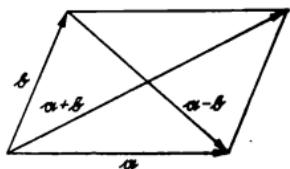


Abb. 163

Aufgabe

In der Minkowskischen Geometrie gelte der Satz des PYTHAGORAS. Man beweise für das oben eingeführte Skalarprodukt

- a) $a(b + c) = ab + ac$,
- b) $(\lambda a)b = (\lambda ab)$

für beliebige reelle Zahlen λ und Vektoren a, b, c .

4.3.3. Banachräume

In den bisherigen Ausführungen ist zu erkennen, daß viele Aussagen unabhängig von der speziellen Dimension gültig sind. Das legt den Gedanken nahe, die Dimension nicht festzulegen. Bei diesem Vorgehen kann man sich vorteilhaft auf den Begriff des Vektorraumes stützen.

Definition. Ein Paar $(V, \|\cdot\|)$ wird genau dann *normierter Raum* genannt, wenn V ein Vektorraum über dem Körper K der reellen oder komplexen Zahlen und $\|\cdot\|$

¹⁾ Nach J. v. NEUMANN und P. JORDAN, On inner products in linear metric spaces, Ann. Math. 36 (1935), 719–723. Der Beweis der Additivität des zu konstruierenden inneren Produktes ist leicht, während die Homogenität mit Methoden hergeleitet werden kann, mit denen in 3.1 gearbeitet wird.

eine Abbildung von V in den Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen mit den Eigenschaften

- (a) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = o$,
- (b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
- (c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

für alle $\lambda \in K$ und $x, y \in V$ ¹⁾ ist.

Wie wir bereits wissen, gilt somit $\|x\| \geq 0$ für alle Vektoren x und

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = o$$

(vgl. Bemerkung 4.4). Für Vektoren x, y — man denke etwa an „Ortsvektoren“ — kann vermöge

$$\varrho(x, y) := \|x - y\|$$

eine Abstandsfunktion eingeführt werden (vgl. Aufgabe 1). Somit hat es einen Sinn, in normierten Räumen den Konvergenzbegriff zu betrachten.

Definition. Wir sagen, daß $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ gegen x konvergiert, und setzen $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ²⁾ genau dann, wenn die Folge $\varrho(x_1, x), \varrho(x_2, x), \dots, \varrho(x_n, x), \dots$ eine Nullfolge ist:

$$\varrho(x_n, x) \rightarrow 0.$$

Die Folge $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ heißt genau dann *Fundamentalfolge*, wenn zu jeder positiven reellen Zahl ε eine natürliche Zahl N derart existiert, daß für $m, n \geq N$ stets $\varrho(x_m, x_n) < \varepsilon$ gilt, in Zeichen:

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{N \in \mathbb{N}} \bigwedge_{m, n \geq N} \varrho(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

In jedem normierten Raum gilt der bekannte

Satz 4.31. Wenn $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ gegen x konvergiert, dann ist $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ eine Fundamentalfolge.

Der Beweis verläuft wie gewohnt: Bei gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es wegen $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ eine natürliche Zahl N mit $\varrho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N$; folglich gilt

$$\varrho(x_m, x_n) = \|x_m - x_n\| = \|(x_m - x) - (x_n - x)\|$$

$$\leq \|x_m - x\| + \|x_n - x\| = \varrho(x_m, x) + \varrho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für alle $m, n \geq N$, w. z. b. w.

¹⁾ Es ist allgemein üblich, in diesem Zusammenhang die Vektoren mit kleinen lateinischen Buchstaben zu bezeichnen.

²⁾ Vgl. Aufgabe 2.

Hinsichtlich der Umkehrung des Satzes 4.31 gilt der

Satz 4.32. Ist $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ eine Fundamentalfolge, deren Glieder in einem endlich-dimensionalen Unterraum U von V liegen, dann konvergiert die Folge $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ gegen einen Vektor $x \in U$.

Beweis. Es sei a_1, \dots, a_k eine Basis des Unterraumes U , wobei wir o. B. d. A. $\|a_1\| = \|a_2\| = \dots = \|a_k\| = 1$ voraussetzen. Die Eichfigur von U sei

$$k := \{x \in U : \|x\| = 1\};$$

sie besitzt Stützhyperebenen U_i, U'_i parallel zur Koordinatenhyperebene $\{a_1, \dots, a_k\} \setminus \{a_i\}$, die die i -te Koordinatenachse etwa in $u_i a_i$ und $-u_i a_i$ ($u_i > 0$) treffen möge. Somit wird k in ein Parallelepiped aus Stützhyperebenen eingeschlossen.

Die Glieder der Fundamentalfolge $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ liegen in U , sie sind also Linearkombinationen der Basisvektoren a_1, \dots, a_k :

$$x_n = \lambda_{n1} a_1 + \lambda_{n2} a_2 + \dots + \lambda_{nk} a_k.$$

Wir betrachten die Folge $\lambda_{1i}, \lambda_{2i}, \dots, \lambda_{ni}, \dots$ der Koeffizienten des i -ten Basisvektors. Da $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ eine Fundamentalfolge ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N' mit

$$\|x_m - x_n\| < \frac{\varepsilon}{u_i}$$

und folglich mit

$$|\lambda_{ni} - \lambda_{ni}| = \|(\lambda_{ni} - \lambda_{ni}) a_i\| < \varepsilon$$

für alle $m, n \geq N'$, d. h., daß die Folge $\lambda_{1i}, \lambda_{2i}, \dots, \lambda_{ni}, \dots$ eine Fundamentalfolge reeller oder komplexer Zahlen ist und einen Grenzwert λ_i besitzt.

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl N_i mit

$$n \geq N_i \Rightarrow |\lambda_{ni} - \lambda_i| < \frac{\varepsilon}{k}.$$

Wir setzen $N := \max N_i$ und $x := \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|x_n - x\| &= \|(\lambda_{n1} - \lambda_1) a_1 + \dots + (\lambda_{nk} - \lambda_k) a_k\| \\ &\leq |\lambda_{n1} - \lambda_1| + \dots + |\lambda_{nk} - \lambda_k| < \frac{\varepsilon}{k} + \dots + \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $n \geq N$, d. h., daß $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ gegen x konvergiert, w. z. b. w.

Der obige Satz 4.32, dessen Beweis sich im Fall eines zweidimensionalen Unterraumes mit Hilfe eines Stützgeradenquadrates vereinfachen läßt, ergibt, daß sich der Satz 4.31 in endlichdimensionalen normierten Räumen umkehren läßt. Im allgemeinen gilt jedoch die Umkehrung des Satzes 4.31 nicht. Man erklärt deshalb

Definition. Ein normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ heißt genau dann *vollständiger* normierter Raum bzw. *Banachraum*, wenn in ihm jede Fundamentalfolge konvergiert.

Nach dem Satz 4.32 sind die vorn betrachteten (zwei- bzw. dreidimensionalen) Räume mit einer Minkowskischen Metrik sämtlich Banachräume. Ein weiteres Beispiel ist der sogenannte Raum ℓ^2 : Es sei M die Menge der Folgen $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen, für die $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ gilt. Vermöge

$$x + y := (x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\lambda x := (\lambda x_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

für beliebige Folgen $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus M und komplexe Zahlen λ erhalten wir einen Vektorraum V mit

$$\|x\| := \sqrt{\sum |x_n|^2},$$

den Banachraum $\ell^2 := (V, \|\cdot\|)$. (Vgl. Aufgabe 3.)

In Banachräumen kann man beispielsweise auch die Begriffe *Reihe* und *konvergente Reihe* wie üblich erklären. Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ wird *absolut konvergent* genannt genau dann, wenn die zugehörige Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$ konvergiert. Es gilt dann auch hier der Satz, daß jede absolut konvergente Reihe selbst konvergiert.

Als Verallgemeinerung des Begriffes der affinen Abbildung werden im Zusammenhang mit Banachräumen die *linearen Operatoren* betrachtet, das sind Abbildungen A , deren Definitionsbereich ein Unterraum eines Banachraumes ist und die die Bedingungen

$$A(x + y) = A(x) + A(y), \quad A(\lambda x) = \lambda A(x)$$

erfüllen.

Eine Abbildung, die die Abstände unverändert läßt, wird *isometrisch* genannt. Bei den von uns betrachteten Bewegungen handelt es sich um isometrische lineare Operatoren.

Der Begriff des Banachraumes spielt in der Funktionalanalysis eine große Rolle; er ist für die Theorie der Näherungsverfahren, bei der Untersuchung von Differential- und Integralgleichungen ein wichtiges Hilfsmittel. Dabei sind die unendlichdimensionalen Banachräume und lineare Operatoren bedeutsam. In dieser Richtung wurde die Minkowskische Geometrie von dem polnischen Mathematiker STEFAN BANACH ausgebaut. Die geometrische Interpretation der Theorie der Banachräume stellt ein wichtiges methodisches Hilfsmittel dar.

Die entsprechende Verallgemeinerung der euklidischen Geometrie führt zur Theorie der *Hilberträume*. Als „Bausteine“ für den Begriff des Hilbertraumes benutzt man vorwiegend die Begriffe Vektorraum, Skalarprodukt und Vollständig-

keit. In Hilberträumen wird

$$\|x\| := \sqrt{xx},$$

$$\varrho(x, y) := \|x - y\|$$

gesetzt und die Vollständigkeit wie in normierten Räumen erklärt. Mit der soeben erklärten Norm erweist sich jeder Hilbertraum als spezieller Banachraum.

Aufgaben

1. Man zeige, daß in einem normierten Raum durch

$$\varrho(x, y) := \|x - y\|$$

eine Abstandsfunktion definiert wird.

2. Zur Rechtfertigung der Schreibweise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

ist zu zeigen, daß in einem normierten Raum eine Folge $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ gegen höchstens einen Grenzwert x konvergiert.

- 3.* Man beweise, daß ℓ^1 ein Banachraum ist, für den $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ mit $a_n = (\delta_{in})_{i \in \mathbb{N}}$ in keinem endlichdimensionalen Unterraum liegen.

5. Minkowskische Geometrie der speziellen Relativitätstheorie

Die spezielle Relativitätstheorie ergibt eine gegenüber der klassischen Physik (Newtonischen Mechanik) neue Vorstellung von Raum und Zeit. Die mathematische Beschreibung durch MINKOWSKI führte zu einem geometrischen Raum, der sich von der euklidischen Raumstruktur in der Metrik unterscheidet. Das Skalarprodukt ist nicht mehr positiv definit.

Wir gehen in diesem Kapitel von Vektorräumen über Körpern aus, da für viele Überlegungen nicht alle Eigenschaften des Körpers der reellen Zahlen gebraucht werden. Eine gewisse breite Behandlung der affinen und metrisch affinen Räume soll die Kenntnis analytischer Geometrie vertiefen.

5.1. Vektorräume über Körpern und symmetrische Bilinearform

5.1.1. Vektorräume

In Verallgemeinerung der Struktur in Abschnitt 3.1.3 setzen wir hier Vektorräume über Körpern voraus; mit (V, K, φ) ¹⁾ bezeichnen wir den Vektorraum mit der Vektorgruppe V über dem Körper K , wobei φ eine Abbildung von $K \times V$ in V ist, die die folgenden Eigenschaften der Vervielfachung besitzt; dabei wird für $\varphi(x, a)$ kurz xa gesetzt ($x, y \in K$; $a, b \in V$):

- (1) $1a = a$,
- (2) $(xy) a = x(ya)$,
- (3) $(x + y) a = xa + ya$,
- (4) $x(a + b) = xa + xb$.

(Vgl. Satz 3.17 in Abschnitt 3.1.3.)

¹⁾ Zur Vereinfachung von Sprech- und Schreibweisen benutzen wir für eine Struktur und ihre Trägermenge die gleiche Bezeichnung, falls Verwechslungen nicht zu befürchten sind.

Neben dem im dritten Kapitel vorgestellten dreidimensionalen reellen Vektorraum sei als Beispiel noch der *n-dimensionale Koordinatenraum über einem Körper K* genannt: Hier ist $V := K^n$ mit

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

und

$$\varphi(t, (x_1, \dots, x_n)) := (tx_1, \dots, tx_n)$$

für alle $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t \in K$.

Ist T Teilmenge von V und $a \in V$, so heißt a *linear abhängig von T* genau dann, wenn es endlich viele $x_1, \dots, x_n \in K$ und $b_1, \dots, b_n \in T$ mit $a = x_1b_1 + \dots + x_nb_n$ gibt. Andernfalls heißt a *linear unabhängig von T*. Ferner heißt T *linear abhängig* genau dann, wenn es einen Vektor $a \in T$ gibt, der linear abhängig von $T \setminus \{a\}$ ist. Ansonsten ist T *linear unabhängig*.

Für das Weitere ist die folgende Beschreibung der linearen Unabhängigkeit endlicher Vektormengen nützlich, die sich unmittelbar aus der Definition ergibt:

Folgerung 5.1. Wenn aus $x_1b_1 + \dots + x_nb_n = 0$ stets $x_1 = \dots = x_n = 0$ folgt, dann ist $\{b_1, \dots, b_n\}$ linear unabhängig.

Weiterhin erklären wir: Ist $T \subseteq V$, so heißt $(T, K, \bar{\varphi})$ ein *Teilraum* oder *Unterraum* von (V, K, φ) genau dann, wenn gilt:

$$a, b \in T \Rightarrow a + b \in T,$$

$$a \in T \wedge x \in K \Rightarrow \bar{\varphi}(x, a) := xa \in T.$$

Im Fall $T \subset V$ sprechen wir von einem *echten* Teilraum.

Ist $T \subseteq V$, so wird

$$\bar{T} := \left\{ \bar{x} : \bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i a_i; x_i \in K, a_i \in T \right\}$$

die *lineare Hülle* von T oder der *von T erzeugte Teilraum* genannt.

Man erkennt leicht, daß jeder Teilraum $(T, K, \bar{\varphi})$ selbst Vektorraum ist und daß \bar{T} tatsächlich ein Teilraum von (V, K, φ) ist.

Eine Teilmenge $B \subseteq V$ heißt *Basis von (V, K, φ)* genau dann, wenn B linear unabhängig und $\bar{B} = V$ ist.

Gibt es in einem Vektorraum eine endliche Basis, so ist jede andere Basis zu dieser gleichmächtig (also auch endlich). Unter der Voraussetzung des Lemmas von KURATOWSKI-ZORN gilt ganz allgemein, daß *jeder Vektorraum eine Basis besitzt und daß alle seine Basen gleichmächtig sind*.¹⁾

Die Kardinalzahl einer Basis des Vektorraumes V mit $V \neq \{0\}$ heißt die *Dimension von V*, kurz $\dim V$. Für $V = \{0\}$ sei $\dim V = 0$.

¹⁾ Ein Beweis soll hier nicht geführt werden; wir verweisen auf einschlägige Literatur wie A. G. KUROŠ, Vorlesungen über allgemeine Algebra, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1964 (Übersetzung aus dem Russischen). Einen Beweis für den endlichen Fall findet man bereits in MfL, Bd. 3, 4.3.

In n -dimensionalen Vektorräumen gibt also $\dim V \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Vektoren in einer Basis von V an.

Von wesentlicher Bedeutung ist

Satz 5.2 (Darstellungssatz). *Ist $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis¹⁾ des endlichdimensionalen Vektorraumes V , so besitzt jeder Vektor $\xi \in V$ eine Darstellung*

$$\xi = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$$

mit eindeutig bestimmtem n -Tupel $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$; x_1, \dots, x_n heißen die *Koordinaten von ξ bezüglich B* . An späterer Stelle bezeichnen wir mit $(\xi)_B$ das n -Tupel (x_1, \dots, x_n) der Koordinaten von ξ bezüglich der Basis B .

Beweis. Die Existenz einer Darstellung ergibt sich aus der Voraussetzung, daß B Basis ist. Sind $\sum_{i=1}^n x_i b_i$ und $\sum_{i=1}^n x'_i b_i$ zwei Darstellungen für ξ , so ist $\sum_{i=1}^n (x_i - x'_i) b_i = 0$, und nach der Folgerung 5.1 gilt damit $x_i = x'_i$ für $i = 1, \dots, n$, w. z. b. w.

Wir stellen nun einige Aussagen über Teilräume bezüglich ein und desselben Vektorraumes (V, K, φ) bereit.

Satz 5.3. *Ist $(T_i)_{i \in I}$ eine beliebige Folge von Teilräumen, so ist ihr Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} T_i$ ein Teilraum.*

Beweis. Mit $a, b \in \bigcap_{i \in I} T_i$ ist $a, b \in T_i$ und damit $a + b \in T_i$ für alle $i \in I$, d. h. $a + b \in \bigcap_{i \in I} T_i$. Ferner ist für alle Teilräume T_i und $x \in K$ noch $xa \in T_i$; demnach gilt auch $xa \in \bigcap_{i \in I} T_i$. Somit sind die Teilraumbedingungen erfüllt, w. z. b. w.

Hilfssatz 5.4. *Für $S \subseteq V$ ist \bar{S} der Durchschnitt aller Teilräume T von V , die S enthalten. Folglich gilt $\bar{S} = S$, falls S selbst Teilraum ist.*

(Beweis als Aufgabe!)

Für $S_1, S_2 \subseteq V$ heißt $S_1 + S_2 := \{\xi: \xi = a_1 + a_2; a_1 \in S_1, a_2 \in S_2\}$ die *Summe von S_1 und S_2* . Sind insbesondere S_1, S_2 Teilräume und $S_1 \cap S_2 = \{0\}$, so wird $S_1 + S_2$ die *direkte Summe von S_1 und S_2* genannt und mit $S_1 \oplus S_2$ bezeichnet. An Hand der Teilraumkriterien erkennt man leicht, daß mit S_1 und S_2 auch $S_1 + S_2$ Teilraum ist.

Satz 5.5. *Jede Basis eines Teilraumes T eines endlichdimensionalen Vektorraumes V kann zu einer Basis von V ergänzt werden.*

Zusatz. *Falls T echter Teilraum ist, gilt $\dim T < \dim V$.*

Beweis. Es sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V und B' eine Basis von T . Ist $b_1 \notin \overline{B'}$, so sei $B'_1 := B' \cup \{b_1\}$, andernfalls sei $B'_1 := B'$. Offenbar ist B'_1 linear unabhängig. Entsprechend sei $B'_2 := B'_1 \cup \{b_2\}$, falls $b_2 \notin \overline{B'_1}$ ist; ansonsten sei $B'_2 := B'_1, \dots$

¹⁾ Eigentlich müßte man „geordnete“ Basis sagen, weil wir hier neben der Eigenschaft, daß $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis ist, noch die Reihenfolge der Vektoren zu beachten haben.

So gelangt man nach endlich vielen Schritten zu einer linear unabhängigen Menge B'_n , für die $B \subseteq \overline{B'_n}$ und folglich $V = \overline{B} \subseteq \overline{B'_n} \subseteq V$, d. h. $\overline{B'_n} = V$ gilt.

Wenn T echter Teilraum von V ist, gilt $\overline{B'} = T \subset V = \overline{B'_n}$ und somit $B' \neq B'_n$. Da nach Konstruktion $B' \subseteq B'_n$ ist, gilt $B' \subset B'_n$ und folglich $\dim T = |B'| < |B'_n| = \dim V$, w. z. b. w.

Satz 5.6. Für Teilräume S und T eines endlichdimensionalen Raumes V gilt die Dimensionsformel

$$\dim(S + T) + \dim(S \cap T) = \dim S + \dim T.$$

Beweis. Nach dem Satz 5.3 ist $S \cap T$ ein Teilraum; es sei $A = (a_1, \dots, a_l)$ eine Basis von $S \cap T$. Diese kann nach dem Satz 5.5 zu Basen $B = (a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_m)$ und $C = (a_1, \dots, a_l, c_1, \dots, c_n)$ von S bzw. T ergänzt werden.

Wir zeigen zunächst, daß $B \cup C$ eine Basis von $S + T$ ist. Um die lineare Unabhängigkeit von $B \cup C$ zu beweisen, betrachten wir

$$\left(\sum_{i=1}^l x_i a_i + \sum_{j=1}^m y_j b_j \right) + \sum_{k=1}^n z_k c_k = 0.$$

Aus

$$\xi := \sum_{i=1}^l x_i a_i + \sum_{j=1}^m y_j b_j = - \sum_{k=1}^n z_k c_k$$

folgt $\xi \in S \cap T$. Da sich nach Satz 5.2 die Vektoren aus $S \cap T$ eindeutig durch die Vektoren der Basis A darstellen lassen, muß auf Grund der linearen Unabhängigkeit von B und C sowohl $y_j = 0$ als auch $z_k = 0$ und damit auch $x_i = 0$ gelten. $B \cup C$ ist also linear unabhängig. — Andererseits gilt $\overline{B \cup C} = S + T$. Denn zu $\xi \in S + T$ gibt es Elemente $s \in S$ und $t \in T$ mit $\xi = s + t$ und Elemente $s_1, \dots, s_l, s'_1, \dots, s'_m, t_1, \dots, t_l, t'_1, \dots, t'_n \in K$ mit

$$s = \sum_{\lambda=1}^l s_\lambda a_\lambda + \sum_{\mu=1}^m s'_\mu b_\mu, \quad t = \sum_{\lambda=1}^l t_\lambda a_\lambda + \sum_{\nu=1}^n t'_\nu c_\nu.$$

Folglich ist

$$\xi = \sum_{\lambda=1}^l (s_\lambda + t_\lambda) a_\lambda + \sum_{\mu=1}^m s'_\mu b_\mu + \sum_{\nu=1}^n t'_\nu c_\nu \in \overline{B \cup C}.$$

Da $A = B \cap C$ eine Basis von $S \cap T$ und $B \cup C$ eine Basis von $S + T$ ist, gilt

$$\dim(S + T) + \dim(S \cap T) = (l + m + n) + l = \dim S + \dim T,$$

w. z. b. w.

Nach dem Satz 5.6 gilt offensichtlich

Satz 5.7. Für Teilräume S, T eines endlichdimensionalen Raumes V gilt

$$\dim S \oplus T = \dim S + \dim T.$$

Von struktureller und praktischer Bedeutung ist

Satz 5.8 (Isomorphiesatz). *Jeder n -dimensionale Vektorraum V über einem Körper K ist isomorph dem n -dimensionalen Koordinatenraum über K .*

Beweis. Es sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V . Die Abbildung

$$\beta: \xi = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n \rightarrow (x_1, \dots, x_n) \in K^n$$

ist wegen 5.2 eine Bijektion von V auf K^n . Es bleibt nun noch zu zeigen, daß β bezüglich $+$ operationstreu und mit φ verträglich ist. In der Tat ist

$$\begin{aligned}\beta(\xi + \eta) &= \beta \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) b_i = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ &= (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = \beta\xi + \beta\eta, \\ \beta(t\xi) &= \beta \sum_{i=1}^n (tx_i) b_i = (tx_1, \dots, tx_n) = t(x_1, \dots, x_n) = t(\beta\xi),\end{aligned}$$

w. z. b. w.

Demnach ist ein endlichdimensionaler Vektorraum bis auf Isomorphie eindeutig durch den (Skalar-)Körper K und die Dimension n bestimmt.

Es sei (V, K, φ) ein Vektorraum. Eine eindeutige Abbildung α von V auf sich, eine *Transformation* von V , heißt *lineare Transformation des Vektorraumes* genau dann, wenn für alle $a, b \in V$ und $x \in K$ Linearität besteht:

$$(1) \quad \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b \quad (\text{Additivität}),$$

$$(2) \quad \alpha(xa) = x(\alpha a) \quad (\text{Homogenität}).$$

Satz 5.9. *Die linearen Transformationen eines Vektorraumes V bilden (mit der Nacheinanderausführung als Verknüpfung) eine Gruppe.¹⁾*

Beweis. Sind α, β lineare Transformationen eines Vektorraumes V , dann ist $\alpha\beta$ eine Transformation mit

$$\begin{aligned}\alpha\beta(a + b) &= \beta(\alpha(a + b)) = \beta(\alpha a + \alpha b) = \beta(\alpha a) + \beta(\alpha b) = (\alpha\beta)a + (\alpha\beta)b, \\ \alpha\beta(xa) &= \beta(x(\alpha a)) = x(\beta(\alpha a)) = x((\alpha\beta)a)\end{aligned}$$

für alle $a, b \in V$ und $x \in K$, d. h., $\alpha\beta$ ist linear.

Die identische Abbildung ι von V auf sich ist offenbar eine lineare Transformation, die $\alpha\iota = \alpha = \iota\alpha$ für alle linearen Transformationen α von V erfüllt.

Schließlich besitzt jede lineare Transformation α eine inverse Transformation α^{-1} mit

$$\begin{aligned}\alpha^{-1}(a + b) &= \alpha^{-1}((\alpha^{-1}\alpha)a + (\alpha^{-1}\alpha)b) = \alpha^{-1}(\alpha(\alpha^{-1}a) + \alpha(\alpha^{-1}b)) \\ &= \alpha^{-1}(\alpha(\alpha^{-1}a + \alpha^{-1}b)) = \alpha^{-1}a + \alpha^{-1}b\end{aligned}$$

¹⁾ In J. DIEUDONNÉ, La géométrie des groupes classiques, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1955, wird diese Gruppe, die *lineare Gruppe*, mit $GL_n(K)$ bezeichnet.

und

$$\begin{aligned}\alpha^{-1}(x\mathbf{a}) &= \alpha^{-1}(x(\alpha^{-1}\alpha)\mathbf{a}) = \alpha^{-1}(x(\alpha(\alpha^{-1}\mathbf{a}))) = \alpha^{-1}(\alpha(x(\alpha^{-1}\mathbf{a}))) \\ &= x(\alpha^{-1}\mathbf{a})\end{aligned}$$

für alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ und $x \in K$, d. h., α^{-1} ist linear, w. z. b. w.

Hilfssatz 5.10. Ist α eine lineare Transformation eines Vektorraumes V , so gilt

- (a) $\alpha\mathbf{a} = \mathbf{0}$ genau dann, wenn $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ist.
 - (b) Ist $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ linear unabhängig, so auch $\{\alpha\mathbf{b}_1, \dots, \alpha\mathbf{b}_n\}$.
 - (c) Ist $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ eine Basis von V , so gilt für $\alpha B := (\alpha\mathbf{b}_1, \dots, \alpha\mathbf{b}_n)$
- $$(\alpha\mathbf{x})_B = (\alpha\mathbf{x})_{\alpha B}$$
- für alle $\mathbf{x} \in V$.

Beweis. Ist $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, so gilt $\alpha\mathbf{a} = \alpha(0\mathbf{a}) = 0(\alpha\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. Umgekehrt folgt nun aus $\alpha\mathbf{a} = \mathbf{0}$ zwangsläufig $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, da α bijektiv ist und bereits $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ gilt.

Zum Beweis von (b) gehen wir von

$$x_1(\alpha\mathbf{b}_1) + \dots + x_n(\alpha\mathbf{b}_n) = \mathbf{0}$$

aus. Diese Gleichung gilt wegen

$$x_1(\alpha\mathbf{b}_1) + \dots + x_n(\alpha\mathbf{b}_n) = \alpha(x_1\mathbf{b}_1 + \dots + x_n\mathbf{b}_n)$$

und (a) dann und nur dann, wenn $x_1\mathbf{b}_1 + \dots + x_n\mathbf{b}_n = \mathbf{0}$ ist. Auf Grund der linearen Unabhängigkeit von $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ folgt nach 5.1 aus der letzten Gleichung $x_1 = \dots = x_n = 0$. Also ist auch $\{\alpha\mathbf{b}_1, \dots, \alpha\mathbf{b}_n\}$ linear unabhängig. Damit ist (b) bewiesen.

Demnach ist mit B auch $\alpha B = (\alpha\mathbf{b}_1, \dots, \alpha\mathbf{b}_n)$ eine Basis von V . Überdies gilt

$$\alpha\mathbf{x} = \alpha(x_1\mathbf{b}_1 + \dots + x_n\mathbf{b}_n) = x_1(\alpha\mathbf{b}_1) + \dots + x_n(\alpha\mathbf{b}_n)$$

für alle $\mathbf{x} \in V$ und damit die Behauptung (c), w. z. b. w.

Satz 5.11. Ist V ein n -dimensionaler Vektorraum mit der Basis $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$, so gibt es zu jeder linearen Transformation α von V eine (und nur eine) n -reihige reguläre Matrix A (über K) derart, daß für alle $\mathbf{x} \in V$ die Matrizengleichung

$$(\alpha\mathbf{x})_B^T = A(\mathbf{x})_B^T$$

gilt.

Umgekehrt stiftet jede n -reihige Matrix A vermöge dieser Matrizengleichung bezüglich B eine lineare Transformation α von V .

Beweis. Jeder Vektor $\alpha\mathbf{b}_k$ ($k = 1, \dots, n$) läßt sich nach 5.2 in eindeutiger Weise in der Form

$$\alpha\mathbf{b}_k = \sum_{i=1}^n a_{ik}\mathbf{b}_i$$

mit $a_{ik} \in K$ darstellen. Auf Grund von 5.10(c) ist für $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n x_k\mathbf{b}_k$

$$\alpha\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n x_k(\alpha\mathbf{b}_k) = \sum_{k=1}^n x_k \left(\sum_{i=1}^n a_{ik}\mathbf{b}_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k \right) \mathbf{b}_i.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Basisdarstellung von $\alpha\xi$ muß $\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k$ die i -te Koordinate von $\alpha\xi$ sein. Also ist in der Tat

$$(\alpha\xi)_B^T = A(\xi)_B^T \quad \text{für } A := (a_{ik}) \text{ und alle } \xi \in V.$$

Die Regularität von A ergibt sich daraus, daß nach 5.10(b) auch $\{\alpha b_1, \dots, \alpha b_n\}$ linear unabhängig ist und die Koordinaten von αb_k ($k = 1, \dots, n$) aber gerade die k -te Spalte von A bilden. Es ist also der (Spalten-)Rang von A gleich n .

Die Umkehrung läßt sich jetzt einfach bestätigen.

Die Matrix A ist eindeutig, denn aus $A(\xi)_B^T = A'(\xi)_B^T$ für alle $\xi \in V$ folgt über $A(b_k)_B^T = A'(b_k)_B^T$ für $k = 1, \dots, n$ bereits $A = A'$, w. z. b. w.

Satz 5.12.

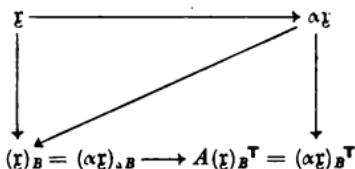
- (a) Das Produkt $\alpha\beta$ zweier linearer Transformationen α und β wird durch das Produkt BA der zugehörigen Matrizen dargestellt.
- (b) Sind $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $B' = (b'_1, \dots, b'_n)$ Basen von V , so gibt es eine lineare Transformation α mit $\alpha B = (\alpha b_1, \dots, \alpha b_n) = B'$ (Ergänzung zu 5.10(c)).
- (c) Jede lineare Transformation $(\alpha\xi)_B^T = A(\xi)_B^T$ kann als eine Koordinatentransformation interpretiert werden, d. h., es gibt eine Basis B' von V mit $A(\xi)_B^T = (\xi)_{B'}^T$ für alle $\xi \in V$. Umgekehrt gibt es zu jeder Koordinatentransformation $(\xi)_B \rightarrow (\xi)_{B'}$ eine lineare Transformation α von V mit $(\alpha\xi)_B = (\xi)_{B'}$.
- (d) Sind A und A' die zu einer linearen Transformation α gehörigen Matrizen bezüglich der Basen B und B' und ist bezüglich B die Matrix C diejenige lineare Transformation, die B in B' überführt, so gilt

$$A' = C^{-1}AC.$$

Beweis. Den Beweis von (a) überlassen wir dem Leser als Aufgabe 3.

Entsprechend dem Beweis von 5.11 seien a_{ik} diejenigen Elemente aus K , die durch $b'_k = \sum_{i=1}^n a_{ik}b_i$ ($k = 1, \dots, n$) mit $b_i \in B$ und $b'_k \in B'$ bestimmt sind. Auf Grund der linearen Unabhängigkeit von B' ist $A := (a_{ik})$ regulär; folglich gibt es nach 5.11 eine lineare Transformation α mit $(\alpha\xi)_B^T = A(\xi)_B^T$, und diese leistet nun gerade $\alpha B = B'$. Damit ist (b) bewiesen.

Zum Nachweis von (c) und (d) stellen wir bisherige Ergebnisse der Sätze 5.10(c) und 5.11 in folgendem Diagramm zusammen:



Mit $\alpha^{-1}B = (\alpha^{-1}b_1, \dots, \alpha^{-1}b_n)$ ist demnach

$$A(\xi)_B^T = (\alpha\xi)_B^T = (\alpha^{-1}(\alpha\xi))_{\alpha^{-1}B}^T = (\xi)_{\alpha^{-1}B}^T,$$

d. h., $B' := \alpha^{-1}B$ leistet das Verlangte. Umgekehrt gibt es nach (b) zu B und B' eine lineare Transformation α mit $\alpha B' = B$, und es gilt

$$(\alpha\xi)_B^T = (\alpha^{-1}(\alpha\xi))_{\alpha^{-1}B}^T = (\xi)_{B'}^T.$$

Damit ist (c) bewiesen.

Die Behauptung (d) folgt schließlich aus

$$\begin{aligned} C^{-1}AC(\xi)_{B'}^T &= C^{-1}A(C(\xi)_{B'}^T) = C^{-1}A(\xi)_B^T = C^{-1}(\alpha\xi)_B^T \\ &= (\alpha\xi)_{B'}^T = A'(\xi)_{B'}^T \end{aligned}$$

für alle $\xi \in V$, w. z. b. w.

Aufgaben

1. Man beweise, daß in einem Vektorraum über einem beliebigen Körper K die Regeln

$$0a = 0, \quad x0 = 0 \quad \text{und} \quad (-x)a = -(xa) = x(-a)$$

für alle $x \in K$ und Vektoren a gelten.

2. Man beweise den Hilfssatz 5.4.

3. Man beweise die Aussage 5.12(a).

5.1.2. Affine Räume

Aufbauend auf den Begriff des Vektorraumes über einem Körper stellen wir hier in Kürze affine Räume und einige grundlegende Beziehungen in ihnen bereit. In Kapitel 3 hatten wir mit Punkten und Vektoren gearbeitet. $P + a$ bedeutet die Anwendung eines Schubvektors (einer Verschiebung) auf einen Punkt, die einen Punkt ergibt; diese „Addition“ ist eine Abbildung, die jedem Paar (P, a) einen Punkt zuordnet. Zur Erklärung des affinen Raumes gehen wir hier von einigen Eigenschaften dieser Addition aus, die wir in Abschnitt 3.1.3c) kennengelernten. Es wird ein Vektorraum V und die Existenz einer nicht leeren (Punkt-)Menge \mathfrak{P} sowie einer Abbildung

$$+: \mathfrak{P} \times V \rightarrow \mathfrak{P}$$

vorausgesetzt. Das Tripel $(V, \mathfrak{P}, +)$ heißt *affiner Raum* (über K) genau dann, wenn gilt:

- (1) Zwei Elementen $P, Q \in \mathfrak{P}$ gibt es genau einen Vektor $a \in V$ mit $P + a = Q$.
- (2) Es gilt $(P + a) + b = P + (a + b)$ für alle $P \in \mathfrak{P}$ und $a, b \in V$.

Die Elemente von \mathfrak{P} heißen *Punkte*. Sind P und Q Punkte, dann wird der durch $P + a = Q$ eindeutig bestimmte Vektor a — wie in Kapitel 3 — mit $v(PQ)$ bezeichnet.

Hilfssatz 5.13. Für alle $P, Q \in \mathfrak{P}$ und $a, b \in V$ gilt

- (a) $P + a = P$ genau dann, wenn $a = 0$ ist;
- (b) $P + a = Q$ genau dann, wenn $P = Q + (-a)$ ist;
- (c) $v((P + a)(P + b)) = b - a$.

Beweis. Zu jedem Punkt P gibt es genau einen Vektor a mit $P + a = P$. Somit gilt

$$P + 0 = (P + a) + 0 = P + (a + 0) = P.$$

Aus $P + a = P$ und $P + 0 = P$ folgt $a = v(P) = 0$.

Zum Beweis von (b) gehen wir zunächst von $P + a = Q$ aus. Dann ist nach (a)

$$Q + (-a) = (P + a) + (-a) = P + 0 = P.$$

Analog zeigt man die Umkehrung.

Schließlich ergibt sich (c) aus $(P + a) + (b - a) = P + (a + (b - a)) = P + b$, w. z. b. w.

Eine Reihe von Begriffsbildungen und Aussagen für affine Räume ergeben sich durch einfache Übertragung entsprechender Begriffe für die zugrunde liegenden Vektorräume.

Der affine Raum $(V, \mathfrak{P}, +)$ heißt *n-dimensional* genau dann, wenn V *n*-dimensional ist.

Für einen *n*-dimensionalen affinen Raum $(V, \mathfrak{P}, +)$ heißt $(O; b_1, \dots, b_n)$ mit $O \in \mathfrak{P}$ und $b_1, \dots, b_n \in V$ eine *Basis* genau dann, wenn (b_1, \dots, b_n) eine Basis von V ist.

Aus 5.2 folgt unmittelbar

Satz 5.14 (Darstellungssatz für Punkte). Ist $(O; b_1, \dots, b_n)$ eine Basis des affinen Raumes $(V, \mathfrak{P}, +)$, so besitzt jeder Punkt P eine Darstellung

$$P = O + x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$$

mit eindeutig bestimmtem *n*-Tupel $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$.

Dabei heißen x_1, \dots, x_n die *Koordinaten von P bezüglich der Basis $(O; b_1, \dots, b_n)$* .

Bezüglich einer festen Basis werden mitunter P und (x_1, \dots, x_n) identifiziert.

Es sei $(V, \mathfrak{P}, +)$ ein affiner Raum. Eine eindeutige Abbildung α von \mathfrak{P} auf sich heißt *affine Transformation* genau dann, wenn α' mit $\alpha'(v(PQ)) := v(\alpha'P\alpha'Q)$ eine lineare Transformation von V ist.

Es sei M eine Menge von Vektoren eines affinen Raumes. Dann setzen wir für einen beliebigen Punkt P

$$P + M := \{X: v(PX) \in M\}.$$

Hilfssatz 5.15. Ist T ein Teilraum des Vektorraumes eines affinen Raumes und ist $Q \in P + T$ für Punkte P, Q , so gilt $P + T = Q + T$.

¹⁾ Man nennt $P + M$ auch *Orbit* von P bezüglich M . (Vgl. dazu auch Abschnitt 2.2.3.)

Beweis. Nach Voraussetzung ist $v(PQ) \in T$ und damit $v(QP) = -v(PQ) \in T$. Es sei nun $X \in P + T$. Dann gilt $v(PX) \in T$ und damit $v(QX) = v(QP) + v(PX) \in T$, d. h. $X \in Q + T$. Die Umkehrung ergibt sich völlig entsprechend, w. z. b. w.

$P + T$ heißt *Teilraum* oder *Unterraum* des affinen Raumes $(V, \mathfrak{P}, +)$ genau dann, wenn T Teilraum von V und $P \in \mathfrak{P}$ ist. Sonderfälle sind die *trivialen Teilräume* $\{P\} = P + \{0\}$ und $\mathfrak{P} = P + V$. Unter der *Dimension des Teilraumes* $P + T$ wird die Dimension von T verstanden.

Ein Teilraum $P + T$ des affinen Raumes $(V, \mathfrak{P}, +)$ mit $n := \dim V \geq 1$ heißt *Gerade*, *Ebene* bzw. *Hyperebene* genau dann, wenn $\dim T = 1$, $\dim T = 2$ bzw. $\dim T = n - 1$ gilt.

Zur Rechtfertigung der Bezeichnung Teilraum beweisen wir den

Satz 5.16. *Es sei $\mathfrak{P}' = P + V'$ ein Teilraum des affinen Raumes $(V, \mathfrak{P}, +)$ und $+'$ die Einschränkung von $+$ auf $\mathfrak{P}' \times V'$. Dann ist $(V', \mathfrak{P}', +')$ ein affiner Raum.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist V' Teilraum von V und damit selbst Vektorraum.

Zum Beweis von (1) sei $Q, R \in \mathfrak{P}' = P + V'$. Nach 5.15 gilt nun $R \in Q + V'$, und folglich ist $v(QR)$ ein Vektor aus V' mit $Q + v(QR) = R$. Damit ist die Existenzaussage von (1) bewiesen. Es gilt auch die Einzigkeit, denn aus $Q + 'a = Q + 'b$ mit $a, b \in V'$ folgt nach Voraussetzung $Q + a = Q + b$ und daraus weiter $a = b$ auf Grund der Eindeutigkeitsaussage in (1) für $(V, \mathfrak{P}, +)$. — Entsprechend überträgt sich die Eigenschaft (2) für $(V, \mathfrak{P}, +)$ auf $(V', \mathfrak{P}', +')$; w. z. b. w.

Hilfssatz 5.17. *Sind $P + S$ und $Q + T$ Teilräume ein und desselben affinen Raumes, so gilt*

$$P + S = Q + T \Rightarrow S = T.$$

Beweis. Nach dem Satz 5.16 ist leicht einsichtig, daß

$$S = \{v(XY) : X, Y \in P + S\}$$

für alle Teilräume $P + S$ gilt. Damit folgt aus $P + S = Q + T$ sofort $S = T$, w. z. b. w.

Wir wollen uns nun noch kurz einigen *Lagebeziehungen zwischen Teilräumen* ein und desselben affinen Raumes $(V, \mathfrak{P}, +)$ zuwenden. Dabei benutzen wir die übliche geometrische Sprechweise.

Satz 5.18 (Satz über das Verbinden). *Je $k + 1$ Punkte aus \mathfrak{P} mit $1 \leq k \leq \dim V$, die nicht in ein und demselben $(k - 1)$ -dimensionalen Teilraum liegen, sind in genau einem k -dimensionalen Teilraum enthalten.*

Daraus ergeben sich die aus dem Anschauungsraum bekannten

Folgerungen. *Durch je zwei verschiedene Punkte eines Teilraumes $P + T$ mit $\dim T \geq 1$ geht genau eine Gerade des Teilraumes¹⁾. Durch je drei nicht kollineare*

¹⁾ Auf Grund dieser Eigenschaft werden die Unterräume eines affinen Raumes auch *lineare Unterräume* genannt.

Punkte eines Teilraumes $P + T$ mit $\dim T \geq 2$ geht genau eine Ebene des Teilraumes.

Beweis. Existenz. Erfüllen die Punkte P_0, P_1, \dots, P_k die Voraussetzungen, so bilden wir $a_i := v(P_0 P_i)$ für $i = 1, \dots, k$. Der Teilraum $P_0 + U$ mit $U := \overline{\{a_1, \dots, a_k\}}$ ist k -dimensional, weil sonst $P_0, \dots, P_k \in P_0 + U$ mit $\dim U < k$ im Widerspruch zur Voraussetzung wäre.

Eindeutigkeit. Aus $P_0, P_1, \dots, P_k \in Q + U'$ für einen k -dimensionalen Teilraum $Q + U'$ folgt $P_1, \dots, P_k \in P_0 + U'$ nach dem Hilfssatz 5.15 und somit $a_1, \dots, a_k \in U'$. Mit $U = \overline{\{a_1, \dots, a_k\}} = U'$ wegen der Voraussetzung $\dim U' = k$ gilt schließlich $P_0 + U = P_0 + U' = Q + U'$, w. z. b. w.

Satz 5.19 (Satz über das Schneiden). *Sind $P + S$ und $Q + T$ Teilräume eines affinen Raumes mit nicht leerem Durchschnitt, so ist $P + S \cap Q + T$ selbst ein Teilraum.*

Beweis. Es sei $R \in P + S \cap Q + T$. Zunächst ist $P + S = R + S$ und $Q + T = R + T$ nach Hilfssatz 5.15. Weiter erkennt man leicht, daß

$$R + S \cap R + T = R + (S \cap T)$$

gilt. Nach Satz 5.2 ist $S \cap T$ Teilraum und damit auch $P + S \cap Q + T$, w. z. b. w.

Für affine Räume ist folgende Relation charakteristisch.

In einem affinen Raum heißt ein Teilraum $P + S$ parallel zu einem Teilraum $Q + T$ – in Zeichen: $P + S \parallel Q + T$ – genau dann, wenn $S \subseteq T$ oder $T \subseteq S$ gilt.

Die Parallelität von Teilräumen ist offensichtlich reflexiv und symmetrisch, im allgemeinen jedoch nicht transitiv (Aufgabe 1). Es gilt jedoch folgende Transitivitätsaussage für (endlichdimensionale) Teilräume:

Aus $P_1 + S_1 \parallel P_2 + S_2$ und $P_2 + S_2 \parallel P_3 + S_3$ sowie $\dim S_1 \leq \dim S_2 \leq \dim S_3$ folgt $P_1 + S_1 \parallel P_3 + S_3$ (Beweis als Aufgabe 2).

Offenbar gilt der

Satz 5.20. *Bei affinen Transformationen ist die Parallelität zwischen Teilräumen invariant.*

Satz 5.21 (Euklidische Parallelenaussage). *Durch jeden Punkt Q des affinen Raumes $(V, \mathfrak{P}, +)$ geht für $1 \leq k \leq \dim V$ genau ein k -dimensionaler Teilraum, der zu einem vorgegebenen k -dimensionalen Teilraum $P + T$ parallel ist.*

Folgerungen. Zu jedem Punkt P und jeder Geraden g gibt es genau eine Gerade h mit $h \ni P$ und $h \parallel g$. Zu jedem Punkt P und jeder Ebene ϵ gibt es genau eine Ebene η mit $\eta \ni P$ und $\eta \parallel \epsilon$.

Beweis. Offenbar ist $Q + T$ ein zu $P + T$ paralleler k -dimensionaler Teilraum durch Q .

Zum Nachweis der Einzigkeit sei $Q' + T'$ ein gleichartiger Teilraum. Da nun $T' \subseteq T$ oder $T \subseteq T'$ und außerdem $\dim T' = \dim T$ ist, muß $T = T'$ sein. Folglich ist $Q' + T' = Q + T$ nach dem Hilfssatz 5.15, w. z. b. w.

Die vierdimensionalen affinen Räume sind in Hinblick auf die Minkowskische Geometrie der speziellen Relativitätstheorie von besonderem Interesse. Deshalb geben wir abschließend folgende Übersicht, in der die mit * gekennzeichneten Fälle im Anschauungsraum nicht auftreten.

Satz 5.22. *In einem vierdimensionalen affinen Raum sind folgende Lagebeziehungen zwischen Geraden f, g , Ebenen ε, η und Hyperebenen Λ, H möglich:*

	g	ε	H
f	1. $f = g (\Rightarrow f \parallel g)$ 2. $f \cap g = \{P\}$ 3. $f \cap g = \emptyset \wedge f \parallel g$ 4. $f \cap g = \emptyset \wedge f \nparallel g$	1. $f \subset \varepsilon (\Rightarrow f \parallel \varepsilon)$ 2. $f \cap \varepsilon = \{P\}$ 3. $f \cap \varepsilon = \emptyset \wedge f \parallel \varepsilon$ 4*. $f \cap \varepsilon = \emptyset \wedge f \nparallel \varepsilon$	1. $f \subset H (\Rightarrow f \parallel H)$ 2. $f \cap H = \{P\}$ 3. $f \cap H = \emptyset (\Rightarrow f \parallel H)$
η		1. $\varepsilon = \eta (\Rightarrow \varepsilon \parallel \eta)$ 2. $\varepsilon \cap \eta = h$ 3*. $\varepsilon \cap \eta = \{P\}$ 4. $\varepsilon \cap \eta = \emptyset \wedge \varepsilon \parallel \eta$ 5*. $\varepsilon \cap \eta = \emptyset \wedge \varepsilon \nparallel \eta$	1. $\eta \subset H (\Rightarrow \eta \parallel H)$ 2. $\eta \cap H = h$ 3. $\eta \cap H = \emptyset (\Rightarrow \eta \parallel H)$
Λ			1. $\Lambda = H (\Rightarrow \Lambda \parallel H)$ 2. $\Lambda \cap H = \zeta$ 3. $\Lambda \cap H = \emptyset (\Rightarrow \Lambda \parallel H)$

Beweisbeispiel. Wir untersuchen die möglichen Lagebeziehungen zwischen der Geraden

$$f = \{P : P = Q + t\mathbf{a}; t \in K\}$$

und einer Ebene

$$\varepsilon = \{P : P = R + s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2; s_1, s_2 \in K\}.$$

Die gemeinsamen Punkte ergeben sich aus den Lösungen der Vektorgleichung

$$t\mathbf{a} - s_1\mathbf{a}_1 - s_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{v}(QR)$$

mit den Variablen t , s_1 und s_2 . Es sei

$$r_0 := \dim \overline{\{\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}} \quad \text{und} \quad r_1 := \dim \overline{\{\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{v}(QR)\}}.$$

Wegen $\dim V = 4$, $\dim \overline{\{a\}} = 1$, $\dim \overline{\{a_1, a_2\}} = 2$ und $r_0 \leq r_1 \leq r_0 + 1$ sind folgende Paarungen möglich:

1. $r_0 = 2, r_1 = 2;$
2. $r_0 = 3, r_1 = 3;$
3. $r_0 = 2, r_1 = 3;$
4. $r_0 = 3, r_1 = 4,$

aus denen sich nun die in der Tabelle angegebenen Lagebeziehungen ergeben. Denn $r_0 \neq r_1$ ist äquivalent mit $v(QR) \notin \overline{\{a, a_1, a_2\}}$, d. h. äquivalent damit, daß die Vektorgleichung keine Lösung besitzt, also $f \cap \varepsilon = \emptyset$ ist. Für $r_0 = r_1$ ist nach dem Satz 5.19 dann $f \cap \varepsilon$ ein Teilraum; seine Dimension ist die von $\overline{\{a\}} \cap \overline{\{a_1, a_2\}}$, w. z. b. w.

Aufgaben

1. Man gebe im dreidimensionalen affinen Raum über dem Körper der reellen Zahlen ein Beispiel dafür an, daß die Parallelität zwischen Teilräumen (etwa Geraden und Ebenen) nicht transitiv ist.
2. Man beweise folgende Transitivitätseigenschaft der Parallelität für (endlichdimensionale) Teilräume:
Aus $P_1 + S_1 \parallel P_2 + S_2$ und $P_2 + S_2 \parallel P_3 + S_3$ und $\dim S_1 \leq \dim S_2 \leq \dim S_3$ folgt $P_1 + S_1 \parallel P_3 + S_3$.
3. Man beweise die im Satz 5.22 angegebenen Lagemöglichkeiten zwischen zwei Ebenen ε und η .
4. In den Abschnitten 1.1.1 und 1.2.3 wurden bereits Parallelitäten definiert, die allerdings erst in der euklidischen Geometrie zu gewohnten Parallelitätsaussagen führen. Man zeige, daß dann in diesen Fällen Übereinstimmung mit der in diesem Abschnitt gegebenen Definition besteht.

5.1.3. Symmetrische Bilinearform und metrischer Vektorraum

Die folgende Begriffsbildung kann man als Verallgemeinerung des Skalarprodukts von Vektoren ansehen, wie wir es von der euklidischen Geometrie her kennen (siehe Abschnitt 3.1.3b). Bei der folgenden Definition gehen wir von den Eigenschaften des Skalarprodukts aus, die in Satz 3.21 angegeben wurden und sich auf den Fall eines beliebigen Körpers übertragen lassen.

Es sei V ein Vektorraum über einem (kommutativen)¹⁾ Körper K und f eine Abbildung von $V \times V$ in K . Für $f(a, b)$ wird kürzer ab gesetzt. Nun heißt f *symmetrische*

¹⁾ Bei den bisherigen Darlegungen haben wir von der Kommutativität des zugrunde liegenden Körpers im wesentlichen keinen Gebrauch gemacht; die in den Abschnitten 5.1.1 und 5.1.2 gewählte Darstellung kann für Schiefkörper aufgebaut werden. Symmetrische Bilinearformen (mit $f(V \times V) \neq \{0\}$) existieren allerdings nur in Vektorräumen über kommutativen Körpern, so daß wir in Hinblick auf die Zielstellung dieses Kapitels diese Eigenschaft von vornherein mit vorausgesetzt haben. Später — ab Hilfssatz 5.27 — werden wir noch $2 \cdot 1 = 1 + 1 \neq 0$ ($2 \in \mathbb{N}$; $1, 0 \in K$) voraussetzen (Körper einer Charakteristik $\neq 2$).

Bilinearform (oder *inneres Produkt*) über V genau dann, wenn für alle $a, b, c \in V$ und $x \in K$ gilt:

- (1) $a(b + c) = ab + ac$,
- (2) $(xa)b = x(ab)$,
- (3) $ab = ba$.

Nach (3) folgt aus (1) und (2), daß $f(a, b)$ sowohl für einen festen Vektor a als auch für einen festen Vektor b additiv und transitiv ist; das rechtfertigt die Bezeichnung „Bilinearform“. Die Eigenschaft (3) ist eine Symmetrieforderung.

(V, f) heißt *metrischer Vektorraum* (über K) genau dann, wenn V ein Vektorraum (über K) und f eine symmetrische Bilinearform über V ist.

Jeder Teilraum $V' \subseteq V$ eines metrischen Vektorraumes (V, f) bildet offenbar selbst einen metrischen Vektorraum, wenn man f auf V' einschränkt.

Ist V ein n -dimensionaler Vektorraum, $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V und f eine Bilinearform über V , so erhält man für $\xi = \sum_{i=1}^n x_i b_i$ und $\eta = \sum_{k=1}^n y_k b_k$ auf Grund von (1) und (2) die Darstellung

$$f(\xi, \eta) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i b_i, \sum_{k=1}^n y_k b_k\right) = \sum_{i, k=1}^n x_i y_k f(b_i, b_k) = (\xi)_B F_B (\eta)_B^T,$$

wobei $F_B := (f(b_i, b_k))$ eine n -reihige Matrix ist. Das bedeutet, daß das innere Produkt zweier Vektoren bereits durch das innere Produkt der Basisvektoren bestimmt ist. In dieser Darstellung ist die bekannte Darstellung $\xi \eta = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ für das Skalarprodukt in der euklidischen Geometrie bezüglich einer orthonormierten Basis als Spezialfall enthalten; hier ist $b_i b_k$ gleich 0, falls $i \neq k$, und gleich 1, falls $i = k$ ist. (Vgl. Folgerung 3.21.) Wegen (3) ist F_B offenbar eine symmetrische Matrix.

Umgekehrt bestätigt man durch Rechnung leicht den

Satz 5.23. Ist (f_{ik}) eine n -reihige symmetrische Matrix mit $f_{ik} \in K$, so führt

$$f(\xi, \eta) := \sum_{i, k=1}^n x_i y_k f_{ik}$$

für $\xi = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$, $\eta = y_1 b_1 + \dots + y_n b_n$ zu einer symmetrischen Bilinearform f über V .

Damit ist eine gewisse Übersicht über alle möglichen symmetrischen Bilinearformen über einem n -dimensionalen Vektorraum gegeben.

Satz 5.24. Bei einem Basiswechsel β von $B = (b_1, \dots, b_n)$ zu $B' = \beta B$ gilt

$$F_{B'} = C^T F_B C,$$

wobei C die zur Basistransformation β gehörige Matrix (bezüglich B) ist.

Folgerung. Der Rang von F_B ist unabhängig von der Wahl der Basis.

Beweis. Für Basisvektoren b_i, b_k ($i, k = 1, \dots, n$) aus B gilt (unter Verwendung von 5.12):

$$\begin{aligned} f(\beta b_i, \beta b_k) &= (\beta b_i)_B F_B (\beta b_k)_B^T = (C(b_i)_B^T)^T F_B (C(b_k)_B^T) \\ &= (b_i)_B (C^T F_B C) (b_k)_B^T \end{aligned}$$

und damit

$$F_B = (f(\beta b_i, \beta b_k)) = C^T F_B C.$$

Die Folgerung ergibt sich nun sofort aus $|C| \neq 0$, w. z. b. w.

Ein grundlegender Begriff in metrischen Vektorräumen ist die Orthogonalität.

Ein Vektor a heißt *orthogonal* zu einem Vektor b — in Zeichen: $a \perp b$ — genau dann, wenn $f(a, b) = 0$ ist. Weiterhin sei für Teilmengen S, T von Vektoren

$$S \perp T : \Leftrightarrow \bigwedge_{a \in S} \bigwedge_{b \in T} a \perp b,$$

$$S^\perp := \left\{ \xi : \bigwedge_{a \in S} a \perp \xi \right\}.$$

Hilfssatz 5.25. Sind S und T Vektormengen aus einem metrischen Vektorraum, so gilt

- (a) $S \subseteq T \Rightarrow T^\perp \subseteq S^\perp$,
- (b) $S \subseteq S^{\perp\perp}$,
- (c) $S^{\perp\perp\perp} = S^\perp$,
- (d) S^\perp ist Teilraum,
- (e) $(S + T)^\perp = S^\perp \cap T^\perp$, falls S, T Teilräume sind.

Beweis. Den Beweis für (a) und (b) überlassen wir dem Leser.

Zum Nachweis von (c) ist zunächst $S^\perp \subseteq (S^\perp)^{\perp\perp}$ nach (b); aus $S \subseteq S^{\perp\perp}$ folgt andererseits $(S^{\perp\perp})^\perp \subseteq S^\perp$ nach (a), d. h. $S^{\perp\perp\perp} = S^\perp$.

Sind $\xi, \eta \in S^\perp$ und $t \in K$, so gilt für alle $a \in S$

$$(\xi + \eta) a = \xi a + \eta a = 0 + 0 = 0,$$

$$(t\xi) a = t(\xi a) = t \cdot 0 = 0,$$

d. h., es ist $\xi + \eta \in S^\perp$ und $t\xi \in S^\perp$ und damit S^\perp ein Teilraum.

Die letzte Behauptung ergibt sich daraus, daß wegen $0 \in S, T$

$$\bigwedge_{a \in S} \bigwedge_{b \in T} (a + b) \xi = 0 \Leftrightarrow \bigwedge_{a \in S} a \xi = 0 \wedge \bigwedge_{b \in T} b \xi = 0$$

gilt, w. z. b. w.

Ist T ein Teilraum eines metrischen Vektorraumes V , so heißt $\text{rad } T := T \cap T^\perp$ das *Radikal von T* , insbesondere ist $R := \text{rad } V = V^\perp$. Nach 5.25(d) und 5.3 ist $\text{rad } T$ selbst ein Teilraum.

Ein Teilraum T heißt *regulär* genau dann, wenn $\text{rad } T = \{0\}$ ist; anderenfalls wird T *isotrop* genannt. Insbesondere heißt T *total isotrop* für den Fall, daß $\text{rad } T = T$ ist. Schließlich nennt man einen Vektor a selbst (*echt*) *isotrop* genau dann, wenn $(a \neq 0 \text{ und } a^2 = 0 \text{ ist.}^1)$

Satz 5.26. *In einem n -dimensionalen metrischen Vektorraum V gilt*

$$\text{rang } F_B + \dim R = n.$$

Folgerung. *V ist genau dann regulär, wenn $\text{rang } F_B = n$ ist.*

Beweis. Es sei (a_1, \dots, a_r) eine Basis von R . Diese kann nach dem Satz 5.5 zu einer Basis (a_1, \dots, a_n) von V erweitert werden. Nun ist offenbar $b = \sum_{i=1}^n b_i a_i \in R$ genau dann, wenn

$$(*) \quad 0 = b a_k = \sum_{i=1}^n b_i f_{ik} \quad \text{für } k = 1, \dots, n$$

ist. Fassen wir $(*)$ als lineares Gleichungssystem mit den Variablen b_1, \dots, b_n auf, so ist R sein Lösungsraum und damit nach bekannten Sätzen über die Lösung homogener Gleichungssysteme $\text{rang } F_B = n - \dim R$, w. z. b. w.

Im folgenden setzen wir $2 = 1 + 1 \neq 0$ voraus.

Hilfssatz 5.27. *Jeder nicht total isotrope Teilraum T enthält einen anisotropen Vektor.*

Beweis. Würde $a^2 = 0$ für alle $a \in T$ gelten, so wäre wegen

$$(\xi + \eta)^2 = \xi^2 + \eta^2 + 2\xi\eta$$

und $2 \neq 0$ auch $\xi\eta = 0$ für alle $\xi, \eta \in T$ und damit $T \subseteq T^\perp$, d. h. $\text{rad } T = T \cap T^\perp = T$ im Widerspruch zur Voraussetzung, w. z. b. w.

Hilfssatz 5.28. *In einem n -dimensionalen metrischen Raum V ist stets $\dim \{a\}^\perp \geq n - 1$.*

Beweis. Es sei (a_1, \dots, a_m) eine Basis von $\{a\}^\perp$. Diese kann zu einer Basis (a_1, \dots, a_n) von V fortgesetzt werden. Wäre $m < n - 1$, so folgte für

$$b := (aa_n) a_{n-1} - (aa_{n-1}) a_n$$

zunächst $b \neq 0$, da $aa_n, aa_{n-1} \neq 0$ wegen $a_n, a_{n-1} \notin \{a\}^\perp$ ist. Nun gilt offenbar $ab = 0$, also $b \in \{a\}^\perp$ und damit die widersprüchliche Aussage $a_n \in \overline{\{a_1, \dots, a_{n-1}\}}$. Also gilt $m \geq n - 1$, w. z. b. w.

Satz 5.29. *Ist V ein regulärer n -dimensionaler metrischer Vektorraum und T ein Teilraum, so gilt:*

$$(a) \quad \dim T + \dim T^\perp = n.$$

$$(b) \quad T^{\perp\perp} = T.$$

¹⁾ Für $a \neq 0$ ist $\overline{\{a\}}$ offenbar genau dann isotrop, wenn $a^2 = 0$ gilt.

- (c) $\text{rad } T^\perp = \text{rad } T$.
- (d) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*
- T ist regulär,
 - T^\perp ist regulär,
 - $V = T + T^\perp$,
 - $V = T \oplus T^\perp$.

Folgerung. Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt für Unterräume S, T

$$(S \cap T)^\perp = S^\perp + T^\perp.$$

Beweis. Wir beweisen (a) und (b) gemeinsam induktiv über die Dimension von T und setzen voraus, daß (a) und (b) für $\dim T < k$ gelten. Wir betrachten jetzt einen Teilraum T mit einer Basis (a_1, \dots, a_k) und setzen

$$T_i := \overline{\{a_1, \dots, a_i\}} \quad \text{für } i \leq k.$$

Nach 5.25(e) gilt

$$T_i^\perp = \left(\sum_{j=1}^{i-1} \overline{\{a_j\}} + \overline{\{a_i\}} \right)^\perp = T_{i-1}^\perp \cap \{a_i\}^\perp$$

und damit zunächst $n - k \leq \dim T_k^\perp \leq n - k + 1$, da $\dim \{a_i\}^\perp \geq n - 1$ nach 5.28 und $\dim T_{k-1}^\perp = n - (k - 1)$ nach der Induktionsvoraussetzung ist.

Aus $\dim T^\perp = \dim T_k^\perp = n - k + 1$ folgte $T_{k-1}^\perp \subseteq \{a_k\}^\perp$ und damit nach 5.25(a) und Induktionsvoraussetzung

$$a_k \in \{a_k\}^{\perp\perp} \subseteq T_{k-1}^{\perp\perp} = T_{k-1}$$

im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von (a_1, \dots, a_k) . Somit erhalten wir bereits $\dim T^\perp = n - k$, d. h.

$$(*) \quad \dim T + \dim T^\perp = n.$$

Offensichtlich gilt nach 5.25(b)

$$T \subseteq T^{\perp\perp}.$$

Um noch $T^{\perp\perp} \subseteq T$ zu zeigen, bestimmen wir eine Basis (b_1, \dots, b_n) von V derart, daß (b_{i+1}, \dots, b_n) Basis von T_i^\perp für $i \leq k$ ist; das ist möglich, denn aus $\dim T_i^\perp = n - i$ und $T_{i-1} \subset T_i$ folgt $T_i^\perp \subset T_{i-1}^\perp$ nach 5.25(a), so daß sich eine Basis (b_{k+1}, \dots, b_n) von $T^\perp = T_k^\perp$ nach 5.5 schrittweise zu Basen von $T_{k-1}^\perp, T_{k-2}^\perp, \dots, T_1^\perp, V$ fortsetzen läßt.

Aus der Konstruktion von b_i folgt $b_i \in T_{i-1}^\perp = \{a_1, \dots, a_{i-1}\}^\perp$ und damit $a_1, \dots, a_{i-1} \perp b_i$. Andererseits gilt $a_i b_i \neq 0$, sonst wäre $a_1, \dots, a_i \perp b_i, b_{i+1}, \dots, b_n$ im Widerspruch zu (*). Somit gilt

$$(**) \quad \begin{vmatrix} a_1 b_1 \dots a_1 b_k \\ \vdots \\ a_k b_1 \dots a_k b_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 b_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_k b_k \end{vmatrix} \neq 0.$$

Wir betrachten einen beliebigen Vektor $a_{k+1} \in T^{\perp\perp}$ sowie

$$a := \begin{vmatrix} a_1 & a_1 b_1 & \dots & a_1 b_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k+1} & a_{k+1} b_1 & \dots & a_{k+1} b_k \end{vmatrix}.$$

Offensichtlich gilt $a \perp b_1, \dots, b_k$ und $a \perp b_{k+1}, \dots, b_n$ wegen $a_1, \dots, a_{k+1} \in T^{\perp\perp}$, d. h. $a \in \text{rad } V = \{0\}$.

Wegen (**) gilt jetzt $a_{k+1} \in \overline{\{a_1, \dots, a_k\}} = T$. Damit ist der Beweis von (a) und (b) beendet.

Die Aussage (c) ergibt sich mit Hilfe von (b) sofort durch

$$\text{rad } T^\perp = T^\perp \cap T^{\perp\perp} = T^\perp \cap T = \text{rad } T.$$

Damit ist auch klar, daß die Regularität von T und T^\perp einander bedingen. Schließlich ergibt sich nach (a) und der Dimensionsformel 5.6, daß $T \cap T^\perp = \{0\}$ mit $\dim(T + T^\perp) = n$ äquivalent und damit die Regularität von T mit $V = T + T^\perp$ gleichwertig ist. Aus $V = T + T^\perp$ folgt $T \cap T^\perp = \{0\}$ und somit $V = T \oplus T^\perp$; unter der Voraussetzung $V = T \oplus T^\perp$ gilt $V = T + T^\perp$ trivialerweise.

Die Folgerung ergibt sich nach (b) und 5.2(e):

$$S^\perp + T^\perp = (S^\perp + T^\perp)^{\perp\perp} = (S^{\perp\perp} \cap T^{\perp\perp})^\perp = (S \cap T)^\perp,$$

w. z. b. w.

Das Radikal eines Vektorraumes besteht offenbar nur aus isotropen Vektoren. Enthält es auch alle isotropen Vektoren — im folgenden werden wir noch sehen, daß dies im allgemeinen nicht zutreffen muß —, so heißt die symmetrische Bilinearform f *nulleilig*. Ein regulärer Raum V mit nulleiliger Form f liegt offenbar genau dann vor, wenn

$$a^2 \neq 0 \quad \text{für alle } a \neq 0 \text{ aus } V$$

ist.

Für metrische Vektorräume erhebt sich naheliegenderweise die Frage, inwieweit eine Basis eingeführt werden kann, die einer orthonormierten Basis in der euklidischen Geometrie (wie in Kapitel 3) entspricht. Allgemein läßt sich bereits zeigen:

Satz 5.30. *Jeder n -dimensionale metrische Raum besitzt eine Orthogonalbasis, d. h. eine Basis mit paarweise zueinander orthogonalen Vektoren.*

Beweis. Für total isotrope Vektorräume ist die Behauptung offensichtlich. Für nicht total isotrope Räume führen wir den Beweis induktiv über die Dimension n . Für $n = 1$ ist die Behauptung klar. Sie gelte für alle Räume bis zur Dimension $k \geq 1$. Es sei V ein Raum der Dimension $k + 1$.

Nach 5.27 enthält V einen anisotropen Vektor a . Für ihn gilt $a \notin \{a\}^\perp$ und damit $\dim \{a\}^\perp = k$ vermöge 5.28. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt $\{a\}^\perp$ eine Orthogonalbasis B , also ist $B \cup \{a\}$ eine Orthogonalbasis für V , w. z. b. w.

Für gewisse reguläre Räume lässt sich 5.30 verschärfen zu dem folgenden wichtigen Trägerheitssatz:

Satz 5.31. *In jedem regulären n -dimensionalen metrischen Vektorraum V ($n \geq 1$) über einem angeordneten Körper K , in dem jedes positive Element quadratisch¹⁾ ist, gibt es eine Basis (e_1, \dots, e_n) und eine natürliche Zahl $r \leq n$ derart, daß*

$$(1) \quad e_i e_k = f_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k, \\ 1 & \text{für } i = k \leq r, \\ -1 & \text{für } i = k > r \end{cases}$$

ist; r ist durch die Form f eindeutig bestimmt.

Beweis. Der Raum besitzt nach 5.30 zunächst eine Orthogonalbasis $\{b_1, \dots, b_n\}$, für die auf Grund der Regularität $b_i^2 \neq 0$ ($i = 1, \dots, n$) ist. Nach der Voraussetzung über K existiert $\sqrt{|b_i^2|}$; die Vektoren

$$e_i := \frac{1}{\sqrt{|b_i^2|}} b_i$$

bilden nun in der Tat — gegebenenfalls nach Umnummerierung — eine Basis mit der Eigenschaft (1).

Wir haben nun noch die Eindeutigkeit von r zu zeigen. Zuvor bemerken wir, daß $\xi^2 > 0$ für alle vom Nullvektor verschiedenen Vektoren ξ aus $C := \{e_1, \dots, e_r\}$ gilt; man sagt dafür auch, daß f positiv definit in C ist.

Nach 5.29 ist $C^\perp = \overline{\{e_{r+1}, \dots, e_n\}}$, und in C^\perp ist f negativ definit. Wäre nun $D \oplus D^\perp$ eine weitere Zerlegung von V , bei der f positiv definit in D und negativ definit in D^\perp und o. B. d. A. $s := \dim D < r$ ist, dann wäre

$$\dim C + \dim D^\perp = r + (n - s) > n.$$

Wegen $\dim(C + D^\perp) \leq n$ ergäbe sich daraus nach der Dimensionsformel 5.6 der Widerspruch, daß $\dim(C \cap D^\perp) > 0$ ist und es einen Vektor $\xi \neq 0$ mit $\xi^2 > 0$ (wegen $\xi \in C$) und $\xi^2 < 0$ (wegen $\xi \in D^\perp$) gibt. Also ist r durch die Form f eindeutig bestimmt, w. z. b. w.

Ergänzend sei noch bemerkt, daß man beim Beweis der Eindeutigkeit von r bereits mit der Voraussetzung auskommt, daß -1 sich in K nicht als Quadratsumme darstellen lässt, daß K formal-reell ist.

Gäbe es nämlich neben der Basis (e_1, \dots, e_n) mit der Eigenschaft (1) eine Basis (e'_1, \dots, e'_n) , bei der jedoch $e'_i{}^2 = 1$ für $i \leq s$ und $e'_i{}^2 = -1$ für $i > s$ mit $s \neq r$, o. B. d. A. mit $s < r$ eintritt, so können wir für $C := \{e_1, \dots, e_r\}$ und $D := \{e'_1, \dots, e'_s\}$ wie oben zeigen, daß $\dim(C \cap D^\perp) > 0$ ist. Demnach gäbe es einen Vektor $\xi \neq 0$ mit

$$\xi = \sum_{i=1}^r x_i e_i = \sum_{j=s+1}^n x'_j e'_j,$$

¹⁾ Zu jedem $x > 0$ aus K gibt es ein (und dann auch nur ein) $y > 0$ in K mit $y^2 = x$. Für y setzt man \sqrt{x} .

wobei wenigstens ein x_i und ein x'_i — etwa x_n' — von Null verschieden ist. Daraus folgte nun aber

$$-1 = \left(\frac{x_1}{x_n'} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_r}{x_n'} \right)^2 + \left(\frac{x_{r+1}}{x_n'} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_{n-1}}{x_n'} \right)^2;$$

das widerspricht der Voraussetzung über den Koordinatenkörper.

Bemerkt sei noch, daß ein formal-reeller Körper eine Charakteristik ungleich 2 besitzt, weil aus $1 + 1 = 0$ bereits $-1 = 1 = 1^2$ folgte.

Wird für einen n -dimensionalen metrischen Vektorraum (V, f) die Zahl r gemäß (1) bestimmt und ist $n \leq 2r$, so heißt V ein *metrischer Vektorraum mit dem Index $n - r$* ¹⁾.

In jedem n -dimensionalen Vektorraum mit formal-reellem Koordinatenkörper läßt sich bezüglich jeder natürlichen Zahl $r \leq n \leq 2r$ eine symmetrische Bilinearform so einführen, daß V ein metrischer Vektorraum mit dem Index $n - r$ ist:

$$f(\xi, \eta) := \sum_{i=1}^r x_i y_i - \sum_{i=r+1}^n x_i y_i$$

ist bezüglich einer Basis eine gewünschte Bilinearform, wobei die Voraussetzung über den Koordinatenkörper gewährleistet, daß für jede andere mögliche Basis dieser Art die gleiche Zahl r auftritt.

Ein metrischer Vektorraum mit dem Index 0 bzw. 1 heißt *euklidisch* bzw. *Minkowskisch*. Für einen euklidischen Vektorraum V über einem geordneten Koordinatenkörper ist demnach

$$\xi^2 > 0 \quad \text{für alle } \xi \neq 0 \text{ aus } V$$

charakteristisch. (Vgl. Satz 3.21 (1).)

Abschließend sei noch bemerkt, daß die Einschränkung einer symmetrischen Bilinearform f auf die „Diagonale“ $M := \{(\xi, \xi) : \xi \in V\}$ zu einer *quadratischen Form*

$$q: V \rightarrow K \quad (\xi \mapsto q(\xi) := f(\xi, \xi))$$

führt. Diese Form q bestimmt wegen

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (q(\xi + \eta) - q(\xi) - q(\eta))$$

für alle $\xi, \eta \in V$ ihrerseits die Bilinearform f vollständig.

Affine Räume über einem metrischen Vektorraum werden *metrisch-affine* Räume genannt. Alle bisherigen in affinen Räumen sowie in metrischen Vektorräumen benutzten Begriffe werden in gleicher Weise hier verwendet. Insbesondere werden zwei Teilräume eines metrisch-affinen Raumes zueinander *orthogonal* genannt, wenn dies auf ihre Vektorräume zutrifft. Statt Minkowskischer metrisch-affiner Raum sagen wir kurz *Minkowskischer Raum*.

Das „Nichteuklidische“ der in diesem Abschnitt entwickelten Geometrie besteht im wesentlichen in der veränderten Metrik. Der folgende Abschnitt soll das noch anschaulich verdeutlichen.

1) Dabei ist $n - r$ maximale Dimension totalisotroper Teilräume.

Aufgaben

1. Man beweise die Aussagen (a) und (b) des Hilfssatzes 5.25.
2. Man beweise: Ein zweidimensionaler Teilraum $T = \overline{\{a, b\}}$ in einem metrischen Vektorraum ist dann und nur dann isotrop, wenn $a^2b^2 = (ab)^2$ gilt.
- 3.* Ist V ein n -dimensionaler metrischer Vektorraum und R sein Radikal, so gilt für jeden Teilraum T von V

$$\dim T^\perp = n - \dim T + \dim T \cap R.$$

(Diese Aussage stellt eine Verallgemeinerung des Satzes 5.29(a) dar.)

5.2. Minkowskische Räume und spezielle Relativitätstheorie

5.2.1. Abstand, isotrope Kegel, Modelle (Veranschaulichungen)

In einem Minkowskischen Raum über einem geordneten Körper, in dem jedes positive Element quadratisch ist, wird

$$\|a\| := \sqrt{|a^2|}$$

die *Norm* eines Vektors a genannt; ferner heißt

$$a(P, Q) := \|b(PQ)\|$$

der *Abstand* der Punkte P, Q .

In bezug auf physikalische Sachverhalte, die durch Minkowskische Räume dargestellt werden, nennt man den Abstand *raum- bzw. zeitartig* genau dann, wenn $v^2(PQ) > 0$ bzw. $v^2(PQ) < 0$ ist. Entsprechend wird diese Bezeichnung auch für Vektoren benutzt.

Diese Funktion a ist offenbar symmetrisch. Sie besitzt jedoch — wie wir gleich sehen werden — nicht die weiteren Eigenschaften einer Abstandsfunktion, mit denen man einen metrischen Raum charakterisiert, nämlich die Dreiecksungleichung und das Identitätsaxiom

$$a(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q \text{ für alle Punkte } P, Q.$$

Minkowskische Räume sind demnach keine metrischen Räume¹⁾ und damit auch keine normierten Räume.

Dazu wollen wir jetzt ein Beispiel näher betrachten, den zweidimensionalen Minkowskischen Raum über dem Körper der reellen Zahlen (Abb. 164a). Nach 5.31 gibt es eine Basis $(O; e_1, e_2)$, so daß die Darstellung des inneren Produkts unter 5.23 hier für $\xi = x_1e_1 + x_2e_2$ und $\eta = y_1e_1 + y_2e_2$ die Form $\xi\eta = x_1y_1 - x_2y_2$ erhält. Ein Vektor $\xi = x_1e_1 + x_2e_2$ aus dem Vektorraum ist nach Definition isotrop genau dann, wenn $0 = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$ ist. Gleichwertig damit

¹⁾ Vgl. etwa MfL, Bd. 4, 1.5.6.

ist offensichtlich, daß g ein Vielfaches des Vektors $e_1 + e_2$ oder des Vektors $e_1 - e_2$ ist. Unser Raum enthält somit genau zwei isotrope Geraden durch O ; sie sind in der Abb. 164a die Winkelhalbierenden w_1, w_2 der durch die Koordinatenachsen gebildeten rechten Winkel. Demnach läßt sich $P = Q \Rightarrow a(P, Q) = 0$ nicht umkehren.

Als *Einheitskreis* um O ist natürlich die Punktmenge $\{P: a(O, P) = 1\}$ zu verstehen, wobei noch zwischen raum- und zeitartigem Abstand zu unterscheiden ist. Für $P = (x_1, x_2)$ ist im ersten Fall diese Punktmenge durch die Gleichung $x_1^2 - x_2^2 = 1$, im zweiten Fall durch $-x_1^2 + x_2^2 = 1$ charakterisiert. In der Abb. 164a sind das bekanntlich gerade die beiden „Einheits“hyperbeln mit den Asymptoten w_1 und w_2 .

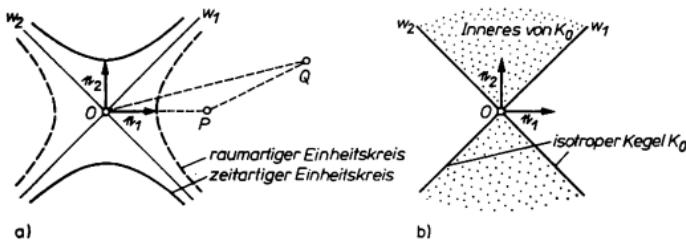


Abb. 164

Damit wird deutlich, daß grundsätzliche Unterschiede zwischen der hier und der in Kapitel 4 dargestellten und nach H. MINKOWSKI benannten Geometrie bestehen. Der Einheitskreis hier ist keine konvexe Eichfigur im Sinne des vorigen Kapitels.

Die Dreiecksungleichung besteht selbst im Fall gleichartiger Abstände im allgemeinen nicht. Betrachten wir neben O beispielsweise noch die Punkte $P = (2, 0)$ und $Q = (4, 1)$, so ist

$$a(O, P) + a(P, Q) = 2 + \sqrt{3} < \sqrt{15} = a(O, Q).$$

In einem n -dimensionalen Minkowskischen Raum heißt

$$K_A := \{P: v^2(AP) = 0\}$$

der *isotrope Kegel bezüglich des Punktes A*.

Eine gewisse inhaltliche Rechtfertigung dieser Bezeichnung geben die folgenden beiden Sätze:

Satz 5.32. Ist $B \in K_A$ und $B \neq A$, so ist $g_{AB} \subseteq K_A$.

Beweis. Ist P ein beliebiger Punkt aus g_{AB} , so ist $v(AP) = tv(AB)$ mit $t \in K$. Nun gilt $v^2(AP) = t^2v^2(AB) = 0$ und damit $P \in K_A$, w. z. b. w.

Entsprechend beweist man

Satz 5.33. Eine Gerade g durch A liegt in K_A genau dann, wenn g isotrop ist.

In der Minkowskischen Ebene besteht der isotrope Kegel bezüglich des Punktes O gerade aus den beiden isotropen Geraden durch O (Abb. 164b).

Ist der zugrunde liegende (Koordinaten-)Körper angeordnet, so heißen die Mengen $\{P: v^2(AP) < 0\}$ und $\{P: v^2(AP) > 0\}$ das *Innere* bzw. das *Äußere des isotropen Kegels* K_A . Diese Punktmengen sind demnach gerade dadurch charakterisiert, daß $v(AP)$ zeitartig bzw. raumartig ist. In Abb. 164b ist für die Minkowskische Ebene das Innere von K_0 dargestellt.

Ist $B = (e_1, \dots, e_n)$ eine Basis, für die (1) aus dem Satz 5.31 gilt, so liegt $A + e_n$ im Innern von K_A . Die Eigenschaft besitzt offensichtlich kein weiterer Vektor der Basis. Dies gilt unabhängig von der speziellen Wahl der Basis. Die Punkte im Innern von K_A lassen sich nach dem Vorzeichen ihrer n -ten Koordinate x_n unterscheiden: Unter dem *oberen Teil des Inneren von K_A* versteht man den Teil mit $x_n > 0$; in diesem liegt auch $A + e_n$. Der *untere Teil* ist durch $x_n < 0$ bestimmt. Diese Begriffsbildung ist von der Basis B abhängig.

Satz 5.34. *Die Translationen sind auf der Menge der isotropen Kegel transitiv. Bei Translationen gehen Inneres und Äußeres eines isotropen Kegels in das Innere bzw. Äußere des Bildskegels über. Speziell geht dabei der obere Teil des Inneren in den oberen Teil des Bildes über.*

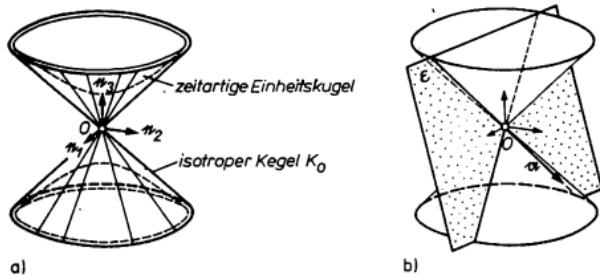


Abb. 165

Beweis. Es seien K_A und K_B zwei isotrope Kegel. Bei der durch $a := v(AB)$ bestimmten Translation ist wegen $v((A + a)(P + a)) = v(AP)$ bereits

$$K_A + a = \{P + a: v^2(A + a, P + a) = 0\} = K_{A+a} = K_B.$$

Daraus ist ersichtlich, daß je zwei isotrope Kegel durch eine Verschiebung ineinander übergeführt werden können, und ferner, daß bei einer Verschiebung ein isotroper Kegel in einen isotropen Kegel übergeht und dabei Inneres und Äußeres sowie die oberen Teile in entsprechende Punktmenzen übergeführt werden, w. z. b. w.

In n -dimensionalen Minkowskischen Räumen ($n \geq 2$) über geordneten Körpern ist die Metrik in den Hyperebenen durch einen Punkt O allein durch ihre Lage bezüglich des isotropen Kegels bestimmt.

Wir wollen das im Fall $n = 3$ ausführlich darlegen. Die Überlegungen lassen sich entsprechend auf die Fälle $n = 2$ und $n \geq 4$ übertragen.

Zuvor wollen wir als Beispiel den dreidimensionalen Minkowskischen Raum über dem Körper der reellen Zahlen vorstellen (Abb. 165a). Ist

$(O; e_1, e_2, e_3)$ eine Basis mit der Eigenschaft (1), so läßt sich das innere Produkt in der Form $\mathfrak{xy} = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$ darstellen. Für die Punkte $P = (x_1, x_2, x_3)$ des isotropen Kegels K_0 erhält man die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$. Sie bilden demnach in euklidischer Sicht einen Doppelkegel mit der Spitze O (Abb. 165a). Die Mantellinien dieses Kegels stellen gerade die isotropen Geraden durch O dar. Die Einheitskugel mit raum- bzw. zeitartiger Radiuslänge wird durch die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$ bzw. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1$ beschrieben; sie besteht demnach in euklidischer Sicht aus einem einschaligen (Abb. 165a) bzw. einem zweischaligen Hyperboloid.

Wir zeigen nun, daß die Metrik in den Ebenen durch O allein durch ihre Lage zum isotropen Kegel K_0 charakterisiert werden kann. Dabei wird vom Koordinatenkörper nur verlangt, daß er die Voraussetzungen im Satz 5.31 erfüllt.

Es sei $\varepsilon = O + U$ eine Ebene durch O . Nach dem Satz 5.29(a) gibt es einen Vektor $a \neq 0$ mit $\{a\}^\perp = U$; dieser Vektor ist demnach ein Stellungsvektor bezüglich ε .

Wir treffen bezüglich a jetzt folgende Fallunterscheidung:

a) $a^2 > 0$, d. h. a ist raumartig (Abb. 162b). Nach 5.29(d) ergibt $\overline{\{a\}} \oplus U$ den gesamten Vektorraum; somit gibt es ein Körperelement λ und einen Vektor $b \in U$ mit $\lambda a + b = e_3$. Wegen $0 > e_3^2 = \lambda^2 a^2 + b^2$ und $a^2 > 0$ gilt $b^2 < 0$. Daraus folgt, daß der Index von U gleich 1 ist; denn nach Voraussetzung kann er nicht größer als 1 sein. Das heißt, daß ε eine Minkowskische Ebene ist. Sie besitzt demnach — wie wir bereits zeigten — genau zwei isotrope Geraden durch O , sie schneidet den isotropen Kegel (längs zweier Geraden).

b) Es sei $a^2 = 0$, d. h., a ist isotrop. Dann ist $a \in \text{rad } U$, also ε isotrop. Würde U noch einen echt isotropen Vektor $b \notin \overline{\{a\}}$ enthalten, so wäre U wegen $a \perp b$ sogar total isotrop; wir erhielten $U \subseteq U^\perp = \overline{\{a\}}^\perp = \overline{\{a\}}$ im Widerspruch zu $\overline{\{a\}} \subset U$. Die Gerade $O + \overline{\{a\}}$ ist der Durchschnitt von ε und dem isotropen Kegel, d. h., die Ebene ε berührt den Kegel.

c) $a^2 < 0$, d. h., a ist zeitartig. Da dann wiederum $\overline{\{a\}} \oplus U$ den gesamten Vektorraum ergibt und da dessen Index gleich 1 ist, muß f in U positiv definit sein. Folglich ist ε eine euklidische Ebene. U enthält keinen echt isotropen Vektor, d. h., daß ε den Kegel nicht schneidet.

Damit ist die Metrik aller Ebenen und ihr Zusammenhang mit einfachen Lagebeziehungen der Ebenen zu den isotropen Kegeln aufgezeigt.

Der vierdimensionale reelle Minkowskische Raum ist eigentlich der Raum, der zur vollständigen Beschreibung der speziellen Relativitätstheorie verwendet wird. Hier versagt das natürliche Vorstellungsvermögen auf Grund der Dimension. Doch der Grad der Befähigung, sich etwas vorzustellen und darstellen zu können — eine für die wissenschaftliche Arbeit auf vielen Gebieten wichtige Voraussetzung —, ist in starkem Maße entwicklungsbedingt. Man kann sich auch vier- und höherdimensionale räumliche Sachverhalte vorstellen und eine Darstellung geben.¹⁾

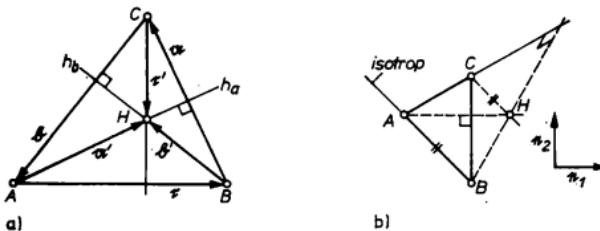
¹⁾ Einzelheiten wollen wir hier nicht ausführen. Aus einer Reihe von Literaturvorlagen möchten wir auf das leicht zugängliche Büchlein von A. KOLMAN. Die vierte Dimension, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1976 (Übersetzung aus dem Russischen), verweisen, das diesbezügliche Fragen für einen breiten Leserkreis darlegt.

Die Minkowskische Ebene und den (dreidimensionalen) Minkowskischen Raum haben wir hier deshalb etwas breiter vorgestellt, weil sie auch in der Darstellung der physikalischen Zusammenhänge in der speziellen Relativitätstheorie gern benutzt werden. Die neue Auffassung von Raum und Zeit und die sich daraus ergebenden theoretischen Konsequenzen lassen sich mit ihrer Hilfe einfacher veranschaulichen.

Im Rahmen analytischer Methoden, mit denen wir in diesem Kapitel arbeiten, bringt die Beschränkung auf gewisse Dimensionen weitgehend keine Vorteile.

Zum Abschluß dieses Abschnitts wenden wir uns nochmals dem ebenen Fall zu.

Satz 5.35 (Höhensatz). *Ist ABC ein Dreieck, so schneiden sich die Lote von den Ecken auf die jeweils gegenüberliegende Seite, d. h. die Höhen, in einem Punkt.*



Beweis. Es seien A, B, C drei nicht kollineare Punkte (Abb. 166a). Wir setzen $a := v(BC)$, $b := v(CA)$ und $c := v(AB)$. Der Satz 5.29(a) sichert letztlich bereits die Existenz und Eindeutigkeit der Höhen. Es seien h_a, h_b und h_c die Höhen durch A, B bzw. C .

Die Höhen h_a und h_b schneiden sich in einem Punkt H . Andernfalls wäre $h_a \parallel h_b$, d. h. $\{a\}^\perp = \{b\}^\perp$, und damit $\overline{\{a\}} = \overline{\{a\}^\perp}^\perp = \overline{\{b\}}^\perp = \overline{\{b\}}$ im Widerspruch dazu, daß A, B, C nicht kollinear sind.

Für $a' := v(AH)$, $b' := v(BH)$ und $c' := v(CH)$ gilt

$$aa' = 0, \quad bb' = 0$$

und damit

$$cc' = (a + b)c' = ac' + bc' = a(b + a') + b(-a + b') = 0.$$

Folglich liegt H auch auf h_c , w. z. b. w.

Dieser Satz läßt sich sogar unter den schwächeren Voraussetzungen einer regulären metrisch-affinen Ebene beweisen.

In Anbetracht des in Abb. 164 vorgelegten Modells erscheint die uneingeschränkte Gültigkeit des Höhensatzes, d. h. seine Unabhängigkeit von der Art der Dreiecksseiten, bemerkenswert. In den Abb. 166b und 167 sind Beispiele dargestellt, in denen eine Dreiecksseite bzw. zwei Dreiecksseiten isotrop sind. Die Aufgabe 2 hebt eine weitere Besonderheit hervor.

Aufgaben

1. Man beweise den Satz 5.33.
 2. Man zeige, daß die folgende Konstruktion in einer Minkowskischen Ebene (Abb. 164) zu dem Lot von O auf die anisotrope Gerade g ($\neq O$) führt (Abb. 167):

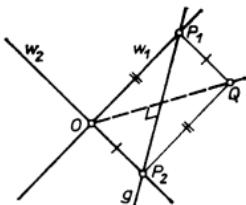


Abb. 167

- a) Bestimmung der Schnittpunkte P_1 und P_2 der Geraden g mit dem isotropen Kegel $K_O = w_1 \cup w_2$.
 b) Konstruktion der vierten Ecke Q im Parallelogramm P_1OP_2Q .
 c) Verbinden von O und Q .

Im einzelnen ist die Existenz und Eindeutigkeit von P_1 , P_2 und Q sowie $g_{00} \perp g$ zu zeigen.

Bemerkung: Überraschenderweise werden bei dieser Konstruktion nur die Existenz und Eindeutigkeit von Verbindungsgeraden und Parallelen benötigt.

5.2.2. Bewegungen

Den folgenden Ausführungen legen wir zunächst nur einen n -dimensionalen metrischen Vektorraum (V, f) mit $n \geq 1$ über einem Körper K einer Charakteristik $\neq 2$ zugrunde.

Eine eindeutige Abbildung α von V auf sich heißt *orthogonale Transformation* genau dann, wenn α eine lineare Transformation von V ist und

$$f(\alpha x, \alpha y) = f(x, y)$$

für alle $x, y \in V$ (Invarianz des inneren Produkts) gilt.

Eine Transformationsmatrix A von α ist von der gewählten Basis abhängig, jedoch hängt $|A|$ nach dem Satz 5.12(d) nur von α ab. Insbesondere heißt α eine *Bewegung* oder *isometrische Transformation* genau dann, wenn außerdem $|A| = \pm 1$ gilt; im Fall $|A| = 1$ heißt α eine *eigentliche Bewegung* oder *Lorentztransformation*.

Alle Translationen sind eigentliche Bewegungen, denn A ist dann Einheitsmatrix.

Da die linearen Transformationen nach Satz 5.9 eine Gruppe bilden, trifft das offenbar auch auf die orthogonalen Transformationen zu. Diese Gruppe heißt *orthogonale Gruppe*. Untergruppen bilden die Bewegungen bzw. die Lorentztransformationen.

Auf Grund der Gleichung

$$2f(x, y) = f(x + y, x + y) - f(x, x) - f(y, y)$$

für alle $x, y \in V$ gilt der

Hilfssatz 5.36. Eine lineare Transformation α ist genau dann orthogonal, wenn

$$f(\alpha\xi, \alpha\xi) = f(\xi, \xi)$$

für alle $\xi \in V$ gilt.

Satz 5.37. Ist der Vektorraum V regulär, so ist jede orthogonale Transformation eine Bewegung.

Beweis. Bezogen auf eine Basis B sei A die Transformationsmatrix einer orthogonalen Transformation α . Nun gilt $F_B = F_{\alpha B} = A^T F_B A$ nach Satz 5.24. Daraus folgt $|F_B| = |A^T| |F_B| |A|$ und damit $|A|^2 = 1$ wegen $|F_B| \neq 0$ nach Satz 5.26, w. z. b. w.

Unter den Bewegungen spielen im allgemeinen Spiegelungen eine wesentliche Rolle. Wir verstehen hier unter einer *Spiegelung an T* eine involutorische¹⁾ Bewegung, bei der die Menge der Fixvektoren einen echten regulären Teilraum T bildet. Eine anschauliche Kennzeichnung der Spiegelungen liefert der

Satz 5.38. In einem regulären n -dimensionalen metrischen Vektorraum V (Charakteristik $\neq 2$) mit $n \geq 1$ ist σ eine Spiegelung an einem regulären Teilraum $T \subset V$ genau dann, wenn σ eine lineare Transformation von V mit

$$(1) \quad \sigma a = a \quad \text{für alle } a \in T,$$

$$(2) \quad \sigma a = -a \quad \text{für alle } a \in T^\perp$$

ist.

Beweis. a) Es sei σ eine lineare Transformation von V mit (1) und (2). T ist regulär, so daß $V = T \oplus T^\perp$ nach 5.29(d) gilt. Folglich besitzt jeder Vektor $\xi \in V$ eine eindeutige Darstellung $\xi = \xi' + \xi^\perp$ mit $\xi' \in T$ und $\xi^\perp \in T^\perp$.²⁾

Es gilt $(\sigma\xi)^2 = (\xi' - \xi^\perp)^2 = \xi'^2 + \xi^{\perp 2} = (\xi' + \xi^\perp)^2 = \xi^2$; nach den Hilfssätzen 5.36 und 5.37 folgt daraus, daß σ eine Bewegung ist.

Wegen $T \subset V$ ist $T^\perp \neq \{0\}$ und damit σ nach (2) nicht die Identität. Außerdem gilt $\sigma(\sigma\xi) = \sigma(\xi' - \xi^\perp) = \xi' + \xi^\perp = \xi$; damit ist σ involutorisch.

b) Jetzt sei umgekehrt σ eine Spiegelung an T ; dann gilt (1) per definitionem. Für $a \in T^\perp$ ist $\sigma(\sigma a + a) = \sigma(\sigma a) + \sigma a = a + \sigma a$ und damit $a + \sigma a \in T$. Außerdem ist dann

$$(\sigma a + a)(\sigma a + a) = (\sigma a + a) \sigma a + 0 = a(a + \sigma a) = 0,$$

folglich auch $\sigma a + a \in T^\perp$. Wegen $T \cap T^\perp = \{0\}$ muß nun $a + \sigma a = 0$ sein; und damit gilt (2), w. z. b. w.

Jede affine Transformation im Punktraum bestimmt eine lineare Transformation im Vektorraum (siehe Abschnitt 5.1). Umgekehrt kann mit Hilfe einer Translation und einer linearen Transformation im Vektorraum jede affine Transformation im Punktraum dargestellt werden, wobei der linearen Transformation des Vektor-

¹⁾ Eine Abbildung σ heißt *involutivisch*, wenn sie von Identität verschieden und wenn $\sigma^{-1} = \sigma$ ist.

²⁾ Die in Abschnitt 3.1.3b) eingeführte Zerlegung eines Vektors in Parallel- und Normalkomponente erweist sich als Spezialfall der hier vorgenommenen Zerlegung bezüglich T .

raumes eine affine Transformation des Punktraumes mit einem Fixpunkt entspricht. Die den Bewegungen und speziellen Bewegungen zugehörigen Abbildungen im Punktraum belegen wir aus praktischen Gründen mit der gleichen Bezeichnung. (Mißverständnisse sind kaum zu befürchten.)

Als Punktspiegelungen und Hyperebenenspiegelungen sind diejenigen Spiegelungen zu verstehen, bei denen der Fixvektorraum die Dimension 0 bzw. $n - 1$ besitzt. Die Spiegelung an einem Teilraum $H \subseteq \mathbb{P}$ bezeichnen wir mit σ_H und das Bild einer Punktmenge M bei dieser Spiegelung mit M^H (vgl. Abschnitt 1.1.3), wobei wir im Fall $H = \{A\}$ kurz σ_A schreiben.

Aus den Eigenschaften (i) und (ii) sind in regulären metrisch-affinen Räumen sofort einige metrische Eigenschaften dieser Spiegelungen ersichtlich, die zu ihrer konstruktiven Darstellung genutzt werden können:

Ist σ_A die Spiegelung an einem Punkt A und X irgendein weiterer Punkt, so ist wegen $\{A\} = A + \{0\}$ und $v(AX) \in V = \{0\}^\perp$ nun $v(AX^A) = -v(AX)$ nach (ii). Das Bild X^A von X liegt derart, daß A Mittelpunkt der Strecke XX^A ist.

Es sei jetzt σ_A eine Spiegelung an einer Hyperebene $A = P + T$ und X irgendein Punkt. Nun gilt $\dim T^\perp = n - (n - 1) = 1$, und $v(PX)$ läßt sich als Summe von Vektoren $v' \in T$ und $v^\perp \in T^\perp$ darstellen (Abb. 168).

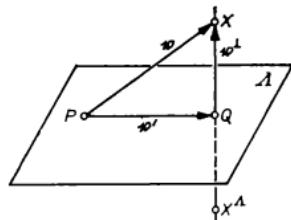


Abb. 168

Es sei $Q := P + v'$. Dann gilt $v(QX) = v^\perp \in T^\perp$, $Q^A = Q$ und $v(QX^A) = \sigma_A(v(QX)) = -v(QX)$. Das Bild von X liegt auf der zu A orthogonalen Geraden $X + T^\perp$, und die Strecke XX^A wird durch A halbiert.

Für n -dimensionale Minkowskische Räume mit $n \geq 2$ über einem geordneten Koordinatenkörper ergibt sich an Hand der Gleichungen

$$\alpha(v(AP)) = v(\alpha A \alpha P) \quad \text{und} \quad (\alpha \xi)(\alpha \eta) = \xi \eta$$

für alle Punkte P und Vektoren ξ, η und Bewegungen α der

Satz 5.39. Ist α eine Bewegung und K_A ein isotroper Kegel, so ist

$$\alpha(K_A) = K_{\alpha A},$$

und Inneres und Äußeres von K_A gehen in das Innere bzw. Äußere des isotropen Kegels $K_{\alpha A}$ über.

Für den zweidimensionalen reellen Minkowskischen Raum untersuchen wir die Bewegungen jetzt näher. Es sei α eine Bewegung im Vektorraum V und A die zuge-

hörige reguläre Matrix bezüglich einer Basis $B = (e_1, e_2)$ mit der Eigenschaft (1) aus dem Satz 5.31. Dann gilt $(\alpha \xi)_B = A(\xi)_B$ für alle $\xi \in V$, d. h.

$$(i) \quad x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,$$

$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

für $\xi = x_1e_1 + x_2e_2$ und $A = (a_{ik})$.

Nach den Hilfssätzen 5.36 und 5.37 ist

$$(ii) \quad x_1'^2 - x_2'^2 = (\alpha \xi)^2 = \xi^2 = x_1^2 - x_2^2$$

neben $|A| = \pm 1$ notwendig und hinreichend dafür, daß (i) eine Bewegung ist. We-
gen

$$\begin{aligned} x_1'^2 - x_2'^2 &= (a_{11}^2 - a_{21}^2)x_1^2 + (a_{12}^2 - a_{22}^2)x_2^2 + 2(a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22})x_1x_2 \\ &= x_1^2 - x_2^2 \end{aligned}$$

für alle reelle Zahlen x_1, x_2 ist nun (i) genau dann eine Bewegung, wenn

$$(iii) \quad a_{11}^2 - a_{21}^2 = 1,$$

$$a_{12}^2 - a_{22}^2 = -1,$$

$$a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22} = 0,$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = |A| = \pm 1$$

ist.

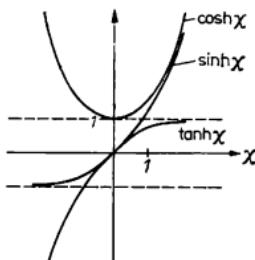


Abb. 169

Zunächst fällt die Analogie zur Darstellung von Drehungen in der ebenen euklidischen Geometrie auf. Diese Analogie motiviert die folgenden Ansätze mit Hyperbelfunktionen¹⁾ (Abb. 169). Wegen $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ setzen wir für $a_{11} > 0$

$$a_{11} = \cosh x \quad \text{und} \quad a_{21} = \sinh x.$$

¹⁾ Die Funktionen \sinh (sinus hyperbolicus) und \cosh (cosinus hyperbolicus) sind definiert durch

$$\sinh x := \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \quad \text{und} \quad \cosh x := \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}).$$

Es gilt $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ und demnach $\cosh^2 x \geq 1$. Ferner ist $\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}$. Vgl. auch MfL, Bd. 4, 2.5.4.

Für a_{12} und a_{22} ergibt sich nach (iii) wegen

$$a_{22}^2 = a_{12}^2 + 1 = \left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)^2 \cdot a_{22}^2 + 1 = (a_{22}^2 \sinh^2 \chi + \cosh^2 \chi) (\cosh^2 \chi)^{-1}$$

zunächst

$$a_{22}^2 = \frac{\cosh^2 \chi}{\cosh^2 \chi - \sinh^2 \chi} = \cosh^2 \chi,$$

bei Einschränkung auf $a_{22} > 0$ schließlich $a_{22} = \cosh \chi$ und damit

$$a_{12} = \frac{a_{21}a_{22}}{a_{11}} = a_{21} = \sinh \chi.$$

Bei der Matrix

$$A_1 := \begin{pmatrix} \cosh \chi & \sinh \chi \\ \sinh \chi & \cosh \chi \end{pmatrix}$$

sind für alle reellen Zahlen χ die Bedingungen (iii) erfüllt, und überdies gilt $|A| = +1$. Die restlichen Lösungen von (iii) sind nun

$$A_2 := \begin{pmatrix} \cosh \chi & \sinh \chi \\ -\sinh \chi & -\cosh \chi \end{pmatrix}, \quad |A_2| = -1,$$

$$A_3 := \begin{pmatrix} -\cosh \chi & \sinh \chi \\ -\sinh \chi & \cosh \chi \end{pmatrix}, \quad |A_3| = -1,$$

$$A_4 := \begin{pmatrix} -\cosh \chi & \sinh \chi \\ \sinh \chi & -\cosh \chi \end{pmatrix}, \quad |A_4| = +1.$$

Die Matrix A_1 zeichnet sich gegenüber den anderen drei Matrizen dadurch aus, daß die zugehörige Bewegung α eine Lorentztransformation ist ($|A_1| = 1$) und daß der Punkt $O + \alpha e_2 = O + \sinh \chi e_1 + \cosh \chi e_2$ wegen $\cosh \chi > 0$ im oberen Teil des Inneren von K_0 liegt. Man nennt α dann eine *eigentliche Lorentztransformation*.¹⁾

Diese Auszeichnung kann in der Veranschaulichung (Abb. 164) auf eine stärker geometrischen Weise vorgenommen werden: Bei jeder Bewegung mit dem Fixpunkt O geht jeder Kreis um O in sich über. In der Abb. 164 geht somit jede Hyperbel mit dem Mittelpunkt O und den Asymptoten w_1, w_2 in sich über, d. h., jeder Punkt $P \notin w_1, w_2$ wird auf einen Punkt derjenigen Hyperbel abgebildet, die bereits durch ihn und die Asymptoten w_1, w_2 bestimmt ist.

Die Bewegungen mit der Matrix A_1 unterscheiden sich nun gerade von denjenigen mit der Matrix A_2, A_3 oder A_4 dadurch, daß bei der zugehörigen Punktabbildung mit O als Fixpunkt jeder Punkt und sein Bild auf demselben Hyperbelast liegen. Man nennt sie deshalb *eigentliche hyperbolische Drehungen um O* (Abb. 170). Damit

¹⁾ Die Hervorhebung dieser Transformation hat — wie wir noch sehen werden — einen naheliegenden physikalischen Hintergrund.

ist eine geometrische Charakterisierung der eigentlichen Lorentztransformationen gegeben (vgl. auch Aufgabe 1).

Schließlich sei noch bemerkt, daß durch einfache Spiegelungen die Matrix A_1 in A_2 , A_3 bzw. A_4 übergeführt werden kann. Die Spiegelungen an der x_1 -Achse bzw. an der x_2 -Achse (Abb. 171a und b) werden nach (i) offensichtlich durch

$$S_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } S_2 := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Diese Matrizen sind speziell von der Form A_2 bzw. A_3 . Tatsächlich ist nun $A_2 = S_1 A_1$, $A_3 = A_1 S_2$ und $A_4 = S_1 A_1 S_2$.

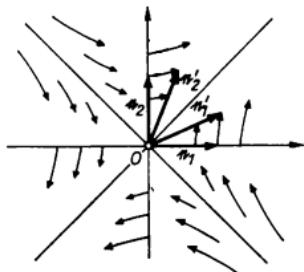
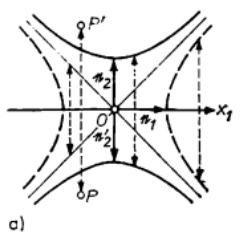
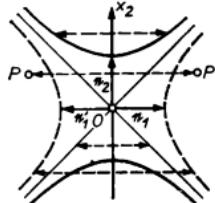


Abb. 170

Auf Grund des Satzes 5.34 über die Invarianten bei Translationen haben wir durch unsere bisherigen Darlegungen letztlich bereits eine vollständige Darstellung aller Bewegungen in der reellen Minkowskischen Ebene gewonnen. Mit den bisherigen Darlegungen ist auch die Darstellung von Bewegungen in höherdimensionalen Minkowskischen Räumen sowie eine Verallgemeinerung bezüglich des Koordinatenkörpers vorgezeichnet.



a)



b)

Abb. 171

Wir fassen unsere Darlegungen über die Bewegungen in der reellen Minkowskischen Ebene zusammen:

Satz 5.40. Die (eigentlichen) Lorentztransformationen mit dem Fixpunkt O sind die (eigentlichen) hyperbolischen Drehungen um O . Jede Bewegung läßt sich als Nacheinanderausführung von einer Translation, einer (eigentlichen) Lorentztransformation und von Spiegelungen an den Koordinatenachsen darstellen.

Mit dem Höhensatz 5.35 kann der *Dreispiegelungssatz für reguläre Geraden* (vgl. Abschnitt 1.2.1) bewiesen werden (vgl. Aufgabe 2). Damit ist die Möglichkeit gegeben, eine ganze Reihe von Sätzen der euklidischen Geometrie zu gewinnen, sogar mit den gleichen Beweisschritten wie dort; unter anderem erhält man den Satz über das Schneiden der Winkelhalbierenden eines Dreiecks (Abb. 172b). Bei der Übertragung von Überlegungen aus der euklidischen Geometrie auf die Minkowskische muß man sehr sorgfältig vorgehen. So besitzt hier z. B. nicht jeder Winkel eine Winkelhalbierende:

Hilfssatz 5.41. Ein Winkel $\prec PQR$ besitzt genau dann eine Winkelhalbierende, wenn die Geraden g_{QP} und g_{QR} wie folgt gleichartig sind: $a(P, Q)$ und $a(Q, R)$ sind zugleich raum- bzw. zeitartig.

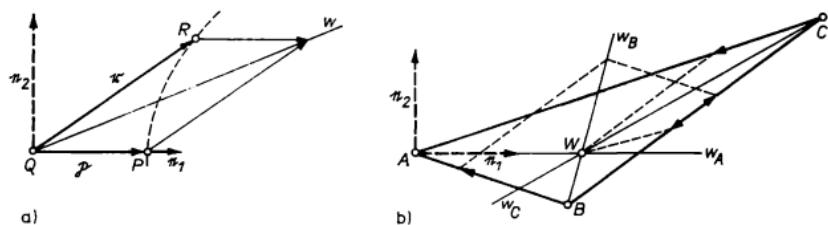


Abb. 172

Beweis. a) Besitzt $\prec PQR$ eine Winkelhalbierende w , so geht die Halbgerade QP^+ bei der Spiegelung an w in die Halbgerade QR^+ über. Nach Satz 5.39 sind dann die Geraden g_{QP} und g_{QR} gleichartig.

b) Es seien g_{QP} und g_{QR} gleichartig. Wir setzen $p := v(QP)$, $r := v(QR)$ und können o. B. d. A. $p^2 = r^2$ voraussetzen. Wegen $(p + r) \perp (p - r)$ und

$$p = \frac{1}{2}(p + r) + \frac{1}{2}(p - r), \quad r = \frac{1}{2}(p + r) - \frac{1}{2}(p - r)$$

geht nach dem Satz 5.38 die Halbgerade QP^+ bei der Spiegelung an der Geraden $w := Q + \overline{(p + r)}$ in die Halbgerade QR^+ (Abb. 172a) über, d. h., $\prec PQR$ besitzt eine Winkelhalbierende, w. z. b. w.

Falls g_{QP} und g_{QR} zwei isotrope Geraden sind, stellt jede reguläre Gerade durch Q eine Winkelhalbierende dar.

Aufgaben

1. Man zeige, daß im Punktraum

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \chi & \sinh \chi \\ \sinh \chi & \cosh \chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

eine Drehung um O darstellt, daß für $\chi \neq 0$ der Punkt O einziger Fixpunkt ist.

- 2.* Man beweise in der ebenen Minkowskischen Geometrie den Dreispiegelungssatz für reguläre Geraden mit gemeinsamem Punkt, d. h. die Aussage: *Sind f, g, h drei reguläre Geraden mit einem gemeinsamen Punkt P , so ist das Spiegelungsprodukt $\sigma_f \sigma_g \sigma_h$ eine Spiegelung σ_l an einer regulären Geraden l durch P .*

5.2.3. Der Raum der Ereignisse der speziellen Relativitätstheorie

Nach Vorarbeiten von HENRIK ANTOON LORENTZ (1853—1928), H. POINCARÉ u. a. begründete A. EINSTEIN 1905 die *spezielle Relativitätstheorie*.¹⁾ Sie ist eine Theorie über die Struktur von Raum und Zeit, die auf der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum sowie auf der grundlegenden Annahme beruht, daß sich die physikalischen Gesetze in allen gegeneinander gleichförmig und geradlinig bewegten Inertialsystemen nicht unterscheiden (Relativitätsprinzip). Die „spezielle“ Relativitätstheorie beschränkt sich auf sogenannte Inertialsysteme.

Die physikalischen Vorgänge vollziehen sich in einem eindimensionalen Zeitraum und in einem dreidimensionalen Ortsraum, den wir als reellen euklidischen Raum voraussetzen. Bezuglich eines beliebigen Inertialsystems Σ läßt sich jedes Ereignis durch drei euklidische Raumkoordinaten x, y, z und eine Zeitkoordinate t beschreiben, d. h., bezüglich Σ entspricht jedem Ereignis ein geordnetes Viertupel (x, y, z, t) reeller Zahlen. Diese Zuordnung stellt man sich als eineindeutige Abbildung von der Menge der Ereignisse auf die Menge \mathbb{R}^4 über dem Körper der reellen Zahlen vor. Auf Grund dieser Zuordnung wird der vierdimensionale affine Raum über dem Körper der reellen Zahlen *Ereignisraum* genannt und mit \mathfrak{N}_E bezeichnet.

Von wesentlicher Bedeutung ist die Frage, wie sich beim Übergang von einem Inertialsystem Σ zu einem Inertialsystem Σ' die Koordinaten der Ereignisse ändern.

Die spezielle Relativitätstheorie geht dabei von folgender Grundannahme aus: „Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt. Durch kein Experiment kann ein Inertialsystem vor einem anderen ausgezeichnet werden. In allen Inertialsystemen breitet sich das Licht im Vakuum“ unabhängig von der Richtung „mit derselben Vakuumlichtgeschwindigkeit c aus“ ([20], S. 18). Diese Grundannahme steht im Gegensatz zur Newtonschen Mechanik²⁾ mit ihrem Satz von der Addition der Geschwindigkeiten. Mit obiger Annahme gelang es, Widersprüche zwischen experimentellen Ergebnissen (u. a. Michelson-Versuch³⁾) und theoretischen Auffassungen der Newtonschen Mechanik zu überwinden. Aus obiger Grundannahme folgt — wie man in der Physik zeigt — der

Satz 5.42. *Jedem Übergang von einem Inertialsystem Σ zu einem Inertialsystem Σ' , das sich gleichförmig und geradlinig bezüglich Σ bewegt, entspricht eine affine*

¹⁾ Es kann nicht Anliegen dieses Buches sein, den deduktiven Aufbau dieser physikalischen Theorie darzustellen. Wir müssen sie sowie damit zusammenhängende physikalische Begriffe weitgehend beim Leser als bekannt voraussetzen. Aus der Fülle der einschlägigen Literatur, die zu diesem Gegenstand für unterschiedliche Leserkreise vorliegt, möchten wir hier auf die Schriften [13], [20] und [37] verweisen; letztere sind vorzugsweise für die Fachlehrerausbildung geschrieben worden. Dennoch hoffen wir, daß die Darlegungen hier ohne Benutzung von Zusatzliteratur verständlich sind.

²⁾ Isaac NEWTON (1643—1727).

³⁾ ALBERT ABRAHAM MICHELSON (1852—1931).

Koordinatentransformation

$$(i) \quad \begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t, \\ t' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t \end{aligned}$$

im Ereignisraum mit

$$(ii) \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2,$$

wobei (x, y, z, t) und (x', y', z', t') die Koordinaten ein und desselben Ereignisses bezüglich Σ und Σ' sind. Es gilt auch die Umkehrung.

Diese Transformationseigenschaft (ii) wurde von LORENTZ gefunden. Sie bietet die Grundlage für die Einführung einer Metrik im Ereignisraum, denn mit ihr ist eine quadratische Form gegeben, die bei den betrachteten Übergängen invariant bleibt. Naheliegend ist nun,

$$(iii) \quad f(a_1, a_2) := x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - c^2t_1t_2$$

für alle Vektoren $a_i = (x_i, y_i, z_i, t_i)$ aus dem Vektorraum V_E des Ereignisraumes zu setzen.

Diese Abbildung von $V_E \times V_E$ in die Menge der reellen Zahlen ist offensichtlich eine symmetrische Bilinearform, die nach dem Satz 5.42 invariant gegenüber allen linearen Transformationen von V_E ist. Demnach ist (V_E, f) ein metrisch-affiner Raum, in dem die orthogonalen Transformationen gerade den Übergängen von einem Inertialsystem zu einem anderen entsprechen.

Für die Basisvektoren $b_1 := (1, 0, 0, 0)$, $b_2 := (0, 1, 0, 0)$, $b_3 := (0, 0, 1, 0)$ und $b_4 := (0, 0, 0, 1)$ des Ereignisraumes V_E ergibt sich

$$b_i^2 = 1 \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \quad \text{und} \quad b_4^2 = -c^2.$$

Zur formalen Angleichung an die Form (1) im Satz 5.31 setzen wir

$$(iv) \quad e_i := b_i \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \quad \text{und} \quad e_4 := \frac{1}{c} b_4.$$

Bezüglich der neuen Basis (e_1, e_2, e_3, e_4) werden die Koordinaten auch „normierte Ereigniskoordinaten“ genannt; sie ergeben sich aus den alten Koordinaten x, y, z, t durch

$$(iv') \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ct.$$

Die Form (iii) geht dabei über in

$$(v) \quad \xi\eta = f(\xi, \eta) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$$

für alle $\xi = x_1e_1 + \dots + x_4e_4$ und $\eta = y_1e_1 + \dots + y_4e_4$ aus V_E .¹⁾

¹⁾ Auch sei bemerkt, daß der Schnitt der Hyperebene H , die parallel zur x_1, x_2, x_3 -Hyperebene ist und durch den Einheitspunkt der x_4 -Achse geht, den isotropen Kegel bezüglich des Ursprungs in der Kugel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ schneidet. Da Bewegungen das Kegellinäre auf sich

Demnach gilt der

Satz 5.43. Durch die Festlegungen (iv) und (v) wird der Ereignisraum zum vierdimensionalen reellen Minkowskischen Raum, in dem den Übergängen zwischen Inertialsystemen gerade solche Koordinatentransformationen entsprechen, deren Matrizen zu den Bewegungen bezüglich der Metrik (v) gehören.

Die mathematische Einkleidung und formale Abrundung der speziellen Relativitätstheorie hat H. MINKOWSKI im Jahre 1908 vorgenommen. Seine Leistung für den Ausbau der speziellen Relativitätstheorie beruht vor allem „in der Erkenntnis, daß das vierdimensionale Kontinuum der speziellen Relativitätstheorie in seinen maßgebenden formalen Eigenschaften die weitgehendste Verwandtschaft zeigt zu dem dreidimensionalen Kontinuum des euklidischen geometrischen Raumes“ ([13], S. 47). MINKOWSKIS Beitrag zur speziellen Relativitätstheorie bildete eine wesentliche Grundlage für die Entwicklung der allgemeinen Relativitätstheorie.

Abschließend wollen wir einige geometrische Sachverhalte der Minkowskischen Geometrie physikalisch interpretieren.

Wir wenden uns zunächst den isotropen Kegeln zu.

Es seien $E = (x_0, y_0, z_0, t_0)$ und $P = (x, y, z, t)$ beliebige Punkte im Ereignisraum \mathcal{R}_E . Mit $\bar{E} = (x_0, y_0, z_0)$ und $\bar{P} = (x, y, z)$ bezeichnen wir die dazugehörigen Punkte im Ortsraum. Eine gleichförmig geradlinige Bewegung im Ortsraum durch den Punkt \bar{E} wird bezüglich eines Inertialsystems bekanntlich durch die Bewegungsgleichungen

$$x - x_0 = v_x(t - t_0),$$

$$y - y_0 = v_y(t - t_0),$$

$$z - z_0 = v_z(t - t_0)$$

beschrieben, wobei v_x, v_y, v_z die Koordinaten des Geschwindigkeitsvektors sind. Ferner ist nach Definition des isotropen Kegels K_E und den Beziehungen (iii)

$$K_E = \{x, y, z, t) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - c^2(t - t_0)^2 = 0\},$$

d. h., $P = (x, y, z, t)$ liegt genau dann im isotropen Kegel bezüglich $E = (x_0, y_0, z_0, t_0)$, wenn für $t \geq t_0$ ein zum Zeitpunkt t_0 im Punkt \bar{E} ausgesandtes Lichtsignal im Punkt \bar{P} zur Zeit t eintrifft oder wenn für $t < t_0$ ein zur Zeit t in \bar{P} ausgesandtes Lichtsignal zur Zeit t_0 in \bar{E} ankommt. Auf Grund dieses Sachverhalts wird K_E auch der *Lichtkegel* bezüglich E genannt.

Für $t > t_0$ treffe ein im Punkt \bar{E} zur Zeit t_0 ausgesandtes Lichtsignal in $\bar{P} = (x, y, z)$ früher als zum Zeitpunkt t ein. Damit ist gleichwertig, daß

$$\frac{a(\bar{E}, \bar{P})^2}{c^2} < (t - t_0)^2$$

abbilden, kann man die Bewegungen im Kleinschen Modell mit Hilfe der Bewegungen β des reellen vierdimensionalen Minkowskischen Raumes charakterisieren: Ist O der Koordinatenursprung, so setzen wir für Punkte X, X' einer Figur F des Kugelinneren $X' = \beta_F X$ genau dann, wenn $\beta X \in g_{OX}$ gilt. Wir überlassen es dem Leser, für die M -Bewegungen β_F die Gültigkeit der Bewegungssätze B_1 bis B_4 nachzuweisen.

ist, wobei mit $a(\bar{E}, \bar{P})$ der euklidische Abstand der Punkte \bar{E} und \bar{P} gemeint ist. Diese Ungleichung ist aber gerade kennzeichnend dafür, daß P im Innern des Kegels K_E liegt. Damit ist eine Interpretation für alle Punkte aus dem Inneren von K_E mit $t > t_0$ gegeben.

Im Fall $t = t_0$ gilt $P = E$, so daß für die inneren Punkte nur noch $t < t_0$ zu betrachten ist. Es sei also P ein Punkt im Inneren von K_E mit $t < t_0$. Dann ist

$$\frac{a(\bar{E}, \bar{P})^2}{c^2} < (t_0 - t)^2,$$

und dies bedeutet, daß ein zum Zeitpunkt t in \bar{P} ausgesandtes Lichtsignal in \bar{E} früher als zum Zeitpunkt t_0 eintrifft.

In bezug auf das Ereignis E nennt man deshalb den Teil des Inneren von K_E mit $t > t_0$ den *Zukunftskegel* und den durch $t < t_0$ charakterisierten Teil den *Vergangenheitskegel*. Diese Teile entsprechen dem im Abschnitt 5.2.1 erklärten oberen bzw. unteren Teil des Innern von K_E .

Analog lassen sich die Punkte P im Äußeren von K_E dadurch charakterisieren, daß ein zum Zeitpunkt t_0 in \bar{E} ausgesandtes Lichtsignal in P später als zum Zeitpunkt t ankommt. Mit anderen Worten: Die Ereignisse \bar{P} im Äußeren von K_E sind genau diejenigen, die nicht in einem kausalen Zusammenhang (Ursache—Wirkung) mit E stehen.

Wir betrachten nun die Bewegungen im Ereignisraum. Nach Satz 5.43 werden durch sie gerade die Übergänge zwischen zueinander gleichförmig und geradlinig sich bewegenden Inertialsystemen beschrieben. Zur Vereinfachung der Überlegung spezialisieren wir (i). zu

$$x' = c_{11}x + c_{14}t,$$

$$y' = y,$$

$$z' = z,$$

$$t' = c_{41}x + c_{44}t.$$

Das ist keine wesentliche Einschränkung des Sachverhalts. Die Vereinfachung bedeutet, daß zum Zeitpunkt $t = 0$ der Ursprung des Inertialsystems Σ mit dem des Inertialsystems Σ' zusammenfällt und daß sich Σ und Σ' längs der x -Achse von Σ zueinander bewegen. In bezug auf normierte Ereigniskoordinaten ist entsprechend (iv')

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,$$

$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

mit $x_1 = x$ und $x_2 = ct$ zu betrachten. Nach dem Satz 5.26 muß die Matrix $A := (a_{ik})$ eine Matrix der Form A_1 , A_2 , A_3 und A_4 aus dem Abschnitt 5.2.2 sein. Da aber der obere Teil des Inneren von K_0 — wie wir bereits zeigten — die künftigen Ereignisse in bezug auf das Ereignis O darstellt, fordert man von der Transformation zusätzlich, daß mit $P = (0, 1)$ auch das Bild P' in diesem Teil des Kegels liegt und damit P' eine positive zweite Koordinate x_2' besitzt. Überdies wird vorausgesetzt, daß sich

Σ' bezüglich Σ entsprechend der Orientierung der x_1 -Achse von Σ fortbewegt. Damit muß noch $a_{11} > 0$ sein. Diesen zusätzlichen Forderungen wird nur

$$A = A_1 = \begin{pmatrix} \cosh \chi & \sinh \chi \\ \sinh \chi & \cosh \chi \end{pmatrix}$$

und damit eine (eigentliche) Lorentztransformation gerecht.

Wir setzen

$$\beta := -\tan \chi.$$

Es ist offenbar $1 - \beta^2 > 0$.

Für die (eigentliche) Lorentztransformation ergibt sich dann

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{-\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

und damit bezüglich der ursprünglichen Ereigniskoordinaten x, t die Darstellung

$$x' = \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad ct' = \frac{-\beta x + ct}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Der Parameter β hat eine einfache physikalische Bedeutung. Der Ursprung von Σ' bewegt sich bezüglich Σ mit der Geschwindigkeit

$$v = \beta c,$$

denn aus $0 = \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ folgt durch Differentiation $\frac{dx}{dt} = \beta c$.

Der mathematischen Einschränkung $1 - \beta^2 > 0$ ist die physikalische $v < c$ gleichwertig.

Die (eigentliche) Lorentztransformation erhält die bekannte Gestalt

$$(vi) \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Hier wird ein wesentlicher Unterschied der speziellen Relativitätstheorie zur Newtonschen Theorie bezüglich der Raum-Zeit-Vorstellung ersichtlich: Die Absolutheit der Zeit geht verloren. Beim Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen gehen Orts- und Zeitkoordinaten in gleicher Weise ein. Raum und Zeit sind relativiert.

Die Abb. 170 kann nach den bisherigen Darlegungen als Veranschaulichung des Überganges von dem durch (e_1, e_2) bestimmten Inertialsystem Σ zu dem durch (e'_1, e'_2) fixierten Inertialsystem Σ' angesehen werden.

Zum Abschluß wenden wir uns noch einigen wenigen Konsequenzen zu, die sich aus der Lorentztransformation ergeben.

Für Relativgeschwindigkeiten v mit $v \ll c$ (v sehr klein gegenüber c) geht die obige Lorentztransformation näherungsweise in die bekannte Galilei-Transformation¹⁾ der Newtonschen Mechanik über.

Aus $v < c$ folgt, daß die Relativgeschwindigkeit eines Inertialsystems in bezug auf ein anderes stets kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist.

Es sei Σ' ein Inertialsystem, das sich bezüglich des Inertialsystems Σ (gleichförmig und geradlinig) mit der Geschwindigkeit v_1 , und Σ'' ein Inertialsystem, das sich in der gleichen Richtung bezüglich Σ' mit der Geschwindigkeit v_2 bewegt. Wir schränken uns dabei wieder wie oben auf die x -Achse bezüglich Σ ein. Den Relativgeschwindigkeiten v_1 und v_2 entsprechen nach $\beta = -\tanh \chi$ und $\beta = \frac{v}{c}$ die „Winkelgrößen“ χ_1 und χ_2 mit

$$\tanh \chi_1 = -\frac{v_1}{c} \quad \text{und} \quad \tanh \chi_2 = -\frac{v_2}{c}.$$

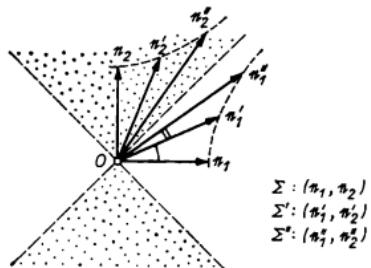


Abb. 173

Der Relativgeschwindigkeit v von Σ'' bezüglich Σ entspricht dann auf Grund der gleichen Orientierung die „Winkelgröße“ $\chi_1 + \chi_2$ (Abb. 173). Wegen

$$\tanh(\chi_1 + \chi_2) = \frac{\tanh \chi_1 + \tanh \chi_2}{1 + \tanh \chi_1 \tanh \chi_2}$$

erhalten wir sofort

$$\frac{v}{c} = -\tanh(\chi_1 + \chi_2) = \frac{\frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c}}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}.$$

Das ist das *Additionstheorem der Geschwindigkeiten* in der speziellen Relativitätstheorie. Experimentell wird es unter anderem durch einen Versuch von FIZEAU²⁾ bestätigt, der 1851 durchgeführt wurde ([20], S. 25; [37], S. 79). Das Ergebnis des „Leitführungsexperiments“ wurde lange Zeit falsch gedeutet.

¹⁾ GALILEO GALILEI (1564–1642).

²⁾ ARMAND HIPPOLYTE FIZEAU (1819–1896).

Die Herleitung des letzten Resultats mag ein Beispiel dafür sein, daß geometrische Betrachtungen recht wirkungsvoll zu physikalischen Resultaten führen können. Der Nutzen für die Relativitätstheorie, der durch die geometrische Einkleidung entstand, ist damit nur am Rande erfaßt.

Aufgaben

1. Man zeige an Hand der Lorentztransformation (vi), daß eine bezüglich eines Beobachters gleichförmig und geradlinig bewegte Uhr stets langsamer geht (Zeitdilatation).
2. Man zeige an Hand des Additionstheorems für Geschwindigkeiten, daß aus $v_1 v_2 \leq c$ stets $v < v_1 + v_2$ und $v \leq c$ folgt.

Literatur

- [1] ALEXANDROV, P. S., u. a., *Die Hilbertschen Probleme (Vortrag „Mathematische Probleme“ von D. HILBERT, gehalten auf dem 2. Internationalen Mathematikerkongress, Paris 1900, erläutert von einem Autorenkollektiv)*, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1971 (Verantw. Herausgeber der Übersetzung aus dem Russischen: H. WUSSING).
- [2] AMBARZUMJAN, V. A., B. G. KUSNEZOW, G. I. NAAN, J. A. SMORODINSKI und R. J. STEINMAN, *Philosophische Probleme der modernen Kosmologie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1965 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [3] BACHMANN, F., *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1973.
- [4] BALDUS, R., *Nichteuklidische Geometrie*, 2. Aufl., W. de Gruyter, Berlin 1944.
- [5] BEHNKE, H., F. BACHMANN, K. FLADT und W. SÜSS, *Grundzüge der Mathematik*, Bd. II, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1960.
- [6] BLASCHKE, W., *Griechische und anschauliche Geometrie*, R. Oldenbourg-Verlag, München 1953.
- [7] BOLTJANSKI, W. G., und I. Z. GOCHBERG, *Sätze und Probleme der kombinatorischen Geometrie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [8] BORSUK, K., und W. SZMIELEW, *Foundations of Geometry*, North-Holland Publ. Company, Amsterdam 1960 (Übersetzung aus dem Polnischen).
- [9] BREHMER, S., und H. BELKNER, *Einführung in die analytische Geometrie und lineare Algebra*, 4. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin/Verlag Harri Deutsch, Frankfurt a. M. – Zürich 1974.
- [10] COXETER, H. S. M., *Die reelle projektive Ebene*, R. Oldenbourg-Verlag, München 1955 (Übersetzung aus dem Englischen).
- [11] COXETER, H. S. M., *Unvergängliche Geometrie*, Birkhäuser-Verlag, Basel – Stuttgart 1963 (Übersetzung aus dem Englischen).
- [12] EFIMOW, N. W., *Höhere Geometrie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960 (Übersetzung aus dem Russischen); Wiederabdruck der Kapitel I – IV sowie V und VI unter dem Titel „Über die Grundlagen der Geometrie“ bzw. „Grundzüge der projektiven Geometrie“, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin/Friedr. Vieweg & Sohn GmbH, Braunschweig 1972 (2. Aufl.) bzw. 1970.
- [13] EINSTEIN, A., *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*, (1. Aufl. 1916) 21. Auflage, Akademie-Verlag, Berlin/Pergamon Press, Oxford/Vieweg & Sohn, Braunschweig 1969.
- [14] ENGEL, F., und P. STÄCKEL, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie, B. G. Teubner, Leipzig 1895.

- [15] Enzyklopädie der Elementarmathematik, Bd. IV, V, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1969 bzw. 1971 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [16] EUKLID, Die Elemente, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1933—1937 (Übersetzung aus dem Griechischen von CLEMENS THAER).
- [17] FLADT, K., Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, Bd. II, Ernst-Klett-Verlag, Stuttgart 1957.
- [18] GAUSS, C. F., Werke VIII, B. G. Teubner, Leipzig 1900.
- [19] HADWIGER, H., Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1957.
- [20] HÄNSEL, H., und W. NEUMANN, Physik — eine Darstellung der Grundlagen, Bd. IV, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1974/H. Deutsch, Zürich/Frankfurt am Main/Thun 1976.
- [21] HALMOS, P., Measure Theory, D. van Nostrand Company, New York—Toronto—London 1950.
- [22] HENKIN, L., P. SUPPES and A. TARSKI, The Axiomatic Method, North-Holland Publ. Company, Amsterdam 1959.
- [23] HESSENBURG, G., Grundlagen der Geometrie, W. de Gruyter, Berlin und Leipzig 1930.
- [24] HILBERT, D., Grundlagen der Geometrie, (1. Aufl. 1899) 12. Aufl., B. G. Teubner, Stuttgart 1968.
- [25] HÖLDER, O., Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß, Ber. Verh. Kgl. sächs. Ges. Wiss., Leipzig, Math.-Phys. Kl., 58 (1901), 1—64.
- [26] JUSCHKEWITSCH, A. P., Geschichte der Mathematik im Mittelalter, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1964 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [27] Каган, В. Ф., Очерки по геометрии, Издательство московского университета, Москва 1963.
- [28] KERÉKJÁRTÓ, B., Les fondements de la géométrie, tome 1: La construction élémentaire de la géométrie euclidienne, Akadémiai Kiadó, Budapest 1955.
- [29] KLEIN, F., Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, Bd. II, Springer-Verlag, Berlin 1925.
- [30] KLEIN, F., Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie, Springer-Verlag, Berlin 1928.
- [31] KLEIN, F., Das Erlanger Programm (Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen), eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von H. WUSSING, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1974.
- [32] KLOTZEK, B., Geometrie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1971.
- [33] KÜRSOHÁK, J., und P. STÄCKEL, Johann Bolyai's Bemerkungen über Nicolaus Lobatschewsky's geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn 18 (1902), 250—279.
- [34] LENZ, H., Grundlagen der Elementarmathematik, 3. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin/Hanser Verlag, München 1975.
- [35] LENZ, H., Vorlesungen über projektive Geometrie, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1965.
- [36] LOBATSCHESKIJ, N. I., Pangeometrie, 2. Aufl., Verlag von W. Engelmann, Leipzig 1912. (Aus dem Russischen übersetzt und herausgegeben von H. LIEBMANN.)
- [37] MACHELEIDT, G., Relativitätstheorie, Manuskriptdruck Potsdam 1974 (Lehrmaterial zur Ausbildung von Diplomlehrern Physik, Heft 12, herausgeg. von der Hauptabteilung des Ministeriums für Volksbildung).
- [38] MINKOWSKI, H., Geometrie der Zahlen, B. G. Teubner, Leipzig 1912.
- [39] NORDEN, A. P., Elementare Einführung in die Lobatschewskische Geometrie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1958 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [40] PASCH, M., Vorlesungen über neuere Geometrie, Verlag von B. G. Teubner, Leipzig 1882.
- [41] PICKEBT, G., Analytische Geometrie, 5. Aufl., Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1964.
- [42] PICKEBT, G., Projektive Ebenen, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1955.

- [43] RASCHIEWSKI, P. K., Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [44] RÉDEL L., Begründung der euklidischen und nichteuklidischen Geometrien, Akadémiai Kiadó, Budapest/B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1965.
- [45] REICHARDT, H., Gauß und die nicht-euklidische Geometrie, B. G. Teubner, Leipzig 1976.
- [46] RIEMANN, B., Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, 2. Aufl., Springer, Berlin 1921. (Neu herausgegeben und erläutert von H. WEYL.)
- [47] SCHUB, F., Grundlagen der Geometrie, B. G. Teubner, Leipzig—Berlin 1909.
- [48] STÄCKEL, P., Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie durch Johann Bolyai, Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn 17 (1901), 1—19.
- [49] STÄCKEL, P., Untersuchungen aus der absoluten Geometrie, Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn 18 (1902), 280—307.
- [50] STÄCKEL, P., Johann Bolyai's Raumlehre, Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn 19 (1903), 1—12.
- [51] STÄCKEL, P., und F. ENGEL, Gauss, die beiden Bolyai und die nichteuklidische Geometrie, Math. Ann. 49 (1897), 149—167.
- [52] STRUIK, D. J., Abriß der Geschichte der Mathematik, 6. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1976 (Übersetzung aus dem Amerikanischen und Russischen).
- [53] WUSSING, H., Carl Friedrich Gauß, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1974.
- [54] WUSSING, H., und W. ARNOLD (Hrsg.), Biographien bedeutender Mathematiker, Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1975.

Nachtrag bei der Korrektur: Inzwischen erschien

LIEBSCHER, D.-E., Relativitätstheorie mit Zirkel und Lineal, Akademie-Verlag, Berlin/Vieweg, Braunschweig 1977.

Bezeichnungen und Symbole

$o, R, 2R$	konstante Winkelgrößen	48
A'	Bild von A bei der Bewegung τ	22
A^P, A^g, A^ϵ	Bild von A bei der Spiegelung an P, g bzw. ϵ	23
AB	(abgeschlossene) Strecke	17
(AB)	offene Strecke, Inneres der Strecke AB	17
\overrightarrow{AB}	gerichtete Strecke	34, 108
AB^+, AB^-	Halbgeraden	18
$M(P, Q)$	Mittelpunkt von PQ	25
$m(P, Q)$	Mittelsenkrechte von PQ (in einer Ebene)	29
$a(P, Q)$	Abstand von P und Q	48
$\measuredangle(p, q)$	Winkel	44
$\measuredangle POQ$	Winkel	19
$w(\measuredangle(p, q))$	Winkelhalbierende	25
$I(\overline{ABC})$	Flächeninhalt von \overline{ABC}	96, 101
$I(F)$	Flächeninhalt der Figur F	98
$k(M, r)$	Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r	54
$M(P)$	eigentliches Büschel	86
$M(g)$	Lotbüschel	86
$M(a, b)$	Büschel	87
$S(a, b) = \{\sigma_x : x \in M(a, b)\}$		91
$D(a, b)$	Drehgruppe	91
$U(a, b)$	von $S(a, b)$ erzeugte Gruppe	91
$X^{D(a, b)}$	Bahn (Kurve), Orbit	91
$z \overrightarrow{OE}$	z -faches eines Pfeiles \overrightarrow{OE}	110, 114
$\frac{PQ}{OE}, \frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{OE}}$	Verhältnis gerichteter Strecken	118
$x\mathbf{a}$	x -faches eines Schubvektors \mathbf{a}	122

$X + a$	Anwendung eines Vektors a auf einen Punkt X	127, 196
$X + M$	Orbit eines Punktes X bezüglich M	197
$f(a, b)$	inneres Produkt der Vektoren a, b (f symmetrische Bilinearform)	201
$\delta(ABC)$	Defekt des Dreiecks ABC	62
$\Pi(a)$	Lobačevskische Π -Funktion	84
$\mathfrak{R}(g)$	Richtung von g	106
$v(PQ)$	Verschiebung von P nach Q	108, 196
a^0	Einheitsvektor	125
η_a	Parallelkomponente von η bezüglich a	125
η_a^\perp	Normalkomponente von η bezüglich a	125
$\varrho(X, Y), \varrho_k(X, Y)$	Abstand zweier Punkte X, Y bzw. Maßzahl des Abstandes zweier Punkte X, Y (bezüglich einer Eichfigur k)	149
$\ a\ $	Norm eines Vektors a	157
$\varrho(x, y)$	Abstand in normierten Räumen	185
\mathfrak{Z}_{oB}	Menge aller Pfeile \overrightarrow{OX} mit $X \in g_{oB}$	35, 108
\bar{T}	lineare Hülle von T	190
$S_1 \oplus S_2$	direkte Summe zweier Teilmengen T_1, T_2	191
$(\xi)_B$	Koordinatentupel von ξ bezüglich der Basis B	191
S^\perp	orthogonales Komplement zu S	203
K_A	isotroper Kegel mit der Spitze A	210
$\text{rad } T$	Radikal von T	203
$\sinh \chi$	sinus hyperbolicus χ	Hyperbelfunktionen
$\cosh \chi$	cosinus hyperbolicus χ	
$\tanh \chi$	tangens hyperbolicus χ	
(V, K, φ)	Vektorraum	189
(V, f)	metrischer Vektorraum	202

Relations- und Operationszeichen

\cong	Kongruenz (beliebiger Figuren)	22
\perp	Orthogonalität	23, 125, 168, 203
$\#$	Parallelgleichheit	34, 108
$a + b$	Summe von Längen	48
$\alpha + \beta$	Summe von Winkelgrößen	48
$a < b$	Längenvergleich	49
$\alpha < \beta$	Winkelgrößenvergleich	49
$I(F_1) < I(F_2)$		103
\equiv	Zerlegungsgleichheit	101
\parallel	Parallelität	16, 125, 199

Namen- und Sachverzeichnis

Halbfette Zahlen geben die Seiten an, auf denen wesentliche oder ausführliche Angaben gebracht werden.

- Abbildung**, affine 176
 - , involutorische 215
 - , isometrische 187
- abgeschlossene Figur 159
 - Halbebene 18
 - Halbgerade 18
 - r Halbraum 18
- Abschluß einer Figur 159
- absolut konvergente Reihe 187
 - e Geometrie 5, 11ff., **14**
 - e Längeneinheit 85
- Abstand von Punkten 48, 209
 - , raumartiger 209
 - , zeitartiger 209
- Abstandsfunktion 149
- Abstandslinie 56
- Addition von Längen und von Winkelgrößen 48
 - von Schubvektoren 108
 - von gerichteten Strecken 108
- Additionstheorem der Geschwindigkeiten 226
- Additivität 193
- affine Abbildung 176
 - Geometrie 158ff., **196ff.**
 - Transformation 197
 - r Kreis 173
 - r Raum 196
- affin-reguläres Sechseck 173
 - Viereck 172
- AGANIS 68
- AHRENS, J. 42
- D'ALEMBERT, J. B. 79
- AL-ĞAŪHARI, SA'ID 71
- AL-ḪAYYĀM, 'UMAR 63, 84
- ALHAZEN 68
- allgemeine Relativitätstheorie 8
- Anfangspunkt einer Halbgeraden 18
- anisotroper (regulärer) Vektor 204
- Anisotropie für Kristallstrukturen 147
- Anordnungsaxiome 17f.
- archimedisch geordnet 58
- AS-SAMARKANDI, ȢAMS AD-DIN 71
- asymptotische Geraden 84
- AT-TŪSī, NĀSIR AD-DIN 65
- äußerer Punkt 159
- Äußeres eines einfachen n -Ecks 19
 - einer Figur 159
 - eines isotropen Kegels 211
- Axiom 12
- axiomatische Methode 13
 - r Aufbau 13
- Axiome**
 - Anordnungsaxiome 17f.
 - Bewegungsaxiome 23f.
 - Eudoxus-Archimedisches Axiom 59
 - Euklidisches Parallelenaxiom 13, 69
 - Axiom von der oberen bzw. unteren Grenze 20
 - Inzidenzaxiome 14
 - Lobačevskij'sches Parallelenaxiom 76
 - Axiome des Zirkels 55
- Bahn (Bahnkurve) 92
- BANACH, S. 6, **147**, 187

- Banach-Minkowskische Geometrie** 6, 147 ff., 158ff.
Banachraum 187
Basis, orthonormierte 128
— eines affinen Raumes 197
— eines Vektorraumes 123, 190
Begrenzung einer Figur 159
Begrenzungspunkt 159
BESSEL, F. W. 76
Betrag eines (Schub-)Vektors 125
Beweglichkeit 24
—, freie 180
Bewegung, ebene 29ff., 180
—, gerade 38
—, ungerade 38
—en 21
—en im Ereignisraum 224
—en in der Banach-Minkowskischen Geometrie 176, 180
—en im Kleinschen Modell 134
—en in einem metrischen Vektorraum 214
—en — — —, eigentliche 214
Bilinearform, nulleilige symmetrische 206
—, symmetrische 201
BOLYAI, F. 75
BOLYAI, J. 18, 14, 75, 78, 84
BREHMER, S. 99
BUNJAKOVSKIJ, V. J. 155
Bunjakovskij-Schwarzsche Ungleichung 155
Büschen, Geradenbüschel 87
—, eigentliches 87
- CAUCHY, A.-L.** 155
CAYLEY, A. 128
CLAIRAUT, C. 66
CLAVIUS, CH. 68
- Darstellungssatz für Punkte** 197
— für Vektoren 191
deckungsgleich 22
deduktiver Aufbau 13
Defekt eines Dreiecks 62, 98ff.
Diagonale 18
DREUDONNÉ, J. 193
Differenz von Längen 51
Dimension eines affinen (Teil-)Raumes 198
— eines Vektorraumes 190
direkte Summe von Teilräumen 191
divergierende Geraden 82
Doppelverhältnis 132
Drehung um eine Gerade 43
— um einen Punkt 30, 180
— — —, hyperbolische 218
Drehzentrum 30
Dreiecksinhalt 95f.
- Dreieckskongruenzsätze** 44, 47, 53
Dreiecksungleichung 53, 149
Dreispiegelungssatz 33, 220f.
Durchlauf Sinn 17
—, entgegengesetzter 21
- Ebene** 14, 198
—, Minkowskische 158ff., 209
ebene Bewegung 180
— Figur 14
— Spiegelung 29
Ebenenspiegelung 23
echter Teilraum eines Vektorraumes 190
n-Eck 18
—, einfach zusammenhängendes 19
Ecken 18
Eichfigur 6, 149
—, konvexe 151
—, —, im engeren Sinne 151
eigentliche Bewegung 214
— Lorentztransformation 218, 225
— s (Geraden-)Büschen 87
einfach transitiv 31ff., 43, 107f.
— zusammenhängendes n-Eck 19
— e Transversalzerlegung 96
Einheitskreis 149, 210
Einheitskugel 150
Einheitsvektor 125
EINSTEIN, A. 7, 8, 79, 221
elementargeometrischer Flächeninhalt 98, 101
Ellipse 144 ff., 154, 173, 177ff.
Ende 87
Endpunkt einer Strecke 17
Ereignisraum 221
Erlanger Programm 128
erzeugter Teilraum (eines Vektorraumes) 190
Eudoxus-Archimedisches Axiom 59
EUKLID, 5, 6, 18, 47, 56, 74, 78
euklidische Geometrie 5, 106ff.
— Parallelenaussage 199
— r Vektorraum 208
— s Parallelenaxiom (Ptolemäische Form) 6, 69
EULER, L. 79
- Fano-Aussage** 159
Figur 14
—, abgeschlossene 159
—, ebene 14
—, glatte (abgeschlossene) 163
—, konvexe 159
—, lineare 14
—, offene 159
Finslerscher Raum 8

- F**ixebene 23
Fixgerade 23
Fixpunkt 23
FIZEAU, A. H. 226
Flächeninhalt, elementargeometrischer 98,
 101
Folge, konvergente 185
formal-reeller Körper 207
freie Beweglichkeit 180
Fundamentalsfolge 185
FUNK, P. 170
Fußgänger-Entfernung 147
- G**ALLILEI, G. 226
GAUSS, C. F. 18, 74, 75, 78, 79, 93
 geht durch 14
Geometrie 11
 —, absolute 5, 11ff., 14
 —, affine 158ff., 196ff.
 —, Banach-Minkowskische 6, 147ff., 158ff.
 —, euklidische 5, 106ff.
 —, Lobačevskische 6, 13, 58ff.
 —, Minkowskische 6ff., 147ff., 189ff.
gerade Bewegung 38
Gerade 14, 198
 —n, asymptotische 84
 —n, divergierende 82
 —n, unverbindbare 80
 —n, verbindbare 80
Geradenbüschel, eigentliches 87
Geradenspiegelung 23
gerichtete Strecke 108
glatte (abgeschlossene) Figur 163
Gleichschenkligkeit 46
Gleiterspiegelung 38
GOLĀB, S. T. 174
GRASSMANN, H. 79
Grenzgerade 83
Grenzkreis 93
Gruppe, lineare 193
 —, orthogonale 214
- H**albebene, abgeschlossene 18
 —, offene 18
Halbgerade, abgeschlossene 18
 —, offene 18
Halbgruppe, inverse 23
Halbraum, abgeschlossener 18
 —, offener 18
Halbtangente 162
Haubersches Theorem 12
HILBERT, D. 5, 7, 18, 21, 69
Hilbertraum 187
HJELMSLEV, J. 37
Hjelmslevscher Lotensatz 87, 88
- H**öhensatz 213
Homogenität 193
Hülle, lineare 190
Hyperbelfunktionen 217
hyperbolische Drehung 218
Hypercykel 93
Hyperebene 198
Hypothese der rechten Winkel 64, 66
 — des spitzen Winkels 64
- I**BN AL-HAITHAM, HASĀN (ALHAZEN) 68
IBN QURBA, THĀBIT 68
Identitätsaxiom (der Abstandsfunktion) 149
Index eines metrischen Vektorraumes 208
Iinnerer Punkt 159
inneres Produkt 202
Inneres eines einfachen n -Ecks 19
 — einer Figur 159
 — eines isotropen Kegels 211
 — einer Strecke 17
Invarianz des Skalarproduktes 128
Inverse Halbgruppe 23
Involutorische Abbildung 215
Inzidenzaxiome 14
Inzidieren mit 14
Isometrische Abbildung 187
 — Transformation 214
Isomorphiesatz für Vektorräume 193
Istotoper Kegel 210
 — Teilraum 204
 — Vektor 204
- J**ORDAN, P. 184
- K**ANT, I. 78
Kegel, isototoper 210
KRY, G. 180
KLEIN, F. 128
Kleinsches Modell 128ff., 223
Kollinear 14
KOLMAN, A. 212
Kommensurabel 124
Komplanar 14
Kongruent 22, 176
Kongruenz 44ff., 181ff.
Konjugierte Ellipsendurchmesser 172
Konvergente Folge 185
 — Reihe 187
Konvexe Eichfigur 151
 — — im engeren Sinne 151
 — Figur 159
Konzentrischer Kreis 150
Koordinaten eines Punktes 197
 — eines Vektors 191
Koordinatenraum, n -dimensionaler 190

- Koordinatentransformation 195, 222
 Körper, formal-reeller 207
 Kreis 54, 92, 148ff., 164ff.
 —, affiner 173
 —, konzentrischer 150
 Kreisscheibe, offene 159
 Kugelkörper, offener 159
 Kuratowski-Zornsches Lemma 190
 KUROŠ, A. G. 190
 kürzeste Verbindung zweier Punkte 6, 147ff.
- LAGRANGE, J. L. 79
 LAMBERT, J. H. 66, 85
 Länge 48
 Längeneinheit, absolute 85
 LEGENDRE, A. M. 71
 LEIBNIZ, G. W. 79
 Lemma von KURATOWSKI-ZORN 190
 Lichtkegel 223
 liegt in 14
 — vor 17
 — zwischen 17
 linear abhängig 190
 — unabhängig 190
 — e Figur 14
 — e Gruppe 193
 — e Hülle 190
 — e Transformation eines Vektorraumes 193
 — er Operator 187
 — er Unterraum 198
 Linkslot 168
 Lobačevskij, N. I. 18, 75, 78, 93
 Lobačevskische Geometrie 6, 13, 58ff.
 — s Parallelenaxiom 76
 LORENTZ, H. A. 221, 222
 Lorentztransformation 214, 225
 —, eigentliche 218
 Lot 29
 Lotbüschel 87
 Lotensatz von HJELMSLEV 87, 88
 LÖWNER, K. 177
 Luftliniendistanz 147
- Meßbarkeit 115, 124
 Metrik, Minkowskische 6, 159
 Metrikinvarianz 176
 metrisch-affiner Raum 208
 metrischer Vektorraum 202
 MICHELSON, A. A. 221
 MINKOWSKI, H. 7, 147, 189, 210, 223
 Minkowskische Ebene 158ff., 209
 — Geometrie 6f., 147ff., 189ff.
 — Metrik 6, 159
 — Raum 208
 — Vektorraum 208
- Mittellinie eines Dreiecks 102
 Mittelpunkt, nichteuklidischer 138
 — einer Strecke 25
 Mittelsenkrechte 29
- NASIR-ED-DIN 65
 v. NEUMANN, J. 184
 NEWTON, I. 79, 221
 nichteuklidischer Mittelpunkt 138
 Norm eines Vektors 156, 209
 Normalkomponente eines Vektors 125
 normierter Raum 184
 Nullstrecke 48
 nullteilige symmetrische Bilinearform 206
- offene Figur 159
 — Halbebene 18
 — Halbgerade 18
 — Kreisscheibe 159
 — r Halbraum 18
 — r Kugelkörper 159
 Operator, linearer 187
 Orbit 92, 197
 Oricycel 93
 orthogonal 125, 203
 Orthogonalbasis 206
 orthogonale Gruppe 214
 — Transformation 214
 Orthogonalität in der Banach-Minkowskischen Geometrie 167ff.
 — in einem metrischen Vektorraum 203
 orthonormierte Basis 128
- Paracykel 93
 Parallelenaussage, euklidische 199
 Parallelenaxiom, euklidisches 13, 69
 —, —; Ptolemäische Form 6, 69
 —, Lobačevskisches 76
 parallelgleich 108, 158
 Parallelität von Geraden 16
 — von Teilräumen 199
 — von Vektoren 125
 Parallelkomponente eines Vektors 125
 Parallelogrammbeziehung 184
 PASCH, M. 18, 14, 79, 80
 PLAYFAIR, J. 69
 POINCARÉ, H. 128, 221
 Pol 130
 POSEIDONIOS 68
 positiv definit 207
 5. Postulat EUKLIDS 13, 64ff.
 Produkt, inneres 202
 PROKLOS DIADOCHEOS 80
 Ptolemäische Form des euklidischen Parallelenaxioms 6, 69

- Punkt** 14, 196
 —, äußerer 159
 —, innerer 159
Punktspiegelung 23
quadratische Form 208
Radikal 203
Rand einer Figur 159
Randparallele 83
Randpunkt 159
 —, regulärer 163
 —, singulärer 163
Raum, affiner 196
 —, Finslerscher 8
 —, metrisch-affiner 208
 —, Minkowskischer 208
 —, normierter 184
 —, Riemannscher 8
 —, vollständig normierter 187
raumartiger Abstand 209
 — Vektor 209
Rechtseitsatz 66
Rechtnsatz 168
Reduktionssätze 37
reeller Vektorraum 123
regulärer Randpunkt 163
 — Teilraum 204
Reihe, absolut konvergente 187
 —, konvergente 187
Relativitätsprinzip 221
Relativitätstheorie, allgemeine 8
 —, spezielle 7, 221ff.
Richtung 106
RIEMANN, B. 8, 79
Riemannscher Raum 8
SACCHERI, G. 63, 66, 74
Saccherisches Viereck 63, 85, 143
SARTORIUS von Waltershausen 74
Satz vom Außenwinkel 22
 — vom gleichschenkligen Dreieck 46
 — des PYTHAGORAS 182
schneiden 15
Schnittpunkt 15
Schubspiegelung 38
Schubvektor 123
SCHWARZ, H. A. 155
Sechseck, affin-reguläres 173
Seiten eines n -Ecks 18
senkrecht 23, 125
Senkrechte 29
SIMPLIKIOS 71
singulärer Randpunkt 163
Skala 58
Skalarprodukt 125f.
spezielle Relativitätstheorie 7, 221ff.
Spiegelung, ebene 29
 — an einer Ebene 23
 — an einer Geraden 23, 180
 — im Kleinschen Modell 131, 134
 — an einem Punkt 23
 — an einem Teilraum 215
spitzer Winkel 49
Stadtgeometrie 147f.
Startheit 24
Stetigkeitsaxiom 21
Strahlensatz und Umkehrungen 120
Strecke 17
 —, gerichtete 108
Streckenkongruenz 44ff.
Streckenzugäquivalenz 19
stumpfer Winkel 49
Stützebene 161
Stützgerade einer ebenen Figur 93, 161
Stützgeradenparallelogramm 169
Stützgeradenquadrat 170
Stützhyperebenen 186
Summe von Flächeninhalten 102
 — von Längen 48
 — von Vektormengen 191
 — von Winkelgrößen 48
Symmetrie der Abstandsfunktion 149
symmetrische Bilinearform 201f.
 —, nullteilige 206
- Tangente** 93, 161f., 168
Tangentialebene 163
Teilraum, isotroper 204
 — eines affinen Raumes 198
 —, regulärer 204
 —, total isotroper 204
 — eines Vektorraumes 190
 — — —, echter 190
 — — —, erzeugter 190
Teilräume, triviale 198
 n -Teilung 50
 — gerichteter Strecken 111ff.
Teilverhältnis gerichteter Strecken 118
total isotroper Teilraum 204
Trägheitssatz 207
Transformation, affine 197
 — eines Vektorraumes 193
 — — —, isometrische 214
 — — —, lineare 193
 — — —, orthogonale 214
transitiv 31ff., 43, 107f.
Transversalzerlegung, einfache 96
triviale Teilräume 198

- Umfang einer konvexen Eichfigur 172ff.
 ε -Umgebung eines Punktes 159
ungerade Bewegung 38
unverbindbare Geraden 80
Unterraum 190, 198
—, linearer 198
— eines affinen Raumes 198
- Vektor, anisotroper (regulärer) 204
—, isotroper 204
—, raumartiger 209
—, zeitartiger 209
Vektorraum 189
—, euklidischer 208
—, metrischer 202
—, Minkowskischer 208
—, reeller 123
— der Schubvektoren 123
verbindbare Geraden 80
Verbindungsebene 15
Verbindungsgerade 15
Vergangenheitskegel 224
Verschiebung längs einer Geraden 30, 43
Vertauschungsregel 109, 159
Vervielfachung von Längen und von Winkelgrößen 50f.
- Vervielfachung von gerichteten Strecken 110f.
— von Vektoren 122
Viereck, affin-reguläres 172
vollständig normierter Raum 187
- WALLIS, J. 69
WERNICKE, B. 132
Widerspruchsfreiheit der Lobačevskischen Geometrie 128ff., 143
Winkel 19
—, spitzer 49
—, stumpfer 49
Winkelgröße 48
Winkelhalbierende 25
Winkelkongruenz 22, 44ff.
WUSSING, H. 128
- zeitartiger Abstand 209
— Vektor 209
Zeitdilatation 227
Zerlegung, elementargeometrische, einer ebenen Figur 96
zerlegungsgleich 101
Zukunftskegel 224
zweispiegelig 42