Mathematik 12. Klasse

Methodische Hinweise

MATHEMATIK

12. Klasse

Methodische Hinweise

Verfaßt von einem Autorenkollektiv

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

1974

Autoren:

Prof. Dr. Oskar Mader	Vorbemerkungen
Dr. Brigitte Frank	Stoffgebiete 1. und 2.
Dr. Günter Lorenz	Stoffgebiet 3.
Dr. Werner Stoye	Stoffgebiet 4.

3. Auflage; Ausgabe 1970
Lizenz Nr. 203 • 1000/74 (DN)
ES 10 C
Redaktion: Heinz Junge
Zeichnungen: Ingrid Schäfer
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung: VEB Druckerei "Thomas Müntzer",
Bad Langensalza
Redaktionsschluß: 23. April 1974
Bestell-Nr.: 706 074 8
EVP: 3,50

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen

Mit der vorliegenden Schrift werden die methodischen Hinweise zum Mathematikunterricht der Erweiterten Oberschulen nach den Lehrplänen, deren Einführung am 1.9.1969 in Klasse 11 begann, fortgesetzt und abgeschlossen.
Da grundsätzliche Hinweise zu den Bildungs- und Erziehungszielen, zum Stoff sowie zur didaktisch-methodischen Konzeption des Mathematikunterrichts in der Erweiterten Oberschule bereits in den "Methodischen Hinweisen für Klasse 11" [1] enthalten sind, erübrigt sich in dieser Schrift eine allgemeine Charakteristik der Funktion, des Inhalts und der Gestaltung des Mathematikunterrichts in Klasse 12.

Als Unterricht in der Abschlußklasse der Erweiterten Oberschule hat der Mathematikunterricht in Klasse 12 die besondere Aufgabe, den Schülern Überblicke über wichtige Teilgebiete der Mathematik, über bedeutsame Probleme und Anwendungen dieser Wissenschaft zu vermitteln und damit den Gesichtskreis der Schüler zu erweitern und abzurunden. Das bezieht sich sowohl auf "innere" Probleme der Wissenschaft, wie Systematik und Methode, als auch auf weltanschaulich-philosophische und politisch-ideologische Fragen, die mit der Wissenschaft und der wissenschaftlichen Arbeit zusammenhängen, ebenso auf die Beziehungen der Mathematik zu anderen Wissenschaften und zur Praxis, vor allem zu Produktion und Technik.

Dementsprechend dominieren auch bei der didaktisch-methodischen Gestaltung des Unterrichts der systematisierende, vergleichende und verallgemeinernde Aspekt und eine vielseitige fachwissenschaftliche, philosophische und auf die praktische Anwendung gerichtete Betrachtungsweise des Stoffes. Die Stoffgebiete, die der Lehrplan für Klasse 12 vorsieht, legen eine solche umfassendere Betrachtung von einem erhöhten Standpunkt aus unmittelbar nahe. So bietet z.B. - nähere Ausführungen enthalten die einzelnen Kapitel dieser Schrift - die Vektorrechnung Gelegenheit zur Erörterung des axiomatischen Aufbaus eines Teilgebiets der Mathe-

---
[1] Autorenkollektiv: Mathematik 11. Klasse - Methodische Hinweise zum Lehrplan 1969. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1969, Best.-Nr. 00 21 35.

matik, zum Vergleichen zwischen Vektoren und Zahlen und zu einem tieferen Einblick in quantitative oder strukturelle Zusammenhänge in anderen Gebieten, z.B. in der Physik: die Behandlung der Kegelschnitte erfordert eine wiederholende Betrachtung und eine fusionistische Anwendung von Erkenntnissen aus verschiedenen Disziplinen der Mathematik; das weiterführende - und im Rahmen der allgemeinbildenden Schule abschließende - Studium der Analysis (nichtrationale Funktionen, Weiterführung der Differential- und Integralrechnung) gibt die Möglichkeit, die Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung zu festigen und die wesentlichen Methoden dieser Disziplin genauer kennen und besser verstehen zu lernen, ebenso vervollständigt es den Überblick über die elementaren Funktionen, ihre Eigenschaften und ihre Anwendung.

Der Beitrag des Mathematikunterrichts zur weltanschaulichen Bildung und Erziehung betrifft in Klasse 12 vor allem Fragen des Widerspiegelungs- und Abstraktionscharakters mathematischer Begriffe und Zusammenhänge sowie Fragen der Anwendbarkeit mathematischer Methoden und Deduktionen, also Probleme, die das Verhältnis der Mathematik zur Realität und zur Praxis betreffen. Hinzu kommen politisch-ideologische und moralische Fragen der Anwendung der Mathematik in der Gesellschaft und der Tätigkeit mathematischer Wissenschaftler. Dies kann an historischen, im wesentlichen aber an aktuellen Beispielen beim Aufbau und bei der Festigung des Sozialismus dargestellt werden.

Für die allgemeine geistige Bildung der Schüler haben im Mathematikunterricht der Klasse 12 vor allem das Erlernen und Festigen spezieller mathematischer Methoden sowie die logische Durchdringung der mathematischen Sachverhalte besondere Bedeutung. Wie in allen anderen Unterrichtsfächern muß auch im Fach Mathematik die Vermittlung und Vertiefung der Methoden des geistigen Arbeitens darauf gerichtet sein, die Schüler auf die Anforderungen vorzubereiten, vor die sich die künftigen Studenten und Spezialisten in ihrer weiteren Ausbildung gestellt sehen werden. Darin sind auch die Befähigung zu selbständiger, verantwortlicher Arbeit und die Befähigung zu Kontrolle und kritischer Einschätzung der eigenen Arbeit eingeschlossen.

Für die polytechnische Bildung der Schüler sind im Mathematikunterricht der Klasse 12 besonders die Vektorrechnung und die Weiterführung der Analysis bedeutsam; bei der Behandlung dieser Gebiete muß die Fähigkeit der Schüler entwickelt werden, einen realen Sachverhalt aus Produktion und Technik zu analysieren, aus der Analyse das mathematische Problem zu gewinnen und zu formulieren, dieses Problem mit Hilfe des erworbenen mathematischen Wissens und Könnens zu lösen und die Lösung schließlich auf den realen Sachverhalt zu übertragen. Vektorrechnung und Kegelschnittslehre bieten auch günstige Möglichkeiten, die Raumvorstellungs- und Raumdarstellungsfähigkeit der Schüler zu erweitern und zu vertiefen.

Da der Mathematikunterricht in den anderen zur Hochschulreife führenden Einrichtungen nach den gleichen oder analogen Lehrplänen wie in der Erweiterten Oberschule erteilt wird, sind die "Methodischen Hinweise für Klasse 12" - ebenso wie die "Methodischen Hinweise für Klasse 11" - auch für die Abiturklassen in den berufsbildenden Einrichtungen und für die Abiturlehrgänge der Volkshochschulen geeignet.

1. Hinweise zum Stoffgebiet 1. "Vektorrechnung und analytische Geometrie (Teil II)"

1.0. Einleitung

Das Stoffgebiet 1. in Klasse 12 stellt eine direkte Fortsetzung des gleichnamigen Stoffgebietes aus Klasse 11 dar.
Die Behandlung dieser beiden Stoffgebiete soll die Schüler mit einigen wesentlichen Gedanken einer mathematischen Theorie von großer Tragweite für Wissenschaft und Technik vertraut machen und sie in eine für sie noch ungewohnte mathematische Arbeitsweise, die analytische Behandlung geometrischer Probleme, einführen.
In Klasse 11 lag der Schwerpunkt darauf, an Hand der Menge der Verschiebungen des Raumes und der Ebene den dazu notwendigen Apparat zu entwickeln und die für seine Anwendung auf die Geometrie der Ebene erforderlichen Begriffe ("lineare Unabhängigkeit von Vektoren", "Basis", "Koordinatensystem") zu erarbeiten und zu festigen. Aus dem Stoffgebiet der analytischen Geometrie war zunächst nur die analytische Untersuchung der Geraden und des Schnittverhaltens zweier Geraden in einer Ebene vorgesehen.

Im Unterricht in Klasse 12 (Stoffgebiet 1.) liegt der Schwerpunkt bei der Anwendung der erarbeiteten Methode im dreidimensionalen Raum. Für Geraden, Ebenen, Kugeln und Kreise werden Gleichungen aufgestellt und das Schnittverhalten von Geraden (einschließlich der Schnittwinkelbestimmung) und von Kreis und Gerade ausführlich untersucht. An neuen Begriffen kommen im wesentlichen nur das "Skalarprodukt" und das "Vektorprodukt" zweier Vektoren hinzu. Der Lehrplan für Klasse 12 fordert auf den Seiten 40 und 41, daß Mittel und Methoden der Vektorrechnung zum Beweis von Sätzen aus Planimetrie und Trigonometrie sowie zur Lösung von Anwendungsproblemen aus den Naturwissenschaften, vor allem der Physik und der Technik - einschließlich der Militärtechnik genutzt werden.

Sowohl die der Vektorrechnung eigenen Denkweisen als auch die Besonderheiten der Anwendungsprobleme erweitern den geistigen Horizont der Schüler und fördern deren allgemeine geistige Bildung. Vektorrechnung und analytische Geometrie des dreidimensionalen euklidischen Raumes können wesentlich dazu beitragen, das Raumvorstellungsvermögen der Schüler zu entwickeln. Im Unterricht der Klasse 12 gibt es kaum ein anderes Stoffgebiet, das diese Aufgaben in ähnlicher Weise erfüllen kann.

Zur geistigen Bildung der Schüler tragen auch - in spezifischer Weise - die zusammenfassenden Betrachtungen zum axiomatischen Aufbau der Vektorrechnung (Stoffeinheit 1.5.) bei.

Diese zusammenfassenden Betrachtungen zum axiomatischen Aufbau der Vektorrechnung sind auch für die ideologische Bildung und Erziehung der Schüler bedeutsam, vermitteln sie doch einen Einblick in das Verhältnis von Mathematik und objektiver Realität, in die Methode der mathematischen Abstraktion und in den logischen Aufbau eines Teilgebiets der Mathematik. Weitere Beiträge zur ideologischen Bildung und Erziehung erwachsen aus dem Sachgehalt der Anwendungsaufgaben (auch aus dem Militärwesen).

Die Anwendungsaufgaben, z.B. aus der Physik, aus der Militärtechnik, helfen auch, die polytechnische Bildung der Schüler zu erweitern und die diesbezüglichen Grundkenntnisse zu vertiefen. Die Schüler lernen im Stoffgebiet über die Vektorrechnung und die analytische Geometrie Zusammenhänge zwischen naturwissenschaftlichen und mathematischen Betrachtungsweisen erfassen sowie Fragestellungen z.B. der Physik mathematisch formulieren und umgekehrt.

1.1. Zur Stoffeinheit 1.1. "Wiederholung aus Klasse 11 und Vertiefung"

Dieser Stoffeinheit kommt innerhalb der beiden Stoffgebiete "Vektorrechnung und analytische Geometrie" große Bedeutung zu. Die Schüler sollen an dieser Stelle durch die Wiederholung einen Überblick über das bisherige Vorgehen erhalten und gleichzeitig durch Verallgemeinerung auf den Fall des dreidimensionalen Raumes die Grundlage für die analytische Behandlung der Geometrie des dreidimensionalen Raumes legen.
Wenn man in der Geometrie eine Zeit lang mit Vektoren gearbeitet hat und mit diesem neuen Apparat vertraut ist, vergißt man oft, was die verwendeten "Vektoren" eigentlich sind. Bei dem Wort "Vektoren" denkt man an Pfeile, die mit einer gewissen Freizügigkeit ausgestattet sind, und an einige Regeln, denen das Arbeiten mit ihnen unterworfen ist. Deshalb ist es von Nutzen, wenn man

sich nach einer gewissen Zeit ins Gedächtnis zurückruft, wie man diesen praktischen Apparat gewonnen hat. Die im Lehrplan vorgesehene Wiederholung des vorangegangenen Stoffes hat deshalb drei Aufgaben zu erfüllen.

a) Nachdem nun im Arbeiten mit Vektoren gewisse Fertigkeiten entwickelt wurden, soll noch einmal bewußt gemacht werden, was Vektoren schlechthin und was die in der Geometrie verwendeten Vektoren sind.
b) Es ist aufzufrischen, auf welche Weise die Vektoren in der Geometrie der Ebene Verwendung finden, welche wesentlichen Begriffsbildungen dabei auftreten und welche Ergebnisse bisher erreicht wurden.
c) Parallel zu der der Aufgabenstellung b) entsprechenden Wiederholung sollen die analogen Betrachtungen für den dreidimensionalen Raum angestellt werden.

Die Aufgabenstellung a) sollte man möglichst schnell erfüllen, da sie hier nur Ausgangspunkt der Wiederholung ist. Es genügt festzustellen, daß die betrachteten Vektoren Elemente eines bestimmten Modells eines Vektorraumes sind, nämlich Elemente der Menge der Verschiebungen der betreffenden Ebene bzw. des betreffenden Raumes.

Nachdem man sich dann geeinigt hat, daß man analog dem Vorgehen in der Ebene die Verschiebungen des Raumes wieder als "Vektoren" bezeichnen will, kann man bezüglich b) und c) einen der folgenden methodisch gleichwertigen Wege beschreiten.

Man gibt durch eine straff gelenkte Wiederholung des Begriffes "Linearkombination von Vektoren", des Satzes über die Zerlegbarkeit eines Vektors einer Ebene nach zwei zueinander nicht parallelen Vektoren, der Begriffe "Basis des Raumes der Vektoren einer Ebene", "Koordinaten eines Vektors bezüglich einer Basis", "Koordinatensystem einer Ebene" und "Koordinaten eines Vektors bezüglich eines solchen Koordinatensystems" den Schülern einen Überblick über das Vorgehen in der Ebene bis zum Begriff "Koordinatensystem" und fügt die entsprechenden Überlegungen für den Fall des Raumes zusammenhängend an.

Man kann aber auch der Wiederholung eines jeden der genannten Begriffe die entsprechenden Betrachtungen und Definitionen für den Fall des Raumes jeweils sofort anschließen.

Unabhängig von der Wahl des Vorgehens muß Folgendes herausgearbeitet werden.

- Die Definition des Begriffes "Linearkombination von Vektoren" lautet für den Raum genau so wie für eine Ebene.
- In einer Ebene gibt es stets zwei zueinander nicht parallele Vektoren und auch stets drei paarweise zueinander nicht parallele Vektoren; von letzteren ist nach dem Satz über die Zerlegbarkeit eines Vektors einer Ebene nach zwei zueinander nicht parallelen Vektoren dieser Ebene jedoch stets einer eine Linearkombination der beiden anderen.
  Im Raum gibt es stets drei Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$, von denen keiner eine Linearkombination der beiden anderen ist, und es gilt der Satz, daß für jedes derartiges Tripel von Vektoren jeder beliebige Vektor des Raumes eine Linearkombination dieser drei Vektoren ist.
  Dieser Satz ist an Hand der im Lehrbuch enthaltenen Zeichnung zu erläutern. Auf seinen Beweis wird wegen der Anschaulichkeit der zu beweisenden Fakten, der Analyse zu dem entsprechenden Satz in der Ebene und der Länge des Beweises verzichtet.
- In Auswertung dieses Satzes erfolgt die Definition der linearen Unabhängigkeit von Vektoren im Raum, sie lautet genau so wie im Falle der Ebene.
- Es ist festzustellen, daß es im Raum beliebig viele Paare und Tripel linear unabhängiger Vektoren gibt, wohingegen vier Vektoren linear abhängig sind.

Aus dem angeführten Satz ergibt sich gegenüber dem Fall der Ebene eine Änderung der Begriffe "Basis" und "Koordinatensystem", die der höheren Dimension des Raumes Rechnung trägt. Die Klassifizierung der Basen des Raumes, der Vektoren des Raumes und der Koordinatensysteme des Raumes hat wieder nichts mit der Dimension zu tun und verläuft deshalb wie für die Ebene. Lediglich beim Berechnen der Koordinaten eines Vektors bzw. eines Punktes bezüglich der im Falle des Raumes üblichen orthonormierten Basis bzw. der üblichen cartesischen Koordinatensysteme ergeben sich andere Formeln. Sie enthalten die für den Fall der Ebene gewonnenen Formeln als Spezialfall ($z = 0$ und damit $\beta = 90^\circ$).

Bemerkung:

Beim Nachweis, daß es im Raum Tripel von Vektoren gibt, von denen keiner eine Linearkombination der beiden anderen ist, muß gesagt werden, daß zwei zueinander nicht parallele Vektoren zusammen mit einem Punkt eine Ebene bestimmen. Dadurch werden die Schüler bereits hier auf die Ebenengleichungen vorbereitet.

Der zweite Teil dieser Stoffeinheit, im Lehrbuch ab Lerneinheit 3 ist der analytischen Untersuchung der Geraden des Raumes, ihrer gegenseitigen Lage im Raum und in gewissen Grenzen der analytischen Charakterisierung der Ebenen sowie der Untersuchung der gegenseitigen Lage von Gerade und Ebene gewidmet; vgl. Lehrplan, Seite 40, und diese Schrift, Seiten 13 bis 16 . Hier wird der Grundstein dafür gelegt, daß die Schüler Geraden und in geringem Umfange auch Ebenen analytisch beschreiben lernen, daß sie aus den Gleichungen für Geraden und Ebenen deren Lage im Koordinatensystem bezüglich der Koordinatenebenen und ihre gegenseitige Lage erkennen lernen.

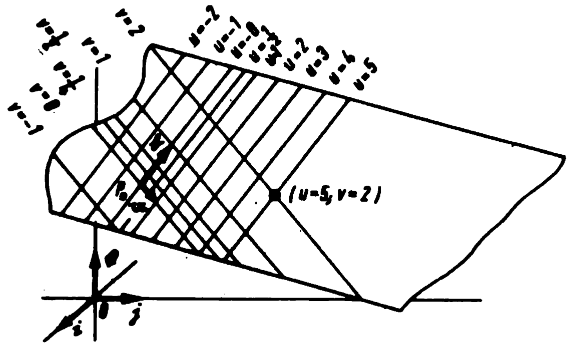
Im Rahmen der Wiederholung kann festgestellt werden, daß die Herleitung der Parametergleichung einer Geraden in Ebene und Raum völlig gleichartig ist. Auch die vektorielle Form der Zweipunktegleichung einer Geraden gewinnt man im Raum genau so wie in der Ebene. Im Raum ist es jedoch schwieriger, von der vektoriellen Form einer Geradengleichung zu einer einfachen vektorfreien Form zu gelangen, da die Geradengleichung $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\mathfrak{a}$ dem Gleichungssystem

$$x = x_0 + ta_x$$
$$y = y_0 + ta_y$$
$$z = z_0 + ta_z$$

äquivalent ist, für das man im allgemeinen Falle ($a_x \neq 0$; $a_y \neq 0$; $a_z \neq 0$)

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}$$

schreiben kann. Mit dieser Form der Geradengleichung brauchen die Schüler laut Lehrplan jedoch nicht bekannt gemacht zu werden, denn die Herleitung und Interpretation dieser Gestalt der Geradengleichung sowie die ergänzende Untersuchung der Sonderfälle ist für die nachfolgenden Stoffeinheiten nicht notwendig. Für die Entwicklung des räumlichen Denkens und Vorstellungsvermögens,



Bei konkreten Beispielen lassen sich aus den kartesischen Koordinaten eines Punktes P (x;y;z) der gegebenen Ebene α die ihm nach der gewählten Parameterdarstellung von α entsprechenden Parameterwertepaare berechnen. Wählt man z.B. die Parameterdarstellung

(2) $\mathfrak{x} = 3\mathfrak{k} + u\mathfrak{i} + v\mathfrak{j}$

der durch den Punkt P_0 (0;0;3) parallel zur xy-Ebene gehenden Ebene und als Punkt von α den Punkt P (1;3;3), dann kann man für ihn aus (2) u_P und v_P berechnen.

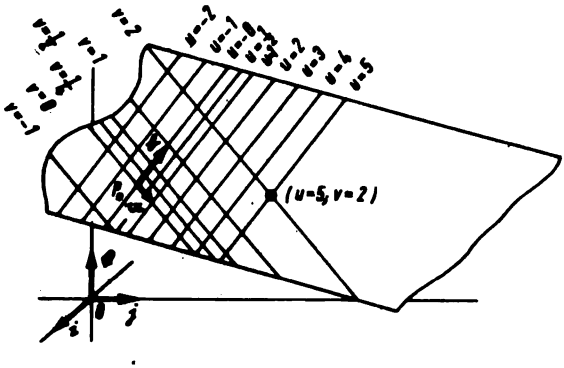
Aus $1\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} + 3\mathfrak{k} = 3\mathfrak{k} + u_P\mathfrak{i} + v_P\mathfrak{j}$ folgt $u_P = 1$, $v_P = 3$.

An solch einem Beispiel kann man auch zeigen, daß es wie bei den Geraden für jede Ebene unendlich viele Parameterdarstellungen gibt und daß ein und demselben Punkt einer Ebene bezüglich verschiedener Parameterdarstellungen derselben im allgemeinen verschiedene Parameterwertepaare entsprechen.

Eine andere Parameterdarstellung von α ist

(3) $\mathfrak{x} = 3\mathfrak{k} + \bar{u}\,(\mathfrak{i}+\mathfrak{j}) + \bar{v}\,(\mathfrak{i}-\mathfrak{j})$.

Die dem Punkt P (1;3;3) nach (3) entsprechenden Parameterwerte $\bar{u}_P$ und $\bar{v}_P$ berechnet man wie folgt. Für P muß



Bei konkreten Beispielen lassen sich aus den kartesischen Koordinaten eines Punktes P (x;y;z) der gegebenen Ebene α die ihm nach der gewählten Parameterdarstellung von α entsprechenden Parameterwertepaare berechnen. Wählt man z.B. die Parameterdarstellung

(2) $\quad \mathfrak{x} = 3\mathfrak{k} + u\mathfrak{i} + v\mathfrak{j}$

der durch den Punkt P_0 (0;0;3) parallel zur xy-Ebene gehenden Ebene und als Punkt von α den Punkt P (1;3;3), dann kann man für ihn aus (2) u_P und v_P berechnen.

Aus $1\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} + 3\mathfrak{k} = 3\mathfrak{k} + u_P\mathfrak{i} + v_P\mathfrak{j}$ folgt $u_P = 1$, $v_P = 3$.

An solch einem Beispiel kann man auch zeigen, daß es wie bei den Geraden für jede Ebene unendlich viele Parameterdarstellungen gibt und daß ein und demselben Punkt einer Ebene bezüglich verschiedener Parameterdarstellungen derselben im allgemeinen verschiedene Parameterwertepaare entsprechen.

Eine andere Parameterdarstellung von α ist

(3) $\quad \mathfrak{x} = 3\mathfrak{k} + \bar{u}\,(\mathfrak{i}+\mathfrak{j}) + \bar{v}\,(\mathfrak{i}-\mathfrak{j})$.

Die dem Punkt P (1;3;3) nach (3) entsprechenden Parameterwerte $\bar{u}_P$ und $\bar{v}_P$ berechnet man wie folgt. Für P muß

$$1\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} + 3\mathfrak{k} = 3\mathfrak{k} + \bar{u}_P\,(\mathfrak{i}+\mathfrak{j}) + \bar{v}_P\,(\mathfrak{i}-\mathfrak{j})$$

bzw.

$$(1 - \bar{u}_P - \bar{v}_P)\mathfrak{i} + (3 - \bar{u}_P + \bar{v}_P)\mathfrak{j} = \mathfrak{o}\,.$$

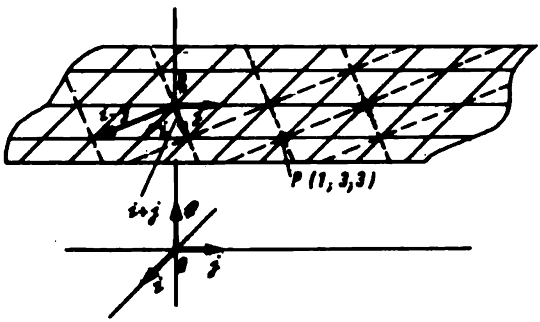
Daraus ergibt sich wegen der linearen Unabhängigkeit von $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ das Gleichungssystem

$$1 - \bar{u}_P - \bar{v}_P = 0\,, \qquad 3 - \bar{u}_P + \bar{v}_P = 0,$$

aus dem man $\bar{u}_P$ und $\bar{v}_P$ berechnet: $\bar{u}_P = 2$, $\bar{v}_P = -1$.

Bild 15/1 zeigt den Verlauf der Netzlinien auf α nach (2) und (3).

In ihm kann man für P die Parameterwertepaare u_P, v_P und $\bar{u}_P$, $\bar{v}_P$ ablesen.



15/1

Als Beispiele für Ebenengleichungen sollten Gleichungen für die Koordinatenebenen und dazu parallele Ebenen aufgestellt werden. Unbedingt behandelt werden muß die Gleichung

$$\mathfrak{x} = u\mathfrak{i} + v\mathfrak{j}$$

der xy-Ebene. In dieser Gleichung stimmen die Parameterwerte u und v eines Punktes P der xy-Ebene mit den Koordinaten x und y dieses Punktes überein, und für diese Gleichung auch die vektorfreie Schreibweise

$$x = u, \quad y = v, \quad z = 0,$$

für die man kurz $z = 0$ schreibt (in Analogie zur Geradengleichung $x = x_0$, $-\infty < u < +\infty$, $-\infty < v < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$ in der Ebene, für die $x = x_0$ geschrieben wird).

Beide Formen dieser Gleichung der xy-Ebene werden benötigt, um zeigen zu können, wie man aus den für den dreidimensionalen Raum hergeleiteten Formeln (z.B. für die Gerade, den Kreis, den Abstand zweier Punkte, das Skalarprodukt und das Vektorprodukt) die entsprechenden Formeln für den Fall gewinnt, daß die betrachteten Figuren, Punkte oder Vektoren in einer Ebene liegen, die man dann zweckmäßigerweise als xy-Ebene des Koordinatensystems $\{0; \mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}\}$ des Raumes ansieht.

Während bezüglich der Ebenengleichung von den Schülern nur verlangt wird, daß sie solche Gleichungen "lesen" können, d.h., sie als Ebenengleichungen auffassen und bei einfachen Gleichungen die Lage der Ebene im Koordinatensystem erkennen können, wird bezüglich der Geradengleichung deren aktive Beherrschung gefordert. Dazu gehört das Aufstellen von Geradengleichungen, das Ermitteln der gegenseitigen Lage zweier Geraden zueinander, das Ermitteln des Schnittwinkels zweier Geraden nach ihren Gleichungen und das Ermitteln der Lage einer Geraden bezüglich der Koordinatenachsen und Koordinatenebenen nach ihrer Gleichung. Bis auf die Ermittlung des Schnittwinkels zweier Geraden, die die Bekanntschaft mit dem Skalarprodukt voraussetzt, kann und soll dieses Programm in der ersten Stoffeinheit erarbeitet werden. Da die Schüler aus dem Unterricht in der darstellenden Geometrie in Klasse 10 mit den Möglichkeiten der gegenseitigen Lage von Geraden im Raum, von Geraden und Ebenen im Raum sowie mit den Begriffen "parallele Geraden", "windschiefe Geraden", "zu einer Ebene parallele Geraden", "Projektion eines Punktes auf eine Ebene" und "Projektion einer Geraden auf eine Ebene" vertraut sind, kann nach einer kurzen Wiederholung dieser Kenntnisse die ganze Aufmerksamkeit der Schüler auf die analytische Behandlung dieser Problematik konzentriert werden.

Für das Aufstellen einer Parametergleichung für eine Gerade spielt es keine Rolle, ob man die Gerade als Gerade einer Ebene oder als Gerade des Raumes auffaßt. In Klasse 11 wurde das Aufstellen von Geradengleichungen hinlänglich geübt. Deshalb brauchen die verschiedenen Möglichkeiten (g ist gegeben durch einen Punkt und den Richtungsvektor; g ist gegeben durch zwei Punkte) hier nur kurz wiederholt zu werden. Anders ist es mit der Untersuchung der gegenseitigen Lage zweier Geraden im Raum. Weil die Schüler nur die Parametergleichung $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\,\mathfrak{a}$ für eine Gerade kennengelernt haben, läuft die Untersuchung der gegenseitigen Lage zweier Geraden g_1 und g_2 mit den Gleichungen $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{x}}_0 + \bar{t}\,\bar{\mathfrak{a}}$ im allgemeinen Fall auf eine Analyse der Beziehung

$$(4) \qquad \mathfrak{x}_0 + t_S\,\mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{x}}_0 + \bar{t}_S\bar{\mathfrak{a}}$$

$$\text{bzw.} \quad \mathfrak{x}_0 - \bar{\mathfrak{x}}_0 = \bar{t}_S\,\bar{\mathfrak{a}} - t_S\mathfrak{a}$$

hinaus, in der $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{a}$, $\bar{\mathfrak{x}}_0$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ fest vorgegebene Vektoren sind. Für diese Analyse gibt es zwei einander äquivalente Wege. Einmal kann man für (4) das entsprechende Gleichungssystem

$$(5) \qquad \begin{aligned} x_0 - \bar{x}_0 &= \bar{t}_S\bar{a}_x - t_S a_x \\ y_0 - \bar{y}_0 &= \bar{t}_S\bar{a}_y - t_S a_y \\ z_0 - \bar{z}_0 &= \bar{t}_S\bar{a}_z - t_S a_z \end{aligned}$$

setzen, es auf Lösungen t_S, $\bar{t}_S$ untersuchen und für alle auftretenden Fälle der Lösbarkeit und der Nichtlösbarkeit von (5) die gegenseitige Lage von g_1 und g_2 ermitteln.
Im allgemeinen Falle ist dieser Weg sehr langwierig, da die Schüler mit der Theorie der linearen Gleichungssysteme nicht in genügendem Maße bekannt sind. Außerdem ist dieses Vorgehen sehr wenig anschaulich. Man kann die Beziehung (4) aber auch analysieren, ohne von ihrer vektorfreien Form (5) Gebrauch zu machen. Dazu betrachtet man (4) als lineare Gleichung für die Parameterwerte t_S und $\bar{t}_S$ und untersucht den Zusammenhang zwischen den möglichen Fällen

1. $\mathfrak{a} \parallel \bar{\mathfrak{a}}$; $\mathfrak{x}_0 - \bar{\mathfrak{x}}_0 \parallel \mathfrak{a}$;
2. $\mathfrak{a} \parallel \bar{\mathfrak{a}}$; $\mathfrak{x}_0 - \bar{\mathfrak{x}}_0 \nparallel \mathfrak{a}$;
3. $\mathfrak{a} \nparallel \bar{\mathfrak{a}}$; $\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}$ und $\mathfrak{x}_0 - \bar{\mathfrak{x}}_0$ linear abhängig;
4. $\mathfrak{a} \nparallel \bar{\mathfrak{a}}$; $\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}$ und $\mathfrak{x}_0 - \bar{\mathfrak{x}}_0$ linear unabhängig

für die Koeffizienten $\mathfrak{x}_0 - \bar{\mathfrak{x}}_0$, $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ und der gegenseitigen Lage von g_1 und g_2. Die dazu notwendigen Überlegungen sind im Lehrbuch ausführlich dargestellt und durch übersichtliche Zeichnungen ergänzt worden. Hier sei deshalb nur noch einmal darauf hingewiesen, daß im Raum die Parallelität zweier Geraden anders als in der Ebene definiert ist.
Im Raum heißen zwei Geraden parallel zueinander, wenn sie i n

e i n e r E b e n e l i e g e n und sich nicht schneiden. Liegen zwei Geraden nicht in einer Ebene, heißen sie windschief.

Für $\mathfrak{a} \parallel \bar{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{x}_0 - \bar{\mathfrak{x}}_0$ muß deshalb gesagt werden, daß g_1 und g_2 keinen Punkt gemeinsam haben und in einer Ebene liegen, und für $\mathfrak{a} \nparallel \bar{\mathfrak{a}}$; $\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}, \mathfrak{x}_0 - \bar{\mathfrak{x}}_0$ linear unabhängig, daß g_1 und g_2 keinen gemeinsamen Punkt haben und nicht in einer Ebene liegen. Diese Überlegungen erleichtert der Lehrer den Schülern, wenn er von vornherein Wert darauf legt, daß die Parametergleichungen für eine Ebene nicht mechanisch aufgenommen, sondern inhaltlich verstanden werden.

Für das sichere Arbeiten mit Vektoren im Raum und zur Verbesserung des Vorstellungsvermögens der Schüler ist es von großem Nutzen, wenn in einigen Beispielen die gegenseitige Lage von Geraden im Raum untersucht und die Ergebnisse an Skizzen überprüft werden (analog zu nachstehendem Beispiel). Neben Aufgaben, in denen die Koordinaten der Vektoren $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{a}$, $\bar{\mathfrak{x}}_0$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ konkrete Zahlen sind, sollte möglichst eine Aufgabe gelöst werden, in der einer der Vektoren nicht fest vorgegeben ist, damit die Schüler einmal eine Fallunterscheidung selbständig ausführen können.

<u>Beispiel:</u>

Es ist zu untersuchen, welche gegenseitige Lage die Geraden g_1 mit der Gleichung $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{x}_0(-1;1;z_0)$, $\mathfrak{a}(0;-1;1)$;

g_2 mit der Gleichung $\bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{x}}_0 + \bar{t}\bar{\mathfrak{a}}$ mit $\bar{\mathfrak{x}}_0(1;4;3)$, $\bar{\mathfrak{a}}(1;-1;-1)$

zueinander haben, wenn z_0 Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen kann.

1. V a r i a n t e der Lösung:

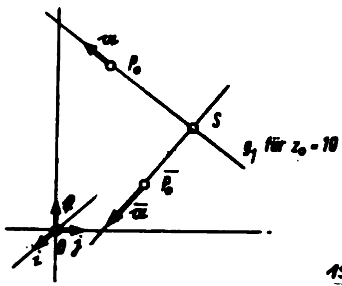
Wegen $\mathfrak{a} \nparallel \bar{\mathfrak{a}}$ kann g_1 für keinen Wert von z_0 zu g_2 parallel sein. Es bleibt aber zu untersuchen, ob g_1 und g_2 sich für irgendein z_0 schneiden oder unter welchen Bedingungen sie windschief sind. Zu diesem Zweck betrachtet man die Beziehung

$$(6) \qquad \lambda(\mathfrak{x}_0 - \bar{\mathfrak{x}}_0) + \mu\mathfrak{a} + \nu\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{o}$$

und begründet, welche Werte λ, μ und ν in Abhängigkeit von z_0 annehmen. Die Beziehung (6) ist wegen $\mathfrak{x}_0 - \bar{\mathfrak{x}}_0\,(-2;-3;z_0-3)$ dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -2\lambda \qquad\; + \nu &= 0 \\ -3\lambda - \mu - \nu &= 0 \\ (z_0-3)\lambda + \mu - \nu &= 0 \end{aligned}$$

äquivalent, aus dem folgt: $\nu = 2\lambda$, $\mu = -5\lambda$, $\lambda(z_0-10) = 0$.
Für $z_0 = 10$ gibt es nach diesen Beziehungen für jedes $\lambda \neq 0$ ein $\mu \neq 0$ und $\nu \neq 0$, für die (6) gilt, d.h., für $z_0 = 10$ sind die Vektoren $\mathfrak{r}_0 - \bar{\mathfrak{r}}_0$ linear abhängig. In diesem Falle schneiden sich g_1 und g_2; vgl. Bild 19/1 . Die Koordinaten des Schnittpunktes berechnet man wie folgt.



19/1

Für die Gleichung

$$\mathfrak{r}_0 - \bar{\mathfrak{r}}_0 = \bar{t}_S \bar{\mathfrak{a}} - t_S \mathfrak{a}$$

schreibt man das System

$$(7) \quad \begin{aligned} -2 &= \bar{t}_S \\ -3 &= -\bar{t}_S + t_S \\ z_0 - 3 &= -\bar{t}_S - t_S , \end{aligned}$$

aus dessen erster und zweiter Gleichung sich $t_S = -5$, $\bar{t}_S = -2$ ergibt. Danach kann aus der Gleichung für g_1 oder aus der Gleichung für g_2 der Schnittpunkt S berechnet werden: S (-1;6;5).

2 . V a r i a n t e der Lösung:
Wie oben stellt man zunächst fest, daß für keinen Wert von z_0 die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ parallel zueinander sein können und $g_1 \parallel g_2$ sowie $g_1 = g_2$ damit ausgeschlossen sind. Nun untersucht man sofort das System (7) auf mögliche Lösungen t_S und $\bar{t}_S$ und findet, daß die dritte Gleichung von (7) für die Lösungen der ersten beiden Gleichungen $t_S = -5$ und $\bar{t}_S = -2$ nur für $z_0 = 10$ erfüllt ist. Damit ist gefunden, daß g_1 und g_2 für $z_0 = 10$ einen Schnittpunkt haben, während für $z_0 \neq 10$ das System (7) keine Lösung hat und somit g_1 und g_2 windschief sind. Die Koordinaten des Schnittpunktes findet man wie oben.

Interessierte Schüler können als weitere Aufgaben dieser Art z. B. die gegenseitige Lage folgender Geradenpaare untersuchen.
g_1 mit der Gleichung $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + t\,\mathfrak{a}$; für
g_2 mit der Gleichung $\mathfrak{r} = \bar{\mathfrak{r}}_0 + \bar{t}\,\bar{\mathfrak{a}}$

a) $\mathfrak{r}_0(0;0;0)$, $\mathfrak{a}(1;1;0)$; $\bar{\mathfrak{r}}_0(4;4;\bar{z}_0)$, $\bar{\mathfrak{a}}(-1;-1;0)$;
b) $\mathfrak{r}_0(0;0;0)$, $\mathfrak{a}(-1;1;0)$; $\bar{\mathfrak{r}}_0(4;4;\bar{z}_0)$, $\bar{\mathfrak{a}}(-1;0;0)$.

Bei solchen etwas allgemein gestellten Aufgaben ist es zweckmäßig, der Lösung einer Aufgabe Zeichnungen hinzuzufügen, aus denen für jeden auftretenden Fall die gegenseitige Lage von g_1 und g_2 ersichtlich ist. Dabei müssen sich die Schüler überlegen, daß z.B. mit der Angabe $\mathfrak{p}_0(-1;1;z_0)$ nicht ein fester Punkt des Raumes gegeben ist, sondern je nach der Wahl von z_0 ein Punkt der Geraden, die durch den Punkt P_0' $(-1;1;0)$ geht und den Vektor $\mathfrak{n}(0;0;1)$ zum Richtungsvektor hat. Das zieht aber nach sich, daß im Beispiel g_1 eigentlich eine (einparametrige) Schar von Geraden ist, wodurch die Fallunterscheidungen überhaupt erst auftreten können. Mit anderen Worten, die nachträgliche Analyse der rechnerisch gefundenen Lösung bei der Anfertigung der entsprechenden Skizzen zwingt die Schüler, ihre Berechnungen geometrisch zu interpretieren. Sie führt so zu tieferem Verstehen des Erlernten, verbessert das Vorstellungsvermögen und führt zu neuen Erkenntnissen. Aufgaben wie im Beispiel, in denen eine Koordinate eines vorgegebenen Punktes nicht fixiert ist, bereiten in starkem Maße die analytische Behandlung des Projizierens eines Punktes oder einer Geraden auf die Koordinatenebenen vor.

Die Behandlung der Stoffeinheit 1.1. wird mit der Untersuchung der gegenseitigen Lage von Geraden des Raumes und den Koordinatenebenen eines vorgegebenen Koordinatensystems $\{0; \mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}\}$ abgeschlossen.

Dabei interessieren insbesondere Existenz und Lage des Schnittpunktes einer Geraden mit den Koordinatenebenen und die Projektion einer Geraden auf die Koordinatenebenen. Die Problematik ist den Schülern aus der darstellenden Geometrie bereits bekannt. Es geht hier darum zu zeigen, wie man sie analytisch behandelt, vgl. Lehrbuchtext. Dabei wird verwendet, daß die Schüler inzwischen wissen, wie man analytisch feststellt, ob zwei durch ihre Parametergleichungen vorgegebene geometrischen Gebilde einen gemeinsamen Punkt haben und welche Koordinaten dieser Punkt hat. Daß es sich hier nicht wie bisher um zwei Geraden, sondern jeweils um eine Gerade und eine Koordinatenebene handelt, ändert nichts am Wesen der Sache.

<u>1.2. Zur Stoffeinheit "Skalarprodukt"</u>

Im Unterricht in Klasse 11 wurden bei der Einführung in die Vektorrechnung die Menge der an einem Punkt angreifenden Kräfte und die Menge der Verschiebungen des Raumes betrachtet. Aus dem Physikunterricht ist den Schülern bekannt, daß die Elemente beider Mengen miteinander verknüpft werden können, indem man jedem Element $\mathfrak{f}$ der Menge der im Punkt P angreifenden Kräfte und jeder Verschiebung $\mathfrak{s} = \overrightarrow{PQ}$ eine Zahl zuordnet, die von $\mathfrak{f}$ längs des Weges $\mathfrak{s}$ verrichtete Arbeit. Diese Arbeit wird durch die Gleichung

$$W = \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{s} = \begin{cases} |\mathfrak{f}| \cdot |\mathfrak{s}|, & \text{wenn } \mathfrak{f} \text{ längs der gerichteten Strecke } \overrightarrow{PQ} \text{ wirkt} \\ |\mathfrak{f}| \cdot |\mathfrak{s}| \cos \sphericalangle (\mathfrak{f}, \mathfrak{s}), & \text{wenn } \mathfrak{f} \text{ nicht längs der gerichteten Strecke } \overrightarrow{PQ} \text{ wirkt} \end{cases}$$

definiert.

Mathematisch definiert man für zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ihr sogenanntes Skalarprodukt

(8) $$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = |\mathfrak{a}||\mathfrak{b}| \cos \sphericalangle (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}),$$

leitet die dafür geltenden Rechenregeln her und zeigt danach, daß es z.B. in der Geometrie und der Physik viele Anwendungsmöglichkeiten für das Skalarprodukt gibt.

Vorarbeit für die Definition (8) wurde bereits in Klasse 11 bei der Definition des Winkels zwischen zwei Vektoren geleistet, indem festgelegt wurde, daß der Nullvektor $\mathfrak{o}$ auf jedem Vektor $\mathfrak{a}$ (also auch auf sich selbst) senkrecht steht. Durch diese, damals recht willkürlich erschienene, Festlegung ist für beliebige Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ der Winkel $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ definiert. Das Skalarprodukt zweier Vektoren kann durch die Beziehung (8) ohne Fallunterscheidungen definiert werden (auch für $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$). Es ergibt sich aus (8) (vgl. Lehrbuch) die wichtige Folgerung

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0 \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{a} \text{ orthogonal } \mathfrak{b}.$$

Bevor man sich den Eigenschaften des Skalarprodukts zuwenden kann, muß man den Begriff "Projektion eines Vektors $\mathfrak{b}$ auf den Vektor $\mathfrak{a}$" einführen und beweisen, daß für zwei beliebige Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ stets $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{b}} \cdot \mathfrak{b}$ ist. Dieser Satz wird einmal für den Beweis der Distributivität der skalaren Multiplikation benötigt. Wichtiger für das Verständnis der Zusammenhänge ist jedoch, daß aus $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}$ die Gleichheit des Skalarproduktes für alle die Vektoren $\mathfrak{b}$ folgt, deren Projektion bei gegebenem $\mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}$ ein und derselbe Vektor ist. Dadurch ist die skalare Multiplikation zweier Vektoren nicht umkehrbar eindeutig, im Gegensatz zur Multiplikation im Bereich der reellen Zahlen. Während also die Addition zweier Vektoren eine umkehrbar eindeutige Operation ist, genau so wie die Addition im Bereich der reellen Zahlen, und folglich eine Subtraktion für Vektoren definiert werden konnte, gibt es keine "skalare Division" für Vektoren. Die Schüler lernen erstmalig eine solche Produktbildung kennen. Deshalb ist es wichtig, daß sie den Begriff "Projektion eines Vektors $\mathfrak{b}$ auf den Vektor $\mathfrak{a}$" und den mathematischen Genalt des Satzes " $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{b}$ " verstehen. Bei der inhaltlichen Erarbeitung dieses Satzes sollten zum Vergleich die wenig vorher behandelten Begriffe "Projektion eines Punktes auf eine Ebene", "Projektion einer Geraden auf eine Ebene", "Projektion eines Vektors auf eine Ebene" herangezogen werden.

Zunächst muß man klären, was man unter der "Projektion P_g eines Punktes P auf eine Gerade g" versteht und daß die "Projektion einer gerichteten Strecke $\overline{PQ}$ auf eine Gerade g" die (gerichtete) Strecke ist, die aus den Projektionen der Punkte von $\overline{PQ}$ auf g besteht. Wenn man sich überlegt, daß einerseits die Repräsentanten des Vektors $\mathfrak{b}$ unendlich viele gerichtete Strecken bestimmen und andererseits unendlich viele Geraden existieren, die für $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ diesen Vektor zum Richtungsvektor haben, wird klar, daß zur Definition des Begriffes "Projektion eines Vektors $\mathfrak{b}$ auf den Vektor $\mathfrak{a}$" zweierlei gezeigt werden muß.

1. Für eine gerichtete Strecke $\overline{PQ}$ und zwei beliebige Geraden g_1 und g_2 mit dem Richtungsvektor $\mathfrak{a}$ sind die gerichteten Strecken $\overline{P_{g_1}Q_{g_1}}$ und $\overline{P_{g_2}Q_{g_2}}$ parallelgleich.
2. Für zwei parallelgleiche Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ und jede beliebige Gerade g mit dem Richtungsvektor $\mathfrak{a}$ sind die gerichteten Strecken $\overline{P_gQ_g}$ und $\overline{R_gS_g}$ parallelgleich.

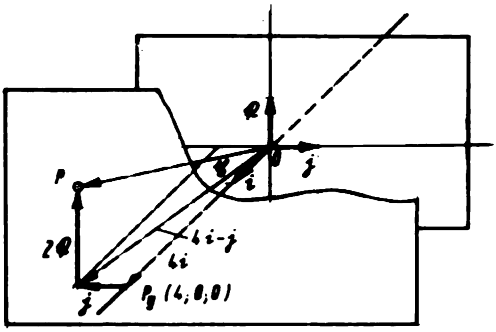
Wegen der Anschaulichkeit dieser beiden Sachverhalte kann man auf ihren exakten Nachweis verzichten.

Festigen kann man den Begriff "Projektion eines Vektors $\mathfrak{b}$ auf den Vektor $\mathfrak{a}$" mit Hilfe einiger weniger einfacher Beispiele, denen Skizzen beigefügt werden.

B e i s p i e l:

Es seien die Projektionen des Vektors $\mathfrak{g} = \mathfrak{i} - \mathfrak{j} + 2\mathfrak{k}$ auf die Basisvektoren zu ermitteln.

Man schreibt $\mathfrak{v} = \overrightarrow{OP}$ und legt zunächst durch O und P je eine Ebene, die senkrecht zur x-Achse (dieser Geraden g mit dem Richtungsvektor $\mathfrak{i}$) verläuft. Diese Ebenen werden durch O bzw. P, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ bestimmt (denn $\{O; \mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}\}$ ist ein kartesisches Koordinatensystem) und schneiden g in O bzw. im Punkte P_g (4;0;0); vgl. Bild 23/1. Demnach ist $\overrightarrow{OP_g} = 4\mathfrak{i}$ die Projektion von $\mathfrak{v}$ auf $\mathfrak{i}$, d.h., $\mathfrak{v}_{\mathfrak{i}} = 4\mathfrak{i}$. Analog findet man $\mathfrak{v}_{\mathfrak{j}} = -\mathfrak{j}$, $\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}} = 2\mathfrak{k}$. Abschließend kann man feststellen, daß alle Vektoren der Gestalt $\bar{\mathfrak{v}} = 4\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}$, darunter auch $\mathfrak{v}_0 = 4\mathfrak{i}$, mit $\mathfrak{v}$ die gleiche Projektion auf $\mathfrak{i}$ haben.



23/1

Die Beweise der Eigenschaften des Skalarproduktes enthalten keine besonderen Schwierigkeiten. Es ist nicht erforderlich, sie alle bis ins kleinste auszuführen. Es genügt, wenn an zwei von diesen Beweisen das Anwenden der neu eingeführten Begriffe und Formeln geübt wird, damit die Schüler mit dem neu Erlernten sicher umgehen können. Das erweiterte Distributivgesetz gehört inhaltlich in Lerneinheit 10 und sollte dort vom Lehrer formuliert werden, damit es zur Lösung der Aufgaben a40 bis a44 zur Verfügung steht. Der Nachweis seiner Gültigkeit wird jedoch, da er unmittelbar das Herleiten der Beziehung
$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$ vorbereitet und von den Schülern selbständig bewältigt werden kann, erst auf Seite 23 des Lehrbuches, im Auftrag A 16, verlangt.

Als erste Anwendung des Skalarproduktes in der ebenen Elementargeometrie werden in dieser Stoffeinheit die Beweise einiger Sätze aus der Geometrie des rechtwinkligen Dreiecks und der Beweis des Kosinussatzes der ebenen Trigonometrie mit Hilfe der Vektorrechnung behandelt. Zwei dieser Beweise sind im Lehrbuch ausgeführt.

1.3. Zur Stoffeinheit 1.3. "Anwenden des Skalarproduktes in der analytischen Geometrie und auf physikalische Probleme"

Der Lehrplan sieht, zusammengedrängt ausgedrückt, folgende Anwendungen des Skalarproduktes vor.

a) Berechnung von Winkeln zwischen Vektoren, insbesondere des Schnittwinkels zweier Geraden

b) Untersuchung der Eigenschaften von Kreis und Kugel

c) Lösen physikalischer Probleme

Zu a)

Mit Hilfe des Skalarproduktes läßt sich nach der Formel

(9) $$\cos \sphericalangle (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \frac{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}}{|\mathfrak{a}||\mathfrak{b}|}$$

für alle von $\mathfrak{o}$ verschiedenen Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ der Winkel $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ berechnen. Sind nun $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ die Richtungsvektoren zweier Geraden g_1 und g_2, dann kann man zeigen, daß sich für diese Geraden aus der Formel

(10) $$\cos \alpha = \left| \frac{\mathfrak{a} \cdot \bar{\mathfrak{a}}}{|\mathfrak{a}||\bar{\mathfrak{a}}|} \right|$$

für jede beliebige Wahl von $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ ein und derselbe Winkel α mit $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ ergibt. Man bezeichnet α als Schnittwinkel der nicht orientierten Geraden g_1 und g_2. Sind die Geraden orientiert und ist dadurch die Wahl von $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ von vornherein eingeschränkt auf diejenigen Richtungsvektoren, die mit einem bestimmten Richtungsvektor $\mathfrak{a}_0$ bzw. $\bar{\mathfrak{a}}_0$ von g_1 bzw. g_2 gleich gerichtet sind, dann ist bereits der durch die Formel

(11) $$\cos \alpha = \frac{\mathfrak{a} \cdot \bar{\mathfrak{a}}}{|\mathfrak{a}||\bar{\mathfrak{a}}|}$$

bestimmte Winkel α unabhängig von der Wahl der $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ für g_1 und g_2. Er heißt Scheitelwinkel der orientierten Geraden g_1 und g_2.

Im Unterricht ist es auf Grund der Vorbildung der Schüler im allgemeinen ratsam, dem Lehrbuchtext zu folgen. Man sollte also nicht die soeben angestellten analytischen Betrachtungen in den

Vordergrund stellen, sondern von der elementargeometrischen Definition des Schnittwinkels zweier Geraden ausgehen. Die Unabhängigkeit der Winkel α in (10) und (11) von der Wahl der Richtungsvektoren $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ von g_1 und g_2 sollte aber in jedem Falle erwähnt werden. Ebenfalls Erwähnung finden sollte die Tatsache, daß durch die Beziehungen (10) und (11) nicht orientierten bzw. orientierten parallelen Geraden der Winkel 0 bzw. 0 oder π und nicht orientierten windschiefen Geraden der in der darstellenden Geometrie definierte Winkel zwischen ihnen zugeordnet wird.
Bemerkung: In Klasse 11 wurde festgestellt, daß der Nullvektor zu jedem Vektor parallel ist. Der Begriff "parallel" wurde bei der Einführung in die Vektorrechnung eingeführt, da der Begriff "linear unabhängig" nicht zur Verfügung stand und an der betreffenden Stelle auch nicht eingeführt werden konnte. Später wurde definitorisch festgelegt, daß der Winkel zwischen einem Vektor und dem Nullvektor $\frac{\pi}{2}$ beträgt, daß er also zu jedem Vektor orthogonal ist. Mit dieser Festlegung trägt man der beim axiomatischen Aufbau der Theorie der metrischen Vektorräume üblichen Definition Rechnung, nach der zwei Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ orthogonal zueinander heißen, wenn ihr Skalarprodukt den Wert Null hat.

Diese Festlegung wurde bei der Behandlung des Skalarprodukts verwendet, und sie wird auch im folgenden bei der Einführung des Vektorprodukts benutzt. ($\cos \sphericalangle (\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$ ist damit definiert und gleich 0. Man kann also $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = |\mathfrak{a}||\mathfrak{b}| \cos \sphericalangle (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ohne Fallunterscheidungen schreiben, und auch $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0 \longleftrightarrow \mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$ gilt ohne Fallunterscheidungen).
Bei der Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren entstehen oft folgende falsche Vorstellungen.

Aus $g_1 \parallel g_2$ folge $\sphericalangle(g_1, g_2)$ gleich 0 oder π.

Analog dazu folge aus $\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{b}$ auch $\sphericalangle (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ gleich 0 oder π.
Das aber steht für $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ im Widerspruch zu der getroffenen Festlegung $\sphericalangle (\mathfrak{o}, \mathfrak{b}) = \frac{\pi}{2}$. Der Trugschluß besteht darin, daß aus (10) oder (11) zwar der Winkel zwischen zwei beliebigen parallelen Geraden berechnet werden kann, da deren Richtungsvektoren stets von $\mathfrak{o}$ verschieden sind, nicht aber aus (9) der Winkel zwischen zwei beliebigen parallelen Vektoren, denn (9) ist nur für $|\mathfrak{a}| \neq 0$ und $|\mathfrak{b}| \neq 0$ definiert.

Zu b)

In der Geometrie gibt es eine Konvention, nach der ein Körper und die diesen Körper begrenzende Fläche sowie ein ebenes Flächenstück und die dieses Flächenstück begrenzende Kurve jeweils dieselbe Bezeichnung tragen. Aus dem Zusammenhang ist zu entnehmen, in welchem Sinne z.B. "Kugel", "Kegel", "Zylinder", "Polyeder" bzw. "Kreis", "Vieleck" usw. an der betreffenden Stelle verwendet werden. Auf diese Weise haben die Schüler die Bezeichnungen "Kugel" und "Kreis" zwar schon oft verwendet, aber es fällt ihnen manchmal schwer, für Kreis und Kugel Definitionen anzugeben. Folgende Formulierung der Definition wird empfohlen:

> "Kugel $K(M,r)$ [Kreis $k_\alpha(M,r)$] mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r heißt die Menge aller der Punkte [einer Ebene α durch M], die von M den Abstand r haben."

Der durch $K(M,r)$ bestimmte Kugelkörper [die durch $k_\alpha(M,r)$ bestimmte Kreisfläche] ist dagegen die Menge aller der Punkte [der Ebene α], deren Abstand von M kleiner oder gleich r ist.

Dieses strenge Auseinanderhalten von Kugel und Kugelkörper, Kreis- und Kreisfläche erleichtert das Aufstellen der entsprechenden Gleichungen. Außerdem wird dadurch das Behandeln des Stoffgebietes 2. "Kegelschnitte" damit vorbereitet, da dort der Kegel ebenfalls als Fläche aufgefaßt werden muß.

Wenn den Schülern die Beziehung $|\overline{PM}| = (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_M)\cdot(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_M)$ $= \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2}$ für den Abstand des Punktes P mit dem Ortsvektor $\mathfrak{x}$ vom Punkte M mit dem Ortsvektor $\mathfrak{x}_M$ geläufig ist, so erleichtert das ihnen sowohl das Aufstellen der Gleichung

(12) $$(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_M)(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_M) = r^2$$

für die Kugel $K(M,r)$ als auch den Übergang von dieser vektoriellen Gleichung zu der vektorfreien Kugelgleichung

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = r^2.$$

Auch die Beziehungen $(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_M)(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_M) \leq r^2$ bzw. $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 \leq r^2$ werden dann leichter als Gleichungen des durch $K(M,r)$ bestimmten Kugelkörpers erkannt.

Anders ist es mit der Gleichung des Kreises $k_\alpha(M,r)$. Betrachtet man die Ebene α unabhängig von ihrer Lage im Raum und gibt in ihr ein kartesisches Koordinatensystem $\{O; \mathfrak{i}, \mathfrak{j}\}$ vor, dann hat der Kreis $k_\alpha(M,r)$ dieser Ebene in α bezüglich $\{O; \mathfrak{i}, \mathfrak{j}\}$ die Gleichung

(13) $$(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_M)(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_M) = r^2$$

bzw.

(14) $$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2.$$

Die vektorielle Form dieser Gleichung stimmt ihrer Gestalt nach mit der vektoriellen Gleichung für die Kugel $K(M,r)$ im Raum überein. Inhaltlich unterscheiden sie sich jedoch wesentlich, was die vektorfreie Form beider Gleichungen deutlich macht. Dieses Phänomen erklärt sich dadurch, daß sich (12) auf ein Koordinatensystem des Raumes und (13) auf ein Koordinatensystem der den Kreis enthaltenden Ebene bezieht. Dadurch bestimmt (12) eine Fläche, (13) aber eine Kurve.

Faßt man dagegen den Kreis $k_\alpha(M,r)$ als Kreis im Raum auf und möchte für ihn diese Gleichung bezüglich eines vorgegebenen Koordinatensystems $\{O; \mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}\}$ aufstellen, dann muß man ihn nach seiner Definition als Schnittfigur der Kugel $K(M,r)$ mit der Ebene ansehen. Dementsprechend besteht er aus der Menge aller der Punkte P mit dem Ortsvektor $\mathfrak{x}$, die sowohl der Kugelgleichung (12) als auch der Gleichung

$$\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{x}}_0 + u\mathfrak{a} + v\mathfrak{b}, \quad -\infty < u < +\infty, \quad -\infty < v < +\infty,$$

der Ebene α genügen, in der $\bar{\mathfrak{x}}_0$ ein beliebiger Punkt von α und $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei linear unabhängige Richtungsvektoren von α sind. Der Kreis $k_\alpha(M,r)$ wird also im allgemeinen Falle durch das Gleichungssystem

$$(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_M)(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_M) = r^2$$

$$\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{x}}_0 + u\mathfrak{a} + v\mathfrak{b}, \quad -\infty < u < +\infty, \quad -\infty < v < +\infty,$$

und, wenn α die xy-Ebene ist, durch das System

$$(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_M)(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_M) = r^2,$$

$$\mathfrak{x} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty,$$

bzw.

(15) $$(x - x_M)^2 (y - y_M)^2 = r^2, \quad z = 0,$$

gegeben.

Der Unterschied zwischen (14) und (15) besteht also darin, daß (14) die Gleichung eines Kreises in einer losgelöst von ihrer Lage im Raum betrachteten Ebene ist, während (15) einen in der xy-Ebene des Raumes gelgenen Kreis bestimmt.
Die anschließenden Untersuchungen über die gegenseitige Lage von Kreis und Gerade und die Verwendbarkeit der Vektorrechnung beim Beweis von Sätzen über Winkel, Strecken und Geraden am Kreis dienen einmal der Wiederholung der über den Kreis bisher behandelten Sätze und damit der Vorbereitung auf das Abitur. Andererseits üben sich die Schüler dabei in der Anwendung der Vektorrechnung auf elementargeometrische Probleme und festigen insbesondere ihre Kenntnisse über das Skalarprodukt und seine Verwendungsmöglichkeiten. Außerdem wird durch diese Aufgaben bei den Schülern die Fähigkeit, direkte Beweise selbständig zu führen, vertieft.

Zu c)

Mit wenigen Ausnahmen wurden im bisherigen Physikunterricht wegen des fehlenden Vorlaufs in Mathematik keine Vektoren verwendet, so daß Skalar- und Vektorprodukte im Physikunterricht nicht als solche bezeichnet wurden.
Dieser irreführende Eindruck kann nach der Behandlung dieser Produkte im Mathematikunterricht beseitigt werden. Für das Skalarprodukt ist dazu erforderlich, solche im Physikunterricht behandelten Formeln herauszustellen, die der Struktur nach als Skalarprodukte interpretiert werden können, und die in diese Formeln eingehenden Größen daraufhin zu untersuchen, ob sie diese Auslegung der betrachteten Formeln gestatten. Solche Formeln sind die Formel $W = F \cdot s \cdot \cos \sphericalangle (\mathfrak{f}, \mathfrak{s})$ für die Arbeit und die Formel $P_W = U \cdot I \cdot \cos \varphi$ für die Leistung des Wechselstromes.
Zweckmäßig erscheint in dieser Beziehung auch eine Absprache mit dem Physiklehrer, der bei der vor dem Abitur üblichen Wiederholung an geeigneten Stellen darauf hinweisen kann, welche physikalischen Größen als Vektoren interpretiert und welche Formeln als Skalar- bzw. Vektorprodukte aufgefaßt werden können.

1.4. Zur Stoffeinheit 1.4. "Vektorprodukt"

Das Vektorprodukt wird im Unterricht der Klasse 12 ausgehend vom Drehmoment eingeführt. Das ist im Lehrbuch ausführlich dargestellt.

Bisher kennen die Schüler zwei "Produkte", in denen wenigstens ein Faktor ein Vektor ist.

a) Das Produkt einer reellen Zahl λ mit einem Vektor $\mathfrak{a}$ – unter $\lambda\mathfrak{a}$ versteht man einen Vektor vom Betrage $|\lambda||\mathfrak{a}|$, der für $\lambda \geqq 0$ mit $\mathfrak{a}$ und für $\lambda < 0$ mit $-\mathfrak{a}$ gleichgerichtet ist

b) Das sogenannte skalare Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ – unter $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ versteht man die reelle Zahl $|\mathfrak{a}||\mathfrak{b}|\cos \sphericalangle(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$

Im Vektorprodukt zweier Vektoren kann man gewissermaßen die Ergänzung zu diesen zwei Produktbildungen sehen, denn das Vektorprodukt zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist ein Vektor $\mathfrak{c}$ vom Betrag $|\mathfrak{a}||\mathfrak{b}| \sin \sphericalangle(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$, der auf $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ senkrecht steht und mit $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in der Reihenfolge $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ ein Rechtssystem bildet (Einführung des Vektorproduktes vgl. Lehrbuch).

Da der Winkel zwischen einem Vektor $\mathfrak{a}$ und dem Nullvektor in jedem Falle definiert ist, entfallen bei der Definition des Vektorprodukts wiederum die Fallunterscheidungen. Es kann nach Einführung des Einheitsvektors $\mathfrak{n}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ als Vektor, der $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in der Reihenfolge $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{n}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ zu einem Rechtssystem ergänzt, in der kompakten Form

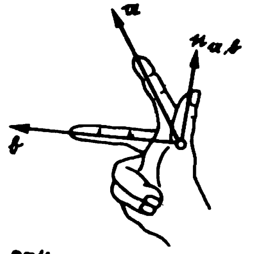
(16) $\qquad \mathfrak{a}\times\mathfrak{b} = \mathfrak{n}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\ |\mathfrak{a}||\mathfrak{b}| \sin \sphericalangle(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$

geschrieben werden.

Den Betrag

(17) $\qquad |\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}| = |\mathfrak{a}||\mathfrak{b}| \sin \sphericalangle(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$

kann man als Flächeninhalt eines von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aufgespannten Parallelogramms interpretieren. Dadurch prägt er sich leicht ein. Das Ermitteln von $\mathfrak{n}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ bereitet auch kaum Schwierigkeiten, wenn man mit den Vektoren $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{n}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ wie beim Ermitteln des Vektors $\mathfrak{k}$ des zugrundegelegten kartesischen Koordinatensystems die Rechte-Hand-Regel oder Dreifinger-Regel in Verbindung bringt; vgl. Bild 30/1.



30/1

Das Herleiten der Eigenschaften der vektoriellen Multiplikation dient im wesentlichen dazu, das Umgehen mit dem Vektorprodukt zu festigen und die Schüler in seiner Anwendung sicher werden zu lassen. Abschließend sollte man die Schüler dazu anhalten, ihre Aufstellung über die für die Multiplikation reeller Zahlen, die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl sowie die skalare Multiplikation von zwei Vektoren geltenden Gesetze durch die Gesetze für die vektorielle Multiplikation von zwei Vektoren zu ergänzen, so daß sie nun folgende Tabelle zur Verfügung haben.

Multiplikation	Ergebnis	Kommutativität	Assoziativität	Distributivität	Besonderheiten
$\lambda\mu$.	Zahl	$\lambda\mu=\mu\lambda$	$\lambda(\mu\nu)=(\lambda\mu)\nu$	$\lambda(\mu+\nu)=\lambda\mu+\lambda\nu$	
$\lambda\mathfrak{a}$	Vektor	$\lambda\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\lambda$	$\lambda(\mu\mathfrak{a})=(\lambda\mu)\mathfrak{a}$	$(\lambda+\mu)\mathfrak{a}=\lambda\mathfrak{a}+\mu\mathfrak{a}$ $\lambda(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=\lambda\mathfrak{a}+\lambda\mathfrak{b}$	Es gibt zwei Distributivgesetze
$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$	Zahl	$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}=\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a}$	-	$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})=\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{c}$	$\lambda(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})=(\lambda\mathfrak{a})\mathfrak{b}=\mathfrak{a}(\lambda\mathfrak{b})$ ergänzt das Assoziativgesetz " $\lambda\mathfrak{a}$ ".
$\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$	Vektor	antikommutativ $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}=-(\mathfrak{b}\times\mathfrak{a})$	—	$\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})=\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\times\mathfrak{c}$ $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}=\mathfrak{a}\times\mathfrak{c}+\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}$	$\lambda(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})=(\lambda\mathfrak{a})\times\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\times(\lambda\mathfrak{b})$

Am Schluß dieses Unterrichtsabschnittes sollte man die Frage der Umkehrbarkeit der vektoriellen Multiplikation noch kurz berühren. Bereits aus (16) kann man schließen, daß die vektorielle

Multiplikation keine umkehrbar eindeutige Operation ist. Schreibt man für

(16) $$|\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}|\,\mathfrak{n}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = \mathfrak{n}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\,|\mathfrak{a}||\mathfrak{b}|\sin\sphericalangle(\mathfrak{a},\mathfrak{b}),$$

dann ist bei vorgegebenem $\mathfrak{a}$ für alle $\mathfrak{b}$ das Vektorprodukt $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ gleich, die den gleichen Vektor $\mathfrak{n}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ bestimmen und für die (17) gilt. Für den Fall $|\mathfrak{a}| = 1$ sind das alle Vektoren $\mathfrak{b}$, für die $\mathfrak{b}_{\perp\mathfrak{a}}$ dem Betrage $|\mathfrak{b}|\sin\sphericalangle(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ und der Richtung nach gleich sind . Einfacher erhält man diese Aussage jedoch nach der Behandlung der für die vektorielle Multiplikation zweier Vektoren geltenden Gesetze aus der Beziehung $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\times\mathfrak{b}_{\perp\mathfrak{a}}$, die der Gleichung $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}$ für das Skalarprodukt entspricht.

Bevor man zu den Anwendungen des Vektorprodukts übergeht, müssen die Schüler die Komponentendarstellung für das Vektorprodukt kennenlernen (Lp 42). Die Herleitung der entsprechenden Formel läuft auf ein Anwenden des erweiterten Distributivgesetzes hinaus und kann gegebenenfalls von den Schülern selbständig ausgeführt werden.

Folgende Anwendungen des Vektorprodukts kommen für die Schüler in Frage:

a) Flächeninhaltsberechnungen. Sie sollten unmittelbar nach der Einführung des Vektorprodukts vorgenommen werden, um das Behalten der Definitionen des Vektorprodukts zu erleichtern und um die Schüler an das Arbeiten mit dem Vektorprodukt zu gewöhnen.

b) Beispiele für das Berechnen von Drehmomenten und für Aufgaben aus der Physik, bei denen Drehmomente eine Rolle spielen. Außerdem kann man die Schüler beauftragen, in ihren Physikbüchern Formeln zu ermitteln, die dieselbe Struktur wie (16) oder (17) haben und als Vektorprodukt gedeutet werden können.

1.5. Zur Stoffeinheit 1.5. "Zusammenfassende Betrachtungen zum axiomatischen Aufbau der Vektorrechnung"

Mit dem Behandeln dieser Stoffeinheit sind die folgenden allgemeinen Aufgabenstellungen verbunden.

1. Das bisherige Vorgehen soll in groben Zügen wiederholt werden. Schwerpunkte dieser Wiederholung sind der Vektorraum der Verschiebungen und die bewiesenen Regeln für das Rechnen mit Ver-

schiebungen sowie ein Überblick über die Anwendung der Verschiebungen in der Geometrie des Raumes.
Besondere Aufmerksamkeit kommt dabei dem erstgenannten Schwerpunkt zu, da er Ausgangspunkt für die sich anschließenden Betrachtungen sein soll. Es muß herausgestellt werden, daß in den behandelten Modellen von Vektorräumen und für die Elemente dieser Vektorräume neben den axiomatisch festgelegten Gesetzen 1' bis 7' der Definition A 1 des Lehrbuches eine große Anzahl weiterer Rechenregeln gilt, die für die Verschiebungen aus den Eigenschaften der Verschiebungen und nicht aus 1' bis 7' hergeleitet wurden. Es wurde z.B. auf Grund der Definition des Begriffes "Verschiebung" gefunden, daß es eine Verschiebung $\mathfrak{o} = \overrightarrow{AA}$ (die Nullverschiebung) gibt, daß für jede Verschiebung $\mathfrak{a} = \overrightarrow{AB}$ eine Verschiebung $(-\mathfrak{a}) = \overrightarrow{BA}$ (die zu $\mathfrak{a}$ entgegengesetzte Verschiebung) existiert und daß für jede Verschiebung $\mathfrak{a}$ gilt $\mathfrak{a} + \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} + (-\mathfrak{a}) = \mathfrak{o}$. Mit diesen Regeln sowie mit den für die Subtraktion von Verschiebungen und für die Multiplikation einer Verschiebung mit einer reellen Zahl hergeleiteten Regeln wurde im weiteren ständig gearbeitet. Es erscheint fast selbstverständlich, daß diese Regeln auch in all den anderen behandelten Modellen für Vektorräume gelten müßten.

2. Möchte man Gewißheit haben, ob die erarbeitete Vermutung (<u>Gelten die genannten Rechenregeln in allen Vektorräumen?</u>) richtig ist oder nicht, dann kann man untersuchen,
   a) ob es ein Modell eines Vektorraumes gibt, in dem die eine oder andere Regel nicht gilt - dann ist *für die betreffende Regel* die Vermutung widerlegt;
   b) ob in jedem bekannten Vektorraum sich die Vermutung bestätigt - damit ist jedoch noch nicht gesagt, daß sie sich in *jedem* Vektorraum bestätigt;
   c) ob sich diese Regeln unabhängig von den speziellen Eigenschaften der Elemente eines konkreten Vektorraumes ausschließlich aus den in allen Vektorräumen geltenden Gesetzen 1' bis 7' herleiten lassen - dann hat sich die Vermutung in vollem Umfangs als richtig erwiesen.

Da die ersten beiden Wege langwierige Einzeluntersuchungen erfordern und zudem zu keinem vollständigen Ergebnis führen kön-

nen, entscheidet man sich für den dritten Weg. Man würde nur im Falle eines Mißerfolges auf a) und b) zurückkommen, um wenigstens zu Teilergebnissen zu gelangen.
Ausgehend von dieser Problemstellung sollte an einigen Beispielen gezeigt werden, daß die angestrebten Beweise sich ohne nennenswerte Schwierigkeiten führen lassen, abgesehen davon, daß die ganze Betrachtungsweise für die Schüler neu und ungewohnt ist.

3. Als weiteres Detail aus der Theorie der Vektorräume kann den Schülern am Beispiel der Menge der n-Tupel reeller Zahlen (vgl. Lerneinheit A 28 im Lehrbuch) plausibel gemacht werden, daß die im Vektorraum der Verschiebungen eingeführten Begriffe "linear unabhängige Vektoren", "Basis" und "Koordinaten eines Vektors bezüglich einer Basis" fast aufs Wort genau für jeden n-dimensionalen Vektorraum definiert werden können. Die Koordinatenmethode, d.h. die numerische Charakterisierung der Elemente des betrachteten Vektorraumes, kann dadurch in jedem n-dimensionalen Vektorraum angewendet werden, ein Vorteil, den die Schüler aus ihrer bisherigen Erfahrung heraus einzuschätzen vermögen. Ein Beispiel zum Ermitteln einer an einem Punkt P angreifenden Kraft, die sich mit n an P angreifenden Kräften im Gleichgewicht befindet, kann den Vorteil der Koordinatenmethode gegenüber der graphischen Lösungsmethode noch deutlicher machen, z.B. bezüglich der Genauigkeit der Lösung des Rechenaufwandes bei Anwendung der Trigonometrie.

Ziel der angestellten Überlegungen ist es, den Schülern der Abiturklassen einen kleinen Einblick in die axiomatische Betrachtungsweise in der Mathematik zu geben und ihnen einmal zu zeigen, wie man, ausgehend von konkreten Beispielen, zur Entwicklung einer axiomatisch aufgebauten abstrakten Theorie kommt.
Weltanschaulich bedeutsam sind dabei die Art der Abstraktion und die Tatsache, daß die Ergebnisse der abstrakten und theoretischen Überlegungen das Wesentliche des untersuchten Sachverhaltes widerspiegeln und in der Praxis - in diesem speziellen Falle in der Praxis der mathematischen Wissenschaft - anwendbar sind. In diesem Zusammenhang sollte an einem Beispiel den Schülern auch der Nutzen gezeigt werden, den die axiomatische Behandlungsweise zu bringen vermag.

Die auf das Behandeln dieser Stoffeinheit verwendeten Unterrichtsstunden haben überwiegend wiederholenden und informatorischen Charakter, eine aktive Beherrschung der axiomatischen Methode wird nicht angestrebt.

Weil die dieser Stoffeinheit zugrunde liegenden mathematischen Einzelkenntnisse bereits vor längerer Zeit erarbeitet wurden, ist es möglich, diese Stoffeinheit in seminaristischer Form durchzuarbeiten, wobei sich Lehrervortrag und Schülervortrag sinnvoll ergänzen müssen. Auf diese Weise können die Schüler bereits während ihrer Schulzeit eine für die Hochschulen typische Arbeitsform kennenlernen. Voraussetzung für den Erfolg eines solchen Vorgehens ist jedoch eine intensive, langfristige Vorbereitung der vortragenden Schüler.

Bemerkung:

1. Im Unterschied zu den anderen Abschnitten des Stoffgebiets 1. (Stoffeinheiten 1.1. bis 1.4.) hat die Stoffeinheit 1.5. überwiegend theoretischen Charakter. Dementsprechend liegt der Schwerpunkt auch nicht bei der rechnerischen Verwertung der für das Verständnis der Problematik notwendigen Aussagen, sondern bei der inhaltlichen Erfassung des aufgeworfenen Problems und der Methoden zu seiner Lösung.
2. Um Mißverständnissen vorzubeugen, sei darauf hingewiesen, daß bei den Beweisen außer den Vektorraumaxiomen und bereits daraus abgeleiteten Fakten natürlich auch die Gesetze der Logik angewendet werden dürfen. So ist für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in \mathfrak{M}$ bei $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ natürlich auch $\mathfrak{a} + \mathfrak{c} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$, da in $\mathfrak{M}$ die Addition erklärt ist, sowohl $\mathfrak{a} + \mathfrak{c}$ als auch $\mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ eindeutig bestimmt sind und beide dasselbe Element von $\mathfrak{M}$ bezeichnen.

2. Hinweise zum Stoffgebiet 2. "Kegelschnitte"

2.0. Einleitung

Bei der Behandlung des Stoffgebietes 2. "Kegelschnitte" sollen die Schüler an einem instruktiven Beispiel und durch ein hohes Maß an eigener aktiver Tätigkeit erkennen, wie ein spezielles mathematisches Problem von verschiedenen Ausgangspunkten und mit Hilfe verschiedener Mittel und Methoden in Angriff genommen werden kann. Dabei soll den Schülern auch bewußt werden, welche mathematischen und logischen Zusammenhänge zwischen den einzelnen Methoden und den mit diesen Methoden erzielten Ergebnissen bestehen.

Kegelschnitte wurden bereits im Altertum untersucht. Sie sind im Zusammenhang mit der Erforschung des Kosmos durch bemannte Flugkörper auch heute noch von großem Interesse. Im Laufe der geschichtlichen Entwicklung der Mathematik sind viele Wege bei der Untersuchung dieser geometrischen Figuren begangen worden.

Der Unterricht im Stoffgebiet "Kegelschnitte" hat die Aufgabe, die Schüler vor allem mit wesentlichen Eigenschaften der Kegelschnitte, mit Konstruktionen und mit analytischen Darstellungen (Gleichungen) dieser Figuren bekanntzumachen; untersucht werden ebenfalls die Lageverhältnisse von Kegelschnitt und Geraden.

Das Stoffgebiet baut auf den Kenntnissen der Schüler in darstellender Geometrie auf. Dabei wird von der Definition der Kegelschnitte als ebene Schnitte von Kegeln ausgegangen, um die vorher erworbenen Fertigkeiten der Schüler im Konstruieren und im Lösen von Gleichungen und einfachen Gleichungssystemen zu vervollständigen.
Auf diese Weise dient dieses Stoffgebiet der Wiederholung der darstellenden Geometrie in Vorbereitung auf das Abitur, es erweitert die Allgemeinbildung der Schüler zu einem aktuellen naturwissenschaftlichen Thema, gibt Anregungen zu Wiederholungen aus dem Physikunterricht (Keplersche Gesetze) und stellt Lehrern und Schülern Beispiele für Kurven zur Verfügung, für die sich die Anwendung der Integralrechnung bei Flächeninhalts- und Volumenberechnungen echt erforderlich macht.

Die Bedeutung dieses Stoffgebietes für die geistige Bildung der Schüler ist vor allem darin zu sehen, daß die Schüler verschiedenartige mathematische Methoden - und damit auch Methoden des geistigen Arbeitens allgemein - zur Lösung des gleichen Problems anwenden lernen, wobei sie zum Teil selbst entscheiden müssen, welche Methoden dem Problem am besten gerecht werden und seine rationelle Lösung ermöglichen.

Im Hinblick auf die ideologische Bildung und Erziehung ist es wichtig, den Schülern bewußt zu machen, daß der gleiche mathematische Sachverhalt auf verschiedene Weise dargestellt und untersucht werden kann, ebenso daß Sachverhalte aus verschiedenen Bereichen der objektiven Realität durch die gleichen mathematischen Strukturen widergespiegelt werden (z.B. Kegelschnitte als Schnittfiguren geometrischer Körper und als Bahnen bei einer Bewegung in einem Kraftfeld). Der Lehrplan weist auf Seite 44 außerdem besonders darauf hin, daß am Beispiel der Bahnen künstlicher Himmelskörper die Bedeutung der Mathematik für Wissenschaft und Technik herauszustellen und auf die führende Rolle der Sowjetunion bei der friedlichen Erforschung des Kosmos einzugehen ist.

2.1. Zur Stoffeinheit 2.1. "Definition und Konstruktion der Kegelschnitte"

Nach einer kurzen Wiederholung (vgl. Lehrbuch, LE 1), die bei den Schülern die im weiteren benötigten Kenntnisse auffrischen soll, ist zunächst der Begriff "Kegel" neu zu definieren. Der Kegel, den die Schüler bisher kennengelernt haben, wurde als beschränkte Punktmenge und in der Mehrzahl aller Fälle als Körper aufgefaßt. Diese Definition des Kegels ist als Definition für den Begriff "Kegelschnitte" als Schnittfiguren eines Kegels und einer Ebene ungeeignet und muß durch die Definition des Kegels als unendliche Kegelfläche ersetzt werden. Dabei sollte man andeuten, welche Vielfalt von Flächen Kegelflächen durch die vorgenommene Verallgemeinerung darstellen, sich dann aber damit begnügen, daß die Schüler die für den folgenden Unterricht benötigte Definition des geraden Kreiskegels beherrschen. Da im folgenden ausschließlich gerade Kreiskegel betrachtet werden, bezeichnet man diese kurz als Kegel. Diese Beschränkung muß den Schülern vor allem dann bewußt sein, wenn sie schlechthin von "einem Kegel" sprechen. Es ist zu empfehlen, in Definitionen und Sätzen, die oft losgelöst vom Zusammenhang verwendet werden, die exakte Bezeichnung "gerader Kreiskegel" zu benutzen.

Zur <u>darstellend-geometrischen Konstruktion der Kegelschnitte</u> legt man die Grundrißebene senkrecht zur Achse des Kegels K und die den Kegelschnitt beim Schnitt mit K erzeugende Ebene ε senkrecht zur Aufrißebene, was wegen der Symmetrie des Kegels ohne Einschränkung der Allgemeinheit möglich ist. Man betrachtet zunächst den allgemeinen Fall, daß ε nicht durch die Spitze des Kegels geht und konstruiert für die auftretenden Fälle Grundriß und wahre Größe der Schnittfigur. Dabei kann man durch geeignete Wahl der Aufrißpunkte der Schnittfigur (vgl. Lehrbuch, LE 2 und LE 3) das Konstruktionsergebnis günstig beeinflussen. Eine solche Auswahl erfolgte gerade deshalb, damit qualitative, allgemeingültige Aussagen über Ellipse und Hyperbel (Existenz je zweier senkrecht zueinander verlaufender Symmetrieachsen und damit eines Mittelpunktes) getroffen werden können.
Bei diesen Konstruktionen ist zu beachten, daß sie nicht nur richtig, sondern auch mit hoher Genauigkeit ausgeführt werden. Dadurch fällt den Schülern auf, daß die Anwendung des Höhenkreisverfahrens (vgl. Lehrbuch, Aufgabe b 11 b)) besonders für nahe dem Aufriß gelegene Punkte des Aufrisses die Schnittfigur zu hoher Konstruktionsgenauigkeit führt, da schleifende Schnitte vermieden werden.
Nachdem von den Schülern Ellipse, Hyperbel, Parabel und, falls die Schnittebene die Kegelspitze enthält, die entarteten Kegelschnitte als die einzig möglichen Schnittfiguren eines geraden Kreiskegels mit einer Ebene erfaßt wurden, taucht die Frage auf, wie man diese e b e n e n Kurven als spezielle Punktmengen der sie enthaltenden Ebene charakterisieren kann. Die entarteten Kegelschnitte können von den Schülern mit Hilfe der analytischen Geometrie bereits beschrieben werden und werden deshalb aus den weiteren Betrachtungen ausgeschlossen. Für Ellipse, Hyperbel und Parabel gewinnt man mit Hilfe der Dandelinschen Kugeln ihre Ortsdefinitionen und zeigt anschließend, daß aus diesen Ortsdefinitionen je ein Konstruktionsverfahren für die betrachteten Kegelschnitte hergeleitet werden kann.

Bei der Behandlung dieser Probleme gibt es einiges zu beachten.

1. Beim Beweis der Sätze B 7, B 10 und B 12 des Lehrbuches wird der Satz verwendet, daß für jede von einem außerhalb einer

Kugel K(M,r) gelegenen Punkte P an K(M,r) gelegte Tangente der Abstand des Punktes P von den Tangentenberührungspunkten mit der Kugel gleich ist. Für zwei Tangenten - und dieser Fall liegt vor - wird durch diese Tangenten eine Ebene bestimmt, die K(M,r) in einem Kreis k (M_1,r_1) schneidet, für den die gewählten Tangenten ebenfalls Tangenten sind. Die Gleichheit $\overline{PA_1} = \overline{PF_1}$ folgt dann nach dem Spezialfall des Sehnen-Tangenten-Satzes (vgl. Stoffgebiet 1.), wenn die Sekante zur Tangente wird. Kürzer werden diese Überlegungen, wenn den Schülern die entsprechenden Verallgemeinerungen des Sehnen-, Sekanten- und Sekanten-Tangenten-Satzes auf die Kugel bereits beim Behandeln des Stoffgebietes 1. mitgeteilt werden.

2. Bei der dieser Stoffeinheit zugrunde gelegten Auffassung der Kegelschnitte als Schnittfiguren von Kegel und Ebene treten Kreise als Sonderfall der Ellipse auf. Eine doppelt überdeckte Strecke kann jedoch niemals beim Schnitt von Kegel und Ebene entstehen und ist deshalb kein Kegelschnitt.
Geht man dagegen von der Ortsdefinition der Ellipse
"Die Menge aller der Punkte einer Ebene, für die die Summe ihrer Abstände von zwei festen Punkten F_1 und F_2 konstant (z.B. gleich c ist), nennt man eine Ellipse"
aus, dann treten zwei Sonderfälle der Ellipse auf.
Für $F_1 = F_2$ ist die betreffende Ellipse ein Kreis und für $c = \overline{F_1F_2}$ entartet die betreffende Ellipse in eine doppelt überdeckte Strecke. Um das Auftreten des zweiten Sonderfalles zu unterbinden, muß bereits in Satz B7 der Einschub "ist größer als $\overline{F_1F_2}$" aufgenommen und bewiesen werden.
Analog dazu treten bei der üblichen Ortsdefinition der Hyperbel
"Die Menge aller der Punkte einer Ebene, für die der Absolutbetrag der Differenz ihrer Abstände von zwei festen Punkten F_1 und F_2 dieser Ebene konstant (z.B. gleich c) ist, nennt man eine Hyperbel"
die Mittelsenkrechte zu $\overline{F_1F_2}$ (für $c = 0$) und ein Geradenpaar (für $c = \overline{F_1F_2}$) als Sonderfälle der Hyperbel auf. Kegelschnitte als ebene Schnitte von Kegeln sind das jedoch beide nicht.

Man scheidet diese Sonderfälle deshalb durch den Einschub "größer als Null und kleiner als der Abstand von F_1 zu F_2" im Satz B 10 aus der Betrachtung aus.

3. Die Schüler lernen mit der Ortsdefinition je eine zweite Definition für Ellipse, Hyperbel und Parabel kennen. Im Falle der Ellipse geht die Äquivalenz der beiden Definitionen aus den Sätzen B7 und B8 hervor, von denen Satz B7 vollständig bewiesen, Satz B8 dagegen nur formuliert wird. Der Beweis läuft auf den Nachweis der Existenz eines Kegels und einer Ebene hinaus, die die gegebene Ellipse zur Schnittfigur haben. Diesen Beweisgedanken sollte man herausstellen. Da der Beweis rein konstruktiver Natur und etwas zeitaufwendig ist, wird er im Lehrbuch nicht gebracht. In Abhängigkeit von der jeweiligen Klassensituation kann es von Nutzen sein, den Beweis von Satz B10 zugunsten dieses Beweises fortzulassen. Der Beweis von Satz B8 ist in W. KRAMER, Darstellende Geometrie I [20], Seiten 136 f, ausführlich beschrieben.

   Wichtiger als der lückenlose Beweis der Sätze B7 und B8 und für die weltanschauliche Bildung förderlich ist jedoch, daß die Schüler verstehen, was Äquivalenz zweier Definitionen bedeutet und wie man sie nachweist. Die gleiche Problematik tritt bei Hyperbel und Parabel und für alle drei nicht entarteten Kegelschnitte im Zusammenhang mit der gemeinsamen Scheitelgleichung ein zweites Mal auf.

4. Bei der Herleitung der Ortsdefinitionen von Hyperbel und Parabel sind im Lehrbuch die Umkehrungen der Sätze B 10 und B 12 nicht formuliert. Das kann zum Anlaß genommen werden, das Problem der Umkehrung von Sätzen (Anzahl der Möglichkeiten, Gültigkeit) noch einmal aufzuwerfen und die entsprechenden Umkehrungen formulieren zu lassen.

5. Beim sich an die Ortsdefinitionen anschließenden Beschreiben der Konstruktion von Kegelschnitte kann man wiederholen, was die Schüler über die Lagemöglichkeiten für zwei Kreise in einer Ebene wissen. Bei dieser Wiederholung ist auf mathematisch einwandfreies Formulieren der entsprechenden Sätze zu achten. Bei den Konstruktionen sollen die Schüler die sich

aus den Ortsdefinitionen ergebenden Konstruktionsverfahren sicher beherrschen sowie saubere und genaue Zeichnungen anfertigen lernen.

Ellipse, Hyperbel und Parabel sind den Schülern dem Namen nach bereits vor der Behandlung des Stoffgebietes 2. "Kegelschnitte" bekannt. Aus dem Physikunterricht und aus Presseberichten über den Start und die Bahnen künstlicher Himmelskörper kennen sie die ungefähre Gestalt dieser Kurven und wissen, welche Bedeutung der Berechnung insbesondere der Ellipsenbahnen von Satelliten zukommt, für die die Kenntnis geeigneter Gleichungen für die Ellipsen elementare Voraussetzung ist. Der Mathematiklehrer sollte in Absprache mit dem Physiklehrer nicht versäumen, bei der Behandlung der Kegelschnitte Hinweise auf bestimmte himmelsmechanische und astronautische Probleme, die mit der Anwendung der Keplerschen Gesetze zusammenhängen und im Physikunterricht aus sachlichen Gründen nur berührt werden konnten, aus mathematischer Sicht zu geben und damit die Kenntnisse der Schüler in diesen Bereichen zu vertiefen. Entsprechend den Lehrplänen hat die Behandlung des Gravitationsfeldes im Physikunterricht gegenüber der Behandlung der Kegelschnitte im Mathematikunterricht, insbesondere der analytischen Behandlung, einen gewissen - wenn auch geringen - zeitlichen Vorlauf. Zu den Problemen, die auch im Mathematikunterricht erwähnt werden können, gehören Bahnform und Bahngeschwindigkeit von Himmelskörpern. Im Lehrbuch der Physik für Klasse 12 wird z.B. dargelegt, wie sich auf Grund einer Veränderung der Geschwindigkeit eines Erdsatelliten im Perigäum seiner Bahn die Bahnform gesetzmäßig verändert. Die Schüler sollten erfahren, daß sich dieses Problem mathematisch weiter durchdringen läßt, z.B. durch das Ermitteln der Bahn mit Hilfe der maßstäblichen zeichnerischen Darstellung der Bahn (Konstruktion von Punkten der Bahnkurve) und durch das Aufstellen der Gleichung der Bahn (Scheitelgleichung des Kegelschnitts).

Die erzieherischen Möglichkeiten, die mit diesem Gegenstand unmittelbar verbunden sind, sollte der Lehrer so gut wie möglich nutzen. Er sollte sich die Gelegenheit, die Schüler auf die Erfolge der sowjetischen Kosmosforschung und die dazu erforderliche hohe wissenschaftliche Leistung der Raketen- und Rechentechnik hinzuweisen, auf keinen Fall entgehen lassen.

2.2. Zur Stoffeinheit "Gleichungen der Kegelschnitte"

Bei der Behandlung dieser Stoffeinheit werden zunächst die Mittelpunktsgleichungen für Ellipse und Hyperbel sowie die Scheitelgleichung der Parabel hergeleitet, und zwar auf die traditionelle Art und Weise aus den Ortsdefinitionen dieser Kurven. Die Herleitungen sind einfach. Ungewohnt für die Schüler ist lediglich die Überlegung, daß der erhaltenen Gleichung eventuell mehr Punkte als die Punkte der Ausgangskurve genügen könnten, weil bei den Umformungen quadriert werden muß. Daß der erhaltenen Gleichung tatsächlich nur die Punkte der Ausgangskurve genügen, kann man durch systematisches Rückschließen von einer Gleichung auf die vorhergehende zeigen. (Dieser Weg ist für die Ellipse in "Mathematik, Lehrbuch für die 12. Klasse, A/C-Zweig, Verlag Volk und Wissen Berlin, 1965, Seiten 91 f, beschrieben.) Man kann aber auch zeigen, daß alle der abschließend erhaltenen Gleichung genügenden Punkte gleichseitig der Ortsdefinition der Ausgangskurve genügen.

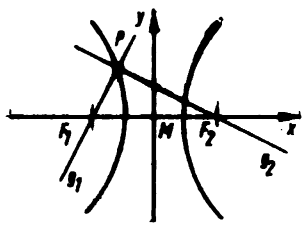
Einen wesentlichen Teil der für diese Stoffeinheit zur Verfügung stehenden Unterrichtszeit nimmt die Untersuchung des Schnittverhaltens von Kegelschnitt und Gerade ein. Im Unterricht in Klasse 11 wurde das Schnittverhalten von Geraden und beim Behandeln des Stoffgebietes 1. in Klasse 12 das Schnittverhalten von Gerade und Kreis untersucht. Nunmehr kann man diesen Unterrichtsabschnitt als erweiternde Wiederholung auffassen und auf die folgenden Schwerpunkte orientieren.

Die Schüler sollen <u>sicher mit Gleichungen für Gerade, Kreis und die Kegelschnitte umgehen</u> können (Ermitteln von Schnittpunkten, Aufstellen von Gleichungen nach vorgegebenen Bedingungen).
Sie sollen <u>Sicherheit in der geometrischen Interpretation</u> ihrer Ergebnisse erwerben.
Dazu kann beitragen, daß man z.B. nach jeder durchgerechneten Aufgabe wiederholen läßt, welche Gedanken dem eingeschlagenen Lösungsweg zugrunde gelegt wurden und worin das Ergebnis besteht. Auf diese Weise beugt man einem schematischen rechnerischen Vorgehen vor und befähigt die Schüler zum schöpferischen Anwenden des Erlernten. Dazu können Beweisaufgaben über spezifische Eigenschaften der Kegelschnitte dienen, indem man verschiedene von

den Schülern eingeschlagene Lösungswege einander gegenüberstellt und damit demonstriert, wie vielfältig der erlernte Apparat der analytischen Geometrie angewendet werden kann.

B é i s p i e l :
Für jede Hyperbel gibt es genau vier Punkte, in denen die zugehörigen Brennstrahlen orthogonal sind.
B e w e i s : Unter den "Brennstrahlen" eines Hyperbelpunktes P versteht man die Verbindungsstrecken von P zu den Brennpunkten F_1 und F_2 der Hyperbel. (Diese Bezeichnungsweise ist mathematisch paradox und nur aus dem Zusammenhang der Kegelschnitte mit Problemen der Physik heraus erklärbar.)

1. Man kann die Strecken $\overline{PF_1}$ und $\overline{PF_2}$ als Teile der durch P, F_1 bzw. P, F_2 bestimmten Geraden g_1 und g_2 auffassen und die Bedingung $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ für die Orthogonalität dieser Geraden dem Beweisgedanken zugrundelegen; vgl. Bild 42/1.



Die Geraden g_1 und g_2 sind entsprechend durch die Brennpunkte der Hyperbel $F_1(-e;0)$ und $F_2(e;0)$ und den Hyperbelpunkt $P_0(x_0;y_0)$ bestimmt. Dabei kann $x_0 \neq \pm e$ vorausgesetzt werden, da für $x_0 = \pm e$ im Dreieck $P_0F_1F_2$ entweder der Winkel bei F_1 ($x_0 = -e$) oder der Winkel bei F_2 ($x_0 = e$) ein Rechter ist und deshalb bei P_0 kein rechter Winkel sein kann. Für $x_0 \neq \pm e$ stellt man die Zweipunktegleichung für g_1 und g_2 auf.

$$\frac{y-0}{x+e} = \frac{0-y}{-e-x_0} \quad \text{bzw.} \quad y = \frac{y_0}{e+x_0}(x+e) \qquad (g_1)$$

$$\frac{y-0}{x-e} = \frac{0-y_0}{e-x_0} \quad \text{bzw.} \quad y = \frac{-y_0}{e-x_0}(x-e) \qquad (g_2)$$

Man untersucht, für welche Hyperbelpunkte $P_0(x_0;y_0)$ $m_1 = -\frac{1}{m_2}$, d.h.,

$$(18) \quad \frac{y_0}{e+x_0} = -\frac{1}{\frac{-y_0}{e-x_0}} \quad \text{bzw.} \quad y_0^2 = e^2 - x_0^2$$

gilt. Die Koordinaten x_0 und y_0 dieser Punkte müssen dem Gleichungssystem

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 , \qquad y_0^2 = e^2 - x_0^2$$

genügen, das vier Zahlenpaare zur Lösung hat.

$$\left(\frac{a}{e}\sqrt{b^2+e^2} ; \frac{b^2}{e}\right); \left(\frac{a}{e}\sqrt{b^2+e^2} ; -\frac{b^2}{e}\right) ;$$
$$\left(-\frac{a}{e}\sqrt{b^2+e^2} ; \frac{b^2}{e}\right); \left(-\frac{a}{e}\sqrt{b^2+e^2} ; -\frac{b^2}{e}\right)$$

2. Überlegt man sich, daß die Geraden g_1 und g_2 die Vektoren P_oF_1 mit den Koordinaten $(-e - x_o; -y_o)$ und $\overrightarrow{P_oF_2}$ mit den Koordinaten $(e - x_o; -y_o)$ zu Richtungsvektoren haben, dann erhält man die Beziehung (18) aus der Bedingung

$$\cos \measuredangle (\overrightarrow{P_oF_1}, \overrightarrow{P_oF_2}) = \frac{(-e-x_o)(e-x_o)+(-y_o)(-y_o)}{|\overrightarrow{P_oF_1}| \cdot |\overrightarrow{P_oF_2}|} = \frac{x_o^2 + y_o^2 - e^2}{\overline{P_oF_1} \cdot \overline{P_oF_2}} = 0$$

für die Orthogonalität von g_1 und g_2.

3. Eigentlich interessiert im gegebenen Zusammenhang nur die Orthogonalität der Strecken $\overline{P_oF_1}$ und $\overline{P_oF_2}$ (und nicht der diese Strecken enthaltenden Geraden), die bereits aus der Bedingung $\overrightarrow{P_oF_1} \cdot \overrightarrow{P_oF_2} = 0$ folgt, die mit (18) identisch ist.

4. Noch kürzer werden die anzustellenden Überlegungen, wenn man den Satz des Thales berücksichtigt. Dann müssen nämlich die gesuchten Punkte lediglich den Bedingungen (18) genügen, aus denen die Koordinaten der gesuchten Punkte wie eben berechnet werden können.

Die <u>Auswahl der Aufgaben</u> ist nach dem Lehrplan in die Hand des Lehrers gegeben, der dadurch der jeweiligen Klassensituation entsprechend leichtere oder schwerere, mehr oder weniger Beispiele heraussuchen kann. In jedem Falle sollten jedoch Parallelen zu analogen Sachverhalten beim Kreis gesucht werden und bei den Schülern der Eindruck zurückbleiben, daß es für die Kegelschnitte wie für die Kreise eine ganze Reihe von allgemeinen Eigenschaften gibt, die von der speziellen Gestalt eines gewählten Beispieles unabhängig sind.
Die Tangentengleichungen für Ellipse, Hyperbel und Parabel werden hier nur angegeben, wobei die Analogie zur Kreistangenten-

gleichung herausgestellt werden sollte. Ihre Herleitung erfolgt im Rahmen der Anwendungen der Differential- und Integralrechnung (bei der Differentiation irrationaler Funktionen). Diese Tangentengleichungen sind in einigen Beispielen anzuwenden.

Die Behandlung des Stoffgebiets 2. "Kegelschnitte" schließt mit einer <u>zusammenfassenden Wiederholung</u> ab, die einen Überblick über die gemeinsamen Eigenschaften der Kegelschnitte vermitteln soll und die durch die gemeinsamen Ortsdefinitionen und die gemeinsame Scheitelgleichung der Kegelschnitte ergänzt werden sollte.

Eine Scheitelgleichung für

Ellipse $\left(y^2 = 2\,\frac{b^2}{a}\,x - \frac{b^2}{a^2}\,x^2\right)$ und

Hyperbel $\left(y^2 = 2\,\frac{b^2}{a}\,x + \frac{b^2}{a^2}\,x^2\right.$

kann man in wenigen Schritten aus ihren Mittelpunktsgleichungen herleiten und durch Festlegungen für die Koeffizienten zu einer "gemeinsamen Scheitelgleichung"

$$y^2 = 2px + qx^2 \quad \text{mit} \quad \begin{cases} p = \frac{b^2}{a}\,, \quad q = -\frac{b^2}{a^2} & \text{für die Ellipse} \\ p = \frac{b^2}{a}\,, \quad q = \frac{b^2}{a^2} & \text{für die Hyperbel} \\ p = p\,, \quad q = 0 & \text{für die Parabel} \end{cases}$$

für alle drei Kegelschnitte kommen.

Es entsteht die Frage, weshalb neben den recht handlichen Mittelpunktsgleichungen für Ellipse und Hyperbel und der Scheitelgleichung der Parabel noch eine "gemeinsame Scheitelgleichung" für die Kegelschnitte von Interesse ist. Das wird erst verständlich, wenn man auf die gemeinsame Ortsdefinition der Kegelschnitte eingeht und zumindest erwähnt, daß man nach ihr (wie bei der Herleitung der Mittelpunktsgleichung) für die Kegelschnitte eben die gefundene gemeinsame Scheitelgleichung als Gleichung erhält und in die Lage versetzt wird, die dort auftretenden Koeffizienten geometrisch zu interpretieren. Die zur ausführlichen Behandlung dieses Komplexes notwendigen Herleitungen sind ihres Umfanges wegen nicht in den Lehrplan aufgenommen worden. Die diesbezüglichen Ausführungen im Lehrbuch sollen im Unterricht nur dazu benutzt werden, den Schülern die der gemeinsamen Scheitelgleichung der Kegelschnitte zugrundeliegenden mathematischen Gedankengänge sichtbar zu machen.

Der Lehrplan sieht für diesen letzten Abschnitt des Geometrieunterrichts an der Schule Schülervorträge vor. Für derartige Schülervorträge bieten sich hier zwei Themenkomplexe an, die jeweils von mehreren Schülern bearbeitet und langfristig vorbereitet werden können.

a) Mit der gemeinsamen Ortsdefinition der Kegelschnitte lernen die Schüler die dritte Definition für diese Kurven kennen. Für sie ist das im Stoffgebiet 2. "Kegelschnitte" aufgeworfene Problem der Äquivalenz von Definitionen neu, und es ist von Wert, daß sie sich damit auseinandersetzen. Man kann die verschiedenen Definitionen der Kegelschnitte einander gegenüberstellen, die jeweiligen Sonderfälle herausfinden und die für den Nachweis der Äquivalenz je zweier dieser Definitionen notwendigen Überlegungen (ohne ausführlichen Beweis) zusammenstellen lassen. Es ist ratsam, nicht einzelne Schüler losgelöst voneinander für die genannten Teilaufgaben zu benennen, sondern die nominierten Schüler zu einem Kollektiv mit gemeinsamer Themenstellung und abgegrenzten Teilaufgaben zusammenzufassen.
   Es ist herauszuarbeiten, daß man ein und dieselbe Kurve oft auf ganz verschiedene Weise charakterisieren kann, wie die angeführten Definitionen für die Kegelschnitte zeigen. Das gestattet es, in Abhängigkeit von der Art des gerade zu behandelnden Problems die geeignete Definition auszuwählen, und erleichtert oft wesentlich das Lösen der jeweiligen Aufgabe.

b) Man kann mehrere Schüler damit beauftragen, gemeinsame Eigenschaften der Kegelschnitte herauszufinden und darüber in gedrängter Form zu referieren. In Frage kommen dafür z.B. die gemeinsamen Definitionen der Kegelschnitte als Schnitte eines geraden Kreiskegels und die gemeinsame Ortsdefinition der Kegelschnitte, die Existenz von Brennpunkten für alle Kegelschnitte (den Sonderfall Kreis dabei beachten), die Analogie der Tangentengleichungen bezüglich der Mittelpunktsgleichungen von Ellipse und Hyperbel bzw. der Scheitelgleichung der

Parabel (die darauf zurückgeht, daß Ellipse, Hyperbel und Parabel Kurven zweiter Ordnung sind, was den Schülern allerdings nicht explizit gesagt wird) u.a.m.

Für den Erfolg der Schülervorträge ist es wichtig, daß die betreffenden Schüler ihr Thema frühzeitig erhalten, vom Lehrer an geeigneten Stellen Hinweise erhalten und bei der Gestaltung ihres Vortrages angeleitet werden.

3. Hinweise zum Stoffgebiet 3. "Nichtrationale Funktionen"

3.0. Einleitung

Das Ziel der Behandlung dieses Stoffgebietes besteht laut Lehrplan [10], Seite 45, darin, "die Kenntnisse der Schüler über die in den Klassen 9 und 10 eingeführten nichtrationalen Funktionen zu wiederholen und zu vertiefen sowie einige spezielle nichtrationale Funktionen einzuführen". Dabei wird auf die Methoden der Differential- und Integralrechnung bewußt verzichtet, und die hier durchgeführten Überlegungen sollen in erster Linie den Unterricht zum Stoffgebiet 4. "Differential- und Integralrechnung und Anwendungen (Fortsetzung)" entlasten und dort ein zügiges, systematisches Vorgehen ermöglichen - beispielsweise bei Kurvendiskussionen das Erörtern prinzipieller Fragen zum Lösen von Wurzelgleichungen oder goniometrischen Gleichungen ersparen.

3.1. Zur Stoffeinheit 3.1. "Eigenschaften einiger nichtrationaler Funktionen"

Der Inhalt dieser Stoffeinheit läßt sich in folgende Komplexe einteilen.

1) Begriff der nichtrationalen Funktion - Einteilung der Funktionen in ganze rationale, gebrochen rationale und nichtrationale mit entsprechenden Übungen und Beispielen
2) Operationen mit Funktionen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) als Möglichkeit, zu neuen Funktionen zu gelangen
   Inverse Funktionen und Verkettung von Funktionen als eine weitere derartige Möglichkeit
3) Wiederholung, Systematisierung, Vertiefung und Erweiterung der Kenntnisse über Potenz- und Wurzelfunktionen, Winkelfunktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen

Beim <u>Begriff der rationalen Funktion</u> handelt es sich weitgehend um eine Wiederholung aus dem Unterricht in Klasse 11. Während dort aber zuerst die ganze rationale Funktion erklärt und die Definition der rationalen (bzw. gebrochen rationalen) Funktion darauf zurückgeführt wurde, empfiehlt es sich, jetzt umgekehrt vorzugehen. Damit werden den Schülern die Zusammenhänge deutlicher, es wird einem mechanischen Wiederholen im eigentlichen Sinne des Wortes vorgebeugt, und der Begriff der nichtrationalen

Funktion wird klarer und leichter faßbar.
Nun legt man ja bewußt im Mathematikunterricht Wert auf eine klare begriffliche Unterscheidung der Funktion als einer Menge geordneter Paare von verschiedenen Möglichkeiten ihrer Beschreibung, etwa durch eine Gleichung mit zwei Variablen - auch wenn man häufig von gewissen verkürzten Bezeichnungsweisen Gebrauch macht, beispielsweise von der Funktion $y = x^2$ spricht. Deshalb wäre es wohl am befriedigendsten, man würde die rationalen Funktionen als solche Funktionen erklären, die durch endlich viele rationale Operationen aus der identischen Funktion mit der Menge P der reellen Zahlen bzw. einer Teilmenge von P als Definitionsbereich (und damit auch Wertevorrat) entstehen. Der Beginn mit einer solchen Erklärung würde aber nicht nur das Abstraktionsvermögen mancher Schüler zu stark beanspruchen, er würde vor allem das erst später eingehender zu behandelnde Verknüpfen von Funktionen voraussetzen, und diese Erklärung wäre auch für die Entscheidung, ob eine vorgelegte Funktion rational oder nichtrational ist, in vielen Fällen kaum handhabbar.
Aus diesem Grunde wird man in der Erklärung der rationalen Funktion auf die Gleichungen Bezug nehmen, durch die die Funktion beschrieben werden kann - so, wie das auch schon in Klasse 11 geschehen ist. Dabei treten jedoch Schwierigkeiten auf, die fast durchweg in der historisch gewachsenen Vermischung zweier Auffassungen vom Funktionsbegriff ihre eigentliche Ursache haben - der "modernen" Auffassung der Funktion als Menge geordneter Paare und der, die eigentlich auf EULER zurückgeht und nach der die Funktion im wesentlichen ein "analytischer Ausdruck" (Term) ist, zumindest durch einen solchen bereits eindeutig festgelegt ist.

Als Ausgangspunkt für die Erörterungen soll hier die Frage dienen, ob die Funktion φ mit $y = \varphi(x) = \dfrac{x \cdot \ln x}{(x^2 + 1) \cdot (\ln|x^3)}$ rational oder nichtrational ist. Stellt man sich auf den Standpunkt, daß eine Funktion niemals allein durch eine Gleichung beschrieben werden kann, sondern daß die Angabe des Definitionsbereichs dazugehört, so ist die Frage zunächst gar nicht zu beantworten. Nun wird aber i.a. - meist allerdings leider ohne ausdrückliche Verabredung - so verfahren, daß immer dann, wenn für eine Funktion f nur eine Gleichung $y = f(x)$ ohne Zusätze über den Definitionsbereich von f angegeben wird, stillschweigend der

Definitionsbereich des Terms $f(x)$ als Definitionsbereich von f anzusehen ist. In dem angeführten Beispiel wäre dann der Definitionsbereich von die Menge aller positiven reellen Zahlen.
Aber auch nachdem so Klarheit über den Definitionsbereich von φ geschaffen werden ist, kann die eingangs gestellte Frage noch verschieden beantwortet werden, je nachdem, ob man eine Funktion als rational unabhängig davon ansieht, wie ihr Definitionsbereich beschaffen ist, oder nicht. Verlangt man von einer rationalen Funktion f nicht nur, daß sie eine Darstellung

$$(*) \qquad f(x) = \frac{\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu}{\sum_{\nu=0}^{m} b_\nu x^\nu}$$

hat, sondern auch, daß ihr Definitionsbereich alle reellen Zahlen mit Ausnahme der Nullstellen des Nennerpolynoms von $(*)$ enthält, so ist φ nichtrational. Denn es gibt keine Darstellung $(*)$, die gewissermaßen automatisch alle nicht-positiven Zahlen aus dem Definitionsbereich ausschließt. (Dies kann ja allenfalls für endlich viele reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ geschehen, indem der Nenner die Linearfaktoren $x - x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ enthält.) Sieht man aber für die Eingruppierung einer Funktion unter die rationalen oder nichtrationalen Funktionen allein die Gleichung und nicht auch den Definitionsbereich als entscheidend an, so ist φ rational zu nennen, weil für $x > 0$ wegen $\ln(x^3) = 3 \ln x$ auch $y = \varphi(x) = \frac{x}{3(x^2 + 1)}$ geschrieben werden kann. Diese Auffassung hat allerdings zur Folge, daß jede reelle Funktion mit einem Definitionsbereich aus endlich vielen reellen Zahlen automatisch rational ist, weil sich bei einer solchen Funktion immer eine Darstellung der Form $(*)$ angeben läßt (sogar unendlich viele Darstellungen).
Um zu einer zweifelsfreien Beantwortung der aufgeworfenen Frage und zu einer exakten Begriffsbildung zu kommen, verfährt das Lehrbuch so, daß zunächst der Begriff der "auf der Menge M rationalen Funktion" gebildet wird, wobei über den Definitionsbereich M der Funktion f keinerlei einschränkende Voraussetzungen gemacht werden. Erfüllt M die oben erwähnte Bedingung, enthält es also alle reellen Zahlen mit Ausnahme der Nullstellen des

Nenners in der Darstellung (✱), so wird f als rational schlechthin bezeichnet und der Zusatz "auf der Menge M" weggelassen. Die Antwort auf die eingangs aufgeworfene Frage lautet damit: Die Funktion φ ist rational auf der Menge der positiven reellen Zahlen, aber sie ist nicht rational schlechthin. Man beachte: Daß im Gegensatz zu dieser Festlegung in der Funktionentheorie die entsprechende Funktion φ^* mit $w = \varphi^*(z) = \frac{z \cdot \ln z}{(z^2+1)\cdot\ln(z^3)}$, wobei z und w komplexe Variable sind, als rational (schlechthin) bezeichnet wird, steht zu dieser Eingruppierung nicht im Widerspruch. Es liegt lediglich daran, daß die Logarithmusfunktion im Komplexen für alle $z \neq 0$ definiert ist und demgemäß überall - also auch für negative reelle z - geschrieben werden kann $w = \varphi^*(z) = \frac{z}{3\,(z^2+1)}$, und auch an der Stelle $z = 0$ kann die hebbare Unstetigkeit (Lücke) durch die zusätzliche Festlegung $\varphi^*(0) = 0$ beseitigt werden.

Den Schülern muß übrigens ganz deutlich werden, daß für die Rationalität der Funktion f nur zu fordern ist, daß es eine Darstellung (✱) g i b t, und nicht, daß die Funktion von vornherein in dieser Form dargestellt ist. In diesem Zusammenhang ist es auch zweckmäßig, kurz auf die Frage der Eindeutigkeit der Darstellung und damit auf die normierte Darstellung bei rationalen Funktionen einzugehen; zur Bedeutung der normierten Darstellung vgl. auch die Seite 51 dieser Schrift.

Nur weil man weiß, daß etwa zu f mit $x \in (0;1)$ und $y = f(x) = x^3 + 7x^2 + 9$ keine andere Polynomdarstellung existiert, kann man sagen, f sei eine ganze rationale Funktion dritten Grades auf dem Intervall (0;1), und auch g mit $y = g(x) = \frac{x^2 + 2x}{3x - 1}$ kann nur deshalb mit Sicherheit als (unecht) gebrochen rational eingestuft werden, weil es keine Polynomdarstellung für g geben kann. (Die normierte Darstellung für g ist übrigens genau genommen $y = \frac{\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x}{x - \frac{1}{3}}$.)

An diese Fragen soll im Lehrbuch vor allem das Beispiel C 1 heranführen, und auch der anschließende Auftrag C 1 bietet Gelegenheit dazu - insbesondere e); die Definitionsbereiche sind bei diesem Auftrag übrigens absichtlich auf unterschiedliche Weise angegeben worden. Damit erscheint es dann auch wichtig, sich etwas eingehender mit dem Definitionsbereich zu beschäftigen und schließlich zur Vereinbarung C 2 zu gelangen, die die auf Seite 48 dieser Schrift erwähnte Auffassung ausdrücklich hervorhebt. Diese Vereinbarung entspricht dem allgemein üblichen Vorgehen und ist zur Vereinfachung der Sprech- und Schreibweise zweckmäßig; andererseits führt es aber gerade zu Widersprüchen, wenn man sich ihrer an den entsprechenden Stellen nicht bewußt ist.

Es sei aber darauf aufmerksam gemacht, daß mit dem geschilderten Vorgehen die auf die eingangs erwähnte Vermischung verschiedener Auffassungen zurückgehenden Bezeichnungsunstimmigkeiten noch nicht restlos beseitigt sind. Es ist nämlich üblich (vgl. z.B. Enzyklopädie der Elementarmathematik III[12], S. 34), beispielsweise für die Funktion f mit $y = f_1(x) = \frac{x^3 + 7x^2}{x^2}$ als normierte Darstellung $y = f_2(x) = x + 7$ anzusehen (hier also von einer ganz rationalen Funktion zu sprechen), obwohl aus dieser Darstellung nicht hervorgeht, daß 0 nicht zum Definitionsbereich gehört und man die mittels der Terme $f_1(x)$ und $f_2(x)$ definierten Funktionen eigentlich auseinanderhalten müßte - es sei denn, man würde bei $f_2(x)$ die Einschränkung des Definitionsbereichs ausdrücklich vermerken. (Eigentlich ist auch das Wort "Einschränkung des Definitionsbereichs" schon ein Rudiment aus einer veralteten Auffassung des Funktionsbegriffes.) Deshalb wäre es eigentlich konsequenter, als normierte Darstellung $y = \frac{x^2 + 7x}{x}$ anzusehen, wenn man an der mehrmals erwähnten Vereinbarung über den Definitionsbereich festhalten will. Es ist wohl klar, daß solche "spitzfindigen" Unterscheidungen für die Untersuchung von Funktionen keine entscheidende Rolle spielen; sie sind aber zu beachten, wenn man auf eine exakte Begriffsbildung Wert legt, und schon in Klasse 11 ist ja - z.B. im Lehrbuch auf Seite 65 bei der Einführung des Grenzwertes von Funktionen - mit Recht betont worden, daß etwa die "Funktion" $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ von der "Funktion" $y = x + 1$ wohl zu unterscheiden ist.

Schließlich sei noch auf eine für die Schüler naheliegende Verwechslung aufmerksam gemacht, der durch entsprechendes deutliches Herausstellen des Sachverhalts vorzubeugen ist. Um überhaupt den Begriff der nichtrationalen Funktion als Komplement des Begrif-

fes der rationalen Funktion bilden zu können, ist der Oberbegriff der reellen Funktion einer reellen Veränderlichen notwendig. Das zweimalige Auftreten des Wortes "reell" bedeutet dabei, daß Definitionsbereich und Wertevorrat Mengen reeller Zahlen sind. Im Gegensatz dazu bezeichnet aber das Wort "rational" bei den rationalen Funktionen die Operationen, durch die man aus den Werten der unabhängigen Variablen jeweils den zugehörigen Wert der abhängigen Variablen erhält, hat also nichts mit Definitionsbereich und Wertevorrat zu tun.
Keinesfalls sollten übrigens Funktionen wie $y = |x|$, $y = [x]$ usw. als Beispiele für nichtrationale Funktionen fehlen. Bei Funktionenwie $y = \sin x$, $y = \tan x$ usw. kann man die Schüler darauf hinweisen, daß es sich hier nicht um rationale Funktionen handeln kann. Es ist wohl selbstverständlich, daß solche Funktionen bereits hier als Beispiele zur Sprache kommen müssen, obwohl eine ausführliche Wiederholung der Winkelfunktionen gemäß den Lehrplanforderungen erst etwas später erfolgt. Entsprechendes gilt für Wurzelfunktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen.

Der auf Seite 50 bereits erwähnte Auftrag C 1 kann auch dazu herangezogen werden, den Schülern die Problematik einer an der Gleichung orientierten Erklärung der Rationalität von Funktionen vor Augen zu führen und so den Übergang zu der auf Seite 48 angeführten Erklärung der rationalen Funktion mit Hilfe der identischen Funktion zu motivieren. Damit gelangt man gleichzeitig zur Erörterung der <u>Operationen mit Funktionen</u>. Bei der Erklärung, was unter der Summe, der Differenz usw. zweier Funktionen zu verstehen ist, ist der Hinweis auf die naheliegende Begriffsübertragung von den entsprechenden Operationen mit Zahlen her unbedingt nötig. Den Schülern muß deutlich werden: Einerseits erscheint eine solche Begriffsübertragung förmlich selbstverständlich; so hat man ja auch schon früher stillschweigend davon Gebrauch gemacht, indem man z.B. in Klasse 11 von der gebrochenen rationalen Funktion als dem Quotienten zweier ganzer rationaler Funktionen (Grad des Divisors größer als 0) gesprochen hat oder Regeln für die Ableitung des Produkts oder Quotienten zweier (differenzierbarer) Funktionen formuliert hat. Andererseits aber ist es eigentlich notwendig, ausdrücklich zu definieren, was Summe, Differenz usw. zweier Funktionen sind. Letztlich handelt es sich auch hier wieder um die Unterscheidung von Funktion und Gleichung, und gerade deshalb ist es auch notwendig, daß die Operationen mit Funktionen an Hand von Beispielen erläutert werden, die wirklich das Operieren mit den geordneten Paaren erfordern wie etwa das Beispiel C 3a im Lehrbuch. Würde man sich hier auf Funktionen f und g beschränken, bei denen lediglich die Terme f(x) und g(x) zu verknüpfen sind, indem man die Operationszeichen dazwischenschreibt, so würde das Ganze zu einem bloßen Formalismus. Er würde den Schülern primitiv und überflüssig erscheinen, und gerade darum würden sie nicht verstehen, warum für die Operationen mit Funktionen besondere Definitionen erforderlich sind. Auch bei der Produkt- und Quotientenbildung für Wurzelfunktionen wie $f(x) = \sqrt{7 - x}$ und $g(x) = \sqrt{x - 3}$ (Beispiel C 3b des Lehrbuches) ist die Sachlage kaum anders, obwohl hier durch die Anwendung der Potenz- bzw. Wurzelgesetze wirklich noch eine gewisse Umformung der Terme möglich ist.

Eine sorgfältige Behandlung erfordern die <u>Umkehrfunktionen</u>. Für die Zukunft wird zu beachten sein, daß der ab 1.9.1970 gültige Lehrplan für Klasse 9 [9] den Begriff "Umkehrfunktion" nur noch als Bestandteil des Stoffes zur Information fordert. Dann muß sich der Lehrer ausführlich über den Umfang und die Tiefe der bei den Schülern vorhandenen Kenntnisse informieren und eventuell wesentlich ausführlicher auf die Fragen eingehen, als das im Lehrbuch geschieht.
Auf alle Fälle aber - gleichgültig, ob es sich um eine Wiederholung oder im wesentlichen um eine Einführung handelt - ist die sorgfältige Trennung folgender drei Fragen anzustreben.

(1) Wann ist eine vorgegebene Funktion f umkehrbar, und was ist dann die zu f inverse Funktion $\bar{f}$?
(2) Wie erhält man aus der Gleichung $y = f(x)$ der umkehrbaren Funktion f die Gleichung $y = \bar{f}(x)$ ihrer inversen Funktion $\bar{f}$?
(3) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Bildern von f und $\bar{f}$ im gleichen x,y-Koordinatensystem (bei $y = f(x)$ und $y = \bar{f}(x)$) ?

Die in der Mathematik bei der Untersuchung von Funktionen allgemein übliche Bezeichnungsweise "f^{-1}" für die zu f inverse Funktion sollte man übrigens besser vermeiden, um nicht Anlaß zu Verwechslungen zu geben: Entsprechend der Vereinbarung, "$\sin^2 x$"

für "$(\sin x)^2$" zu schreiben, wäre es z.B. sinnvoll, $\frac{1}{\sin x} = \sin^{-1} x$ zu schreiben; $y = \sin^{-1} x$ ist aber nicht etwa die zu $y = \sin x$ inverse Funktion. Selbstverständlich ist auch der Tatsache Rechnung zu tragen, daß es sich bei "Umkehrfunktion" letztlich um einen Beziehungsbegriff handelt (ähnlich wie etwa "Wechselwinkel") und daß es demzufolge absolut sinnlos ist, etwa $y = \sqrt{x}$ als "eine Umkehrfunktion" zu bezeichnen.
Bei der Definition der Umkehrfunktion beachte man, daß es genügt, von der "Menge der geordneten Paare $[y;x]$ mit $[x;y] \in f$" zu sprechen; ein "aller und nur der" ist nicht erforderlich, genau so wenig wie man etwa von der "Menge aller und nur der rationalen Zahlen" spricht. Die Formulierung der Definition soll übrigens auch deutlich machen, daß die Umbenennung der Variablen ("die Vertauschung von x und y") sekundär ist. So wie es gleichgültig ist, ob man $\int_1^2 t^{-1}dt$ oder $\int_1^2 u^{-1}du$ oder $\int_1^2 x^{-1}dx$ schreibt (jedesmal ergibt sich ln 2), so ist die Menge aller $[y;x]$ mit $[x;y] \in f$ dasselbe wie die Menge aller $[x;y]$ mit $[y;x] \in f$ oder auch die Menge aller $[a;b]$ mit $[b;a] \in f$. Es handelt sich hier um gebundene Variable, nur daß diese Bindung in der gebräuchlichen Schreibweise wie z.B. in $y = 2x + 3$ nicht deutlich genug zum Ausdruck kommt. Sie steckt gewissermaßen in der Verabredung, daß immer x unabhängige und y abhängige Variable sein soll (falls nicht ausdrücklich anderes hinzugefügt ist).
Die rationalen Operationen mit Funktionen und die Inversenbildung sollen von den Schülern klar als Möglichkeiten erkannt werden, zu "neuen" Funktionen zu gelangen. Das darf freilich nicht zu der Ansicht führen, daß etwa zwei Funktionen immer zu addieren sind und dabei eine neue Funktion liefern (bei $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ und $g(x) = \sqrt{x^2 - 2}$ z.B. ist das wegen der Disjunktheit der Definitionsbereiche nicht der Fall), und in gewissen Fällen ist ja z.B. auch $\bar{f} = f$ (Beispiel $y = x^{-1}$).

Auch bei der <u>Verkettung von Funktionen</u> ist wichtig, daß nicht gleich formal mit den Termen begonnen wird, indem etwa aus $y = f(z) = \sin z$ und $z = g(x) = x^2$ gewonnen wird $y = f(g(x)) = \sin x^2$. Ob man allerdings wie im Lehrbuch mit einem formalen Verknüpfen an Hand zweier Mengen geordneter Paare be-

ginnt oder aber zur Illustration sogar auf Beispiele aus der Umwelt der Schüler (etwa die Verknüpfung der Zuordnung Bahnhof - Preisstufe und Preisstufe - Fahrpreis bei der Berliner S-Bahn) zurückgreift, muß vom Lehrer je nach der Klassensituation entschieden werden. In der Symbolik würde das übliche "$f \circ g$" zwar deutlicher als die Schreibweise "$f(g(x))$" zum Ausdruck bringen, daß es sich hier um eine Verknüpfung von Funktionen handelt, die prinzipiell mit den anderen Operationen auf eine Stufe zu stellen sind. Trotzdem sollte man auf die Schreibweise nach einer anfänglichen Erwähnung besser verzichten - weniger um einer Verwechslung mit "$f \cdot g$" entgegenzuwirken als vielmehr, um zu verhindern, daß "innere" und "äußere Funktion" verwechselt werden. Diese beiden Termini sind zwar nicht generell üblich, doch erweisen sie sich als besonders bequem zur Verständigung mittels weniger Worte, insbesondere auch später bei der Formulierung der Kettenregel. Deshalb werden diese Bezeichnungen auch im Lehrbuch verwendet. Hingegen wird absichtlich nicht davon gesprochen, daß es sich etwa bei $y = \sin x^2$ um eine "mittelbare Funktion" handelt, denn schließlich läßt sich prinzipiell j e d e Funktion als Ergebnis der Verkettung anderer Funktionen auffassen; es handelt sich ja nur um eine Frage der analytischen Darstellung; vgl. etwa Fichtenholz I [10], S. 100.
Da die Mittel der Differentialrechnung noch nicht zur Verfügung stehen, muß man in Kauf nehmen, daß für die Frage der Verkettung relativ wenig Übungsmaterial zur Verfügung steht; man sollte deshalb im wesentlichen nur Bestimmungen von Definitionsbereichen vornehmen lassen. Dabei ist die Bedingung $Wb_g \cap Db_f \neq \emptyset$ zu beachten, wenn man nicht auch die leere Abbildung als Ergebnis der Verkettung zulassen will. Für die Formulierung ist es selbstverständlich von Vorteil, wenn man den Terminus "Durchschnitt" zur Verfügung hat. Da erst der ab 1.9.1970 gültige Lehrplan für Klasse 9 [9] die Einführung des Begriffes "Durchschnitt" vorsieht, ist im Lehrbuch nur gesagt worden, daß "Wertevorrat von g und Definitionsbereich von f gemeinsame Elemente haben müssen".

Im dritten Komplex der Stoffeinheit 3.1. geht es um verschiedene Klassen nichtrationaler (und bei den Potenzfunktionen auch rationaler) Funktionen. Gerade bei den hier notwendig werdenden <u>Wiederholungen, Vertiefungen und Systematisierungen</u> kann das Lehrbuch den Weg des Unterrichts naturgemäß noch weniger vorzeichnen, als es das bei anderen Stoffkomplexen kann und will. So muß der Lehrer je nach Klassensituation entscheiden, welche Funktionen einer etwas ausführlicheren Behandlung bedürfen und bei welchen er sich kürzer fassen kann und - wegen der Kürze der insgesamt verfügbaren Zeit - auch muß. In solchen Fällen sind dann vielleicht auch nicht einmal alle im Lehrteil des Buches befindlichen Aufträge auszuführen, was sonst unbedingt anzuraten ist, und in jedem Falle ist auch sorgfältig zu überlegen, welche Eigenschaften der betreffenden Funktionen zu begründen sind, wie genau die Zeichnungen anzufertigen sind usw. Vor allem ist auch der weitgehend selbständigen Wiederholung durch die Schüler, gegebenenfalls in entsprechend zusammengestellten Arbeitsgruppen, genügend Raum zu geben. Um den Schülern Anhaltspunkte dafür zu geben und ihnen zu zeigen, auf welche Eigenschaften der Funktionen es ankommt, enthält das Lehrbuch bei den Potenzfunktionen eine ausführliche Übersicht mit den entsprechenden Definitionen mit Ausnahme der Periodizität, Periode usw., weil das bei den zunächst in Rede stehenden Funktionen noch keine Rolle spielt und eine unnötige Häufung vermieden werden sollte.

Ein besonderes Problem stellen die Unendlichkeitsstellen dar, zu denen im folgenden allgemein etwas gesagt werden muß, was über Potenz- und Wurzelfunktionen hinausgeht. Da der Lehrplan ausdrücklich die Behandlung von "Polen" nichtrationaler Funktionen fordert, wäre es notwendig, eine Definition dieses Begriffs zu geben, die nicht nur rationale Funktionen erfaßt. Eine solche allgemeine Definition ist aber nur in der Theorie der Funktionen komplexer Variabler üblich, wo man z_0 als Pol (m-ter Ordnung) der in einer Umgebung von z_0 regulären Funktion f(z) genau dann bezeichnet, wenn der absteigende Teil der LAURENTschen Entwicklung dieser Funktion an der Stelle z_0 der sogenannte Hauptteil

$$\text{von} \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

endlich viele Glieder enthält, eine ganze rationale Funktion von $z' = (z - z_0)^{-1}$ (mit dem Grad $m \quad 0$) ist. Im Reellen beschränkt man sich hingegen auf die Definition des Pols einer (gebrochenen) rationalen Funktion mit der normierten Darstellung $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

als einer solchen Zahl x_p, für die $q(x_p) = 0$ und $p(x_p) \neq 0$ gilt. (Falls man von $\frac{p(x)}{q(x)}$ nicht verlangt, daß es sich um die normierte Darstellung handelt, müssen als Pole auch diejenigen Nullstellen von p(x) u n d q(x) zugelassen werden, für die die Ordnung im Zählerpolynom kleiner ist als im Nennerpolynom. Wenn p(x) genau den Linearfaktor $(x - x_p)^\alpha$ und q(x) genau den Linearfaktor $(x - x_p)^\beta$ enthält, ist x_p für $m = \beta - \alpha > 0$ ein Pol m-ter Ordnung.) Hier besteht auch vollkommene Übereinstimmung mit dem Komplexen: x_p ist genau dann Pol m-ter Ordnung der reellen Funktion $y = \frac{p(x)}{q(x)}$ in dem soeben erklärten Sinn, wenn die komplexe Funktion $w = \frac{p(z)}{q(z)}$ für $z = x_p$ einen Pol nach der Definition auf Seite 56 hat.

Daß es aber für nichtrationale Funktionen Schwierigkeiten mit der Übertragung der Begriffsbildung auf das Reelle gibt, soll die folgende Gegenüberstellung zeigen.

	Komplex:		Reell:
$w = \cot z$	$z_o = 0$ Pol 1. Ordnung	$y = \cot x$	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \cot x = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \cot x = -\infty$
$w = z^{-\frac{1}{2}}$	$z_o = 0$ Verzweigungspunkt 2. Ordnung	$y = x^{-\frac{1}{2}}$	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^{-\frac{1}{2}} = +\infty$
$w = \frac{1}{\sqrt[3]{z^2}}$	$z_o = 0$ Verzweigungspunkt 3. Ordnung	$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$
$w = \ln z$	$z_o = 0$ Verzweigungspunkt unendlicher Ordnung	$y = \ln x$	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

$w = \ln(z^2)$	$z_0 = 0$ Verzweigungspunkt unendlicher Ordnung	$y = \ln(x^2)$	$\lim\limits_{x \to 0} \ln(x^2) = -\infty$
$w = e^{\frac{1}{z}}$	$z_0 = 0$ Wesentliche Singularität	$y = e^{\frac{1}{x}}$	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} e^{\frac{1}{x}} = 0$

Es liegt auf der Hand, daß für eine auch nur andeutungsweise Behandlung dieser Unterscheidungen alle Voraussetzungen fehlen.
Da es andererseits aber unzweckmäßig erscheint, mit der Terminologie der Funktionentheorie in Widerspruch zu geraten, beschränkt sich das Lehrbuch bei den nichtrationalen Funktionen auf den Terminus "Unendlichkeitsstelle" und betont lediglich, daß bei rationalen Funktionen die Unendlichkeitsstellen "Pole" heißen und daß an dieser Stelle auf die Unterscheidung von Polen und Unendlichkeitsstellen anderer Art bei nichtrationalen Funktionen nicht eingegangen werden kann.
Wegen der schon aus der angegebenen Gegenüberstellung ersichtlichen verschiedenen möglichen Verhaltensweisen einer Funktion bei Annäherung an eine Unendlichkeitsstelle liegt es nahe, zur Definition der Unendlichkeitsstelle auf die Funktion $\frac{1}{f}$ zurückzugreifen. Damit ergibt sich auch eine Erleichterung für das spätere Untersuchen vorgelegter Funktionen auf Unendlichkeitsstellen. Freilich kann man nicht einfach definieren, daß x_u Unendlichkeitsstelle von f genau dann heißt, wenn x_u Nullstelle von $\frac{1}{f}$ ist. Denn wenn die Funktion an der Stelle x_u nicht definiert ist, dann ist dort auch die Funktion $\frac{1}{f}$ nicht definiert, und man kann nicht davon sprechen, daß x_u Nullstelle von $\frac{1}{f}$ ist; denn die Nullstelle einer Funktion muß - im Gegensatz zur Unendlichkeitsstelle - zu deren Definitionsbereich gehören. Diese Schwierigkeit ist aber zu beseitigen, wenn man die Definition etwas abändert: x_u heißt Unendlichkeitsstelle von f genau dann, wenn $\lim\limits_{x \to x_u} \frac{1}{f(x)} = 0$ ist. Für solche x_u, für die f(x) nur in

einer einseitigen punktierten Umgebung von x_u definiert ist, genügt es auch, daß entsprechendes für den einseitigen Grenzwert gilt; die Existenz beider einseitigen Grenzwerte mit

$$\lim_{\substack{x \to x_u \\ x > x_u}} \frac{1}{f(x)} \neq \lim_{\substack{x \to x_u \\ x < x_u}} \frac{1}{f(x)}$$

muß jedoch ausgeschlossen werden; vgl. Beispiel $y = e^{\frac{1}{x}}$ auf Seite 58 . Es ist auch empfehlenswert zu fordern, daß f in einer (eventuell einseitigen) punktierten Umgebung von x_u nicht nur definiert, sondern auch stetig ist; damit werden Fälle folgender Art ausgeschaltet. Für die

Funktion f mit $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für rationale } x \\ -\frac{1}{x} & \text{für irrationale } x \end{cases}$ gilt $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Trotzdem wird man aber 0 besser nicht als Unendlichkeitsstelle von f bezeichnen.

Bei der Behandlung der Periodizität im Rahmen der Wiederholung der Winkelfunktionen entscheide der Lehrer selbst, ob er den in der Mathematik üblichen Terminus "primitive Periode" für die kleinste Periode einführen will; im Lehrbuch ist das vermieden worden. (Zuweilen begnügt man sich sogar mit der Verwendung des bestimmten Artikels zur Kennzeichnung, indem man von "der Periode" im Gegensatz zu "einer (beliebigen) Periode" spricht, wenn man die primitive Periode meint.) Es sei übrigens noch darauf hingewiesen, daß nicht unbedingt jede periodische Funktion eine kleinste Periode haben muß: Die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für rationales } x \\ 1 & \text{für irrationales } x \end{cases}$$

hat jede rationale Zahl als Periode, und unter diesen gibt es keine kleinste.

Große Schwierigkeiten bei der Besprechung aller periodischen Funktionen bereitet den Schülern erfahrungsgemäß die allgemeine Kennzeichnung der Nullstellen, Pole, Extrema usw. mittels solcher Terme wie $\frac{4(k + 1)\pi}{2}$; diesem Punkt ist deshalb besondere Aufmerksamkeit zu schenken.

Bei der Behandlung der Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen beachte man sorgfältig den Gültigkeitsbereich der einzelnen Beziehungen. Den Schülern muß z.B. klar bewußt sein, daß zwar $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ für alle reellen x gilt, hingegen $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ nur für $\frac{(4k-1)\pi}{2} \leq x \leq \frac{(4k+1)\pi}{2}$ (k ganz) Gültigkeit hat. Das ist vor allem auch für das spätere Lösen goniometrischer Gleichungen von Vorteil.

Bei der <u>Wiederholung der Exponential- und Logarithmusfunktionen</u> sollte den Schülern zunächst noch einmal die Sonderstellung der irrationalen Exponenten zum Bewußtsein kommen. Selbstverständlich muß der Lehrer je nach Klassensituation entscheiden, in welchem Umfang er auf diese Fragen eingehen will. Vor allem kommt es aber auch darauf an, den Logarithmusbegriff zum festen Besitz der Schüler zu machen. Der Aufgabenteil des Lehrbuches enthält deshalb hierzu verhältnismäßig viel Aufgabenmaterial. Der Lehrer, dem auch dies noch nicht ausreichend erscheint, sei auf die Übersetzung der sowjetischen Aufgabensammlung zur Algebra, Klasse 8 bis 10, von Laritschew (Volk und Wissen, Berlin 1963) verwiesen.

Bei der <u>Einführung der Zahl e</u> als $\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ ist zunächst einmal zu entscheiden, ob die Untersuchung der Folge $((1 + \frac{1}{n})^n)$ an Hand eines praktischen Sachverhaltes motiviert werden soll. Diese Frage ist im Lehrbuch negativ entschieden worden. Das hier vielfach gewählte Beispiel der stetigen Verzinsung entbehrt der praktischen Bedeutung, und die Anknüpfung an andere Sachverhalte, etwa die Zunahme des Holzbestandes in einem Walde, erfordert einen recht großen zeitlichen Aufwand und stark vereinfachende zusätzliche Annahmen, um zu dem gewünschten Grenzwert zu gelangen. Deshalb erschien es zweckmäßiger, die Behandlung solcher Beispiele erst später im Zusammenhang als Anwendungen der Exponentialfunktionen vorzunehmen. Damit soll aber dem Lehrer von einigen kurzen motivierenden Betrachtungen an dieser Stelle nicht grundsätzlich abgeraten werden.
Weiterhin muß man sich entscheiden, ob man die Definition an den Anfang stellt, bevor man sich überhaupt Klarheit über die Existenz des Grenzwertes verschafft hat. Das Lehrbuch verfährt so, gerade um d a n a c h die Frage der Existenz und damit der Berechtigung der gegebenen Definition aufwerfen zu können. Der Lehrer versäume hier nicht, die Schüler vor "voreiligen Definitionen" zu warnen, weil sich hier - wie bei der Definition des Dorf-

barbiers als desjenigen Mannes im Dorfe, der alle und nur die rasiert, die sich nicht selbst rasieren - hinterher herausstellen kann, daß es gar kein Individuum gibt, dem die in der Definition geforderten Eigenschaften zukommen.

Im Lehrbuch ist auch die Berechnung einiger Werte von $(1 + \frac{1}{n})^n$ an den Anfang gesetzt worden, um eine gewisse konkrete Grundlage für die darauf folgenden abstrakten Überlegungen zu haben. Die Berechnung dieser Werte sollte man nicht von den Schülern verlangen. Da die Berechnung für größere Werte von n mittels Logarithmen erfolgen müßte, läge außerdem noch eine Art Zirkel vor, weil ja die Logarithmen ihrerseits auf der Grundlage der natürlichen Logarithmen, die hier erst auf e gegründet werden, berechnet worden sind. Daß das den Schülern nicht bewußt wird, ändert nichts an der Sachlage. Wer trotzdem Wert darauf legt, daß die Schüler selbständig zu den entsprechenden Werten gelangen, um eine Vermutung über $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ aufstellen zu können, dem seien hier geeignete Logarithmen zehnstellig angegeben.

$$\begin{aligned}
\lg 1{,}1 &= 0{,}0413926852\\
\lg 1{,}01 &= 0{,}0043213738\\
\lg 1{,}001 &= 0{,}0004340775\\
\lg 1{,}0001 &= 0{,}0000434273\\
\lg 1{,}00001 &= 0{,}0000043429\\
\lg 1{,}000001 &= 0{,}0000004343
\end{aligned}$$

Insgesamt läßt sich ja sagen, daß der Term $(1 + \frac{1}{n})^n$ für die näherungsweise Berechnung von e ziemlich ungeeignet ist, weil die Konvergenz sehr langsam vonstatten geht. Man könnte deshalb auf den Gedanken kommen, die bekannte Reihe für e zur Berechnung auszunutzen, zumal die Entwicklung von $(1 + \frac{1}{n})^n$ nach dem binomischen Satz zu dieser Reihe führen kann und der Vorschlag, diese Entwicklung vorzunehmen, bei der Zielstellung, $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ zu ermitteln, auch von den Schülern erwartet werden kann.

$$\begin{aligned}
(1 + \frac{1}{n})^n &= 1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots + \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n^n}\\
&= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \ldots\\
&\quad + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \ldots (1 - \frac{n-2}{n})(1 - \frac{n-1}{n})
\end{aligned}$$

liefert

$$\lim (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots\ .$$

Gerade dieser Grenzübergang bedarf aber besonderer begründender Überlegungen, die für die Schüler nicht mit der notwendigen Exaktheit durchgeführt werden können. Schließlich genügt es nicht, $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$ usw. durch 0 zu ersetzen gemäß der Kenntnis, daß $(\frac{a}{n})$ für jedes reelle a eine Nullfolge ist. Mit $n \to \infty$ wächst auch die Anzahl der Summanden und damit die Anzahl der Faktoren in den Summanden unbegrenzt. Und der Nachweis der Konvergenz der entstandenen Reihe durch Vergleich mit der Partialsummenfolge der geometrischen Reihe $\sum \frac{1}{2^{\nu}}$ besagt nichts darüber, daß die Summe gleich dem zu ermittelnden Grenzwert ist. Es sei deshalb ausdrücklich davor gewarnt, diesen Weg zur Ermittlung von e einzuschlagen.

Gerade um einem unkritischen Arbeiten mit Grenzwerten vorzubeugen, wird man im Unterricht gut daran tun, möglichst noch vor der Beschäftigung mit einigen Zahlenwerten für $(1 + \frac{1}{n})^n$ an Hand folgender unzulässiger Schlußweisen auf das Wesentliche einer solchen Grenzwertermittlung aufmerksam zu machen.

a) Da $1 + \frac{1}{n} > 1$ für jedes n gilt, ist $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \infty$.

b) Da $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ ist, gilt $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \lim\limits_{n \to \infty} (1 + 0)^n = 1$.

Das Lehrbuch geht auf diese gar nicht so fernliegenden fehlerhaften Überlegungen nicht nur aus Platzgründen nicht ein, sondern weil sich der hier zur Überzeugung der Schüler notwendige Überraschungseffekt der beiden voneinander abweichenden Ergebnisse nur in der Unterrichtsstunde selbst erreichen und entsprechend ausnutzen läßt.

Bei dem Nachweis der Monotonie der Folgen $(a_n) = ((1 + \frac{1}{n})^n)$ und $\overline{a}_n = ((1 + \frac{1}{n})^{n+1})$ handelt es sich leider um Beweise, bei denen man erst nachträglich sieht, daß die durchgeführten Umformungen, von der BERNOULLIschen Ungleichung ausgehend, zum gewünschten Ziel führen. Eine andere Darstellung der Beweisführung, die die einzelnen Schritte vom Ziel her motiviert, wäre aber viel zu zeitaufwendig. Man versäume jedoch nicht, die Schüler auf diesen Umstand hinzuweisen und der schädlichen Ansicht entgegenzuwirken, daß die meisten Beweise mathematischer Sätze auf "Kunstgriffen" beruhen und demzufolge nur von Menschen verstanden und insbesondere gefunden werden können, die dafür eine besondere Begabung mitbringen.

Man kann auch auf die Möglichkeit einer einfachen Fehlerabschätzung hinweisen.

$$(1 + \frac{1}{n})^{n+1} - (1 + \frac{1}{n})^n = (1 + \frac{1}{n})^n \, (1 + \frac{1}{n} - 1) = \frac{1}{n}(1 + \frac{1}{n})^n \quad \frac{3}{n}$$

wegen $(1 + \frac{1}{n})^n < 3$. Jede der beiden Folgen (a_n) und $(\bar{a}_n)$ liefert also Näherungswerte für e mit einem Fehler, der kleiner als $\frac{n}{3}$ ist.

Der Hinweis darauf, daß auch für beliebige reelle $x \neq 0$ sowohl $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ als auch $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ gilt, ist zweckmäßigerweise gleich an die Ermittlung von e anzuschließen. Man weise dabei die Schüler ausdrücklich darauf hin, daß es sich um zwei ganz verschiedene Grenzprozesse handelt. So folgt zwar $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ aus $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$, aber nicht umgekehrt.

Notwendig sind diese beiden Grenzwerte für die vom Lehrplan in der Stoffeinheit 3.3. geforderte Behandlung des Grenzwertes $\lim\limits_{x \to 0} \log_a (1 + x)^{\frac{1}{x}}$, der seinerseits dann im Stoffgebiet 4. für die Ableitung der Logarithmusfunktion (und damit mittelbar auch der Exponentialfunktion) benötigt wird.

Der Lehrer versäume übrigens nicht, auf die Benutzung der Tafel für e^x bzw. e^{-x} sowie später auch der Tafel für ln x einzugehen, und zwar sowohl für die Ermittlung von Potenzen von e als auch für die Ermittlung natürlicher Logarithmen. Nach Möglichkeit sollte dies aber in der Form geschehen, daß die Schüler sich selbständig mit dem Aufbau der Tafeln vertraut zu machen suchen und dann den zweckmäßigen Umgang mit ihnen erläutern. Gelegenheit für ein solches Vorgehen bieten die Aufgaben c 30 und 31.

So wie das Lehrbuch bewußt auf ein besonderes Herausstellen von Eigenschaften der Exponentialfunktion $y = e^x$ verzichtet, weil hier gegenüber den vorher bei der Wiederholung von $y = a^x$ $(a > 1)$ besprochenen Eigenschaften nichts wesentlich Neues hinzukommt, nur eine Spezialisierung vorliegt, so werden auch die Eigenschaf-

ten der Funktion $y = \ln x$ nicht besonders hervorgehoben. Den Lehrplanforderungen entsprechend ist aber die Funktion $y = \ln x$ graphisch darzustellen, und außerdem müssen die natürlichen Logarithmen einen besonderen Behandlungsgegenstand bilden.
Es ist schwierig, den Schülern der Klasse 12 die besondere Stellung von $y = e^x$ unter allen Exponentialfunktionen deutlich zu machen, doch erfolgt bei der späteren Behandlung der Differentiation eine gewisse Klärung. Nahezu unmöglich ist es aber, den Schülern die ausgezeichnete Rolle der natürlichen Logarithmen unter allen Logarithmensystemen nahe zu bringen. (Der interessierte Leser findet darüber Näheres bei O. PERRON [23], Seite 78 f.)
Man sollte aber den Schülern mitteilen, daß die ersten Logarithmentafeln der Welt in ihrer Basis nur wenig von e bzw. $\frac{1}{e}$ abwichen. Die 1620 von Jobst BÜRGI (1552 bis 1632) veröffentlichte Tafel enthielt Logarithmen zur Basis $(1 + \frac{1}{10^4})^{10^4}$, einer Zahl, die in den ersten drei Dezimalen mit e übereinstimmt. Der Schotte John NAPIER, Lord of Merchiston (latinisiert NEPER, 1550 bis 1617) benutzte für seine 1614 veröffentlichte "Beschreibung einer Tafel wunderbarer Rechnungszahlen" die Basis $(1 - \frac{1}{10^7})^{10^7}$, die in den ersten sieben Dezimalen mit e^{-1} übereinstimmt (es ist ja $\lim_{n \to \infty} (1 - \frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$). Daß es sich beide Male eigentlich um "Antilogarithmentafeln" handelte, weil nicht die Numeri, sondern die Logarithmen in arithmetischer Folge angeordnet waren, ist dabei ebenso ohne Belang wie die Tatsache, daß zur Vermeidung von Brüchen alle Werte mit geeigneten Zehnerpotenzen multipliziert waren, bei BÜRGI die Numeri mit 10^8 und die Logarithmen mit 10^5, bei NAPIER beide mit 10^7.

Den Zusammenhang zwischen Logarithmensystemen verschiedener Basen spricht Satz C 10 aus. Es wäre eine unnötige Gedächtnisbelastung, wollte man die in diesem Satz enthaltenen Formeln auswendig lernen lassen. Viel wichtiger ist, daß die Schüler die Überlegungen beherrschen, die zu diesen Formeln führen, und auch in der Lage sind, einen gesuchten Logarithmus $\log_a x$ folgendermaßen zu ermitteln. Gesucht ist z mit $a^z = x$, und das Logarithmieren dieser Gleichung liefert $z \cdot \lg a = \lg x$, also $z = \frac{1}{\lg a} \cdot \lg x$. Man unterschätze übrigens nicht die Schwierigkeiten, die es den Schülern zunächst bereitet, eine solche Berechnung nun wirklich vorzunehmen und etwa zu den mit Hilfe der Tafel ermittelten Logarithmen wiederum die Logarithmen zu ermitteln, um die Berechnung logarithmisch auszuführen. Besonders der Fall $x < 1$ ($a < 1$ bleibt ja i.a. außer Betracht) macht ihnen hier wegen der auftretenden negativen Kennzahlen bei $\lg x$ Kopfzerbrechen, und ein gewisses Maß an Übung ist erforderlich. Dies gilt auch, wenn - was bis zum Schuljahr 1973/74 neben dem logarithmischen Rechnen anzuraten und danach sogar allein verbindlich ist - für die Berechnung der Rechenstab benutzt wird. Im übrigen ist es wohl zweckmäßig, zunächst natürliche Logarithmen in dekadische umzurechnen und nicht umgekehrt, auch wenn den Schülern ohne nähere Begründung nur mitgeteilt wurde, daß die dekadischen Logarithmen erst auf der Grundlage der natürlichen ermittelt worden sind. Freilich muß man dann auch bei diesen Umrechnungen ohne die dekadischen Logarithmen als Rechenhilfsmittel auskommen. Man beachte übrigens, daß die Ermittlung von $\ln 0{,}283$ auf Grund des bekannten $\lg 0{,}283$ (Beispiel C 9b)) mittels der den Schülern verfügbaren vierstelligen Logarithmentafel den Wert $-1{,}263$ liefert, während man mit einer Tafel, die mehr Stellen enthält, $-1{,}2624$ erhält, ebenso wie mittels der Tafel für natürliche Logarithmen (Auftrag C 30 a)). Dieses Beispiel sollte vom Lehrer genutzt werden, wieder einmal auf die Frage der Genauigkeit beim Arbeiten mit Näherungswerten, besonders auch beim Interpolieren, einzugehen.

Bei der Ermittlung von Logarithmen zu einer von 10 verschiedenen Basis sollte man übrigens nach Möglichkeit immer erst ganzzahlige Schranken angeben und erst danach Logarithmentafel oder Stab verwenden lassen, also z.B. erst nach der Angabe, daß $2 < \log_5 80 < 3$ gilt wegen $5^2 < 80 < 5^3$.

Das Ermitteln eines Logarithmus ist letztlich ja das Lösen einer Exponentialgleichung. Während der Lehrplan die Behandlung von Wurzelgleichungen und goniometrischen Gleichungen ausdrücklich fordert, sind Exponentialgleichungen nicht vorgesehen. Hier ist jedoch der richtige Platz, einige einfache Exponentialgleichungen lösen zu lassen, ohne damit eine besondere "Theorie des Lösens von Exponentialgleichungen" aufzubauen.

Bei den Anwendungen der Exponentialfunktion geht es nicht nur darum, den Schülern die Bedeutung theoretischer mathematischer Untersuchungen für die Erfassung realer Sachverhalte und den Ursprung mathematischer Begriffsbildungen in der Praxis deutlich zu machen und damit einen Beitrag zur Schaffung eines wissenschaftlichen Weltbildes zu leisten. Gerade in Klasse 12 ist es auch wichtig, die mannigfachen Querverbindungen zu anderen Unterrichtsfächern für die Allgemeinbildung der jungen Menschen fruchtbar zu machen. Außerdem sind die erzieherischen Potenzen, die in den einzelnen Beispielen liegen, voll auszunutzen. So sollte der Lehrer beispielsweise nicht versäumen, bei der Erläuterung des Exponentialgesetzes für das Bevölkerungswachstum und des auf MARX zurückgehenden Beispiels der Produktionsindexzunahme auf die reaktionäre Theorie des Malthusianismus hinzuweisen, die von der unzutreffenden Voraussetzung ausging, die Bevölkerungszunahme erfolge in geometrischer Progression (also exponentiell) und das Wachstum der Produktion, insbesondere von Nahrungsmitteln, nur in arithmetischer Progression. Darauf führten die Anhänger des Malthusianismus die wachsende Verelendung der Werktätigen zurück und leiteten daraus die Forderung nach einer rigorosen Geburteneinschränkung bei den werktätigen Schichten und Maßnahmen gegen die angebliche Übervölkerung ab. Schon die Klassiker des Marxismus-Leninismus haben das reaktionäre Wesen des Malthusianismus aufgedeckt, indem sie nachwiesen, daß er weder auf Naturgesetzen noch auf historischen Gesetzen beruht. Das Beispiel von MARX macht auch deutlich, daß die Annahme, die Produktionszunahme erfolge nur in arithmetischer Progression, falsch ist. (Man beachte übrigens, daß der sogenannte Produktionsindex ein Differenzenquotient ist.)
Bei allen Beispielen besteht natürlich im Grunde das Problem, ohne Hilfsmittel der Differentialrechnung mehr oder weniger zu begründen, warum der betreffende Sachverhalt durch eine Exponentialfunktion beschrieben wird. Eigentlich müßte man ja eine Differentialgleichung als Ausgangspunkt nehmen, beispielsweise beim radioaktiven Zerfall folgendermaßen vorgehen. Es sei $m = f(t)$ die Masse irgendeiner radioaktiven Substanz zur Zeit t. Da jedes individuelle Teilchen der Substanz die gleiche Wahrscheinlichkeit zum Zerfall in einer gegebenen Zeit hat und die-

se Wahrscheinlichkeit von der Anwesenheit der übrigen Teilchen nicht beeinflußt wird, ist die Geschwindigkeit, mit der m zu einer gegebenen Zeit zerfällt, proportional m, also $\frac{dm}{dt} = k \cdot m$. Daraus ergibt sich dann $m = m_0 \cdot e^{kt}$, wobei k negativ ist, weil es sich um eine monoton fallende Funktion handelt. Da sich solche Überlegungen hier von selbst verbieten, die Behandlung von Beispielen für die Exponentialfunktionen aber notwendig ist, muß stattdessen in einzelnen Fällen plausibel gemacht werden, daß eine Exponentialfunktion vorliegt, und bei den übrigen Sachverhalten muß man sich auf die bloße Mitteilung beschränken. Eine Plausibilitätsbetrachtung bietet sich vor allem für das organische Wachstum oder für die Kettenreaktion an. Beim organischen Wachstum wird man dabei am zweckmäßigsten von der Bakterienvermehrung ausgehen, weil hier die Verhältnisse besonders einfach und überschaubar sind. Schreiben wir $N = f(t)$, wobei N die Anzahl der Bakterien (bzw. der freien Neutronen o. dgl.) bedeutet, so wird freilich die Funktion f streng genommen durch die Glei- $N = N_0 e^{kt}$ nur näherungsweise beschrieben, schon weil der Wertevorrat von f eine Menge natürlicher Zahlen ist. (Die häufig anzutreffende Schreibweise $N = N(t)$ sollte man übrigens in der Schule nur mit äußerster Vorsicht gebrauchen, um der Verwechslung von Funktion und abhängiger Variabler entgegenzuwirken; im Lehrbuch ist sie gänzlich vermieden worden.) Die Bedeutung von N_0 ergibt sich automatisch, wenn man $t = 0$ setzt; deshalb sollte man sie auch nicht etwa vorwegnehmen. Die vereinfachenden Annahmen, die zu der betreffenden Gleichung führen, dürfen auch den Schülern nicht verschwiegen werden. So muß bei der Kettenreaktion des Atomzerfalls angenommen werden, daß keine Neutronen verlorengehen, etwa durch Herausfliegen aus der Substanz ohne Reaktion, Abfangen durch Fremdatome (Verunreinigungen) oder durch "Resonanzeinfang", wie er beim U 238 anzutreffen ist. Es sei auch noch auf einen naheliegenden Fehlschluß aufmerksam gemacht. Ist der Vermehrungsfaktor ν und l die mittlere Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Neutronengenerationen, so erhält man nach der Zeit l nicht etwa $N = N_0 \cdot \nu$, sondern $N = N_0 \cdot e^{\ -1}$. Die Vermehrung erfolgt ja nicht "sprungweise", wie man nach Betrachtung des Bildes C 12 im Lehrbuch vielleicht meinen könnte, sondern "stetig". Im übrigen beachte man, daß der Begriff der Ket-

tenreaktion nicht etwa auf die Kernspaltung beschränkt ist, sondern ein allgemeiner Begriff der physikalischen Chemie ist.
Die Aufgaben zur Lerneinheit C 11 sind absichtlich den verschiedensten Bereichen entnommen worden. Bei ihrer Behandlung sind die eben erläuterten Gesichtspunkte ebenfalls zu beachten. Bei der Aufgabe über das Wachstum der industriellen Produktion (c 42) weise man die Schüler darauf hin, daß die sogenannte Trendfunktion zwar ein sehr wesentliches Hilfsmittel für ökonomische Prognose ist, aber durchaus nicht das allein entscheidende. Aufgaben wie c 37 und c 41 sollten nach Möglichkeit die Grundlage zu eigenen Versuchen der Schüler geben, um die Berechnungen mit selbst ermittelten Daten ausführen zu können. Die Luftdruckabnahme ist schon in einem mehrstöckigen Haus durchaus meßbar, und Temperaturmessungen am Inhalt einer Thermosflasche im Kühlschrank lassen sich von fast jedem Schüler ausführen. Auch die Bestimmung von Sättigungsmenge und Lösungskonstante bei Zucker (Aufgabe c 40) kann mit geringem Aufwand unter Benutzung der Geräte des Chemieraumes auf Grund eines Versuches erfolgen. Die Frage der gedämpften Schwingungen sollte man hier noch aussparen, doch später im Stoffgebiet 4. nach Möglichkeit berücksichtigen.

3.2. Zur Stoffeinheit 3.2. "Wurzelgleichungen; goniometrische Gleichungen"

Für die Behandlung der Wurzelgleichungen fordert der Lehrplan das Anknüpfen an das Problem der Nullstellenermittlung, um ein Motiv für die folgenden Erörterungen zu haben und den einheitlichen, systematischen Aufbau des Mathematiklehrgangs auch den Schülern zum Bewußtsein zu bringen. Dadurch ist auch sofort die Frage nach der Lösungsgrundmenge beantwortet. Gemäß der Vereinbarung über den Definitionsbereich von Funktionen werden jetzt generell alle reellen Zahlen gesucht, die die vorgegebenen Gleichungen erfüllen. Bei der Begriffsbildung kommt es darauf an, daß möglichst vielfältige Beispiele gegeben werden, um den Begriff der Wurzelgleichung in vollem Umfang zu erfassen. Gegebenenfalls wird man auch noch darauf hinweisen, daß Gleichungen wie $\sqrt{3} \cdot x + \sqrt{7} = 0$ und insbesondere $\sqrt{\ln x + 2x} = 3$ keine Wurzelgleichungen sind. Das zweite Beispiel zeigt auch, daß der Satz "In einer Wurzelgleichung kommt an mindestens einer Stelle die Variable im Radikand einer Wurzel vor", der im Lehrbuch einer einseitigen punktierten Umgebung von x_u definiert ist, genügt es auch, daß entsprechendes für den einseitigen Grenzwert gilt; die Existenz beider einseitigen Grenzwerte mit

$$\lim_{\substack{x \to x_u \\ x > x_u}} \frac{1}{f(x)} \neq \lim_{\substack{x \to x_u \\ x < x_u}} \frac{1}{f(x)}$$

muß jedoch ausgeschlossen werden; vgl. Beispiel $y = e^{\frac{1}{x}}$ auf Seite 58 . Es ist auch empfehlenswert zu fordern, daß f in einer (eventuell einseitigen) punktierten Umgebung von x_u nicht nur definiert, sondern auch stetig ist; damit werden Fälle folgender Art ausgeschaltet. Für die

Funktion f mit $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für rationale } x \\ -\frac{1}{x} & \text{für irrationale } x \end{cases}$ gilt $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Trotzdem wird man aber 0 besser nicht als Unendlichkeitsstelle von f bezeichnen.

Bei der Behandlung der <u>Periodizität</u> im Rahmen der Wiederholung der Winkelfunktionen entscheide der Lehrer selbst, ob er den in der Mathematik üblichen Terminus "primitive Periode" für die kleinste Periode einführen will; im Lehrbuch ist das vermieden worden. (Zuweilen begnügt man sich sogar mit der Verwendung des bestimmten Artikels zur Kennzeichnung, indem man von "der Periode" im Gegensatz zu "einer (beliebigen) Periode" spricht, wenn man die primitive Periode meint.) Es sei übrigens noch darauf hingewiesen, daß nicht unbedingt jede periodische Funktion eine kleinste Periode haben muß: Die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für rationales } x \\ 1 & \text{für irrationales } x \end{cases}$$

hat jede rationale Zahl als Periode, und unter diesen gibt es keine kleinste.

Große Schwierigkeiten bei der Besprechung aller periodischen Funktionen bereitet den Schülern erfahrungsgemäß die allgemeine Kennzeichnung der Nullstellen, Pole, Extrema usw. mittels solcher Terme wie $\frac{4(k + 1)\pi}{2}$; diesem Punkt ist deshalb besondere Aufmerksamkeit zu schenken.

Bei der Behandlung der <u>Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen</u> beachte man sorgfältig den Gültigkeitsbereich der einzelnen Be-

daß man sich bei gewissen Gleichungen jeden Lösungsversuch sparen kann, wenn man beachtet, daß Wurzeln nie negativ sein können. Andererseits wäre es wohl zuviel verlangt, wollte man von den Schülern fordern, sie sollten in allen derartigen Fällen von Lösungsversuchen absehen und die Nichtexistenz von Lösungen begründen.
Bei der Angabe der Lösungen verwende man bewußt verschiedene Schreibweisen, etwa bei einer zweielementigen Lösungsmenge sowohl mit Hilfe von Gleichungen wie "$x = 3$ oder $x = 7$" oder "$x_1 = 3$; $x_2 = 7$" als auch in der Symbolik als Menge "$L = \{3;7\}$".
Dabei ist es zweckmäßig, die jeweils ermittelten Werte als Ergebnisse - etwa durch Unterstreichen - erst kennzeichnen zu lassen, nachdem sich in der Probe herausgestellt hat, daß es sich wirklich um Lösungen der Ausgangsgleichung handelt. Es empfiehlt sich auch, den Sachverhalt zuweilen an graphischen Darstellungen zu illustrieren, wie sie das Lehrbuch z.B. für die Aufgaben c 43 und 49 in den Bildern c 3 bis 6 enthält. Freilich wird man sich im Unterricht meist darauf beschränken müssen, den Verlauf der Funktionsbilder nur skizzieren zu lassen. Andererseits besteht hier aber auch eine Möglichkeit, Fertigkeiten auf Gebieten zu erhöhen, die bei der Wiederholung in der Stoffeinheit 3.1. nur kurz gestreift werden konnten (beispielsweise Verschiebungen in Achsenrichtung, Streckung und Stauchung von Parabeln).

Bei den <u>Wurzelgleichungen, die mehrmaliges Quadrieren erfordern</u>, ist dem Isolieren der Wurzel vor dem Quadrieren besondere Aufmerksamkeit zu schenken. Ein beliebter Fehler besteht hier übrigens darin, daß beim Quadrieren eines Terms wie $6\sqrt{3x + 1}$ der Faktor 6 nicht mit quadriert wird, so daß die Schüler nur $6(3x + 1)$ statt $36(3x + 1)$ erhalten. Bei Umformungen vor dem Quadrieren (insbesondere vor dem zweiten) ist auf Vereinfachungsmöglichkeiten zu achten, um dem Auftreten unnötig großer Zahlen vorzubeugen und damit Fehlermöglichkeiten auszuschalten. Im Beispiel C 17 ist eine solche Vereinfachung die Division durch 10.
Schon aus Zeitgründen sind die Wurzelgleichungen, die man behandelt, verhältnismäßig einfach, und fast durchweg ergeben sich ganze Zahlen als Lösungen oder wenigstens als Wurzelwerte. Deshalb wäre es sicher auch unangebracht zu verbieten, besonders einfache Wurzelgleichungen durch systematisches Probieren zu lösen. So ist

beispielsweise für die Gleichung
$\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-3} = 6$ naheliegend, folgendermaßen vorzugehen. Aus der Monotonie der Funktion $y = \sqrt{x+3} + \sqrt{2x-3} - 6$ folgt, daß höchstens eine Lösung existiert. Nimmt man an, daß diese Lösung ganzzahlige Wurzelwerte liefert, so kommen nur in Frage
$\sqrt{x+3} = 0$ und $\sqrt{2x-3} = 6$, $\sqrt{x+3} = 1$ und $\sqrt{2x-3} = 5$, ..., $\sqrt{x+3} = 6$ und $\sqrt{2x-3} = 0$. Davon kommt nur $\sqrt{x+3} = 3$ und $\sqrt{2x-3} = 3$ in Betracht, woraus sich die Lösung $x = 6$ ergibt. Bei dem normalen Lösungsverfahren wird man auf die quadratische Gleichung $x^2 - 228x + 1332 = 0$ geführt, von deren Lösungen $x_1 = 222$ und $x_2 = 6$ sich nur die letztere als Lösung der Ausgangsgleichung erweist.
Man bemühe sich auch, den Schülern "Ausblicke" zu geben und ihnen deutlich zu machen, daß man nicht jede Wurzelgleichung in der besprochenen Weise lösen kann, wie man ja auch nicht jede Gleichung n-ten Grades mittels einer Lösungsformel zu lösen vermag. Beispiel C 18 kann dazu dienen, auf die Bedeutung von Näherungsverfahren aufmerksam zu machen.

Bei der Behandlung der Wurzelgleichungen mit Parametern kommt es besonders darauf an zu untersuchen, für welche Werte der Parameter a, b, ... die angegebenen Lösungsformen zutreffen; vgl z.B. S. Gottesmann [37].
Abschließend sei zur Behandlung der Wurzelgleichungen noch betont, daß es hier nicht darauf ankommt, viele Aufgaben desselben Typs lösen zu lassen, um so einen gewissen mechanischen Einprägungseffekt zu erreichen. Vielmehr gilt es, das Wesentliche am Lösen von Gleichungen noch einmal deutlich zu machen. Auf Ungleichungen mit Wurzeln wird verzichtet, weil ihre Behandlung i.a. recht schwierig ist. Wer sie dennoch für besonders leistungsstarke Schüler berücksichtigen möchte, findet entsprechende Anregungen beispielsweise in der Sammlung von Olympiadeaufgaben [24].

Bei den goniometrischen Gleichungen verzichtet das Lehrbuch auf eine Begriffsabgrenzung, wie sie bei den Wurzelgleichungen gegeben wird, zumal ja mit dem bereits lange vorher erfolgten Ermitteln von Winkeln zu vorgegebenen Winkelfunktionswerten, an das man unbedingt anknüpfen sollte, bereits einfache goniometrische

Gleichungen - zumindest teilweise - gelöst worden sind. Dennoch kann es für die Unterrichtsgestaltung vorteilhaft sein, den Schülern anhand möglichst verschiedener Beispiele für goniometrische Gleichungen einen gewissen Überblick zu geben. Man beachte übrigens, daß goniometrische Gleichungen mit einer Variablen durchaus nicht etwa entweder keine Lösung oder gleich unendlich viele haben müssen, wie man bei oberflächlicher Betrachtung vielleicht meinen könnte. Es gibt auch Gleichungen mit genau einer Lösung (z.B. $\sin^2 x + \sin^2 \pi x = 0$), drei Lösungen (z.B. $\sin x = \frac{x}{2}$) usw.

Auch bei den goniometrischen Gleichungen strebe man eine möglichst vielfältige Bezeichnungsweise für die Lösungen an, und man spreche sowohl von der Lösungsmenge der Gleichung als auch von ihren Lösungen. Dabei beachte man die Ausdrucksweise: Für die Gleichung $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (Beispiel C 20) läßt sich die Lösungsmenge angeben als Menge aller x mit $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ o d e r $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in G$). Andererseits muß man aber sagen: Die Hauptwerte ihrer Lösungen sind $x_1 = \frac{\pi}{3}$ u n d $x_2 = \frac{2\pi}{3}$.

Dem Begriff "Hauptwert" wird übrigens im Lehrbuch keine große Bedeutung beigemessen; man sollte auch im Unterricht so verfahren und bei goniometrischen Gleichungen generell alle Lösungen ermitteln lassen (bei unendlich vielen dann aber möglichst eine Indizierung vermeiden). Was die Verwendung von Bogenmaß oder Grundmaß anbetrifft, so ist das Bogenmaß das - nicht nur für die Schüler - meist schwerer zu handhabende, zumal die Tafeln der Winkelfunktionswerte die Winkel im Gradmaß enthalten, aber es ist vom Sachverhalt her gerechtfertigter. Aus diesem Grunde sollte man auch mit dem Bogenmaß beginnen und erst später bei geeigneten Beispielen auch das Gradmaß zulassen.

Bei Gleichungen wie $2\sin^2 x = 0{,}5$ (Beispiel C 22) kann man sich fragen, ob die Substitution $v = \sin x$ ausdrücklich ausgeführt werden muß, oder ob man nicht einfach sofort zu $\sin^2 x = 0{,}25$, $\sin x = \pm 0{,}5$ übergehen kann. Es sollte aber doch wohl zunächst ausdrücklich substituiert werden, um den Sachverhalt möglichst einfach und übersichtlich darzustellen; später jedoch wird man der einfacheren und Schreibarbeit ersparenden Möglichkeit den Vorzug geben. Freilich sollte dabei den Schülern - wie an vielen Stellen im Mathematikunterricht - klar sein, daß langsames

und fehlerfreies Vorgehen besser ist als schnelles und fehlerhaftes.
Ebenso wenig wie die Wurzelgleichungen sollten goniometrische Gleichungen regelrecht graphisch gelöst werden, auch im Hinblick auf die damit i.a. verbundene Ungenauigkeit und Unsicherheit, die allenfalls durch die Probe ausgeschaltet werden kann. Deshalb wird man sich auf die graphische Veranschaulichung beschränken müssen und diese meist an vorgegebenen Darstellungen (Bildern des Lehrbuchs) vornehmen. 'Diese aber sind ein so ausgezeichnetes Mittel zum Gewinnen umfassender Einsichten, daß man auf sie keinesfalls verzichten sollte. Die eine Art solcher Darstellungen, wie sie sich im Lehrbuch z.B. beim Beispiel C 22, Bild C 17, findet, ist darüber hinaus geeignet. auch Verbindungen zur analytischen Geometrie herzustellen und so den Schülern wiederum den Zusammenhang verschiedener mathematischer Disziplinen bewußt zu machen.

Bei den <u>Gleichungen mit mehreren Winkelfunktionen des gleichen Arguments</u> beachte man vor allem, daß wirklich allgemeingültige Beziehungen beim Umformen der Gleichungen benutzt werden. Auch den Schülern muß deutlich werden, daß es etwa bei $5 \sin x + 2 \cos x = 4$ (Beispiel C 26) zweckmäßiger ist, zunächst etwa zu $25 \sin^2 x = 16 - 16 \cos x + 4 \cos^2 x$ umzuformen und dann $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ zu setzen, statt zuerst $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ zu berücksichtigen und erst dann zu quadrieren. Andernfalls wäre es nämlich notwendig zu überlegen, daß die eventuell durch die Beschränkung der Gültigkeit der Substitutionsgleichung auf $\frac{(4k - 1)\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{(4k + 1)\pi}{2}$ (k ganz) "verloren gegangenen" Lösungen der Ausgangsgleichung durch das Quadrieren wieder Berücksichtigung gefunden haben.
Bei Aufgaben dieser Art empfiehlt sich übrigens - im Gegensatz zu dem sonst meist von quadratischen Gleichungen her gewohnten Vorgehen - sofort das Arbeiten mit Dezimalbrüchen (Rechenstab!). Die Hoffnungen, daß sich durch das Verwenden gemeiner Brüche Kürzungsmöglichkeiten ergeben, sind nämlich gering, und die Arbeit mit den Winkelfunktionstafeln verlangt ohnehin den Übergang zu Dezimalbrüchen.
Die Behandlung des <u>Hilfswinkelverfahrens</u> bei Gleichungen der

Form $a \sin x + b \cos x = c$ wird vom Lehrplan nicht ausdrücklich gefordert. Dessen Vorteile sind jedoch groß, weil das Auftreten von Scheinlösungen vermieden wird, seine Berücksichtigung ist deshalb zu empfehlen. Außerdem bietet sich hier eine gute Gelegenheit, die Additionstheoreme zu festigen. Das Hilfswinkelverfahren eignet sich auch besonders gut für die selbständige Erarbeitung durch die Schüler.
Bei der Anwendung dieses Verfahrens kann man zunächst zwar so vorgehen, daß alle Umformungen am speziellen Beispiel noch einmal durchgeführt werden, um den Sachverhalt besser erfassen zu lassen, doch sollte man dann später immer gleich die allgemein hergeleitete Lösungsformel verwenden lassen, wie dies im Lehrbuch beim Beispiel C 27 geschehen ist. Im übrigen sei der Lehrer darauf aufmerksam gemacht, daß es für den Fall $|a| = |b|$ $(\neq 0)$ noch ein einfacheres Lösungsverfahren gibt. So führt z.B. im Fall $a \sin x + a \cos x = c$ das Umformen zu $\sin x + \cos x = \frac{c}{a}$, $\sin x + \sin (90^\circ - x) = \frac{c}{a}$ nach Anwendung von $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ schließlich zu $2 \sin 45^\circ \cdot \cos(x-45^\circ) = \frac{c}{a}$ $\cos (x - 45^\circ) = \frac{c\sqrt{2}}{2a}$, was $x - 45^\circ$ und daraus schließlich x liefert. So erhält man aus $2 \sin x + 2 \cos x = 3$ sofort $\cos(x-45^\circ) = \frac{1}{4}\sqrt{6} = 0{,}612$ und daraus $x - 45^\circ = 52{,}3^\circ + k \cdot 360^\circ$ oder $x - 45^\circ = 307{,}7^\circ + k \cdot 360^\circ$, das heißt, $x = 97{,}3^\circ + k \cdot 360^\circ$ oder $x = 352{,}7^\circ + k \cdot 360^\circ$. Ganz ähnlich führt bei $a = - b$ die Berücksichtigung der Formel für sin   - sin ß zum Ziel. Bei dieser Gelegenheit sei noch auf die bei goniometrischen Gleichungen wie bei Wurzelgleichungen auftretende Frage des Arbeitens mit Näherungswerten aufmerksam gemacht: Obwohl oben z.B. 0,612 nur ein Näherungswert für $\frac{1}{4}\sqrt{6}$ ist, ist es in allen derartigen Fällen gerechtfertigt, trotzdem das Gleichheitszeichen zu verwenden, weil die Genauigkeit dem von den Schülern genutzten Tafelwerk entspricht. Verführe man anders, so müßten auch die Lösungen goniometrischer Gleichungen fast immer als Näherungslösungen deutlich kenntlich gemacht werden. Selbstverständlich müssen sich aber Lehrer wie Schüler dieser Tatsache klar bewußt sein, etwa beim Übergang von $\cos x = -\frac{1}{2} \cdot (1 - \sqrt{5})$ zu $\cos x = 0{,}618$ (Beispiel C 25).

Bei den <u>Gleichungen, die trigonometrische Funktionen mit verschiedenen Argumenten</u> enthalten, sollten folgende Typen auftreten.

(a) Gleiche Funktionen verschiedener Argumente (Beispiel C 28 a)

(b) Verschiedene Funktionen verschiedener Argumente (Beispiel C 28 b)

(c) Funktionen von x, 2x, $\frac{x}{2}$ usw. (Beispiel C 29)

Es sei aber betont, daß deshalb den Schülern nicht etwa ein systematischer Überblick über all diese Fälle gegeben werden muß. Es kommt ja auch hier - wie bei den Wurzelgleichungen - nicht darauf an, das Lösen aller möglichen Gleichungstypen mehr oder weniger mechanisch zu üben, sondern die wesentlichen Überlegungen voll zu erfassen. Aus diesem Grund ist auch auf die Behandlung schwierigerer Typen zu verzichten (z.B. $3\sin 2x - 4\sin^2 x + 2\cos^2 x = 2{,}8$ oder $\sin 3x \cdot \sin x = 0{,}5$).

Auch die Beschäftigung mit Systemen von goniometrischen Gleichungen mit zwei Variablen ist weitgehend einzuschränken, und insbesondere ihre systematische Besprechung ist zu vermeiden (der Lehrplan erwähnt sie deshalb auch gar nicht gesondert). Es sind nur solche einfachen Fälle zu behandeln, die ohne Schwierigkeiten auf einen der behandelten Fälle von goniometrischen Gleichungen mit einer Variablen zurückzuführen sind. Diese aber sind wichtig, weil sie Gelegenheit bieten, die Lösungsmethoden von Gleichungssystemen, wie sie vor allem in Klasse 9 behandelt worden sind, ebenso in Erinnerung zu rufen wie die Tatsache, daß die Lösungen von Gleichungen mit zwei Variablen geordnete Paare reeller Zahlen sind. Zudem ergeben sich hier oft Beispiele dafür, daß nur endlich viele Lösungen auftreten, etwa wenn eine der beiden Gleichungen die Variablen nicht als Argumente von Winkelfunktionen enthält.

Auch bei den goniometrischen Gleichungen vergesse man übrigens keinesfalls den Hinweis darauf, daß durchaus nicht alle goniometrischen Gleichungen in der erörterten Weise lösbar sind, man vielmehr häufig auf Näherungsverfahren angewiesen ist. Wenn es die verfügbare Zeit und die Klassensituation gestatten, ist es auch durchaus möglich, die graphische Ermittlung einer Näherungslösung für eine Gleichung wie $x - \tan x = 0$ oder $2 \sin x - x = 0$ mehr oder weniger ausführlich durchzusprechen, weil hier insbesondere auch die Bedeutung des Bogenmaßes klar ersichtlich ist.

Wenn das Lehrbuch die Ermittlung von Nullstellen und Unendlichkeitsstellen nichtrationaler Funktionen erst nach der Behandlung von Wurzelgleichungen und goniometrischen Gleichungen im Zusammenhang vornimmt, so tut es dies aus Gründen der Systematik und Übersichtlichkeit. Der Lehrer kann im Unterricht durchaus auch anders vorgehen und entsprechende Aufgaben in die Behandlung der Gleichungen mit einstreuen, falls ihm dies günstiger erscheint, um die Lösungsverfahren an Ort und Stelle noch eingehender zu üben.
Für die Schreibweise ist man hier - ebenso wie bei der Ermittlung von Extremwerten oder auch von Kurvenschnittpunkten in der analytischen Geometrie - vor die Frage gestellt, ob man von vornherein Symbole wie "x_n" oder "x_u" verwenden oder die betreffenden Gleichungen zunächst einfach nur mit "x" schreiben sollte. Im Gegensatz zu dem sonst - auch im Lehrbuch der Klasse 11 - bevorzugten Vorgehen ist hier im Lehrbuch der erstere Weg beschritten worden, weil die Schreibweise $\lim\limits_{x \to x_u} \frac{1}{f(x)} = 0$ sowieso erfordert, daß x_u besonders kenntlich zu machen.
Im übrigen sollte man sich in der Anzahl und Schwierigkeit der Beispiele starke Beschränkung auferlegen, zumal man ja nach der Behandlung der Differentiationsregeln für nichtrationale Funktionen noch einmal im Zusammenhang mit Kurvendiskussionen auf diese Fragen zurückkommen wird.

3.3. Zur Stoffeinheit 3.3. "Einige Grenzwerte nichtrationaler Funktionen"

Hier handelt es sich um eine Stoffeinheit, für die vom Lehrplan ein Zeitraum von 5 Unterrichtsstunden veranschlagt wird und die im Lehrbuch nur zwei Lerneinheiten umfaßt. In ihr kommt es darauf an, Grenzwerte zu behandeln, die für die Ermittlung der Ableitungen trigonometrischer Funktionen sowie der Exponential- und Logarithmusfunktion benötigt werden.

Bei der Ermittlung des Grenzwertes $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ ist es zweckmäßig, die als Ausgangspunkt dienende Ungleichung von vornherein mittels "$\leqq$" zu formulieren, um nicht beim Grenzübergang besonders erörtern zu müssen, daß "$<$" umgewandelt werden muß in "$\leqq$" gemäß der Tatsache, daß aus "$f(x) < g(x)$ für alle x mit $a < x < b$ für $a \leqq x_0 \leqq b$ folgt "$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leqq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$" und nicht etwa

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ " (sofern die betreffenden Grenzwerte existieren). Ferner sei empfohlen, sich von der Gültigkeit der Ungleichung $\cos x \leqq \frac{x}{\sin x} \leqq \frac{1}{\cos x}$ bzw. $\frac{1}{\cos x} \geqq \frac{\sin x}{x} \geqq \cos x$ auch für negative x (mit $-\frac{\pi}{2} < x < 0$) zu überzeugen, bevor der Grenzübergang durchgeführt wird, weil damit die sonst zuerst notwendige Beschränkung auf den rechtsseitigen Grenzwert vermieden werden kann. Den Schülern sollte auch bewußt sein, daß die Funktion $y = \frac{\sin x}{x}$ an der Stelle $x = 0$ nicht definiert ist, daß aber trotzdem die Grenzbetrachtung möglich ist. Dabei sollte man nach Möglichkeit auf Funktionen hinweisen, bei denen zwar ein analoger Fall zunächst vorzuliegen scheint, ein solcher Grenzwert aber nicht existiert, wie etwa bei $y = \sin \frac{1}{x}$; vgl. z.B. FICHTENHOLZ I [10], S. 111. Man vergesse übrigens auch nicht, die Verbindung zu der den Schülern seit Klasse 10 bekannten Tatsache herzustellen, daß für dem Betrage nach kleine Werte von x gilt arc x   sin x (tan x).

Bei der Herleitung des Grenzwertes $\lim\limits_{x \to 0} \log_a (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ muß man sich wesentlich auf die bereits in der Stoffeinheit 3.1. erwähnte - freilich nicht bewiesene - Tatsache stützen, daß $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ für beliebige reelle $x \neq 0$ gilt, so daß die Schüler vielleicht fragen werden, was hier eigentlich überhaupt noch bewiesen wird. Es kommt darauf an, den Schülern bewußt zu machen, daß weiterhin entscheidend von der Stetigkeit der Logarithmusfunktion Gebrauch gemacht werden muß und daß man diese Stetigkeit auch so formulieren kann, daß Logarithmieren und Grenzwertbildung miteinander vertauscht werden dürfen.

4. Hinweise zum Stoffgebiet 4. "Differential- und Integralrechnung und Anwendungen (Fortsetzung)"

4.0. Einleitung

Das Stoffgebiet 4. knüpft unmittelbar an die entsprechenden Stoffgebiete zur Analysis in Klasse 11 an. Während in Klasse 11 nur rationale Funktionen differenziert und integriert wurden, werden nun in Klasse 12 die Methoden der Differential- und Integralrechnung auf nichtrationale Funktionen ausgedehnt. Die Trennung in der Behandlung von rationalen und nichtrationalen Funktionen ist von der Sache her eigentlich nicht gegeben. Daß in Klasse 11 schon bestimmtes und unbestimmtes Integral behandelt werden und dafür die Differentiation z.B. der Winkelfunktionen und die Ableitung der Kettenregel erst in Klasse 12 erfolgen können, hat seine Ursache in der Vorleistung, die der Mathematikunterricht für den Physikunterricht erbringen muß. Der Physikunterricht in Klasse 11 benötigt den Integralbegriff.
Der neue Lehrplan für Klasse 12 fordert eine exaktere Behandlung wichtiger Elemente der Infinitesimalrechnung. Der in Klasse 11 begonnene deduktive Aufbau der Analysis, das "Grundgefüge von präzise formulierten Definitionen und Sätzen" wird in Klasse 12 weiter ausgebaut. Deshalb stehen jetzt insgesamt 80 (gegenüber bisher 50) Unterrichtsstunden für die Behandlung der Stoffgebiete 3. "Nichtrationale Funktionen" und 4. "Differential- und Integralrechnung und Anwendungen (Fortsetzung)" zur Verfügung.

An wichtigen S ä t z e n bzw. R e g e l n , die das Grundgefüge erweitern, werden bewiesen:
- die Regel für die Ableitung zueinander inverser Funktionen;
- die Regel für die Ableitung von Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten;
- die Kettenregel;
- die Regel für die Ableitung der Winkelfunktionen, der Logarithmus- und Exponentialfunktionen;
- ein Satz über die Volumenberechnung mit Hilfe der Integralrechnung;
- der Satz des Cavalieri;
- einige Volumenformeln.

Die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen werden nicht mehr behandelt. Die zyklometrischen Funktionen wurden in der Schule lediglich bei dem Integral zur Berechnung des Flächeninhalts des Kreises verwendet. Dieses Integral ist jedoch auch ohne zyklometrische Funktionen lösbar, nämlich über ein bestimmtes Integral.
Auf die partielle Integration als ein Integrationsverfahren wird ebenfalls verzichtet. Das ist sicher kein Verlust, da erstens ohnehin nur spezielle Integrale mit Hilfe der partiellen Integration gelöst werden können und zweitens eine Systematik der Integrationsmethoden in der Schule nicht erreicht werden soll.

Stammfunktionen für die Funktion ln, die bisher mit der Methode der partiellen Integration gewonnen wurden, können auch auf andere Weise gefunden werden.

Folgende F e r t i g k e i t e n und F ä h i g k e i t e n sind zu erreichen:
Die in den Klassen 11 und 12 erarbeiteten Differentiations- und Integrationsregeln sollen die Schüler selbständig auf rationale und relativ leicht übersehaubare nichtrationale Funktionen anwenden können. Diese Kenntnisse wieder sollen sie bei Kurvendiskussionen beim Lösen von Extremwertaufgaben und bei Flächen- und Volumenberechnungen (bei den Volumenberechnungen stehen die Rotationskörper im Vordergrund) anwenden können.

Die W i e d e r h o l u n g von Begriffen, Verfahren usw. besonders der Stoffgebiete der Analysis aus Klasse 11 und des Stoffgebietes 3. "Nichtrationale Funktionen" aus Klasse 12 ist ständig zu pflegen.
Die Anzahl der zu behandelnden Sätze ist wesentlich geringer als in Klasse 11. Die Anwendungen erarbeiteter Regeln rücken jetzt in Klasse 12 mehr in den Vordergrund. Es ist deshalb vom Lehrer besonders darauf zu achten, daß die analytische Denkweise nicht durch das formale Anwenden von Regeln erstickt wird. Es geht also in Klasse 12 um eine "gesunde Mischung" aus <u>Anwendungen erarbeiteter Regeln</u> und dem <u>Üben in den Denkweisen der Analysis</u>.
Deshalb sollten die wenigen Beweise sorgfältig geführt werden. In diesen Beweisen werden immer wieder die wichtigsten Grundideen der Analysis aus Klasse 11 wiederholt.

Bei den Anwendungsbeispielen ist stets zu prüfen, ob die Voraussetzungen der Sätze bzw. Regeln, die anzuwenden beabsichtigt wird, durch die Beispiele erfüllt werden.
An die Unterrichtsgestaltung stellt der Lehrplan konkrete Forderungen in bezug auf die Entwicklung der Selbsttätigkeit der Schüler. Es heißt dazu auf Seite 12 des Lehrplans:
"Es ist erforderlich, die Schüler an neue, die Aktivität und Selbständigkeit stimulierende Formen des Wissenserwerbs und der Fähigkeitsentwicklung heranzuführen, z.B. langfristige Übungen, Schülervorträge, Konsultationen. Dabei sind der Leistungsstand und die Fähigkeiten der einzelnen Schüler zu berücksichtigen. Differenzierte Lernaufträge und Aufgabenstellungen gewährleisten, daß jeder Schüler zum produktiven Lernen angehalten wird."

Die Anlage des Lehrbuchtextes gibt die Möglichkeit, daß die Schüler sich einige Abschnitte selbständig erarbeiten. Besonders geeignet dazu sind die Lerneinheiten (bzw. kleinere Abschnitte aus diesen) D 2; D 9 (besonders die Ableitungen von cos, tan und cot); D 12 (kleinere Abschnitte); D 14; D 15; D 17; D 18; D 21; D 25; D 26. Als Themen für kleinere Vorträge unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades sind die meisten der im Lehrteil des Lehrbuches eingearbeiteten Aufträge, aber auch die Lerneinheiten D 13; D 20; D 22; D 25 gut geeignet.
Die folgenden Abschnitte enthalten Hinweise zu einigen speziellen Fragen, insbesondere zum deduktiven Aufbau der Differentialrechnung und zur näherungsweisen Berechnung von Funktionswerten mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung.

4.1. Zur Stoffeinheit 4.1. "Differentiation und Integration nichtrationaler Funktionen"

Die in Klasse 11 behandelten rationalen Funktionen erfordern zu ihrer Differentiation lediglich die folgenden Regeln:

1. a) Ableitung einer Konstanten $f(x) = c$;
   b) Ableitung der identischen Funktion $f(x) = x$;
2. Zurückführen der Ableitung einer mittels rationaler Operationen zusammengesetzten Funktion auf die Ableitung ihrer Komponenten, also auf die Ableitung einer Summe, eines Produkts und eines Quotienten.

(Die Ableitung einer Differenz kann mit den übrigen Regeln gewonnen werden.)

Mit den genannten Regeln können alle rationalen Funktionen differenziert werden.

Die Ableitung weiterer Funktionen erfordert neue Überlegungen. Bei diesen Überlegungen sollte nicht die neue Regel an erster Stelle stehen, sondern der Lehrer sollte zunächst die Funktionen, die nun nicht mehr rational sind und deshalb mit den bisherigen Regeln nicht differenziert werden können, in den Mittelpunkt stellen.
Da sind zunächst die Wurzelfunktionen, die den Schülern schon aus der 9. Klasse bekannt sind. Sie werden aus rationalen Funktionen als deren Umkehrungen gewonnen. Wenn es also gelingt, die Ableitung der Umkehrfunktion $\bar{f}$ einer Funktion f auf die Ableitung der Funktion f zurückzuführen, so ist das Problem der Ableitung der Wurzelfunktionen gelöst. Die Differentiation der Wurzelfunktionen wird dann auf die Differentiation rationaler Funktionen, die nach den schon bekannten Regeln erfolgt, zurückgeführt.
Die Parallelität zwischen der Einführung von Funktionenklassen einerseits und neuer Differentiationsregeln andererseits kann hier und weiter bei den Winkelfunktionen deutlich gemacht werden. Diese Parallelität liefert eine hinreichende Motivierung für alle in Klasse 12 zu behandelnden Differentiationsregeln.

Zunächst sollen nun zu den in der Stoffeinheit 4.1. zu behandelnden Sätzen einige methodische Hinweise gegeben werden.

Der Lehrplan verlangt als erste neue Regel die für die Ableitung von Umkehrfunktionen. Der in "Mathematik, Lehrbuch für die erweiterte Oberschule, Klasse 12 (B)", Ausgabe 1963, gegebene Beweis für diese Regel macht wesentlich von der Stetigkeit der Umkehrfunktion Gebrauch, ohne sie jedoch zu beweisen. Er enthält also eine erhebliche Lücke. Da nun aber in Klasse 11 nach dem neuen Lehrplan die Stetigkeit als ein zentraler Begriff behandelt wird, stehen alle Mittel zur Verfügung, den Nachweis der Stetigkeit der Umkehrfunktion $\bar{f}$ unter der Voraussetzung der Stetigkeit der Funktion f zu führen. Er bietet zudem die Möglichkeit, wichtige Grundbegriffe der Analysis wie "Umgebung", "Grenzwert" und "Konvergenz von Zahlenfolgen" zu wiederholen. Der Beweis, der in der Literatur oft indirekt unter Verwendung des Satzes von BOLZANO-WEIERSTRASS geführt wird, ist im vorliegenden Lehrbuch Klasse 12 direkt angelegt und verwendet nur solche Gedankengänge, die den Schülern bereits aus Klasse 11 bekannt sind.

Der sich an den Beweis von Satz D 1 anschließende Auftrag D 4 soll unter Verwendung des Satzes D 1 gelöst werden.

$y = \sqrt[n]{x}$, $x \geqq 0$, ist die Umkehrfunktion von $x = y^n$, $y \geqq 0$.

$x = y^n$ ist für $y \geqq 0$ eine stetige (jede rationale Funktion ist stetig), monoton wachsende Funktion.

Folglich ist $x = y^n$ auch in jedem abgeschlossenen Intervall $\langle a,b \rangle$ mit $0 \leqq a < b$ stetig und monoton wachsend.

Nach dem Satz D 1 ist dann auch $y = \sqrt[n]{x}$ in jedem abgeschlossenen Intervall $\langle c,d \rangle$ mit $0 \leqq c < d$ stetig und monoton wachsend, also stetig und monoton wachsend für $x \geqq 0$.

Die Stetigkeit der Umkehrfunktion wird auch im Beispiel D 1 benutzt, indem für die spezielle Funktion $y = \sqrt{x}$ die Ableitung an einer Stelle x_0 durch einen Grenzprozeß entsprechend der Definition der Ableitung einer Funktion an einer Stelle x_0 (vgl. Klasse 11) gewonnen wird. An diesem Beispiel kann den Schülern wieder in Erinnerung gerufen werden, was die Ableitung einer Funktion an einer Stelle x_0 ist - nämlich ein Grenzwert.

Als selbständige Übung könnten die Schüler z.B. die Ableitung der Funktion $f(x) = \sqrt{2x + 1}$, $x > \frac{1}{2}$, ebenso wie in Beispiel D 1 berechnen und den Zusammenhang mit der Ableitung der Umkehrfunktion von f überprüfen.
Nachdem nun an Beispielen der prinzipielle Weg der Beweisführung aufgezeigt wurde, ist die Regel in voller Allgemeinheit zu beweisen. Die Regel erlaubt es dann, die Ableitung gewisser Funktionen, also gewisse Grenzwerte rationell, ohne weitere Grenzbetrachtungen, zu ermitteln.

Die Voraussetzungen des Satzes D 2 sind:
- f ist eine eineindeutige Funktion;
- f ist in einer Umgebung von x_0 differenzierbar;
- $f'(x_0) \neq 0$.

Die Behauptung lautet:

- Die zu f inverse Funktion $\bar{f}$ ist in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar, d.h., $\bar{f}'(y_0)$ existiert.
- $\bar{f}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Für das Verständnis dieses Satzes ist es wesentlich, daß klar zwischen den folgenden Aussagen unterschieden wird.

a) Die inverse Funktion $\bar{f}$ existiert (in einer Umgebung von y_0).
b) Die inverse Funktion $\bar{f}$ ist stetig (an der Stelle y_0).
c) Die inverse Funktion $\bar{f}$ ist differenzierbar an der Stelle y_0.

Beim Beweis des Satzes werden diese drei Aussagen schrittweise aus den Voraussetzungen abgeleitet.

Die zur Lerneinheit 3 genannten Aufgaben d 12 bis 14 sollen mit Hilfe der Regel

$$\bar{f}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

gelöst werden. Um diese Regel aber anwenden zu können, muß zunächst geprüft werden, ob die Voraussetzungen des Satzes D 2 erfüllt sind, denn nur dann ist ja gesichert, daß die Ableitung mit der Regel gewonnen werden kann.
Mit Hilfe des Satzes D 2 kann nun die Differentiationsregel für Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten auf solche mit rationalen Exponenten erweitert werden. Hier soll auf einen Sonderfall aufmerksam gemacht werden, der sich kaum umgehen läßt.
Es sei $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$. Die Potenzen mit rationalen Exponenten sind für nichtnegative x erklärt, und für diese gilt dann die Regel, nach der $f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$ für alle positiven x ist.
Andererseits ist $x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$.
Diese Identität gilt aber nur für nichtnegative x, da eben nur für diese x die linke Seite der Gleichung erklärt ist. Dagegen ist $\sqrt[3]{x^2}$ ein sinnvoller Term für alle reellen Zahlen x.
Die Funktion $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ist für alle reellen Zahlen x definiert.
Für $x \geq 0$ gilt: $f(x) = g(x)$.

Die Funktion g ist auch für negative x differenzierbar (nicht an der Stelle 0). Jedoch kann die Ableitung für negative x bisher nur über den Satz D 2 gefunden werden.

Man betrachte $y = \sqrt[3]{x^2}$ für $x < 0$. In diesem Bereich existiert die Umkehrfunktion. Beachtet man, daß für alle x des betreffenden Intervalls $y > 0$ ist, so ist

$$y^3 = x^2$$

und weiter

$$x = -\sqrt[2]{y^3}$$

($x = \sqrt[2]{y^3}$ kommt nicht in Frage wegen $x < 0$).

Für positive y ist aber

$$x = -\sqrt{y^3} = -y^{\frac{3}{2}},$$

und es darf die Differentiationsregel für Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten angewendet werden.

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{3}{2}\,y^{\frac{1}{2}},$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}}$$

Hier darf $\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}$ nicht zu $\sqrt[3]{x}$ vereinfacht werden, da $x < 0$ gilt und für diesen Fall nur der erste Term definiert ist.

Diese eben durchgeführte Ableitung könnte als Auftrag zur Förderung guter Schüler eingesetzt werden. Ansonsten empfiehlt es sich, diese Aufgabe noch zurückzustellen, bis die Kettenregel zur Verfügung steht. Mit der Kettenregel findet man dann für alle $x \neq 0$

$$y' = \frac{2}{3}\,\frac{x}{\sqrt[3]{x^4}};$$

vgl. dazu die Beispiele D 2 b) und D 20.

In Klasse 11 wurde bereits ein Spezialfall der Kettenregel behandelt, nämlich die Regel für den Fall, daß Potenzen einer rationalen Funktion (Exponent ganzzahlig) abgeleitet werden.

Bei der Wiederholung des Spezialfalles sollte der Lehrer den Schülern auch zeigen, daß bisher keine zwingende Notwendigkeit für diesen Spezialfall besteht, da jede ganzzahlige Potenz einer rationalen Funktion wieder eine rationale Funktion ergibt, die

mit der Regel für die Ableitung von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten und den Regeln für die Ableitung von Summe, Produkt und Quotient differenzierbarer Funktionen abgeleitet werden kann.
Doch einfacher kann der Spezialfall der Kettenregel durch eine wiederholte Anwendung der Produktregel eliminiert werden. (Man beachte jedoch, daß beim Beweis des Satzes D 3 über die Differenzierbarkeit von Potenzen mit rationalen Exponenten der Spezialfall der Kettenregel Anwendung fand.) Dessen ungeachtet bringt die Anwendung der Kettenregel in den genannten Fällen eine Verkürzung des Rechenganges.
Nun sollte den Schülern ein <u>Beispiel einer durch Verkettung zweier Funktionen entstandenen differenzierbaren Funktion</u> vor Augen geführt werden, deren Ableitung sie mit den bisherigen Regeln nicht ermitteln können.
Ein einfaches Beispiel dieser Art ist die Funktion
$y = f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Selbst mit Hilfe der inversen Funktion für $x \geqq 0$ (oder $x \leqq 0$) ist die Ableitung nicht zu finden.

Für $x \geqq 0$ ist f umkehrbar, und es ist

$$x = \sqrt{y^2 - 1},$$

also eine Funktion, die vom gleichen Typ wie f selbst ist und deren Ableitung somit auch nicht bekannt ist.

Die Funktion f ist durch Verkettung der Funktionen g und h mit $g(z) = \sqrt{z}$ und $h(x) = x^2 + 1$ entstanden. Beide Funktionen für sich sind differenzierbar, und ihre Ableitungen können mit den bisherigen Mitteln angegeben werden. Wenn es gelingt, Differenzierbarkeit und Berechnung der Ableitung der Funktion f mit $f(x) = g(h(x))$ auf die Differenzierbarkeit und Berechnung der Ableitung der Funktion g und h zurückzuführen, so ist das Problem gelöst. Das geschieht gerade durch den Satz D 4 (Kettenregel).

Der Lehrplan fordert die <u>Herleitung der Kettenregel</u>, die ohne Zweifel zu den am häufigsten angewendeten Regeln gehört. Der Beweis dieser Regel ist nicht ganz einfach.

Um den Beweis übersichtlich zu gestalten, wurde die Einführung der Hilfsfunktion φ mit

$$\varphi(h) = \begin{cases} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) & \text{für } h \neq 0, \\ 0 & \text{für } h = 0 \end{cases}$$

vorweggenommen. Man erhält dann

$$f(x_0+h) - f(x_0) = h \cdot [f'(x_0) + \varphi(h)] ,$$

wobei $\varphi(h)$ mit h gegen Null geht.

Der Satz D 4 liefert mehr als nur die in ihm enthaltene Formel. Die Formel gestattet die Berechnung der Ableitung einer durch Verkettung entstandenen Funktion, wenn die Ableitungen der Funktionen, die verkettet werden, bekannt sind. Der Satz D 4 trifft aber zuerst eine Aussage über die Differenzierbarkeit einer verketteten Funktion schlechthin.

Er besagt:

Sei F mit $F(x) = f(g(x))$ eine durch Verkettung entstandene Funktion, dann gilt:

Ist g an der Stelle x_0 und f an der Stelle $g(x_0)$ differenzierbar, so ist auch F an der Stelle x_0 differenzierbar.

Also zunächst wird über die Existenz der Ableitung an der Stelle x_0 gesprochen: Es wird behauptet, daß $F'(x_0)$ existiert. Erst dann wird ausgesagt, wie $F'(x_0)$ berechnet werden kann, nämlich durch

$$F'(x_0) = f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0) .$$

Bisher wurde vielfach ein Beweis für die Kettenregel gewählt, der nur für gewisse zusätzliche Einschränkungen Gültigkeit hat. Diese zusätzlichen Einschränkungen bestanden darin, daß die Eindeutigkeit der inneren Funktion g vorausgesetzt wurde. Diese Voraussetzung würde aber die Anwendung der Regel erheblich einschränken. Deshalb wurde im Lehrbuch der Beweis so angelegt, daß er für alle Fälle gültig ist.

An besonderen <u>Integrationsmethoden</u> wird im Lehrplan nur die Integration durch Substitution gefordert. Der Lehrplan läßt offen, ob die Herleitung der Regeln für die Substitution behandelt wird oder nicht. Sie gehört jedenfalls nicht zum reproduzierbaren Wissen der Schüler. Jedoch sollen die Schüler dazu befähigt werden, die Regeln selbständig anzuwenden. Der im Lehrbuch eingeschlagene Weg versucht, dem Lehrplan dadurch gerecht zu werden, daß der <u>Satz über die unbestimmte Integration durch Substitution</u>

bewiesen wird, während der Satz über die bestimmte Integration durch Substitution ohne Beweis mitgeteilt wird.

Der Beweis der ersten Satzes ist relativ leicht mit der Kettenregel zu erledigen. Es sollen hier die Voraussetzungen, die bei dem Satz gemacht werden, noch einmal im Detail aufgeführt werden.

1. f sei im Intervall I stetig.
2. φ mit $x = \varphi(t)$ sei eine im Intervall I monotone und differenzierbare Funktion, durch die das Intervall I_1 umkehrbar eindeutig auf das Intervall I abgebildet wird.
3. $\varphi'(t) \neq 0$ für alle $t \in I_1$.
4. $f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)$ habe eine Stammfunktion $G(t)$ in I_1.

Dann lautet die Behauptung: $G[\bar{\varphi}(x)]$ ist eine Stammfunktion von f in I, wobei $\bar{\varphi}$ die Umkehrfunktion von φ ist.
Wenn die Schüler diese Regel selbständig anwenden sollen, müssen sie die genannten Voraussetzungen beherrschen, denn bei jedem konkreten Anwendungsbeispiel sind ja diese Voraussetzungen zu prüfen, um das Ergebnis zu sichern. Der Beweis der Behauptung folgt nun sehr leicht durch Anwendung der Kettenregel auf die Funktion $G[\bar{\varphi}(x)]$.

Anders liegen die Verhältnisse bei der bestimmten Integration durch Substitution. In den zur Anwendung kommenden Beispielen läßt es sich nicht immer erreichen, daß im gesamten Intervall I_1 die Ungleichung $\varphi'(t) \neq 0$ gilt.
Ein solches Beispiel ist

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\ dx,$$

das Integral zur Berechnung des Flächeninhaltes eines Viertelkreises mit dem Radius r. Die Substitution, die das Integral zu lösen gestattet, ist

$$x = \varphi(t) = r \sin t,$$

wobei das Intervall $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ eineindeutig auf das Intervall $0 \leqq x \leqq r$ abgebildet wird. Nun ist

$$\varphi'(t) = r \cos t,$$

also

$$\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Da man auf solche wichtigen Integrale wohl kaum verzichten möchte, ist die Regel für die bestimmte Integration durch Substitution unter folgenden Voraussetzungen zu formulieren.

a) f sei stetig in $\langle a,b \rangle$.
b) φ habe in $\langle \alpha,\beta \rangle$ eine stetige Ableitung.
c) φ bilde $\langle \alpha,\beta \rangle$ umkehrbar eindeutig auf $\langle a,b \rangle$ ab.
d) Es sei $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Unter diesen Voraussetzungen gilt dann:

$$(*) \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Der Beweis dieses Satzes macht auch keine Schwierigkeiten, da die Voraussetzungen a) und b) die Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung gestatten.

Die linke Seite der Gleichung (*) ist F(b) - F(a), wobei F eine Stammfunktion von f in $\langle a,b \rangle$ ist. Eine solche Stammfunktion gibt es wegen der Voraussetzung a).

Aber $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$ ist ebenfalls eine stetige Funktion in $\langle \alpha,\beta \rangle$ wegen der Voraussetzungen a) und b). Folglich besitzt sie eine Stammfunktion in $\langle \alpha,\beta \rangle$.

Wegen $\frac{dF[\varphi(t)]}{dt} = \frac{dF(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)$

ist $F[\varphi(t)]$ eine Stammfunktion von $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$ in $\langle \alpha,\beta \rangle$, und es gilt wieder nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)\,.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Die Gleichung (*) ist auch noch bei Abschwächung der Voraussetzungen a) bis c) beweisbar, jedoch muß dann beim Beweis statt des Hauptsatzes ein anderer, im Unterricht nicht behandelter Satz mit herangezogen werden. Da bei den Beispielen, die im Mathematikunterricht gelöst werden, die oben genannten Voraussetzungen erfüllt sind, sollte der Satz in der oben genannten Form genügen.

Bei den Übungsaufgaben zur Integration durch Substitution sollte sich der Lehrer auf sehr einfache Beispiele beschränken. Bei nur sehr einfachen Typen werden die Schüler die anzuwendende Substitution, die zum Ziel führt, erkennen. Es sind dies z.B. die Potenzen linearer Funktionen. Bei anderen Typen sollte die Substitution mit angegeben werden.
Bis hierher ist ein gewisser Teilabschluß der Differential- und Integralrechnung erzielt. Alle Funktionen, die aus den rationalen Funktionen durch Bildung der inversen Funktion, durch Verkettung und durch die rationalen Verknüpfungen gebildet werden können und differenzierbar sind, kann man mit den bisher behandelten Regeln auf einfache Weise differenzieren, ohne nochmals eine Grenzbetrachtung durchzuführen.

Nun geht es an die Behandlung der Winkelfunktionen in bezug auf ihre Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit.
Die Winkelfunktionen sind gegenüber den bisher differenzierten Funktionen völlig neuartig. Sie sind in keiner Weise mit den bisher bekannten Methoden der Bildung neuer Funktionen aus den rationalen Funktionen zu gewinnen (unendliche Reihen werden im Mathematikunterricht nicht behandelt).
Deshalb kann man sich bei der Untersuchung der Differenzierbarkeit der Winkelfunktionen nicht auf die bisher erzielten Resultate stützen. Wüßte man dagegen, daß die Sinusfunktion (oder auch eine andere der vier Winkelfunktionen) differenzierbar ist und würde man ihre Ableitung kennen, so ließe sich die Differenzierbarkeit der übrigen Winkelfunktionen mit den schon behandelten Regeln ermitteln.
Wenn man so im Unterricht vorgeht, kann man vielleicht stärker unterstreichen, daß mit der Ableitung der Winkelfunktionen ein über das Bisherige hinausgehender Abschnitt der Infinitesimalrechnung beginnt.
Man könnte dann zunächst annehmen, daß die Sinusfunktion differenzierbar wäre; ihre Ableitung sei sin'.
Wegen $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ erhält man dann durch Anwendung der Kettenregel

$$\cos' x = \sin'(\frac{\pi}{2} - x)\cdot(-1) = -\sin'(\frac{\pi}{2} - x).$$

Entsprechend können dann die Ableitungen von tan und cot durch die Ableitungen von sin und cos mit Hilfe der Quotientenregel gewonnen werden.

Die Winkelfunktionen sind also sämtlich differenzierbar, und ihre Ableitungen sind bekannt, <u>wenn</u> die Sinusfunktion differenzierbar und ihre Ableitung bekannt ist.
Nun wendet man sich der Differenzierbarkeit der Sinusfunktion zu. Zunächst wird der Differenzenquotient umgeformt.

$$\frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} = \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)$$

(nach dem Additionstheorem),
wobei x_0 eine beliebige, aber feste Stelle ist. Nun kann man versuchen, den Grenzübergang zu vollziehen.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h\to 0} \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)$$

Der erste Limes existiert und ist gleich 1 nach den Untersuchungen im Stoffgebiet 3.

Was aber ist $\lim\limits_{h\to 0} \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)$?

Man könnte <u>leichtfertig</u> schließen:

$$\lim_{h\to 0} \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) = \cos\left(x_0 + \lim_{h\to 0} \frac{h}{2}\right) = \cos x_0 .$$

Dann wird aber entscheidend die Stetigkeit der Kosinusfunktion an einer beliebigen Stelle x_0 benutzt, obwohl die Stetigkeit dieser Funktion bisher nicht nachgewiesen wurde. Es bliebe also eine wesentliche Lücke im Beweisgang.
Diese Lücke kann aber ohne besonderen Aufwand und mit den Kenntnissen, die die Schüler bisher haben, geschlossen werden. Das ist im Lehrbuch geschehen.
Durch Anwendungen von Additionstheoremen gelangt man zu der folgenden Gleichung.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} = \cos x_0 \left(\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}\right) - \sin x_0 \left(\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos}{h}\right.$$

Während der erste Grenzwert bekannt ist, ist die Existenz des zweiten erst nachzuweisen und dieser Grenzwert zu berechnen.
Das geschieht nun folgendermaßen.

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos h}{h} = (\lim_{h \to 0} \sin \frac{h}{2}) \cdot (\lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}})$$

Der zweite Grenzwert ist wieder der schon bekannte, dagegen ist der erste Grenzwert bekannt unter der Voraussetzung der Stetigkeit der Sinusfunktion an der Stelle 0. Dann ist nämlich

$$\lim_{h \to 0} \sin \frac{h}{2} = \sin (\lim_{h \to 0} \frac{h}{2}) = \sin 0 = 0.$$

Die Stetigkeit der Sinusfunktion an der Stelle 0 kann nun aber auch noch mit dem bereits zweimal verwendeten Grenzwert

$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ bewiesen werden. Es ist nämlich

$$\lim_{h \to 0} \sin h = \lim_{h \to 0} (h \cdot \frac{\sin h}{h}) = (\lim_{h \to 0} h) \cdot (\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}) = 0 \cdot 1 = 0$$

Bei der Berechnung des Grenzwertes $\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$ im Stoffgebiet 3. wird die Stetigkeit der Kosinusfunktion an der Stelle 0 benutzt. Insgesamt erhält man folgenden Resultat. Unter der Voraussetzung der Stetigkeit der Kosinusfunktion an der Stelle 0 und einiger einfacher Sätze über Grenzwerte ergibt sich die Differenzierbarkeit der Sinusfunktion an allen Stellen. Als Ableitung der Sinusfunktion erhält man die Kosinusfunktion.
Folglich sind auch die übrigen Winkelfunktionen differenzierbar, und ihre Ableitungen sind wieder Winkelfunktionen bzw. setzen sich aus solchen rational zusammen.

Der im Lehrbuch gewählte und hier nachgezeichnete Beweis für die Differenzierbarkeit der Sinusfunktion gestattet eine sinnvolle und nützliche Anwendung der in Klasse 11 behandelten Sätze über Grenzwerte sowie eine weitere Wiederholung des Stetigkeitsbegriffes.
Nun sollte der Satz aus Klasse 11 "Aus der Differenzierbarkeit einer Funktion an einer Stelle x_0 folgt die Stetigkeit der Funktion eben an dieser Stelle" wiederholt und hier angewendet werden. So erhält man - ganz nebenbei - die <u>Stetigkeit der Winkelfunktionen</u> an allen Stellen, an denen sie definiert sind.

Aus den Regeln für die Differentiation der Winkelfunktionen erhält man sofort entsprechende Integrationsregeln. Dabei findet man häufig in Lehrbüchern bzw. Formelsammlungen folgende Angaben.

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c \qquad [x \neq (2k+1)\tfrac{\pi}{2}]$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c \qquad [x \neq k\pi]$$

Das ist aber nicht korrekt. Der Begriff "Stammfunktion" wurde in Klasse 11 in richtiger Weise nur im Zusammenhang mit einem Intervall I definiert. Es heißt in "Mathematik, Lehrbuch für Klasse 11", Best.-Nr. 00 11 51 - 1, Seite 145:

"Die Funktion F ist eine Stammfunktion der Funktion f im Intervall I $\underset{Df}{=}$ Für jedes x aus I gilt $F'(x) = f(x)$".

Besitzt f in I eine Stammfunktion, so versteht man unter $\int f(x)\,dx$ die Menge aller Stammfunktionen von f in I.

Die Menge aller reellen Zahlen x mit $x \neq k\pi$ ist aber kein Intervall, sondern eine aus unendlich vielen Intervallen bestehende Menge. Für diesen Definitionsbereich der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ umfaßt $-\cot x + c$ für beliebige reelle c nicht alle Funktionen $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$.

Z.B. erfüllt auch die Funktion F mit

$$F(x) = \begin{cases} -\cot x + c_1 & \text{für } x < 0 \text{ und } x \neq k\pi \\ -\cot x + c_2 & \text{für } x > 0 \text{ und } x \neq k\pi; \end{cases}$$

c_1, c_2 beliebig reell,

die Bedingung $F'(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, obwohl sie in der Klasse der Funktionen $-\cot x + c$ nicht enthalten ist, sobald $c_1 \neq c_2$ ist.

Wenn also $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ nicht für alle reellen Zahlen gilt, so ist jeweils das <u>Intervall</u> bzw. sind die <u>Intervalle</u> anzugeben, in denen die Identität gilt. Das ist in unseren Beispielen

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c \text{ für } (2k-1)\frac{\pi}{2} < x < (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \text{ ganz;}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c \quad \text{für } k\pi < x < (k+1)\pi \quad , \quad k \text{ ganz.}$$

Noch allgemeiner ist die folgende Formulierung.

In jedem Intervall I, in dem cos x für alle $x \in I$ verschieden von Null ist, gilt

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c.$$

Entsprechendes gilt für $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$.

Die Integration von tan und cot über geeignete Intervalle ist prinzipiell möglich.
Es kann den Schülern mit Hilfe des Satzes D 8 aus dem Lehrbuch für Klasse 11 erläutert werden, daß es zu jeder stetigen Funktion eine Stammfunktion gibt. Mehr als der Nachweis der Existenz ist zunächst nicht möglich. Der Lehrplan sieht auch die Integration dieser beiden Funktionen nicht vor.

Nach den Winkelfunktionen werden schließlich noch als letzte Klasse von Funktionen die <u>Logarithmusfunktionen</u> und als ihre Umkehrung die <u>Exponentialfunktionen</u> differenziert. Auch die Logarithmusfunktionen sind aus den bisher bekannten Funktionen nicht durch rationale Verknüpfungen, Verkettung und Inversenbildung zu gewinnen. Deshalb geht man bei der Frage nach der Differenzierbarkeit wieder auf die Definition der Differenzierbarkeit zurück. Dabei genügt es aber, für eine einzige Logarithmusfunktion die Grenzbetrachtung durchzuführen. Die anderen Logarithmusfunktionen sind ja mit Hilfe der einen und einer Konstanten rational darstellbar.
Man kann sich also zunächst darauf beschränken, die Ableitung der Funktion des natürlichen Logarithmus für beliebige $x > 0$ zu ermitteln. Dabei werden der im Stoffgebiet 3. mitgeteilte Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ und die Stetigkeit der ln-Funktion wesentlich benutzt.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x_0}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\cdot\ln(1+\frac{x_0}{h})\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{x_0}\cdot\frac{x_0}{h}\ln(1+\frac{h}{x_0})\right]$$

$$= \frac{1}{x_0}\cdot\lim_{h\to 0}\ln(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{x_0}{h}} .$$

Mit $\frac{h}{x_0} = z$ erhält man

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x_0+h) - \ln x_0}{h} = \frac{1}{x_0}\lim_{h\to 0}\ln(1+z)^{\frac{1}{z}} .$$

Wegen der Stetigkeit der ln-Funktion an der Stelle e ist

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x_0+h) - \ln x_0}{h} = \frac{1}{x_0}\cdot\ln\left[(\lim_{h\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}\right] .$$

Unter Verwendung des schon oben erwähnten Grenzwertes erhält man

$$\ln' x_0 = \frac{1}{x_0} .$$

Da x_0 eine beliebige Stelle mit $x_0 > 0$ ist, gilt $\ln' x = \frac{1}{x}$ für alle $x > 0$.

Die vorgenommenen Umformungen sind allerdings nur möglich, weil mit h auch $\frac{h}{x_0}$, also z gegen Null strebt. Dabei darf man für h nur solche Zahlen zulassen, für die $x_0 + h$ positiv ist.

Die Ableitung einer beliebigen Logarithmusfunktion mit positiver Basis a ($a \neq 1$) erhält man durch

$$(\log_a x)' = (\frac{\ln x}{\ln a})' = \frac{1}{x\cdot\ln a} .$$

Durch die sich aus der Differentiationsregel ergebende Integrationsregel

$$\int\frac{dx}{x} = \ln|x| + c \quad , \quad x < 0 \quad \text{oder} \quad x > 0,$$

wird endlich die Lücke in der Integration der Potenzen mit ganzzahligen Exponenten geschlossen.

Da die Logarithmusfunktionen eineindeutig und differenzierbare Funktionen sind, sind es auch die Exponentialfunktionen als deren inverse Funktionen. Bei der Berechnung der Ableitungen genügt es wieder, sich auf die Ableitung von e^x zu beschränken.

Die anderen erhält man durch

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a \cdot e^{x \cdot \ln a} = \ln a \cdot a^x$$

Als eine geeignete Übung zur Differentiation von Logarithmusfunktionen könnte man z.B. die Funktion f mit $f(x) = \ln |\sin x|$ und die Funktion f mit $f(x) = -\ln |\cos x|$ ableiten.

Die Ableitung der ersten Funktion ist gerade die Funktion cot, die Ableitung der zweiten Funktion ist die Funktion tan. Einzige Schwierigkeit bei der Ableitung bieten die Betragsstriche, denen mit einer Fallunterscheidung beizukommen ist.

Für $\sin x > 0$ gilt:

$$\ln |\sin x| = \ln \sin x.$$

Diese Funktion wird im Lehrbuch in der Lerneinheit 11 als Beispiel differenziert.

Im Falle, daß $\sin x < 0$ ist, gilt

$$\ln |\sin x| = \ln (- \sin x)$$

und $[\ln (-\sin x)]' = \frac{1}{-\sin x} \cdot (-\cos x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x.$

Damit gilt für alle $x \neq k\pi$

$$[\ln |\sin x|]' = \cot x.$$

Dieses Ergebnis kann auch als Integrationsregel interpretiert werden.

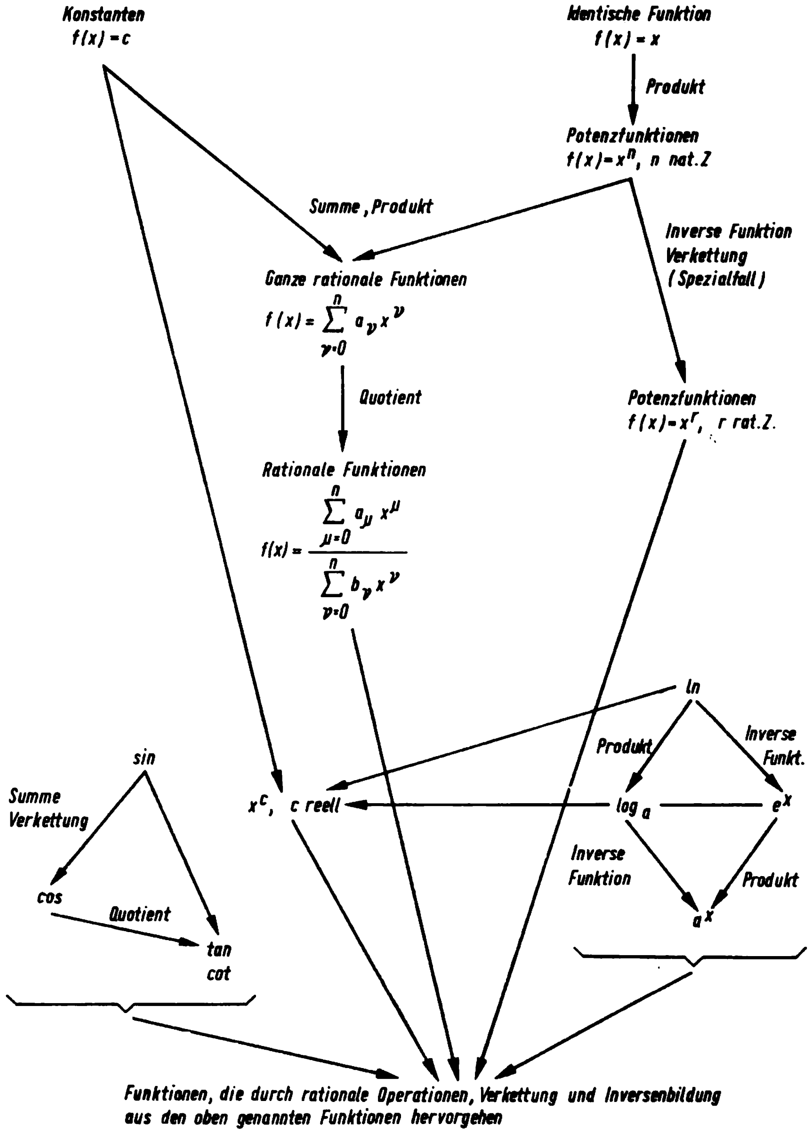
$$\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + c \quad \text{für } k\pi < x < (k+1)\pi$$

Entsprechend könnte man f mit $f(x) = - \ln |\cos x|$ ableiten.

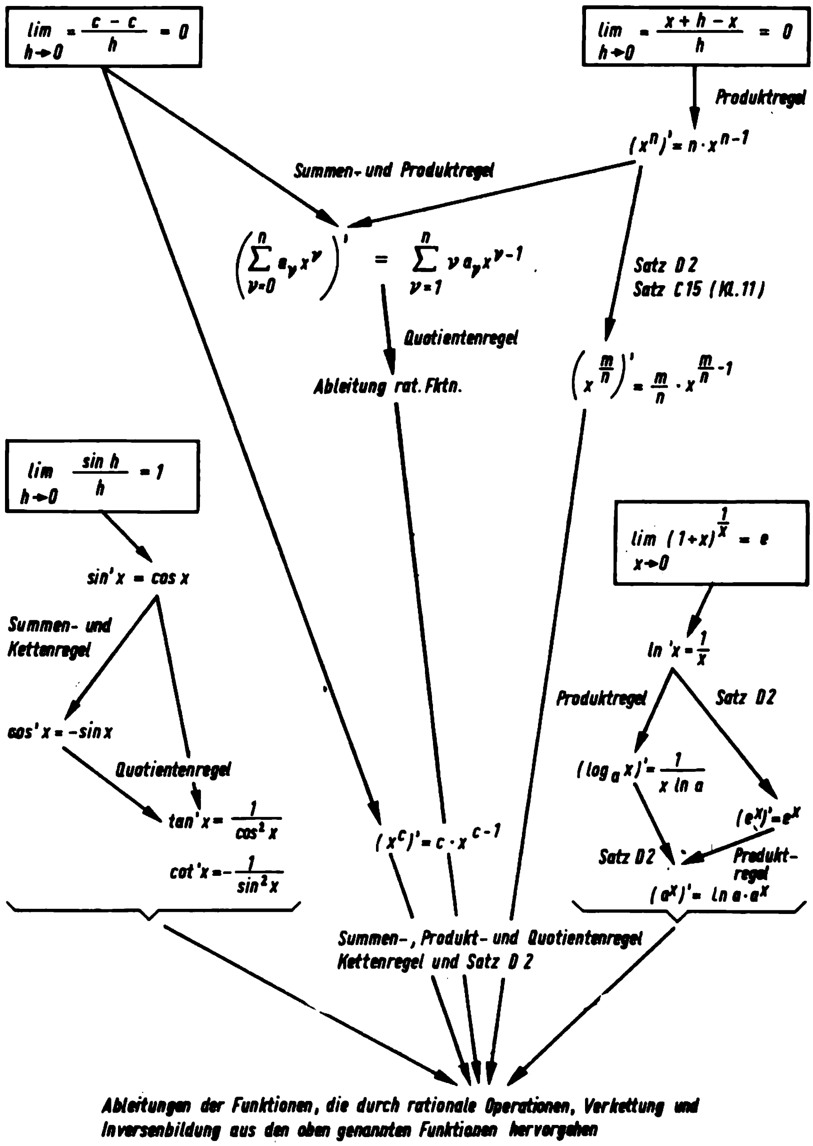
Ohne also das Ziel zu verfolgen, die Funktionen cot bzw. tan zu integrieren, kann die eine oder andere Integrationsregel bei der Übung der Ableitung der Logarithmusfunktion mit herauskommen.

Die Parallelität, die zwischen der Einführung neuer Funktionenklassen einerseits und neuer Differentiationsregeln andererseits besteht, soll nun noch in den folgenden Übersichten überschaubar gemacht werden.
Mit vier konkreten Grenzwerten und wenigen Regeln ist es gelungen, alle im Mathematikunterricht zu behandelnden Funktionen als differenzierbar nachzuweisen und ihre Ableitungen zu berechnen, vgl. die Bilder auf den Seiten 96 und 97.

Bildung neuer Funktionen



Ableitungen der Funktionen



Die Anzahl der Funktionen, die im Mathematikunterricht zu integrieren sind, ist wesentlich kleiner. Es sind die ganzen rationalen Funktionen, Potenzfunktionen mit beliebigen reellen Exponenten, Sinus und Kosinus, Exponentialfunktionen und einige einfache, durch Verkettung gebildete Funktionen als Beispiele für die Substitutionsmethode. Eine solche Vollständigkeit wie bei der Differentiation kann hier nicht erreicht werden. Dafür gibt es ernsthafte Gründe, nämlich daß das Aufsuchen von Stammfunktionen aus den in der Übersicht auf Seite 96 beschriebenen Funktionsklassen hinausführt. Während die Ableitungen immer wieder der beschriebenen Klassen angehören, gibt es sehr einfache Funktionen, die stetig sind, also eine Stammfunktion besitzen, aber die Stammfunktion ist keine der Funktionen, die im Mathematikunterricht behandelt werden (keine elementare Funktion).
Beispiele für solche einfachen, <u>nicht "elementar integrierbaren" Funktionen</u> sind

$$\frac{e^x}{x}\ ;\quad \frac{\sin x}{x}\ ;\quad \frac{1}{\ln x}\ ;\quad \frac{1}{\sqrt{1+x^{4n}}}\ .$$

Die Schüler müssen diejenigen Integrale lösen können, die bei wichtigen Flächeninhalts- und Volumenberechnungen benötigt werden. Weitere Integrale zu berechnen, lohnt nur, wenn damit eine Festigung der Kenntnisse über die wichtigsten Funktionen erreicht wird. Fertigkeiten beim Lösen von Integralen sind wegen der vorhandenen Tabellen, die jeder Praktiker nutzt, nicht erforderlich.
Die folgende Übung z.B. kann sehr nützlich sein.
<u>Ermitteln Sie eine Funktion, deren 1. Ableitung die Funktion ln ist!</u>
(Es geht also um die Lösung des Integrals $\int \ln x \, dx$).

Diese Aufgabe soll durch Probieren gelöst werden, wobei natürlich mit Überlegung die Anzahl der Proben erheblich eingeschränkt werden kann. Man suche zunächst eine Funktion, in deren Ableitung die Funktion ln vorkommt. Das ist sicher der Fall, wenn ln multiplikativ mit einer weiteren differenzierbaren Funktion verknüpft ist, etwa $f(x) \cdot \ln x$. Bei der Ableitung nach der Produktregel bleibt ln in einem Summanden erhalten.

$$[f(x) \cdot \ln x]' = f'(x) \cdot \ln x + f(x) \cdot \frac{1}{x}\ .$$

Wählt man jetzt f(x) so, daß f'(x) = 1 ist, so kommt ln x immerhin schon als Summand in der Ableitung vor.
Man setzt also f(x) = x. Dann ist

$$[x \cdot \ln x]' = \ln x + 1.$$

Man hat nun die Ausgangsfunktion so zu verändern, daß in der Ableitung lediglich (-1) additiv hinzukommt. Fügt man der Ausgangsfunktion (-x) additiv hinzu, so ändert sich die Ableitung in der gewünschten Weise, also ist

$$[x \cdot \ln x - x]' = \ln x.$$

Damit ist eine Funktion gefunden, deren Ableitung die Funktion ln ist.

4.2. Zur Stoffeinheit 4.2. "Kurvendiskussionen, Extremwertaufgaben"

Der Lehrer sei nunmehr auf "Mathematik 11. Klasse, Methodische Hinweise, Zum Lehrplan 1969", Abschnitt 2.2.9., Seite 93, verwiesen. Das dort Gesagte gilt voll inhaltlich auch für die 12. Klasse. Es sollen deshalb hier nur einige Bemerkungen zur Behandlung der näherungsweisen Berechnung von Funktionswerten mit Hilfe des Mittelwertsatzes gemacht werden.

Im Lehrplan heißt es auf Seite 50: "Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist zu wiederholen. In Kurvendiskussionen wird er (ohne weitere theoretische Überlegungen) zum näherungsweisen Berechnen von Funktionswerten - auch Nullstellen - angewendet. Dabei geht es nicht um umfangreiche elementare Rechnungen, sondern um das prinzipielle Verständnis für die Bedeutung der Näherungsrechnung in der Praxis."

Um diese Lehrplanforderung zu erfüllen, sind die folgenden Überlegungen anzustellen. Unter Näherungsrechnung versteht man solche mathematischen Verfahren, die es gestatten, komplizierte Rechenoperationen durch einfachere zu ersetzen. Durch Näherungsverfahren wird einerseits Rechenarbeit eingespart, andererseits gibt es Probleme in der Mathematik, für die numerische Lösungen überhaupt nur durch Näherungsverfahren gewonnen werden können. Dabei ist die Antwort auf Fragen folgender Art von größter Wichtigkeit.
Ist z.B. 3 ein Näherungswert für die Zahl π ? Ist 5 oder 3,3 auch

ein Näherungswert für π ?

Offensichtlich ist diese Fragestellung nicht richtig. Von einem <u>Näherungswert</u> für eine Zahl zu sprechen hat nur dann einen Sinn, wenn zugleich auch eine Abschätzung der Abweichung des Näherungswertes vom richtigen Wert, also eine Abschätzung des Fehlers gemacht werden kann. Solche Näherungsrechnungen mit Fehlerabschätzungen wurden z.B. im Unterricht in Klasse 9 bei der numerischen Berechnung der Zahl $\sqrt{2}$ durchgeführt.

$$1 < \sqrt{2} < 2$$
$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$
$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$

usw.

Wenn eine Funktion f eine monoton wachsende Ableitung f' im Intervall $\langle x_0;\ x_0 + h\rangle$ besitzt, so gilt nach dem Mittelwertsatz

$$f(x_0) + hf'(x_0) < f(x_0 + h) < f(x_0) + hf'(x_0 + h).$$

Diese Formel kann dazu dienen, Näherungswerte für $f(x_0+h)$ zu berechnen, vorausgesetzt, daß $f(x_0)$, $f'(x_0)$ und $f'(x_0+h)$ bekannt sind.

Der Funktionswert an der Stelle $(x_0 + h)$ ist also nur dann näherungsweise zu berechnen, wenn die Ableitung an der Stelle (x_0+h) bekannt ist. Jedoch ist bei den meisten Funktionen die Ableitung eine Funktion an einer Stelle a nicht leichter zu berechnen als der Funktionswert an der Stelle a.

Als Beispiel sei $\sqrt[3]{68}$ betrachtet.

Es ist $\sqrt[3]{68} = \sqrt[3]{64 + 4} = 4\sqrt[3]{1 + \frac{1}{16}}$.

Für die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ist $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Also ist, da die Ableitung monoton fallend ist,

$$1 + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+\frac{1}{16})^2}} < \sqrt[3]{1 + \frac{1}{16}} < 1 + \frac{1}{16 \cdot 3\sqrt[3]{1^2}},$$

das heißt,

$$1 + \frac{1}{48} \cdot \frac{}{\sqrt[3]{(1 + \frac{1}{16})^2}} < \sqrt[3]{1 + \frac{1}{16}} < 1 + \frac{1}{48}.$$

Die linke Seite der Ungleichung enthält nun die dritte Wurzel

$$\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{16}\right)^2} ,$$

die man ebenso wenig berechnen kann wie $\sqrt[3]{68}$.

Man könnte versucht sein, $1 + \frac{1}{48}$ als Näherungswert für $\sqrt[3]{1 + \frac{1}{16}}$ zu nehmen. Jedoch weiß man von der Zahl $1 + \frac{1}{48}$ lediglich, daß sie größer als $\sqrt[3]{1 + \frac{1}{16}}$ ist. Damit man angeben könnte, um wieviel $1 + \frac{1}{48}$ höchstens größer ist als $\sqrt[3]{1 + \frac{1}{16}}$, wäre die linke Seite der Ungleichung auszurechnen.

Ein wesentliches Element der Näherungsrechnung ist es also, daß man stets in der Lage sein muß, den Fehler nach oben abzuschätzen. Man sollte deshalb an dieser Stelle solche Übungsbeispiele auswählen, bei denen der Fehler abgeschätzt werden kann, d.h. in unserem speziellen Falle, daß die Ableitung an der Stelle $(x_0 + h)$ berechnet werden kann. Da bietet sich die Berechnung gewisser Logarithmen an (z.B.: ln 1,01; ln 1,02; ...; ln 1,2), da die Ableitung $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ eine sehr einfach zu berechnende Funktion ist.

Ist e^{x_0} bekannt, so findet man auch e^{x_0+h} in gewissen Grenzen, denn es ist nach dem Mittelwertsatz unter Verwendung der Tatsache, daß e^x monoton wachsend ist,

$$e^{x_0} + h \cdot e^{x_0} < e^{x_0 + h} < e^{x_0} + h\, e^{x_0 + h} .$$

Die linke Seite der Doppelungleichung kann offensichtlich berechnet werden. Aus der rechten Ungleichung erhält man

$$e^{x_0+h}\,(1-h) < e^{x_0} ,$$

also

$$e^{x_0+h} < \frac{e^{x_0}}{1-h} .$$

Im Tafelwerk findet man auf den Seiten 28 und 29 für gewisse Zahlen x die Funktionswerte e^x. Für weitere x kann man nun mit der oben beschriebenen Methode Näherungswerte für e^x berechnen, z.B. für $x = 4,61$.

Dann ist

$$e^{4,6} + 0,01 \cdot e^{4,6} < e^{4,61} < \frac{e^{4,6}}{1 - 0,01} .$$

Unter Verwendung des Tafelwertes $e^{4,6} = 99,484$ findet man

$100,47 < e^{4,61} < 100,49$.

(Dabei wurde die links stehende Zahl ab-, die rechtsstehende aufgerundet.)

Setzt man $e^{4,61} \approx 100,48$, so ist der Fehler des Näherungswertes sicherlich kleiner als 0,01.

Insbesondere soll nun der Mittelwertsatz auch zur näherungsweisen Berechnung von Nullstellen herangezogen werden (ohne weitere theoretische Überlegungen). Diese Lehrplanforderung kann durch die Behandlung der Regula falsi oder der Newtonschen Tangentenmethode an Beispielen erfüllt werden.

Im Lehrbuch wird die Newtonsche Tangentenmethode gewählt, um die Nullstellen der Ableitung der Funktion $y = x^2 + e^{2x}$ zu ermitteln. Es wird dabei keine Theorie des Newtonschen Verfahrens entwickelt, sondern lediglich ein Beispiel nach diesem Verfahren bearbeitet. Für weitere Beispiele, die nach dem Muster aus dem Lehrbuch behandelt werden sollen, soll hier noch einmal mitgeteilt werden, unter welchen Voraussetzungen (vgl. [19], Bd. I, Seiten 303 bis 308) dieses Verfahren gegen die gesuchte Nullstelle konvergiert.

1. f hat stetige Ableitungen f' und f'' in $\langle a;b \rangle$.
2. $f(a) \cdot f(b) < 0$, d.h., $f(a)$ und $f(b)$ haben verschiedene Vorzeichen.
3. $f'(x)$ und $f''(x)$ sind für alle $x \in \langle a;b \rangle$ verschieden von Null.
4. Soll a die erste Näherung der Nullstelle sein, so konvergiert das Verfahren, wenn $f(a)$ das gleiche Vorzeichen wie $f''(x)$ im Intervall $\langle a;b \rangle$ hat.
   Soll b die erste Näherung der Nullstelle sein, so konvergiert das Verfahren, wenn $f(b)$ das gleiche Vorzeichen wie $f''(x)$ im Intervall $\langle a;b \rangle$ hat.

Das folgende weitere Beispiel erfüllt alle Voraussetzungen.

Ermitteln Sie alle Lösungen der Gleichung $x \cdot \lg x = 1$; vgl. [19], Bd. I, Seite 310 !

Zu dieser Aufgabe sollte der Lehrer einige Lösungshinweise geben.

Man kann an die Aufgabe so herangehen, daß man die Funktion

$$f(x) = x \cdot \lg x - 1$$

diskutiert. Man sucht die Nullstellen der Funktion f.
Wegen

$$f'(x) = \lg x + \lg e$$

und der Monotonie der Funktion lg hat f'(x) nur eine Nullstelle, nämlich $x = \frac{1}{e}$.

Nun ist $f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e} \cdot \lg(\frac{1}{e}) - 1$, also $f(\frac{1}{e}) < 0$. Weiter ist

$$f(3) = 3 \cdot \lg 3 - 1$$
$$= 3 \cdot 0{,}4771 - 1$$
$$f(3) = 0{,}4313 > 0.$$

Da $f'(x) > 0$ für $x > \frac{1}{e}$, ist f für $x > \frac{1}{e}$ monoton wachsend, also existiert für $x > \frac{1}{e}$ genau eine Nullstelle.

Für alle x mit $0 < x < \frac{1}{e}$ ist aber $x \cdot \lg x - 1$ stets negativ.

Damit gibt es genau eine Nullstelle von f, die nun mit Hilfe des Mittelwertsatzes (Newtonsches Verfahren) genauer ermittelt werden kann. Der Fehler wird mit Hilfe des Mittelwertsatzes nach oben abgeschätzt.

Ein weiteres Beispiel ist die ganze rationale Funktion f mit

$$f(x) = x^3 + 2x + 5.$$

Wegen $f(-2) = -7$ und $f(-1) = 2$ liegt eine Nullstelle sicherlich im Intervall $\langle -2;-1 \rangle$. Da aber $f'(x) = 3x^2 + 2$, also $f'(x) > 0$ für alle x gilt, hat f nur eine Nullstelle. Die Funktion genügt den auf Seite 102 angegebenen hinreichenden Voraussetzungen für die Konvergenz des NEWTONschen Verfahrens, wenn man als Ausgangswert $x_0 = -2$ wählt.

Bereits nach dem dritten Schritt erhält man als Näherung für die Nullstelle $x_3 = -1{,}33649$ mit folgenden Fehlergrenzen (x^* sei die Nullstelle):

$$-1{,}33649 < x^* < -1{,}33646.$$

Die im Aufgabenteil d des Lehrbuches zu den Stoffeinheiten 4.2. "Kurvendiskussionen; Extremwertaufgaben" und 4.3. "Flächen- und Körperberechnungen" angegebenen Aufgaben bieten dem Lehrer eine Reihe von Möglichkeiten, echte Bezüge zwischen Mathematik und Gesellschaft herzustellen. So müssen die Schüler z.B. erkennen, wie die Mathematik immer mehr zur Produktivkraft wird. Anknüpfungspunkte bieten dazu die Aufgaben zur näherungsweisen Berechnung von Funktionswerten sowie z.B. einige Extremwertaufgaben. Ausgehend von solchen Aufgaben ist es angebracht, z.B. den engen Zusammenhang zwischen der gesamtgesellschaftlichen Entwicklung und der Entwicklung der Mathematik den Schülern vom Standpunkt der marxistisch-leninistischen Theorie aus zu erläutern.

Im Zusammenhang mit der näherungsweisen Berechnung von Nullstellen ergibt sich die Möglichkeit, die Schüler auf Entwicklungsprozesse der Mathematik, die mit der Entwicklung der Produktivkräfte eng verknüpft sind, vertraut zu machen. Durch die Entwicklung der elektronischen Rechenanlagen erlangen die Approximationsverfahren enorme Bedeutung, da auch sehr langsam konvergierende Verfahren, die eine große Anzahl von Rechenschritten erfordern, durch schnelle Rechenanlagen bewältigt werden. In der DDR wird in Zusammenarbeit besonders mit der Sowjetunion ein System von elektronischen Rechenanlagen aufgebaut.

4.3. Zur Stoffeinheit 4.3. "Flächen- und Körperberechnungen"

Für die Flächenberechnungen gilt ebenfalls das schon in den "Methodischen Hinweisen für Klasse 11" Gesagte. Da der Flächeninhalt als eine Ableitung der ebenen Flächen in die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen anzusehen ist, also die Flächen ohne Orientierung betrachtet werden, kann der Inhalt einer Fläche nicht negativ sein.
Die in Klasse 11 erworbenen Kenntnisse bezüglich der Anwendung der Integralrechnung zur Flächenberechnung werden nun auch auf die Funktionen ausgedehnt, die in der Stoffeinheit 4.1. integriert wurden.
Diese Stoffeinheit gestattet erneut vielfältige Wiederholungen, nicht nur die im Lehrplan geforderte Wiederholung der Flächenberechnung mit Hilfe des bestimmten Integrals. Außer der Wiederholung der Integration des Sinus, des Kosinus, der Wurzel- und Exponentialfunktionen können nun auch einige Kenntnisse aus der analytischen Geometrie in die Lösungen der Übungsaufgaben einfließen.

Z.B. kann man Schnittpunkte von ebenen Kurven, Tangenten usw. ermitteln lassen, die dann zur Flächeninhaltsberechnung weiter verwendet werden.

Dadurch, daß jetzt das Integral $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$ mit Hilfe der Substitutionsmethode gelöst werden kann, wird die Formel für den Flächeninhalt des Kreises

$$A = \pi r^2$$

beweisbar. Bei dieser Gelegenheit sollte man die Schüler noch einmal über den wahren Charakter der Zahl π unterrichten.
In Klasse 7 wird die Zahl π als der für alle Kreise konstante Quotient $\frac{u}{d}$ eingeführt, wobei u der Umfang des Kreises und d der Durchmesser des Kreises ist. Damit ist die Zahl π fest an den Kreis geknüpft. Durch die Einführung der Winkelfunktionen am Einheitskreis wird die Zahl π für die Winkelfunktionen bedeutungsvoll. Bei dem oben genannten Integral kommt die Zahl π durch die Substitution $x = \sin t$ herein. Der Definition der Zahl π kommt man also bei dem Beweis der Formel für den Flächeninhalt des Kreises keinen Schritt näher.

Eine gewisse Abrundung erfährt das Gebiet der Inhaltsberechnungen, das schon in den unteren Klassenstufen beginnt und sich dann durch alle folgenden hindurchzieht, durch die Herleitung einiger wichtiger Volumenformeln.
Nachdem schon in Klasse 11 der Begriff des Flächeninhalts für gewisse krummlinig begrenzte ebene Flächen mit Hilfe der Integralrechnung definiert wurde (vgl. Lehrbuch Kl. 11, Ausgabe 1969, Definition D 2), sind nun die bereitgestellten Kenntnisse der Integralrechnung ausreichend dafür, um für eine bestimmte Klasse von Körpern ein Volumen zu definieren und unter Verwendung der bisher behandelten Integrale zu berechnen.

Ist die Querschnittsfläche eines Körpers als stetige Funktion der Höhe gegeben, so wird das Volumen des Körpers definiert als

$$\int_0^h A(x)\, dx ,$$

wobei h die Gesamthöhe des Körpers und $A(x)$ der Inhalt der Querschnittsfläche des Körpers bei der Höhe x ist.
Warum man das Volumen eines Körpers gerade so und nicht anders definiert, bedarf natürlich einer Begründung. Diese Begründung wird im Lehrbuch dadurch gegeben, daß der Schüler, ausgehend von der Ausschöpfung des Körpers durch gerade Zylinder, über einen

Grenzprozeß auf dieses Integral geführt wird. Dabei wird das Volumen von geraden Zylindern als bekannt vorausgesetzt. Zweifelsohne wird dadurch die Analogie zur Definition des Flächeninhalts in Klasse 11 eingeengt, denn dort wurde lediglich der Flächeninhalt von Rechtecken als bekannt vorausgesetzt. Es ist jedoch offensichtlich, daß die für die geraden Zylinder verwendete Volumenformel $A \cdot h$ (A - Inhalt der Grundfläche, h - Höhe) eine Fortsetzung der Volumenberechnung für Quader darstellt, so daß man den Schülern diesen Sprung zumuten darf.
Indem man sich nicht nur auf Rotationskörper beschränkt, sondern die schon weiter oben erwähnte allgemeinere Klasse von Körpern betrachtet, wird die Volumenformel für die Pyramide beweisbar, und insbesondere erhält man den Satz des Cavalieri.
Gilt nämlich für zwei Körper von gleicher Höhe h, daß die Inhalte ihrer Querschnittsflächen $A_1(x)$ und $A_2(x)$ in jeder Höhe x gleich sind, so haben sie auch gleiches Volumen.

Wegen $A_1(x) = A_2(x)$ für alle $x \in \langle 0,h \rangle$ gilt (unter der Voraussetzung, daß A_1 und A_2 stetige Funktionen sind)

$$\int_0^h A_1(x)\,dx = \int_0^h A_2(x)\,dx.$$

Es ist an dieser Stelle angebracht, den Schülern ins Gedächtnis zurückzurufen, wo dieser bisher unbewiesene Satz schon verwendet wurde. Die größere Zahl der Anwendungsbeispiele sollte sich auf Rotationskörper beziehen, die durch Rotation des Bildes einer stetigen Funktion f in einem Intervall $\langle a;b \rangle$ um die x-Achse oder y-Achse entstehen.

5. Literaturverzeichnis

5.1. Hinweise auf Veröffentlichungen der Regierung und des Ministeriums für Volksbildung sowie der Akademie der pädagogischen Wissenschaften der Deutschen Demokratischen Republik

1 Zur Verbesserung und weiteren Entwicklung des Mathematikunterrichts in den allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen der DDR. Beschluß des Politbüros des ZK der SED und des Ministerrates der DDR vom 17. Dezember 1962.

2 Gesetz über das einheitliche sozialistische Bildungssystem vom 25. Februar 1965.

3 Verordnung zur Sicherung einer festen Ordnung an den allgemeinbildenden Schulen - Schulordnung - vom 20. Oktober 1967.

4 AUTORENKOLLEKTIV: Allgemeinbildung, Lehrplanwerk, Unterricht. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1972

5 Lehrpläne, Klasse 1 (Best.-Nr. 20 30 11), Teil: Mathematik. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1967

6 Lehrpläne, Klasse 2 (Best.-Nr 20 30 12), Teil: Mathematik. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1968

7 Lehrpläne, Klasse 3 (Best.-Nr. 20 30 13), Teil: Mathematik. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1969

8 Lehrplan, Mathematik, Klasse 4 (Best.-Nr. 00 30 06). Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1970

- desgl., Klassen 5 bis 8 (Best.-Nr. 00 30 17). Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1971

9 Lehrplan für Mathematik, Klassen 9 und 10, (Best.-Nr. 00 30 07) Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1969 (Einführungstermine: Klasse 9: 1. 9. 1970; Klasse 10: 1. 9. 1971).

10 Lehrplan für Mathematik, Erweiterte Oberschule, Klassen 11 und 12, (Best.-Nr. 00 30 02). Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1968 (Einführungstermine: Klasse 11: 1. 9. 1969; Klasse 12: 1. 9. 1970).

5.2. Hinweise auf Fachbücher und Nachschlagewerke

11 AUTORENKOLLEKTIV: Weltanschauliche-philosophische Bildung und Erziehung im mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (Beiträge) (Bestell-Nr. 20 25 93). Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1972

12 AUTORENKOLLEKTIV: Enzyklopädie der Elementarmathematik (3 Bände). VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1954. (Zu Stoffgebiet 4.)
- dsgl., Band III (Analysis), 1958. (Zu Stoffgebiet 3.)
- dsgl., Band IV (Geometrie). (Zu Stoffgebiet 1. die Seiten 550 bis 566; zu Stoffgebiet 2. die Seiten 573 ff)

13 AUTORENKOLLEKTIV: Kleine Enzyklopädie - Mathematik. Verlag Enzyklopädie, Leipzig 1967. (Zu Stoffgebiet 1. die Seiten 360 bis 386; zu Stoffgebiet 2. die Seiten 208 bis 215; zu den Stoffgebieten 3. und 4. die Seiten 387 bis 478)

14 AUTORENKOLLEKTIV: Zur Methodik der Vektorrechnung in der erweiterten Oberschule. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1961. (Zu Stoffgebiet 1.)

15 BOSECK, H.: Einführung in die Theorie der linearen Vektorräume. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1965. (Zu Stoffgebiet 1.)

16 BREHMER, S. und BELKNER, H.: Einführung in die analytische Geometrie und lineare Algebra. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1966. (Zu Stoffgebiet 1.)

17 BUHR, M. (Herausgeber): Philosophisches Wörterbuch. Bibliographisches Institut, Leipzig 1966.

18 FÉLIX, L.: Elementarmathematik in moderner Darstellung. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1966. (Zu Stoffgebiet 2. die Seiten 502 bis 522)

19 FICHTENHOLZ, G. M.: Differential- und Integralrechnung (2 Bände). VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1964. (Zu den Stoffgebieten 3. und 4.)

20 KRAMER, W.: Darstellende Geometrie I. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959. (Zu Stoffgebiet 2. die Seiten 131 ff)

21 v. MANGOLDT-KNOPP: Einführung in die höhere Mathematik (3 Bände). S. Hirzel Verlag, Leipzig 1955. (Zu den Stoffgebieten 3. und 4. die Bände II und III)

22 MARKUSCHEWITSCH, A. I.: Bemerkenswerte Kurven. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1954. (Zu Stoffgebiet 2.)

23 PERRON, O.: Irrationalzahlen, Kapitel III. Verlag Walter de Gruyter und Co, Berlin 1947.

24 ENGEL, W. und PIRL, U.: Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band I. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1972.

25 REICHARDT, H.: Vorlesungen über Vektor- und Tensorrechnung. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1957. (Zu Stoffgebiet 1. die Seiten 1 bis 20 sowie 49 bis 76)

26 SCHRÖDER, K. (Herausgeber): Mathematik für die Praxis (3 Bände). VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1964. (Zu Stoffgebiet 1. Band I, Seiten 550 bis 566; zu den Stoffgebieten 3. und 4. Band I, Seiten 325 bis 374, und Band II)

27 SMIRNOW: Lehrgang der höheren Mathematik, Teil 1. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956.

5.3. Hinweise auf Artikel in der Zeitschrift Pädagogik

28 MADER, O.: Zur logischen Gliederung des Bildungs- und Erziehungsziels. Jahrgang 21 (1966), Heft 3, S. 219.

29 MEIER, A.: Modell des Unterrichts mit hochschulähnlichen Lehr- und Lernformen in den oberen Klassen. Jahrgang 20 (1965), Heft 12, S. 1113.

30 ROSSA, E.: Zum Systemcharakter des Inhalts der mathematisch-naturwissenschaftlichen Allgemeinbildung nach den neuen Lehrplänen. Jahrgang 24 (1969), Heft 2.

31 Zu hochschulgemäßen Formen und Methoden der Wissensaneignung und der Fähigkeitsentwicklung (Schlußbemerkung). Jahrgang 22 (1967), Heft 1, S. 51.

5.4. Hinweise auf Artikel in der Zeitschrift "Mathematik in der Schule"

32 BOCK, H. und WALSCH, W.: Können unsere Schüler logisch denken? Jahrgang 3 (1965), Heft 10, S. 720.

33 BREHMER, S.: Was sind linienflüchtige Vektoren? Jahrgang 6 (1968), Heft 5, S. 329.

34 CZAJKOWSKYJ, N.: Eine interessante Wurzelgleichung. Jahrgang 6 (1968), Heft 5, S. 373.

35 FANGHÄNEL, G.: Einige Gedanken zur Herleitung von Differentiationsregeln. Jahrgang 3 (1965), Heft 6, S. 449.

36 GÖRKE, L.: Heben Quadrieren und Quadratwurzelziehen einander auf? Jahrgang 2 (1964), Heft 1, S. 26.

37 GOTTESMANN, S.: Diskussion linearer Gleichungen mit einer Unbekannten. Jahrgang 6 (1968), Heft 11, Seite 810.

38 HOMAGK, F.: Das natürliche Schließen in formalen mathematischen Theorien. Jahrgang 6 (1968), Heft 11, S. 814.

39 HOPFE, A.: Zu einigen Problemen der Realisierung des Mathematikbeschlusses. Jahrgang 4 (1966), Heft 3, S. 163.

40 KLÖTZEK, B.: Zur Begründung des Vektorbegriffs in der Geometrie. Jahrgang 5 (1967), Heft 5, S. 372.

41 KRÜGER, G. und UHLICH, D.: Die Neugestaltung der Erweiterten Oberschule - ein bedeutender Schritt zur Verwirklichung des Gesetzes über das einheitliche sozialistische Bildungssystem Jahrgang 5 (1967), Heft 2, S. 81.

42 LORENZ, G.: Ermittlung eines Bildungsgesetzes für endliche Zahlenfolgen. Jahrgang 4 (1966), Heft 9, S. 666.

43 MAHN, G.: Methoden und Übungen von Beweisführungen bei der Einführung der Differentialrechnung. Jahrgang 4 (1966), 1. Teil: Heft 3, S. 194; 2. Teil: Heft 4, S. 301.

44 MILLER, M.: Zur Geschichte der Extremalaufgaben. Jahrgang 4 (1966), 1. Teil: Heft 6, S. 463; 2. Teil: Heft 10, S. 777.

45 RAUTENBERG, W.: Erläuterung der Begriffe "notwendig" und "hinreichend" an einem einfachen graphentheoretischen Problem. Jahrgang 4 (1966), Heft 7, S. 492.

46 STAMFORT, O.: Zur Geschichte der Logarithmen. Jahrgang 6 (1968), Heft 11, S. 810.

47 VOIGT, H.: Probleme der Bezeichnung und Behandlung von Vektoren. Jahrgang 5 (1967), Heft 5. S. 380.

48 FREITAG, M.: Die Gestaltung einer Übungsstunde in Klasse 12 zum Thema "Anwenden des Skalar- und des Vektorproduktes bei Beweisführungen und beim Lösen physikalischer Probleme". Jahrgang 9 (1971), Heft 6, Seite 388.

49 GEUPEL, D.: Vorschlag für einen Stoffverteilungsplan Mathematik, Klasse 12. Jahrgang 10 (1972), Heft 7, Seite 411.

50 MAHN, G.: Behandlung einer wichtigen Brennpunkteigenschaft der Kegelschnitte im Unterricht der Klasse 12. Jahrgang 11 (1973), Heft 8/9, Seite 510.

51 RITTER, K.: Graphische Übersicht zu einem Vorschlag für die Jahresstoffverteilung Mathematik, Klasse 12. Jahrgang 10 (1972), Heft 7, Seite 409.

52 SCHELER, K.: Vorschlag für einige Arbeitsblätter zum Stoffgebiet "2. Kegelschnitte", Klasse 12. Jahrgang 9 (1971), Heft 10, Seite 644.

Kurzwort: 002152 METH. HINW. MATHE 12
EVP: 3,50